

Статистический анализ данных. Спецкурс.

Лекция 1. Базовые понятия теории вероятностей.

Ботанический сад-институт ДВО РАН

Кислов Д.Е.
11 декабря 2016 г.

- формирование общих представлений о методах теории вероятностей и математической статистики;
- знакомство с математическими методами статистики;
- изучение многофункциональных программных сред для решения практических задач;

- ◆ Формирование понятия случайного явления;
 - Боэций С. (Рим, ок. 520 г):
"случайность — не подлинное явление, а результат скрещения независимых друг от друга процессов, каждый из которых имеет вполне определенную причину";
- ◆ Предпосылки возникновения теории вероятностей (X-XI век);
- ◆ Попытки систематического изложения теории (Д. Кардано (1501-1576), Н. Тарталья (1499–1557));

Важные исторические даты

- ◆ Х. Гюйгенс (1629–1695): Первая книга по теории вероятностей – "О расчетах в азартной игре". Введено понятие среднего значения — математического ожидания;
- ◆ Зарождение статистики: Джон Граунт (1620–1674); Вильям Петти (1623–1687). "Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности"(Граунт, 1662), "Политическая арифметика"(Петти, 1676);



Рис.: Х. Гюйгенс

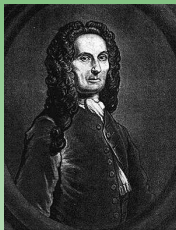


Рис.: А. Муавр



Рис.: Я. Бернулли

Важные исторические даты

- ◆ И. Ньютон (1642–1727) — Я. Бернулли (1654–1705); "Искусство предположений" (Бернулли, 1713);
- ◆ Абрахам де Муавр (1667–1754): "Учение о случаях" (Муавр, 1733); П.С. Лаплас (1749 – 1827);
- ◆ Т. Байес (1702–1761) "Формула Байеса" (Байес, 1763);
- ◆ Теория ошибок (конец XVIII) — К.Ф. Гаусс (1777–1855);
- ◆ А.Н. Колмогоров (1903–1987) — Аксиоматизация теории вероятностей (Колмогоров, 1933);
- ◆ К. Пирсон (1857–1936) — Критерий χ^2 ; Р.А. Фишер (1890–1962) — метод максимального правдоподобия; Е. Нейман (1894–1977) — статистическая проверка гипотез;

Предпосылки теории вероятностей: комбинаторные задачи

Задача 1

Кодовый замок состоит из 10 кнопок, а открывается при одновременном нажатии 2 кнопок. Охарактеризовать численно его надежность.

Задача 2

Какова вероятность из цифр 1, 3, 5, 7, 9 сложить заданное пятизначное число?

Задача 3

В селе 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц (30 дней) ездит в город, выбирая дни поездок по случайным, независимым от других мотивам. Рассчитать минимальную вместительность поезда, обеспечивающую его переполнение не чаще одного раза за 100 дней.

Основания теории вероятностей

Если ν – число осуществлений некоторого события, то $\frac{\nu}{n}$ – его частота реализации (появления).

ОСНОВНОЕ МОДЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Частота появления события при многократном повторении эксперимента должна проявлять устойчивость: осуществляя колебания, она должна стремиться к определенному значению.



Что такое вероятность?

Под термином "вероятность" события будем понимать некоторое число, характеризующее частоту его реализации при многократном повторении эксперимента.

Теория вероятностей (ТВ) и математическая статистика (МС)

Задача ТВ

Построение математических моделей случайных явлений, *проявляющих свойство статистической устойчивости.*

Задача МС

Формирование выводов на основе данных опыта и представлений теории вероятностей.

Задача

Симметричную монету подбросили 100 раз, из которых 42 раза выпала «решка» и 58 — «орел». Построены 2 модели этого явления: 1) $P(\text{«орел»})=1/2$, $P(\text{«решка»})=1/2$; 2) $P(\text{«орел»})=2/3$, $P(\text{«решка»})=1/3$. Какую модель следует выбрать?

Основания теории вероятностей

Таблица: Соответствие вероятностных и теоретико-множественных представлений

Множественное понятие	Понятие теории вероятностей
1. Множество A пусто ($A = \emptyset$).	1. Событие A невозможно.
2. $A \cap B = \emptyset$.	2. Два события несовместны.
3. $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = X$.	3. Событие X состоит в одновременном наступлении событий A_1, A_2, \dots, A_k .
4. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X$.	4. Событие X состоит в наступлении одного из событий A_1, A_2, \dots, A_k .
5. Дополнительное множество к A (\overline{A}).	5. Событие состоит в ненаступлении события A (в этом случае говорят, что наступило противоположное A событие).
6. $B \subseteq A$.	6. Наступление события B влечет наступление события A .
7. $A = \Omega$.	7. Событие A достоверно.

Вероятностная модель явления построена, если:

- Задано множество элементарных исходов эксперимента (Ω) и возможных событий (\mathcal{F});
- Каждому событию $A \in \mathcal{F}$ сопоставляется действительное число $P(A) \in [0, 1]$, именуемое его вероятностью;
- $P(\Omega) = 1$;
- Для любых двух событий A и B , таких что $A \cap B = \emptyset$, выполнено $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

Аксиомы теории вероятностей (А.Н. Колмогоров)

Вероятностная модель явления построена, если:

- Задано множество элементарных исходов эксперимента (Ω) и возможных событий (\mathcal{F});
- Каждому событию $A \in \mathcal{F}$ сопоставляется действительное число $P(A) \in [0, 1]$, именуемое его вероятностью;
- $P(\Omega) = 1$;
- Для любых двух событий A и B , таких что $A \cap B = \emptyset$, выполнено $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

Пример

В эксперименте с подбрасыванием монеты: $\Omega = \{\text{«Орел»}, \text{«Решка»}\}$; В качестве \mathcal{F} можно выбрать $\{\Omega, \text{«Орел»}, \text{«Решка»}, \emptyset\}$, или $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$, и положить: $P(\text{«Орел»}) = p$, $P(\text{«Решка»}) = 1 - p$, $p < 1$.

Задача 4

Эксперимент состоит в n -кратном повторении опыта с двумя исходами. Вероятность «успеха» в опыте равна p , вероятность «неудачи» — q ($p + q = 1$). Определить вероятность k успехов при выполнении эксперимента.

Решение

Рассмотрим событие, состоящее в том, что первые k испытаний окончились «успехом», а остальные $n - k$ — «неудачей». Вероятность такого события — $p^k \cdot q^{n-k}$. Общее число подобных событий в эксперименте, отличающихся порядком «успехов» и «неудач» равно количеству k -элементных подмножеств n -элементного множества, т. е. C_n^k . Следовательно, искомая вероятность определяется выражением: $C_n^k p^k q^{n-k}$. $C_n^k = n! / (k!(n - k)!)$

Задача 5

При посадке тиса приживаемость составляет 10%. Какова вероятность, что из 10 посаженных образцов приживется хотя бы один.

Задача 6

При посадке тиса приживаемость составляет 10%. Какова вероятность, что из 10 посаженных образцов приживется хотя бы один.

Решение

- $(1/10)^{10}$ – не приживется ни один, $1 - (1/10)^{10}$ – приживется хотя бы один.

Задача 7

При посадке тиса приживаемость составляет 10%. Какова вероятность, что из 10 посаженных образцов приживется хотя бы один.

Решение

- $(1/10)^{10}$ – не приживется ни один, $1 - (1/10)^{10}$ – приживется хотябы один.
- $\sum_{k=1}^{10} C_{10}^k (1/10)^k (9/10)^{n-k}$

Задача 8

При посадке тиса приживаемость составляет 10%. Какова вероятность, что из 10 посаженных образцов приживется хотя бы один.

Решение

- $(1/10)^{10}$ – не приживется ни один, $1 - (1/10)^{10}$ – приживется хотя бы один.
- $\sum_{k=1}^{10} C_{10}^k (1/10)^k (9/10)^{n-k}$

Задача 9

При высаживании неприкированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Найдите вероятность того, что из десяти посаженных кустов приживется не менее 7.

Задача 10

Приживаемость саженцев составляет в среднем 30%. Каков должен быть минимальный объём посадок, чтобы можно было гарантировать выживаемость 50 экземпляров с доверительной вероятностью не меньшей 90%?

Задача 11

Приживаемость саженцев составляет в среднем 30%. Каков должен быть минимальный объём посадок, чтобы можно было гарантировать выживаемость 50 экземпляров с доверительной вероятностью не меньшей 90%?

Решение

$$\min_N \sum_{k=50}^N C_n^k 0.3^k 0.7^{n-k} \geq 0.9$$

Задача 12

Приживаемость саженцев составляет в среднем 30%. Каков должен быть минимальный объём посадок, чтобы можно было гарантировать выживаемость 50 экземпляров с доверительной вероятностью не меньшей 90%?

Решение

$$\min_N \sum_{k=50}^N C_n^k 0.3^k 0.7^{n-k} \geq 0.9$$

Решить такую задачу можно численно, используя язык программирования.

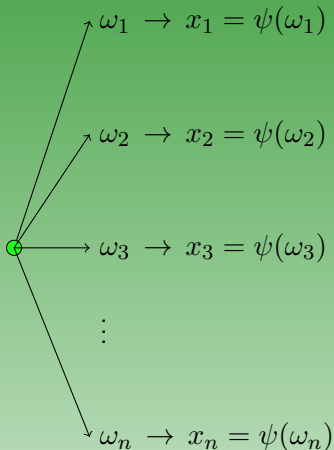
Теорема Муавра–Лапласа

Вероятность того, что число успехов в схеме Бернулли (с вероятностью «успеха» p и вероятностью «неудачи» $q = 1 - p$ находится в интервале $[k_1, k_2]$ равна:

$$P(n; k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

Случайные величины и их распределения

Эксперимент $\omega_i \in \Omega$:



Определение

Если $P(\omega_i) = p_i$ определены, то преобразование ψ совместно с p_i и Ω определяют дискретную случайную величину ξ : $P(\xi = x_i) = p_i$.
Множество $\{(x_i, p_i)\}$ образуют закон распределения случайной величины ξ .

Пример

Количество очков, выпавшее при подбрасывании игральной кости, — дискретная случайная величина.

Функция распределения случайной величины

Определение

Функция $F_{\xi}(x) = P(\xi < x)$, где $x \in \mathbb{R}$, называется функцией распределения случайной величины ξ .

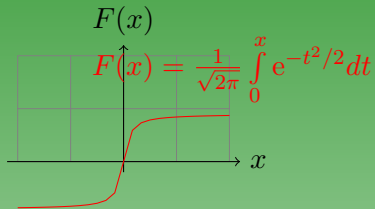
Замечание

Случайная величина называется *распределенной непрерывно*, если соответствующая функция распределения является *непрерывной*.

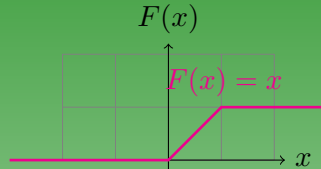
Замечание

Для случайных величин, имеющих дискретное распределение, функция распределения терпит разрывы. Аксиомы теории вероятностей определяют основные свойства функции распределения.

Примеры непрерывных и разрывной функций распределения



Стандартная нормальная функция распределения.



Функция распределения случайной величины равномерно распределенной на интервале $[0, 1]$.

Разрывная функция распределения



Функция распределения случайной величины — числа очков при подбрасывании кубика.

Утверждение

Если $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ , то

- ▶ $F_\xi(x)$ — неубывающая функция;
- ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = F(-\infty) = 0$;
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = F(+\infty) = 1$;
- ▶ $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a), a, b \in \mathbb{R}$.

Плотность распределения случайной величины

Определение

Плотностью распределения ($f_{\xi}(x)$) случайной величины ξ называется производная по x (если таковая существует) от функции распределения $F_{\xi}(x)$:

$$f_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}.$$

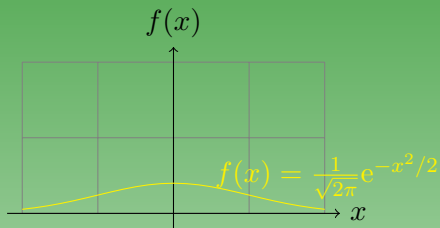
Замечание

Плотность распределения — скорость изменения вероятности события $\{\xi < x\}$, зависящая от x .

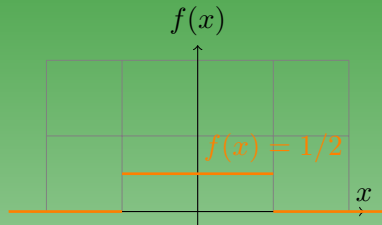
Замечание

Плотность распределения в точке x характеризует вероятность принадлежности случайной величины бесконечно малому интервалу, содержащему x .

Примеры плотностей распределения случайных величин



Плотность стандартного нормального распределения.



Плотность случайной величины ξ , распределенной равномерно на интервале $[-1, 1]$.

Утверждение

Если $f_{\xi}(x)$ плотность распределения случайной величины ξ , то

$$\blacktriangleright F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(\tau) d\tau;$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{\xi}(x) = 0;$$

$$\blacktriangleright \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) = 1;$$

$$\blacktriangleright P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f_{\xi}(x) dx, a, b \in \mathbb{R}.$$

Определение

Дисперсией случайной величины ξ называется число $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$, или в случае дискретного распределения — $D\xi = \sum_i p_i (x_i - \sum_j p_j x_j)^2$; в случае непрерывного распределения с $f_\xi(x)$ — $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_\xi(x) dx$, $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$.

Свойства математического ожидания

- ▶ $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma) = \alpha E\xi_1 + \beta E\xi_2 + \gamma$;
- ▶ $E\xi_1\xi_2 = E\xi_1 E\xi_2$, если ξ_1 и ξ_2 независимы;
- ▶ $|E\xi| \leq E|\xi|$,

где ξ_1, ξ_2, ξ некоторые случайные величины, для которых определено математическое ожидание; α, β, γ — произвольные действительные числа.

Математическое ожидание и дисперсия

Свойства дисперсии

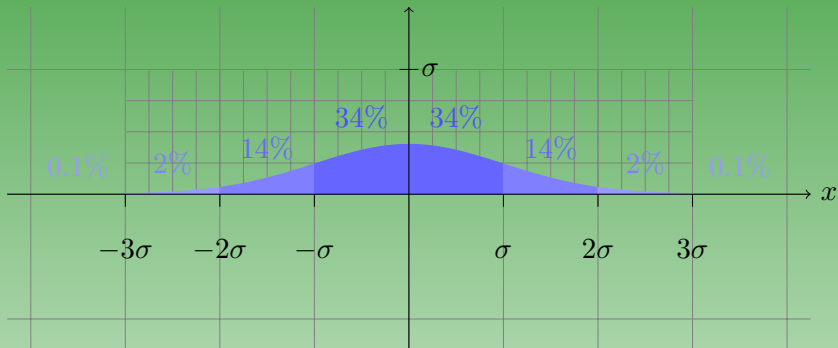
- ▶ $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$, если ξ_1, ξ_2 являются независимыми;
- ▶ $D\alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}; D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi$;

Характеристики некоторых распределений

- $\xi \in U_{[0,1]}$ — равномерное распределение на интервале $[0, 1]$: $E\xi = 1/2, D\xi = 1/12$;
- $\xi \in f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ — нормальное распределение: $E\xi = 0, D\xi = 1$; ($\xi \in \mathcal{N}(0, 1)$, ξ имеет стандартное нормальное распределение);
- $\eta = \sigma\xi + a$, где $a, \sigma \in \mathbb{R}; \xi \in \mathcal{N}(0, 1)$, то η имеет нормальное распределение: $E\xi = a, D\xi = \sigma^2$; ($\xi \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$).

Доверительные интервалы нормального распределения

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$



Несмещенное нормальное распределение с дисперсией σ^2 .

Многомерное нормальное распределение

Определение

Пусть $\Upsilon = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathcal{N}(0, 1)$ – независимы в совокупности случайные величины; тогда $\Xi = A\Upsilon + b$, где $A = A_{n \times n}$, $\dim b = n$, имеет многомерное нормальное распределение.

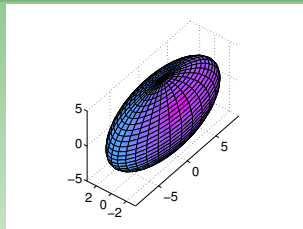
Утверждение

Если матрица A невырождена, то Ξ имеет плотность

$$f_{\Xi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(A^T A)}} e^{-(x-b)^T (A^T A)^{-1} (x-b)/2}.$$

Геометрическая интерпретация

Пример многомерного нормального распределения с диагональной матрицей A ;



Утверждение

Если для случайной величины ξ определена дисперсия, то

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

выполнено для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство

Пусть случайная величина ξ непрерывно распределена и, кроме того, $\xi > 0$. Дадим оценку вероятности $P(\xi \geq \varepsilon)$. Рассмотрим выражение для математического ожидания случайной величины ξ .

$$E\xi = \int_0^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \underbrace{\int_0^{\varepsilon} x f_{\xi}(x) dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \geq \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon),$$

Доказательство

откуда следует, что

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}. \quad (*)$$

Положим $\eta = (\xi - E\xi)^2$, тогда $E\eta = D\xi$ и неравенство Чебышева является следствием доказанного неравенства (*).

Задача 13. (применение неравенства Чебышева)

Требуется оценить число необходимых измерений листовой пластинки, чтобы с заданной точностью охарактеризовать ее среднюю длину. Каждое измерение длины представляет собой $l_i = l + \varepsilon_i$, где l – неизвестное среднее, ε_i – случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ . Сколько измерений необходимо провести, чтобы выполнялись следующие условия по точности:

$$P(|\hat{l} - l| \geq \varepsilon) \leq \gamma,$$

где $\hat{l} = \frac{1}{N} \sum_i l_i$ – оценка среднего, γ и ε – заданные показатели точности.

Утверждение

Если для случайной величины ξ определена дисперсия, то

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

выполнено для любого $\varepsilon > 0$.

Решение.

Пусть $\varepsilon = 0.1$, $\gamma = 0.01$, $\sigma^2 = 0.5$. Из неравенства Чебышева, полагая $\gamma = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}$, получим:

$$\begin{aligned} l_i &= l + \varepsilon_i, \hat{l} = \frac{1}{N} \sum_i l_i \\ P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_i \varepsilon_i\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \leq \gamma \\ n &\geq \frac{\sigma^2}{\gamma\varepsilon^2} = \frac{0.5}{0.01 \cdot 0.01} = 5000 \end{aligned}$$

Утверждение

Если для случайной величины ξ определена дисперсия, то

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

выполнено для любого $\varepsilon > 0$.

Решение.

Пусть $\varepsilon = 0.1$, $\gamma = 0.01$, $\sigma^2 = 0.5$. Из неравенства Чебышева, полагая $\gamma = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}$, получим:

$$\begin{aligned} l_i &= l + \varepsilon_i, \hat{l} = \frac{1}{N} \sum_i l_i \\ P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_i \varepsilon_i\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \leq \gamma \\ n &\geq \frac{\sigma^2}{\gamma\varepsilon^2} = \frac{0.5}{0.01 \cdot 0.01} = 5000 \end{aligned}$$

$n \geq 5000$ – грубая оценка, ее почти всегда можно улучшить

Центральная предельная теорема (Ц.П.Т.)

Утверждение

Пусть $\{\xi_i\}$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $E\xi_i = a$ и

$D\xi_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Если $\zeta_n = \frac{-an + \sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{n}\sigma}$, то

$$P(\zeta_n < x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

равномерно по x при $n \rightarrow \infty$

Задача 14.

Дан набор измерений параметра a : $a_i = a + \xi_i$, $i = 1, n$. Погрешности измерений ξ_i являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими нулевое математическое ожидание и дисперсию σ . В качестве оценки параметра a принимается среднее арифметическое $\{a_i\}$:

$\hat{a} = \frac{\sum_i a_i}{n}$. Сколько измерений необходимо провести, чтобы достичь заданной точности ε с вероятностью выхода за пределы точности γ .

Решение

Неравенство Чебышева

$$P\left(\left|\frac{\sum \xi_i}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \equiv \gamma,$$

$$n \geq \frac{\gamma^{-1}\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

При $\sigma = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.01$: $n \geq 10^6$.

Ц.П.Т.

$$P\left(\left|\frac{\sum \xi_i}{n}\right| < \varepsilon\right) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n}/\sigma} e^{-t^2/2} dt \equiv 1 - \gamma.$$

При тех же условиях: $n \geq 2223$.

Вычислительные среды для анализа данных

- R, <http://r-project.org> + Packages (<https://cran.r-project.org/>)
- Python, <http://python.org>
 - Pandas, <http://pandas.pydata.org>
 - SciPy+NumPy, <http://scipy.org>
 - Matplotlib, <http://matplotlib.org/>
 - Scikit-learn, <http://scikit-learn.org/>
 - ... Packages
- Statistica, <http://statsoft.com>
- MatLab, <http://www.mathworks.org>

Интерактивные среды

RStudio Server

www.rstudio.com

Jupyter Notebook

ipython.org/notebook.html

R:

- С.Э Мاستицкий, В.К. Шитиков Статстический анализ и визуализация данных с помощью R, 2014.
- <http://www.statmethods.net/>

Python:

- У. Маккинни Python и анализ данных, 2015
- М. Лутц Программирование на Python, 2011
- Т. Сегран Програмируем коллективный разум, 2008
- <http://python.org>