Статистический анализ данных. Спецкурс.

Лекция 6. Методы многомерной статистики

Ботанический сад-институт ДВО РАН

Кислов Д.Е.

11 декабря 2016 г.

Структура лекции

- Принцип наименьших квадратов;

Структура лекции

- Принцип наименьших квадратов;
- Метод главных компонент;

Структура лекции

- Принцип наименьших квадратов;
- Метод главных компонент;
- Линейный дискриминантный анализ;

Структура лекции

- Принцип наименьших квадратов;
- Метод главных компонент;
- Линейный дискриминантный анализ;
- Классификация по прецедентам;

Структура лекции

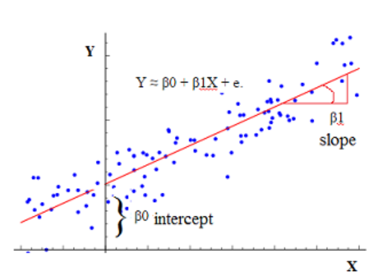
- Принцип наименьших квадратов;
- Метод главных компонент;
- Линейный дискриминантный анализ;
- Классификация по прецедентам;
- Оценка качества классификации, отбор признаков.

Принцип наименьших квадратов

Предложен К.Ф. Гауссом (1795) для решения уравнений:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$
$$a_3 x + b_3 y = c_3$$

Задача регрессии

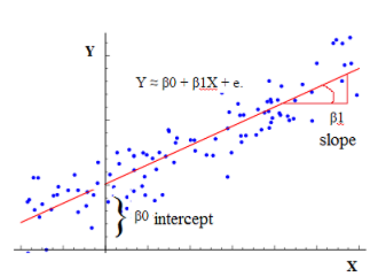


Принцип наименьших квадратов

Предложен К.Ф. Гауссом (1795) для решения уравнений:

$$a_1x + b_1y = c_1 + \varepsilon_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2 + \varepsilon_2$$
$$a_3x + b_3y = c_3 + \varepsilon_3$$
$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \to \min$$

Задача регрессии



Применение

- Решение переопределенных/недоопределенных систем уравнений;

Принцип наименьших квадратов

Применение

- Решение переопределенных/недоопределенных систем уравнений;
- Статистическая оценка параметров;

Принцип наименьших квадратов

Применение

- Решение переопределенных/недоопределенных систем уравнений;
- Статистическая оценка параметров;
- Решение задач снижения размерности;

Принцип наименьших квадратов

Применение

- Решение переопределенных/недоопределенных систем уравнений;
- Статистическая оценка параметров;
- Решение задач снижения размерности;
- Построение регрессионных моделей;

Применение

- Решение переопределенных/недоопределенных систем уравнений;
- Статистическая оценка параметров;
- Решение задач снижения размерности;
- Построение регрессионных моделей;
- ... в общем случае — любые другие задачи, связанные с минимизацией ошибок/погрешностей.

Принцип наименьших квадратов

Задача регрессии

Имеется набор измерений y_j ($j = \overline{1, \ldots, N}$, предположительно зависящий от параметров x_{ij} ($i = \overline{1, \ldots, M}$). Необходимо построить какую-либо модель этой зависимости, исходя из набора эмпирических данных.

Принцип наименьших квадратов

Задача регрессии

Имеется набор измерений y_j $(j = \overline{1, \ldots, N}$, предположительно зависящий от параметров x_{ij} $(i = \overline{1, \ldots, M})$. Необходимо построить какую-либо модель этой зависимости, исходя из набора эмпирических данных.

Положим,что зависимость между y_i и x_{ij} линейная

Принцип наименьших квадратов

Задача регрессии

Имеется набор измерений y_j $(j = \overline{1, \ldots, N}$, предположительно зависящий от параметров x_{ij} $(i = \overline{1, \ldots, M})$. Необходимо построить какую-либо модель этой зависимости, исходя из набора эмпирических данных.

Положим,что зависимость между y_i и x_{ij} линейная

$$
\begin{aligned}
&y_1 = a_0 + a_1 \cdot x_{11} + a_2 \cdot x_{21} + \ldots + a_M \cdot x_{M1} \\
&y_2 = a_0 + a_1 \cdot x_{12} + a_2 \cdot x_{22} + \ldots + a_M \cdot x_{M2} \\
&\vdots \\
&y_N = a_0 + a_1 \cdot x_{1N} + a_2 \cdot x_{2N} + \ldots + a_M \cdot x_{MN}
\end{aligned}
$$

Принцип наименьших квадратов

Задача регрессии

Имеется набор измерений y_j ($j = \overline{1, \ldots, N}$, предположительно зависящий от параметров x_{ij} ($i = \overline{1, \ldots, M}$). Необходимо построить какую-либо модель этой зависимости, исходя из набора эмпирических данных.

Положим,что зависимость между y_i и x_{ij} линейная

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 \cdot x_{11} + a_2 \cdot x_{21} + \ldots + a_M \cdot x_{M1} + \varepsilon_1 \\ y_2 &= a_0 + a_1 \cdot x_{12} + a_2 \cdot x_{22} + \ldots + a_M \cdot x_{M2} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_N &= a_0 + a_1 \cdot x_{1N} + a_2 \cdot x_{2N} + \ldots + a_M \cdot x_{MN} + \varepsilon_N \end{aligned}$$

$$\sum_i \varepsilon_i^2 \to \min$$

Принцип наименьших квадратов

Решение

$$Y = X \cdot a + \varepsilon, a = (a_0, a_1, \ldots, a_M),$$
$$a = (X^T X)^{-1} XY, \text{ или } a = X^+ Y$$

Нелинейный МНК

$$y_j = F(a_i, x_{ij}) + \varepsilon_j$$

Принцип наименьших квадратов

Решение

$$Y = X \cdot a + \varepsilon, a = (a_0, a_1, \ldots, a_M),$$
$$a = (X^T X)^{-1} XY, \text{или } a = X^+ Y$$

Нелинейный МНК

$$y_j = F(a_i, x_{ij}) + \varepsilon_j$$

Решение

Как правило – численные методы: нелинейные методы оптимизации, проблемно-ориентированные подходы,
А также . . . Существуют частные случаи – легко приводимые к линейной задаче.