Elementos de inferencia estadística para el diseño de experimentos: Experimentos con uno y dos tratamientos

Diplomado: Diseño Profesional de Experimentos
Modulo: Fundamentos del diseño experimental

Econ. Morales Alberto Alexis Adonai

2025

scidata
Matemáticas para la ciencia de datos

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

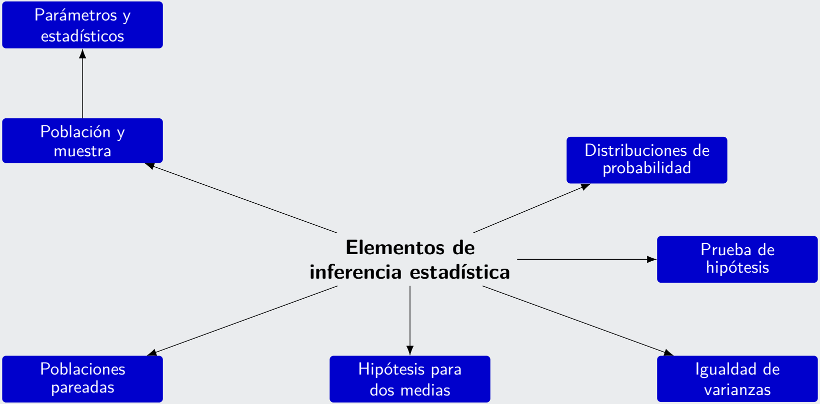
Índice

Índice

Objetivos de aprendizaje

- Identificar los elementos de la inferencia estadística y su importancia en los diseños experimentales.
- Explicar el papel de las distribuciones de probabilidad en la inferencia estadísticas, así como la estimación puntual y por intervalo.
- Describir las pruebas para la media y la varianza, así como los conceptos básicos de prueba de hipótesis.
- Identificar las pruebas para la igualdad de varianzas.
- Distinguir las pruebas para comparar medias con muestras independientes y muestras pareadas.

Mapa mental (resumen)



Sección 1

Población y muestra, parámetros y estadísticos

Población y muestra, parámetros y estadísticos

- Una *población* o *universo* es una colección o totalidad de posibles individuos, especímenes, objetos o medidas de interés sobre los que se hace un estudio. Las poblaciones pueden ser finitas o infinitas.
- Si es *finita* y pequeña se pueden medir todos los individuos para tener un conocimiento "exacto" de las características (*parámetros*) de esa población. Ejemplo: Un parámetro que podría ser de interés es la porporción p de productos defectuosos, o la media μ, de alguna variable medida a los productos.

Población y muestra, parámetros y estadísticos

- Si la población es *infinita* o grande es imposible e incosteable medir a todos los individuos, en este caso se tendrá que sacar una *muestra representativa* de dicha población y con base en las características medidas en la muestra (*estadísticos*) se podrán hacer afirmaciones acerca de los parámetros de la población.
- La *muestra representativa* es una parte de una población seleccionada adecuadamente que conserva los aspectos clave de la población.

Inferenca estadística

- El objetivo de la *inferencia estadística* es hacer afirmaciones válidas acerca de la población o proceso con base en la información contenida en una muestra. Estas afirmaciones tienen por objetivo coadyuvar en la toma de decisiones.
- La inferencia estadística, por lo general, se divide en *estimación* y *prueba de hipótesis*, se apoya en cantidades o datos estadísticos calculados a partir de las observaciones en la muestra.
- Un *estadístico* se define como cualquier función de los datos muestrales que no contiene parámetros desconocidos. Ejemplo: La media muestral $\bar{X}$ con la cual se tratan de hacer afirmaciones sobre la media μ, que es un parámetro poblacional.
- Los *parámetros* son características que, mediante su valor numérico, describen a un conjunto de elementos o individuos.

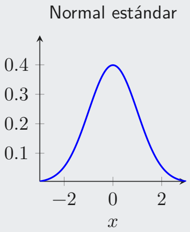
Sección 2

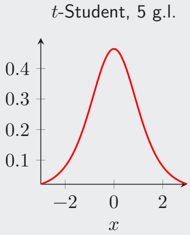
Distribuciones de probabilidad e inferencia

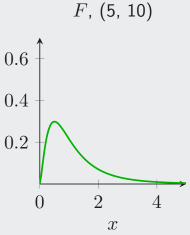
Distribuciones de probabilidad e inferencia

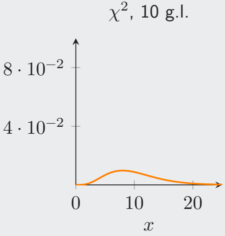
- La *distribución de probabilidad* o *distribución de una variable aleatoria* X relaciona el conjunto de valores posibles de X (rango de X), con la probabilidad asociada a cada uno de estos valores y los representa a través de una tabla o por medio de una función planteada como una fórmula.
- Ejemplo: Sea una variable aleatoria dada por el estadístico media muestral $\bar{X}$, entonces al conocer su distribución de probabilidad podremos saber cuáles son los valores que puede tomar $\bar{X}$ y cuales son más probables.
- Las distribuciones de probabilidad que más se usan en intervalos de confianza y prueba de hipótesis son las distribuciones: *normal*, *T de Student*, *ji-cuadrada*, y *F de Fisher*.
- *Los grados de libertad* son los parámetros que definen las distribuciones *T de Student*, *ji-cuadrada* y *F de Fisher* y se determinan a partir de los tamaños muestrales involucrados.

Distribuciones de probabilidad e inferencia









Sección 3

Estimación puntual y por intervalo

Estimación puntual y por intervalo

Las distribuciones de probabilidad que tienen una variable que representa cierta característica de una población se definen completamente cuando se conocen sus parámetros, pero cuando éstos no se conocen, será necesario estimarlos con base en los datos muestrales para hacer inferencias sobre la población.

Por ejemplo: Los parámetro de una distribución normal son la media μ, y la desviación estándar σ, que en caso de desconocerse será necesario estimarlos a partir de los datos en la muestra.

Existen dos tipo de estimación: Puntual y por intervalo.

Estimación puntual

- Un *estimador puntual* de un parámetro desconocido es un estadístico que generan un valor numérico simple, que se utiliza para hacer una estimación del valor del parámetro desconocido. Por ejemplo: Tres parámetros sobre los que con frecuencia se desea hacer inferencia son I) La media (μ) de la población; II) La varianza (σ^2) o la desviación estándar (σ) de la población y III) La proporción p.
- Los estimadores puntuales (estadísticos) más recomendados para estimar estos parámetros son, respectivamente:
  1. La media muestral $\hat{\mu} = \bar{X}$
  2. La varianza muestral $\sigma^2 = S^2$
  3. La proporción $\hat{p} = x/n$

Estimación por intervalo

- La estimación puntual de un parámetro se genera a través de un estadístico, y como el valor de éste es aleatorio porque depende de los elementos que fueron seleccionados en la muestra, entonces la estimación que se hace sobre el parámetro dependerá y variará de una muestra a otra.
- Cuando se quiere tener mayor certidumbre sobre el verdadero valor del parámetro poblacional, será necesario obtener la información sobre qué tan precisa es la estimación puntual, así, la estimación dirá poco sobre el parámetro cuando la variación entre una estimación y otra es muy grande.
- Una forma de saber qué tan variable es el estimador, consiste en calcular la desviación estándar o *error estándar* del estadístico, visto como una variable aleatoria.

Estimación por intervalo

- Por ejemplo: Consideremos, la desviación estándar S y la media $\bar{X}$ de una muestra de tamaño n. Puesto que $\bar{X}$ es una variable aleatoria, ésta tiene su propia desviación o error estándar, que se puede estimar mediante $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Estimación por intervalo

- Una forma operativa de saber qué tan precisa es la estimación consiste en calcular un *intervalo de confianza* que indique un rango "donde puede estar el parámetro" con cierto nivel de seguridad o confianza.
- Construir un intervalo al $100\,(1-\alpha)\,\%$ de confianza para un parámetro desconocido θ, consiste en estimar dos números (estadísticos) L y U, de manera que la probabilidad de que θ se encuentre entre ello sea $1-\alpha$ es decir: $P\,(L \leq \theta \leq U) = 1-\alpha$. Donde L y U forman el intervalo de confianza buscado $[L, U]$.

Estimación por intervalo

- La correcta interpretación de un intervalo de confianza es como el siguiente ejemplo.
- Si se obtuvieran 100 muestras independientes se la misma población o proceso, cada una de tamaño n y para cada muestra se calculará el intervalo de confianza al 95% para el mismo parámetro, entonces se espera que 95 de los 100 intervalos contengan el verdadero valor de dicho parámetro.
- En la práctica se obtiene sólo un intervalo y se dice que el intervalo $[L, U]$ tiene una confianza de $100\,(1-\alpha)\,\%$; esto tiene una interpretación constante, en el sentido de que el parámetro estará en el intervalo $100\,(1-\alpha)\,\%$ de las veces que se aplique el procedimiento.

Estimacón por intervalo

- La *longitud del intervalo de confianza* es una medida de la precisión de la estimación. De aquí que es deseable que la longitud de los intervalos sea pequeña y con alto nivel de confianza. El ancho de los intervalos es mayor a medida que sea mayor la varianza de la población y el nivel de confianza exigido. El ancho del intervalo es menor si se incrementa el tamaño de la muestra.

Intervalo de confianza para la media

- Por definición de *intervalo de confianza* se trata de encontrar dos números L y U, tales que el parámetro μ se encuentre entre ellos con una probabilidad de $1-\alpha$. Esto es: $P\left(L \leq \theta \leq U\right) = 1-\alpha$.
- Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una población, con una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. El procedimiento general para deducir el intervalo consiste en partir de un estadístico que involucra al parámetro de interés y que tiene una distribución conocida. Tal estadístico es.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Intervalo de confianza para la media

- Sigue una distribución T de Student con $n-1$ grados de libertad. Por lo tanto, en la tabla de esta distribución o en su gráfica se pueden ubicar dos valores críticos $t_{\alpha/2}$ y $-t_{\alpha/2}$, tales que:

$$P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza para la media

- Despejando hasta dejar sólo en medio de las desigualdades al parámetro de interés.

$$P\left(-t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para la media

- Se resta $\bar{X}$ en los tres términos:

$$P\left(-\bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para la media

- Multiplicar por -1

$$P\left(\bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para la media

- Reordenar para expresar el intervalo de confianza

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para la media

- Al finalizar se obtiene

$$\boxed{P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha}$$

Intervalo de confianza para la media

- En ese sentido, $L = \bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ y $U = \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ son los números buscados que definen un intervalo al $100\,(1-\alpha)\,\%$ para la media desconocida μ.
- En la tabla de la distribución T de Student se observa que para una muestra mayor o igual a 30, el intervalo al $100\,(1-\alpha)\,\%$ para la media μ es aproximadamente $\bar{X} \pm 2\frac{S}{\sqrt{n}}$, o sea, la media más menos 2 veces su error estándar.

Intervalos para la varianza

De manera similar a como se obtiene el intervalo para la media, es posible deducir intervalos de confianza para cualquier parámetro. En particular, para construir un intervalo de confianza para la varianza σ^2, la distribución de referencia es una ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, ya que bajo el supuesto de que la variable de interés tiene una distribución normal con media y varianza desconocidas, el estadístico $(n-1)\,S^2/\sigma^2$ sigue la distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad.

Intervalos para la varianza

- El intervalo de confianza para la varianza está dado por.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}}$$

- Donde $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ son puntos críticos de la distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad y se leen en la tabla de esta distribución para el valor de α dado. Es decir $P\left(X > \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = \alpha/2$

Intervalo para la proporción

Para el caso de la proporción, el intervalo de confianza, sigue una distribución binomial, se puede construir el intervalo de confianza de la proporción poblacional p, apoyándose de la distribución binomial por la normal. Se puede afirmar que que la proporción muestral $\widehat{p}$ sigue una distribución normal con media p y varianza $\frac{p(1-p)}{n}$

Intervalo para la proporción

- El intervalo de confianza se construye de la siguiente manera:

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

- Donde $Z_{\alpha/2}$ es un percentil de tabla de la distribución normal estándar.

Resumen de fórmulas de intervalos de confianza

Parámetro	Límite inferior	Límite superior
μ	$\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$
σ^2	$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$
p	$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$\hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$\mu_1 - \mu_2$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{n_1+n_2-2} \cdot S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}$	
	$S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$	
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$	$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$
$p_1 - p_2$	$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$	

Sección 4

Conceptos básicos de prueba de hipótesis

Conceptos básicos de prueba de hipótesis

Un estudio experimental o una investigación, por lo general tiene como último objetivo, responder en forma segura ciertas preguntas y/o tomar decisiones. En este contexto, el experimentador tiene *a priori* ciertas creencias o hipótesis que se desean comprobar.

Planteamiento de una hipótesis estadística

- Una *hipótesis estadística* es una afirmación sobre los valores de los parámetros de una población o proceso, que es susceptible de probarse a partir de la información contenida en una muestra representativa que es obtenida de la población.
- Ejemplo: Este proceso produce menos de 8% de defectos, se puede plantear estadísticamente, en términos de la proporción p desconocida de artículos defectuosos que genera el proceso.

$$\begin{aligned} H_0 : p = 0.08 \, &(\text{la proporción de defectuosos es } 0.08) \\ H_A : p < 0.08 \, &(\text{la proporción es menor a } 0.08) \end{aligned} \tag{A}$$

Planteamiento de una hipótesis estadística

- A la expresión $H_0 : p = 0.08$ se le conoce como hipótesis nula y $H_A : p < 0.08$ se le llama *hipótesis alternativa*. El nombre de hipótesis nula se deriva del hecho de que comúnmente se plantea como una igualdad, lo cual facilita el tener una distribución de probabilidad de referencia específica. En general, la estrategia a seguir para probar una hipótesis es suponer que la hipótesis nula es verdadera, y que en caso de ser rechazada por la evidencia que aportan los datos, se estará aceptando la hipótesis alternativa.

Planteamiento de una hipótesis estadística

- Ahora, hay que suponer que la afirmación a probar es "este proceso produce 8% de defectuosos". La afirmación señala que su falsedad se da, tanto si se observan menos de 8% de defectuosos como si se observan más de 8% de defectuosos. El planteamiento estadístico debe ser:

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0.08 \,(\text{la proporción de defectuosos es } 0.08) \\ H_A &: p \neq 0.08 \,(\text{la proporción es diferente a } 0.08) \end{aligned} \tag{B}$$

Planteamiento de una hipótesis estadística

- La diferencia entre las expresiones A y B, en A H_A se conoce como *hipótesis alternativa de un solo lado (unilateral)*, ya que la única manera de rechaza H_0 es teniendo valores muestrales más pequeños que 0.0.
- En B, H_A se llama *hipótesis alternativa de dos lados (bilateral)*, ya que la evidencia en contra de H_0 se obtiene con valores pequeños o grandes a la muestra.
- Otro aspecto importante es la selección del valor del parámetro que especifica la hipótesis nula, esto es, ¿por qué 0.08 en las hipótesis de las expresiones A y B? Este valor se elige de manera que separe dos situaciones que llevan a tomar diferentes acciones.

Estadístico de prueba

- Probar una hipótesis consiste en investigar si lo afirmado por la hipótesis nula es verdad o no. La estrategia de prueba parte del supuesto de que H_0 es verdadera, y si los resultados de la investigación contradicen en forma suficiente dicho supuesto, entonces se rechaza H_0 y se acepta la hipótesis alternativa.
- En caso de que los resultados de la investigación no demuestren claramente la falsedad de H_0, ésta no se rechaza, es decir, *la hipótesis nula es verdadera mientras no se demuestre lo contrario*.
- Una vez que se plantea la hipótesis, se toma una muestra aleatoria de la población de estudio o se obtienen datos medias un experimento planeado de acuerdo con la hipótesis.
- *El estadístico de prueba* es un número calculado a partir de los datos y la hipótesis nula, cuya magnitud permite discernir si se rechaza o no la hipótesis nula H_0.

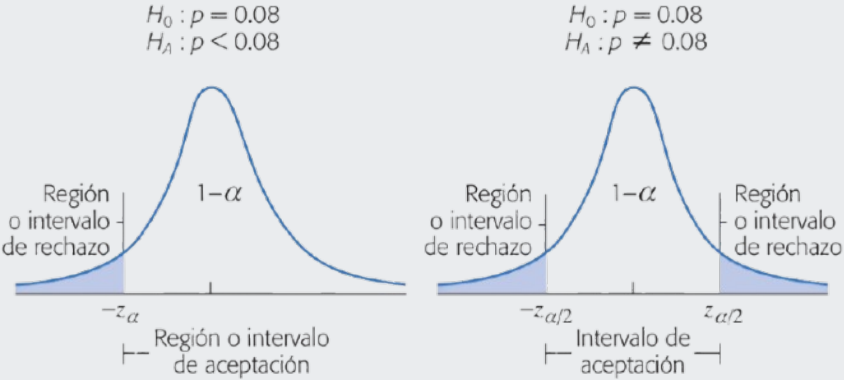
Estadístico de prueba

- Al conjunto de posibles valores del estadístico de prueba que llevan a rechazar H_0, se le llama *región o intervalo de rechazo* para la prueba, y a los posibles valores donde *no se rechaza* H_0 se les llama *región o intervalo de aceptación / no rechazo*.

Criterio de rechazo

- El estadístico de prueba, construido bajo el supuesto de que H_0 es verdad, es una variable aleatoria con distribución conocida. Si efectivamente H_0 es verdad, el valor del estadístico de prueba debería caer dentro del rango de valores más probables de su distribución asociada, el cual se conoce como *región de aceptación*.
- Si cae en una de las colas de su distribución asociada, fuera del rango de valores más probables (región de rechazo), es evidencia en contra de que este valor pertenece a dicha distribución. De aquí se deduce que debe estar mal el supuesto bajo el cual se construyó, es decir, H_0 debe ser falsa.

Criterio de rechazo



Errores tipo I y II

- Probar una hipótesis estadística es una decisión probabilística, por lo que existe el riesgo de cometer un error tipo I o un error tipo II. El primero ocurre cuando se rechaza H_0 cuando ésta es verdadera, y el error tipo II es cuando se acepta H_0 y ésta es falsa. En toda prueba de hipótesis cada tipo de error tiene una probabilidad de ocurrir. Con α y β se denotan las probabilidades de los errores tipo I y II, respectivamente.

$$\alpha = P\left(\text{error tipo I}\right) = \text{Probabilidsd de rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera}$$
$$\beta = P\left(\text{error tipo II}\right) = \text{probabilidad de rechazar } H_0 \text{ siendo falsa}$$

Errores tipo I y II

- A $1-\beta$ se le llama *potencia de la prueba*, y es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa. A también se le conoce como la *significancia dada la prueba* y es la probabilidad de la región o intervalo de rechazo; su valor se especifica por parte del investigador desde que planea el estudio.
- Por lo general se utilizan los valores $\alpha = 0.05$ o 0.01, dependiendo del riesgo que se quiera admitir en la conclusión.
- Mientras más pequeño es el valor de α se requiere más evidencia en los datos para rechazar H_0

Sección 5

Prueba para la media

Prueba para la media

- Cuando se estudia el comportamiento de un proceso o un fenómeno suele interesar su media y varianza (o desviación estándar). En particular, al estudiar la media μ, es de interés conocer si ésta es igual o mayor o menor a cierto valor μ_0, donde μ_0 es un número conocido.
- Ejemplo: Investigar si el rendimiento promedio del proceso durante esta semana es igual, mayor o menor que el de la semana anterior, μ_0.
- La hipótesis se pueden probar suponiendo la varianza poblacional σ^2 conocida o desconocida. Pero como la mayoría de los problemas es irreal suponer de antemano que se conoce la varianza, nos limitamos a describir el caso cuando σ^2 no se conoce.

Prueba para la media con varianza desconocida

- Sea X una variable aleatoria con distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Se quiere probar la hipótesis de que la media es igual a cierto valor μ_0. Es decir, la hipótesis a probar es:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_A &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Prueba para la media con varianza desconocida

- Para probar la hipótesis de (1) se toma una muestra aleatoria de tamaño n de los posibles valores de la variable X y se calcula el estadístico de prueba:

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \tag{2}$$

Prueba para la media con varianza desconocida

- Donde S es la desviación estándar de los datos. Bajo el supuesto de que H_0 es verdadera, este estadístico se distribuye T de Student con $n-1$ grados de libertad. Se rechaza H_0 si el valor absoluto del estadístico de prueba es mayor que el valor crítico de la distribución, es decir, se rechaza H_0 si $|t_0| > t_{\alpha/2}$.
- Hay que recordar que existen otros dos tipos de pruebas unilaterales, distintas a (2).

Prueba para la media con varianza desconocida

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_A &: \mu > mu_0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_A &: \mu < \mu_0 \end{aligned} \tag{5}$$

Sección 6

Prueba para la varianza

Prueba para la varianza

- Mediante una distribución ji-cuadrada, se toma una muestra aleatoria donde se desconoce σ^2, pero que mediante el cálculo de la varianza muestral S^2, el estadístico de prueba es el siguiente:

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$$

Prueba de varianza

- Al tratase de un estadístico robusto como ji-cuadrado, la zona de rechazo, se encuentra únicamente en los valores positivos, por ello, la única hipótesis a contrastar es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\
H_A &: \sigma^2 > \sigma_0^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Sección 7

Tres criterios de rechazo o aceptación equivalentes

Tres criterios de rechazo o aceptación equivalentes

Al menos en las hipótesis más usuales, existen tres criterios equivalentes para decidir cuándo rechazar la hipótesis nula y, en consecuencia, aceptar la hipótesis alternativa. La equivalencia es en el sentido de que los tres llevan invariablemente a la misma decisión en términos de rechazar o no a H_0. Sin embargo, algunos de estos métodos proporcionan información adicional sobre la decisión que se está tomando, por lo que en algunas situaciones puede resultar ventajoso usar un criterio y no otro.

Estadístico de prueba frente al valor crítico

Este método consiste en rechazar H_0 si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo que está delimitada por el valor crítico. Debe tenerse cuidado de comparar los valores adecuados, dependiendo de la hipótesis alternativa de que se trata. Cuando los cálculos se hacen de forma manual, este criterio es el único que comúnmente se usa. No obstante este método tradicional es el que da menos información adicional acerca de la decisión tomada.

Significancia observada frente a significancia predefinida

- La significancia predefinida que se denota con α, es el riesgo máximo que el experimentador está dispuesto a correr por rechazar H_0 indebidamente (error tipo I). Mientras que la significancia observada o calculada, también conocida como p-value o valor-p, es el área bajo la distribución de referencia más allá del valor del estadístico de prueba. La expresión "más allá del estadístico de prueba" significa, por ejemplo en la prueba T bilateral, el área bajo la curva fuera del intervalo $[-t_0, t_0]$, es decir:

$$\text{valor-p} = P\left(T < -t_0\right) + P\left(T > +t_0\right)$$

Significancia observada frente a significancia predefinida

- Donde T es una variable que tiene una distribución T de Student con $n-1$ grados de libertad. Si la prueba es unilateral de cola derecha (izquierda), la significancia observada es el área bajo la curva de la distribución a la derecha (izquierda) de t_0. De lo anterior se desprende que H_0 se rechaza si la *significancia observada es menor que la significancia dada*, o sea, si valor-p $< \alpha$.
- Este criterio es mejor que el anterior porque la significancia observada se puede ver como la probabilidad o evidencia a favor de H_0, por lo tanto, representa una medida de la contundencia con la que se rechaza o no la hipótesis nula.

Intervalo de confianza

- En este método se rechaza H_0 si el valor del parámetro declarado en la hipótesis nula se encuentra fuera del intervalo de confianza para el mismo parámetro. Cuando la hipótesis planteada es de tipo bilateral, se utiliza directamente el intervalo al $100\,(1{-}\alpha)\,\%$ de confianza. Si la hipótesis es unilateral, se requiere el intervalo al $100\,(1{-}2\alpha)\,\%$ para que el área bajo la curva, fuera de cada extremo del intervalo, sea igual a α.

Sección 8

Hipótesis para dos medias: comparación de dos tratamientos

Hipótesis para dos medias: comparación de dos tratamientos

- Cuando se interesa comparar dos tratamientos A y B, se obtendrá una muestra aleatoria de observaciones. Supongamos que los datos a observar en A son $Y_{A1}, Y_{A2}, \cdots, Y_{An}$ y los datos de B son $Y_{B1}, Y_{B2}, \cdots, Y_{Bn}$.

Prueba o dato	**Tratamientos**	
	A	B
1	Y_{A1}	Y_{B1}
2	Y_{A2}	Y_{B2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Y_{An}	Y_{Bn}

Cuadro 1: Comparación de dos tratamientos

Suposición de varianzas desconocidas

- Sean dos procesos o tratamientos con medias μ_x y μ_y y varianzas σ_x^2 y σ_y^2, respectivamente. Interesa investigar si las medias de dichos procesos pueden considerarse estadísticamente iguales. Para ello se pueden plantear las siguientes hipótesis.

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_x = \mu_y \\ H_A &: \mu_x \neq \mu_y \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_x - \mu_y = 0 \\ H_A &: \mu_x - \mu_y \neq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Hipótesis para dos medias: comparación de dos tratamientos

- Para probar H_0 se toman dos muestras aleatorias, como en el ejemplo de las máquinas antes descritas, de tamaño n_x la del proceso X, y de tamaño n_y la del proceso Y; en general, es recomendable que $n_x = n_y = n$, pero también puede trabajarse con $n_x \neq n_y$ si no pudieran tomarse iguales. Si cada proceso sigue una distribución normal y son independientes entre ellos, el estadístico de prueba adecuado para probar la hipótesis de igualdad de medias está dado por

$$t_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \tag{9}$$

Hipótesis para dos medias: comparación de dos tratamientos

- El cuál sigue una distribución T de Student con $n_x + n_y - 2$ grados de libertad, donde S_p^2 es un estimador de la varianza muestral común, suponiendo que dichas varianzas desconocidas sean iguales, se calcula como:

$$S_p^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2} \tag{10}$$

- Con S_x^2 y S_y^2 las varianzas muestrales de los datos de cada proceso.

Hipótesis para dos medias: comparación de dos tratamientos

- Se rechaza H_0 si $|t_0| > t_{a/2}$, donde $t_{a/2}$ es el punto $a/2$ de la cola derecha de la distribución T de Student con $n_x + n_y – 2$ grados de libertad. Cuando la hipótesis alternativa es de la forma $H_A : \mu_x > \mu_y$, se rechaza $H_0 : \mu_x = \mu_y$ si $t_0 > t_\alpha$, y si es de la forma $H_A : \mu_x < \mu_y$, se rechaza si $t_0 < –t_\alpha$. En forma equivalente, se rechaza H_0 si el valor-p $< \alpha$ para la pareja de hipótesis de interés.

Sección 9

Prueba para la igualdad de varianzas

- Objetivo: comparar las **varianzas** de dos poblaciones normales e independientes.
- Supuestos:
  - Las muestras son independientes.
  - Las poblaciones son normales.
- Hipótesis:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Estadístico de prueba

- Razón de varianzas muestrales:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

- Donde:
  - S_1^2 y S_2^2 son las varianzas muestrales.
  - Grados de libertad: $v_1 = n_1 - 1$, $v_2 = n_2 - 1$.

Región de rechazo

- Distribución F de Snedecor.
- Para prueba bilateral al nivel de significancia α:

$$F < F_{1-\alpha/2,v_1,v_2} \quad \text{o} \quad F > F_{\alpha/2,v_1,v_2}$$

- Para prueba unilateral:

$$F > F_{\alpha,v_1,v_2} \quad \text{o} \quad F < F_{1-\alpha,v_1,v_2}$$

Procedimiento

1. Calcular varianzas muestrales.
2. Calcular estadístico F.
3. Determinar región crítica usando tabla F.
4. Decidir:
    - Rechazar H_0 si F está en la región crítica.
    - No rechazar H_0 en caso contrario.

Sección 10

Poblaciones pareadas (comparación de dos medias con muestras dependientes)

Comparación de dos medias con muestras dependientes

- Cuando las mediciones están **emparejadas**:
  - Mismo sujeto antes/después.
  - Sujetos gemelos.
  - Medidas en condiciones relacionadas.
- Las observaciones no son independientes, sino correlacionadas.

Hipótesis

- Hipótesis sobre la diferencia de medias:

$$H_0 : \mu_d = 0$$
$$H_A : \mu_d \neq 0$$

- Donde $d_i = X_{1i} - X_{2i}$.

Estadístico de prueba

- Diferencias d_i se tratan como muestra única:

$$
\begin{aligned}
\bar{d} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \\
s_d^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 \\
t &= \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Distribución

- Distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad.
- Para nivel de significancia α:
  - Prueba bilateral:

$$|t| > t_{\alpha/2,n-1}$$

  - Prueba unilateral:

$$t > t_{\alpha,n-1} \text{ o } t < -t_{\alpha,n-1}$$

Procedimiento

1. Calcular las diferencias d_i.
2. Obtener $\bar{d}$ y s_d.
3. Calcular t.
4. Comparar con valor crítico.
5. Tomar decisión estadística.

Sección 11

Resumen de fórmulas para procedimientos de prueba de hipótesis

Resumen de fórmulas para procedimientos de prueba de hipótesis

Hipótesis	Estadístico de prueba	Criterio de rechazo
a) $H_0 : \mu = \mu_0$	$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	
$H_A : \mu \neq \mu_0$		$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2}$
$H_A : \mu > \mu_0$		$t_0 > t_\alpha$
$H_A : \mu < \mu_0$		$t_0 < -t_\alpha$
b) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$		
$H_A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$ o $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}$
$H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,\, n-1}$
$H_A : \sigma < \sigma_0^2$		$\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$
c) $H_0 : p = p_0$	$z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$	
$H_A : p \neq p_0$		$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$
$H_A : p > p_0$	X número de defectos	$z_0 > z_\alpha$
$H_A : p < p_0$		$z_0 < -z_\alpha$

Resumen de fórmulas para procedimientos de prueba de hipótesis

Hipótesis	Estadístico de prueba	Criterio de rechazo
a) $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ $H_A: \mu_1 > \mu_2$ $H_A: \mu_1 < \mu_2$	$t_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ donde $S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,\, n_1+n_2-2}$ $t_0 > t_{\alpha,\, n_1+n_2-2}$ $t_0 < -t_{\alpha,\, n_1+n_2-2}$
b) $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ $H_A: \mu_1 > \mu_2$ $H_A: \mu_1 < \mu_2$	$t_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ donde $v = \dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,\, v}$ $t_0 > t_{\alpha,\, v}$ $t_0 < -t_{\alpha,\, v}$

Resumen de fórmulas para procedimientos de prueba de hipótesis

c) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $H_A : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $H_A : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_0 > F_{\alpha/2,\, n_1-1,\, n_2-1}$ o $F_0 < F_{1-\alpha/2,\, n_1-1,\, n_2-1}$ $F_0 > F_{\alpha,\, n_1-1,\, n_2-1}$ $F_0 < F_{1-\alpha,\, n_1-1,\, n_2-1}$
d) $H_0 : p_1 = p_2$ $H_A : p_1 \neq p_2$ $H_A : p_1 > p_2$ $H_A : p_1 < p_2$	$z_0 = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ donde $\hat{p} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$ $z_0 > z_\alpha$ $z_0 < -z_\alpha$
e) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$ $H_A : \mu_1 > \mu_2$ $H_A : \mu_1 < \mu_2$	$t_0 = \dfrac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}}$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,\, n-1}$ $t_0 > t_{\alpha,\, n-1}$ $t_0 < -t_{\alpha,\, n-1}$