Experimentos de un factor

Diplomado: Diseño Profesional de Experimentos
Modulo: Fundamentos del diseño experimental

Econ. Morales Alberto Alexis Adonai

2025

scidata
Matemáticas para la ciencia de datos

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

Sección 1

Introducción

Introducción

- Aunque se sigue considerando un solo factor, se presentan los diseños experimentales utilizados para comparar más de dos tratamientos.
- El interés se centra en comparar tratamientos respecto a sus medias poblacionales y sus varianzas.
- Se busca decidir si los tratamientos son estadísticamente iguales en sus medias, frente a la alternativa de que al menos dos sean diferentes.
- Hipótesis fundamental:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$$

Sección 2

Diseño completamente al azar y ANOVA

Diseño completamente al azar y ANOVA

- Diseño completamente al azar: todas las corridas experimentales se realizan en orden aleatorio completo.
- Así, las N pruebas se corren al azar, distribuyendo equitativamente los posibles efectos ambientales y temporales entre tratamientos.

Sección 3

Aspectos teóricos

Aspectos teóricos

- Supongamos k poblaciones o tratamientos independientes con medias desconocidas:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$$

y varianzas iguales:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2$$

- Las poblaciones pueden ser métodos de producción, tratamientos, grupos, etc.
- La comparación se realiza mediante la hipótesis de igualdad de medias.

Sección 4

Tamaño de muestra

Tamaño de muestra

- El número de tratamientos (k) depende del problema planteado.
- El número de observaciones por tratamiento (n) se elige considerando:
  - Variabilidad esperada
  - Diferencia mínima importante a detectar
- Se recomiendan entre 5 y 30 mediciones por tratamiento.

Sección 5

Recomendaciones para n

Recomendaciones para n

- $n = 10$: mediciones consistentes (poca dispersión).
- $n = 30$: mediciones con mayor dispersión.
- Si las pruebas son costosas o tardadas:
  - Usar menos repeticiones
  - Solo se podrán detectar diferencias grandes
- Si $n_i = n$ para todo i, el diseño es **balanceado**.

Sección 6

Modelo estadístico

Modelo estadístico

- Modelo lineal para las observaciones:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

  donde:
  - μ: media global común
  - τ_i: efecto del tratamiento *i*
  - ϵ_{ij}: error aleatorio
- En el diseño completamente al azar hay dos fuentes de variabilidad:
  - Tratamientos
  - Error aleatorio

Sección 7

Sobre la media global

Sobre la media global

- La media global μ no se considera fuente de variabilidad, pues es constante.
- Sirve como referencia para comparar las respuestas medias de los tratamientos.

Sección 8

Diferencias entre prueba “t” y ANOVA

Diferencias entre prueba “t” y ANOVA

- Prueba t:
  - Útil para muestras pequeñas
  - Compara medias de dos grupos
- ANOVA:
  - Generaliza la comparación a varios grupos
  - Determina si las medias de k grupos son iguales o no

Sección 9

Análisis de varianza (ANOVA)

Análisis de varianza (ANOVA)

- Técnica central en análisis de datos experimentales.
- Objetivo:
  - Separar la variación total en componentes atribuibles a tratamientos y error.
- Conclusiones:
  - Si tratamientos no dominan al error: medias son iguales
  - Si tratamientos predominan claramente: medias son diferentes

Sección 10

Hipótesis en ANOVA

Hipótesis en ANOVA

- En el diseño completamente al azar (DCA):

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_k = 0$$

- Interpretación:
  - Si se acepta H_0: efectos de tratamientos son estadísticamente nulos
  - Si se rechaza H_0: al menos un efecto es diferente de cero

Sección 11

Supuestos de ANOVA

Supuestos de ANOVA

- Variable de respuesta:
  - Distribución normal
  - Varianza constante (homogeneidad)
  - Observaciones independientes
- Estos supuestos deben verificarse para asegurar validez de las conclusiones.

Sección 12

Tabla de ANOVA (general)

Tabla de ANOVA (general)

Fuente	SC	gl	CM	F
Tratamientos	SCT	k - 1	CMTrat	CMTrat/CME
Error	SCE	N - k	CME	
Total	SCTotal	N - 1		

- SC: Suma de cuadrados
- gl: grados de libertad
- CM: Cuadrado medio

Sección 13

Prueba LSD (Least Significant Difference)

Prueba LSD (Least Significant Difference)

- ANOVA prueba:

$$H_0 : \mu_i = \mu_j$$

- En LSD:
  - Estadístico de prueba es la diferencia absoluta entre medias muestrales.
  - Se rechaza H_0 si:

$$|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| > LSD$$

- Para diseño balanceado:

$$n_1 = n_2 = ... = n_k = n$$

Sección 14

Otras pruebas post hoc: Tukey

Otras pruebas post hoc: Tukey

- Método más conservador que LSD.
- Compara pares de medias con un valor crítico dado por:

$$q_\alpha(k, N-k)\sqrt{\frac{CME}{n}}$$

donde:

- CME: cuadrado medio del error
- n: número de observaciones por tratamiento
- α: nivel de significancia

Sección 15

Otras pruebas post hoc: Duncan

Otras pruebas post hoc: Duncan

- Para muestras de igual tamaño:
  - Ordenar promedios en forma ascendente
  - Error estándar:

$$s_{\bar{Y}_i} = \sqrt{\frac{CME}{n}}$$

- Rangos de significancia:

$$R_p = r_{\alpha,p,l} \times s_{\bar{Y}}$$

para $p = 2, 3, \ldots, k$

Sección 16

Ejemplo

Ejemplo

- Cuatro tratamientos sobre un material.
- Medida: dureza del material.

Tratamiento	A	B	C	D
Observación 1	6	7	11	10
Observación 2	8	9	16	12
Observación 3	7	10	11	11
Observación 4	8	8	13	9

- Objetivo:
  - Verificar si hay diferencias significativas entre tratamientos.

Paso 1: Medias por tratamiento

- Media de A:
$$\bar{Y}_A = \frac{6+8+7+8}{4} = \frac{29}{4} = 7.25$$
- Media de B:
$$\bar{Y}_B = \frac{7+9+10+8}{4} = \frac{34}{4} = 8.5$$
- Media de C:
$$\bar{Y}_C = \frac{11+16+11+13}{4} = \frac{51}{4} = 12.75$$
- Media de D:
$$\bar{Y}_D = \frac{10+12+11+9}{4} = \frac{42}{4} = 10.5$$

Paso 2: Media general

- Media general:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}}{N}$$

$$= \frac{29 + 34 + 51 + 42}{16} = \frac{156}{16} = 9.75$$

Paso 3: SCT (Sumas de cuadrados tratamientos)

- Fórmula:

$$SCT = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2$$

- Cálculo:

$$SCT = 4\left[(7.25-9.75)^2 + (8.5-9.75)^2 + (12.75-9.75)^2 + (10.5-9.75)^2\right]$$

  - $(7.25 - 9.75)^2 = 6.25$
  - $(8.5 - 9.75)^2 = 1.5625$
  - $(12.75 - 9.75)^2 = 9$
  - $(10.5 - 9.75)^2 = 0.5625$

$$= 4 \times (6.25 + 1.5625 + 9 + 0.5625)$$

$$= 4 \times 17.375$$

$$= 69.5$$

Paso 4: Suma de cuadrados total (SCTotal)

- Fórmula:

$$SCTotal = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

- Debemos sumar todos los cuadrados de diferencias:

$$SCTotal = \sum_{i,j} (Y_{ij} - 9.75)^2$$

- Resultado (sumatoria manual resumida):

$$SCTotal \approx 99.5$$

Paso 5: SCE (Error)

- Definición:

$$SCE = SCTotal - SCT$$
$$= 99.5 - 69.5$$
$$= 30$$

Paso 6: Grados de libertad

- Tratamientos:

$$gl_{trat} = k - 1 = 4 - 1 = 3$$

- Error:

$$gl_{error} = N - k = 16 - 4 = 12$$

- Total:

$$gl_{total} = N - 1 = 15$$

Paso 7: Cuadrados medios

- CM Tratamientos:

$$CM_{trat} = \frac{SCT}{gl_{trat}} = \frac{69.5}{3} \approx 23.17$$

- CM Error:

$$CM_{error} = \frac{SCE}{gl_{error}} = \frac{30}{12} = 2.5$$

Paso 8: Estadístico F

- Fórmula:

$$F = \frac{CM_{trat}}{CM_{error}}$$

$$= \frac{23.17}{2.5} \approx 9.27$$

Tabla ANOVA

Fuente	SC	gl	CM	F
Tratamientos	69.5	3	23.17	9.27
Error	30	12	2.5	
Total	99.5	15		

Paso 9: Prueba de hipótesis

- Hipótesis nula:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

- Nivel de significancia típico:

$$\alpha = 0.05$$

- Valor crítico (F tabulado) con (3,12) gl 3.49
- Comparación:

$$F_{calculado} = 9.27 > F_{tab} = 3.49$$

- Decisión:
  - Rechazamos H_0.
  - Conclusión: hay diferencias significativas entre tratamientos.

Interpretación

- Existe evidencia estadística para afirmar que al menos un tratamiento difiere en media respecto a los otros.
- Se puede proceder con comparaciones post hoc (LSD, Tukey, Duncan).

Comparaciones Post Hoc

- Ya que se rechazó H_0, realizamos pruebas post hoc para identificar qué medias son significativamente diferentes.
- Usaremos:
  - LSD (Fisher)
  - Tukey (HSD)
  - Duncan

LSD: Diferencia Mínima Significativa

- Fórmula LSD:

$$LSD = t_{\alpha/2, gl_{error}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{CME}{n}}$$

- Con:
  - $\alpha = 0.05$
  - $gl_{error} = 12$
  - $t_{0.025,12} \approx 2.179$
  - $CME = 2.5$, $n = 4$
- Cálculo:

$$LSD = 2.179 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{2.5}{4}} = 2.179 \cdot \sqrt{1.25}$$

$$LSD \approx 2.179 \cdot 1.118 \approx 2.435$$

LSD: Comparaciones por pares

Compararemos todas las diferencias absolutas entre medias:

Comparación	Diferencia	¿> LSD (2.435)?	Conclusión
C vs A	12.75 - 7.25 = 5.5	Sí	Diferente
C vs B	12.75 - 8.5 = 4.25	Sí	Diferente
C vs D	12.75 -10.5 = 2.25	No	Igual
D vs A	10.5 - 7.25 = 3.25	Sí	Diferente
D vs B	10.5 - 8.5 = 2.0	No	Igual
B vs A	8.5 - 7.25 = 1.25	No	Igual

Tukey HSD: Diferencia crítica

- Fórmula:

$$HSD = q_\alpha(k, gl_{error}) \cdot \sqrt{\frac{CME}{n}}$$

- Con:
  - $q_{0.05}(4, 12) \approx 3.77$ (tabla Studentizada)
  - $CME = 2.5$, $n = 4$
- Cálculo:

$$HSD = 3.77 \cdot \sqrt{\frac{2.5}{4}} = 3.77 \cdot \sqrt{0.625}$$

$$HSD \approx 3.77 \cdot 0.791 = 2.983$$

Tukey: Comparaciones por pares

Comparación	Diferencia	¿$>$ HSD (2.983)?	Conclusión
C vs A	5.5	Sí	Diferente
C vs B	4.25	Sí	Diferente
C vs D	2.25	No	Igual
D vs A	3.25	Sí	Diferente
D vs B	2.0	No	Igual
B vs A	1.25	No	Igual

Duncan: Error estándar y rangos

- Error estándar:

$$s_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{CME}{n}} = \sqrt{0.625} \approx 0.791$$

- Supuestos:
    - Orden ascendente de medias: A (7.25), B (8.5), D (10.5), C (12.75)
- Rangos críticos R_p varían con p:
  (Ejemplo: supón valores aproximados de $r_{\alpha,p,gl}$)

Comparación	p	Diferencia	Rango crítico	¿Diferente?
A vs B	2	1.25	~1.8	No
A vs D	3	3.25	~2.2	Sí
A vs C	4	5.5	~2.6	Sí
B vs D	2	2.0	~1.8	Sí
B vs C	3	4.25	~2.2	Sí
D vs C	2	2.25	~1.8	Sí

Conclusión comparaciones múltiples

- LSD y Tukey coinciden en identificar diferencias entre C vs A/B, D vs A.
- Duncan detecta más diferencias (es menos conservador).
- C (12.75) es significativamente mayor que A (7.25) y B (8.5).
- D (10.5) es intermedio, depende de la prueba.