# Diseños factoriales fraccionados

## Diplomado: Diseño Profesional de Experimentos
## Modulo: Fundamentos del diseño experimental

Econ. Morales Alberto Alexis Adonai

2025

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Sección 1

## Objetivos

- Conocer aspectos fundamentales de los diseños factoriales fraccionados y saber cómo y cuando aplicarlos.
- Comprender los conceptos de resolucción III, IV y V, así como la aplicación en la elección de una fracción apropiada.
- Construir fracciones a cualquier grado de fraccionamiento $2^{k-p}$.
- Seleccionar la fracción adicional más adecuada para aclarar ambigüedades heredadas de una primera fracción.

# Sección 2

## Introducción

# Introducción

Cuando crece el número de factores, también aumenta exponencialmente el número de tratamientos en los diseños factoriales completos $2^k$. Para $k = 6$ factores, una sóla réplica del diseño factorial completo $2^6$ implica correr 64 pruebas, que corresponden al número de tratamientos del diseño; para $k = 7$ son $2^7 = 128$ puntos de diseño.

En la práctica no es posible hacer tantas corridas experimentales. Sin embargo, es frecuente que en las primeras etapas de una investigación interese estudiar muchos factores, digamos 6 o más. Para poder experimentar con dicha cantidad de factores, se requiere una estrategia que permita reducir de manera importante el número de tratamientos experimentales, pero que al mismo tiempo se pierda el mínimo de información valiosa.

- **Los diseños factorialñes fraccionados** es la estrategia ideal para poder plantear el uso de muchos factores, ya que gracias al exceso de información que acumulan los diseños factoriales completos, permite sacrificar información poco importante en aras de un diseño manejable en cuanto al núm,ero de corridas experiemtales.
- Las corridas en los factoriales fraccionados son una parte o una fracción de los tratamientos de los factoriales completos. La teoría de diseños fraccionados se basa en una jerarquización de los efectos: son mas importantes los efectos principales, seguido de las interacciones dobles, luego las triples, cuádruples, etc.
- En el cuadro 1 se muestra el número de efectos potencalmente de mayor interés para diferentes diseños factoriales $2^k$, se observa que para menos de 5 factores, los efectos potencialmente importantes superan el número de efectos ignorables *a priori*, de aquí que si fraccionan estos diseños, es forzoso que se pierda información que puede ser relevante.

- Cuando $k \geq 5$, el número de efectos ignorables supera al número de efectos no ignorables sin perder información valiosa.
- Mientras más granded es el valor de $k$, el diseño admite un grado de fraccionamiento mayor.

| Diseño $2^k$ | Total de efectos | Efectos no ignorables I | Efectos ignorables |
|---|---|---|---|
| $2^2$ | 3 | 3 | 0 |
| $2^3$ | 7 | 6 | 1 |
| $2^4$ | 15 | 10 | 5 |
| $2^5$ | 31 | 15 | 16 |
| $2^6$ | 63 | 21 | 42 |
| $2^7$ | 127 | 28 | 99 |

Cuadro 1: Efectos en los factores $2^k$

Cabe aclarar que al correr sólo una fracción del diseño factorial completo ocuren dos hechos insoslayables:

1. Se pierde información, ya que habrá efectos que no podrán estimarse y se tienen menos grados de libertad disponibles para el error. Los efectos que se pierden se espera que sean, en la medida de lo posible, interaciones de alto orden, las cuales se pueden ignorar de antemano con bajo riesgo.
2. Los efectos que sí se pueden estimar tienen al menos un *alias*. El que un efecto sea *alias* de otro, significa que en realidad son el mismo efecto con nombres dinstintos y al estimar uno de ellos al mismo tiempo, se estima el otro, de manera que no se pueden separar. Se debe contar de antemano con una estrategia de interpretación del efecto estimado.

## Sección 3

## Diseño factorial fraccionado $2^{k-1}$

- La notacción $2^{k-1}$ significa una *fracción a la mitad* del diseño factorial completo $2^k$, que tiene sentido fraccionar de esta manera cuando $k$ es mayor que 2.

# Diseño factorial fraccionado $2^{3-1}$

- El primer diseño que se puede fraccionar es el factorial completo $2^3$. Si se quiere fraccionar a la mitad este diseño, entonces es necesario seleccionar cuatro de entre los ocho posibles tratamientos. De entrada saber que existen $\binom{8}{4} = 70$ posibles grupos de cuatro tratamientos, por lo que surge la interrogante sobre cuál o cuáles de esas 70 posibles fracciones son las más apropiadas para estimar los efectos de mayor interés.
- Hay que recordar que con el diseño $2^3$ completo se pueden estimar siete efectos: $A$, $B$, $C$, $AB$, $AC$, $BC$ y $ABC$. De acuerdo a su jerarquía, el efecto menos importante *a priori* es la interacción triple $ABC$, así que éste es el efecto más sacrificable para generar la fracción a la mitad.

- La generación de la fracción se hace con base en los signos del contraste $ABC$: los signos $+$ del contraste $ABC$ señalan a los tratamientos que conforman la llamada *fracción principal*, y los signos $-$ indican la *fracción complementaria*.

| A | B | C | ABC |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 | - |
| 1 | -1 | -1 | + |
| -1 | 1 | -1 | + |
| 1 | 1 | -1 | - |
| -1 | -1 | 1 | + |
| 1 | -1 | 1 | - |
| -1 | 1 | 1 | - |
| 1 | 1 | 1 | + |

Cuadro 2: Diseño factorial completo $2^3$ y contraste ABC

- Los dos diseños factoriales fraccionados $2^{3-1}$ así generados proporcionan la misma calidad de información sobre los efectos potencialmente importantes. Se puede mostrar que cualquier otra elección de cuatro tratamientos daría peores resultados, en el cuadro 3, la fracción uno es la fracción principal generada por $I = +ABC$ y la fracción dos o complementaria se genera con $I = -ABC$. La letra $I$ surge porque este efecto generador hace las veces de identidad o neutro multiplicativo. De aquí el efecto no estiable $ABC$ se llama *generador de la fracción*, puesto que su contraste es la base para construir dos fracciones.

| **Fracción 1** $(I = +ABC)$ | | | | **Fracción 2** $(I = -ABC)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ | | $A$ | $B$ | $C$ | |
| $1$ | $-1$ | $-1$ | $a$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $(1)$ |
| $-1$ | $1$ | $-1$ | $b$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $ab$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ | $c$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $ac$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $abc$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $bc$ |

Cuadro 3: Dos posibles diseños fraccionados $2^{3-1}$

- Hay que observar que en las corridas que forman ambas fracciones en el cuadro 3, todos los factores están dos veces en nivel más y dos veces en nivel menos, en las corridas en las que un factor tiene los mismos signos, los otros factores tienen un signo más y uno menos. Lo anterior se relaciona con la propiedad de ortogonalidad.
- En el cuadro 3, no se podrá estimar el *efecto* $ABC$, puesto que no tiene contraste. Debido a que el *contraste* $ABC$ sólo tiene signos poisitivos, se puede decir que se confunde o se alía con el total de los datos, o dicho de otro modo, el efecto *ABC* sse confunde con la media global $\mu$.

# Estructura de alias del diseño $2^{3-1}$ con $I = ABC$

Al estimar los efectos potencialmente importantes con cualquiera de las fracciones dadas en el cuadro 3, resulta que cada efecto estimado tiene un alias. Consideremos la fracción I del cuadro. En ese diseño se generó con $I = +ABC$, que en este caso también es la **relación definidora**, ya que define totalmente *la estructura de alias* del diseño, la cual consiste en escribir la manera explicita cuáles son los alias de cada efecto, y esta estructura se deduce finalmente del generador de la fracción, considerando el signo utilizado, el contraste del efecto A está dado por:

$$\text{Contraste}\, A = (a + abc - b - c)$$

Mientas que al multiplicar las columnas $B \times C$ se obtiene:

$$\text{Contraste}\, BC = (a + abc - b - c)$$

Hay que notar que Contraste $A =$ Contraste $BC$, lo cual significa que los efectos $A$ y $BC$ son alias. Al estimar el efecto $A$ tamnbién se estima el efecto $BC$. Así en realidad se estima la suma de $A + BC$ de ambos efectos y no se sabe con certeza cuál es el quie predomina o si ambos afectan. Se igual forma de puede ver que en la fracción 1:

$$\text{Contraste}\, B = \text{Contraste}\, AC = (b + abc - a - c)$$
$$\text{Contraste}\, C = \text{Contraste}\, AB = (c + abc - b - a)$$

Así que $B$ es alias de $AC$ y $C$ es alias de $AB$. En resumen, la estructura del alias del diseño factorial fraccionado $2^{3-1}$ esta dada por:

$$A + BC$$
$$B + AC$$
$$C + AB$$

Otra forma de obtener la *estructura alias* de un diseño factorial fraccionado es con la relación definidora del diseño. Al multiplicar cada efecto por esa relación, con el uso de *multiplicación módulo* 2: que significa que al multiplicar cualquier efecto por la identidad es igual al efecto, y al multiplicar un efecto por sí mismo es igual a la identidad. El elias de $A$ se obtiene al multiplicar por $A$ ambos lados de la relación $I = ABC$

Y resulta que:

$$A \times I = A \times ABC = A^2BC = BC$$

Los alias de $B$ y $C$ se obtienen con:

$$B \times I = B \times ABC = AB^2C = ACC \times I = C \times ABC = ABC^2 = AB$$

Resulta tener más práctico obtener la estructrura de alias a partir de la relación definidora del diseño que de los contrastes. Ocurrió los dos hechos que se mencionan en la introducción: por construcción de la fracción un alias, lo que en ocasiones puede entorprecer su interpretación.

# Interpretación del efecto alias

- Es necesario suponer que sólo uno de ellos es responsable del efecto observado y que los demás efectos son nulos.
- Comúnmente resulta bastante riesgoso suponer *a priori* que las interacciones dobles no afectan, de aquí que no se recomienda utilizar este diseño, a menos que el costo experimental no permita correr el factorial completo.

# Estructura de alias del diseño $2^{3-1} con I = -ABC$

- La estructura alias para el diseño $2^{3-1}$ con la relación definidora $I = -ABC$ esta dada por:

$$A - BC$$
$$B - AC$$
$$C - AB$$

- Estimar los efectos $A$, $B$, y $C$, realmente se estiman $A - BC$, $B - AC$ y $C - AB$, respectivamente.

Sección 4

# El concepto de resolución

# El concepto de resolución

Al correr un diseño factorial fraccionado, los efectos no pueden estimarse de manera aislada, sino que se estiman las sumas (o restas) de efectos alias.

La interpretación de efectos alias que se suan se hace fácilmente si pueden suponerse que sólo uno de ellos es improtante, con lo que el efecto total se puede atribuir a este único efecto. De esta manera, la estrategía es elegir, siempre que sea posible, diseños fracionados en los cuales los efectos potencialmente importantes sean alias de efetos que sea razonable suponer que son poco improtantes.

# El concepto de resolución

La **resolución** es una característica de un factorial fraccionado, que indica qué tan bien puede estudiarse los efectos potencialmente importantes mediante tal diseño. Las resoluciones de mayor interés son las que se describen a continuación:

1. **Diseños de resolución III**. Los efectos principales no son alias entre ellos, pero existen efectos principales que son alias de alguna interacción doble. Por ejemplo, el diseño $2^{3-1}$ con relación definidora $I = ABC$ o $I = -ABC$ es de resolución III.

# El concepto de resolución

2. **Diseños de resolución IV**. Los efectos principales no están alias entre ellos ni con las interacciones dobles, pero algunas interacciones sobles están alias con otra interacción doble. Por ejemplo, el diseño $2^{4-1}$ con relación definidora $I = ABCD$ o $I = -ABCD$ es de resolución IV.
3. **Diseños de resolución V**. Los efectos principales y las interacciones dobles están alias con interacciones triples o de mayor orden, es decir, los efectos principales e ingteracciones dobles están limpiamente estimados. Por ejemplo, el diseño $2^{5-1}$ con relación definidora $I = ABCDE$ o $I = -ABCDE$ es de resolución V.

Una definición de resolución es la siguiente: un diseño factorial fraccionado es de resolución $R$ si los efectos formados por la interacción de $P$ factores no son alias de efectos de interacción que tengan menos de $R-P$ factores.

En general, en diseños factoriales fraccionados en dos niveles, la resolución está dado por la *palabra o efecto* de la relación definidora con el menor número de letras.

En diseños $2^{k-1}$, la resolujción es igual al número de letras del generador, ya que al mismo tiempo éste es la relación definidor. Así fracciones $2^{3-1}$, $2^{4-1}$ y $2^{5-1}$ tienen resolución $III$, $IV$ y $V$, respectivamente, porque sus generadores correspondientes se componen de tres, cuatro y cinco letras.

# Sección 5

## Construcción de fracciones $2^{k-1}$

- Método de dos pasos para diseños fraccionados $2^{k-1}$ con máxima resolución.

1. Diseño factorial completo.
    - Listar el diseño factorial completo para $k-1$ factores
    - Estas columnas serán las primeras $k-1$ columnas de la fracción deseada
2. Construir la columna faltante.
    - Multiplicar entre sí las columnas previas para obtener la columna $k$-ésima
    - Para la fracción complementaria, cambiar los signos de esta última columna
    - Resultado: Diseño factorial fraccionado $2^{k-1}$ con resolución máxima $R = k$

# Construcción del diseño $2^{4-1}$

Método de dos pasos para construir un diseño factorial fraccionado $2^{4-1}$ con:

- **Resolución IV**
- **Generador**: $I = -ABCD$

# Paso 1: Diseño base $2^3$

Primero se lista el diseño factorial completo $2^{4-1} = 2^3$:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| $+$ | - | - | |
| - | $+$ | - | |
| $+$ | $+$ | - | |
| - | - | $+$ | |
| $+$ | - | $+$ | |
| - | $+$ | $+$ | |
| $+$ | $+$ | $+$ | |

*Nota: Se dejan vacíos los niveles del factor D*

# Paso 2: Completar la columna D

La columna faltante se obtiene multiplicando $A \times B \times C$ según el generador $I = -ABCD$:

$$D = -A \times B \times C$$
$$\implies ABCD = -I$$

| A | B | C | D ($= -ABC$) |
|---|---|---|---|
| + | - | - | + |
| - | + | - | + |
| + | + | - | - |
| - | - | + | + |
| + | - | + | - |
| - | + | + | - |
| + | + | + | + |

# Diseño final $2^{4-1}$

El diseño completo con resolución IV queda:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 |
| -1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 |
| -1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 |

# Sección 6

## Experimento $2^{k-5}$

# Experimento $2^{k-5}$

- En esta notación:
  - $k$: número de factores totales.
  - $p$: número de **generadores** usados para definir la fracción.
  - Corridas:
$$N = 2^{k-p}$$
- Ejemplo:
  - $k = 10$, $p = 5$:
$$N = 2^{10-5} = 2^5 = 32$$
    Esto es **1/32** del diseño completo.
- Ventajas:
  - Reduce drásticamente el número de corridas.
  - Útil para **cribado inicial** (screening) de factores.
- Desventaja:
  - Introduce **confusión (aliasing)** entre ciertos efectos.

# Ejemplo visual de un $2^{k-5}$

| Factor | Niveles |
|---|---|
| A, B, C, D, E, F, G, H, I, J | -1, $+1$ |

- Diseño completo: $2^{10} = 1024$ corridas.
- Fracción $1/32$: solo 32 corridas.
- Se seleccionan las corridas mediante **ecuaciones generadoras** que relacionan factores.

# Sección 7

## Diseños factoriales fraccionados $2^{k-2}$

# Diseños factoriales fraccionados $2^{k-2}$

- Aquí:
  - $p = 2$
  - Fracción:
$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
  - Corridas:
$$N = 2^{k-2}$$
- Se definen **dos generadores**:
$$I = ABCD, \quad I = BCEF$$
- La **relación definitoria** se obtiene multiplicando y combinando generadores.
- Esto determina **qué efectos están confundidos**.

# Confusión y aliasing

- **Confusión**: cuando dos o más efectos tienen el mismo patrón en las corridas y no pueden separarse estadísticamente.
- Ejemplo:
  - Si $I = ABCD$:
    - $A \equiv BCD$
    - $B \equiv ACD$
    - $AB \equiv CD$
- Significa que el estimador de $A$ incluye el efecto real de $BCD$.

## Sección 8

# Diseño factorial fraccionado $2^{k-p}$

# Diseño factorial fraccionado $2^{k-p}$

- Fórmulas generales:
  - Corridas:
  $$N = 2^{k-p}$$
  - Fracción:
  $$\frac{1}{2^p}$$
- Paso clave: definir **generadores**.
- Ejemplo:
  - $k = 5$, $p = 1$:
    - Generador: $I = ABC$
    - Fracción: $1/2$
    - $N = 2^{5-1} = 16$ corridas.
- **Objetivo**: preservar estimabilidad de los efectos más importantes (efectos principales y bajas interacciones).

# Resolución de un diseño

- **Resolución III**: efectos principales confundidos con interacciones de dos factores.
- **Resolución IV**: efectos principales libres de confusión con interacciones de dos factores, pero éstas sí se confunden entre sí.
- **Resolución V**: efectos principales y de dos factores libres de confusión con interacciones de tres factores.
- **Regla**: mayor resolución implica mejor capacidad de estimación.

## Sección 9

# Experimento $2^{7-4}$

# Experimento $2^{7-4}$

- $k = 7$, $p = 4$:
$$N = 2^{7-4} = 2^3 = 8 \text{ corridas}$$
- Fracción:
$$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$
- Ejemplo de generadores:
$$I = ABC, \quad I = BDE, \quad I = CEF, \quad I = AFG$$
- Resolución:
  - Longitud mínima de palabra $= 3 \to$ Resolución III.
- Uso típico:
  - Experimentos muy preliminares con gran número de factores.

Sección 10

# Tres principios adicionales de los efectos factoriales

# Tres principios adicionales de los efectos factoriales

1. **Efectos principales e interacciones**:
   - Un efecto principal: cambio promedio en la respuesta cuando un factor varía.
   - Una interacción: el efecto de un factor depende del nivel de otro.
   - Ejemplo: el efecto de la temperatura depende de la presión.
2. **Suposición de insignificancia de interacciones altas**:
   - Interacciones de 3 o más factores suelen ser pequeñas y despreciables.
   - Permite reducir corridas sin perder información clave.
3. **Confusión (aliasing)**:
   - En fraccionados, efectos combinados no se pueden separar estadísticamente.
   - Es la base de la definición de los generadores.

Sección 11

# Tópicos adicionales sobre factoriales fraccionados

# Tópicos adicionales sobre factoriales fraccionados

- **Eficiencia**:
    - Se obtiene información esencial con menos corridas.
    - Ejemplo: $2^{10}$ requiere 1024 corridas; un $2^{10-5}$ solo 32.
- **Elección de generadores**:
    - Debe buscarse la mayor resolución posible.
    - Evitar que efectos principales se confundan entre sí.
- **Software**:
    - `R` (`FrF2`), `Minitab`, `JMP`.
    - Ejemplo con `R` al final.