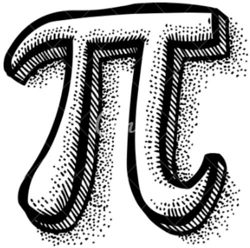
.



Transformaciones Especiales

Lineales y no lineales

Dr. Juan Luis Palacios Soto
palacios.s.j.l@gmail.com

¿Para qué sirven las transformaciones lineales o no? En un principio, las transformaciones lineales trabajan con espacios vectoriales, formados por vectores. Muchas veces asociamos los vectores con fuerzas y otras magnitudes físicas, sin embargo en el procesamiento digital de imágenes, un pixel se puede representar por un vector.
En ese caso, la imagen se puede manipular mediante transformaciones lineales convenientes para obtener los efectos deseados, por ejemplo proyectarse, rotarse, hallar la imagen especular o modificar su tamaño sin cambiar las dimensiones relativas.
Las transformaciones lineales también se usan ampliamente en economía y toma de decisiones, por ejemplo para conocer la cantidad de materia prima requerida para fabricar un determinado lote de productos.
El número de piezas necesario para ensamblar los diversos modelos que produce una fábrica, se pueden trabajar mediante un arreglo matricial.
En aeronáutica sirve para modelar el control aéreo, brazos robóticos.
En machine learning sirve para modificar la información o cantidad de datos que se tiene para adimensionarlos sin perder calidad en la inferencia, entre muchos otros.

Definición (tipos de tranformaciones)

Tranformaciones

- *Lineales:*
  - **-Rotaciones**
  - **-Proyecciones**
  - **-Expansiones**
  - **-Contracciones o dilataciones**
  - **-Reflexiones**
- *No lineales:*
  - **-Traslaciones-transformaciones afín-**

sci data
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Transformación lineal)

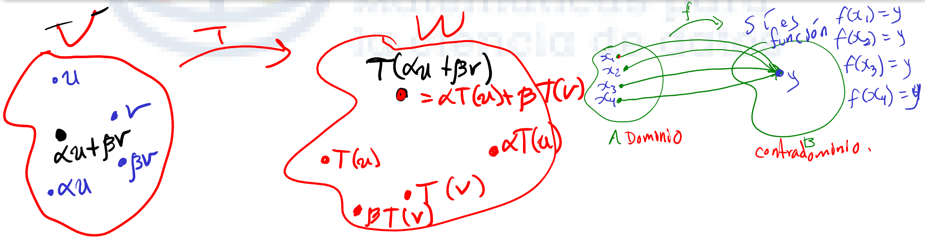
Una transformación lineal es una función T, cuyo dominio V y contradominio W son espacios vectoriales, en notación $T : V \to W$, tal que para todo $u, v \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$(*) \qquad T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Definición (Transformación afín -no lineal-)

Decimos que $S : V \to W$ es una transformación afín si existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que para todo $b \in W$ no nulo, se tiene que

$$S(u) = T(u) + b.$$



Ejemplo

Demuestre que $\underline{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$, *dada por*

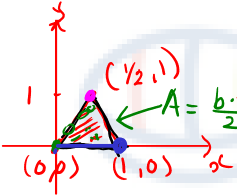
$$\underbrace{T(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2} = (\overbrace{\underbrace{2x+3y, x-y}_{2\text{ componentes}}}^{\in\mathbb{R}^2})$$

$\underline{2x+3y+5}$

No homogénea

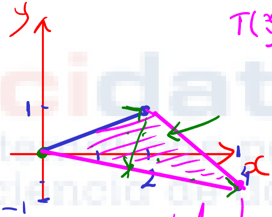
es una transformación lineal.

https://www.geogebra.org/m/keG7vsZS



$$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

T



$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix}}$$

$$T(0,0) = (2(0)+3(0), 0-0) = (0,0)$$

$$T(1,0) = (2(1)+3(0), 1-0) = (2,1)$$

$$T\left(\tfrac{1}{2},1\right) = \left(2\left(\tfrac{1}{2}\right)+3(1), \tfrac{1}{2}-1\right) = \left(4, -\tfrac{1}{2}\right)$$

Matriz

$$A_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

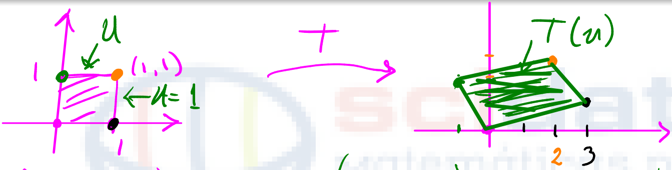
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A_T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Demuestre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$T(x, y) = (\underline{3x - y}, \underline{x + 2y}) \qquad \therefore \ t.l.$$

es una transformación lineal.



$T(0,0) = (0,0)$

$T(1,0) = (3, 1)$

$T(1,1) = (2, 3)$

$T(0,1) = (-1, 2)$

$$A_T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_T| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-(-1) = 7$$

$$\underline{\det(A_T) = \text{área } T(U)}$$

Ejemplo

La transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definido como* $T(v) = Av$, *donde* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y* $v^T \in \mathbb{R}^n$ *es una transformación lineal.*

$M_{m\times n}$

$A_{m\times n} x_{n\times 1} = y_{m\times 1}$

scidata matemáticas para la ciencia de datos

Ejemplo (Rotación en el plano)

La transformación lineal llamada rotación en el plano está dada por

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \leftarrow \text{rotación en sentido antihorario.}$$

Reto: La transpuesta, operador derivada y operador integral son transformaciones lineales.

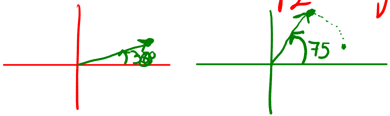
$\theta \in [0, 2\pi]$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ rotación en sentido horario

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

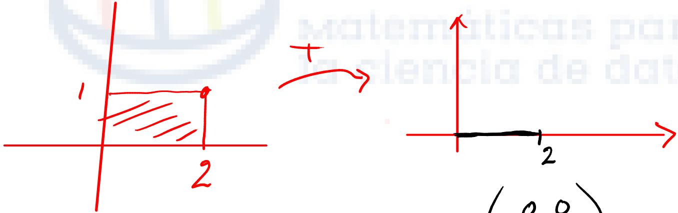


Ejemplo (Proyecciones)

La transformación lineal siguiente es una proyección sobre el eje de las abscisas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



Proyección en y $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

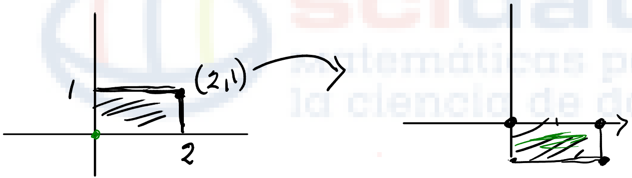
scidata matemáticas para la ciencia de datos

Ejemplo (Reflexión)

La transformación lineal siguiente es una reflexión con respecta al eje "x"

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



$T(2,0) = (2,0)$
$T(2,1) = (2,-1)$
$T(0,1) = (0,-1)$

una reflexión con "y"

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

scidata
matemáticas para la ciencia de datos

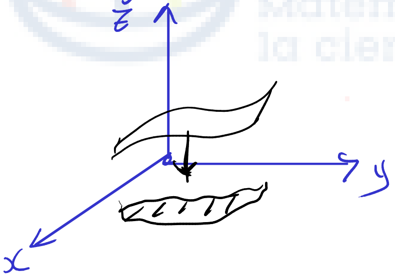
Ejemplo (Proyecciones)

La transformación lineal siguiente es una proyección sobre el plano xy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

proyección en el plano xy.



Reto:

Ejemplo (Transpuesta)

Demuestre que $T : A \to A^T$ *es una transformación lineal.*

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \checkmark \qquad A \in M_{m\times n}$$

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Ejemplo (Transpuesta)

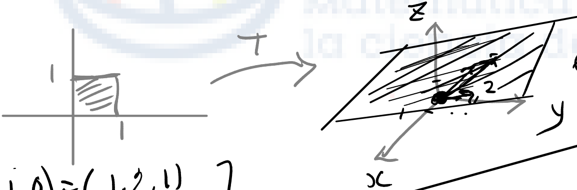
Demuestre que $T : A \to A^T$ *es una transformación lineal.*

$T(x,y) = (x-y,\ 2x+y,\ x+y)$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$A_T \in M_{3\times 2}$

$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$



$T(1,0) = (1,2,1)$
$T(1,1) = (0,3,2)$
$T(0,1) = (-1,1,1)$

estan en un mismo plano

$(1,0), (1,1), (1,0)$ son l.d.

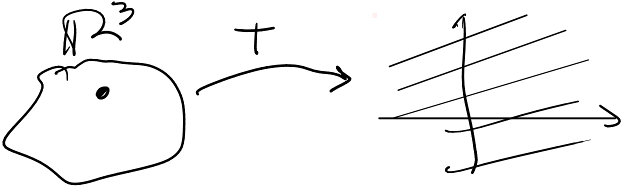
~~Ejemplo (Transpuesta)~~

~~*Demuestre que $T : A \to A^T$ es una transformación lineal.*~~

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x, y, z) = (2x + 4y - z, 5x + 6y + 7z)$

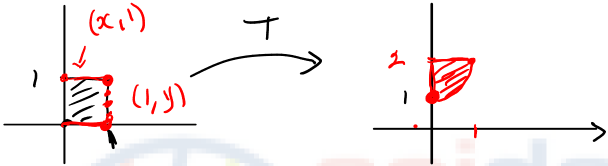
$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$



scidata matemáticas para la ciencia de datos

Ejemplo (Transformación no lineal)

$T(x,y) = (xy, y^2+1)$ *es una transformación NO lineal.* $b = (0,1)$



$T(0,0) = (0,1)$

$T(1,0) = (0,1)$

$T(x,y) = (0,1)$

$T(1,y) = (y, y^2+1)$

$T(1,1) = (1,2)$

$T(x,1) = (x,2)$

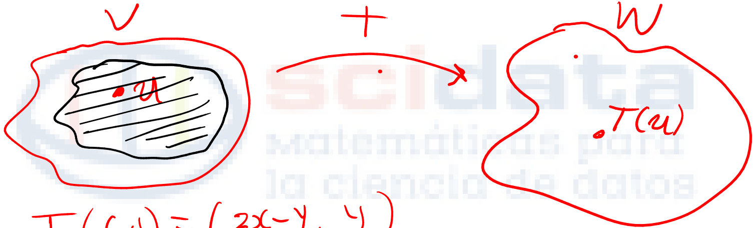
scidata matemáticas para la ciencia de datos

Definición (Dominio de una transformación)

Sea $T : V \to W$ *una t.l. el dominio de* T*, denotado por* *Dom*(T)*, es el subconjunto más grande de* V *(*Dom$(T) \subseteq V$*), tal que* $T(u) \in W$.

$D(T)$, Dominio (T)

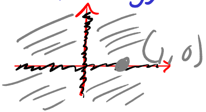
$$\text{Dom}(T) = \{u \in V : T(u) \in W\}$$



Ej. $T(x,y) = (2x-y,\ y)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\text{Dom}(T) = \mathbb{R}^2$.

Ej. $T(x,y) = \left(\frac{2}{xy},\ x+y\right)$ $\quad$ $xy \neq 0$. $x \neq 0$ y $y \neq 0$.



$T(1,0) = \left(\frac{2}{1\cdot 0},\ 1+0\right) = \left(\frac{2}{0},\ 1\right) \notin \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\frac{2}{0} \notin \mathbb{R}$

Definición (Dominio de una transformación)

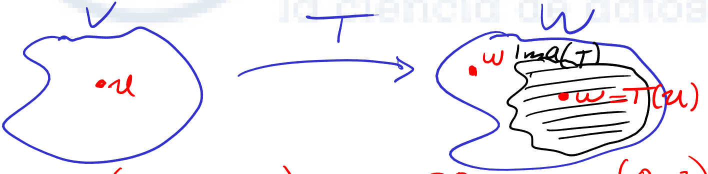
Sea $T : V \to W$ una t.l, el dominio de T, denotado por Dom(T), es el subconjunto más grande de V (Dom$(T) \subseteq V$), tal que $T(u) \in W$.

$$\text{Dom}(T) = \{u \in V : T(u) \in W\}$$

Definición (Imagen o recorrido de una transformación)

Sea $T : V \to W$ una t.l, el recorrido de T, denotado por Ima(T), es el subconjunto más grande de W (Ima$(T) \subseteq W$), tal que si $w \in$ Ima(W), entonces existe un $u \in V$, tal que $T(u) = w$.

$$\text{Ima}(T) = \{w \in W : \exists u \in V, T(u) = w\}$$



Ej
$T(x,y) = \left(\frac{2}{xy}, x+y\right)$ $\quad w \in \mathbb{R}^2$, $w = (0,3)$

$\Rightarrow 3 = x+y \Rightarrow y = -x+3$ y ¿$0 = \frac{2}{xy}$? no hay

$(0,3)$ no es parte de Ima(t).

Definición (Dominio de una transformación)

Sea $T : U \to W$ una t.l, el dominio de T, denotado por Dom(T), es el subconjunto más grande de V (Dom$(T) \subseteq V$), tal que $T(u) \in W$.

$$\text{Dom}(T) = \{u \in V : T(u) \in W\}$$

Definición (Imagen o recorrido de una transformación)

Sea $T : U \to V$ una t.l, el recorrido de T, denotado por Ima(T), es el subconjunto más grande de W (Ima$(T) \subseteq W$), tal que si $w \in$ Ima(W), entonces existe un $u \in V$, tal que $T(u) = w$.

$$\text{Ima}(T) = \{w \in W : \exists u \in V, T(u) = w\}$$

Definición (Kernel o núcleo de una transformación lineal)

Sea $T : U \to W$ una t.l, el kernel T, denotado por ker(T), es el subconjunto más grande de V (Dom$(T) \subseteq V$), tal que $T(u) = 0 \in W$.

$$\text{ker}(T) = \{u \in V : T(u) = 0 \in W\}$$

Definición (Dominio de una transformación)

Sea $T : U \to V$ una t.l, el dominio de T, denotado por Dom(T), es el subconjunto más grande de V (Dom$(T) \subseteq V$), tal que $T(u) \in W$.

$$\text{Dom}(T) = \{u \in V : T(u) \in W\}$$

Definición (Imagen o recorrido de una transformación)

Sea $T : U \to V$ una t.l, el recorrido de T, denotado por Ima(T), es el subconjunto más grande de W (Ima$(T) \subseteq W$), tal que si $w \in$ Ima(W), entonces existe un $u \in V$, tal que $T(u) = w$.

$$\text{Ima}(T) = \{w \in W : \exists u \in V, T(u) = w\}$$

Definición (Kernel o núcleo de una transformación lineal)

Sea $T : U \to V$ una t.l, el kernel T, denotado por ker(T), es el subconjunto más grande de V (Dom$(T) \subseteq V$), tal que $T(u) = 0 \in W$.

$$\text{ker}(T) = \{u \in V : T(u) = 0 \in W\}$$

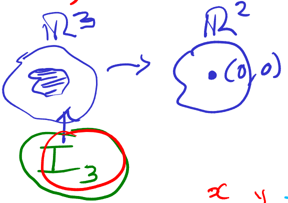
Teorema (Kernel y recorrido son espacios vectoriales)

Sea $T : U \to V$ una t.l, el núcleo y el recorrido de T son subespacios vectoriales de V y W, respectivamente.

Ej. $T(x,y,z) = (x+y+z,\ y-x)$ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ $(1,0)$, $(0,1)$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$



$$A_T X = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$X = (x,y,z)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

libre

Gauss.

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \text{G-J.} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_T'$$

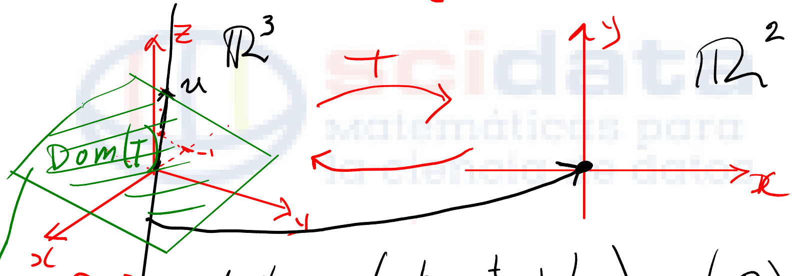
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$A_T' + B = I_3 \quad \therefore \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N(T)=\left\{\, \underline{t\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right)} : t\in\mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Ej. } t=2 \Rightarrow 2\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right)=\underbrace{(-1,-1,2)}_{u} \leftarrow$$

$$Au=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-1+2\\1-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{t}{2}\\-\frac{t}{2}\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{t}{2}-\frac{t}{2}+t\\\frac{t}{2}-\frac{t}{2}+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x + \frac{z}{2} = 0 \\ \to y + \frac{z}{2} = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} z \\ y = -\frac{1}{2} z \end{array} \Rightarrow S = \left\{ (x, y, z) = \left(-\tfrac{1}{2}t, -\tfrac{1}{2}t, t\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

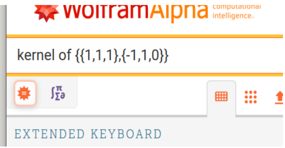
$$\underline{z = t \in \mathbb{R}} \qquad \therefore \; t\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

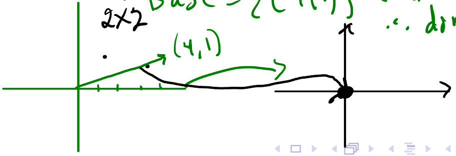
$$N(T) = \{(1, 1, -2)\} \text{ con } t = -2.$$

Ejercicio: $A_T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$ $\quad N(A_T)$

2×2 $\quad$ Base $= \{(4,1)\}$ $\leftarrow$ 1 elemento

$\therefore \dim(N(T)) = 1$





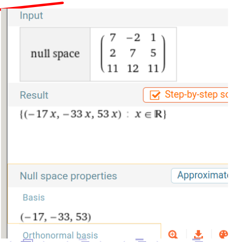
$$\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & -12\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

base del núcleo.

$\therefore N(T) = \{(4,1)\}$. dimensión del núcleo es denominada nulidad

Ej. Núcleo de $A = \begin{pmatrix}7 & -2 & 1\\ 2 & 7 & 5\\ 11 & 12 & 11\end{pmatrix}$.



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 3 & -12 & 3 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(+ \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \right)$$

Matriz reducida.

$$\text{Base} = \{ \underbrace{(4,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{v_2} \}$$ nulidad $= 2$.

generan un plano.

$$x\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-y \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 4x-y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

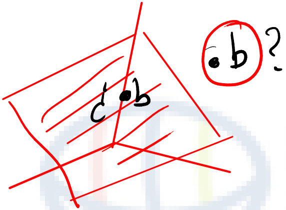
Imag (T)

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $\dim N(T) = 2 \Rightarrow 3 = 2 + 1$

$u_1 = (-1, 3, 5)$, $v_1 = (0, -4, -3)$

u_1 y v_1 generan un plano en $\mathbb{R}^3$.

$b = (2, -1, 3)$



$\alpha u_1 + \beta v_1 = b$?

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 5 & -3 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 13 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 37/4 \end{array}\right)$$

$3\left(-\frac{5}{4}\right) + 13 \neq 0$.

No hay solución

Teorema

Toda transformación lineal $T : V \to W$ *donde* V, W *son de dimensión finita, se le asocia una matriz.*

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

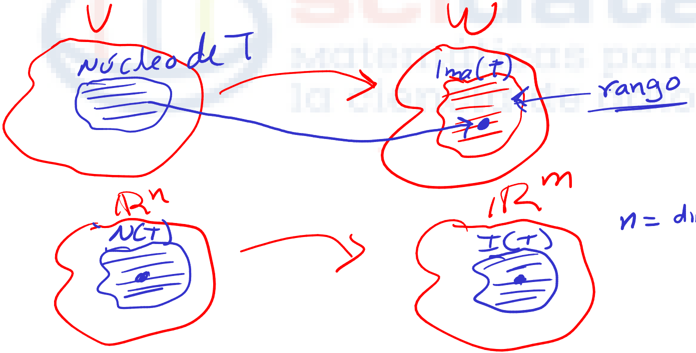
Teorema

Toda transformación lineal $T : V \to W$ donde V, W son de dimensión finita, se le asocia una matriz.

Teorema (Del Rango)

Sea $T : V \to W$ una t.l, entonces

$$dim(V) = dim(\overset{\text{Ima.}}{\cancel{\text{rango}}}) + dim(\overbrace{\text{núcleo}}^{\text{nulidad.}})$$



$n = \dim(N(T)) + \text{rank}(T)$

Teorema

Toda transformación lineal $T : V \to W$ donde V, W son de dimensión finita, se le asocia una matriz.

Teorema (Del Rango)

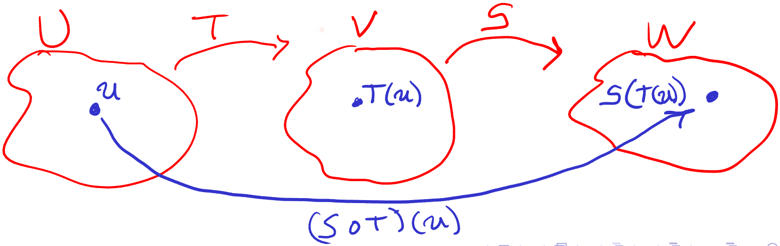
Sea $T : V \to W$ una t.l, entonces

$$dim(V) = dim(\text{rango}) + dim(\text{núcleo})$$

Teorema (Composición de transformaciones)

Sea $T : U \to V$ y $S : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces la composición de S con T es el mapeo $S \circ T$, definido por $(S \circ T)(u) = S(T(u))$ es lineal, donde $\underline{u}$ está en U.

A_T
B_S



$\underline{B_S A_T u}$

Teorema

Toda transformación lineal $T : V \to W$ donde V, W son de dimensión finita, se le asocia una matriz.

Teorema (Del Rango)

Sea $T : V \to W$ una t.l, entonces

$$dim(V) = dim(\text{rango}) + dim(\text{núcleo})$$

Teorema (Composición de transformaciones)

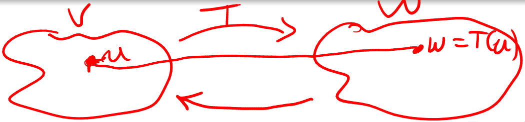
Sea $T : U \to V$ y $S : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces la composición de S con T es el mapeo $S \circ T$, definido por $(S \circ T)(u) = S(T(u))$ es lineal, donde u está en U.

Teorema (Inversa de una transformaciones)

Una transformación $T : V \to W$ decimos que es invertible si existe una transformación lineal $T^{-1} : W \to V$ tal que $(T^{-1} \circ T) = (T \circ T^{-1}) = I_n$, En este caso T^{-1} se denomina inversa de T.

$T^{-1}(T(u)) = u$

$T(T^{-1}(u)) = u$



Definición (Inyectiva y sobreyectiva)

Sea $T : V \to W$ una t.l, decimos que T es inyectiva si para todo $u \neq v$ se tiene $T(u) \neq T(v)$. Si $T(V) = W$ diremos que T es sobreyectiva. Si se T es tanto inyectiva como sobreyectiva, diremos simplemento que es biyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (2x, x - y, x + y)$ es inyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y)$ es biyectiva

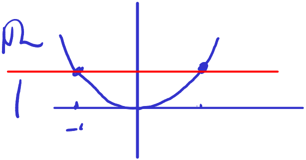
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Nota: inyectiva → uno-uno → 1:1

$T(x) = x^2$ $\quad T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T(1) = 1$

$T(-1) = 1$ $\quad \therefore$ no es 1:1



Definición (Inyectiva y sobreyectiva)

Sea $T : V \to W$ una t.l, decimos que T es inyectiva si para todo $u \neq v$ se tiene $T(u) \neq T(v)$. Si $T(V) = W$ diremos que T es sobreyectiva. Si se T es tanto inyectiva como sobreyectiva, diremos simplemento que es biyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (2x, x - y.x + y)$ es inyectiva
Compruebe que $T(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y)$ es biyectiva

$T : \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}^3$

$2 = \text{rank} + \text{nulity}$
$= 2 + 0$

$u = (x_1, y_1)$ $v = (x_2, y_2)$

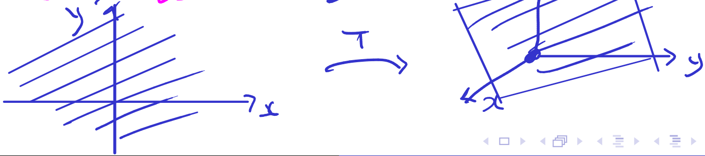
$T(u) = T(v) \Rightarrow T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2)$

$\Rightarrow (2x_1, x_1 - y_1, x_1 + y_1) = (2x_2, x_2 - y_2, x_2 + y_2)$

(1) $\cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

(2) $\cancel{x_1} - y_1 = \cancel{x_2} - y_2 \Rightarrow y_1 = y$ $\therefore$ T es inyectiva.

(3) $\cancel{x_1} + y_1 = \cancel{x_2} + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$



Definición (Inyectiva y sobreyectiva)

Sea $T : V \to W$ una t.l, decimos que T es inyectiva si para todo $u \neq v$ se tiene $T(u) \neq T(v)$. Si $T(V) = W$ diremos que T es sobreyectiva. Si se T es tanto inyectiva como sobreyectiva, diremos simplemento que es biyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (2x, x - y, x + y)$ es inyectiva
Compruebe que $T(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y)$ es biyectiva

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow A_T \in M_{3\times 2}$

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vect. filas no nulos

F_1 y F_2 son l.i. y forman una base para $\mathbb{R}^2$

$Dom(T) = \{a(2,0), b(1,-1) : a, b \in \mathbb{R}\}$

C_1 y C_2 son l.i. y forman una base para $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) !$$

Definición (Inyectiva y sobreyectiva)

Sea $T : V \to W$ una t.l, decimos que T es inyectiva si para todo $u \neq v$ se tiene $T(u) \neq T(v)$. Si $T(V) = W$ diremos que T es sobreyectiva. Si se T es tanto inyectiva como sobreyectiva, diremos simplemento que es biyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (2x, x - y.x + y)$ es inyectiva
Compruebe que $T(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y)$ es biyectiva

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 = 2 + 0$

base para $Dom(T) = \{(1,-2), (2,-3)\}$ dim 2.

base para $Ima(T) = \{(1,2), (-2,-3)\}$

rank $= 2 =$ Esp. fila

$N(T) = \{(0,0)\}$.

Definición (Inyectiva y sobreyectiva)

Sea $T : V \to W$ una t.l, decimos que T es inyectiva si para todo $u \neq v$ se tiene $T(u) \neq T(v)$. Si $T(V) = W$ diremos que T es sobreyectiva. Si se T es tanto inyectiva como sobreyectiva, diremos simplemento que es biyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (2x, x - y.x + y)$ es inyectiva
Compruebe que $T(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y)$ es biyectiva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

x y principales

z w libres

Row-reduced matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Download Page

z w x y

F_1

$F_2 +$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\times 3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4 = \underbrace{\text{rank}}_{2} + \underbrace{\text{nulidad}}_{2} \Rightarrow T \text{ es } 1-1$$

$$\Leftrightarrow \text{nulidad} = 0.$$

Definición (Inyectiva y sobreyectiva)

Sea $T : V \to W$ una t.l, decimos que T es inyectiva si para todo $u \neq v$ se tiene $T(u) \neq T(v)$. Si $T(V) = W$ diremos que T es sobreyectiva. Si se T es tanto inyectiva como sobreyectiva, diremos simplemento que es biyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (2x, x - y.x + y)$ es inyectiva
Compruebe que $T(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y)$ es biyectiva

Teorema

Sea $T : V \to W$ una t.l inyectiva. Si $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $T(\beta) = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es linealmente independiente en W.

matemáticas para la ciencia de datos

Definición (Inyectiva y sobreyectiva)

Sea $T : V \to W$ una t.l, decimos que T es inyectiva si para todo $u \neq v$ se tiene $T(u) \neq T(v)$. Si $T(V) = W$ diremos que T es sobreyectiva. Si se T es tanto inyectiva como sobreyectiva, diremos simplemento que es biyectiva

Compruebe que $T(x, y) = (2x, x - y.x + y)$ es inyectiva
Compruebe que $T(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y)$ es biyectiva

Teorema

Sea $T : V \to W$ una t.l inyectiva. Si $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $T(\beta) = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es linealmente independiente en W.

Teorema

Una $T : U \to V$ t.l es invertible si y sólo si, es biyectiva, también llamada isomorfismo.

Definición (Espacios vectoriales isomorfos)

Dos espacios V, W son isomorfos si y sólo si existe una t.l $T : V \to W$ isomorfa.

$\mathbb{R}^4 \cong M_{2\times2} \cong M_{4\times1}$, $\mathbb{R}^5 \cong M_{5\times1} \cong M_{1\times5}$

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \to (3, 5, 7, 1)$

Teorema (Fundamental para las matrices o transformaciones invertibles)

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal cuya representación matricial en las bases de V y W es A. Las siguientes a?rmaciones son equivalentes:

1. *A es invertible.*
2. *$Ax = b$ tiene una solución única para todo $b \in W$.*
3. *$Ax = 0$ tiene sólo la solución trivial.*
4. *La forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.*
5. *A es un producto de matrices elementales.*
6. $rank(A) = n$
7. *nulidad(A)=0*
8. *Los vectores columna de A son linealmente independientes.*
9. *Los vectores columna de A generan $\mathbb{R}^n$.*
10. *Los vectores columna de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.*
11. *Los vectores renglón de A son linealmente independientes.*
12. *Los vectores renglón de A generan $\mathbb{R}^n$*
13. *Los vectores renglón de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.*
14. $det(A) = 0$
15. *0 no es un eigenvalor de A*
16. *T es invertible*
17. *T es biyectiva*
18. $ker(T) = \{0\}$ *y* $rango(T) = W$

Ejemplo

La bacteria Escherichia coli (o E. coli, para abreviar) se encuentra comúnmente en los intestinos de los humanos y otros mamíferos. Plantea severos riesgos a la salud si escapa hacia el ambiente. En condiciones de laboratorio, cada célula de la bacteria se divide en dos cada 20 minutos. Si comienza con una sola célula de E. coli, ¿cuántas habrá después de un día?

Ver, página 537 Poole

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos