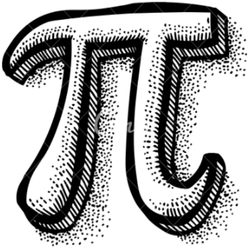
scidata

.



Derivabilidad

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Límite de una función)

La función f tiende a el límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a c significa: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x que satisface $0 < |x - c| < \delta$ se cumple $|f(x) - L| < \epsilon$

Notación: El número L al que se acerca f cuando x se aproxima a c se denota por $\lim_{x \to c} f(x)$, es decir,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Observe que el límite, en caso de existir, deberá ser un número real, es decir si un límite tiende a $+\infty$ o bien a $-\infty$, entonces no existirá el límite, toda vez que $\pm\infty$ no son números reales.

Teorema (Límites laterales)

El $\lim_{x \to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$.

Teorema (Unicidad del límite)

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, *entonces* $L_1 = L_2$.

Teorema (Límites básicos)

Sean $b, x_0 \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{Z}^+$*, entonces*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} b = b$ *b)* $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ *c)* $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n.$

Teorema (Funciones con dominio X)

Si f es una función polinomial, racional, exponencial, trigonométrica, logarítmica, tal que $Dom(f) = X$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in X.$$

Observación: El que una función tenga de dominio $\mathbb{R}$ no implica que el límite exista para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Teorema (Funciones casi iguales)

Supongamos que $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \neq x_0$. *Si* $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ *existe, entonces* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *existe y coincide con el de* g *en* x_0.

Nota: Este teorema nos ayuda a resolver límites por medio de la factorización, racionalización y operaciones algebraicas, regularmente.

Teorema (Operaciones algebraicas con límites)

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, *entonces*

- a) $$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 + L_2$$
- b) $$\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = L_1 L_2$$
- c) $$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2},$$ *siempre que* $L_2 \neq 0$.

Corolario

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $b \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

- (a) $\lim\limits_{x \to x_0} b f(x) = b \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = bL$
- (b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)^n = L^n$

Teorema (Un límite que no existe)

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

Teorema (Límite de funciones radicales)

Para $0 < n$ *par y* $x_0 > 0$*, o bien para* $0 < n$ *impar y* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

Teorema (Límite de una función compuesta)

Si f, g *son funciones tales que* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to L} f(x) = K$*, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = K$$

Definición (Límite al infinito)

La función f tiende a el límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $+\infty$ significa: para todo $\epsilon > 0$ existe $n > 0$ tal que, para todo $x > n$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Notación: $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Teorema

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ejemplo

Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Definición (Asíntota horizontal)

Si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

existe, diremos que $y = L$ *es una asíntota horizontal para la gráfica de* f.

Definición (Límite infinito)

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. *Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

diremos que f *tiende a* $+\infty$ *o bien a* $-\infty$, *pero NO significa que dicho límite exista.*

Definición (Asíntota vertical)

Si

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty,$$

diremos que en $x = x_0$ *existe una asíntota vertical para la gráfica de* f.

Definición (Continuidad en un punto)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en un punto* a*, si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}.$$

En notación $\epsilon - \delta$ esta definición queda como sigue:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tal que} \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Definición (Continuidad en un intervalo abierto)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en un intervalo* (b, c), *si* f *es continua en toda* $a \in (b, c)$, *es decir*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \forall a \in (b, c).$$

Definición (Continuidad en un intervalo cerrado)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en un intervalo cerrado de la forma* $[b, c]$*, con* $-\infty < b < c < \infty$ *si* f *es continua en* (b, c) *y además*

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b) \quad y \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

Teorema (Operaciones algebraicas)

Si f y g son funciones continuas en I, entonces

a. $f + g$ *es continua en* I,
b. fg *es continua en* I,
c. $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* I, *siempre que* g *no se anule en* I.

Teorema (Composición de funciones)

Si g *es continua en* a *y* f *es continua en* $g(a)$*, entonces* $f \circ g$ *es continua en* a*.*

Definición (Tipos de discontinuidad)

Si una función no es continua en un punto a, diremos que tiene una discontinuidad:

1. *de salto si*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2,$$
pero $L_1 \neq L_2$,
2. *al finito si*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$
3. *removible si*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$
pero $f(a) \neq L$ o bien $f(a)$ no está definido y

Tipos de discontinuidades

- Evitables:
  - **-Removibles**
- Inevitables:
  - **-De salto**
  - **-Al infinito**

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad f(x) = \frac{2}{1-x}, \quad f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \leq 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$$

Teorema

Sea f continua sobre un intervalo de la forma $[a,b]$ con $-\infty < a < b < \infty$, entonces:

a. *(Teorema de función acotada). f es acotada, es decir, $\exists\ M \in \mathbb{R}^+$, tal que $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$,*
b. *(Teorema de extremos de una función). f toma valores extremos, es decir, $\exists\ \alpha, \beta \in [a,b]$, tal que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)\ \forall x \in [a,b]$,*
c. *(Límite de una función compuesta). si $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ y $L \in (a,b)$, entonces*

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$$

Definición

Decimos que la función f es derivable en el punto a, denotado por $f'(a)$, si

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

existe. Decimos simplemente que f es derivable, si es derivable en a para toda $a \in Dom(f)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \longleftrightarrow \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

Teorema (Derivabilidad implica continuidad)

Si f es derivable en a, entonces f es continua en a

Notaciones más comunes

Lagrange	Leibniz	Newton	Arbogast
$y', f'(x)$	$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d}{dx}f(x)$	$\dot{y}, \dot{f(x)}$	$Dy, Df(x)$

Ejemplo

Suponga que un proyectil es lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de 45m por segundo. Suponiendo que no hay fricción, que sólo actúa la gravedad, el proyectil se moverá en línea recta. Sea $s(t)$ *la altura del proyectil dado en metros en el instante* t *segundos después del lanzamiento. Experiencias físicas indican que mientras el proyectil está en movimiento, su altura viene dada aproximadamente por la función* $s(t) = 45t - 5t^2$*, donde el término* $-5t^2$ *es debido a la influencia de la gravedad. Observemos que* $f(0) = 0 = f(9)$*, por lo que la fórmula sólo tiene sentido para* $t \in [0, 9]$*. Calcule la velocidad instantánea del proyectil en todo instante de tiempo* $t \in [0, 9]$ *y la velocidad media en el intervalo de tiempo* $[3, 7]$*.*

Definición (Funciones no derivables)

Una función **NO** *tiene derivada en un punto a si:*

1. *la función es discontinua en $x = a$,*
2. *la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ presenta un "pico", o bien*
3. *la recta tangente en $(a, f(a))$ es vertical. La cual ocurre siempre que f sea continua en a y* $\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$

Ejemplo caso 1

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no es diferenciable en cero, porque no es continua en cero.

Ejemplo caso 2

La función $f(x) = |x+3| - 5$ no es derivable en $x = -3$, porque la gráfica de esta función presenta un pico en el punto $(-3, -5)$.

Ejemplo caso 3

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tiene recta tangente vertical en el origen.

Concepto de la derivada según el contexto

Expresión	**Matemáticas**: Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función real	**Física**: Si $f(t)$ denota, digamos, posición de una partícula en el tiempo t	**Ingeniería**: Si $f(x)$ denota, digamos, el costo
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	**Valor medio** de f en $[a, a+h]$	**Velocidad media** de f en $[a, a+h]$	**Razón o tasa de cambio medio** del costo en $[a, a+h]$
$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	**Pendiente** de la recta tangente a la gráfica en $(a, f(a))$	Velocidad **instantánea** de la partícula en el instante $t = a$	Razón-tasa de cambio **instantánea** del costo en el instante $x = a$