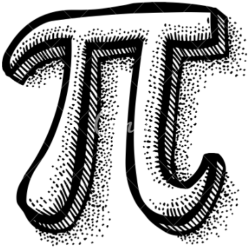
.



Gradiente

Conjuntos de nivel

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Derivada de un campo escalar)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Definimos la derivada de f a partir del punto $a \in \mathbb{R}^n$ en la dirección $y \in \mathbb{R}^n$, como

$$f(a; y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}, \tag{1}$$

siempre que dicho límite exista.

Nota: Si el vector dirección y es de norma 1, la derivada anterior se llama **derivada direccional, en la dirección de** y y el cálculo se simplifica con el gradiente.

Definición (Derivadas parciales)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. Definimos la derivada parcial de* f *en* x_i, $i = 1, 2, ..., n$, *en punto* $a \in \mathbb{R}^n$ *como*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}, \tag{2}$$

siempre que dicho límite exista. El vector e_i *es el vector coordenado donde todas las componentes son cero, excepto en la coordenada* i *que es 1.*

Definición (Gradiente)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. Definimos el gradiente de* f *en el punto* a*, denotado por* $\nabla f(a)$*, como*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right). \tag{3}$$

Definición (Conjuntos de nivel)

Dado un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos el conjunto de nivel, al nivel $k \in \mathbb{R}$, como el conjunto siguiente:

$$CN_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k\}.$$

Si $n = 2$, dichos conjuntos de nivel se conocen como **curvas de nivel** *(y $CN_2 = CN$), $CN \subseteq \mathbb{R}^2$, y si $n = 3$ se conocen como* **superficies de nivel** *($CN_3 = SN$), $SN \subseteq \mathbb{R}^3$..*

Definición (Campo escalar diferenciable)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. Decimos que* f *es diferenciable en* $a \in \mathbb{R}^n$*, si existe una transformación lineal* $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, y una función escalar* E_a *tal que*

$$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + E_a$$

Teorema (Condición suficiente de diferenciabilidad)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. Decimos que* f *es diferenciable en* a *con diferencial* T_a*, si* $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ *es continua para toda* $i = 1, 2, ..., n$ *y* $T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v$*.*

Teorema (Plano tangente)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. Si* f *es diferenciable en* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, *entonces existe un plano tangente en el punto* $f(a)$, *el cual está dado por*

$$\nabla F(a) \cdot x = 0,$$

donde $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *esta dada por* $F(a) = (a_1, a_2, ..., a_n, f(a_1, a_2, ..., a_n))$,
$x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., n_n)$.

scidata

matemáticas para la ciencia de datos