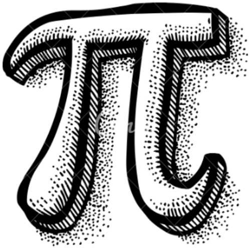
scidata

.



Álgebra Vectorial

Operaciones elementales

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Teorema (Propiedades de campo para $\mathbb{R}$)

1. $x + y \in \mathbb{R}$ *(Clausura bajo la suma).*
2. $xy \in \mathbb{R}$ *(Clausura bajo el producto).*
3. $x + y = y + x$ *(Conmutatividad con la suma).*
4. $xy = yx$ *(Conmutatividad con el producto).*
5. $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$ *(Asociatividad con la suma).*
6. $(xy)z = x(yz) = xyz$ *(Asociatividad bajo el producto).*
7. *Existe un único elemento* $0 \in \mathbb{R}$ *llamado neutro aditivo tal que* $x + 0 = x$*. (Existencia y unicidad de neutro aditivo)*
8. *Dado* $x \in \mathbb{R}$ *existe un único elemento* $y \in \mathbb{R}$ *llamado inverso aditivo tal que* $x + y = 0$*, es decir* $y = -x$*. (Existencia y unicidad de inversos aditivos)*
9. *Existe un único elemento* $1 \in \mathbb{R}$ *llamado neutro multiplicativo tal que* $1x = x1 = x$*. (Existencia y unicidad del neutro multiplicativo)*
10. *Dado* $x \neq 0$ *existe un único elemento* $y \in \mathbb{R}$ *llamado neutro multiplicativo, tal que* $xy = 1$*, es decir* $y = x^{-1}$*. (Existencia y unicidad de inversos multiplicativos)*
11. $x(y + z) = (xy + xz)$ *(Distributividad).*

Definición (Conjunto $\mathbb{R}^n$)

El conjunto $\mathbb{R}^n$ *lo definiremos como*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \quad \textit{para todo } (\forall) i = 1, 2, ..., n\}.$$

A los elementos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *se les denomina vectores de* $\mathbb{R}^n$ *o* n*-adas.*

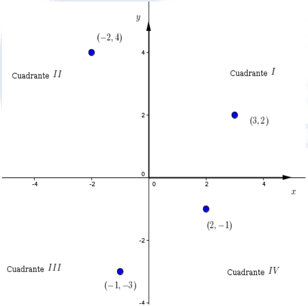
Notación en física, matemática y en computación.

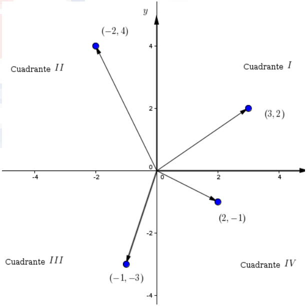
Ejemplo (Conjunto $\mathbb{R}^2$)

El conjunto $\mathbb{R}^2$ son todos los elementos de la forma (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos representar a los elementos de $\mathbb{R}^2$ en el llamado **plano cartesiano**, *el cual se divide en cuatro regiones llamadas* **cuadrantes**, *los cuales se recorren de manera antihoraria por convención. Wolframalpha*



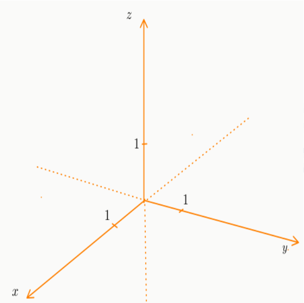


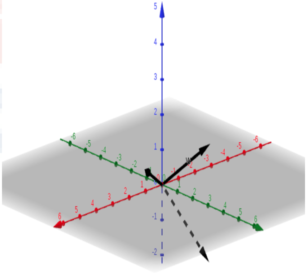
Ejemplo (Conjunto $\mathbb{R}^3$)

El conjunto $\mathbb{R}^3$ *son todos los elementos de la forma* (x, y, z) *con* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *es decir,*

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

En este caso el espacio **tridimensional** *se divide en ocho regiones llamadas* **octantes**, *los cuales se recorren de manera antihoraria, primero para* $z > 0$ *y luego para* $z < 0$.





Definición (Suma en $\mathbb{R}^n$)

Para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, *de la forma*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

definimos una operación llamada **suma** *de* x *con* y, *denotada por* $x + y$, *como*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

Wolframalpha

Definición (Vector de y a x)

Diferencia de vectores, representa el vector que une el punto y con el punto x. en cambio si la diferencia es $y - x$, entonces tendremos una flecha de la misma longitud pero en sentido opuesto. *Wolframalpha*

Definición (Producto de un vector $\mathbb{R}^n$ con escalares reales)

Para todo escalar real c y para todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$, de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. definimos una operación llamada **producto** *de c con x, denotada por cx, como*

$$cx = (cx_1, cx_2, ..., cx_n).$$

Wolframalpha y geogebra.

De manera geométrica, si multiplicas un vector por un escalar, es alargar o acortar el vector, manteniendo la misma dirección si el escalar es positivo, mientras que el sentido es contrario si el escalar es negativo.

Teorema (Propiedades de la suma y el producto con escalar)

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *y para todo par de escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, se cumplen los siguientes 10 axiomas:*

Axiomas de clausura

1. $x + y \in \mathbb{R}^n$ *(Clausura bajo la suma).*
2. $\alpha x \in \mathbb{R}^n$ *(Clausura bajo el producto con escalar).*

Axiomas bajo la suma

3. $x + y = y + x$ *(Conmutatividad).*
4. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(Asociatividad).*
5. *Existe un único elemento* $0 = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ *llamado neutro tal que* $x + 0 = x$ *(Elemento neutro).*
6. *Existe un único elemento* $y \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $x + y = 0$*, es decir* $y = -x$ *(Existencia de inversos).*

Axiomas bajo el producto con escalar

7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ *(Asociatividad).*
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *(Distributividad).*
9. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(Distributividad).*
10. $1x = x$, $1 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio:

Para los vectores $x = (7, 3, 6, \pi)$, $y = (-2, 5, 6, 1)$, en $\mathbb{R}^4$, determine: (i) $3x - 2y$; (ii)$\pi x + 3y$; (iii)los inversos aditivos de x, y.

Definición (Vectores idénticos)

Decimos que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, *de la forma*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

son idénticos si y sólo si $x_i = y_i$ *para toda* $i = 1, 2, ..., n$, *es decir,*

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \cdots, \quad x_n = y_n.$$

Nota: Dos vectores tienen la misma magnitud y la misma dirección, aunque tengan distintos puntos de aplicación.

Definición (Vectores paralelos)

Decimos que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ *no nulos son paralelos si existe una escalar* $c \neq 0$*, tal que*

$$x = cy.$$

La notación de paralelismo entre vectores es $x \parallel y$*.*

Ejemplo

Determine si los vectores $x = (12, -6, 15)$, $y = (-4, 2, -5)$ *son paralelos.*

Ejemplo

Determine si los vectores $x = (-2, 5, 7)$, $y = (-3, 7, -5)$ *son paralelos.*

Definición (Norma, magnitud o longitud de un vector $x \in \mathbb{R}^n$)

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. definimos la norma de x, denotada por $||x||$, como

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Nota: longitud de un vector en matemáticas $\neq$ longitud de un vector en programación.
norm

Ejemplo

Determine la norma del vector $x = (-4, -4, -12)$.

Teorema

En $\mathbb{R}^n$, toda norma tiene las siguientes propiedades para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todos los escalares c:

1. $||x|| = 0$, *si* $x = 0$
2. $||x|| > 0$, *si* $x \neq 0$ *(positividad).*
3. $||cx|| = |c|||x||$ *(homogeneidad).*
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(desigualdad triangular), con igualdad si y sólo si* $x \parallel y$*, ambos en la misma dirección.*

Teorema (Vector unitario o normalizado)

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$*, no nulo, el vector*

$$u = \frac{1}{||x||}x,$$

es un vector unitario y en la misma dirección que el vector x*.*

unit vector $(2, 3, 4, 5)$

Definición (Distancia entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definimos el distancia que separa a x de y, denotado por $d(x, y)$, como

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Teorema

En $\mathbb{R}^n$, la distancia tiene las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) > 0$, *si* $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ejemplo

Determine la distancia entre el vector $x = (1, 2, 3, 4)$ *y* $y = (4, 3, 2, 1)$.

Definición (Producto punto)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definimos el producto punto de x con y, denotado por $x \cdot y$, como

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nota: El producto punto es un escalar real, que es un caso particular de algo más general denominado **producto interior** y el cual definiremos en la unidad III.

dot product $(1,3), (-2,4)$

Ejemplo

Determine el producto punto de $x = (2, 10, 6)$ *con* $y = (3, -3, 6)$.

Teorema

En $\mathbb{R}^n$, el producto punto satisface las siguientes propiedades, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y todos los escalares c:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ *(conmutatividad o simetría)*
2. $(cx \cdot y) = c(x \cdot y)$ *(Asociatividad u homogeneidad).*
3. $x \cdot x > 0$ *si* $x \neq (0, 0, ..., 0)$ *(positividad).*
4. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(distributividad o linealidad)*

$$||x|| = \sqrt{x \cdot x}.$$

$$||x||^2 = x \cdot x.$$

Definición (Ángulo entre dos vectores)

El ángulo θ entre dos vectores no nulos x, y en $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{||x||||y||}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

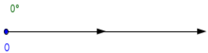
Observe que

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{||x||||y||} \leq 1.$$

(i) si $x \cdot y > 0$, entonces θ es agudo, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

(ii) si $x \cdot y = 0$, entonces θ es recto, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

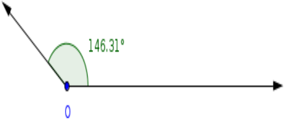
(iii) si $x \cdot y < 0$, entonces θ es obtuso, $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$.



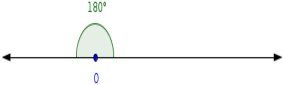
(a) $\theta = 0$,
$\cos(\theta) = 1$,
$x \cdot y = ||x||||y||$

(b) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,
$\cos(\theta) > 0$,
$0 < x \cdot y < ||x||||y||$

(c) $\theta = \frac{\pi}{2}$,
$\cos(\theta) = 0$,
$x \cdot y = 0$



(d) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$,
$\cos(\theta) < 0$,
$-||x||||y|| < x \cdot y < 0$



(e) $\theta = \pi$,
$\cos(\theta) = -1$,
$x \cdot y = -||x||||y||$

Definición (Vectores ortogonales)

Decimos que dos vectores x, y *en* $\mathbb{R}^n$ *son ortogonales (perpendiculares), denotado como* $x \perp y$, *si*

$$x \cdot y = 0.$$

¿(4, -1) y (-9, -2) son ortogonales?

Teorema

Dos vectores x, y *son ortogonales, si y sólo si*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Definición (Proyección ortogonal de x sobre y)

La proyección ortogonal de x sobre un vector no nulo y en $\mathbb{R}^n$, denotado como $proj_y x =$, está dada por

$$proj_y x = \frac{x \cdot y}{y \cdot y} y = \frac{x \cdot y}{||y||^2} y.$$

Nota: $proj_y x \in \mathbb{R}^n$, $proj_y x \neq proj_x y$, ¿cuándo se da la igualdad?

Projection [{1, 3, 5}, {2, 1, -2}]

Ejemplo

Determine la proyección de $A = (-5, 2, 0, -1)$ *en* $B = (-2, 4, 1, 0)$ *y viceversa.*

Teorema (Distancia mínima)

Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, con y no nulo, entonces

$$d(x, proj_y x) < d(x, cy), \quad c \neq \frac{x \cdot y}{y \cdot y}.$$