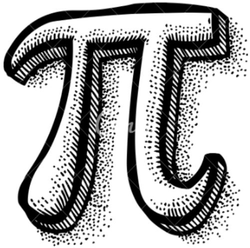


Álgebra Vectorial

Operaciones elementales

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Teorema (Propiedades de campo para $\mathbb{R}$)

Ley de tricotomía.

$-$ $+$ 0 $\mathbb{R}$

1. $x + y \in \mathbb{R}$ *(Clausura bajo la suma).*
2. $xy \in \mathbb{R}$ *(Clausura bajo el producto).*
3. $x + y = y + x$ *(Conmutatividad con la suma).*
4. $xy = yx$ *(Conmutatividad con el producto).*
5. $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$ *(Asociatividad con la suma).* $3 \to -3$
6. $(xy)z = x(yz) = xyz$ *(Asociatividad bajo el producto).*
7. *Existe un único elemento* $0 \in \mathbb{R}$ *llamado neutro aditivo tal que* $x + 0 = x$. *(Existencia y unicidad de neutro aditivo)* $5+0=5$
8. *Dado* $x \in \mathbb{R}$ *existe un único elemento* $y \in \mathbb{R}$ *llamado inverso aditivo tal que* $x + y = 0$, *es decir* $y = -x$. *(Existencia y unicidad de inversos aditivos)* $4+(-4)=0$
9. *Existe un único elemento* $1 \in \mathbb{R}$ *llamado neutro multiplicativo tal que* $1x = x1 = x$. *(Existencia y unicidad del neutro multiplicativo)* inverso $= 2 \to \left(-\frac{1}{2}\right)$
10. *Dado* $x \neq 0$ *existe un único elemento* $y \in \mathbb{R}$ *llamado* ~~*neutro*~~ *multiplicativo, tal que* $xy = 1$, *es decir* $y = x^{-1}$. *(Existencia y unicidad de inversos multiplicativos)*
11. $x(y + z) = (xy + xz)$ *(Distributividad).* $=, <, >, \leq, \geq$

$(4) \to \frac{7}{4} < \frac{8}{5}$ >0

$\frac{8}{5}$ $\frac{7}{4}$ $\mathbb{R}$

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$4 \cdot \frac{7}{4} < 4 \cdot \frac{8}{5} \Rightarrow 7 < \frac{4 \cdot 8}{5} \Rightarrow 7 \cdot 5 < 4 \cdot 8 \quad 35 < 32$!

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$3 + 7 = 10 \in \mathbb{N}$? ✓

$7 - 3 = 4 \in \mathbb{N}$

$3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$

$-$ diferencia

no cerrada en $\mathbb{N}$.

Definición (Conjunto $\mathbb{R}^n$)

El conjunto $\mathbb{R}^n$ *lo definiremos como*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \quad \textit{para todo } (\forall) i = 1, 2, ..., n\}.$$

A los elementos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *se les denomina vectores de* $\mathbb{R}^n$ *o* n*-adas.* tuplas

Notación en física, matemática y en computación.

(3, 'A', 2, 5) → No lo es

$\vec{x} = (2, -5, 7, 4) \in \mathbb{R}^4$

Méx → 15

Yuc → 31

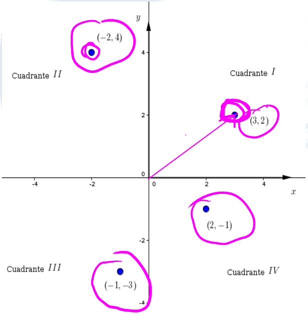
\+ = 46 ?

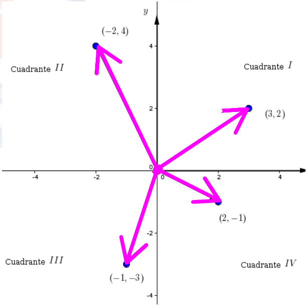
Ejemplo (Conjunto $\mathbb{R}^2$)

El conjunto $\mathbb{R}^2$ *son todos los elementos de la forma* (x, y) *con* $x, y \in \mathbb{R}$, *es decir,*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos representar a los elementos de $\mathbb{R}^2$ *en el llamado* **plano cartesiano**, *el cual se divide en cuatro regiones llamadas* **cuadrantes**, *los cuales se recorren de manera antihoraria por convención.* *Wolframalpha*





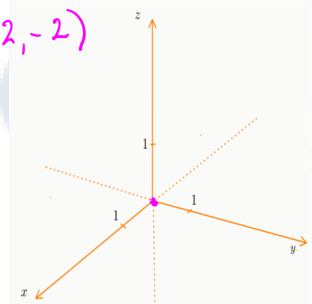
Ejemplo (Conjunto $\mathbb{R}^3$)

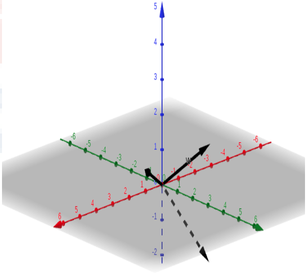
El conjunto $\mathbb{R}^3$ *son todos los elementos de la forma* (x, y, z) *con* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *es decir,*

$$\mathbb{R}^3 = \{\underline{(x, y, z)} : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

En este caso el espacio **tridimensional** *se divide en ocho regiones llamadas* **octantes**, *los cuales se recorren de manera antihoraria, primero para* $z > 0$ *y luego para* $z < 0$.

$(-1, 2, -2)$





Definición (Suma en $\mathbb{R}^n$)

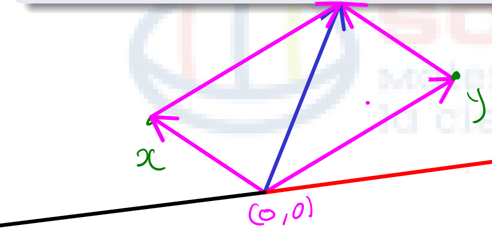
Para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, de la forma

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

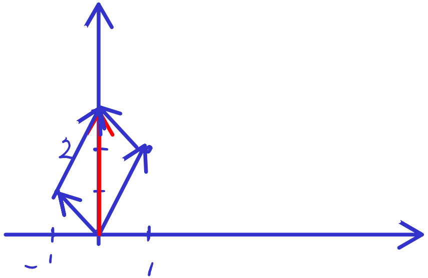
definimos una operación llamada **suma** *de x con y, denotada por $x + y$, como*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \in \mathbb{R}^n$$

Wolframalpha



$$\begin{array}{rl} & (-3, 7, 0, -2) \in \mathbb{R}^4 \\ + & (-4, 5, 2, 3) \in \mathbb{R}^4 \\ \hline & (-7, 12, 2, 1) \in \mathbb{R}^4 \end{array}$$



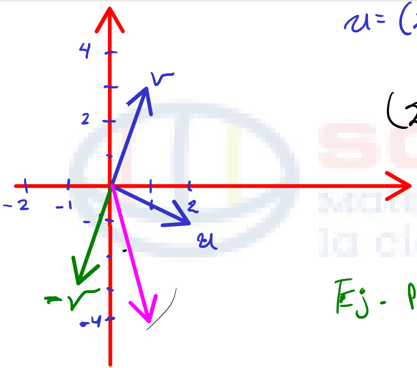
$x = (1, 2)$

$y = (-1, 1)$

$x + y = (0, 3)$

Definición (Vector de y a x)

Diferencia de vectores, representa el vector que une el punto y con el punto x. en cambio si la diferencia es $y - x$, entonces tendremos una flecha de la misma longitud pero en sentido opuesto. Wolframalpha



$u = (2,-1)$, $v = (1,3)$, $-v = (-1,-3)$

$u + (-v) = u - v$

$(2,-1) + (-1,-3) = (1,-4)$

$v - u = (1,3) - (2,-1) = (1,3) + (-2,1)$

$= (-1,4)$

Ej. $p = (3,5,-1,2) \longrightarrow (-1,4,0,-3) = q$

inicio final

$\vec{PQ} = (-4,-1,1,-5) = q - p$

$\vec{QP} = p - q =$

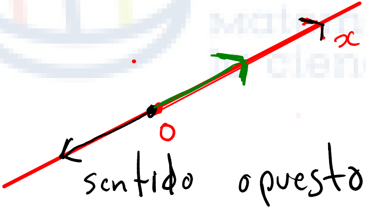
Definición (Producto de un vector $\mathbb{R}^n$ con escalares reales)

Para todo escalar real c y para todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$, de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. definimos una operación llamada **producto** *de c con x, denotada por cx, como*

$$cx = (cx_1, cx_2, ..., cx_n).$$

Wolframalpha y geogebra.

De manera geométrica, si multiplicas un vector por un escalar, es alargar o acortar el vector, manteniendo la misma dirección si el escalar es positivo, mientras que el sentido es contrario si el escalar es negativo.



Si $c>1$ alargar
y mismo sentido
Si $0<c<1$ acorta
y mismo sentido.
Si $-1<c<0$ acorta
y cambia sentido
Si $c<-1$ alargar
y cambia sentido.

Definición (Producto de un vector $\mathbb{R}^n$ con escalares reales)

Para todo escalar real c y para todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$, de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. definimos una operación llamada **producto** *de c con x, denotada por cx, como*

$$cx = (cx_1, cx_2, ..., cx_n).$$

Wolframalpha y geogebra.

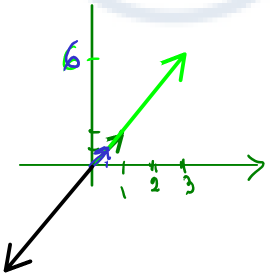
De manera geométrica, si multiplicas un vector por un escalar, es alargar o acortar el vector, manteniendo la misma dirección si el escalar es positivo, mientras que el sentido es contrario si el escalar es negativo.

Ej. $(1,2)$

$c = 3 \Rightarrow 3(1,2) = (3,6)$

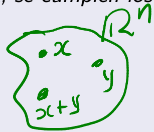
$c = 0.5 \Rightarrow 0.5(1,2) = (0.5, 1)$

$C = -3 \Rightarrow -3(1,2) = (-3,-6)$



Teorema (Propiedades de la suma y el producto con escalar)

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y para todo par de escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumplen los siguientes 10 axiomas:



Axiomas de clausura

1. $x + y \in \mathbb{R}^n$ *(Clausura bajo la suma).*
2. $\alpha x \in \mathbb{R}^n$ *(Clausura bajo el producto con escalar).*

Axiomas bajo la suma

3. $x + y = y + x$ *(Conmutatividad).*

$(3,7)+(0,0)=(3,7)$

4. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(Asociatividad).*
5. *Existe un único elemento* $0 = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ *llamado neutro tal que* $x + 0 = x$ *(Elemento neutro).*
6. *Existe un único elemento* $y \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $x + y = 0$*, es decir* $y = -x$ *(Existencia de inversos).*

$(3,7) \to (-3,-7)$

$(5,-\pi) \to (-5,\pi)$

Axiomas bajo el producto con escalar

7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ *(Asociatividad).*
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *(Distributividad).*
9. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(Distributividad).*
10. $1x = x$, $1 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio:

Para los vectores $x = (7, 3, 6, \pi)$, $y = (-2, 5, 6, 1)$, en $\mathbb{R}^4$, determine: (i) $3x - 2y$; (ii)$\pi x + 3y$; (iii)los inversos aditivos de x, y.

Definición (Vectores idénticos)

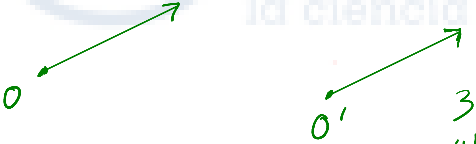
Decimos que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, *de la forma*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

son idénticos si y sólo si $x_i = y_i$ *para toda* $i = 1, 2, ..., n$, *es decir,*

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \cdots, \quad x_n = y_n.$$

Nota: Dos vectores tienen la misma magnitud y la misma dirección, aunque tengan distintos puntos de aplicación.



$(3a, 4b+c, c) \in \mathbb{R}^3$

$(2b+c, 5, 3) \in \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{ll} 3a = 2b + c & (1) \\ 4b + c = 5 & (2) \\ c = 3 & (3) \end{array}\right\}$$

Definición (Vectores paralelos)

Decimos que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ no nulos son paralelos si existe una escalar $c \neq 0$, tal que

$$x = cy. \qquad y = cx$$

La notación de paralelismo entre vectores es $x \parallel y$.

$(0,0,0,\dots,0)$

$\frac{7}{2}x = y$

$x = \frac{2}{7}y$

$7x = 2y$

Ej. $(2,4,6) = x$

$(7,14,21) = y$

$x = cy$

$(2,4,6) = (7c, 14c, 21c)$

① $2 = 7c \rightarrow c = \frac{2}{7}$

② $4 = 14c \rightarrow c = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

③ $6 = 21c \rightarrow c = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

$c =$

Ejemplo

Determine si los vectores $x = (12, -6, 15)$, $y = (-4, 2, -5)$ *son paralelos.* Ejercicio

Ejemplo

Determine si los vectores $x = (-2, 5, 7)$, $y = (-3, 7, -5)$ *son paralelos.*

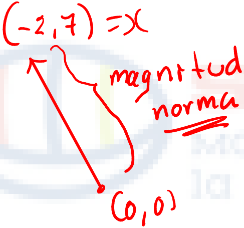
Definición (Norma, magnitud o [redacted] de un vector $x \in \mathbb{R}^n$)

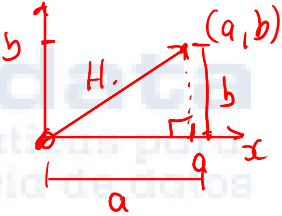
Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. definimos la norma de x, denotada por $||x||$, como

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Nota: longitud de un vector en matemáticas $\neq$ longitud de un vector en programación.

norm $(-2,7)$





$$H = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo

Determine la norma del vector $x = (-4, -4, -12)$.

$$\|x\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 4^2 + (3 \cdot 4)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + \underline{4^2 \cdot 3^2}}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 4^2 + 4^2 \cdot 3^2}$$

$$= \sqrt{4^2(2 + 3^2)} = \sqrt{4^2 \cdot 11}$$

$$= \sqrt{4^2}\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$$

$$12 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

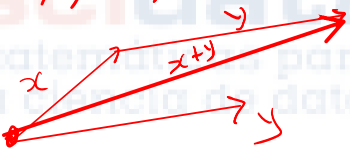
$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Teorema

En $\mathbb{R}^n$, toda norma tiene las siguientes propiedades para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todos los escalares c:

1. $||x|| = 0$, *si* $x = 0$
2. $||x|| > 0$, *si* $x \neq 0$ *(positividad).*
3. $||cx|| = |c|||x||$ *(homogeneidad).* ← Demostrar.
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(desigualdad triangular), con igualdad si y sólo si* $x \parallel y$*, ambos en la misma dirección.*

$x = (0,0,0,0,-1)$



Teorema (Vector unitario o normalizado)

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, no nulo, el vector

norm $x = ||x|| > 0$ $\quad \frac{1}{||x||} > 0$

$$u = \frac{1}{||x||}x,$$

paralelo.

$\frac{1}{0}$!

es un vector unitario y en la misma dirección que el vector x.

unit vector $(2, 3, 4, 5)$

$$x = (1m, 3m, -2m)$$

$$||x|| = \sqrt{1^2 m^2 + 3^2 m^2 + 2^2 m^2} = m\sqrt{14}$$

$$||u|| = \left|\left| \underbrace{\frac{1}{||x||}}_{c} x \right|\right| = \left| \frac{1}{||x||} \right| ||x|| = \frac{1}{||x||} \cdot \frac{||x||}{1} = \frac{||x||}{||x||} = 1$$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \quad (1) \\ -a, & a < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$|\underbrace{-5}_{a}| = -(-5) = 5$$

$$\frac{1}{||x||}x = \frac{1}{m\sqrt{14}}(1m, 3m, -2m) = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}\sqrt{14}}(1, 3, -2)$$

Teorema (Vector unitario o normalizado)

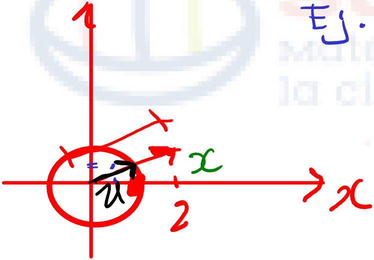
Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, no nulo, el vector

$$u = \frac{1}{||x||}x,$$

es un vector unitario y en la misma dirección que el vector x.

unit vector $(2, 3, 4, 5)$ ←

$\|(2,1)\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \neq 1 \Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{\|x\|}x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$



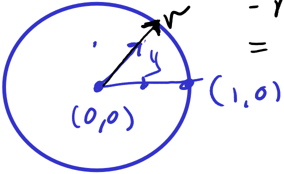
Ej. $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\|y\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$v = \frac{1}{\|y\|}y = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



Ejercicio: obtener el vector unitario para

$x = (2, -3, 0, 1, 7, 5) \in \mathbb{R}^6$.

norm x en Wolfram no lo da.

- longitud → dimensión

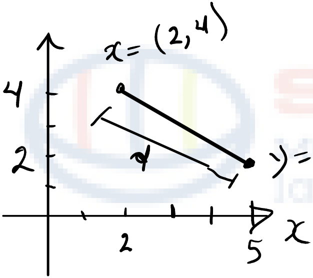
magnitud = norma

Definición (Distancia entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, *de la forma* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *definimos el distancia que separa a* x *de* y, *denotado por* $d(x, y)$, *como*

$$\|x-y\| = \|(x_1-y_1,\ x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n)\|$$

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

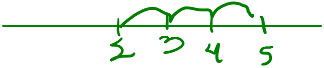


$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$\|x-y\| = \|y-x\|$$

Ej. $x = (2,4)$, $y = (5,2)$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

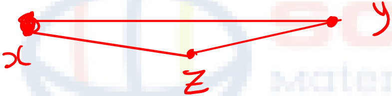


norm$\big((2,4)-(5,2)\big)$

Teorema

En $\mathbb{R}^n$*, la distancia tiene las siguientes propiedades para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$*:*

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) > 0$, *si* $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$



Ejemplo

Determine la distancia entre el vector $x = (1,2,3,4)$ *y* $y = (4,3,2,1)$.

$$d(x,y) = 2\sqrt{5}$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{3^2+1^2+1^2+3^2}$$

$$= \sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

Definición (Producto punto)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, *de la forma* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *definimos el producto punto de* x *con* y, *denotado por* $x \cdot y$, *como*

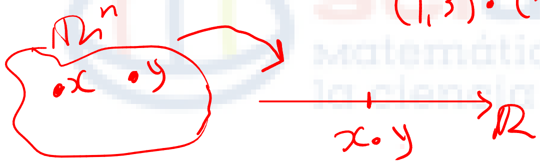
$x_i, y_i \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nota: El producto punto es un escalar real, que es un caso particular de algo más general denominado **producto interior** y el cual definiremos en la unidad III.

dot product $(1,3), (-2,4)$

$$(1,3) \cdot (-2,4) = (1)(-2) + (3)(4)$$
$$= -2 + 12 = 10$$



Ejemplo

Determine el producto punto de $x = (2, 10, 6)$ *con* $y = (3, -3, 6)$.

$$x \cdot y = (2, 10, 6) \cdot (3, -3, 6)$$

$$= (2)(3) + (10)(-3) + (6)(6)$$

$$= 6 - 30 + 36 = 12$$

Teorema

En $\mathbb{R}^n$, el producto punto satisface las siguientes propiedades, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y todos los escalares c:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ *(conmutatividad o simetría)*
2. $(cx \cdot y) = c(x \cdot y)$ *(Asociatividad u homogeneidad).*
3. $x \cdot x > 0$ *si* $x \neq (0, 0, ..., 0)$ *(positividad).*
4. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(distributividad o linealidad)*

① $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$.

② $||x||^2 = x \cdot x$.

$(||x||)^2 = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2})^2$

$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

Definición (Ángulo entre dos vectores)

El ángulo θ entre dos vectores no nulos x, y en $\mathbb{R}^n$ está dado por

$||x||, ||y|| > 0$

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{||x||||y||}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

$\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{||x|| \, ||y||}\right)$

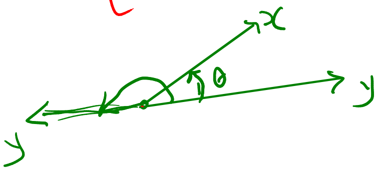
Observe que

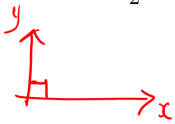
$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{||x||||y||} \leq 1.$$

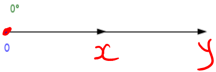
(i) si $x \cdot y > 0$, entonces θ es agudo, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. $= 90^\circ$

(ii) si $x \cdot y = 0$, entonces θ es recto, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(iii) si $x \cdot y < 0$, entonces θ es obtuso, $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$.

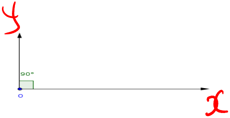






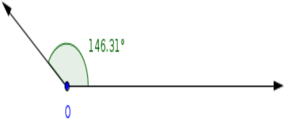
(a) $\theta = 0$,
$\cos(\theta) = 1$,
$x \cdot y = ||x|| \, ||y||$

(b) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,
$\cos(\theta) > 0$,
$0 < x \cdot y < ||x|| \, ||y||$

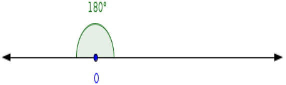


(c) $\theta = \frac{\pi}{2}$,
$\cos(\theta) = 0$,
$x \cdot y = 0$

$$\frac{x \circ y}{||x|| \, ||y||} = \pm 1$$



(d) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$,
$\cos(\theta) < 0$,
$-||x|| \, ||y|| < x \cdot y < 0$



(e) $\theta = \pi$,
$\cos(\theta) = -1$,
$x \cdot y = -||x|| \, ||y||$

a) $(2,0) \cdot (3,0) = 6 + 0 = 6 > 0$ agudo $\;\; ||x|| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

b) $(1,2) \cdot (5,1) = 5 + 2 = 7 > 0$ agudo.

c) $(3,-1) \cdot (2,6) = 6 + (-6) = 0$ recto.

d) $(-3,1) \cdot (3,1) = -9 + 1 = -8 < 0$ obtuso.

$x \parallel y$

Definición (Vectores ortogonales)

Decimos que dos vectores x, y *en* $\mathbb{R}^n$ *son ortogonales (perpendiculares), denotado como* $x \perp y$*, si*

$x \perp y$

$$x \cdot y = 0.$$

¿(4, -1) y (-9, -2) son ortogonales?

Teorema

Dos vectores x, y *son ortogonales, si y sólo si*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

$(4,-1)\cdot(-9,-2) = -36 + 2 = -34 < 0$

obtuso.

Definición (Proyección ortogonal de x sobre y)

La proyección ortogonal de x sobre un vector no nulo y en $\mathbb{R}^n$, denotado como $proj_y x =$, está dada por

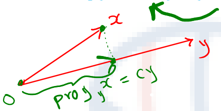
$$proj_y x = \frac{x \cdot y}{y \cdot y} y = \frac{x \cdot y}{||y||^2} y.$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Nota: $proj_y x \in \mathbb{R}^n$, $proj_y x \neq proj_x y$, ¿cuándo se da la igualdad?

Projection [{1, 3, 5}, {2, 1, -2}]



$y \cdot y = ||y||^2$

Ej. $y = (-3, 1)$, $x = (1, 2)$

$$Proy_y x = \frac{x \cdot y}{y \cdot y} y = \frac{-3+2}{3^2+1^2}(-3, 1) = -\frac{1}{10}(-3, 1) = \left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right)$$

$$Proy_x y = \frac{y \cdot x}{x \cdot x} x = \frac{-1}{1^2+2^2}(1, 2) = -\frac{1}{5}(1, 2) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Definición (Proyección ortogonal de x sobre y)

La proyección ortogonal de x sobre un vector no nulo y en $\mathbb{R}^n$, denotado como $proj_y x =$, está dada por

$$proj_y x = \frac{x \cdot y}{y \cdot y} y = \frac{x \cdot y}{||y||^2} y.$$

Nota: $proj_y x \in \mathbb{R}^n$, $proj_y x \neq proj_x y$, ¿cuándo se da la igualdad?

Projection [{1, 3, 5}, {2, 1, -2}]

$$\text{Proy}_y x = \frac{x \cdot y}{y \cdot y} y = \frac{(1,3,5)\cdot(2,1,-2)}{(2,1,-2)\cdot(2,1,-2)}(2,1,-2)$$

$$= \frac{(1)(2)+(3)(1)+(5)(-2)}{2^2+1^2+2^2}(2,1,-2)$$

$$= \frac{-5}{9}(2,1,-2)$$

$$\text{Proy}_x y = \frac{y \cdot x}{x \cdot x} x = \frac{-5}{1^2+3^2+5^2}(1,3,5) = -\frac{5}{35}(1,3,5) = -\frac{1}{7}(1,3,5)$$

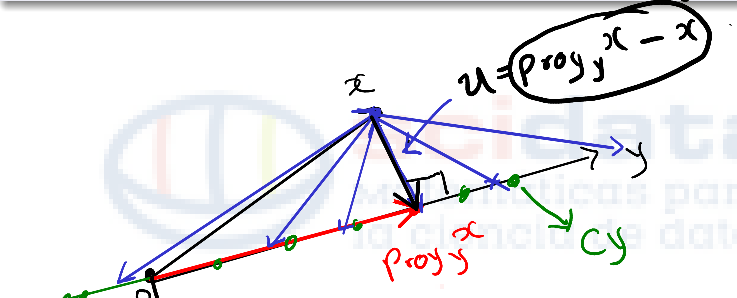
Ejemplo

Determine la proyección de $A = (-5, 2, 0, -1)$ *en* $B = (-2, 4, 1, 0)$ *y viceversa.*

Teorema (Distancia mínima)

Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, con y no nulo, entonces

$$¿\; d(x, proj_y x) < d(x, cy), \quad c \neq \frac{x \cdot y}{y \cdot y}. \;?$$



$d(x, proy_y x) < d(x, cy)$