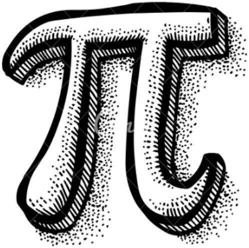
scidata



Determinantes

Aplicaciones

Dr. Juan Luis Palacios Soto

Definición (Determinante 2×2)

Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *una matriz cuadrada con entradas reales, digamos*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definimos su determinante, denotado por $det(A)$ *o bien* $|A|$*, como*

$$\overset{1}{det(A)} = \overset{2}{|A|} = \overset{3}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = ad - bc.$$

determinant ((-6, 10), (5, -2)) o det o $|A|$ y arroja polinomio característico

Ejemplo

Calcule el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = (-5)(2) - (9)(7) = -10 - 63$$
$$= -73$$

Ejemplo

Calcule el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = (\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-2)(1)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 2 = 1 + 2 = 3$$

Ejemplo

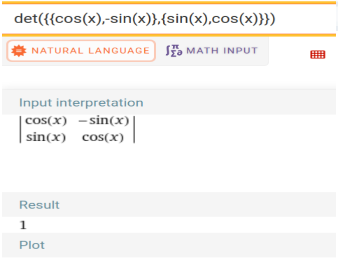
Calcule el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

① $\underline{\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1}$ Identidad Pitagórica-

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\text{sen}\, x \\ \text{sen}\, x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - (\text{sen}\, x)(-\text{sen}\, x)$$

$$= \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$$



det({{cos(x),-sin(x)},{sin(x),cos(x)}})

Input interpretation

$$\begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}$$

Result

1

Plot

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{2n}} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$n=2$ hay 4 elem.

$n=3$ " 9

$n=k$ k^2 ...

Definición (Menores y Cofactores)

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n con entradas reales, entonces el **menor** M_{ij} *del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $\underline{n-1}$ que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j. El* **cofactor** C_{ij} *está dado por*

$$a_{ij} \longrightarrow C_{ij} = \underline{(-1)}^{i+j}\underline{M_{ij}}.$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{13} & \rightarrow & M_{13} & \rightarrow & C_{13} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{menor} & & \text{cofactor} \end{array}$$

Si disponemos los cofactores en una matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

la denominaremos **matriz de cofactores** *de A.*

cofactor of

$(-1)^0 = 1$, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$

$$(-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ es par} \\ -1, & k \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo

Calcule la transpuesta de la matriz de cofactores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_{11} = 1 \rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cancel{(0)}^{\to 0} - (-2)(-1) = -2.$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2(-2) = (1)(-2) = \underline{-2} //$$

$$a_{12} = 5 \rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0, \quad C_{12} = \cancel{(-1)^{1+2}}^{\to 0}(0) = 0.$$

$$a_{13} = 0 \rightarrow M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad C_{13} = (-1)^{1+3}(-8) = -8$$

$a_{21} = 4 \to M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $C_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$

Ejemplo

Calcule la transpuesta de la matriz de cofactores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$a_{22} = 2 \to M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $C_{22} = (-1)^{2+2}(0) = 0$.

$a_{23} = -1 \to M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$, $C_{23} = (-1)^{2+3}(-2) = 2$.

$a_{31} = 0 \to M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$, $C_{31} = (-1)^{3+1}(-5) = -5$

$a_{32} = -2 \to M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $C_{32} = (-1)^{3+2}(-1) = 1$

$a_{33} = 0 \to M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 20 = -18$, $C_{33} = (-1)^{6}(-18) = -18$

Ejemplo

Calcule la transpuesta de la matriz de cofactores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

Teorema

Una matriz A es no singular (invertible), si y sólo si

$$det(A) \neq 0, \checkmark$$

$$\left(\text{En } \mathbb{R} \ a^{-1} = \frac{1}{a} \right)$$

además

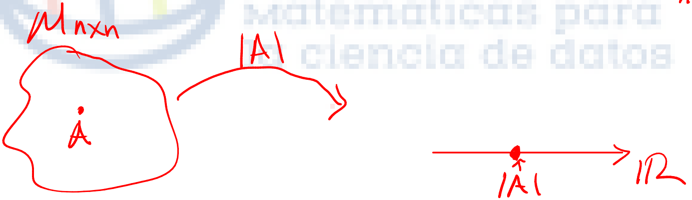
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^T$$

y

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

¡$det\left(\frac{1}{A}\right)$!

↑ no def.



$$\Rightarrow A^{-1} \rightarrow \text{denota la inversa de } A$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Ejemplo

Determine la inversa de A en caso de existir, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Use también C^T para comprobar resultados.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \cdots \approx \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\begin{matrix} \frac{6}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{3}{9} & -\frac{4}{9} \end{matrix}}_{A} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -24-(-15) = -24+15 = -9 \; \cancel{\frac{\quad}{3}}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = |-6| = -6, \quad C_{12} = (-1)(-3) = 3$$

$$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = -|5| = -5, \quad C_{22} = (-1)^4 M_{22} = |4| = 4$$

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema (Operaciones elementales para determinantes)

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden.

1. *Si B se obtiene de A al intercambiar dos filas (columnas) de A, entonces*
$$det(B) = -det(A).$$
2. *Si B se obtiene de A al sumar un múltiplo de una fila (columna) de A a otra fila (columnas) de A, entonces*
$$det(B) = det(A).$$
3. *Si B se obtiene de A al multiplicar una fila (columna) de A por una constante c, entonces*
$$det(B) = cdet(A).$$

$$\overset{\longleftrightarrow}{\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = -38$$

$n!$ se lee n factorial.

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$n! = \underline{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n}$ $\qquad n \in \mathbb{Z}^+$

Teorema (Operaciones elementales para determinantes)

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden.

1. *Si B se obtiene de A al intercambiar dos filas (columnas) de A, entonces*

$$det(B) = -det(A).$$

2. *Si B se obtiene de A al sumar un múltiplo de una fila (columna) de A a otra fila (columnas) de A, entonces*

$$det(B) = det(A).$$

3. *Si B se obtiene de A al multiplicar una fila (columna) de A por una constante c, entonces*

$$det(B) = cdet(A).$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -38$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 10 \\ -25 & 48 \end{vmatrix}$$

$F_2 = F_2 + 5F_1$

$$\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \overset{\times}{\overset{?}{=}} \begin{vmatrix} -6 & 10 \\ -16 & 14 \end{vmatrix} = 76$$

$F_2 = \underline{-2F_2 + F_1}$

$$\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -26 & 10 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = -38$$

$C_1 = C_1 - 2C_2$

Teorema (Operaciones elementales para determinantes)

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden.

1. *Si B se obtiene de A al intercambiar dos filas (columnas) de A, entonces*

$$det(B) = -det(A).$$

2. *Si B se obtiene de A al sumar un múltiplo de una fila (columna) de A a otra fila (columnas) de A, entonces*

$$det(B) = det(A).$$

3. *Si B se obtiene de A al multiplicar una fila (columna) de A por una constante c, entonces*

$$det(B) = cdet(A).$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -38 \Rightarrow \begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2(6 - 25) = -38$$

$$= 2\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2(6 - 25) = -38$$

Ejercicio

Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & \boxed{1} \\ 8 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

eliminar . $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$

$$|A| = a_{11}\cdot C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13}\cdot C_{13} + a_{14}\cdot C_{14}$$

$$= \boxed{-7}\overset{\to 0}{\cdot} C_{11} + \boxed{2}\overset{\to 0}{\cdot} C_{12} + 0\cdot \cancel{C_{13}}^{\to 0} + \boxed{1\cdot C_{14}}$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 & \boxed{1} \\ 8 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 29 & -6 & 1 & 3 \\ 18 & -4 & -5 & 2 \\ 7 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot C_{14} = (-1)^{1+4} M_{14}$$

$C_1 = C_1 + 7C_4$

$C_2 = C_2 - 2C_4$

$$= - \begin{vmatrix} 29 & -6 & 1 \\ 18 & -4 & -5 \\ 7 & \boxed{-1} & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -13 & 0 & -17 \\ -10 & 0 & -17 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)C_{32} = (-1)^{\boxed{3+2}=5} M_{32}$$

$F_1 = F_1 - 6F_3$

$F_2 = F_2 - 4F_3$

$$= -\begin{vmatrix} -13 & -17 \\ -10 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left((13)(17) - (10)(17)\right)$$

$$= -(221 - 170) = -51$$

Teorema (Determinantes de matrices triangulares y diagonales)

Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz triangular (superior o inferior) o bien diagonal de orden* n, *entonces*

$$det(A) = |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad \Sigma$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 100 & 200 & 1 \\ 0 & 8 & 9 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

$$\det(A) = (3)(8)(4)(-3) = -288$$

Cantidad de operaciones elementales para el cálculo de determinantes

Cramer

Orden de la matriz	Expansión por cofactores		Eliminación - Gauss	
n	Sumas	Productos	Sumas	Productos
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	$10!$ ≈3,628,799	6,235,300≈(2)(10!)	285	339

En conclusión, el método o métodos que emplees para el cálculo de determinantes dependerán de la práctica. Así que para algunos les puede parecer más rápido llevar la matriz a su forma triangular, mientras que otros prefieren hacer uso de las operaciones elementales. Desde luego, que no conviene usar cofactores para matrices de orden mayor a 4 debido a que el número de operaciones crece de manera factorial. Por ejemplo, si uno empleara una computadora estudiantil, la cual llega hacer unas 10^8 operaciones por segundo, para una matriz de orden 20, tendría que hacer cerca de 20!$\approx 2 \times 10^{18}$ operaciones, lo cual la misma computadora lo haría en cerca de 7 años trabajando sin descanso!

Teorema

Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden y c una constante, entonces

(i)
$$\underline{det(A) = det(A^T),} \qquad |A| = |A^T|.$$

(ii)
$$\longrightarrow \quad det(cA) = \overset{\uparrow}{c^n} det(A) \quad n\text{-veces}\left\{\begin{matrix} c \leftarrow \\ c \leftarrow \\ \vdots \\ c \leftarrow \end{matrix}\right. \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & & \\ ca_{n1} & \cdots & ca_{nn} \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\longrightarrow \quad det(AB) = det(A)det(B)$$

$$det(A+B) \neq det(A) + det(B)$$

~~(iii)~~ iv)
$$det(A^n) = det(A)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$|A^n| = |A \cdot A \cdots A| = |A| \cdot |A| \cdots |A| = |A|^n$$

Teorema

Sea A una matriz cuadrada. Si alguna de las siguientes condiciones se cumple. entonces $det(A) = 0$.

1. *Si una fila (columna) consta de puros ceros.*
2. *Si una fila (columna) es idéntica a otra fila (columna).*
3. *Si una fila (columna) es múltiplo de otra fila (columna), es decir, dos vectores filas (columnas) paralelas.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¡$1 = 0$!

Teorema

Si A es cuadrada de orden n, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *A es no singular (o invertible).*
2. *$Ax = b$ tiene solución única para toda $b \in \mathbb{R}^n$.*
3. *$Ax = O$ tiene sólo la solución trivial $x = O$.* ← vector nulo .
4. *$det(A) \neq 0$.*

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \qquad \exists\, A^{-1} \Rightarrow \overset{I_n}{\cancel{A^{-1}A}}x = A^{-1}b$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{I_n} x = A^{-1}b$$

$$x = \underline{A^{-1}b} \leftarrow$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -2x + 4y &= -1 \end{aligned} \iff x\underset{u}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}} + y\underset{v}{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$u \not\parallel v$ no son parelos

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(3,-2)\cdot(-2,4)}{\|(3,-2)\|\|(-2,4)\|} = \frac{-6-8}{\sqrt{9+4}\sqrt{4+16}} = \frac{-14}{\sqrt{13}\sqrt{20}}$$

$$= \frac{-14}{\sqrt{13}\,2\sqrt{5}} \neq \pm 1$$

$X = A^{-1} b$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$

$|A| = 12 - (-2)(-2) = 12 - 4 = 8 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones: Área de un polígono, volumen de un paralelepípedo, volumen de un tetraedro], ecuaciones de híperplanos.

Teorema (Ecuación de un híperplano en $\mathbb{R}^n$)

La ecuación de un híperplano en la variables $x_1, x_2, ..., x_n$*en* $\mathbb{R}^n$*, dados* n *puntos en* $\mathbb{R}^n$*, de la forma*

$$(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

se obtiene igualando el siguiente determinante a cero:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

caso 3

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Caso $n=2$. $x, y \in \mathbb{R}^2$ dados 2 puntos en $\mathbb{R}^2$

$(-1,3), (2,1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+3y-7=0$$