





Álgebra Matricial

Aritmética y determinantes

Dr. Juan Luis Palacios Soto

UP
Universidad de la
Pacífico
Matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$)

Una **matriz de tamaño** $m \times n$ es un arreglo rectangular de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

la cual consta de m filas o renglones y n columnas. Una forma más corta de denotar una matriz es:

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n,$$

donde el primer subíndice i , señala el número de fila, mientras que j nos indica el número de columna, iniciando el conteo en ambos casos de la parte superior izquierda de la matriz, y los elementos $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Si $m = n$, diremos que la **matriz es cuadrada** de orden n .

Para A cuadrada, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ son la **diagonal principal**. Definir traza de A tensores.

Ejemplo

Determine el tamaño de las siguientes matrices:

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ 6 & \pi \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{2} B = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{3} C = (-23 \quad 17 \quad 9 \quad 5).$$

$$\textcircled{4} D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 19 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Puede pensar a B y C como elementos de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 .

Definición (Suma en $M_{m \times n}(\mathbb{R})$)

Para todo par de matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, de la forma

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}),$$

definimos una operación llamada **suma** de A con B , denotada por $A + B$, como

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

La suma no está definida si los tamaños de A y B son diferentes.

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} + \{\{5, 6\}, \{7, 8\}\}$$

Ejemplo

Calcule las siguientes operaciones $A + B$, $A + C$, $B + C$ y $B + D$, para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -7 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 5 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$



Definición (Producto de una matriz con un escalar)

Para todo escalar real c y para toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, de la forma $A = (a_{ij})$, definimos una operación llamada **producto** de c con A , denotada por cA , como

$$cA = (ca_{ij}).$$

De la anterior definición tenemos que $-A = (-1)A$ y $A - B = A + (-B)$.



Teorema (Espacio vectorial. Propiedades de la suma y el producto con escalar)

Para todo $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y para todo par de escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumplen los siguientes 10 axiomas:

- ❶ $A + B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (Clausura bajo la suma).
- ❷ $\alpha A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (Clausura bajo el producto con escalar).
- ❸ $A + B = B + A$ (Conmutatividad).
- ❹ $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Asociatividad).
- ❺ Existe un único elemento $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ llamado neutro tal que $A + 0 = A$
(Elemento neutro).
- ❻ Existe un único elemento $C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + C = 0$, es decir $C = -A$ (Existencia de inversos).
- ❼ $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = A(\alpha\beta)$ (Asociatividad).
- ❽ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (Distributividad).
- ❾ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Distributividad).
- ❿ $1A = A$, $1 \in \mathbb{R}$.

Definición (Matrices idénticas)

Decimos que dos matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ son idénticas si y sólo si A, B son del mismo tamaño ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) y $a_{ij} = b_{ij}$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Matriz transpuesta)

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$, definimos su matriz **transpuesta** de tamaño $n \times m$, denotada por A^T , como

$$A^T = (a_{ji}).$$

En la matriz transpuesta se cambian filas por columnas de la matriz A .

transpose $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Ejemplo

Determine la transpuesta de las siguientes matrices:

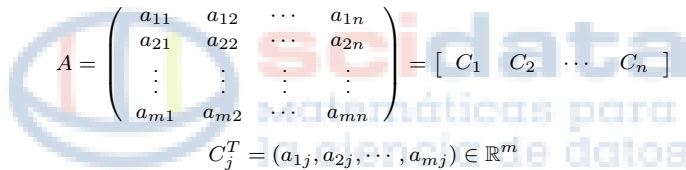
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ 6 & \pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -23 & 17 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 19 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$



Con la anterior definición podemos ver a una matriz formada con filas o columnas de la forma siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}, \quad \text{con } F_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n]$$

$$C_j^T = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$$

¿Bajo qué condiciones $A = A^T$? Inicie el análisis con casos más pequeños.

Definición (Matriz simétrica)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n , $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, \dots, n$, es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i, j , es decir, si

$$A = A^T.$$

Ejemplos triviales de matrices simétricas son: todas las matrices nulas cuadradas, matrices diagonales como las matrices identidad.



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Matriz identidad)

Definimos la matriz identidad I_n , como la matriz cuadrada de orden n de la forma:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Matrices identidad de orden 2, 3 y 4.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si no hay confusión del orden de la matriz identidad, simplemente se denota por I .

Definición (Matriz triangular superior)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n , $U = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, \dots, n$, es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para toda $i > j$, esto es

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$



Definición (Matriz triangular inferior)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n , $L = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, \dots, n$, es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para toda $i < j$, esto es

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$



Definición (Matriz triangular diagonal)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n , $D = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, \dots, n$, es **diagonal** si $a_{ij} = 0$ para toda $i \neq j$, es decir, será diagonal si es triangular superior e inferior a la vez.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A los elementos a_{ii} con $i = 1, 2, \dots, n$ se les conoce como **elementos de la diagonal principal**.



matemáticas para
la ciencia de datos

Ejemplo

Determine el tipo de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Producto de matrices)

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times p$, entonces el producto AB es una matriz de tamaño $m \times p$

$$AB = (c_{ij}),$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Nota: para que el producto de matrices esté definida, el número de columnas de la primera matriz (izquierda), debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz (derecha), por lo que debe quedar claro que no siempre $AB = BA$, ¿por qué?.

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_p) \\
 &= \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1^T & F_1 \cdot C_2^T & \cdots & F_1 \cdot C_p^T \\ F_2 \cdot C_1^T & F_2 \cdot C_2^T & \cdots & F_2 \cdot C_p^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_m \cdot C_1^T & F_m \cdot C_2^T & \cdots & F_m \cdot C_p^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

El punto \cdot indica el producto punto en \mathbb{R}^n , así \cdot

$$c_{ij} = F_i \cdot C_j^T, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Ejemplo

Calcule AB y BA si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} * \{\{5, 6\}, \{7, 8\}\}$$



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Ejemplo

Calcule AB y BA si

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Observe que si $x = (5, -4)$ y $y = (1, 7)$, entonces AB lo puede ver como xy^T y BA como $y^T x$.



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Teorema (Propiedades del producto de matrices)

Sean A, B, C matrices cuyos productos están bien definidos y α un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- ❶ $A(BC) = (AB)C$
- ❷ $A(B + C) = AB + AC$
- ❸ $(A + B)C = AC + BC$
- ❹ $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Teorema

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces $A^T A$ es una matriz simétrica de orden n y AA^T es una matriz simétrica de orden m .

$$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\} * \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$$

Ejemplo

Compruebe que AA^T , $A^T A$, BB^T y $B^T B$ son todas matrices simétricas, donde

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Matriz inversa)

Decimos que una matriz cuadrada A de orden n es invertible (invertible o no singular) si existe otra matriz cuadrada B del mismo orden n , tal que

$$AB = BA = I_n.$$

En tal caso la matriz inversa de A se denota como A^{-1} , para así

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

inverse matrix $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Ejemplo

Compruebe que A es la inversa de B y viceversa, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Ejemplo

Compruebe que A es la inversa de B y viceversa, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Teorema (Propiedades de la matriz inversa)

Sean A, B matrices cuadradas no singulares y α un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- ❶ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ❷ $A^{-k} = (A^k)^{-1}$, donde $A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k-\text{veces}}$
- ❸ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ❹ $A^{-T} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, donde T denota la matriz transpuesta.

Teorema

$$(AB)^T = B^T A^T$$