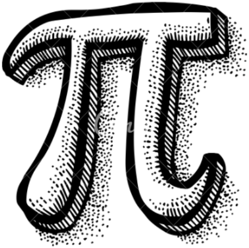
scidata



Sistemas de Ecuaciones Lineales

Solución

Dr. Juan Luis Palacios Soto

Definición (Ecuación lineal)

Una **ecuación lineal en las variables** $x_1, x_2, ..., x_n$ *es de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *y* b *son números reales. Si* $b = 0$*, diremos que la ecuación es* **homogénea***, en caso contrario, diremos que la ecuación es* **no homogénea***.*

Ejemplo

Diga si las siguientes ecuaciones son lineales o no lineales y si son homogéneas o no homogéneas en las variables: x, y, z, w, r, u, v.

1. $3x - 7y + 2z = -2.$
2. $9x + 13w - r + 1 = 0.$
3. $6x - \frac{5}{y} = 0.$
4. $\sqrt{2}x - \pi y + 2z - 4u = 5v.$
5. $-\sqrt{x} + 5y - 8z - 5 = 0.$
6. $4x + \sin(y) - 3z = 0.$
7. $x - 3^{\sqrt{2}}y - \sqrt{7}z = 6.$
8. $8x + 5y + 4^{z} = 10.$

Definición (Sistema de ecuaciones lineales-SEL-)

Un **sistema de** m **ecuaciones lineales** *en las variables* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tiene la forma*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ *para todo* $i = 1, 2, ..., m$, $j = i, 2, ..., n$.
Si $b_i = 0$ *para todo* $i = 1, 2, ..., m$, *diremos que el SEL es* **homogéneo**, *en caso contrario, diremos que el SEL es* **no homogéneo**.

Ejemplo

Determine el tamaño del sistema y si es o no homogéneo.

1. $$\begin{aligned} -x + y - 4 &= 0 \\ 5x + 2y + 3 &= 0 \\ x - y = &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} a - 3b + 7c &= 0 \\ d + f &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 5r - 7s + 4t &= 8 \\ 8r - t &= 0 \\ 9r - s &= 9 \\ s - t &= 2 \end{aligned}$$

Definición (Equivalencia matricial de un SEL)

Un sistema de m *ecuaciones lineales con* n *variables de la forma:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

tiene su equivalencia matricial con la siguiente ecuación de matrices:

$$A\mathbf{x} = b,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

A *se denomina matriz de coeficientes,* $\mathbf{x}$ *vector de incógnitas o variables y* b *vector de resultados.*

Ejemplo

Muestre su equivalencia matricial a cada uno de los SEL o vicversa:

$$(i) \quad \begin{array}{rcl} a - 3b + 7c & = & 0 \\ d + f & = & 0 \end{array} \iff$$

$$(ii) \quad \begin{array}{rcl} 5r - 7s + 4t & = & 8 \\ 8r - t & = & 0 \\ 9r - s & = & 9 \\ s - t & = & 2 \end{array} \iff \qquad .$$

$$(iii) \qquad \iff \overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Definición (Equivalencia vectorial de un SEL)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

tiene una equivalencia vectorial con la siguiente identidad de vectores:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = b$$

donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Muestre su equivalencia vectorial o viceversa en cada caso:

$$(i) \quad \begin{array}{rcr} -x+y & = & 4 \\ 5x+2y & = & -3 \\ x-y & = & 0 \end{array} \iff$$

$$(ii) \qquad \iff a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(iii) \quad \begin{array}{rcr} 5r-7s+4t & = & 8 \\ 8r-t & = & 0 \\ 9r-s & = & 9 \\ s-t & = & 2 \end{array} \iff \qquad .$$

Definición (Solución a un SEL)

Una solución no vacía a un SEL de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

está dado por

$$S = \{(x_1, x_2, ..., x_n) = (s_1, s_2, ..., s_n)\},$$

tal que hacen que cada una de las ecuaciones sea cierta., es decir,

$$\begin{aligned} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n &= b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n &= b_m, \end{aligned}$$

Definición (Solución a un SEL)

Todo SEL se clasifica según su solución como

Solución a un SEL
- *- Consistente:*
  - **-Solución única**
  - **-Soluciones infinitas**
- *- Inconsistente:*
  - **-Solución vacía (sin solución)**

Ejemplo (Solución única)

Compruebe que $S = \{(x, y) = (4, -7)\}$ *es una solución al siguiente SEL*

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 29 \\ -2x + y &= -15 \end{aligned}$$

solve $\{3x - 5y == 2, x + 2y == -1\}$

Ejemplo (Soluciones infinitas)

Compruebe que $S = \{(x, y) = (x, 2x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$ *es solución al siguiente SEL*

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 2 \\ -2x + y &= -1 \end{aligned}$$

Ejemplo (Solución vacía)

Compruebe que el siguiente SEL no tiene solución, es decir, $S = \emptyset$.

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

Teorema (SEL Homogéneo)

Todo SEL homogéneo siempre es consistente; además, si hay menos ecuaciones que variables, entonces el sistema será de infinitas soluciones.

Definición (Sistemas equivalentes)

Decimos que dos SEL son **equivalentes** *si ambos tienen el mismo conjunto solución. Para que dos SEL, sean equivalentes se debe transformar uno en otro bajo* **operaciones elementales**, *las cuales son:*
(i) Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
(ii) Intercambiar de posición dos ecuaciones (filas).
(iii) Sumar el múltiplo de una ecuación a otra.
Las operaciones elementales, en realidad se realizan bajo multiplicación con matrices llamadas **matrices elementales**.

La idea general del método de eliminación es llevar una matriz a una matriz equivalente en su forma escalonada por medio de operaciones elementales.

Definición (Matriz escalonada y escalonada reducida-ME, MER-)

Una matriz **escalonada**, *tiene las siguientes propiedades:*
(i) Todas las filas que constan completamente de ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.
(ii) Para cada fila que no consta completamente de ceros, la primera entrada distinta de cero es 1 (llamada pivote principal).
(iii) Para dos filas sucesivas distintas de cero, el 1 inicial en la fila superior está más a la izquierda que el 1 inicial en la fila inferior.

Ejemplo

$$\overset{Escalonada}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \overset{E.Reducida}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \overset{Escalonada}{\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \overset{E.Reducida}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Definición (Algoritmo de eliminación Gauss)

Para sistema de m ecuaciones lineales con n variables de la forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

1. *Formar la matriz* **aumentada** *que se obtiene de la matriz de coeficientes A del SEL en su forma matricial, aumentada con el vector de resultados b, esto es*

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

2. *Usar operaciones elementales para llevar $[A|b] \approx ME$.*
3. *Si el SEL es consistente, usar sustitución hacia atrás.*

Definición (Algoritmo de eliminación Gauss-Jordan)

Para sistema de m ecuaciones lineales con n variables de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

1. *Formar la matriz* **aumentada** *que se obtiene de la matriz de coeficientes A del SEL en su forma matricial, aumentada con el vector de resultados b, esto es*

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

2. *Usar operaciones elementales para llevar $[A|b] \approx ME$.*
3. *Si el SEL es consistente, eliminar hacia arriba para llevar a $[A|b] \approx MER$, de lo contrario se termina el algoritmo y la solución es vacía.*

Ejemplo (SEL de solución única)

Determine la solución al SEL

$$\begin{aligned} -x+2y-3z &= 4 \\ x+y+z &= 4 \\ -2x+3z &= -9 \end{aligned}$$

Ejemplo (SEL de infinitas soluciones)

Determine la solución al SEL

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + 3z &= 7 \\
x + y + 4z &= 1 \\
4x - y + 7z &= 8
\end{aligned}
$$

Ejemplo (SEL inconsistente o solución vacía)

Determine la solución al SEL

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= -1 \\ 4x - y + 7z &= 8 \\ -3x + 3y - 3z &= 9 \end{aligned}$$

Ejemplo (SEL 4×4)

Determine la solución al SEL

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 5z &= 57 \\ -3x + 2z + w &= 17 \\ 5x - 2y - z + w &= -14 \\ x - y - z + w &= -9 \end{aligned}$$

Definición (Inversa de una matriz)

Si A *es una matriz no singular de orden* n*, entonces la inversa de* A*, denotada por* A^{-1} *se puede obtener aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan, aplicado a la siguiente matriz aumentada* $[A|I_n]$*, para hacerla equivalente a* $[I_n|A^{-1}]$*, esto es:*

$$[A|I_n] \approx [I_n|A^{-1}].$$

Ejemplo (Inversa de una matriz por G-J)

Determine la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Inversa de una matriz por G-J)

Sea $x \in \mathbb{R}$ *fijo, determine la inversa de la siguiente matriz de rotación*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Inversa de una matriz por G-J)

Determine la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 8 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones:

Las aplicaciones del álgebra lineal son muy variadas y básicamente se centra en entradas y salidas de un proceso, en donde las entradas es la información con la que se cuenta, piense que es el vector de resultados en su forma matricial de un SEL, mientras que las salidas del proceso son los valores del vector de incógnitas. Por ejemplo, en un aeropuerto por muy pequeño que sea, se contará con cientos de llegadas y salidas de aviones en un día. Lo que se traduce en cientos de variables. Entonces si se desea analizar el sistema que modela las llegadas de una aerolínea y sus salidas, pues ya se reducen las variables, sin embargo sigue siendo complejo su análisis. En la economía de un país ocurre lo mismo; se tienen miles de variables por analizar.

Ejemplo

Supongamos que una economía consta de pocos sectores: del carbón, electricidad y acero, y que el rendimiento de cada sector se distribuye entre los diferentes sectores como en la siguiente tabla, donde las entradas de una columna representan fracciones de la producción total de un sector.

Carbón	*Electricidad*	*Acero*	*←Distribuido por/Comprado por:*
0	*.4*	*.6*	*Carbón*
.6	*.1*	*.2*	*Electricidad*
.4	*.5*	*.2*	*Acero*
1	*1*	*1*	**Total**

$$\begin{aligned} 0PC + .4PE + .6PA &= PC \\ .6PC + .1PE + .2PA &= PE \\ .4PC + .5PE + .2PA &= PA \end{aligned}$$

Ejemplo

Supón que una empresa administra tres refinerías de petróleo y cada refinería produce tres derivados: gasolina, diesel y aceite lubricante. Supongamos también que por cada barril de petróleo (aproximadamente 159 litros) la producción, en galones[a]*, es como se indica en la siguiente tabla:*

	Refinería 1	Refinería 2	Refinería 3
Gasolina	20	21	19
Diesel	11	12	13
Aceite lubricante	9	8	8

La información de la tabla anterior se interpreta así: por cada barril de petróleo la Refinería 1 produce 20 galones de gasolina, 11 de diesel y 9 de aceite lubricante y así con las demás refinerías. Supongamos que se desea una producción de 1250 galones de gasolina, 750 de diesel y 520 de aceite lubricante. ¿Cuántos barriles de petróleo debe procesar cada refinería para satisfacer esa demanda?

Solución: Denotemos con x, y, z la cantidad de barriles que producen la refinería 1, 2 y 3, respectivamente. Entonces, vemos que el SEL asociado al problema anterior es

$$\begin{aligned} 20x + 21y + 19z &= 1250 \\ 11x + 12y + 13z &= 750 \\ 9x + 8y + 8z &= 520 \end{aligned}$$

[a] Un galón es aproximadamente 3.847 litros

Resolviendo el SEL, tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 21 & 19 & 1250 \\ 11 & 12 & 13 & 750 \\ 9 & 8 & 8 & 520 \end{array}\right)$$

Ejemplo

De la geometría elemental se sabe que hay una sola línea recta que pasa a través de dos puntos cualesquiera en un plano. Menos conocido es el hecho de que existe una parábola única a través de cualesquiera tres puntos no colineales en un plano, es decir, los tres puntos satisfacen la ecuación: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Una compañía ha vendido durante tres años consecutivos \$10, \$9 y \$12 (medido en millones). Determine una función que ajuste estos datos para predecir las ventas del cuarto año.

Resolviendo el SEL, tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 9 & 3 & 1 & 12 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$S = \{(a, b, c) = (2, -7, 15)\}.$$

Es así que la función cuadrática es $f(x) = 2x^2 - 7x + 15$, por lo que las ventas pronosticadas para el cuarto año serán: $f(4) = 2(4)^2 - 7(4) + 15 = 19$, medido en millones.