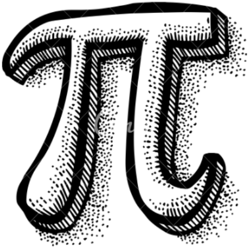
.



# Espacios Vectoriales

## Subespacios

Dr. Juan Luis Palacios Soto
palacios.s.j.l@gmail.com

## Definición (Espacio Vectorial)

*Sea* $V \neq \emptyset$ *sobre el que están definidas dos operaciones (* **una llamada suma vectorial + y otra llamada producto por escalar *** *). Si los siguientes 10 axiomas se cumplen para todos* $u, v, w \in V$ *y para todo* $c, d \in \mathbb{R}$, *entonces* $V$ *se denomina* **espacio vectorial**.

1. $u + v \in V$
2. $cu \in V$
3. $u + v = v + u$
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$
5. $u + O = u$
6. $u + (-u) = O$
7. $c(u + v) = cu + cv$
8. $(c + d)u = cu + du$
9. $c(du) = (cd)u$
10. $1(u) = u, \quad 1 \in \mathbb{R}$

**Ejemplo** $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, *)$

*El conjunto* $V = \mathbb{R}$ *bajo la suma* $+$ *usual en* $\mathbb{R}$ *y el producto entre ellos usual forma un e.v.*

**Ejemplo** $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, *)$

*El conjunto* $V = \mathbb{R}^2$ *bajo la suma* $+$ *estándar en* $\mathbb{R}^2$ *y el producto con escalares estándar forma un e.v.*

**Ejemplo** $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, *)$

*El conjunto* $V = \mathbb{R}^3$ *bajo la suma* $+$ *usual en* $\mathbb{R}^3$ *y el producto con escalares usual forma un e.v.*

**Ejemplo** $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, *)$

*En general el conjunto* $V = \mathbb{R}^n$ *bajo la suma* $+$ *estándar en* $\mathbb{R}^n$ *y el producto con escalares estándar forma un e.v.*

**Ejemplo** $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, *)$

*El conjunto* $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *bajo la suma* $+$ *usual en* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y el producto con escalares forma un e.v.*

## Reto:$(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, +, *)$

Definamos en el conjunto $V = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ la siguiente suma: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$x + y = xy \quad \text{producto usual en } \mathbb{R},$$

y $\forall x \in \mathbb{R}^+$ y $\forall c \in \mathbb{R}$, el producto con escalar como

$$* \implies cx = x^c \quad \text{potenciación usual en } \mathbb{R}.$$

Determine si $\mathbb{R}^+$ bajo estas operaciones es un e.v., de lo contrario, describa cada axioma que no se cumple y por qué.

**Teorema**

*Sean $v \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $0v = O$
2. $cO = O$
3. *Si* $cv = O$, *entonces* $c = 0$ *o bien* $v = O$
4. *(-1)v=-v*

## Ejemplo (Conjuntos que no son espacios vectoriales)

### Definición (Subespacio vectorial)

*Decimos que $W$ es un subespacio de un espacio vectorial $V$ si:*

1. $W \subseteq V$, *y*
2. $W$ *es un espacio vectorial bajo las operaciones* $+$, ** definidas en* $V$.

### Teorema (Condición para un subespacio vectorial)

*El conjunto $W$ es un subespacio de un e.v. $V$ bajo las operaciones $+$, * en $V$ si y sólo sí*

1. $W \subseteq V$
2. *El* $O \in V$ *también cumple que* $O \in W$.
3. $W$ *satisface las condiciones de clausura.*

## Ejemplo (Subespacios de $\mathbb{R}^2$)

1. $W = \mathbb{R}^2$, *porque* $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ *(subespacio trivial de dimensión 2).*
2. *Toda recta que pase por el origen,* $W = \{(x, y) : ax + by = 0\}$ *(subespacios no triviales de dimensión 1).*
3. $W = \{O\}$ *(subespacio trivial de dimensión 0).*

## Ejemplo (Subespacios de $\mathbb{R}^3$)

1. $W = \mathbb{R}^3$ *(s.t.-dim 3-).*
2. *Todo plano que contenga el origen (s.n.t.-dim 2-)*
3. *Toda recta que pase por el origen (s.n.t.–dim 1-)*
4. $W = \{O\}$ *(s.t.-dim 0-).*

## Ejemplo (Subespacios de $\mathbb{R}^n$)

1. *Subespacios triviales dos:* $\mathbb{R}^n$ *y* $W = \{O\}$.
2. *Subespacios no triviales dim* $n - 1$
3. $\vdots$
4. *Subespacios no triviales de dim 1.*

### Definición (Combinación Lineal)

*Sea $V$ un espacio vectorial. Decimos que $u \in V$ es una combinación lineal de elementos $v_1, v_2, ..., v_n$ en $V$, si existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = u.$$

## Ejemplo

*El vector* $u = (25, 3, -15)$ *es combinación lineal de* $v_1 = (2, -1, 4)$, $v_2 = (5, 3, -3)$ *y* $v_3 = (-3, 2, 7)$, *porque*

$$u = 2v_1 + 3v_2 - 2v_3 = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

*esto es*

$$(25, 3, -15) = 2(2, -1, 4) + 3(5, 3, -3) - 2(-3, 2, 7).$$

*Por lo tanto, los escalares son: 2,3 ,-2.*

## Definición (Vectores linealmente independientes)

*Un conjunto* $S = \{v_1, ..., v_n\}$ *de elementos en un espacio vectorial* $V$ *decimos que es* **linealmente independiente** *(l.i) si la combinación lineal*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_n = \mathbf{0}. \tag{1}$$

*se satisface únicamente para cuando* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ *(la solución trivial). En caso contrario, esto es, si una constante* $\alpha_i \neq 0$*, diremos que es el conjunto es* **linealmente dependiente** *(l.d).*

*Observación 1*: Un conjunto de vectores $S = \{v_1, ..., v_n\}$ en un espacio vectorial $V$ es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores es combinación lineal de los otros. El caso más sencillo es cuando dos vectores son paralelos.

*Observación 2:* Si un conjunto de vectores $S = \{v_1, ..., v_n\}$ en un espacio vectorial $V$ contiene al neutro de $V$, entonces $S$ es linealmente dependiente
linearly independent (1,2,3)(2,3,1)(1,2,3)

**Teorema**

*Si* $S = \{v_1, ..., v_n\}$ *es linealmente independiente, entonces*

1. *Ninguno de los vectores* $v_i$ *es el vector nulo,*
2. *cualquier subconjunto no vacío de él es también l.i.*

**Teorema**

*Un conjunto* $S = \{v_1, ..., v_n\}$ *de elementos en un espacio vectorial* $V$ *es l.d. si y sólo si al menos un vector de* $S$ *es combinación lineal de los otros vectores en* $S$.

**Teorema**

*Todo conjunto* $S = \{v_1, ..., v_n\}$ *de elementos en un espacio vectorial* $V$ *que contenga el neutro* $O$ *es l.d.*

### Definición (Conjunto generador)

*Un conjunto* $S = \{v_1, ..., v_n\}$ *de un espacio vectorial* $V$ *decimos que genera o expande a* $V$ *si todo elemento* $u \in V$ *se puede escribir como combinación lineal de elementos en* $S$*, en notación* $< S >= V$*, es decir,*

$$< S >= \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n : \quad a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., n\}.$$

Otra notación para el generado de $S$ es $gen\{S\}$ o $span\{S\}$.

## Definición (Base para un espacio vectorial)

*Decimos que un conjunto* $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *de un espacio vectorial* $V$ *es una base para* $V$*, si cumple la siguientes dos condiciones:*

a) $S$ *es un conjunto linealmente independiente, y*

b) $S$ *genera a* $V$.

*A la cantidad de elementos* $n$ *en la base se denomina* **dimensión** *del espacio* $V$.

basis $((-1,1,0),((-1,0,1),(1,-1,0))$

## Ejemplo (Bases estándares o usuales)

*En* $\mathbb{R}^2$ *la base estándar es*

$$\beta = \{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}, \quad \textit{dimensión } 2.$$

*En* $\mathbb{R}^3$ *la base estándar es*

$$\beta = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}, \quad \textit{dimensión } 3.$$

*En* $\mathbb{R}^n$ *la base estándar es*

$$\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\} = \{(1,0,...,0), ..., (0,0,...,0,1)\}, \quad \textit{dimensión } n.$$

## Ejemplo

*Verifique que* $S = \{(1,3),(2,5)\}$ *es una base para* $\mathbb{R}^2$.

## Ejemplo

*Verifique que* $S = \{(-1,1,3),(0,2,1),(1,-1,-5)\}$ *es una base para* $\mathbb{R}^3$.

**Teorema (Representación única)**

*Sea $V$ un espacio vectorial y sea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para $V$. Entonces para todo $u \in V$, existen escalares únicos $a_1, ..., a_n$ tales que*

$$u = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n.$$

En caso de que $\beta$ genere a $V$ pero no sea l.i., entonces los escalares no serán únicos, de hecho son infinitos.

**Teorema (Bases y dependencia lineal)**

*Si $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base para $V$, entonces todo conjunto que contenga más de $n$ vectores en $V$ es linealmente dependiente.*