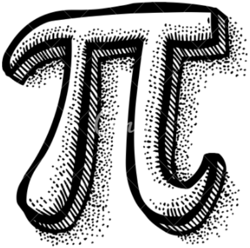
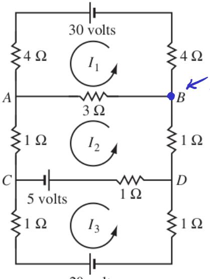


Sistemas de Ecuaciones Lineales

Solución

Dr. Juan Luis Palacios Soto

Nutrimento	Cantidades (en gramos) proporcionadas por 100 g de ingredientes			Cantidades propocionadas por la dieta Cambridge en un día
	Leche desgrasada	Harina de soya	Suero	
Proteínas	36	51	13	33
Carbohidratos	52	34	74	45
Grasa	0	7	1.1	3



nodos

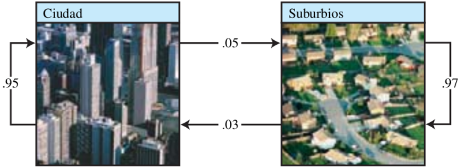
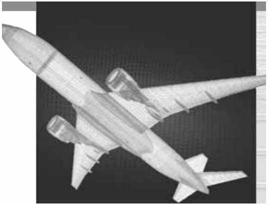


FIGURA 2 Porcentaje anual de migración entre ciudad y suburbios.

$$\begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600{,}000 \\ 400{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 582{,}000 \\ 418{,}000 \end{bmatrix}$$



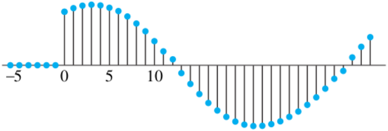


FIGURA 4 Una señal de tiempo discreto.

Es evidente que las señales digitales surgen en las ingenierías eléctrica y de sistemas de control, pero también se generan sucesiones de datos discretos en biología, física, economía, demografía, y muchas otras áreas, dondequiera que un proceso se mida, o *muestree*, a intervalos de tiempo discretos. Cuando un proceso se inicia en un momento específico, algunas veces conviene escribir una señal como una sucesión de la forma $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$. Los términos y_k para $k < 0$ se suponen cero o simplemente se omiten.

La destacable historia detrás del algoritmo más importante de todos los tiempos

https://www.youtube.com/watch?v=2Xkv-W9tOXU

Definición (Ecuación lineal)

Una **ecuación lineal en las variables** $x_1, x_2, ..., x_n$ *es de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *y* b *son números reales. Si* $b = 0$*, diremos que la ecuación es* **homogénea***, en caso contrario, diremos que la ecuación es* **no homogénea**.

Ej. $3x^{-3} + 2\sqrt{y} = 5$

¿EL en x, y? No lo es.

Y si será una EL en $y^{\frac{1}{2}}$ y x^{-3}?

$x_1 = x^{-3}$, $x_2 = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$3x_1 + 2x_2 = 5$ ✓

Ejemplo

Diga si las siguientes ecuaciones son lineales o no lineales y si son homogéneas o no homogéneas en las variables: x, y, z, w, r, u, v.

1. $3x - 7y + 2z = -2.$ Sí es E.L. No homogénea.
2. $9x + 13w - r + 1 = 0.$ Sí es E.L No homogénea.
3. $6x - \frac{5}{y} = 0.$ => $6x - 5y^{-1} = 0$ No es E.L. Sí homogénea.
4. $\sqrt{2}x - \pi y + 2z - 4u = 5v.$ Sí E.L. Sí homogénea.
5. $-\sqrt{x} + 5y - 8z - 5 = 0.$ $-\sqrt{x} = -x^{1/2}$ No E.L., No homogénea
6. $4x + \sin(y) - 3z = 0.$ No E.L. Sí homogénea.
7. $x - 3^{\sqrt{2}}y - \sqrt{7}z = 6.$ Sí E.L No homogénea.
8. $8x + 5y + 4^z = 10.$

No E.L. No homogénea

Definición (Sistema de ecuaciones lineales-SEL-)

Un **sistema de** m **ecuaciones lineales** *en las variables* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tiene la forma*

$$\begin{array}{rrcl}
E1 \rightarrow & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
E2 \rightarrow & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & \\
Em \rightarrow & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

SEL mxn

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ *para todo* $i = 1, 2, ..., m$, $j = i, 2, ..., n$.
Si $b_i = 0$ *para todo* $i = 1, 2, ..., m$, *diremos que el SEL es* **homogéneo**, *en caso contrario, diremos que el SEL es* **no homogéneo**.

Ejemplo

Determine el tamaño del sistema y si es o no homogéneo.

1. SEL 3X2

$$\begin{aligned} -x + y - 4 &= 0 \\ 5x + 2y + 3 &= 0 \\ x - y = &= 0 \end{aligned}$$

x, y

No homogéneo.

2. SEL 2X5

$$\begin{aligned} a - 3b + 7c &= 0 \\ d + f &= 0 \end{aligned}$$

sí es homogéneo.

3. SEL 4X3

$$\begin{aligned} 5r - 7s + 4t &= 8 \\ 8r - t &= 0 \\ 9r - s &= 9 \\ s - t &= 2 \end{aligned}$$

No homogéneo.

Definición (Equivalencia matricial de un SEL)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables de la forma:

E_1

E_2

E_m

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right\}$$

$\mathbb{R}$

$\left(ax = b \quad x = \frac{b}{a},\ a \neq 0 \right)$

tiene su equivalencia matricial con la siguiente ecuación de matrices:

$$A\mathbf{x} = b,$$

$\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x} = b_{m\times 1}$

donde

F_1, F_2, F_m

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}.$$

A se denomina matriz de coeficientes, $\mathbf{x}$ vector de incógnitas o variables y b vector de resultados.

$Ax = b$ si $\exists\ A^{-1} \Rightarrow$

$A^{-1}Ax = A^{-1}b \iff Ix = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$

Ejemplo

Muestre su equivalencia matricial a cada uno de los SEL o vicversa:

SEL ·
2×5
a, b, c, d, f

(i)
$$\begin{aligned} a - 3b + 7c &= 0 \\ d + f &= 0 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 5,\ A} \overset{x}{\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{pmatrix}}_{5\times 1}} = \overset{b}{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 1}}$$

SEL
4×3
r, s, t

(ii)
$$\begin{aligned} 5r - 7s + 4t &= 8 \\ 8r - t &= 0 \\ 9r - s &= 9 \\ s - t &= 2 \end{aligned} \iff \begin{array}{c} \begin{matrix} r & s & t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 8 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

SEL
3×2

(iii)
$$\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ 5x + 2y &= -3 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \underbrace{\overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}_{3\times 2} \underbrace{\overset{x}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}}_{2\times 1} = \underbrace{\overset{b}{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{3\times 1}.$$

Definición (Equivalencia vectorial de un SEL)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables de la forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
$$

tiene una equivalencia vectorial con la siguiente identidad de vectores:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = b$$

$x_i \in \mathbb{R}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

$v_i \in \mathbb{R}^m$

donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Muestre su equivalencia vectorial o viceversa en cada caso:

$$(i)\quad \begin{array}{rcl} -x+y &=& 4\\ 5x+2y &=& -3\\ x-y &=& 0 \end{array} \iff x\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$(ii)\quad \begin{array}{r} a-3b+7c=0\\ d+f=0 \end{array} \iff a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

$$(iii)\quad \begin{array}{rcl} 5r-7s+4t &=& 8\\ 8r-t &=& 0\\ 9r-s &=& 9\\ s-t &=& 2 \end{array} \iff r\begin{pmatrix}5\\8\\9\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\9\\2\end{pmatrix}.$$

$$ii)\quad =\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3b\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7c\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a-3b+7c\cancel{+0+0}\\ 0+0+0+d+f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Definición (Solución a un SEL)

Una solución no vacía a un SEL de la forma:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}\right\}$$

está dado por

$$S = \{\underline{(x_1, x_2, ..., x_n) = (s_1, s_2, ..., s_n)}\}, \qquad s_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \ldots, n.$$

tal que hacen que cada una de las ecuaciones sea cierta., es decir,

$$\begin{aligned}
a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n &= b_1\\
a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n &= b_m,
\end{aligned}$$

Definición (Solución a un SEL)

Todo SEL se clasifica según su solución como

Solución a un SEL
- *Consistente:*
  - **-Solución única**
  - **-Soluciones infinitas**
- *Inconsistente:*
  - **-Solución vacía (sin solución)**

Ejemplo (Solución única)

Compruebe que $S = \{(x,y) = (4,-7)\}$ *es una solución al siguiente SEL*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y & = & 29 \checkmark \\ -2x + y & = & -15 \checkmark \end{array}\right\} \text{SLE } 2\times 2 .$$

solve $\{3x - 5y == 2, x + 2y == -1\}$

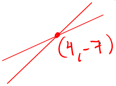
$(ax + by + c = 0)$

$ax + by = c$

① $2(4) - 3(-7) = 8 + 21 = 29$

② $-2(4) + (-7) = -8 - 7 = -15$

Eq. vect. $\underbrace{x\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_1} + \underbrace{y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 29 \\ -15 \end{pmatrix}}_{b}$



$x v_1 + y v_2 = b$, $v_1, v_2, b \in \mathbb{R}^2$

$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u & v & w \end{array}$

$4\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -15 \end{pmatrix}$

Ejemplo (Soluciones infinitas)

Compruebe que $S = \{(x, y) = (x, 2x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$ *es solución al siguiente SEL*

$$
\begin{array}{lrcl}
① & 4x - 2y & = & 2 \quad \checkmark \quad l_1 \\
② & -2x + y & = & -1 \quad \checkmark \quad l_2
\end{array}
$$

$x = x$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

$y = 2x - 1$

$(\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

① $4x - 2(2x - 1) = \cancel{4x} - \cancel{4x} + 2 = 2$

② $-2x + (2x - 1) = \cancel{-2x} + \cancel{2x} - 1 = -1$

$l_1 = l_2$

$$x\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{u} + y\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w} \qquad xu + yv = w$$

$$\frac{x \cdot y}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{-8 - 2}{\sqrt{16 + 4}\sqrt{4 + 1}} = \frac{-10}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-10}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{-10}{2(\sqrt{5})^2} = \frac{-10}{2 \cdot 5} = -1$$

Ejemplo (Solución vacía)

Compruebe que el siguiente SEL no tiene solución, es decir, $S = \emptyset$.

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

$$x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u} + y\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w}$$

$u \cdot w = (1,-1)\cdot(1,1) = 1 - 1 = 0$

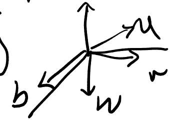
$v \cdot w = (-1,1)\cdot(1,1) = -1 + 1 = 0$

$u = -v$

Si $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

SEL. 3X3

$$\left.\begin{aligned} 3x + 8y - z &= 1 \\ x - y + 5z &= -3 \\ 2x + 4y - 8z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{planos}$$



$$x\overset{u}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} + y\overset{v}{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}} + z\overset{w}{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow b$$

Teorema (SEL Homogéneo)

Todo SEL homogéneo siempre es consistente; además, si hay menos ecuaciones que variables, entonces el sistema será de infinitas soluciones. SEL $m\times n$, $m<n$ $\Rightarrow$ infinitas soluciones.

consistente $\begin{cases} \text{- solución única.} \\ \text{- infinitas soluciones.} \end{cases}$

Ej.
$$\left.\begin{aligned} 3x-4y+7z&=0\\ 5x+8y+3z&=0\\ -x+5y-z&=0 \end{aligned}\right\} \quad 3\times 3$$

Solución trivial es $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Definición (Sistemas equivalentes)

Decimos que dos SEL son **equivalentes** *si ambos tienen el mismo conjunto solución. Para que dos SEL, sean equivalentes se debe transformar uno en otro bajo* **operaciones elementales**, *las cuales son:*
(i) Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
(ii) Intercambiar de posición dos ecuaciones (filas).
(iii) Sumar el múltiplo de una ecuación a otra.
Las operaciones elementales, en realidad se realizan bajo multiplicación con matrices llamadas **matrices elementales**.

La idea general del método de eliminación es llevar una matriz a una matriz equivalente en su forma escalonada por medio de operaciones elementales.

Ej: $(1)\begin{cases} 2x-6y=5 \\ 3x+y=8 \end{cases} \approx (2)\begin{cases} 4x-12y=10 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

equivalentes

$x=\frac{53}{20}$

$y=\frac{1}{20}$

$(3)\begin{cases} 3x+y=8 \\ 2x-6y=5 \end{cases} \approx \begin{cases} 2x-6y=5 \\ 7x-11y=18 \end{cases}$

La suma de dos números es 31 y la diferencia es 3. ?

Determine dichos números.

Sean x, y los números buscados.

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ x+y=31 \\ (2)\ x-y=3 \end{cases} +$$

$$\Rightarrow 2x+0=34$$

$$\approx \begin{cases} x+y=31 \\ 2x=34 \end{cases}$$

$$x=\frac{34}{2}=17$$

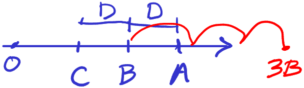
$$17+y=31$$

$$y=31-17=14$$

Sol. $(x,y)=(17,14)$

La suma de las edades de Annie, Bert y Chris es 60. Annie es mayor que Bert por el mismo número de años que Bert es mayor que Chris. Cuando Bert sea tan viejo como ahora es Annie, Annie será tres veces más vieja de lo que Chris es ahora. ¿Cuáles son sus edades?

Sean A, B y C las edades de Annie, Bert y Chris, respectivamente.



$D = A - B = B - C$

① $A + B + C = 60$

② $A - B = B - C$

③ $3B - 4C = 0 \quad \cancel{3B = 4C}$

3' $\cancel{B + (A - B) = 3A(A - B)}$

3'' $\cancel{B - A = \underbrace{3B - C}_{>0}}$

$B - A < 0$

$B < A$

$$A + D = 3C$$

③ $A + (A - B) = 3C \Rightarrow A + A - B - 3C = 0$

$$\begin{cases} A + B + C = 60 \\ A - 2B + C = 0 \\ 2A - B - 3C = 0 \end{cases}$$

$A = 28$

$B = 20$

$C = 12$

Set up a system of linear equations to represent the network shown in Figure 1.10, and solve the system.

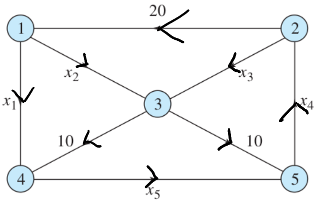
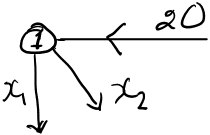


Figure 1.10



1 $\quad x_1 + x_2 = 20$

2 $\quad x_4 = 20 + x_3 \iff 20 + x_3 = x_4$

3 $\quad x_2 + x_3 = 10 + 10$

4 $\quad x_1 + 10 = x_5$

5 $\quad x_5 + 10 = x_4$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ -x_3 + x_4 = 20 \\ x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - x_5 = -10 \\ -x_4 + x_5 = -10 \end{cases}$$

Input interpretation

	$a + b = 20$
	$-c + d = 20$
solve	$b + c = 20$
	$a - e = -10$
	$-d + e = -10$

Result

$b = 20 - a$ and $c = a$ and $d = a + 20$ and $e = a + 10$

sol. infinitas

∴ SEL es consistente.

Analysis of an Electrical Network

Determine the currents I_1, I_2, and I_3 for the electrical network shown in Figure 1.13.

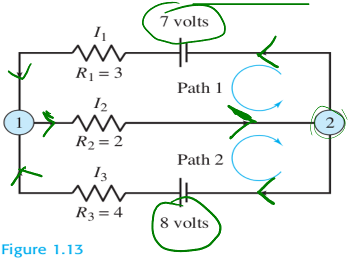


Figure 1.13

Ley de Ohm.

$$V = \frac{I}{R} \qquad I_i = V_i R_i$$

1. $I_1 + I_3 = I_2$
2. $\cancel{I_2 = I_1 + I_3}$

$= 7$

$= 8$

A research team studied the average monthly temperatures of a small lake over a period of about one year. The temperatures and the numbers of months since the study began are shown in the table.

Month	0	6	12
Temperature	40	73	52

(a) Set up a system of equations to fit the data to a quadratic polynomial function.

(b) Solve your system.

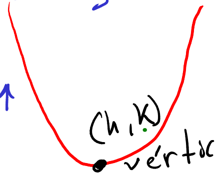
(c) Use a graphing utility to fit a quadratic model to the data.

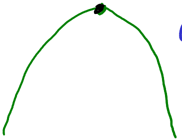
(d) Compare the quadratic polynomial function in part (b) with the model in part (c).

(e) Cite the statement from the text that verifies your results.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Forma gral.

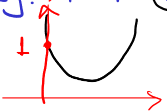




Ej. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

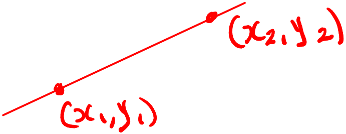
>0

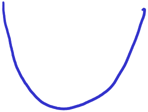
$y = 1$



coeficientes son $2, -3, 1$

$\underline{y=f(x)=ax+b}$ $a>0$, $m>0$





$y=f(x)=\underline{ax^2+bx+c}$.

Función polinomial.:

$$\cancel{y=}f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdots x}_{n\text{-veces}} \qquad a_i\in\mathbb{R}.$$

Ej. $f(x)=7x^3+7x-1$

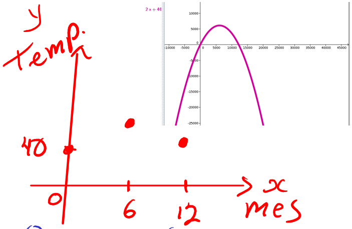
$$f(x)=5x^9-8x^4+x^3-2x^2+5$$

Pol. grado 1 — 2 puntos

grado 2 — 3 puntos

grado 3 — 4 puntos.

A research team studied the average monthly temperatures of a small lake over a period of about one year. The temperatures and the numbers of months since the study began are shown in the table.



→ *Month*	0	6	12
→ *Temperature*	40	73	52

(a) Set up a system of equations to fit the data to a quadratic polynomial function.

(b) Solve your system.

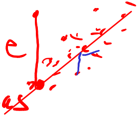
(c) Use a graphing utility to fit a quadratic model to the data.

(d) Compare the quadratic polynomial function in part (b) with the model in part (c).

(e) Cite the statement from the text that verifies your results.

① (0, 40), ② (6, 73), ③ (12, 52)

(x, f(x))



$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ← a, b, c son incógnitas

① $\cancel{a(0)^2} + \cancel{b(0)} + c = 40$

② $a(6)^2 + b(6) + c = 73$

③ $a(12)^2 + b(12) + c = 52$

$\boxed{c = 40}$

$36a + 6b + c = 73$

$144a + 12b + c = 52$

$a \cong -0.000164$ recalcular

$b \cong 2$

∴ $y = -1.64 \times 10^{-4} x^2 + 2x + 40$

Definición (Matriz escalonada y escalonada reducida-ME, MER-)

Una matriz **escalonada**, *tiene las siguientes propiedades:*
(i) Todas las filas que constan completamente de ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.
(ii) Para cada fila que no consta completamente de ceros, la primera entrada distinta de cero es 1 (llamada pivote principal).
(iii) Para dos filas sucesivas distintas de cero, el 1 inicial en la fila superior está más a la izquierda que el 1 inicial en la fila inferior.

Ejemplo

$$\overset{Escalonada}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{E.Reducida}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{Escalonada}{\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{E.Reducida}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Definición (Algoritmo de eliminación Gauss)

Para sistema de m ecuaciones lineales con n variables de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right\}$$

1. *Formar la matriz* **aumentada** *que se obtiene de la matriz de coeficientes A del SEL en su forma matricial, aumentada con el vector de resultados b, esto es*

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

2. *Usar operaciones elementales para llevar $[A|b] \approx ME$.*
3. *Si el SEL es consistente, usar sustitución hacia atrás.*

Definición (Algoritmo de eliminación Gauss-Jordan)

Para sistema de m ecuaciones lineales con n variables de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

1. *Formar la matriz* **aumentada** *que se obtiene de la matriz de coeficientes A del SEL en su forma matricial, aumentada con el vector de resultados b, esto es*

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

2. *Usar operaciones elementales para llevar $[A|b] \approx ME$.*
3. *Si el SEL es consistente, eliminar hacia arriba para llevar a $[A|b] \approx MER$, de lo contrario se termina el algoritmo y la solución es vacía.*

Ejemplo (SEL de solución única)

Determine la solución al SEL

$[A|b]$

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 4 \\ x + y + z &= 4 \\ -2x + 3z &= -9 \end{aligned} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1^a $\quad 2^a$ pivote $\quad (a_{11} = -1 \Rightarrow a_{11}^{-1} = -\frac{1}{1})$

$$① \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \left[\underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{matrix}}_{b} \right] \approx \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \left[\begin{matrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -4 \\ 4 \\ -9 \end{matrix} \right]$$

$F_1 = -F_1$

$$\approx \left[\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 9 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -4 \\ 8 \\ -17 \end{matrix} \right] \approx \left[\begin{matrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2/3 \\ 0 & -4 & 9 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -4 \\ 8/3 \\ -17 \end{matrix} \right]$$

$F_2 = F_2 - F_1$

$F_3 = F_3 + 2F_1$

$F_2 = \frac{1}{3} F_2$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 19/3 & -19/3 \end{array}\right]$$

$\downarrow$ 1

Gauss

$\left(\frac{3}{19}\right)$

$-\frac{8}{3}+9=\frac{19}{3}$

$\frac{32}{3}-17=\frac{19}{3}$

$F_3 = F_3 + 4F_2$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

$F_3 = \frac{3}{19}F_3$

SEL 3X3

$\uparrow$ incógnitas

El SEL será de solución única si tenemos el mismo número de pivotes que incógnitas.

$\therefore\ z=-1$

$y-\frac{2}{3}z=8/3 \Rightarrow y=\frac{8}{3}+\frac{2}{3}(-1)$

$x-2y+3z=-4$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

$F_3 = \frac{3}{19} F_3$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$F_2 = F_2 + \frac{2}{3} F_3$

$F_1 = F_1 - 3F_3$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{I_3}} & \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$F_1 = F_1 + 2F_2$

G-J.

$\therefore S = \{(x, y, z) = (3, 2, -1)\}.$

Input interpretation

solve	$-x + 2y - 3z = 4$
	$x + y + z = 4$
	$-2x + 3z = -9$

Result

$x = 3$ and $y = 2$ and $z = -1$

Download Page

POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Ejemplo (SEL de infinitas soluciones)

Determine la solución al SEL

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= 7 \\ x + y + 4z &= 1 \\ 4x - y + 7z &= 8 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{array}\right)$$

$F_1 = F_2, \; F_2 = F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -9 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & -5 & -9 & 4 \end{array}\right)$$

$F_2 = F_2 - 3F_1$

$F_3 = F_3 - 4F_1$

$F_2 = -\frac{1}{5}F_2$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \leftarrow$$

SEL 3×3 ← incógnitas

$F_3 = F_3 + 5F_2$

z variable libre.

2 pivotes principales

$\boxed{2 < 3}$. No hay solución única.

Como el SEL al aplicar Gauss, no hay ecuaciones inconsistentes $(0\ 0\ 0 \mid -9)$, entonces tiene infinitas soluciones.

Aplicaremos G-J

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/5 & 9/5 \\ 0 & 1 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$F_1 = F_1 - F_2$

$$x + \frac{11}{5}z = \frac{9}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{5} - \frac{11}{5}z$$

$$y + \frac{9}{5}z = -\frac{4}{5} \qquad y = -\frac{4}{5} - \frac{9}{5}z$$

$z = t \in \mathbb{R}$

$$\therefore S = \left\{(x, y, z) = \left(\frac{9}{5} - \frac{11}{5}t, -\frac{4}{5} - \frac{9}{5}t, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$$

Ejemplo (SEL inconsistente o solución vacía)

Determine la solución al SEL

$$\begin{aligned} x+2y+4z &= -1\\ 4x-y+7z &= 8\\ -3x+3y-3z &= 9 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1\\ 4 & -1 & 7 & 8\\ -3 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & -9 & -9 & 12\\ 0 & 9 & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$F_2 = F_2 - 4F_1$

$F_3 = F_3 + 3F_1$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

$F_3 = F_3 + F_2$

$F_2 = -\frac{1}{9}F_2$

Inconsistente.

$\rightarrow 0 \cdot x + 0y + 0z = 18$!

$\therefore S = \emptyset$.

Ejemplo (SEL 4×4)

Determine la solución al SEL

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 5z &= 57 \\ -3x + 2z + w &= 17 \\ 5x - 2y - z + w &= -14 \\ x - y - z + w &= -9 \end{aligned}$$

En wolframalpha

$x = 1, \; y = 9, \; z = 7, \; w = 6.$

Sol. es única.

$S = \{(x, y, z, w) = (1, 9, 7, 6)\}$

Definición (Inversa de una matriz)

Si A es una matriz no singular de orden n, entonces la inversa de A, denotada por A^{-1} se puede obtener aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan, aplicado a la siguiente matriz aumentada $[A|I_n]$, para hacerla equivalente a $[I_n|A^{-1}]$, esto es:

$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

$$[A|I_n] \approx [I_n|A^{-1}].$$

Ejemplo (Inversa de una matriz por G-J)

Determine la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1 SEL.

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 SEL

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Inversa de una matriz por G-J)

Sea $x \in \mathbb{R}$ *fijo, determine la inversa de la siguiente matriz de rotación*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos x & -\operatorname{sen} x & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & \frac{1}{\cos x} & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 & 1 \end{array}\right)$$

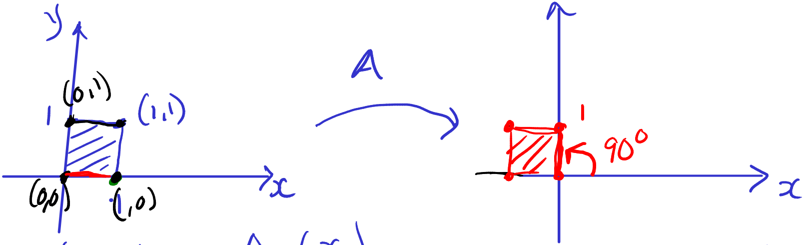
$F_1 = \frac{1}{\cos x} F_1$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & \cos x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos x} & -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & \cos x & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \end{array}\right)$$

$F_2 = F_2 - \operatorname{sen} x \, F_1$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \end{array}\right)$$

Identidades trigonométricas



$$Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos 90 & -\operatorname{sen} 90 \\ \operatorname{sen} 90 & \cos 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$t \in [0, 2\pi]$ $\qquad t = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Inversa de una matriz por G-J)

Determine la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 8 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Tarea:

. The sales (in billions of dollars) for Wal-Mart stores from 2000 to 2007 are shown in the table. (Source: Wal-Mart)

P_1 $\quad$ P_2

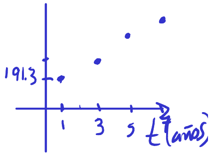
Year	2000	2001	2002	2003
Sales	191.3	217.8	244.5	256.3

P_3 $\quad$ P_4

Year	2004	2005	2006	2007
Sales	285.2	312.4	346.5	377.0

$2001 \Leftrightarrow 1$

$2003 \to 3$



(a) Set up a system of equations to fit the data for the years 2001, 2003, 2005, and 2007 to a cubic model.

(b) Solve the system. Does the solution produce a reasonable model for predicting future sales? Explain.

$y = f(x) = \underline{a}x^3 + \underline{b}x^2 + \underline{c}x + \underline{d}$

incógnitas son a, b, c, d

① $a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 217.8$

② $a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) + d = 256.3$

③

④

The net profits (in millions of dollars) for Microsoft from 2000 to 2007 are shown in the table. (Source: Microsoft Corporation)

Year	2000	2001	2002	2003
Net Profit	9421	10,003	10,384	10,526

Year	2004	2005	2006	2007
Net Profit	11,330	12,715	12,599	14,410

(a) Set up a system of equations to fit the data for the years 2001, 2003, 2005, and 2007 to a cubic model.

(b) Solve the system. Does the solution produce a reasonable model for predicting future net profits? Explain.

Ejemplo

Supongamos que una economía consta de pocos sectores: del carbón, electricidad y acero, y que el rendimiento de cada sector se distribuye entre los diferentes sectores como en la siguiente tabla, donde las entradas de una columna representan fracciones de la producción total de un sector.

	Carbón	Electricidad	Acero	←Distribuido por/Comprado por:
E_1	0	.4	.6	→ Carbón
E_2	.6	.1	.2	Electricidad
E_3	.4	.5	.2	Acero
	1	1	1	← **Total**

$$\left.\begin{aligned} 0PC + .4PE + .6PA &= 1\,PC \\ .6PC + .1PE + .2PA &= 1.\,PE \\ .4PC + .5PE + .2PA &= 1.\,PA \end{aligned}\right\} \text{SLE } 3\times 3$$

PC = La producción de carbón al año.

PE = " " " " " electricidad " " "

PA = " " " " " acero " " "

Incógnitas PC, PE, PA.

$$-PC + 0.4PE + 0.6PA = 0$$

Homogéneo.

$$0.6PC + 0.1PE - 1PE + 0.2PA = 0$$

$$0.4PC + 0.5PE + 0.2PA - 1\cdot PA = 0$$

$$-PC + 0.4PE + 0.6PA = 0$$

$$0.6PC - 0.9PE + 0.2PA = 0$$

$$0.4PC + 0.5PE - 0.8PA = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -x + 0.4y + 0.6z &= 0 \\ 0.6x - 0.9y + 0.2z &= 0 \\ 0.4x + 0.5y - 0.8z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$y = \frac{28}{31}x \quad , \quad z = \frac{33}{31}x$$

Ejemplo

Supón que una empresa administra tres refinerías de petróleo y cada refinería produce tres derivados: gasolina, diesel y aceite lubricante. Supongamos también que por cada barril de petróleo (aproximadamente 159 *litros) la producción, en galones*[a]*, es como se indica en la siguiente tabla:*

		Refinería 1	Refinería 2	Refinería 3	
1250	Gasolina	20	21	19	⇐ 1250
750	Diesel	11	12	13	
520	Aceite lubricante	9	8	8	

La información de la tabla anterior se interpreta así: por cada barril de petróleo la Refinería 1 *produce* 20 *galones de gasolina,* 11 *de diesel y* 9 *de aceite lubricante y así con las demás refinerías. Supongamos que se desea una producción de* 1250 *galones de gasolina,* 750 *de diesel y* 520 *de aceite lubricante. ¿Cuántos barriles de petróleo debe procesar cada refinería para satisfacer esa demanda?*

Solución: Denotemos con x, y, z *la cantidad de barriles que producen la refinería 1, 2 y 3, respectivamente. Entonces, vemos que el SEL asociado al problema anterior es*

¿ $x = 33.4$? ⇐

~~33~~ 34

$$\begin{aligned} 20x + 21y + 19z &= 1250 \\ 11x + 12y + 13z &= 750 \\ 9x + 8y + 8z &= 520 \end{aligned}$$

$x, y, z > 0$

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

[a] Un galón es aproximadamente 3.847 litros

Resolviendo el SEL, tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 21 & 19 & 1250 \\ 11 & 12 & 13 & 750 \\ 9 & 8 & 8 & 520 \end{array}\right)$$

Ejemplo

De la geometría elemental se sabe que hay una sola línea recta que pasa a través de dos puntos cualesquiera en un plano. Menos conocido es el hecho de que existe una parábola única a través de cualesquiera tres puntos no colineales en un plano, es decir, los tres puntos satisfacen la ecuación: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Una compañía ha vendido durante tres años consecutivos \$10, \$9 y \$12 (medido en millones). Determine una función que ajuste estos datos para predecir las ventas del cuarto año.

Resolviendo el SEL, tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 9 & 3 & 1 & 12 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$S = \{(a, b, c) = (2, -7, 15)\}.$$

Es así que la función cuadrática es $f(x) = 2x^2 - 7x + 15$, por lo que las ventas pronosticadas para el cuarto año serán: $f(4) = 2(4)^2 - 7(4) + 15 = 19$, medido en millones.