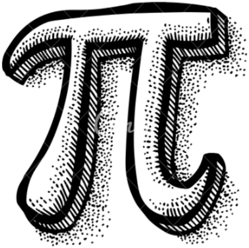


Funciones de Varias Variables

Campos escalares y campos vectoriales

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

1. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y,z) = \ln(x^2 - 3yz) + \sqrt{x-z}$ campo escalar
2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = (x^3 - 6x, \cos(x) + 3)$ campo vectorial
3. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y) = (x + 2y, 1 - \frac{x-2}{3+y})$ campo vectorial $\leftarrow$

Ejemplo (Magnitudes escalares)

Veamos algunos ejemplos de magnitudes escalares que pueden ser modelados por medio de un campo escalar:

a. *Supongamos que* $T(x,y,z) = x^2 - y + z$ *es la temperatura en un punto en nuestro espacio tridimensional;* $T(x,y) = x^3 + y^2$ *la temperatura en un punto de una placa metálica, etc.*
b. *Distancia* $f(x,y,z)$*, área* $A(x,y)$*, el volumen* $V(x,y,z)$*, altura sobre el nivel del mar* $H(x,y,z)$*, etc.*
c. $P(x,y,z) = 7x - 3y + 4z$ *la presión atmosférica, la presión sanguínea, la presión en un recipiente, etc.*
d. *Densidad* $\delta(x,y,z)$*, masa, porosidad, etc.*
e. *Momento de inercia, tiempo, frecuencia, trabajo, rapidez, etc.*

① $f(2,1,1) = \ln(2^2 - 3(1)(1)) + \sqrt{2-1} = \ln(1) + \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{R}$

② $f(0) = (0^3 - 6\cdot 0, \cancel{\cos(0)}^{1} + 3) = (0,4)$

Ejemplo (Magnitudes vectoriales)

Recordemos que un vector es un objeto que posee magnitud, dirección y sentido. Veamos algunos ejemplos de magnitudes vectoriales que pueden ser modelados por medio de un campo vectorial:

- a. $F(x, y, z)$ *Fuerza aplicada a objeto, fuerza de sustentación, etc.*
- b. $r(x, y, z)$ *Posición, velocidad, aceleración, etc.*
- c. *Momento de fuerza, Torsión, etc.*
- d. *Tensión eléctrica*
- e. *Campo magnético, campo eléctrico, campo gravitacional.*
- f. *Peso.*

	y	x_1	x_2	$\cdots$	x_{m-1}
Id	var1	var2	Var3	$\cdots$	varm
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$		a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}	null.		$\cdots a_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$		$\cdots$		
n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$		a_{nm}

fila ← Vector $\in \mathbb{R}^m$

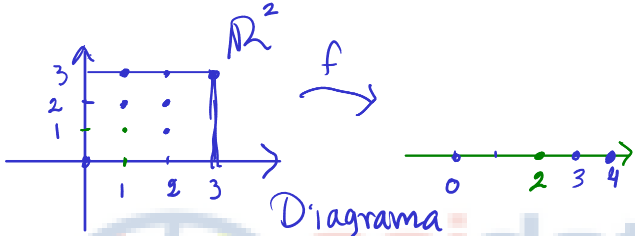
$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ ← Campo escalar

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2 & \text{Campos escalares (dominio } \mathbb{R}^n \text{ y contradominio } \mathbb{R}) \\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, n \geq 1, m \geq 2 & \text{Campos vectoriales (dominio } \mathbb{R}^n \text{ y contradominio } \mathbb{R}^m). \end{cases}$$

Definición (Campo escalar)

Un campo escalar es toda función f que a cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ le asocia un valor escalar, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

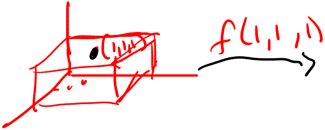
Ej: $f(x,y) = x + y \leftarrow$ Temperatura.



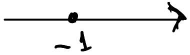
Diagrama

$$f(x,y) = e^{x} + \cos(y)$$

$$f(x,y,z) = x^2 - 3y + xz \in \mathbb{R} \qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

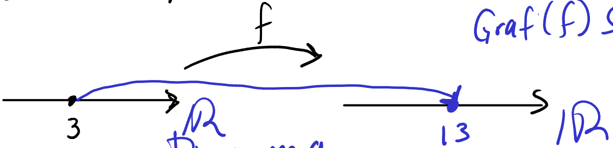


$$f(1,1,1) = 1^2 - 3(1) + (1)(1) = -1.$$

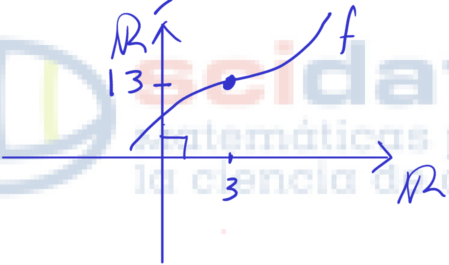


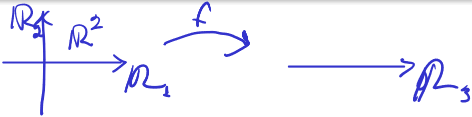
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(x) = 2x^2 - 5$

$\mathrm{Graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$



Diagrama



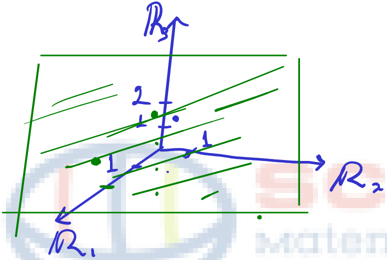


$f(x,y) = x+y$

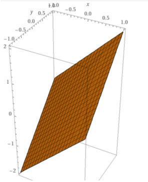
$f(1,1) = 2$

$f(1,-1) = 0$

$f(2,1) = 3$



$f(x) = y$

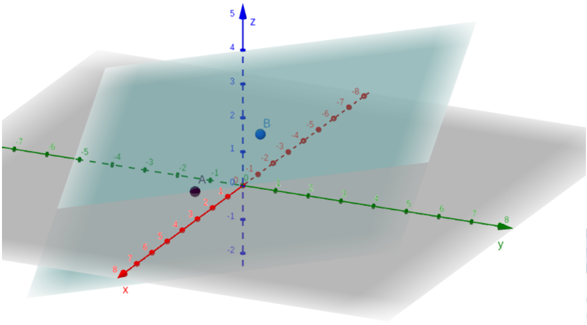


$z = f(x,y)$

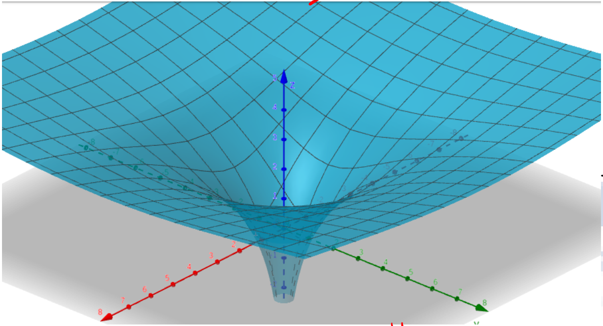
En este ejemplo

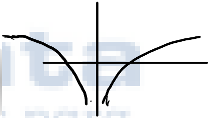
$z = x+y \iff \underbrace{x+y-z=0}_{\text{plano}}$

$f(x,y) = x + y$



$f(x,y)=\ln(\underbrace{x^2+y^2}_{\text{arg.}})$ $\qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

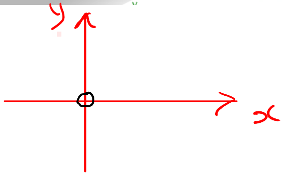




$\ln(x^2)$

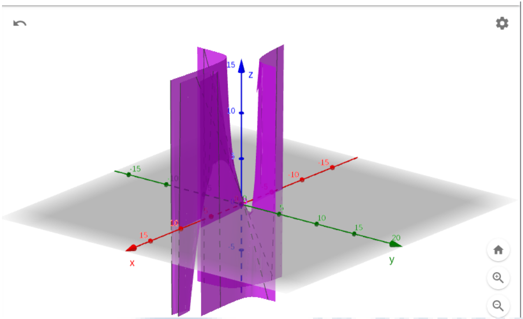
$x^2+y^2>0$

$x^2\geq 0,\ y^2\geq 0$



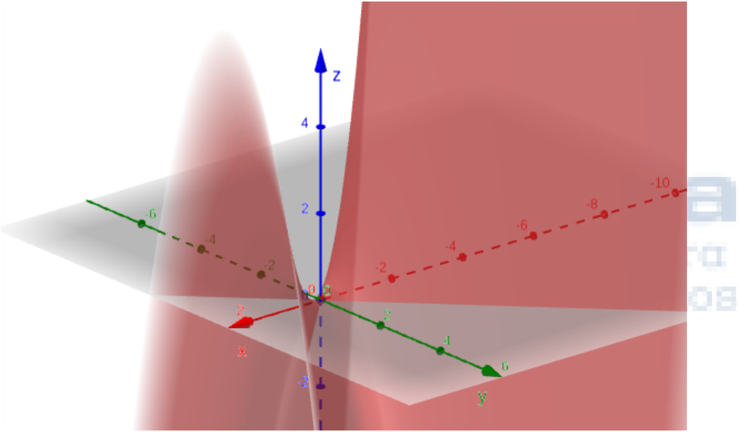
$$f(x,y) = x^2y - 5xy^3 + 2x - 3y + 1$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$



•

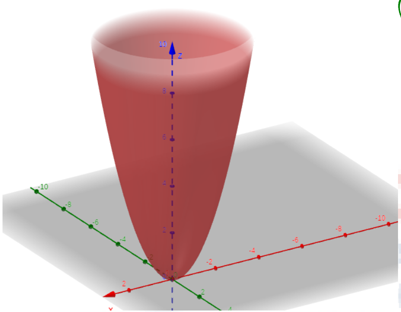
$f(x,y) = x^2 - y^2$ Forma de silla (de montar caballo)



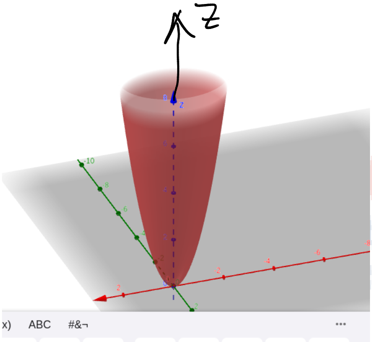
•

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Paraboloide circular



$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$$



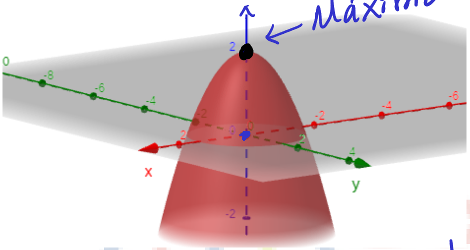
Paraboloide elíptico.

abre hacia arriba.

$$f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$$

$x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2-y^2 \leq 0$

Máximo



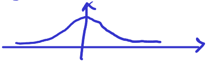
Paraboloide circular que abre hacia abajo.

El punto $(0,0)$ da el máximo que es 2.

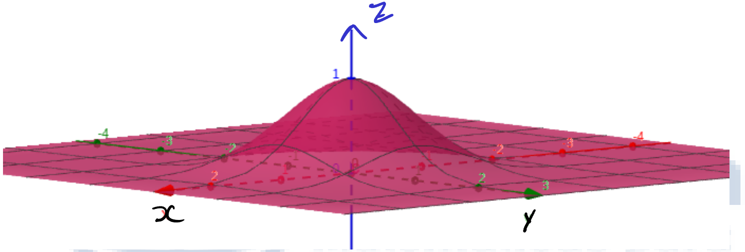
Y el cero $(0,0)$ se punto estacionario.

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

$\left(f(x) = e^{-x^2} \right.$



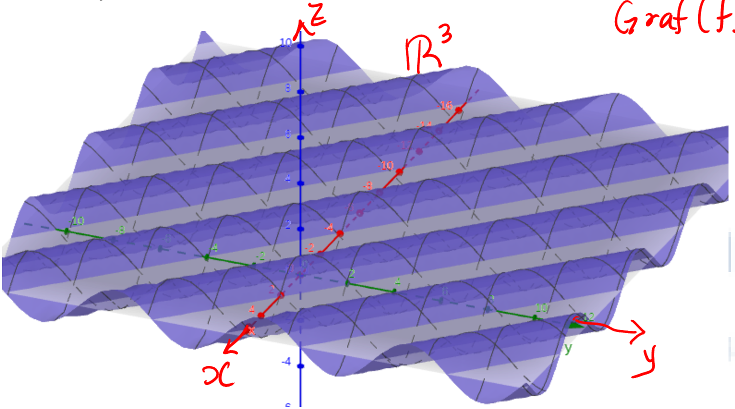
$\left. \right)$



$f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2 + 1)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\operatorname{Graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$



$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^4$ $\quad$ no es posible verlo.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Definición (Campo vectorial)

Un campo vectorial es toda función f *que a cada elemento* $x \in \mathbb{R}^n$ *le asocia un vector en* $\mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Por ejemplo,*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

es un campo vectorial de m *componentes,* $f_1, f_2, ..., f_m$, *que dependen de* n *variables independientes, donde las funciones* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *son campos escalares para toda* $i = 1, ..., m$.

Ej. $f(x, y) = (x - y^2 + 1, \ln(x))$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

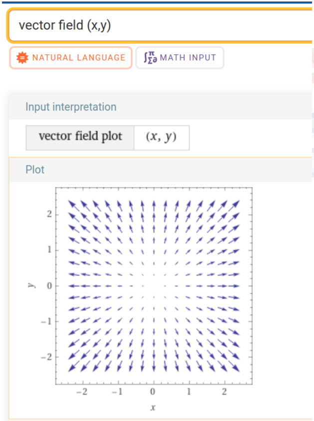
Ej. $f(t) = (2t, t^2-1)$

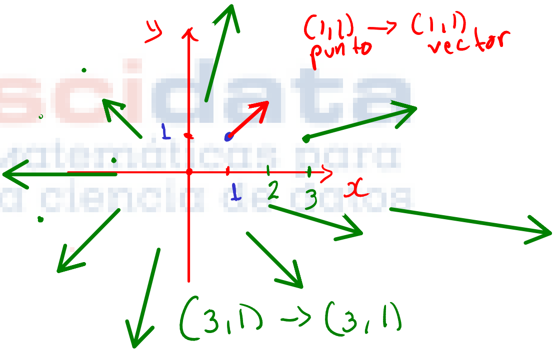
$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \text{Parametrización} \\ n = m-1 \end{array}\right\}$

Ej. $f(x,y) = (x,y)$ Identidad

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(1,1) \to (1,1)$
punto vector





$(3,1) \to (3,1)$

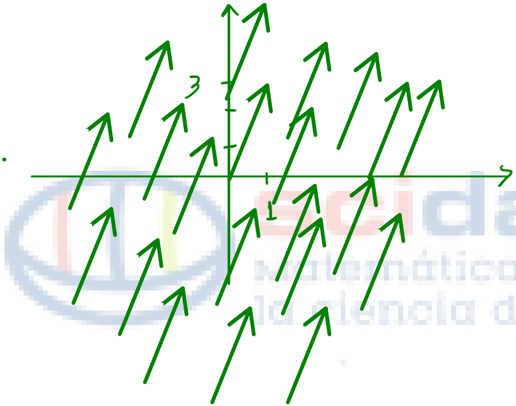
$$f(x,y) = (1,3)$$

$(0,0) \mapsto (1,3)$

$(1,1) \to (1,3)$

$(2,\pi) \to (1,3)$

$\vdots$



Flujo continuo y constante.

$f(x,y) = (-y, x)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

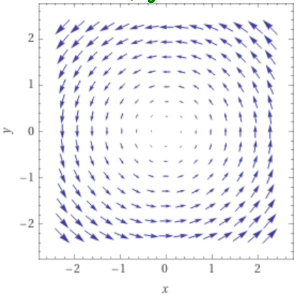
vector field (-y,x)

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input interpretation

vector field plot	$(-y, x)$

Plot vórtice



$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right) \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

vector field (-y,x)

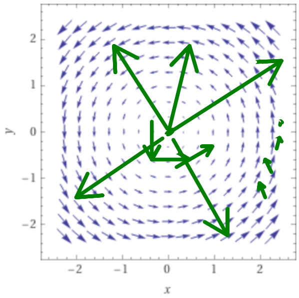
NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

vórtice violento

Input interpretation

vector field plot	$(-y, x)$

Plot



$$f(x,y) = -(x,y)$$

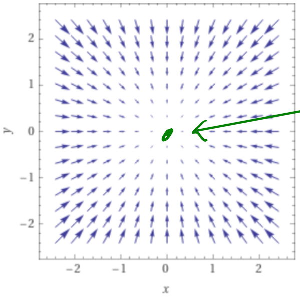
vector field (-x,-y)

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input interpretation

vector field plot	$(-x, -y)$

Plot

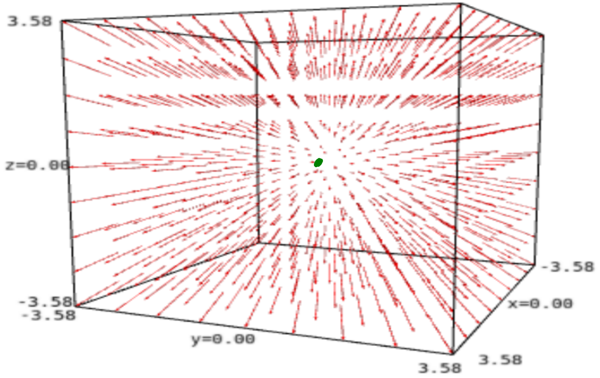


Implosión

punto sumidero

$f(x,y,z)=(x,y,z)$ identidad.

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$



Definición (Dominio de un campo escalar)

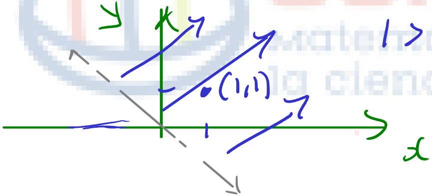
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. El dominio de f, denotado por $Dom(f)$ es

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

$f(x,y) = \ln(\underline{x+y}) + 2$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x+y > 0 \qquad \underline{y > -x} \qquad (y = -x)$

$1 > -1$



$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}.$

Definición (Dominio de un campo vectorial)

Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial. El dominio de* f*, denotado por* $Dom(f)$ *es*

$$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\in\mathbb{R}^m\}.$$

$$f(x,y)=\left(\ln(x),\sqrt{1-x-y}\right) \qquad (-1,5)\notin Dom(f)$$

$$f(-1,5)=\left(\ln(-1),\sqrt{1-(-1)-5}\right)=\left(\ln(-1),\sqrt{-3}\right)\notin\mathbb{R}^2$$

Definición (Imagen de un campo escalar)

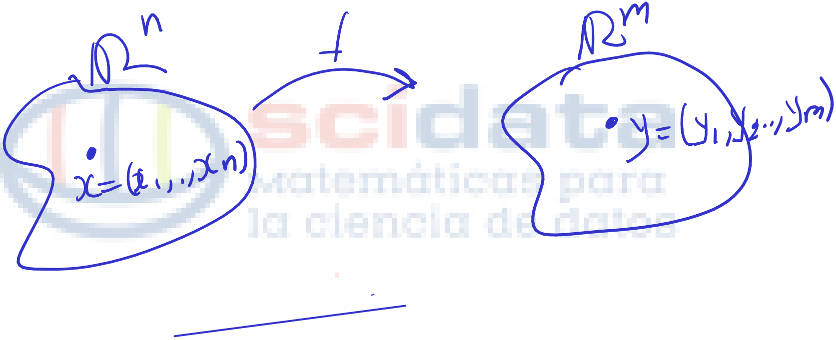
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. La imagen de* f*, denotado por* $Ima(f)$ *es*

$$Ima(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = f(x)\}.$$

Definición (Imagen de un campo vectorial)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial. La imagen de* f*, denotado por Ima*(f) *es*

$$Ima(f) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = f(x)\}.$$



Definición (Gráfica de un campo escalar)

Dado un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *definimos la gráfica de* f, *denotada por Graf*(f), *como*

$$\mathit{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\} \tag{1}$$

Definición (Gráfica de un campo vectorial)

Dado un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *definimos la gráfica de* f, *denotada por Graf*(f), *como*

$$\mathit{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\} \tag{2}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ $Graf(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad$ $Graf(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

No tiene sentido práctico.

Definición (Límite de un campo escalar)

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tiende a el límite* $L \in \mathbb{R}$ *cuando* $x \in \mathbb{R}^n$ *tiende a* $c \in \mathbb{R}^n$*, significa que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $0 < ||x - c|| < \delta$ *se cumple* $|f(x) - L| < \epsilon$

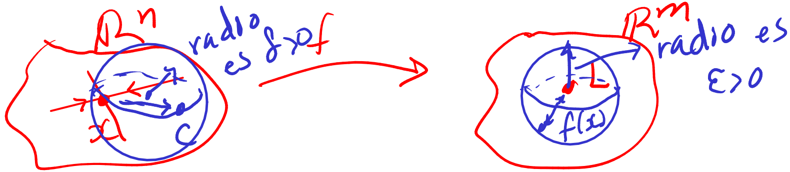
El símbolo $|| \cdot ||$ significa la norma usual en $\mathbb{R}^n$, esto es, si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Definición (Límite de un campo vectorial)

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tiende al límite* $L \in \mathbb{R}^m$ *cuando* $x \in \mathbb{R}^n$ *tiende a* $c \in \mathbb{R}^n$*, significa que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $0 < ||x - c|| < \delta$ *se cumple* $||f(x) - L|| < \epsilon$

Básicamente el concepto de límite nos dice que si una función tiene un límite L cuando x tiende a c, significa que cada vez que x esté en un entorno de a, entonces $f(x)$ se encontrará en un entorno de L.

$n \geq 2$



Definición (Continuidad en un campo escalar)

Decimos que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua en* $a \in \mathbb{R}^n$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $||x - a|| < \delta$ *entonces* $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

Definición (Continuidad en un campo vectorial)

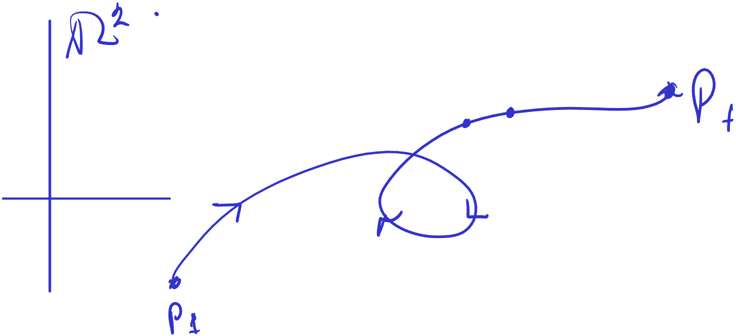
Decimos que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es continua en* $a \in \mathbb{R}^n$, *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $||x - a|| < \delta$ *entonces* $||f(x) - f(a)|| < \epsilon$

Ej. $f(x,y) = e^{x+y} - \operatorname{sen}(x^2 - 3y)$

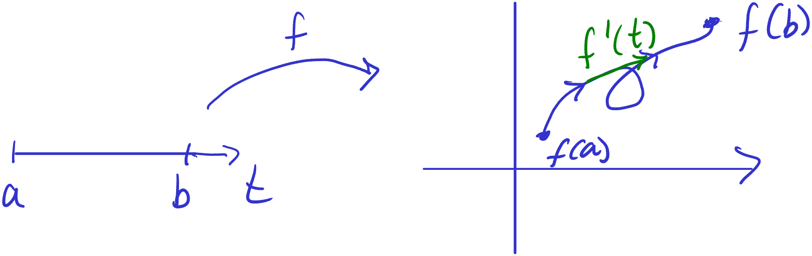
$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$

Y es continua en $\mathbb{R}^2$

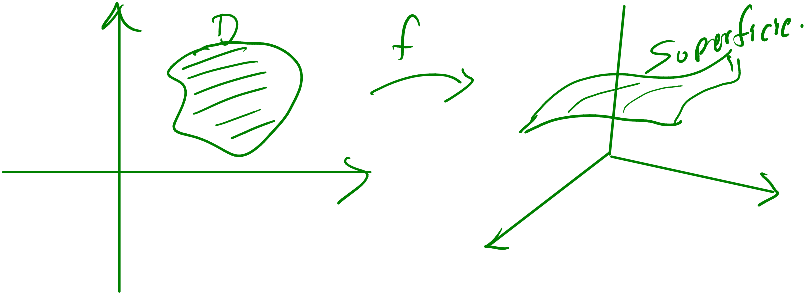
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ derivada.



R²
P1
Pf



a
b
t
f
f'(t)
f(b)
f(a)



$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$n \geq 1$ $\quad$ $n < m$