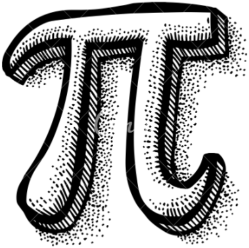
scidata



Funciones Reales

Y sus aplicaciones

Dr. Juan Luis Palacios Soto
palacios.s.j.l@gmail.com

Crecimiento logístico. Un estudiante contagiado con el SARS-COV2 vuelve a un campus aislado de una universidad donde hay 4175 estudiantes. El número de estudiantes infectados después de t días del regreso del estudiante se pronostica por medio de la función logística

$$P(t) = \frac{4175}{1 + 4174e^{-0.9618t}}$$

a. Según este modelo matemático, ¿cuántos estudiantes estarán contagiados por la enfermedad después de 12 días?
b. Determine la razón de cambio de la población en el segundo día.

Desintegración exponencial. Un modelo exponencial para la cantidad de sustancia radiactiva remanente en el instante t está dado por $A(t) = A_0e^{kt}$, donde A_0 es la cantidad inicial y $k < 0$ es la constante de desintegración.

a. Al inicio estaban presentes 200 mg de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había decrecido 3 %. Elabore un modelo exponencial para la cantidad de la sustancia en desintegración remanente después de t horas.
b. Determine la cantidad remanente después de 24 horas.
c. Determine el instante en que $A(t) = 12A_0$ se denomina vida media de la sustancia. ¿Cuál es la vida media de la sustancia en el inciso a)?

(Conservación óptima) Un ecólogo cultiva peces en un lago. Cuanto más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w = 600 - 30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

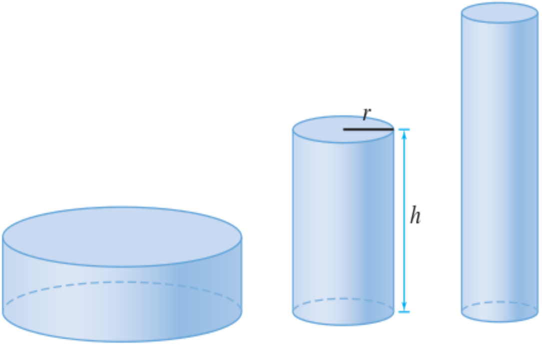
(Costo mínimo) Se debe construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque necesita una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de $10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

(Publicidad y ganancias) Una compañía obtiene una utilidad de $5 por cada artículo de su producto que vende. Si gasta A dólares por semana en publicidad, el número de artículos que vende por semana está dado por $x = 2000(1 - e^{-kA})$ en donde $k = 0.001$. Determine el valor de A que maximiza la utilidad neta.

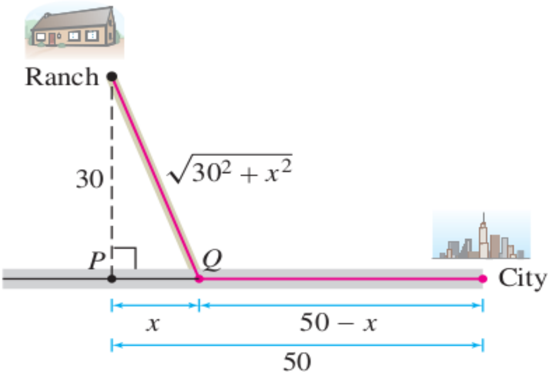
(Máxima utilidad e impuesto sobre la renta) Las funciones de costo y de demanda de una empresa son $C(x) = 5x$ y $p = 25 - 2x$, respectivamente. Determine el nivel de producción que maximizará las utilidades de la empresa y ¿cuál es la máxima utilidad?

Maximizar ingresos Un fabricante de armella cerrada inoxidable T-304 del modelo S0327-04025 de medidas $5/32 \times 3/4''$ con límite de trabajo de 0.1 ciertas especificaciones sabe que si vende a 50 pesos cada una, entonces venderá 2500 armellas por día; sin embargo, si por cada 5 pesos que aumenta al precio de las armellas venderá 200 armellas menos al día. Si el costo en la elaboración de una armella es de $10 pesos, determine el precio de venta por armella con el que el fabricante obtendrá la ganancia máxima diaria. *Hint: Proponga una función de ganancia que dependa del aumento.*

Diseñe una lata de metal en forma de cilindro circular recto de volumen 900 cm^3, de tal forma que se emplee la menor cantidad de metal (la lata incluye la base y la tapa). Ver imagen.



Un rancho está a una distancia de 30 km de una pista (recta) que conecta a la ciudad y que a partir de este punto está a una distancia de 50 km. Se le pide construir un camino recto para conectar el rancho con la autopista que permita a los automovilistas llegar a la ciudad en el menor tiempo posible.Si la velocidad máxima permitida para el camino del rancho a la autopista es de 60 km/h y la velocidad máxima permitida en la pista es de 110 km/h, ¿Cómo debe ser diseñado el camino si se desea llegar del rancho a la ciudad en el menor tiempo posible?



Definición (Función)

Una función es una "regla" de asignación que a cada elemento de un primer conjunto, comúnmente denominado **dominio** *asigna de manera* **única** *un elemento de un segundo conjunto denominado* **contradominio***.*

Maneras de representar una función:

- Verbal: La gasolina depende del precio del dolar.
- Numérica: Por medio de una tabulación
- Analítica: $f(x) = \cos(3x^2) - 6x$
- Notación: $f : X \to Y$
- Visual: Gráfica o diagrama.

Definición (Dominio de una función)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. El dominio de f, denotado por $Dom(f)$, es el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ (primer conjunto), $Dom(f) \subseteq \mathbb{R}$, tal que la regla f queda bien definida o bien tiene sentido.

Cosas prohibidas: división por cero, logaritmos de números no positivos, raíz $n-$ésima con n par de números negativos.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Definición (Imagen o rango de una función)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función. La imagen de una función, denotada por Ima*(f)*, es el subconjunto más grande de* $\mathbb{R}$ *(del contradominio), tal que para todo* $y \in \mathbb{R}$ *existe* $x \in \mathbb{R}$ *(del primer conjunto), tal que* $f(x) = y$*.*

Definición (Gráfica de una función)

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definimos la gráfica de* f*, denotada por Graf*(f)*, como*

$$\mathit{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\} \tag{1}$$

Clasificación de funciones

- Algebraicas:
  - -**Polinómicas**
  - -**Racionales**
  - -**Radicales**
- Trascendentes:
  - -**Exponenciales**
  - -**Logarítmicas**
  - -**Trigonométricas**

Función polinomial

Una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ se llama función polinomial de grado n, si $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ y a_{n-1},..., a_2, a_1, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

a) $f(x) = a$ — $g(x) = \frac{1}{3}$

b) $f(x) = ax + b$ — $g(x) = -\frac{1}{2}x + 7$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$ — $g(x) = -2x^2 + 5x - 1$

d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ — $g(x) = -x^3 + 4x^2 - x + 2$

Función racional

Decimos que una función $f(x)$ de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales y $q(x) \neq 0$ se llama función racional.

Ejemplos:

1. $f(x) = -\frac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \frac{x^5+7x-2}{5x^6-x^5+9x^4+x^3+x^2-4x}$
3. $f(x) = \frac{x-5}{3}$

Función radical

Una función radical es una función algebraica que involucra una raíz n-ésima, que a su vez contiene una función polinomial o racional.

Ejemplos:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$
2. $g(t) = -\sqrt{t}$
3. $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

Funciones exponenciales

Una función de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ se llama función exponencial. En particular si $a = e$, la función se denomina exponencial natural.

Ejemplos:

1. $f(x) = 3^x$
2. $g(t) = 4e^t$
3. $h(r) = -e^{2r} + 5$

Funciones logarítmicas

Una función $f(x) = \log_b x$, con $b \neq 1$ y $b > 0$ se denomina función logarítmica. Además, $y = \log_b x$ si y sólo sí $x = b^y$. Si $b = e$ se tiene que $\log_e x = \ln(x)$

Ejemplos:

1. $f(x) = \ln(x)$
2. $f(x) = \log_2(x)$
3. $g(t) = \ln(x - 2) - 1$
4. $h(x) = -\ln(x^2)$

Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas involucran a las funciones: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ y sus recíprocos.

Ejemplos:

1. $f(x) = 2\sin(x)$
2. $g(t) = \tan(t - \frac{\pi}{2})$
3. $h(x) = \sin(2x)$

Definición (Traslaciones verticales)

Supongamos que $f(x)$ *es una función real y* k *es una constante real.*
Entonces la gráfica de $y = f(x) + k$ *presenta una* *traslación vertical* *hacia arriba con respecto a la gráfica de* f *si* $k > 0$*; mientras que se desplaza hacia abajo si* $k < 0$

Definición (Traslaciones horizontales)

Supongamos que $f(x)$ es una función real y k es una constante real.
Entonces la gráfica de $y = f(x + k)$ presenta una traslación horizontal hacia la izquierda con respecto a la gráfica de f si $k > 0$; mientras que se desplaza hacia la derecha si $k < 0$

Definición (Expansión-contracción vertical)

Supongamos que $f(x)$ *es una función real y* k *es una constante real.*
Entonces la gráfica de $y = kf(x)$ *presenta una expansión vertical con respecto a la gráfica de* f *si* $|k| > 1$*; mientras que tendrá una contracción vertical si* $|k| < 1$.

Definición (Expansión-contracción horizontal)

Supongamos que $f(x)$ *es una función real y* k *es una constante real.*
Entonces la gráfica de $y = f(kx)$ *presenta una expansión horizontal con respecto a la gráfica de* f *si* $|k| < 1$; *mientras que tendrá una contracción horizontal si* $|k| > 1$.

Definición (Operaciones algebraicas)

Sean $f : \mathit{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathit{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones cualesquiera. Si* $S = \mathit{Dom}(f) \cap \mathit{Dom}(g) \neq \emptyset$*, entonces las siguientes operaciones entre funciones quedan bien definidas y su dominio es* S*.*

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, para todo* $x \in S$*, tal que* $g(x) \neq 0$*.*

Ejemplo

Sean $f(x) = \sqrt{x+3}$ *y* $g(x) = \sqrt{5-x} - 2$

1. *Determine los dominios de* f *y* g.
2. *Determine el dominio de* $f+g$ *y especifique* $(f+g)(x)$
3. *Determine el dominio de* f/g *y especifique* $(f/g)(x)$

Definición (Funciones a trozos o en partes)

Sea $g_i(x)$ una función continua en I_i para toda $i = 1, 2, ..., n$, donde $I_i \cap I_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, entonces la siguiente función f queda bien definida en el conjunto $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in I_1 \\ g_2(x) & x \in I_2 \\ \vdots & \\ g_n(x) & x \in I_n \end{cases}$$

Ejemplo

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Definición (Composición de funciones)

Sean f y g dos funciones, tal que $Ima(g) \subseteq Dom(f)$, entonces la función composición de f con g, denotada como $f \circ g$, queda bien definida y es la función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Ejemplo

Sean $f(x) = e^{x^2 - x + 5}$ *y* $g(x) = \sqrt{3x - 1}$, *determinar* $f \circ g$ *y* $g \circ f$, *así comosus respectivos dominios.*

Ejemplo

Sean $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *y* $g(x) = \sin(2x + 3)$, *determine ambas composiciones de funciones y sus recpetivos dominios.*

Definición (Paridad de una función)

Sea f una función real. Entonces decimos que

- f *es par si* $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in Dom(f)$
- f *es impar si* $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in Dom(f)$

Definición (Función Inyectiva)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función con dominio* X*. Decimos que* f *es inyectiva si para todo* $x, y \in X$*, con* $x \neq y$ *se tiene* $f(x) \neq f(y)$*.*

Ejemplo

Algunas funciones inyectivas: la identidad, su recíproca $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \ln(x)$, $f(x) = e^x$.

Definición (Función Sobreyectiva)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}Y$ una función con dominio en X e imagen Y. Decimos que f es sobreyectiva (suprayectiva o también se dice sobre) si para todo $y \in Y$, existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Observe que esta definición es equivalente a decir que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva si y sólo si $Y = \mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es sobre } \iff \text{Ima}(f) = \mathbb{R}.$$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función dada por* $f(x) = x^3$*. Demuestre que* f *es sobreyectiva.*

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función dada por* $f(x) = x^2$. *Demuestre que* f **NO** *es sobreyectiva.*

Definición (Función Biyectiva)

Decimos que f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Definición (Funciones crecientes)

Decimos que una función $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ *es creciente si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tal que* $x < y$ *se cumple* $f(x) < f(y)$.

Definición (Funciones no decrecientes)

Decimos que una función $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ *es no decreciente si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tal que* $x < y$ *se cumple* $f(x) \leq f(y)$.

Definición (Funciones decrecientes)

Decimos que una función $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ *es decreciente si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tal que* $x < y$ *se cumple* $f(x) > f(y)$.

Definición (Funciones no crecientes)

Decimos que una función $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ *es no creciente si para todo* $x, y \in Dom(f)$ *tal que* $x < y$ *se cumple* $f(x) \geq f(y)$.

Definición (Función Inversa)

Decimos que g *es una función inversa de* $f : X \to Y$*, si y sólo si* $(f \circ g)(x) =$ *para toda* $x \in Y$ *y* $(g \circ f)(x) = x$ *para toda* $x \in X$.

Una función inversa simplemente la denotamos por $g = f^{-1}$. En notación más simple si f tiene función inversa se cumple

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in Y \quad \text{y} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$$

Teorema

Si $f : X \to Y$ es inyectiva en todo X, entonces f tiene inversa en X

Ejemplo

$$f(x) = x,\ f(x) = x^3,\ f(x) = \frac{1}{x},\ f(x) = e^x,$$