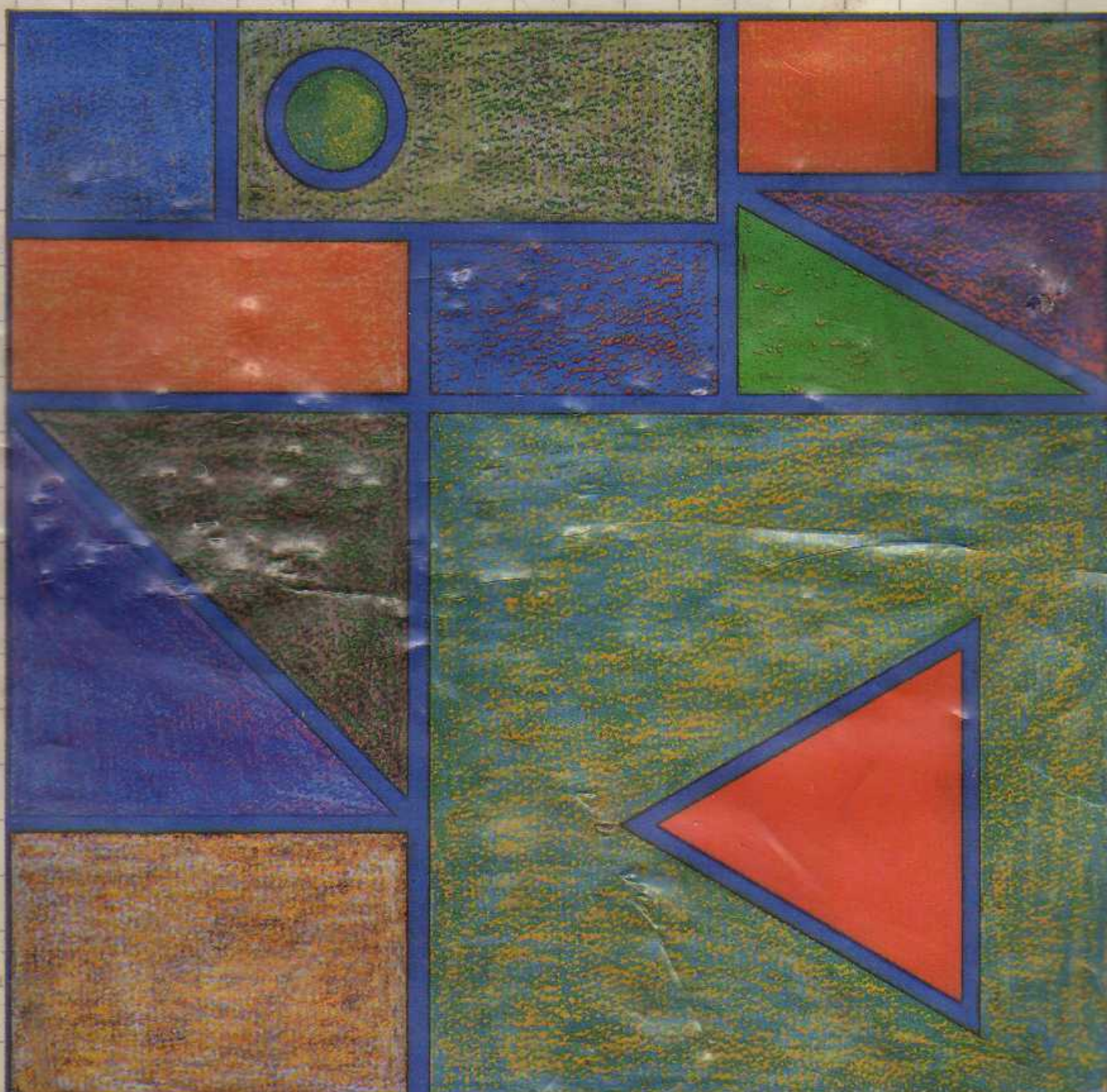
APLICACIONES DE ÁLGEBRA LINEAL



STANLEY I. GROSSMAN

Grupo Editorial Iberoamérica

APLICACIONES DE ÁLGEBRA LINEAL

STANLEY I. GROSSMAN

Traductor:
Mát. Alfonso Leal Guajardo
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey (ITESM)
Monterrey, México
Profesor - Departamento de Matemáticas
Universidad Panamericana - México, D.F.

Revisor Técnico:
Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Grupo Editorial Iberoamérica
Río Ganges No. 64 - 06500 México, D.F. - Tels. 5112517, 5530798

APLICACIONES DE ÁLGEBRA LINEAL

Versión en español de la obra *Applications for Elementary Linear Algebra* – Third Edition, por Stanley I. Grossman.
Edición original en inglés publicada por Wadsworth, Inc.,

ISBN 0-534-07425-1

ISBN 968-7270-40-3
Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.
Proeditor: Francisco Paniagua B.
Productor: Oswaldo Ortiz R.
Cubierta: Louis Neiheisel

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Río Ganges No. 64 - Col. Cuauhtémoc - 06500 México, D.F.
Apdo. 5-192 - Tels. 5112517, 5530798
Reg. CNIEM 1382

Prólogo

El estudio del Álgebra Lineal tiene una importancia central en el plan de estudios de matemáticas a nivel de licenciatura, al menos por dos razones. La primera es que el álgebra lineal llena el vacío entre el estudio del cálculo de una variable y el estudio de las funciones de varias variables. Es necesario entender lo que sucede en espacios distintos de los conocidos: $\mathbb{R}^2$ (el plano) y $\mathbb{R}^3$ (el espacio de tres dimensiones). Además, el curso de álgebra lineal es frecuentemente el primero que se imparte de matemáticas ''puras''. Es un curso en el que las demostraciones son tan importantes como la manipulación de ecuaciones.

Segundo, un conocimiento de las herramientas básicas del álgebra lineal es necesario para una gran variedad de aplicaciones. Estas aplicaciones se pueden encontrar en administración, economía, biología, psicología, física, química, y en las ciencias sociales. Por eso, se requiere que estudiantes de disciplinas muy distintas tomen un curso en álgebra lineal.

Debido a que el álgebra lineal es una materia muy amplia, y a que muchos cursos de tal materia sólo duran un trimestre ó un semestre, a menudo se necesita minimizar el aspecto de las ''aplicaciones''. Muchos textos le dedican poco más que un somero muestreo a tales aplicaciones.

Por todo lo anterior, este libro trata de ser puente entre la teoría y la aplicación. Originalmente se pensó como complemento de la obra del suscrito *Álgebra Lineal*, 2a. edición (Grupo Editorial Iberoamérica, 1988), pero puede usarse como complemento de cualquier texto estándar de álgebra lineal. Por supuesto, las aplicaciones que contiene no son exhaustivas. Pero he tratado de incluir una muestra suficientemente grande para estimular las inquietudes del lector.

Los requisitos previos se han mantenido en un mínimo. La mayoría de los capítulos son, excepto cuando se indica lo contrario, autosuficientes, y la mayor parte sólo requiere nociones básicas de las matrices, tales como reducción por renglones, productos de matrices e inversión de matrices. El concepto más difícil de los valores y vectores característicos se necesita únicamente en los Capítulos 5 y 12.

Veamos algunas observaciones sobre la notación utilizada.

Ejemplo 2.3.4 — hace referencia al Ejemplo 4 de la Sección 2.3.

— Indica que se usó una calculadora o que se necesita en el ejemplo o problema en cuestión.

$M_i(c)$ — Se usa en la reducción por renglones de una matriz: multiplíquese el renglón i por c. Por ejemplo, $M_2(-3)$ significa que el renglón 2 se multiplica por -3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -12 & -15 & -18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$A_{i,j}(c)$ — Se usa en la reducción por renglones de una matriz: multiplíquese el renglón i por c y súmese el resultado al renglón j. Por ejemplo, $A_{2,3}(-4)$ significa multiplicar el renglón 2 por -4 y sumar el resultado al renglón 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2,3}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4(4)+7 & -4(5)+8 & -4(6)+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -9 & -12 & -15 \end{pmatrix}$$

P_{ij} — Se usa en la reducción por renglones de una matriz: permútense los renglones i y j. Por ejemplo, P_{23} quiere decir permutar (o sea, intercambiar) los renglones 2 y 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Se coloca una marca de estrella (★) antes de un problema para indicar que se trata de uno más difícil.

Reconocimientos. Parte del material en los Capítulos 1, 2, 5 y 9 apareció por primera vez en el libro titulado *Mathematics for the Biological Sciences* (Macmillan, Nueva York, 1974), en el que figuraban como autores James E. Turner y el suscrito. Estoy muy agradecido al profesor Turner por su autorización para usar ese material.

Espero que al utilizar esta obra, el lector se vea animado a aplicar las técnicas del álgebra lineal a sus propias áreas de interés. Por lo menos, conviene que ahora mismo comience a apreciar la extensa aplicabilidad de una disciplina que tuvo su inicio hace poco más de cien años con la labor del gran matemático británico Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

STANLEY I. GROSSMAN

Tabla de contenido

Al estudiante

Grupo Editorial Iberoamérica en su esfuerzo permanente de producir cada vez mejores textos, pone en tus manos esta nueva obra, en la que se ha puesto la más alta calidad en los aspectos teórico y didáctico, así como en diseño y presentación, con el objetivo de proporcionarte la mejor herramienta, no sólo para facilitarte el aprendizaje sino también para hacértelo más estimulante.

Éste, como cualquiera de nuestros libros, ha sido cuidadosamente seleccionado para que encuentres en él un pilar de tu preparación, y un complemento ideal a la enseñanza del maestro. Lo didáctico de la presentación de sus temas hará que lo consideres el mejor auxiliar, y el que lleves a todas partes.

Lo anterior es parte de nuestro propósito de ser partícipes en una mejor preparación de profesionales, contribuyendo así a la urgente necesidad de un mayor desarrollo de nuestros países hispanohablantes.

Sabemos que esta obra será fundamental en tu biblioteca, y tal vez la más inmediata y permanente fuente de consulta.

Como uno de nuestros intereses principales es hacer mejores libros en equipo con profesores y estudiantes, agradeceremos tus comentarios y sugerencias o cualquier observación que contribuya al enriquecimiento de nuestras publicaciones.

Grupo Editorial Iberoamérica
. . . presente en tu formación profesional

CAPÍTULO **1** 32 hojas

Programación lineal

1.1 Desigualdades lineales en dos variables

En esta sección se mostrará una manera de representar desigualdades lineales en dos variables. Las técnicas que aquí se presentan serán muy útiles para discutir la programación lineal en el resto de las secciones de este capítulo.

Antes de enunciar las reglas generales, se presentan tres ejemplos.

Ejemplo 1 Representar el conjunto de puntos que cumplen la desigualdad $y > -2x + 3$.

Solución Empezamos por dibujar la gráfica de la recta $y = -2x + 3$. Puesto que la recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones, se puede considerar que esta recta (o cualquier otra recta) divide el plano xy en dos semiplanos. En la Figura 1 se marcaron estos dos **semiplanos** como *semiplano superior* y *semiplano inferior*. El conjunto $L = \{(x, y) : y = -2x + 3\}$ es el que contiene a los puntos que están en la recta. Definimos otros dos conjuntos por medio de

$$A = \{(x, y) : y > -2x + 3\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y) : y < -2x + 3\}$$

Ya que para cualquier pareja (x, y) se cumple que $y = -2x + 3$, o bien $y > -2x + 3$, o $y < -2x + 3$, se ve que cada punto en $\mathbb{R}^2$ está exactamente en uno de los conjuntos L, A o B. Es decir,

$$\mathbb{R}^2 = L \cup A \cup B$$

Puede verse que A es precisamente el semiplano superior en la Figura 1. Para ver la razón, obsérvese la Figura 2. Sea (x^*, y^*) un punto en A. Entonces, por

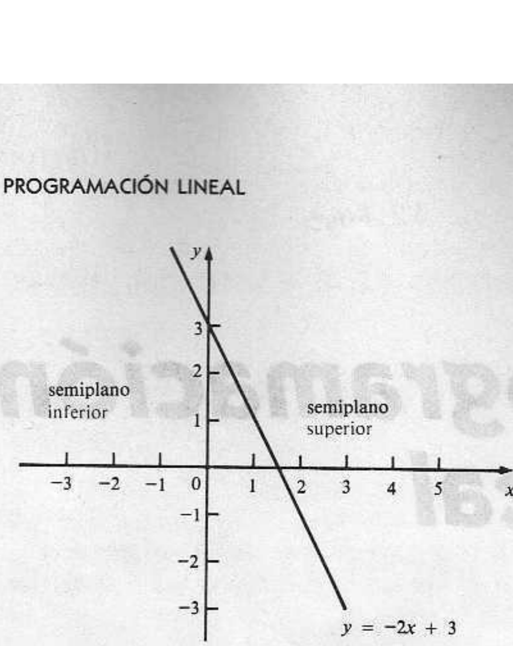


Figura 1
(Secc. 1.1)

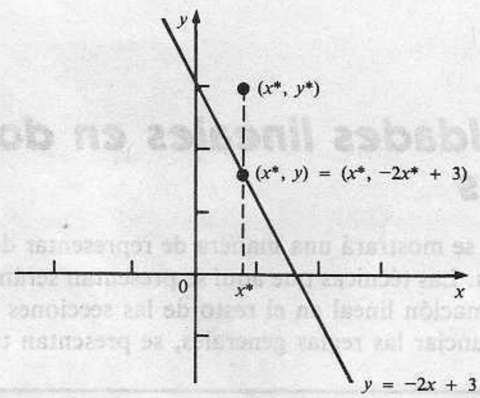


Figura 2
(Secc. 1.1)

la definición de A, $y^* > -2x^* + 3$, de donde el punto (x^*, y^*) está arriba de la línea $y = -2x + 3$. Esto es así porque la coordenada y del punto (x^*, y^*) es mayor (es más alta) que la coordenada y del punto $(x^*, -2x^* + 3)$, que está en la recta. Entonces el conjunto de los puntos que satisfacen $y > -2x + 3$ con-

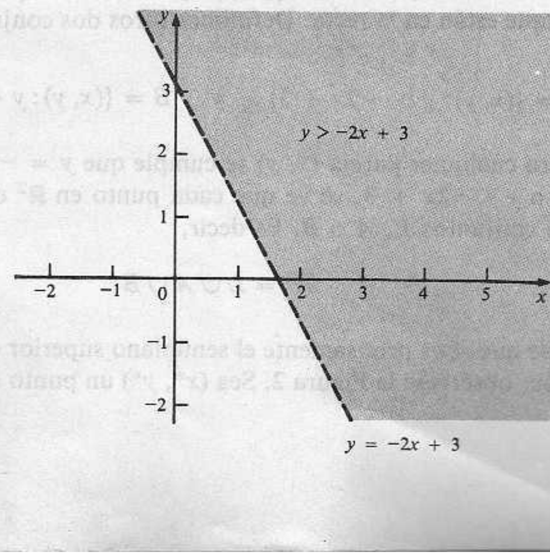


Figura 3
(Secc. 1.1)

siste precisamente en los puntos del semiplano superior, sombreado en la Figura 3. La línea punteada en la figura indica que los puntos de la recta *no* satisfacen la desigualdad.

Ejemplo 2 Representar gráficamente el conjunto de los puntos que cumplen la desigualdad $y \geq -2x + 3$.

Solución La única diferencia entre este conjunto y el del Ejemplo 1 está en que en el nuevo ejemplo el conjunto incluye los puntos de la recta $y = -2x + 3$. Esto se indica como en la Figura 4, por medio de una recta continua.

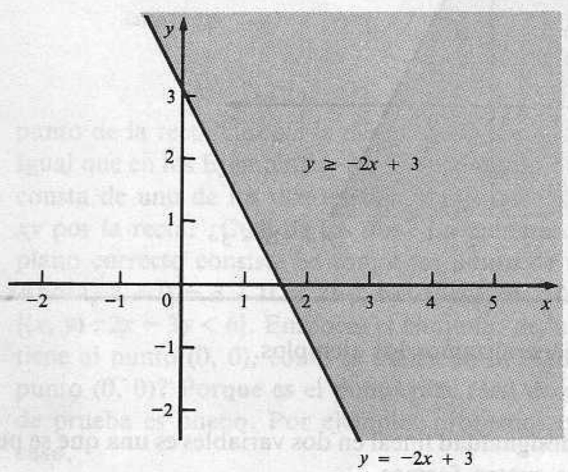


Figura 4
(Secc. 1.1)

Ejemplo 3 Representar el conjunto de los puntos que cumplen la desigualdad $y < -2x + 3$.

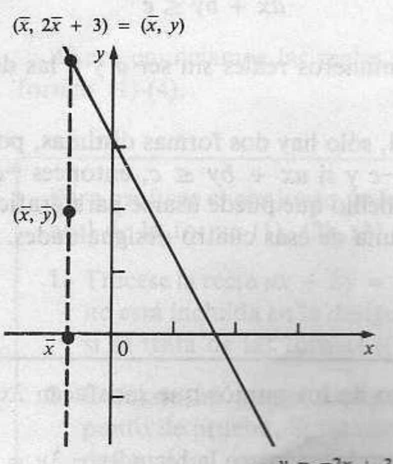


Figura 5
(Secc. 1.1)

Solución Igual que en el Ejemplo 1, sea $B = \{(x, y) : y < -2x + 3\}$ y sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto de B. Entonces, como en la Figura 5, $\bar{y} < -2\bar{x} + 3$, de tal manera que el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ está *debajo* de la recta $y = -2x + 3$. Así que el conjunto de los puntos que satisfacen $y < -2x + 3$ es el conjunto de los puntos del semiplano inferior que se muestra en la Figura 6. Aquí también la línea punteada indica que los puntos de la recta no se incluyen en el conjunto.

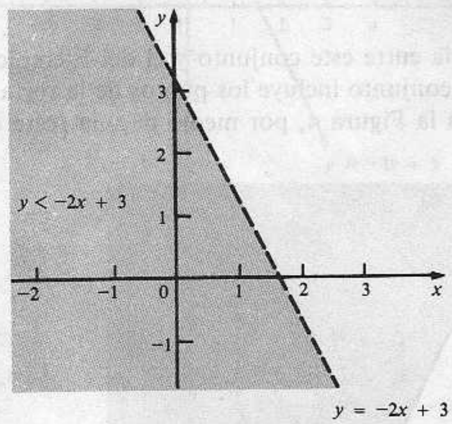


Figura 6 (Secc. 1.1)

Ahora generalizamos los ejemplos.

Desigualdad lineal en dos variables Una **desigualdad** lineal en dos variables es una que se puede escribir en alguna de las cuatro formas

$$ax + by > c \tag{1}$$

$$ax + by \geq c \tag{2}$$

$$ax + by < c \tag{3}$$

$$ax + by \leq c \tag{4}$$

en donde a, b y c son números reales sin ser a y b las dos iguales a cero.

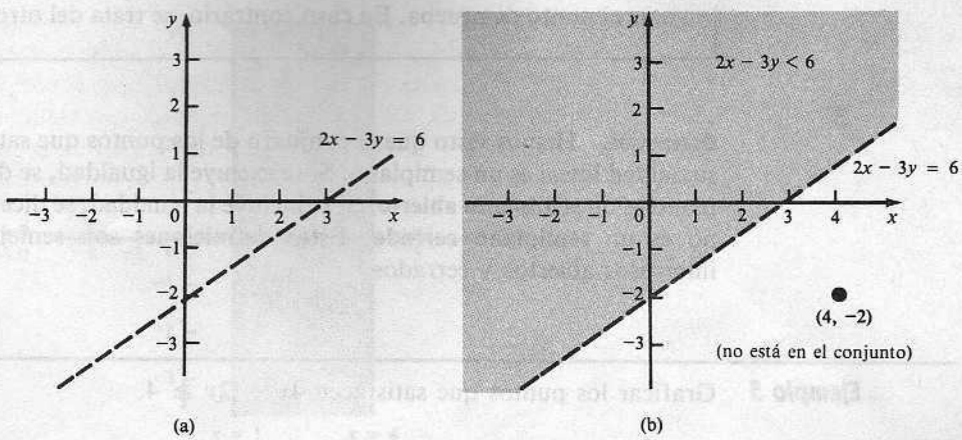
Observación. En realidad, sólo hay dos formas distintas, porque si $ax + by < c$, entonces $-ax - by > -c$ y si $ax + by \leq c$, entonces $-ax - by \geq -c$.

Existe un método sencillo que puede usarse para graficar el conjunto de los puntos que satisfacen una de esas cuatro desigualdades. Mostramos esto por medio de un ejemplo.

Ejemplo 4 Representar el conjunto de los puntos que satisfacen $2x - 3y < 6$.

Solución En la Figura 7(a) graficamos primero la recta $2x - 3y = 6$. Dado que ningún

Figura 7
(Secc. 1.1)



punto de la recta cumple la desigualdad dada, trazamos una recta punteada. Igual que en los Ejemplos 1, 2 y 3, el conjunto de los puntos que nos interesan consta de uno de los dos medios planos en los que queda dividido el plano *xy* por la recta. ¿Cuál de los dos? La manera más sencilla de elegir el semiplano correcto consiste en tomar un **punto de prueba**, que puede ser (0, 0). Ahora, $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 < 6$, así que (0, 0) se encuentra en el conjunto $\{(x, y) : 2x - 3y < 6\}$. Entonces el conjunto de interés es el semiplano que contiene al punto (0, 0), como se indica en la Figura 7(b). ¿Por qué se eligió el punto (0, 0)? Porque es el punto más fácil de probar. Pero cualquier punto de prueba es bueno. Por ejemplo, probemos con el punto (4, −2). En este caso,

$$2(4) - 3(-2) = 14 > 6.$$

Entonces, el semiplano que contiene al punto (4, −2) *no* es el semiplano que interesa. Los dos puntos de prueba nos conducen a la misma gráfica.

Ahora enunciamos las reglas para graficar una desigualdad de una de las formas (1)-(4).

Para graficar el conjunto de los puntos que cumplen una desigualdad lineal de la forma (1), (2), (3) o (4):

1. Trácese la recta $ax + by = c$. Hágase un trazo punteado si la igualdad no está incluida en la desigualdad dada ((1) o (3)), o un trazo continuo si se trata de las formas ((2) o (4)).
2. Escójase un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$ que no esté en la recta como punto de prueba. Si las coordenadas del punto de prueba cumplen la desigualdad, entonces el conjunto buscado es el semiplano que contie-

ne al punto de prueba. En caso contrario, se trata del otro semiplano.

Observación. Hemos visto que el conjunto de los puntos que satisfacen una desigualdad lineal es un semiplano. Si se excluye la igualdad, se dice que el semiplano es un **semiplano abierto**. Si se incluye la igualdad, se dice que el semiplano es un **semiplano cerrado**. Estas definiciones son semejantes a las de intervalos abiertos y cerrados.

Ejemplo 5 Graficar los puntos que satisfacen $4x + 2y \geq 4$.

Solución Trazamos primero la gráfica de la recta $4x + 2y = 4$, usando trazo continuo porque se incluye la igualdad, Figura 8(a). Entonces, si (0, 0) es punto de prueba, se ve que $4(0) + 2(0) = 0$, que no es mayor o igual que 4, por lo que (0, 0) no está en el conjunto solución. Entonces nuestro conjunto solución es el semiplano que se muestra en la Figura 8(b).

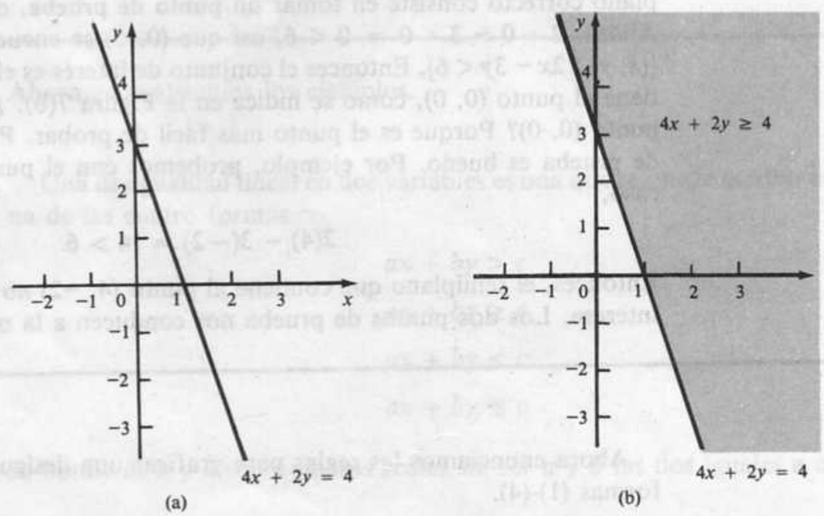


Figura 8 (Secc. 1.1)

Ejemplo 6 Graficar los puntos del plano cuyas coordenadas x cumplan $1 \leq x \leq 4$.

Solución Este conjunto es la intersección de dos semiplanos. La gráfica del conjunto $x \leq 4$ es el semiplano que está a la izquierda de la recta $x = 4$ (sin incluirla). De manera similar, la gráfica de $x \geq 1$ es el semiplano que está a la derecha de la recta $x = 1$. Juntando esta información con la anterior, obtenemos la *cinta* infinita que se muestra en la Figura 9.

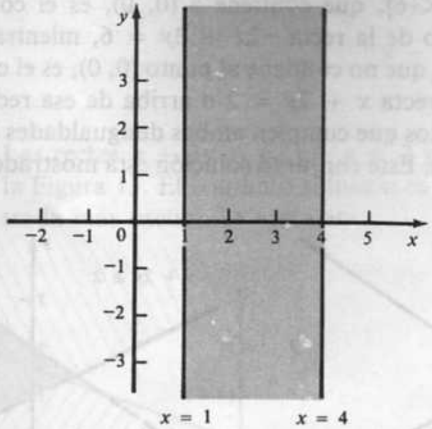


Figura 9 (Secc. 1.1)

Ejemplo 7 Representar el conjunto de los puntos que cumplen las condiciones $-2 < x < 3$ y $0 < y \leq 5$.

Solución Este conjunto es la intersección de los cuatro semiplanos definidos por las desigualdades $x > -2$, $x < 3$, $y > 0$ y $y \leq 5$. Los tres primeros de estos semiplanos son abiertos y el cuarto es cerrado. Su intersección es el rectángulo de la Figura 10.

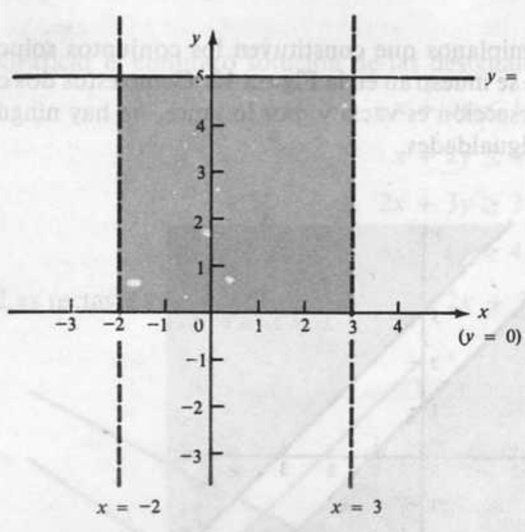


Figura 10 (Secc. 1.1)

Ejemplo 8 Graficar el conjunto de los puntos que satisfacen las desigualdades $x + 2y \geq 2$ y $-2x + 3y < 6$.

Solución Empezamos con el trazo, en la Figura 11(a), de las rectas cuyas ecuaciones son $x + 2y = 2$ y $-2x + 3y = 6$. Las coordenadas (0, 0) cumplen la segunda desigualdad, pero no la primera. Lo anterior quiere decir que el semiplano

$\{(x, y): -2x + 3y < 6\}$, que contiene a $(0, 0)$, es el conjunto de los puntos que están debajo de la recta $-2x + 3y = 6$, mientras que el semiplano $\{(x, y): x + 2y \geq 2\}$, que no contiene al punto $(0, 0)$, es el conjunto de los puntos que están en la recta $x + 2y = 2$ o arriba de esa recta. Por lo tanto, el conjunto de los puntos que cumplen ambas desigualdades es la intersección de estos dos semiplanos. Este conjunto solución está mostrado en la Figura 11(b).

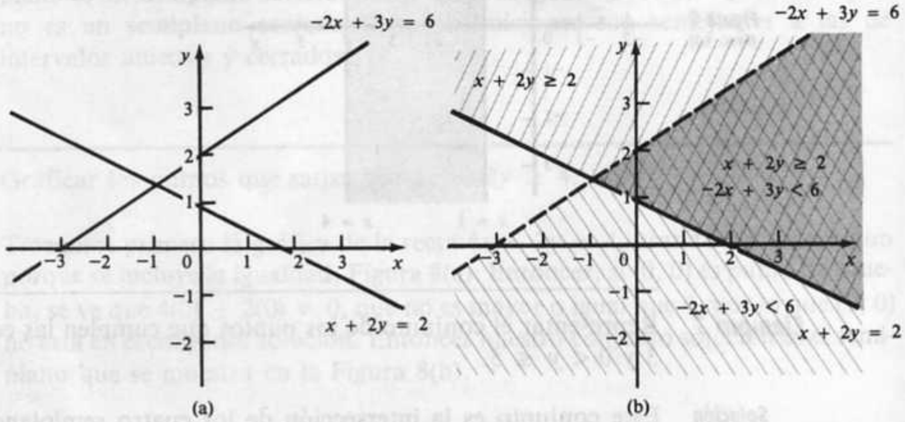


Figura 11 (Secc. 1.1)

Ejemplo 9 Graficar el conjunto de los puntos que cumplen las desigualdades $x + y \leq 1$ y $2x + 2y \geq 6$.

Solución Los dos semiplanos que constituyen los conjuntos solución de estas dos desigualdades se muestran en la Figura 12. Como estos dos conjuntos son disjuntos, su intersección es vacía y, por lo tanto, *no* hay ningún punto que cumpla las dos desigualdades.

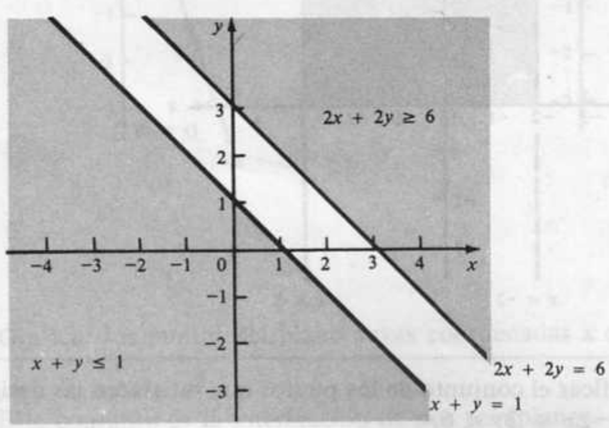


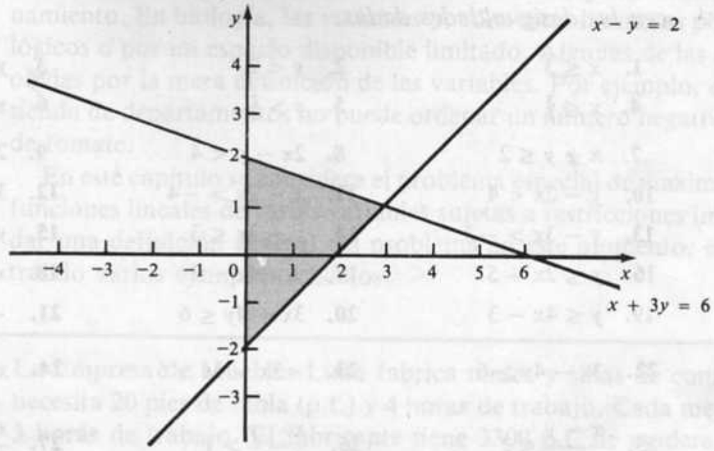
Figura 12 (Secc. 1.1)

Ejemplo 10 Graficar los puntos que satisfacen las desigualdades

$$x + 3y \leq 6$$
$$x - y \leq 2$$
$$x \geq 0.$$

Solución Las rectas $x + 3y = 6$, $x - y = 2$ y $x = 0$ (en el eje y) están mostradas en la Figura 13. El conjunto solución es la región limitada por esas líneas y mostrada más oscura.

Figura 13 (Secc. 1.1)

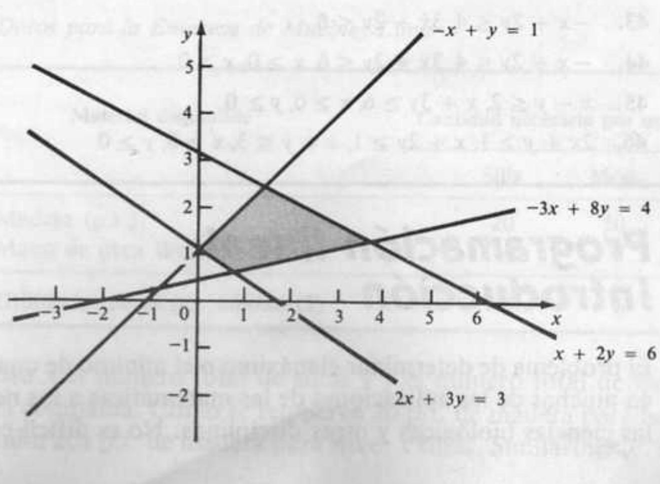


Ejemplo 11 Graficar el conjunto solución de las desigualdades

$$-x + y \leq 1$$
$$x + 2y \leq 6$$
$$2x + 3y \geq 3$$
$$-3x + 8y \geq 4.$$

Solución Las rectas $-x + y = 1$, $x + 2y = 6$, $2x + 3y = 3$, y $-3x + 8y = 4$ se ven

Figura 14 (Secc. 1.1)



en la Figura 14. El conjunto solución de las cuatro desigualdades es la región sombreada en la figura. Obsérvese que en este caso la solución es una región limitada por cuatro rectas y que tiene cuatro "esquinas".

Problemas 1.1

En los siguientes problemas, grafíquense los conjuntos de puntos que satisfacen las desigualdades dadas.

1. $x \leq 3$ **2.** $y < 2$ **3.** $y \geq -4$

4. $x \leq \frac{3}{2}$ **5.** $y > \frac{2}{3}$ **6.** $x + y > 2$

7. $x + y \leq 2$ **8.** $2x - y < 4$ **9.** $2x - y \geq 4$

10. $y - 2x < 4$ **11.** $x - 2y > -4$ **12.** $3x - y < 3$

13. $y - 3x > -3$ **14.** $y - 3x \leq 3$ **15.** $y + 3x \geq 3$

16. $y \leq 2x - 5$ **17.** $y > 4x - 3$ **18.** $x < -2y + 7$

19. $y \leq 4x - 3$ **20.** $3x + 4y \leq 6$ **21.** $-3x + 4y > 6$

22. $3x - 4y \geq 6$ **23.** $-3x - 4y > 6$ **24.** $x - \frac{y}{2} > 4$

25. $\frac{x - y}{3} \leq 2$ **26.** $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \geq 1$ **27.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} < -1$

28. $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} \geq \frac{1}{2}$ **29.** $-3 \leq x < 0$ **30.** $1 < y \leq 6$

31. $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ **32.** $-1 \leq x < 4, -2 \leq y < 2$

33. $-\frac{1}{2} < x < 1, \frac{1}{2} \leq y < 2$ **34.** $|x| < 2, |y| < 3$

★ **35.** $|x - 1| < 4, |y + 2| \leq 3$ **36.** $x + y \geq 1, 2x - 3y \leq 6$

37. $x + y \leq 1, 2x + 3y \geq 5$ **38.** $x - y \leq 2, 2y - 3x > 6$

39. $x + 2y \leq 2, 2x + 4y \geq 4$ **40.** $x + 2y < 2, 2x + 4y > 4$

41. $x + y \leq 2, 5x + 2y \geq 4$ **42.** $3x - 4y \leq 6, 2x + 3y > 3$

43. $-x + 2y \leq 4, 3x + 2y \leq 6$

44. $-x + 2y \leq 4, 3x + 2y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$

45. $x - y \leq 2, x + 3y \geq 6, x \geq 0, y \geq 0$

46. $2x + y \geq 1, x + 2y \geq 1, x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$

1.2 Programación lineal: Introducción

El problema de determinar el máximo o el mínimo de una función dada ocurre en muchas de las aplicaciones de las matemáticas a los negocios, la economía, las ciencias biológicas y otras disciplinas. No es difícil encontrar ejemplos de problemas de esa índole. ¿Qué hace un hombre de negocios para maximizar las utilidades o para minimizar los costos? ¿A qué tasa de cambio será más favorable el saldo de los pagos? ¿Cómo se pueden satisfacer los requerimientos de alimento de un animal con un mínimo gasto de energía?

Los problemas de maximización y minimización están sujetos a menudo a restricciones o límites en las variables. Por ejemplo, un hombre de negocios tiene siempre la limitación que proviene de una cantidad finita de capital. Si tuviera sumas ilimitadas para invertir, podría obtener utilidades virtualmente ilimitadas. El supervisor de un almacén tiene un espacio limitado para almacenamiento. En biología, las variables pueden estar limitadas por factores psicológicos o por un espacio disponible limitado. Algunas de las restricciones son obvias por la mera definición de las variables. Por ejemplo, el gerente de una tienda de departamentos no puede ordenar un número negativo de kilogramos de tomate.

En este capítulo se considera el problema especial de maximizar o minimizar funciones lineales de varias variables sujetas a restricciones lineales. En vez de dar una definición general del problema en este momento, empezamos mostrando varios ejemplos sencillos.

Ejemplo 1 La Empresa de Muebles Lima fabrica mesas y sillas de comedor. Cada silla necesita 20 pies de tabla (p.t.) y 4 horas de trabajo. Cada mesa, 50 p.t. y sólo 3 horas de trabajo. El fabricante tiene 3300 p.t. de madera disponible y un equipo humano capaz de proporcionar 380 horas de trabajo. Por último, el fabricante ha determinado que hay una utilidad de $3 por cada silla vendida y $6 por cada mesa vendida. Para simplificar, supongamos que los materiales necesarios (como clavos o barniz) se tienen en cantidades suficientes. ¿Cuántas mesas y sillas se deben producir para maximizar las utilidades, suponiendo que se vende todo objeto producido?

Solución El problema, tal como está planteado parece difícil —hay muchas cosas relacionadas en él— Empezamos la simplificación del problema anotando toda la información en una tabla.

Tabla 1 *(Secc. 1.2)* *Datos para la Empresa de Muebles Lima*

Material disponible	Cantidad necesaria por unidad		Total disponible
	Silla	Mesa	
Madera (p.t.)	20	50	3300
Mano de obra (horas)	4	3	380
Utilidades netas por unidad ($)	3	6	

Sea x el número total de sillas y y el número total de mesas producidas por la compañía. Como se requieren 20 p.t. de madera para hacer una silla, hacen falta $20x$ p.t. de madera para hacer x sillas. Similarmente, se requieren $50y$ p.t.

de madera para producir y mesas. Así que los datos del primer renglón de la Tabla 1 se pueden expresar algebraicamente por medio de la desigualdad lineal

$$20x + 50y \leq 3300. \quad \text{Desigualdad de la madera}$$

De manera similar, la desigualdad lineal que representa la información del segundo renglón de la Tabla 1 es

$$4x + 3y \leq 380. \quad \text{Desigualdad de la mano de obra}$$

Estas dos desigualdades representan dos de las **restricciones** en este problema. Expresan en términos matemáticos el hecho evidente de que la materia prima y la mano de obra son cantidades finitas (limitadas). Existen dos restricciones adicionales. Ya que la empresa no puede fabricar cantidades negativas de los artículos, se debe cumplir que

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0.$$

Las utilidades obtenidas P cuando se producen x sillas y y mesas se expresan por (del tercer renglón de la Tabla 1)

$$P = 3x + 6y. \quad \text{Ecuación de las utilidades}$$

Juntando toda esta información, se puede enunciar el problema en una forma que pronto se podrá reconocer como un **problema de programación lineal estándar**. Maximizar

$$P = 3x + 6y \tag{1}$$

sujeto a las restricciones

$$20x + 50y \leq 3300 \tag{2}$$

$$4x + 3y \leq 380 \tag{3}$$

$$x \geq 0, \ y \geq 0. \tag{4}$$

En este problema, la función lineal* mostrada en (1) se llama la **función objetivo**. Cualquier punto del conjunto definido por las restricciones se llama **solución factible**. Nuestro problema consiste en encontrar el punto (o puntos) del conjunto de las restricciones en el que la función objetivo toma su valor máximo. Nuestro primer método para resolver este problema va a emplear técnicas de la sección anterior. Empezamos encontrando una solución graficando el **conjunto de las restricciones**, que es el conjunto solución de las desigualdades. Esto se muestra en la Figura 1. Considérense las rectas $3x + 6y = C$ para valores distintos de la constante C. En la Figura 2 se trazan algunas de las rectas. Cada una de las rectas $3x + 6y = C$ se llama **recta de utilidades constantes** para este problema. Para ver por qué, considérese la recta $3x + 6y = 30$. Para cada punto (x, y) que se encuentre en esta recta y en el conjunto definido por las restricciones, el fabricante obtiene una utilidad de \$30. Algunos son (10, 0) (10 sillas y ninguna mesa), (6, 2) (6 sillas y dos mesas),

---

* Véase Sección 2.2.

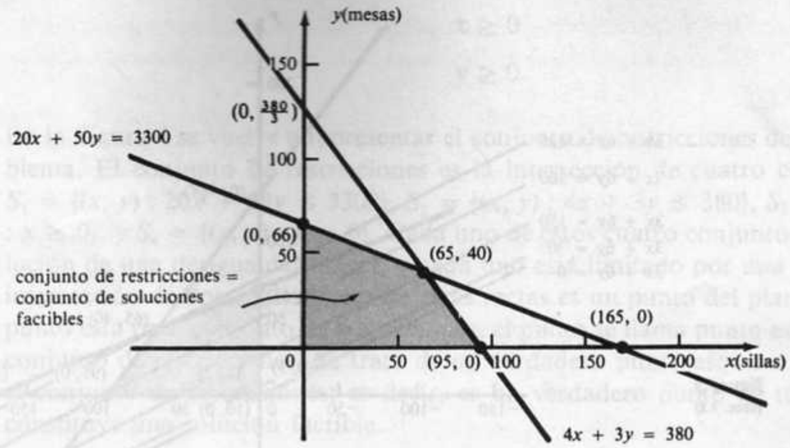


Figura 1
(Secc. 1.2)

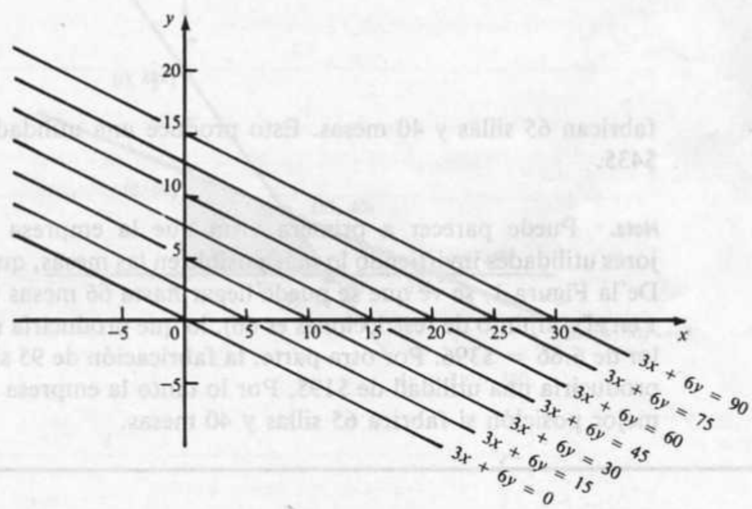


Figura 2
(Secc. 1.2)

y (0, 5) (ninguna silla y 5 mesas). Véase la Figura 3. Desde el punto de vista del fabricante, porque cada uno produce la misma utilidad de \$30.

Considérese ahora la recta de utilidades $3x + 6y = 60$. Esta se encuentra a la derecha de la recta $3x + 6y = 30$ y es una línea "más agradable" para el fabricante ya que cada punto de ella que esté en el conjunto de restricciones produce una utilidad de \$60. Dos de tales puntos son (20, 0) y (12, 4).

Ahora ya pueden verse las cosas un poco más claras. Todas las rectas de utilidades constantes son paralelas entre sí (cada una tiene pendiente de $-1/2$ y las utilidades aumentan al pasar a la derecha de una recta a la siguiente. Cada nueva línea (a la derecha) produce utilidades más altas. Nuestro método consiste ahora en movernos a la derecha todo lo posible sin salirnos del conjunto de restricciones. De la Figura 3 se ve que la "última" recta de utilidades constantes es la línea que intersecta al conjunto de restricciones en un solo punto (65, 40). Esto quiere decir que se obtienen las máximas utilidades cuando se

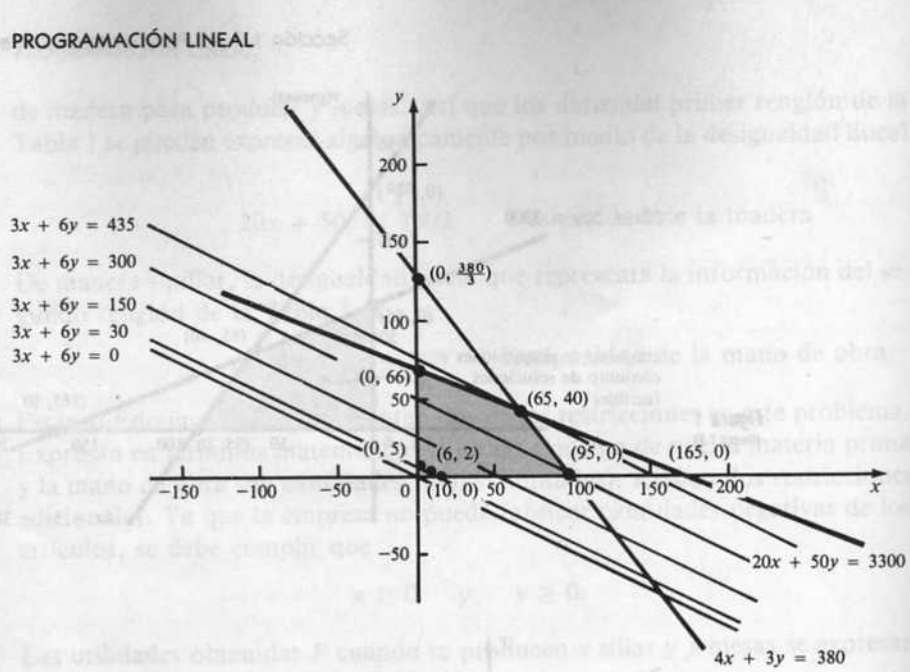


Figura 3
(Secc. 1.2)

fabrican 65 sillas y 40 mesas. Esto produce una utilidad de $3 \cdot 65 + 6 \cdot 40 =$ \$435.

Nota. Puede parecer a primera vista que la empresa puede obtener mejores utilidades invirtiendo lo más posible en las mesas, que son más rentables. De la Figura 1, se ve que se puede llegar hasta 66 mesas (el máximo valor de y en el conjunto de restricciones es 66), lo que produciría utilidades por un valor de $6 \cdot 66 =$ \$396. Por otra parte, la fabricación de 95 sillas y ninguna mesa produciría una utilidad de \$195. Por lo tanto la empresa se encuentra en una mejor posición si fabrica 65 sillas y 40 mesas.

El método que se usó en el Ejemplo 1 para resolver el problema de programación lineal se llama **método gráfico**. Este método muestra lo que pasa, pero es muy impráctico al usarse por dos razones: Primero, requiere la elaboración de dibujos muy precisos para obtener la solución; y segundo, sólo se puede usar con problemas en los que intervienen dos variables porque las gráficas en tres dimensiones son complicadas de hacer y no se pueden dibujar esquemas de más de tres dimensiones.

Introducimos ahora otro método. Para eso, revisamos el Ejemplo 1. El problema consistía en maximizar

$$P = 3x + 6y \tag{5}$$

sujeta a las restricciones

$$20x + 50y \leq 3300 \tag{6}$$

$$4x + 3y \leq 380 \tag{7}$$

$$x \geq 0 \tag{8}$$

$$y \geq 0. \tag{9}$$

En la Figura 4 se vuelve a representar el conjunto de restricciones de este problema. El conjunto de restricciones es la intersección de cuatro conjuntos: $S_1 = \{(x, y) : 20x + 50y \leq 3300\}$, $S_2 = \{(x, y) : 4x + 3y \leq 380\}$, $S_3 = \{(x, y) : x \geq 0\}$, y $S_4 = \{(x, y) : y \geq 0\}$. Cada uno de estos cuatro conjuntos es la solución de una desigualdad lineal, y cada uno está limitado por una recta. La intersección de dos cualesquiera de estas rectas es un punto del plano y, si el punto está en el conjunto de restricciones, el punto se llama **punto esquina** del conjunto de restricciones. Se trata de un verdadero punto esquina si está en el conjunto de restricciones; es decir, es un verdadero punto de tal clase si constituye una solución factible.

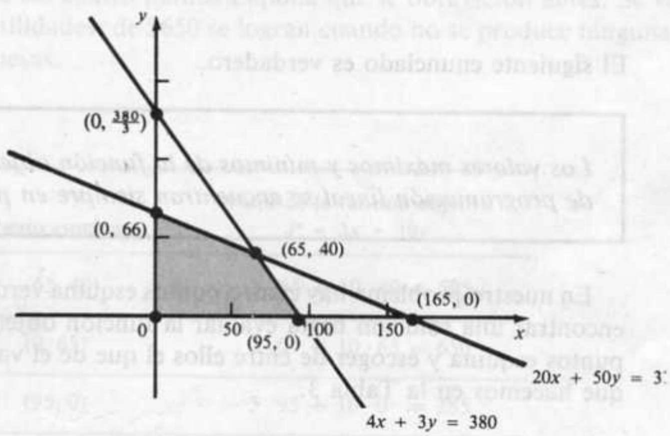


Figura 4
(Secc. 1.2)

Tabla 2
(Secc. 1.2)

Las dos rectas que determinan el punto	**Punto esquina posible**	**¿Solución factible? (¿Verdadero punto esquina?) (¿Está en el conjunto de restricciones?)**
$20x + 50y = 3300$ $4x + 3y = 380$	(65, 40)	Sí.
$20x + 50y = 3300$ $x = 0$	(0, 66)	Sí.
$20x + 50y = 3300$ $y = 0$	(165, 0)	No. (Se infringe la restricción (7) ya que $4 \cdot 165 + 3 \cdot 0 = 660$, que es > 380.)

Tabla 2 (Secc. 1.2) *(Continuación)*

Las dos rectas que determinan el punto	Punto esquina posible	¿Solución factible? (¿Verdadero punto esquina?) (¿Está en el conjunto de restricciones?)
$4x + 3y = 380$ $x = 0$	$(0, \frac{380}{3})$	No. (Se infringe la restricción (6) ya que $20 \cdot 0 + 50 \cdot \frac{380}{3} = \frac{19.000}{3}$, que es >3300.)
$4x + 3y = 380$ $y = 0$	(95, 0)	Sí.
$x = 0$ $y = 0$	(0, 0)	Sí.

El siguiente enunciado es verdadero.

> *Los valores máximos y mínimos de la función objetivo en un problema de programación lineal se encuentran siempre en puntos esquina.*

En nuestro problema hay cuatro puntos esquina verdaderos. Entonces, para encontrar una solución basta evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos esquina y escoger de entre ellos el que dé el valor máximo. Esto es lo que hacemos en la Tabla 3.

Tabla 3 (Secc. 1.2)

Punto esquina	Valor de la función objetivo $P = 3x + 6y$	
(65, 40)	$3 \cdot 65 + 6 \cdot 40 = 435$	Valor máximo
(0, 65)	$3 \cdot 0 + 6 \cdot 65 = 390$	
(95, 0)	$3 \cdot 95 + 6 \cdot 0 = 285$	
(0, 0)	$3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$	

Así queda claro, como se vio en el Ejemplo 1, que las máximas utilidades de \$435 se obtienen cuando se fabrican 65 sillas y 40 mesas.

Ejemplo 2 En el Ejemplo 1, supóngase que las utilidades son de \$3 por silla y \$10 por mesa y que el resto de los datos permanecen inalterados. ¿Cómo puede la empresa de muebles máximizar sus utilidades en estas condiciones?

Solución El problema consiste en maximizar

$$P = 3x + 10y$$

sujeta a las restricciones

$$20x + 50y \leq 3300$$

$$4x + \;\;3y \leq 380$$

$$x \geq 0,\; y \geq 0.$$

Ahora tenemos el mismo conjunto de restricciones que en el ejemplo al principio de esta sección. En la Tabla 4 evaluamos la función objeto en cada uno de los cuatro puntos esquina que se obtuvieron antes. Se ve que las máximas utilidades, de \$650 se logran cuando no se produce ninguna silla, sino sólo 65 mesas.

Tabla 4
(Secc. 1.2)

Punto esquina	Valor de la función objetivo $P = 3x + 10y$
(65, 40)	$3 \cdot 65 + 10 \cdot 40 = 595$
(0, 65)	$3 \cdot 0 + 10 \cdot 65 = 650$
(95, 0)	$3 \cdot 95 + 10 \cdot 0 = 285$
(0, 0)	$3 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$

Ejemplo 3 Un lago de montaña en un parque nacional tiene en la primavera de cada año dos especies de peces, S_1 y S_2. El peso promedio de cada pez en el lago es de 4 libras para S_1 y de 2 libras para S_2. Se dispone de dos tipos de alimento, S_1 y F_2. Las necesidades promedio de un pez de especie S_1 son de 1 unidad de F_1 y 3 unidades de F_2 diariamente. Las necesidades correspondientes de S_2 son de 2 unidades de F_1 y 1 unidad de F_2. Si se cuenta con 500 unidades de F_1 y 900 unidades de F_2 por día, ¿cómo debe ser la cantidad de peces de cada clase para maximizar el peso de pescado que se pueda producir?

Solución Sean x_1 y x_2 los números de peces que se mantienen en el lago, para las especies S_1 y S_2, respectivamente. El peso total W de peces en el lago se expresa por

$$W = 4x_1 + 2x_2. \tag{10}$$

El consumo total de alimento F_1 es de $x_1 + 2x_2$, porque cada pez de la primera especie consume una unidad de F_1 y cada pez de la segunda especie consume 2 unidades de F_1. De manera similar, el consumo total del alimento F_2 es de $3x_1 + x_2$. Ya que hay 500 unidades disponibles de F_1 y 900 unidades de F_2, se tiene que

$$x_1 + 2x_2 \leq 500 \quad \text{y} \quad 3x_1 + x_2 \leq 900. \tag{11}$$

Finalmente, se tienen las restricciones evidentes

$$x_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x_2 \geq 0 \tag{12}$$

porque no puede haber en el lago cantidades negativas de ninguna de las especies.

Este es otro problema típico de programación lineal.

Maximizar

$$W = 4x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 500 \tag{13}$$

$$3x_1 + x_2 \leq 900 \tag{14}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{15}$$

$$x_2 \geq 0. \tag{16}$$

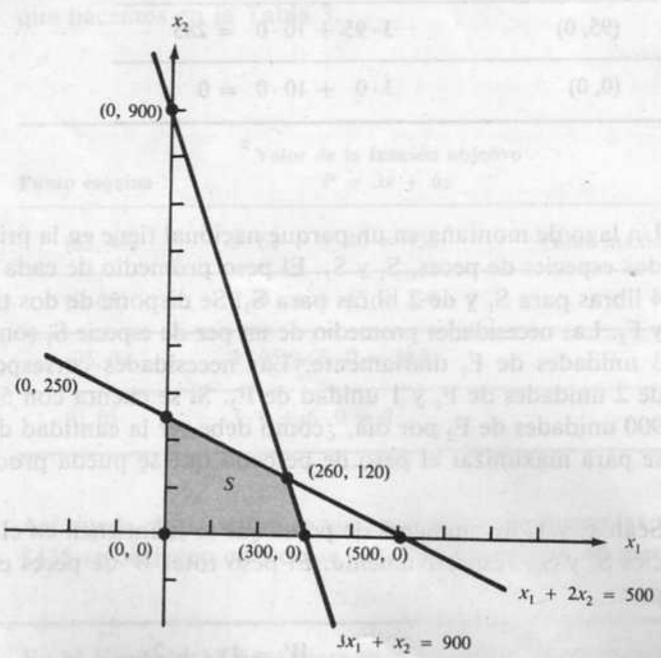


Figura 5
(Secc. 1.2)

Resolveremos esto por el método del punto esquina. Para ver lo que está pasando, graficamos el conjunto de restricciones. En la Figura 5, las rectas $x_1 + 2x_2 = 500$ y $3x_1 + x_2 = 900$ se muestran en el plano x_1 x_2. En la Tabla 5 se presenta la información requerida en la resolución de este problema.

Tabla 5
(Secc. 1.2)

Las dos rectas que determinan el punto	Punto esquina posible	¿Solución factible? (¿Punto esquina verdadero?)	Valor de la función objetivo $W = 4x_1 + 2x_2$ en el punto esquina
$x_1 + 2x_2 = 500$ $3x_1 + x_2 = 900$	(260, 120)	Sí.	1280
$x_1 + 2x_2 = 500$ $x_1 = 0$	(0, 250)	Sí.	500
$x_1 + 2x_2 = 500$ $x_2 = 0$	(500, 0)	No. (Se infringe la restricción (14))	
$3x_1 + x_2 = 900$ $x_1 = 0$	(0, 900)	No. (Se infringe la restricción (13))	
$3x_1 + x_2 = 900$ $x_2 = 0$	(300, 0)	Sí.	1200
$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(0, 0)	Sí.	0

Encontramos el valor máximo de 1280 en $x = 260$ y $x_2 = 120$. Esto significa que el lago puede soportar un peso máximo de 1280 libras si ha sido abastecido con 260 peces de la especie S_1 y 120 peces de la especie S_2.

Ejemplo 4 El director del servicio de agua en una ciudad encuentra una forma de proporcionar al menos 10 millones de galones de agua potable al día (mgd). El suministro puede ser proporcionado por el depósito local o por medio de unas tuberías desde una ciudad vecina. El depósito local tiene un rendimiento diario de 5 mgd, que no puede ser sobrepasado. La tubería no puede abastecer más de 10 mgd debido a su diámetro. Por otra parte, por acuerdo contractual, se bombearía como mínimo 6 mgd. Finalmente, el agua del depósito cuesta \$300 (dólares) por millón de galones y el agua del abasto por tubería cuesta \$500 por millón de galones. ¿Cómo podría el director minimizar los costos del suministro diario de agua?

Solución El símbolo x denota la cantidad de galones del depósito y y la cantidad de galones (en millones de galones) de la tubería que se bombea diariamente.

El problema es entonces:

Minimizar

$$C = 300x + 500y$$

sujeta a

$x + y \geq 10$	Para satisfacer las necesidades de la ciudad
$x \leq 5$	Capacidad del depósito
$y \leq 10$	Capacidad de la tubería
$y \geq 6$	Contrato de la tubería
$x \geq 0$	
$y \geq 0$	

El conjunto de restricciones de este problema se representa en la Figura 6. En la figura se puede ver que hay cuatro puntos esquina (véase la Tabla 6).

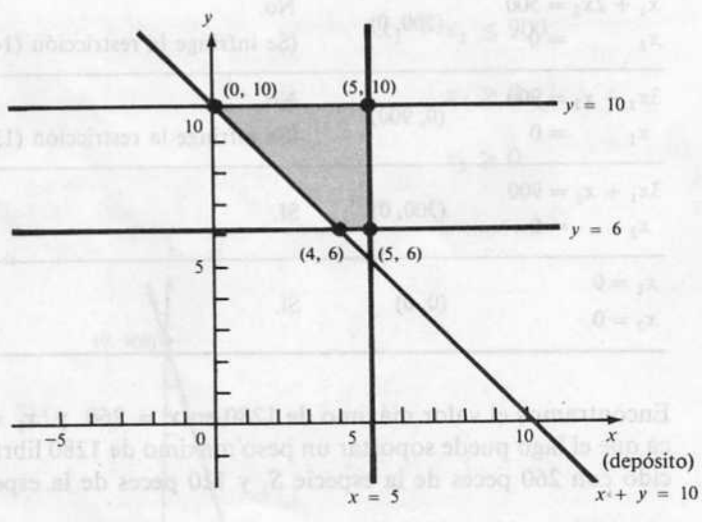


Figura 6 (Secc. 1.2)

Tabla 6 (Secc. 1.2)

Punto esquina	**Valor de la función objetivo $C = 300x + 500y$ en el punto esquina**
(0, 10)	5000
(5, 10)	6500
(4, 6)	4200
(5, 6)	4500

El valor mínimo de la función objetivo en los puntos esquina es de 4200, y se encuentra en el punto (4, 6). Esto significa que el director puede proporcionar 4 millones de galones al día del depósito y 6 millones de galones al día de la tubería a un costo diario de $4 \cdot 300 + 6 \cdot 500 = \$4200$.

En los ejemplos que se han considerado en esta sección, se han presentado dos variables (que se llamaron x y y o bien x_1 y x_2. El método del punto esquina trabaja bien con más de dos variables, pero se puede requerir una cantidad enorme de trabajo para determinar los posibles puntos esquina. En la serie de problemas se pide al lector la resolución de algunos problemas de programación lineal que involucran tres variables, usando el método del punto esquina. Ya juzgará el lector con qué rapidez los cálculos se vuelven más y más complicados (véanse los Problemas 35-39).

En las siguientes tres secciones se describe un método mucho más eficiente para resolver problemas de programación lineal en más de dos variables. Terminamos esta sección mostrando dos de las dificultades que se pueden presentar al resolver un problema de programación lineal.

Ejemplo 5 Resolver el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar

$$f = 2x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \geq 5$$

$$6x + 2y \geq 12$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Solución En la Figura 7 se muestra el conjunto de restricciones. Está claro que tanto

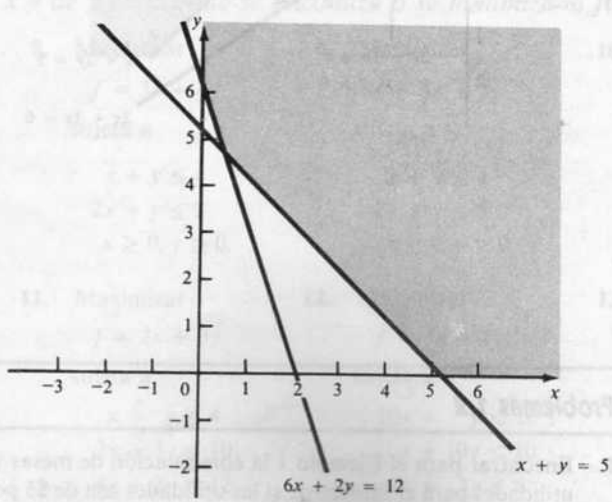


Figura 7
(Secc. 1.2)

x como y pueden tomar valores arbitrariamente grandes sin salirse del conjunto de restricciones. Por lo tanto f puede tomar valores arbitrariamente grandes, por lo que el problema no tiene solución. En un caso como éste, se dice que el problema es **no acotado**.

Ejemplo 6 Resolver el problema siguiente.

Maximizar

$$f = 2x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \geq 5$$
$$2x + 3y \leq 6$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Solución Las desigualdades lineales se representan en la Figura 8. Es evidente que el conjunto de restricciones es vacío. Por lo tanto no existen soluciones factibles y así decimos que el problema es **no factible**.

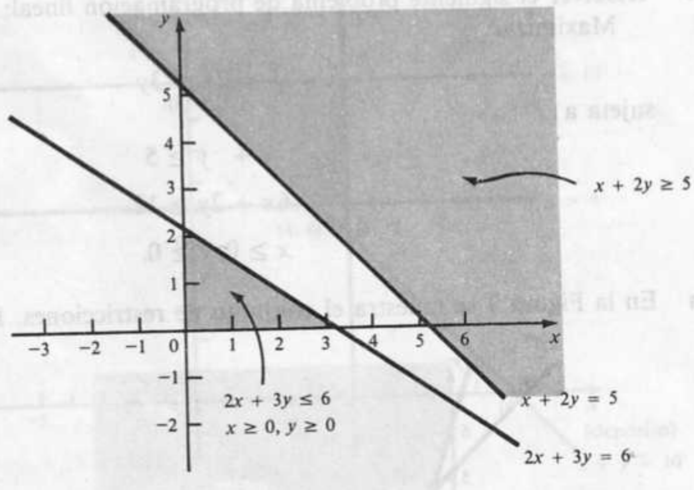


Figura 8 (Secc. 1.2)

Problemas 1.2

1. Encontrar para el Ejemplo 1 la combinación de mesas y sillas que maximice las utilidades para el fabricante si las utilidades son de \$5 por silla y de \$5 por mesa. Supóngase que los demás datos no se alteran.

Tabla 7
(Secc. 1.2)

Material disponible	Cantidad necesaria por unidad		Total disponible
	Silla	Mesa	
Madera (p.t.)	30	40	11,400
Mano de obra (horas)	4	6	1650
Utilidades netas por unidad ($)	5	6	

2. Responder la pregunta del Problema 1 si las utilidades son de $8 por silla y de $2 por mesa.

3. Responder la pregunta del Ejemplo 1 usando los datos de la Tabla 7.

4. Responder la pregunta del Problema 3 si las utilidades son de $2 por silla y de $8 por mesa sin cambiar los datos restantes

5. Responder la pregunta del Problema 3 si las utilidades son de $8 por silla y de $2 por mesa.

★6. En el Ejemplo 1, supóngase que cada mesa necesita en su fabricación la misma cantidad de madera y de mano de obra que una silla. Si las utilidades unitarias son de $3 por silla y de $4 por mesa, demuéstrese que si la madera y la mano de obra son limitadas, el fabricante siempre puede maximizar sus utilidades fabricando sólo mesas.

7. En el Ejemplo 4, ¿cómo puede el director de recursos hidráulicos minimizar los costos si no hay límite inferior al número de galones de agua que debe hacer circular a través de la tubería?

En los Problemas 8-20, resuélvase el problema dado de programación lineal usando el método gráfico o el del punto esquina. Encuéntrense los valores de x y de y en los que se maximiza o se minimiza la función objetivo.

8. Maximizar

$$f = 3x + 4y$$

sujeta a

$$x + y \le 4$$
$$2x + y \le 5$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

9. Maximizar

$$f = 4x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \le 4$$
$$2x + y \le 5$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

10. Maximizar

$$f = x + y$$

sujeta a

$$3x + 4y \le 12$$
$$2x + y \le 8$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

11. Maximizar

$$f = 2x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \le 4$$
$$2x + 3y \le 10$$
$$4x + 2y \le 12$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

12. Maximizar

$$f = 3x + 5y$$

sujeta a

$$10x + y \le 10$$
$$x + 10y \le 10$$
$$2x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

13. Maximizar

$$f = 5x + 3y$$

sujeta a

$$10x + y \le 10$$
$$x + 10y \le 10$$
$$2x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

14. Maximizar

$$f = 12x + y$$

sujeta a

$$10x + y \le 10$$
$$x + 10y \le 10$$
$$2x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

15. Maximizar

$$f = x + 12y$$

sujeta a

$$10x + y \le 10$$
$$x + 10y \le 10$$
$$2x + 3y \le 6$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

16. Minimizar

$$g = 4x + 5y$$

sujeta a

$$x + 2y \ge 3$$
$$x + y \ge 4$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

17. Minimizar

$$g = 4x + 5y$$

sujeta a

$$x + 2y \ge 4$$
$$x + y \ge 3$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

18. Minimizar

$$g = 12x + 8y$$

sujeta a

$$3x + 2y \ge 1$$
$$4x + y \ge 1$$
$$x \ge 0,\ y \le 0.$$

19. Minimizar

$$g = 3x + 7y$$

sujeta a

$$5x + y \ge 1$$
$$2x + 3y \ge 2$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

20. Minimizar

$$g = 3x + 2y$$

sujeta a

$$x + 2y \ge 1$$
$$2x + y \ge 2$$
$$5x + 4y \ge 10$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

21. Determinar el número de peces de especies S_1 y S_2, con un peso total de 1200 libras que pueden coexistir en el lago del Ejemplo 3. Graficar los puntos correspondientes en el plano.

22. Suponga que se cuenta con 1000 unidades de F_1 y 1800 unidades de F_2 cada día en el Ejemplo 3 . ¿Qué cantidades de cada especie de peces se deben mantener en el lago para maximizar el peso de pescado que se pueda obtener del mismo?

23. Igual que en el Problema 22, ¿qué cantidades de cada especie se deben mantener en el lago si se cuenta con 1000 unidades diarias de F_1 y 1000 unidades diarias de F_2?

24. Suponga que se cuenta con dos tipos de alimento en un lago diariamente en cantidades fijas y que se saben los requerimientos de estos alimentos en promedio para dos especies de peces. Formular un problema general de abasto que maximice las cantidades de peces de cada especie que se deben mantener en el lago.

25. En el Ejemplo 3, ¿qué cantidades de cada especie de peces se deben mantener en el lago para maximizar el número total de peces?

26. En el Problema 22, ¿qué cantidad se debe mantener de cada especie para maximizar el número total de peces en el lago?

27. En el Problema 23, ¿qué cantidad se debe mantener de cada especie de peces en el lago? En este caso, ¿cuál es la cantidad total en peso de pescado que contiene el mismo?

28. La Empresa Miel produce dos clases de dulces a partir de caramelo y chocolate. Cada pieza pesa 4 onzas. La Barra A contiene 3 onzas de caramelo y 1 onza de chocolate. La Barra B contiene 2 onzas de caramelo y 2 onzas de chocolate. La Barra A se vende a 30¢ y la barra B a 54¢. La empresa tiene en almacén 90 libras de chocolate y 144 libras de caramelo. ¿Cuántas unidades se deben producir de cada tipo para maximizar los ingresos de la empresa?

29. Dos alimentos consisten exclusivamente de carbohidratos y proteínas. El Alimento I cuesta 50¢ la libra y contiene 90% de carbohidratos (en peso). El Alimento II cuesta $1 la libra y contiene 60% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada uno de estos alimentos proporciona al menos 2 libras de carbohidratos y 1 libra de proteínas a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo por libra de esta dieta?

30. La Empresa Alimentos Spina, S.A. produce pizzas congeladas. El Sr. Art Spina, presidente de la empresa, supervisa personalmente la producción de los dos tipos de pizzas que maneja la empresa: Spina normal y Spina de lujo. Art obtiene utilidades de $0.50 por cada pizza normal que se produzca y $0.75 por cada pizza de lujo. Cuenta normalmente con 150 libras de masa y 800 onzas de material de recubrimiento. Cada pizza normal requiere 1 libra de masa y 4 onzas de recubrimiento, mientras que la pizza de lujo necesita en su elaboración 1 libra de masa y 8 onzas de recubrimiento. De acuerdo con la demanda anterior, Art sabe que puede vender a lo más 75 pizzas de lujo y 125 pizzas normales. ¿Cuántas pizzas normales y cuántas pizzas de lujo debe producir para maximizar sus utilidades?

31. Un animal requiere en promedio 10 unidades del alimento A, 12 unidades del alimento B, y 12 unidades del alimento C cada día. Estos requerimientos se satisfacen alimentándose de otras dos especies de animales. Una de sus presas, la especie I, le proporciona 5, 2 y 1 unidades de los alimentos A, B y C, respectivamente. Para capturar y digerir una presa de la especie I, necesita 3 unidades de energía, en promedio. Los requerimientos de energía correspondientes a la especie II es de dos unidades de energía. ¿Cuántas presas de cada especie debe capturar para satisfacer sus necesidades de alimento con el mínimo gasto de energía?

★ 32. (a) Grafique el conjunto de restricciones para el siguiente problema de programación lineal.

Maximizar

$$f = 2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

(b) Graficar el conjunto de restricciones para el problema siguiente.

Minimizar

$$g = 10y_1 + 12y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 &\ge 2 \\ 5y_1 + 4y_2 &\ge 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

(c) Demuestre por medio del método gráfico, que el valor máximo de f en (a) es igual al valor mínimo de g en (b). [*Nota*: Las partes (a) y (b) se llaman problemas **duales**. Hablaremos de los problemas duales en la Sección 1.5.]

33. Demuestre que los problemas siguientes son no acotados.

(a) Maximizar

$$f = x + 3y$$

sujeta a

$$x + 2y \geq 3$$
$$4x - y \leq 6$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

(b) Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

34. Demostrar que los problemas siguientes son no factibles.

(a) Maximizar

$$f = 2x + 7y$$

sujeta a

$$2x + 5y \leq 8$$
$$4x + 6y \geq 11$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

(b) Maximizar

$$w = 4x_1 - x_2 + 9x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$
$$8x_1 + 7x_2 + 4x_3 \geq 25$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

También es posible definir un punto esquina en un problema de programación lineal en tres variables. Supóngase que el conjunto restricción es el conjunto de vectores con tres componentes cuyas coordenadas satisfacen un cierto número de desigualdades lineales en tres variables. Un **posible punto esquina** es cualquier solución a exactamente tres de las ecuaciones lineales obtenidas transformando las desigualdades en ecuaciones. Una **solución factible (verdadero punto esquina)** es un posible punto esquina que satisfaga todas las desigualdades. Es posible demostrar que el máximo y el mínimo de una función lineal en el conjunto de restricciones ocurre en un punto esquina. En el caso de que haya cuatro variables en vez de tres, un posible punto esquina es cualquier solución a exactamente cuatro de las ecuaciones lineales, y así sucesivamente.

★ **35.** Encuéntrense todos los puntos esquina del conjunto de restricciones determinado por las siguientes desigualdades

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 26$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 43$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

[*Sugerencia:* Hay 20 maneras distintas de escoger tres ecuaciones de entre las seis correspondientes a las desigualdades dadas en este problema. Cada una de las soluciones al sistema formado por tres ecuaciones en tres incógnitas es un posible punto esquina. Se puede probar cada posible punto esquina para verificar si es un verdadero punto esquina.]

★ **36.** Encuéntrense los valores máximos y mínimos de la función $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$ sujeta a las restricciones del Problema 35.

★ **37.** Un problema clásico de programación lineal es el *problema de la dieta*. Se trata de determinar las cantidades de ciertos alimentos que cumplan con ciertas necesidades de nutrición a un costo mínimo. Por simplicidad, consideremos tres ali-

Tabla 8 (Secc. 1.2) *Cantidades de vitaminas en miligramos*

Vitamina	1 gal de leche	1 lb de carne	1 docena de huevos	Mínimos requerimientos diarios
A	1	1	10	1 mg
C	100	10	10	50 mg
D	10	100	10	10 mg
Costo	$2.00	$2.50	$0.80	

mentos: leche, carne y huevos, y tres vitaminas: A, C y D. Los datos para este problema aparecen en la Tabla 8.

(a) Sea x_1 el número de galones de leche, x_2 el número de libras de carne, y x_3 el número de docenas de huevos consumidos al día. Escríbase el problema de minimización de programación lineal en las tres variables cuya solución sea el costo mínimo. El conjunto de restricciones debe tener seis desigualdades.

(b) Encuéntrense los 20 posibles puntos esquina de este conjunto de restricciones.

(c) Encuéntrense las soluciones factibles. [*Sugerencia*: Son nueve.]

(d) Calcúlese el costo para cada solución factible.

(e) ¿Cuál es el costo mínimo y cómo se logra?

★ **38.** En un gran hospital, las operaciones quirúrgicas se clasifican en tres categorías según sus tiempos promedios en 30 minutos, 1 hora y 2 horas. El hospital recibe honorarios de $100, $150, o $200 para las operaciones de categorías I, II, o III, respectivamente. Si el hospital tiene ocho salas de operaciones, que se usan en promedio de 10 horas diarias, ¿cuántas operaciones de cada tipo debe programar el hospital para (a) maximizar los ingresos y (b) maximizar el número total de operaciones?

★ **39.** Una empresa que produce mezclas de frutas enlatadas tiene en almacén 10,000 libras de peras, 12,000 libras de duraznos y 8,000 libras de cerezas. La empresa produce tres tipos de mezclas y las vende en latas de 1 libra. La primera mezcla tiene la mitad de peras y la mitad de duraznos y se vende a $0.30. La segunda mezcla tiene cantidades iguales de las tres frutas y se vende $0.40. La tercera mezcla tiene la mitad de duraznos y la mitad de cerezas, y se vende a $0.50. ¿Cuántas latas deben producirse de cada mezcla para maximizar los ingresos?

1.3 Variables de holgura

Como se vio en la sección anterior, los problemas de programación lineal involucran cierto número de desigualdades lineales. En el método que se presenta en la siguiente sección para resolver estos problemas, se necesita transformar las desigualdades en ecuaciones.

Ejemplo 1 Considérese la desigualdad lineal

$$2x_1 + 5x_2 \leq 40 \tag{1}$$

La desigualdad (1) quiere decir que $2x_1 + 5x_2$ es menor que 40 o bien es igual a 40. Si es menor que 40, hay una cierta "holgura" en la desigualdad. Llamemos s_1 a esa holgura. Entonces s_1 es la diferencia entre 40 y la suma $2x_1 + 5x_2$. Es decir, de la definición que hicimos de s_1,

$$s_1 = 40 - 2x_1 - 5x_2 \tag{2}$$

o, reescribiendo la Ecuación (2),

$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 40 \tag{3}$$

Nótese que por medio de la introducción de una nueva variable, se transformó la desigualdad (1) en la Ecuación (3). Obsérvese también que $s_1 = 0$ (si $2x_1 + 5x_2 = 40$) o $s_1 > 0$ (si $2x_1 + 5x_2 < 40$), de modo que, en ambos casos, se tiene que

$$s \geq 0 \tag{4}$$

La variable s_1 es lo que se llama una *variable de holgura.*

Variable de holgura Considérese la desigualdad lineal en n variables

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \tag{5}$$

En este caso la **variable de holgura** s_1 está definida por

$$s_1 = b_1 - a_{11}x_1 \quad a_{12}x_2 \quad - a_{1n}x_n$$

de tal manera que la desigualdad (5) es equivalente a

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\ s_1 &\geq 0 \end{aligned}} \tag{6}$$

Ejemplo 2 Escribir el siguiente sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales con variables de holgura:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 6x_1 + 8x_2 + 12x_3 &\leq 250. \end{aligned} \tag{7}$$

Solución Sean

$$s_1 = 10 - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \tag{8}$$

y también

$$s_2 = 250 - 6x_1 - 8x_2 - 12x_3. \tag{9}$$

Entonces, por (7), se tiene que $s_1 \geq 0$ y $s_2 \geq 0$. Por último, reescribiendo (8) y (9), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_1 \quad &= 10 \\ 6x_1 + 8x_2 + 12x_3 \quad + s_2 &= 250 \\ s_1 \geq 0, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Variables básicas y no básicas

$A_{1,2}(-2)$ significa que multiplicamos el primer renglón por -2 y sumamos el resultado al segundo renglón. $M_2(\frac{1}{3})$ significa que multiplicamos el segundo renglón por $\frac{1}{3}$.

Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 + x_4 &= 44 \end{aligned} \tag{10}$$

Resolvamos el sistema por reducción de renglones.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 7 & 12 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow{A_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

Hasta aquí podemos llegar. Ahora tenemos las ecuaciones (de la última matriz aumentada)

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + 11x_4 &= -6 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Las infinitas soluciones de este sistema se pueden escribir

$$x_1 = -6 + x_3 - 11x_4 \tag{11}$$

$$x_2 = 8 - 2x_3 + 3x_4 \tag{12}$$

$$x_3, x_4 \text{ arbitrarias.}$$

En esta forma decimos que las variables x_1 y x_2 son **variables básicas** y que las variables x_3 y x_4 son **no básicas**. Es decir, las soluciones (11) y (12) del sistema (10) están dadas en forma tal que las variables básicas se presentan en términos de las variables no básicas.

Nota. Una de las soluciones de (10) se puede obtener inmediatamente a partir de (11) y (12) dándoles el valor de cero a las variables no básicas. Si

$x_3 = x_4 = 0$, entonces $x_1 = -6$, $x_2 = 8$, y una solución es

$$(-6, 8, 0, 0).$$

Ejemplo 3 Representar la solución del sistema (10) con variables básicas x_2 x_3 y variables no básicas x_1 x_4.

Solución El problema consiste en expresar x_2 y x_3 en términos de x_1 y x_4. De (11), se tiene que

$$x_3 = 6 + x_1 + 11x_4. \tag{13}$$

De (12), que

$$\begin{aligned} x_2 = 8 - 2x_3 + 3x_4 &\overset{\text{usando (13)}}{=} 8 - 2(6 + x_1 + 11x_4) + 3x_4 \\ &= 8 - 12 - 2x_1 - 22x_4 + 3x_4 = -4 - 2x_1 - 19x_4. \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones de (10) se pueden escribir

$$\begin{aligned} x_2 &= -4 - 2x_1 - 19x_4 \\ x_3 &= \ \ 6 + x_1 + 11x_4 \\ &x_1, x_4 \text{ arbitrarias.} \end{aligned} \tag{14}$$

Esta misma respuesta se puede obtener de otra manera. Se vuelve a escribir el sistema (10) usando x_2 y x_3 como las primeras variables.

$$\begin{aligned} 2x_2 + \ \ 3x_3 + \ \ x_1 + 5x_4 &= 10 \\ 7x_2 + 12x_3 + 2x_1 + \ \ x_4 &= 44 \end{aligned}$$

Ahora, se hace reducción por renglones.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 & 10 \\ 7 & 12 & 2 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 7 & 12 & 2 & 1 & 44 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{1,2}(-7)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{33}{2} & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{2,1}(-\frac{3}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 6 \end{array}\right)$$

El último sistema es equivalente (recuérdese que x_2 y x_3 son las primeras variables) a

$$\begin{aligned} x_2 \qquad + 2x_1 + 19x_4 &= -4 \\ x_3 - \ \ x_1 - 11x_4 &= \ \ 6 \end{aligned}$$

o bien

$$x_2 = -4 - 2x_1 - 19x_4 \tag{15}$$

$$x_3 = 6 + x_1 + 11x_4. \tag{16}$$

Este es el sistema (14).

Nota. Se puede obtener otra solución del sistema (10) dándoles el valor de cero a las nuevas variables no básicas. Si $x_1 = x_4 = 0$, entonces, a partir de (15) y (16), $x_2 = -4$ y $x_3 = 6$. Una solución al sistema (10) es

$$(0, -4, 6, 0)$$

Variables básicas y no básicas Supóngase que un sistema de m ecuaciones en n incógnitas, con $n > m$, tiene un número infinito de soluciones. Supóngase también que $n - m$ de las variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ se pueden escoger de manera arbitraria y que las variables restantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se pueden expresar en términos de $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. Entonces, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se llaman **variables básicas** y $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ se llaman **variables no básicas**.

Ejemplo 4 Considérese el sistema de desigualdades lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\le 30 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 50. \end{aligned}$$

(a) Escribir este sistema como un sistema de ecuaciones lineales introduciendo variables de holgura.

(b) Resolver el sistema resultante tomando x_1, x_2 y x_3, como las variables básicas y las variables de holgura como las variables no básicas.

Solución (a) Definiendo las variables de holgura s_1, s_2 y s_3 como se hizo antes, se tiene

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_1 \qquad\qquad &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \qquad + s_2 \qquad &= 30 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad\qquad + s_3 &= 50 \\ s_1, s_2, s_3 &\ge 0 \end{aligned} \tag{17}$$

(b) Resolvemos este sistema de tres ecuaciones ($m = 3$) en seis incógnitas ($n = 6$) por reducción de renglones.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,3}(-1)]{A_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,3}(-1)]{A_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 8 & 5 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 8 & 5 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{3,2}(2)]{A_{3,1}(-8)} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -130 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 15 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz de coeficientes tiene la forma escalonada reducida y el sistema puede escribirse

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + s_1 + 2s_2 - 4s_3 &= -130 \\ x_2 \quad - s_1 \quad\quad + s_3 &= 40 \\ x_3 + \tfrac{1}{2}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 + \tfrac{1}{2}s_3 &= 15 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} x_1 &= -130 - s_1 - 2s_2 + 4s_3 \\ x_2 &= 40 + s_1 - s_3 \\ x_3 &= 15 - \tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{2}s_3. \end{aligned}$$

Como en el Ejemplo 3, se puede obtener una solución del Sistema (17), dándoles el valor de cero a las variables no básicas. Si $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, entonces $x_1 = -130$, $x_2 = 40$, y $x_3 = 15$, y la solución de (17) es

$$(-130, 40, 15, 0, 0, 0).$$

En la siguiente sección se describirá un nuevo método mucho más eficiente en la resolución de problemas de programación lineal. El primer paso de este método involucra la introducción de variables de holgura, y en los pasos siguientes se hacen cambios de variables básicas y no básicas en el problema.

Problemas 1.3

En los Problemas 1-5, escriba el sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales introduciendo las variables de holgura.

1. $x_1 + x_2 \leq 3$
$2x_1 + x_2 \leq 7$

2. $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

3. $2x_1 + x_2 \leq 10$
$3x_1 + 2x_2 \leq 30$
$4x_1 + 7x_2 \leq 20$

4. $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15$
$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 12$
$4x_1 + 8x_2 + 5x_2 \leq 8$

5. $7x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 8$
$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 12x_4 \le 12$
$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \le 9$

6. Considérese el sistema

$$x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$3x_1 + 7x_2 \le 20.$$

(a) Escriba esto como un sistema de ecuaciones lineales, definiendo variables de holgura s_1 y s_2.

(b) Escriba todas las soluciones de este sistema lineal con x_1 y x_2 como variables básicas y s_1 y s_2 como variables no básicas.

7. En el Problema 6(b), escriba las soluciones con x_1 y s_1 como básicas y x_2 y s_2 como no básicas.

8. En el Problema 6(b), escriba las soluciones con x_2 y s_1 como variables básicas y x_1 y s_2 como variables no básicas.

9. Conteste las preguntas del Problema 6 para el sistema

$$2x_1 + 5x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 9x_2 \le 20$$

10. En el Problema 9, escriba las soluciones con x_1 y s_2 como variables básicas y x_2 y s_1 como variables no básicas.

En los Problemas 11-20, (a) escriba el sistema de desigualdades lineales como un sistema de ecuaciones lineales introduciendo variables de holgura. (b) Resuelva el sistema escribiendo las variables básicas en términos de las variables no básicas.

11. $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 35$
Básicas: x_1, x_2
No básicas: s_1, s_2, x_3

12. $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 35$
Básicas: x_1, s_1
No básicas: x_2, x_3, s_2

13. $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 35$
Básicas: x_2, x_3
No básicas: x_1, s_1, s_2

14. $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$
$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 35$
Básicas: s_1, s_2
No básicas: x_1, x_2, x_3

15. $x_1 + 3x_2 \le 5$
$2x_1 + 7x_2 \le 20$
$3x_1 + 8x_2 \le 40$
Básicas: x_1, x_2, s_1
No básicas: s_2, s_3

16. $x_1 + 3x_2 \le 5$
$2x_1 + 7x_2 \le 20$
$3x_1 + 8x_2 \le 40$
Básicas: x_2, s_2, s_3
No básicas: x_1, s_1

17. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \leq 60$

Básicas: s_1, s_2, s_3

No básicas: x_1, x_2, x_3

18. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \leq 60$

Básicas: x_1, x_2, x_3

No básicas: s_1, s_2, s_3

19. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \leq 60$

Básicas: x_1, s_1, s_3

No básicas: x_2, x_3, s_2

20. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 12$
$2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 25$
$3x_1 + 6x_2 + 13x_3 \leq 60$

Básicas: x_1, x_3, s_1

No básicas: x_2, s_2, s_3

1.4 Método simplex I: Problema de maximización estándar

El método del punto esquina que se trató en la Sección 1.2 puede ser demasiado tedioso si el número de variables y de restricciones es grande. En esta sección se describe un método para resolver problemas de programación lineal de manera mucho más eficiente. El método se llama **método simplex**. Fue desarrollado en 1947 por el matemático norteamericano George B. Dantzig. En 1976 el presidente Gerald Ford otorgó a Dantzig la Medalla Nacional de Ciencias, que es la presea más alta de los Estados Unidos en ciencia. En la ceremonia en la Casa Blanca se citó a Dantzig "por haber inventado la programación lineal y por haber descubierto métodos que condujeron a aplicaciones científicas y técnicas en gran escala a problemas importantes en logística, elaboración de programas, y optimización de redes, y al uso de las computadoras para hacer un uso eficiente de la teoría matemática".

Para establecer una idea preliminar sobre el método simplex, observe el conjunto de restricciones representado en la Figura 1.[†]

Supóngase que se trata de maximizar una función objeto f en este conjunto de restricciones. Se puede empezar encontrando un punto esquina, por ejemplo el marcado A. Cualquier segmento de recta que una dos puntos esquinas se llama **arista** del conjunto de restricciones (o simplex). Dantzig fue capaz de demostrar el siguiente hecho importante.

> Si f no toma su valor máximo en el punto esquina A, entonces existe una arista que parte de A, a lo largo de la cual aumenta f.

[†] Este conjunto (sombreado) en el plano se llama también **simplex**. Conjuntos de este tipo existen en tres o más dimensiones pero no intentaremos delinearlos.

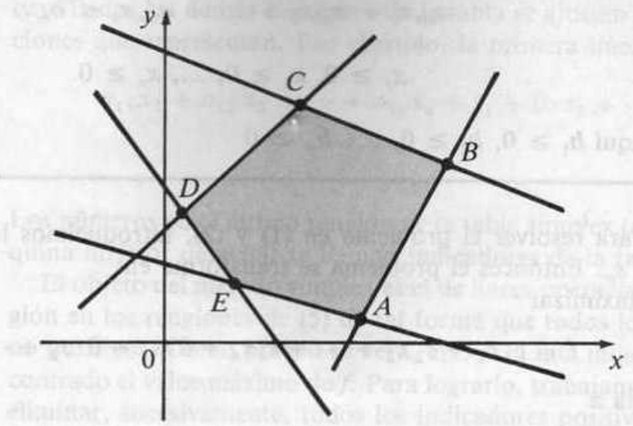


Figura 1
(Secc. 1.4)

Este hecho de enunciado tan sencillo da la idea clave del método simplex. Empezamos en A, y si f no toma su valor máximo en A, nos encontramos una arista del conjunto de restricciones a lo largo de la cual f aumenta. Esto nos lleva a un nuevo punto esquina. Si f toma su máximo valor allí, ya terminamos. Si no es así, continuamos por otra arista en donde f va en aumento, hasta llegar a otro punto esquina. Como hay un número finito de puntos esquina, finalmente llegaremos a una solución óptima después de un número finito de pasos. Nunca volveremos al mismo punto esquina, porque la función objetivo aumenta en cada paso.

En este método no es necesario determinar todos los puntos esquina. Otra gran ventaja del método simplex consiste en que sus pasos se pueden efectuar eficientemente por computadora.

Todo esto parece fácil, pero un proceso para encontrar el "siguiente" punto esquina y para evaluar f en ese punto no es nada obvio. El método simplex es un método para obtener el siguiente punto esquina que se necesita. El método involucra varios pasos técnicos. Antes de describir estos pasos, se describe el tipo de problema que puede resolverse por el método simplex.

Problema estándar de maximización en programación lineal

Encontrar el vector de n componentes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que maximice la función objetivo

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

y satisfaga las $m + n$ desigualdades lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0. \tag{2}$$

Aquí $b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0,\ \ldots\ b_m \geq 0$

Para resolver el problema en (1) y (2), introducimos las variables $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Entonces el problema se transforma en:

Maximizar

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_m \tag{3}$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 \qquad\qquad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + s_2 \qquad &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + s_m &= b_m
\end{aligned} \tag{4}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \ldots, s_m \geq 0.$$

Inicialmente, podemos despejar $s_1, s_2, \ldots, s_m$ en términos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por lo que nuestras variables básicas son al principio, $s_1, s_2, \ldots, s_m$ y nuestras variables no básicas son $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hacemos la suposición de que todas las b son no negativas. Así, igualando a cero todas las variables no básicas en (4) obtenemos nuestro punto esquina inicial $(0, 0, \ldots, 0)$.

Si uno o más de los elementos b es negativo, entonces existen técnicas para resolver el problema, pero no se discutirán aquí. Adviértase que $f = 0$ en $(0, 0, \ldots, 0)$.

Observación. El único requisito para un punto esquina si se satisfacen las restricciones de igualdad es que todas las variables tengan valores no negativos.

Tabla simplex inicial

Una manera cómoda de escribir la información contenida en este problema consiste en definir la **tabla simplex inicial.**

x_1	x_2		x_n	s_1	s_2		s_m		
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1	s_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2	s_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m	s_m
c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	0	$\cdots$	0	f	

(5)

Estas son, inicialmente, las variables básicas.

Las variables del lado derecho indican que $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *son las variables bási-*

cas. Todos los demás elementos de la tabla se ajustan exactamente a las ecuaciones que representan. Por ejemplo, la primera línea se lee

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_m = b_1.$$

Indicadores Los números en el último renglón de la tabla simplex (exceptuando el de la esquina inferior derecha) se llaman **indicadores** de la tabla.

El objeto del método simplex es el de hacer operaciones elementales de renglón en los renglones de (5) de tal forma que todos los indicadores se hagan no positivos. Como pronto se verá, esto será una indicación de que se ha encontrado el valor máximo de f. Para lograrlo, trabajamos con la Tabla (5) para eliminar, sucesivamente, todos los indicadores positivos.

Método simplex-selección de un pivote o apoyo

Paso 1. Primero, escójase cualquier columna en (5) con indicador positivo (si hay más de un indicador positivo, escójase cualquiera) y considérense todas las componentes *positivas* en esa columna. Supongamos que se escogió la columna j.

Paso 2. Defínase como **pivote** de esta columna a una componente positiva a_{ij} en la columna j de tal manera que b_i/a_{ij} sea mínimo para todas las a_{ij}. Si este mínimo no es único, escójase cualquier elemento de la columna j que dé el cociente mínimo.

Ejemplo 1 Encontrar todos los pivotes o apoyos de la tabla simplex inicial.

Estos son los b

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	−1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	f	

Estos son los indicadores positivos

Solución Primero, obsérvese que hay tres indicadores positivos, por lo que hay por lo menos tres pivotes. Los encontramos uno por uno.

Columna 1. Hay dos componentes positivos, así que formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{2}{3}.$$

Como $1/2 \leq 2/3$, el pivote de la primera columna es 2.

Columna 2. Hay un solo componente positivo en la segunda columna —el número 3. Este es el pivote.

Columna 3. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{13}} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{b_2}{a_{23}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como $1/4 < 1$, el pivote es 4.

La tabla aparece a continuación con los tres pivotes encerrados en círculos.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	-2	0	0	f	

Ejemplo 2 Encontrar todos los pivotes de la tabla simplex inicial.

Estos son los b.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
-1	5	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	-4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	-1	0	2	0	0	0	0	f	

Estos son los indicadores positivos.

Solución Hay indicadores positivos en las columnas 1, 2 y 5.

Columna 1. Hay dos elementos positivos en esta columna. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{b_4}{a_{41}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Ya que $2 < 3$, el pivote es 1.

Columna 2. Hay tres componentes positivas en esta columna. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{2}{2} = 1, \qquad \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{1}{5}.$$

Como $1/5$ es el mínimo cociente, el pivote es 5.

Columna 5. Hay cuatro componentes positivos en esta columna. Formamos los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{15}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b_2}{a_{25}} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b_4}{a_{45}} = \frac{3}{2}.$$

Hay un empate. El menor cociente es 1/2, y hay dos cocientes con este valor. Por lo tanto, 4 y 2 son los pivotes en la columna 5. Volvemos a dibujar la tabla, con los pivotes encerrados en círculos.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
−1	5	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

Método simplex-pivoteo

Paso 3. Una vez escogido un pivote, úsese reducción de renglones para hacer que el pivote valga 1 y para que todos los demás componentes en la columna del pivote valgan 0.

Paso 4. Sustitúyase la variable básica en el lado derecho del renglón del pivote o apoyo por la variable no básica que encabeza la columna del pivote.

Observación. La ejecución de los Pasos 3 y 4 se llama **pivoteo**.

Ejemplo 3 En el Ejemplo 1, encontramos el pivote marcado en la tercera columna. Usar este componente como pivote.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	−1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	f	

Solución ***Paso 3.*** Debemos dividir el primer renglón entre 4 para que el coeficiente en el primer renglón y en la tercera columna valga 1. Después usamos el primer renglón para hacer cero los números 2 y 1/2 de la tercera columna. Al llevar a cabo estos pasos, usamos la misma notación de la reducción de renglones en el Capítulo 2.

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
2 & -1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 1 & s_1 \\
3 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 2 & s_2 \\
\hline
1 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & f &
\end{array}
$$

Estas son las variables básicas iniciales.

$$
\xrightarrow{M_1(\frac{1}{4})}
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & s_1 \\
3 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 2 & s_2 \\
\hline
1 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & f &
\end{array}
$$

Como antes, esto significa que multiplicamos el primer renglón por ¼.

$$
\xrightarrow[A_{1,3}(-\frac{1}{2})]{A_{1,2}(-2)}
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & s_1 \\
2 & \frac{7}{2} & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & s_2 \\
\hline
\frac{3}{4} & \frac{9}{8} & 0 & -\frac{11}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & f-\frac{1}{8} &
\end{array}
$$

Multiplicar el primer renglón por −2 y sumarlo al segundo; multiplicar el primer renglón por −½ y sumarlo al tercer renglón.

Paso 4. Como el pivoteo se hizo en el primer renglón y en la tercera columna, la variable básica del primer renglón, s_1, pasa a ser no básica, y la variable no básica que encabeza la tercera columna, x_3, pasa a ser básica. Así, al terminar la operación de pivoteo, la tabla se ve así:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & x_3 \leftarrow \\
2 & \frac{7}{2} & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & s_2 \\
\hline
\frac{3}{4} & \frac{9}{8} & 0 & -\frac{11}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & f-\frac{1}{8} &
\end{array}
$$

Esta es la nueva variable básica.

Nótese cómo la variable x_3 se desplaza a la derecha como nuestra nueva variable básica. Esto quiere decir que podemos escribir x_3 en términos de las variables no básicas. Para hacerlo, interpretamos el primer renglón de la tabla:

$$\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 + x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 + \tfrac{1}{4}s_1 = \tfrac{1}{4}$$

$$x_3 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{3}{2}x_4 - \tfrac{1}{4}s_1.$$

Ejemplo 4 Pivotear sobre la componente encerrada de la tabla siguiente.

x_1	x_2	x_2	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
−1	⑤	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

Solución Efectuamos las operaciones de renglón requeridas.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
−1	⑤	0	1	2	0	0	1	0	1	s_3
1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

Estas son las variables básicas iniciales.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
	1	1	3	4	4	1	0	0	0	2	s_1
	0	2	1	2	1	0	1	0	0	2	s_2
$\xrightarrow{M_3(\frac{1}{5})}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	s_3
	1	−4	1	3	2	0	0	0	1	3	s_4
	1	1	−1	0	2	0	0	0	0	f	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4		
$A_{3,1}(-1)$	$\frac{6}{5}$	0	3	$\frac{19}{5}$	$\frac{18}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	s_1
$A_{3,2}(-2)$	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	s_2
$A_{3,4}(4)$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	s_3
$\xrightarrow{A_{3,5}(-1)}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{19}{5}$	$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{19}{5}$	s_4
	$\frac{6}{5}$	0	−1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$f - \frac{1}{5}$	

Por último, la variable no básica x_2 que encabeza la segunda columna sustituye a la variable básica s_3 del tercer renglón.

$$
\begin{array}{ccccc|cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \\
\hline
\frac{6}{5} & 0 & 3 & \frac{19}{5} & \frac{18}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{9}{5} \\
\frac{2}{5} & 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\
-\frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{18}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{19}{5} \\
\hline
\frac{6}{5} & 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & f-\frac{1}{5}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
s_1 \\
s_2 \\
x_2 \longleftarrow \text{Esta es la nueva variable básica.} \\
s_4 \\
\\
\end{array}
$$

Después de cada operación de pivoteo, las variables del lado derecho de la tabla simplex son variables básicas.

¿Por qué seguimos estos cuatro pasos? Es posible demostrar que suceden dos cosas importantes.

1. Los números de la columna de la derecha nos dan un nuevo punto esquina con todas las variables no básicas iguales a cero.
2. En este nuevo punto esquina ha aumentado el valor de la función objetivo.

Ejemplo 5 En la última tabla del Ejemplo 3, tenemos $x_3 = 1/4$ y $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, porque x_1, x_2 y x_4 son variables no básicas. La última ecuación es

$$\tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{9}{8}x_2 - \tfrac{11}{4}x_4 - \tfrac{1}{8}s_1 = f - \tfrac{1}{8}$$

Pero $x_1 = x_2 = s_1 = 0$, puesto que todas éstas son variables no básicas; entonces, $f - 1/8 = 0$, o sea $f = 1/8$. Así, f aumentó del valor 0 (en (0, 0, 0)) al valor de 1/8 en (0, 0, 1/4, 0).

Nótese que el valor $s_2 = 3/2$ (obtenido al hacer $x_1 = x_2 = x_4 = s_1 = 0$ en la tabla) quiere decir que hay una holgura de 3/2 en la segunda desigualdad del problema original de programación lineal.

Ejemplo 6 En la última tabla del Ejemplo 4, vemos que $x_2 = 1/5$ y $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ (éstas son variables no básicas). Aquí f aumentó del valor de 0 (en (0, 0, 0, 0)) al valor de 1/5 (en (0, 1/5, 0, 0, 0,)).

Tabla terminal

El proceso de pivoteo descrito anteriormente se repite hasta que se hayan eliminado todos los indicadores positivos. Finalmente se llega a una **tabla terminal**, cuando todos los indicadores son negativos o cero.

Ejemplo 7 La siguiente es una tabla terminal.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	1	2	0	2	x_4
1	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	3	x_1
0	0	1	0	0	1	3	0	1	x_3
0	3	0	0	2	0	4	1	2	s_4
0	-1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$f-20$	

Todos los indicadores son no positivos.

Como todos los indicadores son no positivos, se ve que f tiene un máximo de 20 en el punto

x_2 es no básico.

$$(3, 0, 1, 2).$$

¿Por qué? Escribimos la última ecuación de la tabla:

$$0 \cdot x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3 + 0 \cdot s_4 = f - 20$$

o bien

$$-x_2 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3 = f - 20$$

y así

$$f = 20 - x_2 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3$$

Como todas las variables son no negativas, se ve que

$$-x_2 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{2}s_2 - s_3 \leq 0$$

Entonces $f \leq 20$. Obsérvese que $f = 20$ cuando $x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Las primeras cuatro ecuaciones de la tabla terminal se leen

$$\begin{aligned}
x_2 + x_4 + \tfrac{1}{3}s_1 + s_2 + 2s_3 &= 2 \\
x_1 + 2x_2 + \tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}s_2 + s_3 &= 3 \\
x_3 + s_2 + 3s_3 &= 1 \\
3x_2 + 2s_1 + 4s_3 + s_4 &= 2.
\end{aligned}$$

Como $x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$, estas ecuaciones se reducen a

$$x_4 = 2$$

$$x_1 = 3$$
$$x_3 = 1$$
$$s_4 = 2$$

Así se ve que f alcanza su mínimo de 20 en (3, 0, 1, 2).

Resumimos el método simplex para resolver un problema estándar de programación lineal de maximización.

Método simplex

1. Escriba las desigualdades como ecuaciones introduciendo variables de holgura.
2. Inicialmente, defina las variables básicas como variables de holgura.
3. Escriba toda la información en una tabla simplex inicial.
4. Siga los Pasos 1 y 2 para escoger un pivote en una columna con indicador positivo. Un indicador es un número positivo en el último renglón.
5. Siga los Pasos 3 y 4 para pivotear la componente escogida en 4.
6. Continúe haciendo los Pasos 4 y 5 hasta obtener una tabla terminal (sin indicadores positivos).
7. Lea la solución de la tabla terminal: Si $f - M$ está en la casilla inferior derecha, entonces el valor máximo de f es M. Los valores de las variables básicas se dan en la columna de la derecha. El valor de todas las variables no básicas es ahora cero.

Ejemplo 8 Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Solución La tabla simplex inicial es

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
1	2	3	1	0	1	s_1
2	1	1	0	1	2	s_2
1	1	1	0	0	f	

Estas son las variables básicas iniciales.

Si empezamos con la primera columna (tiene indicador positivo), podemos usar como pivote $a_{11} = 1$ o bien $a_{21} = 2$, ya que $1/1 = 2/2 = 1$. Escogiendo a_{11} (porque ya tiene el valor de 1), hacemos pivoteo para obtener

OK

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
$A_{1,2}(-2)$	1	2	3	1	0	1	x_1 ← **Esta es la nueva variable básica.**
$A_{1,3}(-1)$	0	-3	-5	-2	1	0	s_2
	0	-1	-2	-1	0	$f - 1$	

Ya que todos los indicadores son no positivos, esta es una tabla terminal. Encontramos que $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ (x_2 y x_3 son variables no básicas), y $f = 1$ en el punto (1, 0, 0). Esta es nuestra solución. Nótese que f aumentó de 0 (en (0, 0, 0)) a 1 (en (1, 0, 0)).

Ejemplo 9 Determínese el máximo de

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 26 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 43 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Solución Escribimos la tabla simplex inicial después de haber introducido las variables de holgura s_1, s_2 y s_3.

Estas son las variables básicas iniciales.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	1	0	0	15	s_1
2	1	2	0	1	0	26	s_2
5	2	3	0	0	1	43	s_3
3	-2	2	0	0	0	f	

Existen dos indicadores positivos. Escogiendo la tercera columna se tiene que

$$\tfrac{15}{1} = 15, \quad \tfrac{26}{2} = 13, \quad \tfrac{43}{3} = 14\tfrac{1}{3}$$

Como 13 es el mínimo cociente, hacemos pivoteo en la componente encerrada.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3			
	1	1	1	1	0	0	15	s_1	
	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	13	s_2	
$\xrightarrow{M_2(\frac{1}{2})}$	5	2	3	0	0	1	43	s_3	
	3	-2	2	0	0	0	f		

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3			
$A_{2,1}(-1)$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	s_1	
$A_{2,3}(-3)$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	13	x_3	← Esta es la nueva variable básica.
$\xrightarrow{A_{2,4}(-2)}$	2	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	4	s_3	
	1	-3	0	0	-1	0	$f-26$		

Nótese que f tiene el valor de 26 en (0, 0, 13). Inicialmente, f valía 0 en (0, 0, 0). Aún queda un indicador positivo. Formamos los cocientes

$$\tfrac{13}{1} = 13, \quad \tfrac{4}{2} = 2$$

y hacemos pivoteo en la componente encerrada en círculo.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	s_1
	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	13	x_3
$\xrightarrow{M_3(\frac{1}{2})}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	s_3
	1	-3	0	0	-1	0	$f-26$	

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3			
	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	s_1	
$A_{3,2}(-1)$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	11	x_3	
$\xrightarrow{A_{3,4}(-1)}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	x_1	← Esta es la nueva variable básica.
	0	$-\frac{13}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$f-28$		

Todos los indicadores son no positivos, por lo que ésta es una tabla terminal. Como $f = 28 - 13/4x_2 - 1/4s_2 - 1/2s_3$, se ve que el máximo valor de f es 28, que se obtiene cuando $x_2 = s_2 = s_3 = 0$ y $x_1 = 2$, $x_3 = 11$, $s_1 = 2$. Es decir f toma su máximo valor de 28 en el punto esquina (2, 0, 11).

Nota. El resultado $s_1 = 2$ quiere decir que hay una holgura de 2 en la primera restricción del problema en una solución óptima. Esto se puede verificar observando que en (2, 0, 11),

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 0 + 11 = 13,$$

que es menor que 15 en dos unidades.

Ejemplo 10 Una empresa manufacturera suspendió la producción de cierta línea de productos que no producían utilidades. Esto creó un considerable exceso en la capacidad de producción. La gerencia se plantea asignar esta capacidad sobrante de producción a la elaboración de uno o más de tres productos, que llamaremos productos 1, 2 y 3. La capacidad disponible en las máquinas de la empresa está limitada por la información que aparece en la Tabla 1.

Tabla 1 *(Secc. 1.4)*

Tipo de Máquina	Tiempo disponible (en horas máquina por semana)
Fresadora	200
Torno	100
Rectificadora	60

El número de horas máquina requeridos para cada unidad de los productos respectivos se da en la Tabla 2.

Tabla 2 *(Secc. 1.4)* *Productividad (en Horas Máquina Por Unidad)*

Tipo de Máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	8	2	3
Torno	4	3	0
Rectificadora	2	1	1

El departamento de ventas reporta que el potencial de ventas para los tres productos es superior a la máxima velocidad de producción. Las utilidades unitarias serían de \$ 20, \$ 6 y \$ 8 para los productos 1, 2 y 3, respectivamente.

¿Cuanto debe producir la empresa de cada producto para maximizar las utilidades?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 los números de unidades de los productos 1, 2 y 3, respectivamente. Entonces el problema es el siguiente:

Maximizar

$$P = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 \qquad \textbf{Ecuación de utilidades}$$

sujeta a

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200 \qquad \textbf{Restricción de la fresadora}$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 100 \qquad \textbf{Restricción del torno}$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \qquad \textbf{Restricción de la rectificadora}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Después de introducir tres variables de holgura, se puede escribir la siguiente tabla simplex inicial.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
8	2	3	1	0	0	200	s_1
4	3	0	0	1	0	100	s_2
2	1	1	0	0	1	60	s_3 ← **Esta es la nueva variable básica.**
20	6	8	0	0	0	P	

Podemos hacer pivoteo en cualquiera de las tres primeras columnas. Como la meta consiste en minimizar el trabajo, observamos primero que si usamos el pivote de la columna 3, el pivote es 1 (ya que $60/1 < 200/3$). Entonces se obtiene

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	2	−1	0	1	0	−3	20	s_1
$A_{3,1}(-3)$	4	3	0	0	1	0	100	s_2
$\xrightarrow{A_{3,4}(-8)}$	2	1	1	0	0	1	60	x_3 ← **Esta es la nueva variable básica.**
	4	−2	0	0	0	−8	$P - 480$	

Hay un indicador positivo (en la primera columna). Ya que $20/2 = 10$ es menor que $100/4 = 25$, y que $60/2 = 30$, hacemos pivoteo en el 2 para obtener, sucesivamente,

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	10	s_1
	4	3	0	0	1	0	100	s_2
$\xrightarrow{M_1(\frac{1}{2})}$	2	1	1	0	0	1	60	x_3
	4	−2	0	0	0	−8	$P - 480$	

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
$A_{1,2}(-4)$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	10	x_1 ← **Esta es la nueva variable básica.**
$A_{1,3}(-2)$	0	5	0	−2	1	6	60	s_2
$\xrightarrow{A_{1,4}(4)}$	0	2	1	−1	0	4	40	x_3
	0	0	0	−2	0	−2	$P - 520$	

La última tabla es una tabla terminal. Las máximas utilidades se encuentran cuando $x_1 = 10$, $x_3 = 40$ y $x_2 = 0$ (ésta es una variable no básica) y las utilidades obtenidas son de \$ 520. Es decir, si se producen 10 unidades del producto 1, 40 unidades del producto 3, y ninguna unidad del producto 2, la empresa maximiza sus utilidades. Para comprobar, obsérvese que

$$20x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 20 \cdot 10 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 40 = 520.$$

Por último, la cantidad $s_2 = 60$ quiere decir que hay una holgura de 60 en la segunda restricción. Comprobando de otra manera, nótese que

$$4x_1 + 3x_2 = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 40,$$

que es 60 y menor que 100.

Problemas 1.4

En los Problemas 1-3, determínense los pivotes de la tabla simplex inicial dada.

1.

2	−1	2	1	0	1
−2	0	3	0	1	2
1	1	1	0	0	f

2.

1	1	1	1	0	1
−1	0	1	0	1	2
2	1	3	0	0	f

3.

1	2	3	1	0	0	5
2	3	1	0	1	0	3
3	1	2	0	0	1	1
2	−1	3	0	0	0	f

En los Problemas 4-9, escríbase la tabla simplex inicial para el problema dado de programación lineal y enciérrense en un círculo todos los posibles pivotes.

4. Maximizar

$$f = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

5. Maximizar

$$f = x_1 - x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 \le 7$$
$$5x_1 + 8x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

6. Maximizar

$$f = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 7$$
$$5x_1 + 3x_2 \le 14$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

7. Maximizar

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

8. Maximizar

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \le 5$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 7$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

9. Maximizar

$$f = x_1 + x_2 - 3x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 4$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

En los Problemas 10-14, encuéntrese la tabla terminal a partir de la tabla simplex inicial dada.

10.

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2		
2	-1	4	6	1	0	1	s_1
3	3	2	7	0	1	2	s_2
1	1	$\frac{1}{2}$	-2	0	0	f	

11.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
2	3	2	1	0	2	s_1
-1	0	4	0	1	2	s_2
1	2	0	0	0	f	

12. La tabla del Problema 1.

13. La tabla del Problema 2.

14. La tabla del Problema 3.

Resuélvanse los Problemas 15-26, por el método simplex.

15. Problema 5.

16. Problema 4.

17. Maximizar

$$f = 4x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

18. Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_2 + 2x_3 \le 3$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

19. Problema 9.

20. Problema 8.

21. Maximizar

$$f = 5x_1 + 8x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_1 &\le \tfrac{5}{2} \\ x_2 &\le \tfrac{3}{2} \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

22. Maximizar

$$f = 5x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &\le 3 \\ 4x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1 - x_2 \quad &\le 0 \\ x_3 &\le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

23. Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

24 Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\le 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

25. Maximizar

$$f = x_1 - x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

26. Maximizar

$$f = 5x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 6x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_4 &\le 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\quad &\le 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\le 3 \\ x_1 + \qquad 5x_3 + 3x_4 &\le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

27. La Maderera Liva, S.A., fabrica tres tipos de triplay. La siguiente tabla resume las horas de producción por unidad en cada una de las tres operaciones de producción, además de información adicional para resolver el problema.

Triplay	Operaciones (horas) I	II	III	Utilidades por unidad
Grado A	2	2	4	\$40
Grado B	5	5	2	\$30
Grado X	10	3	2	\$20
Máximo tiempo disponible	900	400	600	

¿Cuántas unidades se deben producir de cada grado de madera?

28. La vinícola Ye Olde Cording Winery, en Peoria, Illinois, produce tres tipos de vino alemán: Heidelberg Sweet, Heidelberg Regular y Deutschland Extra Dry.

La materia prima, la mano de obra y las utilidades por galón para cada tipo de estos vinos se resume en la tabla siguiente.

Vino	Uvas grado A (bushels)	Uvas grado B (bushels)	Azúcar (libras)	Mano de obra (horas)	Utilidades por galón
Heidelberg Sweet	1	1	2	2	\$1.00
Heidelberg Regular	2	0	1	3	\$1.20
Deutschland Extra Dry	0	2	0	1	\$2.00

Si la empresa vinícola tiene 150 bushels de uvas grado A, 150 bushels de uvas grado B, 80 libras de azúcar y 225 horas de trabajo disponibles en la próxima semana, ¿qué cantidades de cada producto harán que las utilidades de la empresa sean máximas?

(a) Resolver el problema por el método simplex.
(b) Interpretar las variables de holgura.
(c) ¿Qué recursos deberían aumentar para poder aumentar las utilidades de la empresa?

29. La empresa Helados El Paraíso vende helados de distintos sabores: chocolate, vainilla y plátano. A causa del clima, extremadamente cálido y a la alta demanda de sus productos, la empresa se encontró con déficit de algunos de los ingredientes: leche, azúcar y crema. Así que Helados El Paraíso no podía cumplir todos los pedidos de los establecimientos de venta al menudeo. Por lo que decidió producir las cantidades óptimas de cada uno de los sabores según las restricciones impuestas por la disponibilidad de los ingredientes básicos. La empresa va a racionar las ventas a las tiendas de menudeo.

Para eso, consiguió la siguiente información sobre las utilidades provenientes de los distintos sabores de helado, la disponibilidad de los ingredientes, y las cantidades requeridas por cada uno de los productos de distintos sabores.

		Uso por galón		
Sabor	Utilidades por galón	Leche (galones)	Azúcar (libras)	Crema (galones)
Chocolate	\$1.00	0.45	0.50	0.10
Vainilla	\$0.90	0.50	0.40	0.15
Plátano	\$0.95	0.40	0.40	0.20
Máximo disponible		200	150	60

Determínese la cantidad óptima de cada producto para la empresa Helados El Paraíso. ¿Qué recursos adicionales se deben usar?

30. Una dama política planea recorrer su estado para atraer la atención sobre su candidatura, para familiarizarse mejor con los problemas de su estado y poder platicar con muchos votantes. Usará parte de su tiempo en recorrido rápido, parte por diversión y parte para hablar con los votantes. Para balancear el tiempo invertido en la búsqueda de sus objetivos durante el recorrido, decide caminar tanto como pueda en una hora, dedicando al menos 1/4 de hora a la conversación, y limitando el tiempo que dedique a la caminata rápida a no más de la suma del tiempo total de caminata y el tiempo dedicado a diversión. Si su caminata rápida es a una velocidad de 3 millas por hora, su velocidad cuando platica es de 1 milla por hora y se mantiene fija en un punto al hablar con los votantes, ¿qué fracción de cada hora debe dedicar a cada actividad para llegar tan lejos como pueda?

31. Un empleado de una tienda de helados quiere producir el "ice cream soda" más rico en calorías para sus amigos, que quepa en un vaso de 12 onzas. Los ingredientes son jarabe, crema, soda y helado. Para que se vea como soda y sepa a soda, la mezcla no debe contener más de 4 onzas de helado, al menos tanta soda como la cantidad total de jarabe y crema combinados, y no más de 1 onza más de jarabe que de crema. Si el jarabe contiene 75 calorías por onza, la crema contiene 50 calorías por onza, el helado contiene 40 calorías por onza, y la soda no contiene calorías, ¿cuántas onzas de cada ingrediente debe usar?

★ 32. Un inversionista tiene \$10,000 que quisiera produjeran tanto dinero como sea posible. Quiere invertir parte de éste en acciones, parte en bonos, y colocar el resto en una cuenta de ahorros. El inversionista cree poder ganar 8% con el dinero que invierta en acciones y el 7% con el dinero que invierta en bonos. El banco paga el 5% de interés sobre las cuentas de ahorros. Como las acciones son una inversión con cierto riesgo, decide no invertir en acciones más de la mitad de la cantidad que invierta en bonos, y no invertir en acciones más de lo que ponga en el banco. El inversionista se quedará con al menos \$2000 en el banco por si necesita dinero en efectivo de inmediato. ¿Cuánto dinero debe invertir en acciones, cuánto en bonos, y cuánto debe depositar en el banco?

33. Un joyero hace anillos, aretes, pisacorbatas y collares. No quiere trabajar más de 40 horas a la semana. Necesita 2 horas para hacer un anillo, 2 horas para hacer un par de aretes, 1 hora para hacer un pisacorbata, y 4 horas para hacer un collar. Estima que no podría vender más de 10 anillos, 10 pares de aretes, 15 pisacorbatas y 3 collares en una semana. El joyero cobra \$50 por un anillo, \$80 por un par de aretes, \$25 por un pisacorbata, y \$200 por un collar. ¿Cuántos anillos, aretes, pisacorbatas y collares debe hacer para tener los máximos ingresos brutos?

34. Una empresa que produce mezclas de frutas enlatadas tiene 10,000 libras de peras, 12,000 libras de duraznos y 8,000 libras de cerezas. La empresa produce tres tipos de mezclas, cada una en latas de 1 libra. La primera mezcla es la mitad de peras y la mitad de duraznos y se vende a 30¢. La segunda mezcla tiene partes iguales de las tres frutas y se vende a 40¢. ¿Cuántas latas se deben producir de cada mezcla para maximizar los ingredientes?

35. En un gran hospital se clasifican las operaciones quirúrgicas en tres categorías de acuerdo con el tiempo promedio que requieren en operaciones de 30 minutos, de 1 hora y de 2 horas. El hospital recibe una cuota de \$100, \$150, o de \$200 por cada operación de las categorías I, II o III, respectivamente. Si el hospital tiene ocho salas de operaciones, con un uso promedio de 10 horas diarias, ¿cuántas operaciones de cada tipo debe programar el hospital para (a) maximizar los ingresos y (b) para maximizar el número de operaciones totales?

Resuelva los Problemas 36-38 por el método simplex.

36. Problema 1.2.28 **37.** Problema 1.2.31 **38.** Problema 1.2.30

1.5 Método simplex II: Problema dual mínimo

Existe una relación notable entre los problemas de máximo y mínimo de programación lineal. Con cada problema de máximos se relaciona un problema de mínimos, que se llama el **dual** del problema de máximos. A la inversa, el problema de máximos es el dual del problema de mínimos asociado. Esta asociación es útil, porque la solución de un problema está íntimamente relacionada con la solución de su problema dual.

Antes de definir el dual, definimos la transpuesta de una matriz.

Transpuesta Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A, que se escribe A^t, es la matriz $n \times m$ que se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de A. Brevemente, se puede escribir $A^t = (a_{ji})$. En otras palabras,

$$\boxed{\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \quad (1)$$

Dicho de manera sencilla, el renglón i de A es la columna i de A^t y la columna j de A es el renglón j de A^t.

Ejemplo 1

Encontrar la transpuesta de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Intercambiando los renglones por las columnas de cada matriz se obtiene

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución Nótese, por ejemplo, que 4 es la componente del renglón 2 y columna 3 de C, mientras que 4 es el componente del renglón 3 y la columna 2 de C^t. Esto es, la componente 2, 3 de C es el componente 3, 2 de C^t.

Ahora podemos definir el dual.

Problema dual de programación lineal

Los problemas siguientes de máximos y mínimos se llaman problemas **duales**.

1. Maximizar

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2}$$

sujeta a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \qquad \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \tag{3}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$$

2. Minimizar

$$g = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \tag{4}$$

sujeta a

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m &\ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m &\ge c_2 \\ \vdots \qquad \qquad & \quad \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m &\ge c_n \end{aligned} \tag{5}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0.$$

Puede observarse lo siguiente.

1. Si el problema de máximos involucra m desigualdades en n variables entonces su problema dual de mínimos involucra n desigualdades en m variables.
2. La matriz de los coeficientes de las desigualdades en (5) es la transpuesta de la matriz de coeficientes de las desigualdades en (3).
3. Las b_i en (3) son los coeficientes de las y_i en (4).
4. Las c_i en (5) son los coeficientes de las x_i en (2).

Ejemplo 2 Encuéntrese el problema dual de mínimos del siguiente problema de máximos.

Maximizar

$$f = 3x_1 + 2x_2 \tag{6}$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 8 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \end{aligned} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Solución Si se comparan los problemas duales (2), (3) y (4), (5), se puede observar que el número de las variables en el problema de mínimos es menor o igual al número de desigualdades lineales en el problema de máximos. Este número es 3. Además, como los coeficientes de las y_i en la expresión de g son las b_i en (3), se tiene:

Minimizar

$$g = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3. \tag{8}$$

La matriz de los coeficientes de las desigualdades (7) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Su transpuesta es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que, de (8) y de las observaciones 2 y 4, se tiene:

Minimizar

$$g = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 2 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Se muestran los dos problemas uno al lado del otro para hacer notar cómo están relacionados.

Problema de máximos	*Problema de mínimos*
Maximizar	**Minimizar**
2 incógnitas	3 incógnitas
$f = 3x_1 + 2x_2$	$g = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$
sujeta a	*sujeta a*
3 desigualdades $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$	2 desigualdades $\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 2 \end{cases}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$
Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t$

Ejemplo 3 Determínese el problema dual de:

Minimizar

$$g = 3y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4y_1 + 7y_2 + y_3 &\geq 3 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\geq 7 \\ 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 10 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Solución La transpuesta de $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Así que el problema dual de máximos es:

Maximizar

$$f = 3x_1 + 7x_2 + 10x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

¿Por qué se estudia el problema dual? Se estudia el problema dual debido al notable resultado que dice que, en cierto sentido, los problemas duales tienen las mismas soluciones.

Teorema fundamental de la programación lineal

Sea f la función objeto de un problema de máximos de programación lineal, y sea g la función objeto del correspondiente problema dual de mínimos. Entonces el problema de máximos para f tiene una solución si y sólo si el problema de mínimos para g tiene solución. Además, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ son soluciones óptimas de ambos problemas si y sólo si f evaluada en $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g$ evaluada en $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Se muestra ahora cómo se puede usar el teorema fundamental de programación lineal y el método simplex para resolver un **problema estándar de minimización**. Este es un problema de mínimos de la forma de (4) y (5).

Resolución de un problema estándar de mínimos en programación lineal

1. Escríbase el problema dual de máximos.
2. Resuélvase el problema de máximos por el método simplex.
3. El valor mínimo de g (en (4)) es igual al valor máximo de f (en (2)).
4. Los valores de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ que minimizan g son los negativos de los coeficientes de $s_1, s_2, \ldots, s_m$ en el último renglón de la tabla terminal.

Ejemplo 4 Supóngase que se han seguido los Pasos 1 y 2, para llegar a la siguiente tabla terminal para el problema dual de máximos.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
1	0	0	4	3	50	s_1
0	1	0	7	2	80	x_1
0	0	1	6	4	65	x_2
−4	−2	−8	−3	−5	$f - 125$	

Los negativos de estos números son los valores de y_1, y_2 y y_3.

Entonces la solución al problema original de mínimos es $g = 125$ cuando $y_1 = 8$, $y_2 = 3$ y $y_3 = 5$.

Ejemplo 5 Determínese, por el método simplex, el valor mínimo de la función objetivo $g = 3y_1 + 2y_2$ sujeta a

$$5y_1 + y_2 \geq 10$$
$$2y_1 + 2y_2 \geq 12$$
$$y_1 + 4y_2 \geq 12$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Solución. El problema dual de máximos es:

Maximizar

$$f = 10x_1 + 12x_2 + 12x_3$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 3\\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 2\\
x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

La tabla simplex inicial para este problema es

$$
\begin{array}{ccc|cc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & s_1\\
1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & s_2\\
\hline
10 & 12 & 12 & 0 & 0 & f &
\end{array}
$$

Escogiendo la componente encerrada en un círculo como pivote, se obtiene

$$
\xrightarrow{M_2(\frac{1}{2})}
\begin{array}{ccc|cc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & s_1\\
\frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & s_2\\
\hline
10 & 12 & 12 & 0 & 0 & f &
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[A_{2,3}(-12)]{A_{2,1}(-2)}
\begin{array}{ccc|cc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
4 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & s_1\\
\frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & x_2\\
\hline
4 & 0 & -12 & 0 & -6 & f-12 &
\end{array}
$$

Haciendo un nuevo pivoteo en la componente señalada, se tiene

$$
\xrightarrow{M_1(\frac{1}{4})}
\begin{array}{ccc|cc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & s_1\\
\frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & x_2\\
\hline
4 & 0 & -12 & 0 & -6 & f-12 &
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[A_{1,3}(-4)]{A_{1,2}(-\frac{1}{2})}
\begin{array}{ccc|cc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & & \\
\hline
1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & x_1\\
0 & 1 & \frac{19}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & x_2\\
\hline
0 & 0 & -9 & -1 & -5 & f-13 & \\
 & & & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & & -y_1 & -y_2 & &
\end{array}
$$

Y hemos llegado a la tabla terminal. La solución al problema de máximos es

Variable no básica

$$f = 13 \quad \text{en} \quad x_1 = \tfrac{1}{4},\ x_2 = \tfrac{7}{8},\ x_3 = 0.$$

La solución al problema original es

$$g = 13 \quad \text{en} \quad y_1 = 1 \quad \text{y} \quad y_2 = 5.$$

Comprobación. En (1, 5),

$$g = 3y_1 + 2y_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 13.$$

Ejemplo 6 Un fabricante de alimento para perros anuncia que una lata de su producto Todo-carne proporciona los requerimientos mínimos diarios de carbohidratos y proteínas para un perro que pese un promedio de 20 libras. Los tipos disponibles de carne son res, caballo e hígado. Una onza de res cuesta 1.5¢ y contiene 0.5 onzas de carbohidratos y 0.2 onzas de proteínas. Una onza de carne de caballo cuesta 1¢ y contiene 0.6 onzas de carbohidratos y 0.3 onzas de proteínas. Una onza de hígado cuesta 2.5¢ y contiene 0.4 onzas de carbohidratos y 0.3 onzas de proteínas. Los requerimientos mínimos diarios para un perro que pese un promedio de 20 libras se estiman en 6 onzas de carbohidratos y 3.1 onzas de proteínas. ¿Qué combinación de los tres tipos de carne debe escoger el fabricante para satisfacer estos requisitos a un costo mínimo?

Solución Sean y_1, y_2, y y_3 los números de onzas de carne de res, de carne de caballo y de hígado, respectivamente, que han de usarse en el producto. Entonces el problema es:

Minimizar

$$g = 1.5y_1 + y_2 + 2.5y_3$$

sujeta a

$$0.5y_1 + 0.6y_2 + 0.4y_3 \geq 6$$
$$0.2y_1 + 0.1y_2 + 0.3y_3 \geq 3.1$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

El problema dual de máximos es

Maximizar

$$f = 6x_1 + 3.1x_2$$

sujeta a

$$0.5x_1 + 0.2x_2 \leq 1.5$$
$$0.6x_1 + 0.1x_2 \leq 1$$
$$0.4x_1 + 0.3x_2 \leq 2.5$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

La tabla simplex inicial es

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0.5	0.2	1	0	0	1.5	s_1
0.6	0.1	0	1	0	1	s_2
0.4	0.3	0	0	1	2.5	s_3
6	3.1	0	0	0	f	

Ahora se puede hacer pivoteo en la primera o en la segunda columna. Unos cuantos cálculos en calculadora muestran que si el pivoteo se hace en la componente encerrada, todos los indicadores serán no positivos después de una operación de pivoteo.

$\xrightarrow{M_1(5)}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
2.5	1	5	0	0	7.5	s_1
0.6	0.1	0	1	0	1	s_2
0.4	0.3	0	0	1	2.5	s_3
6	3.1	0	0	0	f	

$\xrightarrow{A_{1,2}(-0.1),\ A_{1,3}(-0.3),\ A_{1,4}(-3.1)}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
2.5	1	5	0	0	7.5	x_2
0.35	0	−0.5	1	0	0.25	s_2
−0.35	0	−1.5	0	1	0.25	s_3
−1.75	0	−15.5	0	0	$f - 23.25$	

La última tabla es terminal, y la solución está dada por $g = 23.25$ en $y_1 = 15.5$, $y_2 = 0$ y $y_3 = 0$. Esto quiere decir que el costo mínimo para una lata de alimento para perro es de $23\frac{1}{4}$¢. Este costo se alcanza usando $15\frac{1}{2}$ onzas de carne de res sin usar carne de caballo ni hígado.

Problemas 1.5

En los Problemas 1-10, encuéntrese la transpuesta de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En los Problemas 11-20, encuéntrese el problema dual del problema de programación lineal dado.

11. Maximizar

$$f = 2x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 7 \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$f = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 5 \\ 3x_1 - 2x_2 &\le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

13. Minimizar

$$g = 2y_1 + 3y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\ge 1 \\ y_1 + 2y_2 &\ge 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

14. Minimizar

$$g = 5y_1 + 3y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\ge 1 \\ y_1 + 2y_2 &\ge 1 \\ y_1 + y_2 &\ge 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

15. Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

16. Maximizar

$$f = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\le 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\le 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

17. Minimizar

$$g = 2y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\ge 13 \\ 4y_1 + y_2 + 2y_3 &\ge 21 \\ -3y_1 - y_2 + 4y_3 &\ge 11 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

18. Maximizar

$$W = 4x_1 - x_2 + 9x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 8 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 &\le 25 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

19. Maximizar

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 12$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

20. Minimizar

$$g = 3y_1 + y_2 + 5y_3 + 12y_4$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 10$$
$$2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \ge 14$$
$$5y_1 - 8y_2 - 3y_3 + 3y_4 \ge 5$$
$$2y_1 - y_2 - 5y_3 + 3y_4 \ge 0$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

21. Resuélvase el Problema 13 por el método simplex.

22. Resuélvase el Problema 14 por el método simplex.

23. Resuélvase el Problema 17 por el método simplex.

24. Resuélvase el Problema 20 por el método simplex.

25. Dos alimentos contienen únicamente carbohidratos y proteínas. El Alimento I cuesta 50¢ por libra y contiene 90% de carbohidratos (en peso). El Alimento II cuesta \$1 la libra y su contenido de carbohidratos es de 60%. ¿Qué cantidades de estos dos alimentos proporcionan 2 libras de carbohidratos y 1 libra de proteínas a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo por libra de esta mezcla?

26. Continuando con el Problema 25, supóngase que hay un tercer alimento disponible, cuyo costo es de \$2 la libra y con un contenido de carbohidratos del 30% y con 70% de proteínas. ¿Qué cantidades de estos tres alimentos proporcionan 2 libras de carbohidratos y 1 libra de proteínas a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo por libra de esta mezcla?

★27. En la producción de fertilizantes se combinan tres productos químicos en distintas proporciones o grados y se venden en unidades de 100 libras. Supóngase que los tres compuestos cuestan 20¢, 15¢ y 5¢, la libra, respectivamente. En todas las mezclas debe haber al menos 20 libras del primer compuesto, y la cantidad del tercer compuesto en la mezcla no debe ser mayor que la cantidad del segundo componente. ¿Cuántas libras de cada compuesto se deben agregar a una bolsa de 100 libras de fertilizantes para minimizar el costo de una bolsa de fertilizante? [*Sugerencia*: Debido a la restricción de igualdad, esto se puede escribir como un problema que involucra a sólo dos variables.]

28. Una mujer quiere diseñar un programa de ejercicios semanales, incluyendo caminata, bicicleta y natación. Para variar los ejercicios, planea invertir al menos tanto tiempo en bicicleta como en la combinación de caminata y natación. Además, quiere nadar al menos 2 horas a la semana, porque le gusta más nadar que los otros ejercicios. En caminata consume 600 calorías por hora, en la bicicleta usa 300 calorías por hora y nadando gasta 300 calorías por hora. Quiere quemar al menos 3000 calorías a la semana por medio de los ejercicios. ¿Cuántas horas debe dedicar a cada tipo de ejercicio si quiere minimizar el número de horas invertidas?

CAPÍTULO **2**

Teoría de juegos

2.1 Juegos entre dos personas: Estrategias puras

La teoría moderna de juegos fue desarrollada en la década de 1940 por John von Neumann y Oskar Morgenstern* para dar un marco matemático general a la economía. Las ideas principales de esta teoría se extrajeron de juegos bien conocidos como el ajedrez, el bridge, el solitario, dominó y damas. La teoría general se desarrolló sin hacer referencia concreta a ningún juego en particular. La teoría de juegos se puede aplicar al análisis de cualquier comportamiento competitivo, incluyendo los juegos ordinarios, la economía, la guerra y la competencia biológica. En el estudio de la competencia biológica, la teoría de juegos proporciona un marco conceptual útil para entender el comportamiento.††

Muchos de los juegos más conocidos tienen oponentes o competidores que deben hacer una secuencia de movimientos de acuerdo con las reglas del juego. En algunos juegos, los movimientos sucesivos se hacen con una información completa sobre las oportunidades del oponente (como en el ajedrez). En otros juegos, los movimientos se hacen con información incompleta (como en el bridge). Un jugador puede decidir sus movimientos al azar (por ejemplo lanzando una moneda) o de manera deliberada considerando las jugadas posibles. El juego puede terminar después de un número finito de movimientos con un ganador y un perdedor. Generalmente hay un premio al ganador del juego,

---

* John von Neumann y Oskar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1944).

†† R.C. Lowontin, "Evolution and the Theory Games," *Journal of Theoretical Biology*, 1(1961): 382-403.

L.B. Slobodkin, "The Strategy of Evolution," *American Scientist*, 52(1964): 342-357.

que puede ser en efectivo o la mera satisfacción de haber ganado. (El premio que obtiene una especie en el juego ecológico es la posibilidad de seguir jugando).

Un juego se caracteriza por sus reglas. En algunos casos, el juego puede ser tan complicado que resultará difícil descubrirlas. Considérese el problema de determinar las reglas del ajedrez viéndolo jugar. Después de cuatro o cinco juegos, se habrán descubierto las reglas principales, pero sería necesario observar muchos más partidos para determinar el resto de las reglas. De manera similar, se pueden considerar las complejas interacciones que se dan en un sistema social humano o de un sistema ecológico como un juego entre muchos jugadores y reglas difíciles de entender de manera completa.

Cuando ya se conocen las reglas de un juego, el problema consiste en determinar la manera que tienen los jugadores de escoger sus movimientos y las consecuencias de estos movimientos. En otras palabras, los jugadores deben determinar sus estrategias analizando las reglas del juego. El resultado final de un juego ordinariamente depende de manera crítica de la selección de movimiento de todos los jugadores. En juegos complejos, puede ser imposible analizar todas las posibilidades y, en ese caso, los jugadores deben basarse en la experiencia, la intuición, o en simples pruebas y errores para determinar sus movimientos.

En esta sección y en la siguiente, se estudiará un juego simple entre dos personas llegando a un nivel considerable de detalle. Los conceptos que se presentan y los resultados deducidos para este juego forman un modelo de análisis para juegos más generales. Empezamos con tres ejemplos de juegos entre dos personas.

Ejemplo 1 **Monedas Emparejadas.** Dos jugadores, R y C, colocan cada uno una moneda frente a ellos, cubriéndola, y determinan si el lado expuesto de la moneda es cara (H) o cruz (T). Ninguno de los jugadores sabe al principio qué lado de la moneda escogió el otro jugador. Entonces se descubren las monedas. Si las dos muestran el mismo lado (las dos son caras o cruces), el jugador R paga \$1 al jugador C. Si las monedas muestran lados distintos, el jugador C paga \$1 al jugador R.

Este juego se puede describir en términos de una **matriz de pagos**.

$$\begin{array}{cc} & \textit{Jugador C} \\ & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ \textit{Jugador R} \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si, por ejemplo, el jugador R escoge A y el jugador C escoge S, el jugador R gana 1 unidad (en este caso \$1). Si los dos jugadores escogen A, pierde una unidad el jugador R.

Ejemplo 2 **Un Juego de Negocios.** Los únicos dos supermercados en Ciudad Central son Grandes Ahorros y Alimentos El Gigante. El mercado al menudeo se surte

Tabla 1 (Secc. 2.1) *Alternativas de mercadeo para supermercados en competencia*

Alternativas para Grandes Ahorros \ Alternativas para Alimentos El Gigante	A Aumentar precios	M Mantener precios	D Disminuir precios
(*A*) Aumentar precios	2	−2	−7
(*M*) Mantener precios	6	0	−3
(*D*) Disminuir precios	10	5	3

de estas dos empresas. Debido al incremento en los costos, Grandes Ahorros quiere aumentar sus precios. Pero teme que si lo hace perderá parte de las ventas en favor de Alimentos El Gigante. Por otra parte, si disminuye sus precios, mientras Alimentos El Gigante aumenta los suyos, el aumento resultante de las ventas compensará con creces las utilidades menores por artículo. Cada empresa tiene tres alternativas: aumentar los precios, mantenerlos sin cambio, y reducir los precios.

Grandes Ahorros puede controlar sus propios precios pero no tiene control en lo que haga Alimentos El Gigante. Para ayudarse en la decisión, contrata a un analista de mercados independiente, que obtiene los datos de la Tabla 1. Los números de la tabla representan aumentos o disminuciones porcentuales. Por ejemplo, si Grandes Ahorros mantiene sus precios y Alimentos el Gigante los disminuye, Grandes Ahorros *perderá* el 3% del número total de sus clientes en favor de Alimentos El Gigante. Si Grandes Ahorros disminuye sus precios y Alimentos El Gigante los aumenta, Grandes Ahorros ganará el 10% del mercado.

Estos datos se pueden representar en la siguiente matriz de pagos.

$$\begin{array}{cc} & \text{Alimentos El Gigante} \\ & \begin{array}{ccc} A & M & D \end{array} \\ \text{Grandes Ahorros} \begin{array}{c} A \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 6 & 0 & -3 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 3 **Juego de Guerra.*** Durante la Segunda Guerra Mundial, ocurrió una batalla crítica, la Batalla del Mar de Bismarck, para controlar Nueva Guinea. El jefe

* Este ejemplo se adaptó de uno que figura en *Games and Decisions* de R. Duncan Luce y Howard Raiffa, (Nueva York: Wiley, 1958) pp. 64-65.

de los aliados, el general Kenney, tenía reportes de la inteligencia que indicaban que los japoneses harían movimientos de tropa y convoyes del puerto de Rabaul, en la punta oriental de la isla de Nueva Bretaña, a Lae, que está justo al este de Nueva Bretaña en Nueva Guinea. El jefe de los japoneses tenía dos alternativas: tomar una ruta pasando por el norte de Nueva Bretaña, o bien otra por el sur de Nueva Bretaña. En la ruta por el norte, era casi seguro que la visibilidad sería muy mala, mientras que en la ruta por el sur era probable que el clima estuviera despejado. El viaje les tomaría tres días por cualquiera de las rutas.

El general Kenney tenía la opción de concentrar la mayor parte de sus aviones de reconocimiento en una ruta o en la otra. Una vez localizado, el convoy podría ser bombardeado hasta su llegada a Lae. En días de bombardeo, el personal de Kenney estimaba para las distintas opciones los resultados que se dan en la Tabla 2.

Tabla 2 (Secc. 2.1) *Alternativas para los japoneses y los aliados (número de días de bombardeo)*

Opciones para los aliados \ Opciones para los japoneses	Ruta norte	Ruta sur
Ruta norte	2	2
Ruta sur	1	3

Una vez más, estas opciones se pueden representar por medio de una matriz de pagos.

Opciones para los japoneses

$$\textit{Opciones para los aliados}\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} N & S \end{array} \\ \begin{array}{c} N \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Qué rutas se debieron escoger? Si el convoy japonés tomara la ruta norte, se expondría a 1 o 2 días de bombardeo. Si tomara la ruta sur, se tendría que enfrentar con 2 o 3 días de bombardeo. Parece mejor tomar la ruta norte. Desde el punto de vista del general Kenney, si concentra sus fuerzas en el norte, garantizaría al menos 2 días de bombardeo; en el sur sólo podría garantizar 1 día de bombardeo.

Resulta que los dos comandantes escogieron la ruta norte y, como se verá próximamente, estas selecciones son consistentes con las previstas por la teoría de juegos.

Estos ejemplos conducen a la siguiente definición.

Juego de matriz Sea $A = (a_{ij}$ una matriz $m \times n$. Considérese un juego determinado por A entre dos competidores R y C (renglones y columnas) de acuerdo a las siguientes reglas.

1. En cada movimiento del juego, R escoge uno de los m renglones de A, y C escoge una de las n columnas de A. Estas selecciones se hacen simultáneamente, y ninguno de los jugadores sabe de antemano la elección (o movimiento) del otro competidor.
2. Si R escoge el renglón i y C escoge la columna j, C debe pagar a R la cantidad a_{ij}. Si a_{ij} es negativo quiere decir que C recibe una cantidad $-a_{ij}$ de R.

Este es el **juego de matriz** $m \times n$ determinado por la matriz $m \times n$ denotada por $A = (a_{ij})$.

El juego de matriz puede terminar después de un movimiento o puede continuar durante cualquier número de movimientos. La matriz $A = (a_{ij})$ del juego se llama **matriz del juego** o **matriz de pagos.**

Los ejemplos que siguen ilustran la manera de analizar los juegos de matriz.

Ejemplo 4 Describir los juegos de matriz correspondientes a cada una de las siguientes matrices de pago.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución (a) En este juego de matriz 2×2, R y C tienen dos opciones cada uno. Si R escoge el primer renglón, R gana 1 si C escoge la primera columna, o 2 unidades si C escoge la segunda columna. En el caso de que R escoja el segundo renglón, pierde 2 unidades si C escoge la primera columna y gana 3 unidades si C escoge la segunda columna. Si C juega racionalmen-, escogerá la primera columna. En ese caso, R debería escoger el primer renglón. Con estas opciones, R tiene la garantía de ganar al menos una unidad y C tiene la garantía de no perder más de 1 unidad.

(b) En este juego de matriz 3×4, R tiene tres opciones y C tiene cuatro opciones. Analizando las opciones posibles, es claro que la mejor opción de C consiste en escoger la segunda columna. Con esta opción, C tiene la garantía de no perder. La mejor opción de R está en la elección del primer renglón. Con estas selecciones de entre las opciones posibles, no se da ningún pago entre los jugadores.

El juego general de matriz $m \times n$ es un ejemplo de un **juego de suma cero entre dos personas**, ya que son dos los que compiten y la suma de sus ganancias es cero. Las ganancias de un competidor equivalen a las pérdidas del otro.

Los dos jugadores de un juego de la matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ deben analizar sus posibles movimientos y decidir en qué renglones o columnas jugar en movimientos sucesivos. Una **estrategia pura** para R (o C) equivale a la decisión de jugar en el mismo renglón (o columna) en cada movimiento del juego. Se dice que el jugador R (o C) está usando una **estrategia mixta** si escoge más de un renglón (o columna) en movimientos distintos del juego. Si ambos jugadores usan estrategias puras, el resultado de cada movimiento es exactamente el mismo y el juego es completamente predecible. Por ejemplo, si R siempre escoge el renglón i y C siempre escoge la columna j, en cada juego R recibe a_{ij} unidades de C. Cuando se usan estrategias mixtas por alguno de los jugadores o por ambos, el juego es más complicado. Por ejemplo, si R decide jugar una estrategia mixta, hará su selección aleatoriamente de entre los renglones para aumentar sus ganancias.

Un poco de teoría de probabilidades

Supóngase que se lleva a cabo un experimento. A cada resultado posible E del experimento, le asignamos un número entre 0 y 1. Este número se llama la **probabilidad** de que se dé el resultado E y se denota por P(E). Debe enfatizarse que $0 \leq P(E) \leq 1$. Por ejemplo, si se lanza al aire una moneda no cargada, entonces P(cara) = P(cruz) = 1/2. Como otro ejemplo, una baraja tiene 52 cartas. De éstas, 13 son corazones. Así que si se escoge al azar una carta de la baraja, se tiene que

$$\text{P(corazón)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

En un experimento, la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados es 1.

Claro que no todas las probabilidades se computan de manera tan sencilla. Se han escrito libros completos sobre la materia. Sin embargo, no se necesita tener la habilidad de calcular probabilidades para entender el papel que tiene la teoría de probabilidades en la teoría de juegos.

Un **vector de probabilidades** es un vector con componentes no negativas y cuya suma de las componentes es uno. Los siguientes son vectores de probabilidad: (1/2, 1/2), (1/4, 1/2, 0, 1/4) y (0.11, 0.23, 0.17, 0.08, 0.32, 0.09).

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número a cada posible resultado de un experimento. El **valor esperado** de un valor aleatorio es un promedio pesado de los valores que puede tomar la variable aleatoria. Para calcular el valor esperado, se multiplica cada valor de la variable aleatoria por la probabilidad de obtener ese valor. Por ejemplo, supóngase que los valores posibles de la variable aleatoria son 7, 5, −3 y 10, con probabilidades P(7) = 1/8, P(5) = 5/16, P(−3) = 1/2 y P(10) = 1/16. (Obsérvese que estas probabilidades suman 1.)

Se tiene

$$\begin{aligned}\text{Valor esperado} &= 7P(7) + 5P(5) + (-3)P(-3) + 10P(10)\\ &= 7 \cdot \frac{2}{16} + 5 \cdot \frac{5}{16} - 3 \cdot \frac{8}{16} + 10 \cdot \frac{1}{16}\\ &= \frac{14 + 25 - 24 + 10}{16} = \frac{25}{16}\end{aligned}$$

Regresamos a nuestra discusión de la estrategia.

¿Cuándo se usará una estrategia pura y cuándo una mixta? Para dar respuesta a estas preguntas necesitamos una mayor precisión sobre lo que entendemos por estrategia.

Estrategia Una **estrategia** para R en el juego de la matriz A $= (a_{ij})$ de $m \times n$ es un vector de probabilidad $\mathbf{p} = (p_1\ p_2 \ldots p_m)$ donde p_i es la probabilidad de que R juegue escogiendo el renglón i para $i = 1, 2, \ldots, m$. Una estrategia para C es un vector de probabilidad de n componentes

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

donde q_j es la probabilidad de que C juegue escogiendo la columna $j = 1, 2, \ldots, n$.

Los jugadores R y C deben escoger sus estrategias **p** y **q**. En otras palabras, deben escoger las probabilidades p_i y q_j que determinen la frecuencia con la que escogerán los distintos renglones y columnas. Por ejemplo, si R y C escogen el primer renglón y la primera columna de A en todos sus movimientos, están jugando las estrategias puras $\mathbf{p} = (1 \quad 0 \ldots 0)$ y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si R y C juegan en todos los renglones y columnas con probabilidades iguales, están jugando las estrategias mixtas $\mathbf{p} = (1/m \quad 1/m \ldots 1/m)$ y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Cada vector de probabilidad de m componentes es una posible estrategia para R, y cada vector de probabilidad de n componentes es una posible estrategia para C.

Para ver cuándo se podría usar una estrategia pura, considérese el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5 Considérese el juego de matriz cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué estrategias deben adoptar R y C?

Solución R jugará de manera que la mínima cantidad que pueda ganar sea tan grande como sea posible (vuelva a leer esto último). Si R juega en el renglón 1, ganará al menos 2 unidades, independientemente de qué columna escoja C. Si R juega en el renglón 2, ganará al menos 4 unidades. De igual forma, si R juega en el renglón 3 o en el renglón 4, ganará al menos -1 o 1 unidad, respectivamente. Así que su mayor ganancia mínima será de 4 unidades.

Pero ¿cómo debe jugar C? C quiere minimizar su pérdida máxima. Si C juega en la columna 1, puede perder hasta 7 unidades; C puede perder en la columna 2 a lo más 6 unidades y puede perder en la columna 3 hasta 4 unidades. Escribimos estos números a continuación:

$$\begin{array}{cc|c} & \text{C} & \text{Mínimo del renglón} \\ \text{R} & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \longleftarrow 2 \\ \longleftarrow 4 \\ \longleftarrow -1 \\ \longleftarrow 1 \end{array} \\ \text{Máximo de la columna} \longrightarrow & \begin{array}{ccc} 7 & 6 & 4 \end{array} & \end{array}$$

El número 4 en la posición 2, 3 es un mínimo en su renglón y máximo en su columna. Un número con esas propiedades se llama un **punto silla** para la matriz de pagos A. En la Sección 2.2 se muestra que cuando un número a_{ij} es un punto silla, las estrategias óptimas para R y C son, para R, jugar en el renglón i y para C, jugar en la columna j. Así, en el ejemplo, R debe adoptar la estrategia pura de jugar en el segundo renglón: $\mathbf{p} = (0\ 1\ 0\ 0)$, y C debe adoptar la estrategia pura de jugar en la tercera columna

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Antes de abandonar este ejemplo, hacemos una observación que puede simplificar los cálculos. Cada número en el primer renglón de A es menor o igual que la componente correspondiente en el segundo renglón de A. Es decir, $6 \leq 6$, $2 < 5$ y $3 < 4$. Por lo tanto R *nunca* tendrá que escoger el primer renglón porque para él la elección del segundo renglón siempre será una opción al menos tan buena como la elección del primer renglón. El primer renglón constituiría lo que se llama un **renglón recesivo**. Similarmente, cada número de la primera columna de A es mayor que el número correspondiente en la tercera columna de A. Es decir, $6 > 3$, $6 > 4$, $7 > 2$ y $2 > 1$. Así que C nunca escogerá la primera columna, porque si lo hiciera, perdería ciertamente más que si escogiera la tercera columna (recuérdese que la ganancia de R es la pérdida de C). La columna 1 es una **columna recesiva.**

Se pueden eliminar los renglones y las columnas recesivos en el análisis subsecuente. Al hacerlo, se obtiene la nueva matriz de pagos A'.

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que antes, 4 es un mínimo en su renglón y un máximo en su columna y por lo tanto un punto silla de A'. El segundo renglón es recesivo, por lo que se puede reducir aún más la matriz para obtener $A'' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; entonces $A''' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ya que la primera columna de A'' es recesiva. Continuando de esta manera, se ve que el segundo renglón de A''' es recesivo, por lo que $A^{iv} = (4)$. Evidentemente, hasta aquí podemos llegar.

Bosquejamos ahora una estrategia general para jugar un juego de matriz en los casos en que se presenta un punto silla.

Determinación de las estrategias puras para un juego de matriz

Paso 1. Eliminar todos los renglones recesivos y todas las columnas recesivas.

Paso 2. Encontrar el número mínimo en cada renglón. Este se llama **mínimo del renglón.**

Paso 3. Encontrar el número máximo en cada columna. Este se llama **máximo de la columna.**

Paso 4. Buscar un **punto silla**. Este es un número que es a la vez un mínimo de renglón y un máximo de columna.* Si a_{ij} es un punto silla, R deberá jugar en el renglón i y C deberá jugar en la columna j. En este caso se dice que el juego de matriz está **determinado estrictamente**.

Paso 5. Si no hay ningún punto silla, R o C (o ambos) debe usar una estrategia mixta. El juego en ese caso no está determinado estrictamente.

Observación. En el Problema 23 se pide demostrar que si a_{ij} y a_{kl} son puntos silla de A, entonces $a_{ij} = a_{kl}$. En ese caso, se obtendrá el mismo resultado en el Paso 4 al usar cualquiera de los puntos silla.

* A veces se llama a un punto silla solución **minimax** de un juego de matriz.

Ejemplo 6 Determinar si el juego definido por la matriz de pagos dada es estrictamente determinado. En caso afirmativo, determinar las estrategias óptimas para R y C.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

Solución (a) Ya que cada número en el reglón 3 es menor o igual que el número correspondiente en el renglón 2, el renglón 3 es recesivo. De manera semejante, cada número en la columna 1 es mayor que el número correspondiente en la columna 2, por lo que la columna 1 es recesiva. Eliminando el renglón 3 y la columna 1, se obtiene

$$\begin{array}{c|c} & \text{Mínimos de renglón} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \\ \text{Máximos de columna} \longrightarrow \;\; 1 \quad 5 & \end{array}$$

Puede verse que 1 es a la vez mínimo en su renglón y máximo en su columna, por lo que 1 es un punto silla y el juego es estrictamente determinado. Como 1 es la componente 2,2 de la matriz de pagos, las estrategias óptimas son $\mathbf{p} = (0\ 1\ 0)$ y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, R escoge el renglón 2 y C escoge la columna 2.*

(b) No existen renglones ni columnas recesivos. Volviendo a escribir la matriz de pagos se tiene

$$\begin{array}{c|c} & \text{Mínimos de renglón} \\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \\ \text{Máximos de columna} \longrightarrow \;\; 5 \quad 6 \quad 6 & \end{array}$$

En este caso no hay ningún punto silla porque no existe un número que sea a la vez un mínimo en su renglón y un máximo en su columna. El juego no está estrictamente determinado y se requiere usar una estrategia mixta.

(c) El renglón 2 es recesivo, así como la columna 1. La matriz de juego se reduce a $(0 \quad 5)$ en donde 0 es un punto silla. Obsérvese que la matriz de

---

* Se observa también que en $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la segunda columna es recesiva por lo que la matriz se reduce a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pero ahora el primer renglón es recesivo y la nueva reducción termina con la matriz 1×1 (1). Este es el punto silla.

pagos tiene dos ceros, pero sólo uno de ellos, el que está en la posición 1,2, es un punto silla. El juego está estrictamente determinado y las estrategias óptimas son **p** (1 0) y

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así que R juega en el renglón 1 y C juega en la columna 2.

Ejemplo 7 En el juego de las monedas emparejadas del Ejemplo 1, la matriz de pagos es

$$\begin{array}{c|cc|c} & H & T & \text{Mínimos de renglón} \\ H & -1 & 1 & -1 \\ T & 1 & -1 & -1 \\ \text{Máximos de columna} \rightarrow & 1 & 1 & \end{array}$$

No hay puntos silla, por lo que se requiere una estrategia mixta. En la siguiente sección se encontrará la estrategia próxima.

Ejemplo 8 En el juego de negocios del Ejemplo 2, la matriz de pagos es

$$\begin{array}{c|ccc|c} & I & S & D & \text{Mínimos de renglón} \\ I & 2 & -2 & -7 & -7 \\ S & 6 & 0 & -3 & -3 \\ D & 10 & 5 & 3 & 3 \\ \text{Máximos de columna} \rightarrow & 10 & 5 & 3 & \end{array}$$

En este caso 3 es un punto silla, y así Grandes Ahorros debe jugar en el renglón 3 y Alimentos El Gigante debe jugar en la columna 3. Esto quiere decir que si los datos son correctos, los dos deben disminuir los precios. Obsérvese que son recesivos los renglones 1 y 2 y las columnas 1 y 2, por lo que la matriz del juego se reduce a la matriz 1×1 de pagos (3).

Ejemplo 9 En el juego de guerra del Ejemplo 3, la matriz de pagos es

$$\begin{array}{c} \\ \text{Norte} \\ \text{Sur} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Norte} & \text{Sur} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se presenta un punto silla en la posición 1,1, de donde se deduce que los dos comandantes deben escoger la ruta del norte. De hecho eso es lo que ocurrió.

En la siguiente sección se usará un teorema de von Neumann para ver por qué siempre que haya un punto silla se deben usar estrategias puras.

Problemas 2.1

En los Problemas 1-10 se da la matriz de pagos para un juego. Establézcase si el juego está determinado estrictamente y, en caso afirmativo, encuéntrense las estrategias óptimas para R y C.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -4 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -4 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **10** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los Problemas 11-20, formúlese el problema dado como un juego de matriz entre dos personas y escríbase la matriz de pagos para ese juego. Si el juego está estrictamente determinado, encuéntrese la estrategia óptima para cada jugador.

11. Dos personas, a la vez, muestran un dedo o dos. Si el número total de dedos mostrados es par, R le paga a C un número de dólares igual al número total de dedos mostrados. Si es impar, C le paga a R ese número de dólares.

12. Repítase el Problema 11, con la diferencia de que cada jugador muestra cuatro o cinco dedos.

13. Repítase el Problema 11, con la diferencia que cada jugador muestra uno, dos, o tres dedos.

14. Repítase el Problema 11, con la diferencia que cada jugador muestra uno, dos, tres, cuatro o cinco dedos.

15. En un pequeño pueblo compiten en negocios dos expendios de comestibles. El A determinó que si aumenta sus precios, perderá el 1% del mercado si B aumenta sus precios, el 3% del mercado si B no cambia sus precios, y el 11% del mercado si B baja sus precios. Si A conserva sus precios anteriores, gana el 4% si B aumenta sus precios y pierde el 5% si B disminuye sus precios. Finalmente, si A disminuye sus precios, gana el 9% si B aumenta los suyos, gana el 3% si B conserva los suyos, y pierde el 1% si B, a su vez, disminuye los suyos.

16. Se está construyendo una nueva zona comercial en Pueblo Central. Hay dos tiendas de ropa, Alamán y Juárez, que compiten en Pueblo Central y en las áreas circundantes. Si una de las tiendas se traslada a la nueva zona comercial, ganará el 80% del mercado. Si se trasladan las dos, continuarán con partes iguales del mercado.

17. Un distrito se divide en dos regiones. Una tiene 60,000 votantes y la otra tiene 40,000 votantes. Quedan dos días de campaña y cada uno de los dos candidatos puede gastar 0, 1 o 2 días en cada región. Los analistas de política estiman que si los candidatos dedican el mismo número de días a una región, cada uno obtendrá la mitad de los votos de ésa. Pero si un candidato le dedica 1 o 2 días más a una región que su oponente, obtendrá el 53% o el 57% de los votos de esa región, respectivamente.

18. Los experimentos han demostrado que dos especies de pájaros pueden reconocer los números hasta el 7. Se propone el siguiente experimento: Se determinará la dieta de un *raven* R y la de un *parakeet* C por medio de una matriz de juegos. A cada pájaro se le van a mostrar tres tarjetas, con 2, 4 y 7 puntos. Si los dos pájaros escogen la misma tarjeta, R recibirá de la dieta de C un número de gusanos igual al doble del número de puntos en la tarjeta. Si escogen tarjetas distintas, se le dará a C, de la dieta de R un número de gusanos igual a la diferencia entre los números de puntos en las tarjetas. Supóngase que los movimientos se hacen independientemente.

19. Pedro quiere llamar por teléfono a su novia Roberta. Decide llamar de noche, cuando el precio de una llamada de 3 minutos de teléfono a teléfono es de \$2 y una llamada de 3 minutos persona a persona cuesta \$4.50. Si no hay nadie en casa, sabe que la puede encontrar al día siguiente en la oficina donde trabaja y tendrá que pagar la tarifa diurna de \$3 por una llamada de 3 minutos de teléfono a teléfono. Si le llama teléfono a teléfono y Roberta está en casa, se ahorra dinero. Por otra parte, si contesta la compañera de cuarto de Roberta cuando ella no está en casa, pierde dinero.

20. Un agricultor cultiva tomates. Mientras mayor sea el tiempo que permanecen los tomates en el campo, se ponen más rojos y aumenta el precio al que se puede vender el bushel. Por otra parte, si se presentan las heladas, se echarán a perder los tomates, disminuyendo el precio promedio por bushel. Si recoge sus tomates el 25 de agosto, puede estar seguro de que no les habrán afectado las heladas y el precio con el que puede contar es de \$8 el bushel. Si se espera hasta el 5 de septiembre, obtendrá \$11 por bushel si no hay heladas o \$5 por bushel si hay heladas.

21. Una empresa llantera tiene un pleito con su sindicato. Cada grupo (administración y fuerza laboral) tiene una posible elección entre cuatro alternativas: rígida, inflexible; razonable, basada en la lógica; dejar el asunto en manos de los abogados para que encuentren una solución legal al problema; conciliatoria. Un experto en relaciones laborales determina que la empresa aumentará los salarios de una manera que depende tanto de la decisión adoptada por la empresa, como de la que tomen los obreros. Las distintas posibilidades se dan en la tabla siguiente.

Aumento de sueldo semanal en la empresa por obrero (en dólares)

Actitud de la empresa \ Actitud del sindicato	Rígida	Lógica	Legal	Conciliatoria
Rígida	20	24	15	17
Lógica	35	30	26	28
Legal	15	23	20	30
Conciliatoria	40	35	23	28

¿Qué debe hacer la empresa y qué debe hacer el sindicato?

22. La Universidad de Montana (UM) juega futbol todos los años con la Montana State University (MSU). El *quarterback* de UM tiene en un *down* una opción entre cinco jugadas: corrida del *halfback*, corrida del *fullback*, pase corto, pase largo y jugada de atracción. La defensiva de MSU tiene cuatro opciones: defensa normal, defensa contra un pase largo, defensa contra un pase corto y *blitz*. Un *coach* estima el número de yardas que se podrían avanzar con todas las combinaciones de las opciones ofensivas y defensivas. Estos valores estimados se dan en la tabla.

Yardas esperadas de avance para la defensa

UM \ MSU	Normal	Defensa (pase corto)	Defensa (pase largo)	Blitz
Carrera de HB	2	4	8	6
Carrera de FB	5	5	7	9
Pase corto	4	0	6	−2
Pase largo	8	3	0	−4
Atracción	−1	2	4	10

¿Qué jugada debe hacer cada equipo?

23. Demostrar que si una matriz de pagos tiene dos puntos silla a_{ij} y a_{kl}, entonces $a_{ij} = a_{kl}$. [*Sugerencia*: Escríbase la matriz A y explíquese la consecuencia del hecho de que a_{ij} es el mínimo en el renglón i y el máximo en la columna j. Hágase lo mismo para a_{kl}.]

2.2 Juegos entre dos personas: Estrategias mixtas

En la Sección 2.1 se mostró la manera de determinar las estrategias óptimas cuando un juego está estrictamente determinado. Para demostrar que una estrategia es óptima, se necesita la respuesta a la pregunta "¿óptima respecto a qué?". En esta sección se presenta la manera de calcular las ganancias esperadas para los jugadores en un juego. Entonces una estrategia es óptima para R si optimiza las ganancias de R. Empezamos con un ejemplo.

Ejemplo 1 Considérese el juego cuya matriz de pagos es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la ganancia esperada para R si R adopta la estrategia $\mathbf{p} = (1/3 \quad 2/3)$ y C adopta la estrategia $\mathbf{q} = (2/5 \quad 3/5)$?

Solución En este caso R tiene cuatro ganancias posibles: 3, 2, −2 y 4. Por ejemplo, recibirá 3 unidades, si escoge el primer renglón (con una probabilidad de 1/3) y C escoge la primera columna (con una probabilidad de 2/5). Como se supone que ni R ni C saben cuál es la elección de su oponente, los eventos {primer renglón} y {primera columna} son independientes. Esto quiere decir que la probabilidad de cada evento no se ve afectado por la ocurrencia o no ocurrencia del otro evento. Para decirlo en otras palabras, la probabilidad de que R escoja el primer renglón es la misma probabilidad ya sea que C escoja la primera columna o no. Cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de que ocurran los dos es el producto de las probabilidades de que ocurra cada evento, por separado. Es decir, si A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

En nuestro caso tenemos

$$P(\text{primer renglón} \cap \text{primera columna}) = P(\text{primer renglón}) \cdot P(\text{primera columna}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{15}$$

y por lo tanto

$$P(3) = P(\text{ganancia de } 3) = \tfrac{2}{15}$$

Similarmente

$$P(2) = P(\text{primer renglón} \cap \text{segunda columna}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5},$$

$$P(-2) = P(\text{segundo renglón} \cap \text{primera columna}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{15},$$

y

$$P(4) = P(\text{segundo renglón} \cap \text{segunda columna}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{5}.$$

Ahora bien, si $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ representa el valor esperado de una variable aleatoria que toma valores iguales a las ganancias de R, se tiene

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 3P(3) + 2P(2) + (-2)P(-2) + 4P(4)$$

$$= 3 \cdot \tfrac{2}{15} + 2 \cdot \tfrac{1}{5} - 2 \cdot \tfrac{4}{15} + 4 \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{28}{15} \approx 1.87$$

Ahora observamos que

$$\mathbf{p}A\mathbf{q} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\ \frac{8}{5}\end{pmatrix} = \frac{12}{15} + \frac{16}{15} = \frac{28}{15} \approx 1.87$$

El Ejemplo 1 se puede generalizar.

Ganancia esperada Supóngase que R usa la estrategia **p** y que C usa la estrategia **q** para el juego cuya matriz de pagos es la matriz A de $m \times n$. Entonces la **ganancia esperada** para R, denotada por $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, está dada por

$$\boxed{E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{ganancia esperada} = \mathbf{p}A\mathbf{q}.} \qquad (1)$$

Nota. Como A es una matriz $m \times n$ y **q** es un vector de n componentes (es una matriz $n \times 1$), el producto A**q** es una matriz $m \times 1$ y **p**A**q** es, por lo tanto, una matriz $(1 \times m) \times (m \times 1) = 1 \times 1$, o sea, simplemente un número real.

Ejemplo 2 ¿Cuál es la ganancia esperada para R en el juego de matriz 3×4

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

(a) si R adopta la estrategia $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ y C adopta la estrategia $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$?

(b) si R y C escogen el segundo renglón y la tercera columna respectivamente?

Solución (a) $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{11}{8}\\ -\frac{3}{8}\end{pmatrix} = \frac{7}{8} = 0.875$$

(b) Aquí $\mathbf{p} = (0 \quad 1 \quad 0)$ y $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1.$$

Está claro que ésta es la componente 2, 3 de A.

Todavía queda sin resolver la pregunta básica: ¿Cómo hacen R y C para escoger sus estrategias? Esta pregunta se responde en parte por un resultado fundamental descubierto por von Neumann.

Teorema de Von Neumann

Para un juego cuya matriz de $m \times n$ es A, existen estrategias $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{q}_0$ y un número v tal que $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \geq v$ para cualquier estrategia $\mathbf{q}$ y $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \leq v$ para cualquier estrategia $\mathbf{p}$. Las estrategias $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{q}_0$ se llaman **estrategias óptimas** para R y C, respectivamente y el número v se llama **valor del juego**.

¿Por qué son óptimas $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{q}_0$? Porque si R elige $\mathbf{p}_0$, él sabe que finalmente ganará v unidades. Si escoge cualquier otra estrategia, C puede escoger $\mathbf{q}_0$ y asegurar que R ganará a lo más v unidades. Así, suponiendo que C juega prudentemente, R puede hacerlo mejor optando por la estrategia $\mathbf{p}_0$. Un razonamiento similar muestra que la estrategia óptima para C es $\mathbf{q}_0$.

Utilizando el teorema de Von Neumann, es posible demostrar que

> si a_{ij} es un punto silla, entonces el valor del juego es a_{ij} y las estrategias óptimas son estrategias puras de jugar el renglón i y la columna j con probabilidad de 1.

Esto justifica lo que hicimos en la última sección.

El teorema de Von Neumann es limitado en el sentido de que indica cuáles son las estrategias óptimas y cuál es el valor del juego, pero no dice cómo calcularlos. Resulta que es muy fácil calcularlas cuando la matriz es de 2×2. Otros casos presentan mayor dificultad y serán discutidos en la Sección 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Estrategias óptimas para un juego de matriz 2 x 2

Si la matriz en (2) no es estrictamente determinada, las estrategias óptimas para R y C son

$$\boxed{\mathbf{p}_0 = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\right)} \tag{3}$$

y

$$\boxed{\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\[2ex] \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{pmatrix}.} \tag{4}$$

El valor del juego es

$$\boxed{v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.} \tag{5}$$

En el Problema 44 se pide demostrar por qué son válidas las ecuaciones (3), (4) y (5).

Ejemplo 3 Determinar las estrategias óptimas y el valor en el juego de emparejar monedas del Ejemplo 2.1.1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces $a_{11} = -1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = -1$ y, de (3), (4), y (5),

$$\mathbf{p}_0 = \left(\frac{-1-1}{-1-1-1-1} \quad \frac{-1-1}{-1-1-1-1}\right) = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{-1-1}{-1-1-1-1} \\[2ex] \dfrac{-1-1}{-1-1-1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$v = \frac{(-1)(-1) - (1)(1)}{-1-1-1-1} = 0.$$

Así, en este juego muy simple, R y C optan mejor por cara o cruz con igual probabilidad. El valor de este juego es cero.

Juego justo Un juego es justo si su valor es cero.

El juego de emparejar monedas es un ejemplo de juego justo.

Ejemplo 4 En el juego de guerra del Ejemplo 2.1.3, modifiquemos las hipótesis para obtener la siguiente tabla.

Tabla 1 *Opciones para los japoneses y los aliados (Número de días de bombardeo)*

Opciones para los aliados \ Opciones para los japoneses	Ruta norte	Ruta sur
Ruta norte	2	1
Ruta sur	1	3

La matriz del juego es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y no hay punto silla, por lo que el juego no es estrictamente determinado. Tenemos que $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1 = a_{21}$ y $a_{22} = 3$. Así que

$$\mathbf{p}_0 = \left(\frac{3-1}{2+3-1-1} \quad \frac{2-1}{2+3-1-1} \right) = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right),$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{3-1}{2+3-1-1} \\ \dfrac{2-1}{2+3-1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y

$$v = \left(\frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{2+3-1-1} \right) = \frac{5}{3}.$$

Esto significa que si este juego se repitiera muchas veces, cada comandante debería escoger la ruta norte 2/3 de las veces y la ruta sur 1/3 de las veces. Habría, en promedio, 5/3 días de bombardeo. Claro que este procedimiento no se puede hacer más de una vez. Por lo tanto, la interpretación correcta del vector $\mathbf{p}_0 = (2/3 \quad 1/3)$ es que el general Kenney debe escoger el norte con una probabilidad de 2/3. Esto lo podría hacer, por ejemplo, colocando dos N y una S en una caja y escogiendo una letra al azar. Su número esperado de días de bombardeo sería de 5/3, aunque, claro está, sólo podría tener 1, 2 o 3 días de bombardeo.

Ejemplo 5 **Asignación de Riesgo a Procedimientos Médicos.** Como es bien sabido, muchos procedimientos médicos involucran un riesgo no despreciable para el paciente y sólo se deben llevar a cabo cuando el mismo se expone a un riesgo mayor si no se aplica el tratamiento. ¿Cómo puede determinarse qué riesgo es mayor en una situación dada? Este problema es complicado aún más cuando no hay una completa certeza de que el paciente tiene la enfermedad que se sospecha. Por ejemplo, a veces se emplea la cirugía para extraer tumores aun cuando la probabilidad es pequeña de que el tumor será maligno. ¿Qué tan grande debe ser esta probabilidad para que deba recomendarse la cirugía?

Para analizar esta cuestión, supóngase que la probabilidad de que un paciente tenga cierta enfermedad es q_1. (Esta probabilidad se ha determinado por medio de varias pruebas.) El tratamiento para esta enfermedad es una operación de importancia. Si el paciente tiene la enfermedad pero no se le opera, puede esperar vivir 5 años, pero si se opera al paciente, puede esperar vivir 20 años. Si el enfermo no tiene la enfermedad, puede esperar vivir 25 años si se opera, o 30 años si no se opera. La decisión de operarlo o no, claramente depende de q_1, la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad. Si $q_1 = 0$, el paciente no tiene la enfermedad y no debe ser operado. ¿Cuál es el menor valor de q_1 para el cual es recomendable que se le opere?

Solución Este problema puede ser analizado como un juego de matriz. Defínase

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 5 & 30 \end{pmatrix}$$

como la matriz del juego. El paciente "juega" los renglones. El renglón I corresponde a operarse y el renglón II corresponde a no ser operado. El oponente, la naturaleza, juega las columnas. La columna I corresponde a la enfermedad y la columna II corresponde a no tener la enfermedad. La estrategia de la naturaleza es

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{pmatrix},$$

en donde q_1 es la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad. El paciente debe jugar una estrategia pura, pero, por ahora, supongamos que la estrategia del paciente es $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2)$. El pago esperado (en años de vida) es

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (p_1 \quad 1 - p_1)\begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 5 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{pmatrix} \\ &= (p_1 \quad 1 - p_1)\begin{pmatrix} 20q_1 + 25(1 - q_1) \\ 5q_1 + 30(1 - q_1) \end{pmatrix} \\ &= 20p_1q_1 - 5p_1 - 25q_1 + 30. \end{aligned}$$

Si se opera al paciente, entonces $\mathbf{p} = (1 \quad 0)$ y $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 25 - 5q_1$. Si no se le opera, entonces $\mathbf{p} = (0 \quad 1)$ y $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 30 - 25q_1$. El paciente debe operarse si $25 - 5q_1 > 30 - 25q_1$ —o sea, si $20q_1 > 5$, o si $q_1 > 0.25$. Esto quiere decir que el paciente debe operarse si la probabilidad de que tenga la enfermedad es de más del 25%. Si de la información disponible se infiere que la probabilidad de que tenga la enfermedad es, por ejemplo, del 15%, la operación no se debe hacer. Se requeriría más información para poder recomendar que se haga la operación.

Ejemplo 6 Considérese el juego cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Este no es un juego 2×2 y no tiene puntos silla, por lo que no está estrictamente determinado. Sin embargo, el renglón 2 es recesivo. Los resultados para R son siempre mejores si escoge el renglón 1 en vez de escoger el renglón 2. De manera semejante, la columna 2 es recesiva y C no la debe escoger nunca. Eliminando el renglón y la columna recesivos se obtiene

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas y el valor del juego son, de (3), (4) y (5),

$$\mathbf{p}'_0 = (\tfrac{2}{5} \quad \tfrac{3}{5}), \qquad \mathbf{q}'_0 = \begin{pmatrix} \tfrac{4}{5} \\ \tfrac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad v = \tfrac{23}{5}.$$

Así que

$$\mathbf{p}_0 = (\tfrac{2}{5} \quad 0 \quad \tfrac{3}{5}) \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \tfrac{4}{5} \\ 0 \\ \tfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

son las estrategias óptimas para A. El valor del juego sigue siendo de 23/5.

Terminamos esta sección con un ejemplo maravilloso del uso de la teoría de juegos aplicada a la filosofía.*

Ejemplo 7 **Voluntad libre.** ¿Tiene cada persona un papel en la dirección de su propia vida? ¿O estamos destinados a seguir un plan preordenado, moviéndonos en una banda transportadora o destino? Una de las columnas de Martin Gardner

* Por William Foster Allman; extractado con permiso de la revista *Science '82*, julio-agosto, 1981, págs. 36-37. American Association for the Advancement of Science.

que generó una respuesta considerable de los lectores discutía la libre voluntad y el determinismo, ilustrando lo que se conoce como la **paradoja de Newcomb**.

La paradoja se refiere a la facultad de un ''Ser Superior'' de predecir con exactitud el comportamiento. Tal Ser puede ser un vidente, un viajero en el tiempo, Dios o cualquier otra entidad precognoscente.

El lector tiene frente a sí dos cajas. La Caja A contiene $1000. La Caja B puede contener $1 millón o nada. El lector tiene la opción de tomar el contenido de las dos cajas, o solamente el contenido de la Caja B. Antes de que el lector tome su decisión, el Ser Superior hace una predicción sobre la elección del lector. Si el Ser considera que el lector se quedará sólo con la Caja B, pondrá $1 dentro de la caja. Si predice que el lector tomará las dos cajas, dejará vacía la Caja B. El Ser no es necesariamente infalible, pero sus predicciones suelen ser extremadamente exactas.

¿Qué opción toma el lector? Si elige las dos cajas, el Ser lo habrá predicho así y habrá dejado vacía la Caja B. Si el lector decide tomar sólo la Caja B, ganará $1 millón. La experiencia del lector es que el Ser nunca se ha equivocado en su predicción. En ese caso, la elección correcta parece ser la elección de tomar únicamente la Caja B.

	El ser B	**El ser A y B**
Tomar B	$1,000,000	$0
Tomar A y B	$1,001,000	$1,000

Pero considérese otro argumento. El Ser hizo su predicción hace una semana, o tal vez el día en que nació el lector. El ya puso $1 millón en la Caja B o no lo hizo, y el dinero no va a desaparecer. Entonces tiene más sentido tomar las dos cajas, porque si la Caja B no está vacía, el lector ganará $1,001,000. Si la caja está vacía, el lector se quedará al menos con los $1000. En cambio, con la elección de la Caja B únicamente, existe una posibilidad, aunque remota, de que el lector no gane nada.

Gardner sugiere una manera de considerar la paradoja, usando lo que en teoría de juegos se llama una matriz de pagos. Si el lector considera el resultado de ambas opciones a la luz de las predicciones del Ser, aparece que la elección de ambas cajas es la óptima, porque esa elección es la que ofrece el pago máximo más alto ($1,001,000) y también el pago mínimo más alto ($1000). Nótese que $1000 es un punto silla.

Pero desde otro punto de vista de la teoría de juegos, al multiplicar los resultados posibles correspondientes a cada opción por la probabilidad de que efectivamente ocurran, se llega a la conclusión contraria. Aun si se supone que las predicciones del Ser sólo son correctas el 90% de las veces, la ganancia esperada al elegir tomar las dos cajas es el 90% de $1000 más el 10% de $1,001,000, lo que da un total de $101,000. En otras palabras, si el lector participara en el juego diez veces, sus ganancias promedio serían de $101,000. Al escoger sólo la Caja B se obtendría el 90% de $1,000,000 más el 10% de cero, dando un total de $900,000. Es mejor escoger sólo la Caja B aun si el Ser sólo hiciera predicciones correctas algo más de la mitad de las veces.

La paradoja se basa en los conceptos en conflicto de voluntad libre y determinismo. Para los que creen que sus decisiones están determinadas completamente por un futuro presente, dependiendo en su totalidad de lo que el pragmatista del siglo XIX William James llamó la fuerza del pasado, la única opción correcta, si así se puede llamar, consistiría en elegir solamente la Caja B, porque un Ser omnisciente o un viajero del espacio conocería estas fuerzas.

Para los que creen que las opciones son independientes —que existe, no importa qué tan infinitamente pequeña, una libertad de acción, más allá de lo que el pasado exige del futuro— la elección adecuada consistiría en elegir las dos cajas. Suponga el lector que, antes de tomar su decisión, ha hecho 1000 pruebas, y que cada persona que sólo eligió la Caja B recibió $1 millón, y que todos los que eligieron ambas cajas se encontraron la caja B vacía. Aun en ese supuesto, un amigo del lector que podía ver el contenido de ambas cajas antes de que el lector tomara su decisión, sean cuales fueren los contenidos de las cajas, le aconsejaría al lector que eligiera las dos cajas, porque ya fuera que la Caja B contuviera o no $1 millón, el lector obtendría al menos $1000.

Isaac Asimov, respondiendo a Gardner, escribió: ''Yo, sin dudarlo, escogería ambas cajas. Yo soy un determinista, pero tengo perfectamente claro que cualquier ser humano digno de considerarse ser humano (ciertamente, incluyéndome a mí mismo) preferiría la voluntad libre, si algo así pudiera existir... Así al menos expresaría su deseo de sacar ventaja de la no omnisciencia [de Dios] y en su propia voluntad libre... Sin embargo, si sólo escogiera la segunda caja, se quedaría con su desafortunado millón y no sólo sería esclavo por ese millón, sino que habría demostrado su deseo de ser un esclavo por ese millón, y no sería alguien que yo podría reconocer como humano.''

Aparentemente, Martin Gardner se divierte más enunciando paradojas como ésta que resolviéndolas. ''Soy un indeterminista, lo que quiere decir que no soy determinista'', dice. ''No creo que la paradoja se haya explicado correctamente, pero no voy a perder el sueño tratando de hacerlo.''

Problemas 2.2

En los Problemas 1-10, se da la matriz de pagos de un juego. Encuéntrese la ganancia esperada para R con el par de estrategias dadas $\mathbf{p}$ *y* $\mathbf{q}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \mathbf{p} = (\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}), \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \mathbf{p} = (1 \quad 0), \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{p} = (\frac{1}{5} \quad \frac{4}{5}), \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (0 \quad 1)$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{3}{4})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{p} = (\frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{5})$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

En los Problemas 11-23, determínense las estrategias óptimas y el valor del juego de matriz dado. ¿Cuáles juegos son justos?

11. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

24. Supóngase que la matriz del juego en el Ejemplo 5 es

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 39 \\ 5 & 40 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el mínimo valor de la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad para el que se debería recomendar la operación?

25. Se puede estudiar con más detalle el modelo de toma de decisiones médicas del Ejemplo 5. Defínase la matriz de juego

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

en donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son la vida esperada del paciente si se opera y tiene la enfermedad, si se opera y no tiene la enfermedad, si no se opera y tiene la enfermedad y si no se opera y no tiene la enfermedad, respectivamente. Suponiendo que el paciente quiere maximizar su vida esperada, demostrar que la operación se puede recomendar si la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad es de más de

$$\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

[*Sugerencia*: Compárese la vida esperada para el paciente con la operación con la vida esperada para el paciente sin la operación.]

26. Demostrar que el juego del Problema 2.1.11 no es justo. ¿Cuál es su valor? ¿Qué estrategia debe adoptar R?

27. Responda las preguntas del Problema 26 para el juego del Problema 2.1.12.

28. En el Problema 2.1.15, ¿qué debe hacer el dueño de la tienda A si sabe que el dueño del establecimiento B lanzará una moneda para decidir si aumenta o disminuye sus precios?

29. Encontrar la estrategia óptima para el agricultor del Problema 2.1.20 si la probabilidad de las heladas desde el 25 de agosto hasta el 5 de septiembre es de 0.5.

30. Responda la pregunta del Problema 29 si la probabilidad de las heladas es de 0.2.

31. Responda la pregunta del Problema 29 si la probabilidad de las heladas es de 0.9.

32. En cierta región agrícola, el clima promedio en la estación de crecimiento es fría o caliente. Se siembran dos cultivos en un campo de 1500 acres. Si la temporada de crecimiento es fría, las ganancias esperadas son de \$20 por acre de la cosecha I y de \$10 por acre de la cosecha II. Si la temporada de crecimiento es caliente, las ganancias esperadas son de \$10 por acre de la cosecha I y de \$30 por acre de la cosecha II. Describir la competencia entre el agricultor y el clima como un juego de matriz. Si no se tiene información sobre las probabilidades de que se dé clima caliente o frío, ¿cuál es la estrategia óptima para el agricultor?

33. Supóngase que el clima en el Problema 32 es igualmente probable caliente o frío. ¿Cuántos acres de cada cultivo debe sembrar el agricultor?

34. En un experimento, un mono debe escoger una de tres pantallas para ganarse un plátano. En cada realización del experimento se colocan dos plátanos detrás de la pantalla I o bien un plátano detrás de cada una de las pantallas II y III (estos son los dos "movimientos" del experimento). Descríbase este experimento como un juego de matriz 3×2. ¿Cuáles son las estrategias óptimas para el mono y para el que realiza el experimento?

35. Si todas las componentes de una matriz de juego son positivas, demuéstrese que el valor del juego es positivo.

★ **36.** Dados dos juegos de matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ tales que $b_{ij} = a_{ij} + k$ para toda i y para toda j, demuéstrese que el valor del juego B es igual al valor del juego A más la constante k. Demuéstrese que las estrategias óptimas para R y C son las mismas en B que en A. (Se dice que los juegos A y B son **juegos de matriz equivalentes.**)

37. ¿Cuáles son las estrategias óptimas y cuáles los valores de los juegos de matriz equivalentes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}?$$

38. ¿Cuáles son las estrategias óptimas y cuáles los valores de los juegos de matriz equivalentes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

39. Al aumentar el valor de la variable t de 0 a 1, ¿cómo cambian las estrategias óptimas en los juegos siguientes?

(a) $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & t \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} t & t^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

40. Determinar los valores de los juegos de matriz 2×2 del Problema 39 como funciones de t para $0 \le t \le 1$. ¿Para qué valores de t son justos estos juegos?

41. (a) Demuéstrese que el juego de matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$$

no está estrictamente determinado para ningún valor de t.

(b) Demuéstrese que el valor de este juego es una constante independiente de t. Encuéntrese el valor de esa constante.

42. (a) Supóngase que todas las componentes de $\mathbf{p}_0 A$ son mayores o iguales que v. Demuéstrese que $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) = \mathbf{p}_0 A \mathbf{q} \ge v$. [*Sugerencia*: Úsese el hecho de que las componentes de $\mathbf{q}$ tienen una suma de 1.]

(b) Si $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) \ge v$ para cada una de las estrategias $\mathbf{q}$, demuéstrese que cada una de las componentes de $\mathbf{p}_0 A$ es mayor o igual que v. [*Sugerencia*: Muéstrese que la componente k de $\mathbf{p}_0 A$ es igual a $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{q})$ donde $\mathbf{q}$ es el vector columna con un 1 en la posición k y ceros en las demás posiciones.]

★ **43.** Por un procedimiento semejante al del Problema 42, demuéstrese que cada componente de $A\mathbf{q}_0$ es menor o igual que v si y sólo si $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \le v$ para cada una de las estrategias de $\mathbf{p}$.

★ **44.** Supóngase que $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$ y v están dados por (3), (4) y (5), respectivamente.

(a) Demuéstrese que $\mathbf{p}_0 A \ge v$ y que $A\mathbf{q}_0 \le v$.

(b) Úsense los resultados de los Problemas 42 y 43 para concluir que (3) y (4) determinan estrategias óptimas, y que v, dado en (5), es el valor del juego de matriz 2×2.

2.3 Juegos de matriz y programación lineal

El problema de esta sección consiste en determinar las estrategias óptimas para los dos participantes, R y C, en un juego general de matriz $m \times n$ con matriz de pagos $A = (a_{ij})$. Podemos suponer que la matriz de juego A no tiene renglones ni columnas recesivos, ya que éstos no se escogerían nunca al usar estrategias óptimas. Para evitar una pequeña complicación, supondremos además que todas las componentes de A son positivas. Si esto no se cumple, se define una nueva matriz de juego $B = (b_{ij}) = (a_{ij} + k)$, sumando una constante positiva k a cada una de las componentes de A. La constante k se escoge de manera que todas las componentes de B sean positivas. El valor del juego de matriz $m \times n$ determinado por B es positivo.

El teorema de von Neumann implica que la estrategia óptima $\mathbf{q}_0$ de C satisface la condición de que todas las componentes de $A\mathbf{q}_0$ son menores o iguales que v, el valor del juego. De manera equivalente, todas las componentes de $(1/v)A\mathbf{q}_0$ son menores o iguales a 1. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, defínase x_i como la componente i de $(1/v)\mathbf{q}_0$. Nótese que $x_1 \geq 0$, ya que $v > 0$ y $\mathbf{q}_0$ es un vector de probabilidad. El competidor C trata de minimizar v, la ganancia esperada de R y pérdida esperada de C. Esto se hace maximizando $f = 1/v$ sujeto a las restricciones. Por lo tanto, el problema que C debe resolver es el siguiente:

Maximizar

$$f = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{1}$$

sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq 1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq 1$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Reconocemos este problema como un problema de máximos en programación lineal. Por un argumento semejante, el lector puede verificar que R debe resolver el problema de mínimos dual para determinar su estrategia óptima. La tabla simplex inicial para este problema es

$$\begin{array}{cccc|cccc|c|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & s_1 & s_2 & \cdots & s_m & & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & s_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & s_m \\
\hline
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f &
\end{array}$$

Los indicadores positivos en el último renglón se eliminan sucesivamente por el método simplex. Usando este método, se reduce la tabla simplex inicial a una tabla terminal. El valor v del juego es el recíproco del valor máximo de f. Las soluciones $x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y^* = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ del problema de máximos y del problema dual de mínimos se pueden leer de la última columna y del último renglón de la tabla terminal. Las estrategias óptimas para C y para R, entonces, son $\mathbf{q}_0 = vx^* = (vx_1, vx_2, \ldots, vx_n)$ y $\mathbf{p}_0 = vy^* = (vy_1, vy_2, \ldots, vy_m)$.

Ejemplo 1 Determinar las estrategias óptimas del juego de matriz 2×2 con matriz de pagos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución Las componentes de A son todas positivas, y los métodos de esta sección se pueden aplicar. El problema de máximos asociados consiste en maximizar $f = x_1 + x_2$ sujeta a $x_1 + 2x_2 \leq 1$, $2x_1 + 3x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. La tabla simplex inicial de este problema es

I.

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	2	1	0	1	s_1
2	3	0	1	1	s_2
1	1	0	0	f	

Haciendo pivoteo en la componente encerrada en un círculo, se obtiene la siguiente tabla:

II.

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	s_1
1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x_1
0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$f - \frac{1}{2}$	

Esta es una tabla terminal, porque no tiene indicadores positivos. De ahí que el máximo valor de f sujeto a las restricciones es $1/2$ y, por lo tanto, el valor del juego es $1/1/2 = 2$. El máximo valor de f ocurre en $x^* = (1/2, 0)$ y el valor mínimo del problema dual ocurre en $y^* = (0, 1/2)$. Las estrategias óptimas para R y C son $\mathbf{p}_0 = vy^* = (0, 1)$ y $\mathbf{q}_0 = vx^* = 2(1/2, 0) = (1, 0)$.

El Ejemplo 1 se pudo haber resuelto por los métodos de la sección anterior para juegos generales de matriz 2×2, u observando que la componente en la primera columna y el segundo renglón es un punto silla. Los métodos de esta sección pueden aplicarse a todos los juegos de matriz $m \times n$. Para terminar esta sección, consideramos dos ejemplos de matrices de juego con componentes negativas.

Ejemplo 2 Determínense las estrategias óptimas para R y C en el juego de matriz 2×2 cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución Sumando 3 a cada una de las componentes de A, defínase una nueva matriz de juego

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

que tiene todas las componentes positivas. Las estrategias óptimas en el juego B son las mismas que las estrategias óptimas en el juego dado. Para determinar estas estrategias óptimas, escribimos la tabla simplex inicial.

I.

x_1	x_2	s_1	s_2		
5	4	1	0	1	s_1
1	5	0	1	1	s_2
1	1	0	0	f	

Haciendo pivoteo en la componente encerrada en un círculo, se obtienen las siguientes tablas:

II.

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	x_2
0	$\frac{21}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	s_2
0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$f-\frac{1}{5}$	

III.

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	0	$\frac{5}{21}$	$-\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	x_1
0	1	$-\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	x_2
0	0	$-\frac{4}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$f-\frac{5}{21}$	

La última tabla es terminal, porque todos los indicadores son no positivos. El valor máximo de f es 1/21, que ocurre en $x^* = (1/21, 4/21)$. Por lo tanto, el valor del juego B es de 21/5. El valor del juego original A es $21/5 - 3 = 6/5$. Las estrategias óptimas para R y C son

$$\mathbf{p}_0 = 21/5(4/21,\ 1/21) = (4/5,\ 1/5) \text{ y } \mathbf{q}_0 = 21/5(1/21,\ 4/21) = (1/5,\ 4/5).$$

Ejemplo 3 Determinar las estrategias óptimas para R y C en el juego de matriz 3×3 cuya matriz de pagos es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \\ -5 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Solución Como no es evidente que el valor de este juego es positivo, definimos una matriz de juego equivalente

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 4 & 14 & 3 \\ 1 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

con todas sus componentes positivas, añadiendo 6 a cada componente de A. Las estrategias óptimas para R y C son las mismas en los dos juegos equivalente A y B. La tabla simplex inicial asociada con el juego de matriz B es

I.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
10	4	1	1	0	0	1	s_1
4	14	3	0	1	0	1	s_2
1	3	20	0	0	1	1	s_3
1	1	1	0	0	0	f	

Haciendo pivoteo en la componente marcada en cada caso, se obtienen las tablas siguientes:

II.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	x_1
0	$\frac{124}{10}$	$\frac{26}{10}$	$-\frac{4}{10}$	1	0	$\frac{6}{10}$	s_2
0	$\frac{26}{10}$	$\frac{199}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	1	$\frac{9}{10}$	s_3
0	$\frac{6}{10}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	$f - \frac{1}{10}$	

III.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	0	$\frac{1}{62}$	$\frac{7}{62}$	$-\frac{1}{31}$	0	$\frac{5}{62}$	x_1
0	1	$\frac{13}{62}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{5}{62}$	0	$\frac{3}{62}$	x_2
0	0	$\frac{600}{31}$	$-\frac{1}{62}$	$-\frac{13}{62}$	1	$\frac{24}{31}$	s_3
0	0	$\frac{24}{31}$	$-\frac{5}{62}$	$-\frac{3}{62}$	0	$f-\frac{4}{31}$	

IV.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	0	0	*	*	*	$\frac{2}{25}$	x_1
0	1	0	*	*	*	$\frac{1}{25}$	x_2
0	0	1	$\frac{1}{1200}$	$\frac{1}{1200}$	$-\frac{31}{600}$	$\frac{1}{25}$	x_3
0	0	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$f-\frac{4}{25}$	

Se invita al lector a completar la tabla terminal (IV). Estos números no se necesitan en el último paso. El máximo de la función objetivo f es de 4/25, y por lo tanto, el valor del juego B es de 25/4. El valor del juego original A es de $25/4 - 6 = 1/4$. La estrategia óptima para C es

$$\mathbf{q}_0 = vx^* = 25/4\ (2/25,\ 1/25,\ 1/25) = (1/2,\ 1/4,\ 1/4).$$

La estrategia óptima para R es

$$\mathbf{p}_0 = vy^* = 25/4(2/25,\ 1/25,\ 1/25) = (1/2,\ 1/4,\ 1/4)$$

Problemas 2.3

1. Usando los métodos de programación lineal, determínense las estrategias óptimas y los valores de los siguientes juegos de matriz 2×2:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Usando los métodos de programación lineal, determínense las estrategias óptimas y el valor de los siguientes juegos de matriz de 3×3:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Usando el método de programación lineal de esta sección determínense las estrategias óptimas cuando el valor del juego de matriz es positivo. ¿Por qué no funciona el método cuando el valor del juego es cero o negativo?

4. Los valores de los juegos de matriz de los Ejemplos 2 y 3 son de 6/5 y 1/4, respectivamente. Como los valores son positivos, no fue necesario definir juegos de matriz equivalentes con todas las componentes positivas. Aplíquese el método de programación lineal a las matrices de juego originales para determinar las estrategias óptimas para los dos ejemplos.

5. Determínense las estrategias óptimas y el valor del juego de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 17 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determínense las estrategias óptimas del juego de matriz

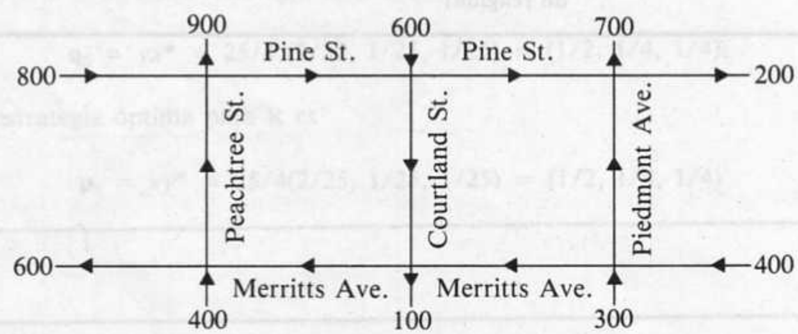
$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas garantizan una ganancia mínima para R si el juego se realiza muchas veces. Si el juego se realiza una sola vez, ¿cómo determina R su movimiento? ¿Cuándo escogerá R el primer renglón para asegurarse una ganancia de al menos nueve unidades? ¿En qué condiciones se arriesgará R escogiendo el segundo renglón?

CAPÍTULO 3

Un modelo para estudio del tránsito

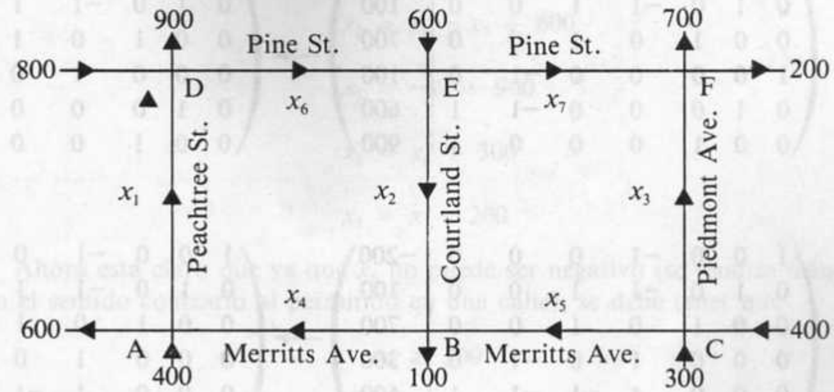
En este capítulo se mostrará cómo un sistema de ecuaciones lineales puede ayudar a resolver un problema práctico de tránsito. Para concretar más, empezamos con un mapa que muestra una pequeña zona de Atlanta, Georgia.



En el mapa se indicó el flujo de tránsito que entra o sale a cada calle, en unidades de vehículos por hora (vph). Ya que el flujo de tránsito varía considerablemente durante el día, supondremos que los números mostrados representan el flujo de tránsito promedio a la hora de máximo flujo, que se da, aproximadamente, entre las 4 P.M. y las 5:30 P.M.

Supóngase ahora que un grupo político está planeando una manifestación en Merritts Avenue, entre Courtland Street y Peachtree Street a las 5 P.M. del miércoles. La policía de Atlanta puede, hasta cierto punto, controlar el flujo de tránsito reajustando los semáforos, colocando policías en los cruces clave, o cerrando la calle crítica al tránsito de vehículos. Si se disminuye el tránsito por Merritts Avenue, aumentará el de las calles adyacentes. La cuestión es minimizar el tránsito por Merritts Avenue (entre Courtland y Peachtree) sin ocasionar congestionamientos en las otras calles.

Para resolver nuestro problema de minimización, le agregamos marcas a nuestro mapa.



Aquí se han marcado las seis intersecciones "A" hasta "F" y se ha denotado el flujo de tránsito entre las intersecciones adyacentes por las variables x_1 hasta x_7. El problema consiste ahora en minimizar x_4, sujeta a las restricciones del problema.

Para encontrar estas restricciones, veamos, por ejemplo, la intersección B. El tránsito que fluye a la intersección B es, según el mapa, $x_2 + x_5$. El tránsito que sale de la intersección B es $x_4 + 100$. Suponiendo que el tránsito no se acumula en la intersección B, el tránsito de "entrada" debe ser igual al tránsito de "salida". Así se obtiene la ecuación

$$x_2 + x_5 = x_4 + 100$$

o bien

$$x_2 - x_4 + x_5 = 100$$

A partir de este análisis en cada intersección, se obtiene el siguiente sistema de seis ecuaciones en siete incógnitas:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{en } A & x_1 & & & - x_4 & & & & = & -200 \\
\text{en } B & & x_2 & & - x_4 & + x_5 & & & = & 100 \\
\text{en } C & & & x_3 & & + x_5 & & & = & 700 \\
\text{en } D & x_1 & & & & & - x_6 & & = & 100 \\
\text{en } E & & x_2 & & & & - x_6 & + x_7 & = & 600 \\
\text{en } F & & & x_3 & & & & + x_7 & = & 900
\end{array}$$

Escribiendo este sistema en forma de matriz aumentada y resolviéndolo por reducción de renglones se obtiene, sucesivamente:

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Y hasta aquí se puede llegar. Evidentemente, hay un número infinito de soluciones. Usando la última matriz encontrada, se puede escribir cada variable en términos de x_6 y x_7:

$$x_1 = x_6 + 100$$

$$x_2 = x_6 - x_7 + 600$$

$$x_3 = -x_7 + 900$$

$$x_4 = x_6 + 300$$

$$x_5 = x_7 - 200$$

Ahora está claro que ya que x_6 no puede ser negativo (se tendría tránsito en el sentido contrario al permitido en una calle), se debe tener que

$$x_4 \geq 300$$

Así que, para minimizar el flujo de tránsito en Merritts Avenue entre Courtland y Peachtree (sin crear congestionamientos), la Policía de Atlanta debe considerar un flujo de 300 vpm en esa calle y cerrar el tránsito en Pine Street entre Peachtree y Courtland (porque para tener $x_4 = 300$ se necesita que $x_6 = 0$). Por último, con $x_6 = 0$ se tiene

$$x_1 = 100$$

$$x_2 = -x_7 + 600$$

$$x_3 = -x_7 + 900$$

$$x_4 = 300$$

$$x_5 = x_7 - 200$$

De la segunda ecuación se deduce que $x_7 \leq 600$. De la última ecuación, $x_7 \geq 200$. Entonces, se tiene la solución final de nuestro problema. Para lograr que el tránsito sea mínimo en x_4, se debe tener

$$x_1 = 100$$

$$0 \leq x_2 \leq 400 \text{ (porque } 200 \leq x_7 \leq 600)$$

$$300 \leq x_3 \leq 700$$

$$x_4 = 300$$

$$0 \leq x_5 \leq 400$$

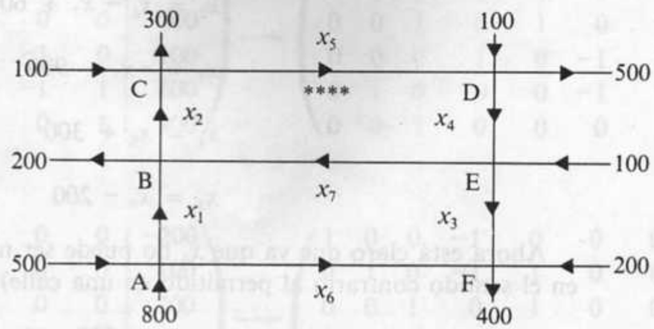
$$x_6 = 0$$

$$200 \leq x_7 \leq 600$$

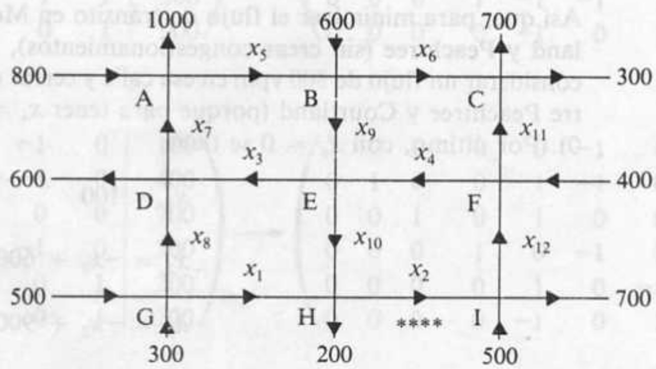
Problemas • Capítulo 3

En los mapas siguientes, minimícese el tránsito en la calle indicada con asteriscos (****).

1.



2.



CAPÍTULO

4 Criptografía

Criptografía es la ciencia de escribir o descifrar claves. A pesar de que esta materia se asocia frecuentemente con asuntos militares, la criptografía llegó a ser un área importante en los negocios. Las grandes empresas, que procesan enormes cantidades de datos computadorizados, deben protegerse constantemente contra lo que se llama "espionaje industrial", esto es, el robo de información importante por los competidores.

Actualmente, hay muchas técnicas extremadamente complejas desarrolladas para garantizar la posibilidad de transmitir grandes cantidades de información en forma confidencial. A esto se llegó después de investigación altamente elaborada hecha por criptógrafos modernos.

Claro que en este libro no será posible describir las técnicas más modernas para construir claves y para descifrarlas. Pero sí se ilustrarán maneras sencillas de construir y descifrar claves por medio de técnicas elementales sobre matrices.

Casi todos saben lo que es un *criptograma*. Se trata de un pasatiempo que aparece en muchos periódicos. Es común que se dé un mensaje como el siguiente:

KI ZPIIC VPJLP PI PUPJKVG.

Esto se puede descifrar usando la tabla "descodificadora":

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

P M V Q K S Z O T B W I U J C X E G Y L D R H A F N

Notando que K está en el lugar de E, que I sustituye a L, que Z reemplaza a G, etcétera, se llega al mensaje siguiente:

EL GALLO CANTA AL AMANECER.

Un criptograma usa una clase de clave muy burda y fácil de descifrar. Ahora se verá cómo se pueden usar matrices para crear una clave mucho más difícil de descifrar. Empezamos asignando a cada letra su lugar en el alfabeto ordenado. Esto nos da la siguiente asociación:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

(1)

Supóngase que queremos codificar el mensaje

LAS MATRICES SON AMIGABLES.

Descomponemos el mensaje en unidades de igual longitud. Si se escogen longitudes de dos letras, se obtiene

LA SM AT RI CE SS ON AM IG AB LE SX. (2)

La X al final simplemente llena el espacio. Si usamos nuestro código numérico (1), podemos escribir (2) como un conjunto de vectores de dos componentes

$$\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\24\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Escogemos una matriz A de 2×2, inversible y entera, con determinante ± 1. Esto asegurará que A^{-1} también tiene sólo componentes enteras. Una matriz con esas condiciones es

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}.$$

Para continuar, multiplicamos cada uno de los vectores de dos componentes en (3), a la izquierda, por A. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix}.$$

Así obtenemos el nuevo conjunto de vectores

$$\begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}58\\71\end{pmatrix}\begin{pmatrix}61\\81\end{pmatrix}\begin{pmatrix}45\\54\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}76\\95\end{pmatrix}\begin{pmatrix}57\\71\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\53\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27\\32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}91\\115\end{pmatrix} \tag{4}$$

Por último, escribimos (4) así:

$$15\ 16\ 58\ 71\ 61\ 81\ 45\ 54\ 18\ 23\ 76\ 95\ 57\ 71\ 40\ 53\ 30\ 37\ 7\ 9\ 27\ 32\ 91\ 115. \tag{5}$$

Este es nuestro nuevo mensaje codificado, que sería muy difícil de descifrar si no se sabe cuál es la matriz A. Conociendo A, en cambio, es relativamente sencillo. Empezamos rearreglando los números en (5) en grupos de vectores de 2 componentes. Ya que, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix}.$$

Para comprobar esto, observamos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix} \text{ por lo que } A^{-1}\begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{L}\\\text{A}\end{pmatrix}.$$

Multiplicando cada uno de los vectores en (4) por A^{-1} se obtendrán los vectores en (3), que se pueden convertir directamente por medio de (1) en el mensaje (2). En este contexto, la matriz A se denomina **matriz codificadora**, y la matriz A^{-1} recibe el nombre de **matriz descodificadora**.

Como ejemplo adicional, se puede dificultar esto aún más, contra el descodificador potencial, agrupando la información en bloques más grandes. Si se escogen unidades de tres letras de largo, (2) se transforma en

$$\text{LAS MAT RIC ESS ONA MIG ABL ESX.} \tag{6}$$

que, utilizando (1), se traduce a

$$\begin{pmatrix}12\\1\\19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\1\\20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\9\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\19\\19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\14\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\9\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\19\\24\end{pmatrix} \tag{7}$$

Para codificar este mensaje se requiere ahora una matriz inversible entera de 3×3, cuya inversa tenga también valores enteros (otra vez, escogiendo una matriz de 3×3, de componentes enteros y determinante igual a ± 1). Una matriz con tales características es

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

que tiene la inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, por ejemplo,

$$A\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da el nuevo conjunto de vectores de tres componentes

$$\begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 54 \\ 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 33 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 62 \\ 57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 \\ 31 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52 \\ 36 \\ 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ 27 \\ 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 115 \\ 72 \\ 67 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Finalmente, escribimos (8) como:

71 51 39 75 54 41 45 33 15 100 62 57 46 31 16 52 36 23 41 27 26 115 72 67. (9)

Para descrifrar (9) se necesita conocer A^{-1}. Por ejemplo,

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 71 \\ 51 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{L} \\ \text{A} \\ \text{S} \end{pmatrix}.$$

Problemas • Capítulo 4

1. Mediante el método de este capítulo, codifique el mensaje

   MOZART CONQUISTA A TODOS,

   usando la matriz de codificación

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Resuelva el Problema 1 usando la matriz de codificación

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Con la matriz del Problema 1, descífrese lo siguiente:

159 93 228 133 87 52 200 117 138 79 184 108 77 46

4. Usando la matriz del Problema 2, descífrese lo siguiente:

8 63 66 2 106 161 −2 1 10 −6 19 53 −6 96 180

CAPÍTULO 5

Aplicaciones a la genética

La teoría moderna de la herencia de las características tuvo su origen en los experimentos de Gregorio Mendel con plantas de chícharo, cuyos resultados se publicaron en 1865. La interpretación de Mendel de sus experimentos lo llevó a sugerir leyes generales que gobiernan la transmisión de características de los padres a sus descendientes. En particular, Mendel supone que la herencia es el resultado de la transmisión de partículas (que ahora se llaman genes) de los padres a los hijos. La naturaleza exacta de los genes y de los mecanismos por los que determinan las características heredadas han seguido siendo problemas importantes en la investigación biológica hasta el presente.

Un gene particular puede ocurrir en varias formas, o *alelos*. Para simplificar, consideraremos un gene con dos alelos, A y a. Los genes ocurren en cada célula de un organismo, agrupados en los cromosomas. Excepto para las células reproductoras, los genes ocurren en pares y se encuentran en cromosomas pareados. Los tres posibles pares de este gene, AA, Aa y aa, determinan los tres posibles *genotipos* del organismo en relación con tal gene. Los genotipos AA y aa se llaman *homócigos*, o puros, y el genotipo Aa se llama *heterócigo* o híbrido.

Las células reproductoras (el espermatozoide y el óvulo) tienen cromosomas no pareados y, por lo tanto, sólo tienen una copia de cada gene. Los genes de la descendencia resultan del pareamiento de los genes de las dos células reproductoras, una de cada uno de los padres. Si los dos progenitores son homócigos, el genotipo de la descendencia queda determinado. Por ejemplo, si uno de los padres es de genotipo AA y el otro es de genotipo aa, la descendencia tendrá que ser de genotipo Aa. Por otra parte, si uno de los padres o ambos son heterócigos, el genotipo de la descendencia no está determinado. Por ejemplo, si los dos padres son heterócigos, la descendencia puede ser AA, Aa o aa, con probabilidades de 1/4, 1/2 y 1/4, respectivamente, suponiendo igual viabilidad en la descendencia.

Muchas de las características, como el albinismo en los humanos, son controlados por un solo gene. Otras características, como la altura o la inteligencia, son controlados por los efectos combinados de un gran número de genes y con frecuencia son influidos fuertemente por factores de ambiente. Uno de los dos alelos A de un gene particular se dice que es *dominante* si los genotipos AA y Aa no se distinguen entre sí. En este caso, el alelo a se dice que es *recesivo* si el genotipo aa puede distinguirse por observación de los genotipos AA y Aa. El gene que controla la anemia en los humanos es un ejemplo de un gene con un alelo dominante y un alelo recesivo. Un individuo aa invariablemente sufre de anemia severa, que resulta en muerte prematura.

Si fuera posible clasificar los individuos de una población de una especie dada en cuanto a los genotipos AA, Aa y aa, sería posible determinar las proporciones de los dos alelos en la población. Esto no sería factible si, por ejemplo, no se pudieran distinguir AA de Aa. Sean

$$u = \text{proporción de genotipos de tipo AA}$$

$$v = \text{proporción de genotipos de tipo Aa}$$

$$w = \text{proporción de genotipos de tipo aa,}$$

y supongamos que se pueden determinar esas proporciones. Nótese que se debe tener

$$u + v + w = 1. \tag{1}$$

Entonces, las proporciones p y q de los dos alelos A y a en la población satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} p &= u + \tfrac{1}{2}v, \\ q &= \tfrac{1}{2}v + w. \end{aligned} \tag{2}$$

Aquí se usó el hecho de que los alelos A constituyen el 100 por ciento del genotipo AA (con proporción u) y el 50 por ciento del genotipo Aa, y similarmente para los alelos. Se observa que la segunda ecuación de (2) se puede deducir de la primera ecuación, porque $p + q = 1$ y $u + v + w = 1$. Si se supone que los genotipos ocurren en las mismas proporciones entre los machos que entre las hembras, entonces p y q representan (en toda la población) las probabilidades de que el gene sea A o a, respectivamente.

Ejemplo 1 En una población, la distribución de genotipos es de 50 por ciento de AA, 30 por ciento de Aa y 20 por ciento de aa. ¿Qué proporciones de los genes en esta población son A y a?

Solución En este ejemplo, $u = 0.50$, $v = 0.30$, $w = 0.20$. Por lo tanto, $p = 0.50 + (1/2)(0.30) = 0.65$ y $q = 0.15 + 0.20 = 0.35$. Esto implica que de la "población" de genes el 65 por ciento es de A y el 35 por ciento es de a.

Con frecuencia es interesante el problema inverso al de la determinación de las proporciones de los genotipos cuando se conocen las proporciones de los alelos. En general, este problema no tiene solución única. El sistema de ecuaciones (2) se reduce a una ecuación en dos incógnitas, $p = u + (1/2)v$. Para obtener una segunda ecuación independiente, supondremos apareamiento aleatorio. Esto quiere decir que la probabilidad de que un individuo dado se aparee con otro individuo no depende del genotipo de este último. En muchos casos, ésta es una suposición correcta. A veces no lo es. Por ejemplo, se sabe que la gente alta se tiende a casar con gente alta, y por lo tanto la característica de la altura en los humanos no se puede analizar de esta manera. Por otro lado, se ha demostrado que la suposición de apareo aleatorio se aplica a la característica de los tipos de sangre humana. La mayoría de los individuos escogen su cónyuge sin preocuparse por su tipo de sangre.

Igual que antes, supóngase que p y q son las proporciones de los alelos A y a entre los machos y entre las hembras. Entonces, si suponemos que la población es grande, la probabilidad de que la descendencia reciba el alelo A de los dos padres es p^2. De manera similar, las probabilidades de los genotipos Aa y aa son $2pq$ y q^2, respectivamente. El término $2pq$ proviene del hecho de que los individuos Aa y aA tienen genotipos idénticos. Ya que la probabilidad del genotipo Aa es pq y la del genotipo aA es qp, la probabilidad de Aa es $2pq$. Este resultado conduce al teorema siguiente, descubierto en forma independiente por Hardy y Weinberg en 1908.

Teorema 1 (Ley de Hardy-Weinberg) Supóngase que, en una gran población de padres, los alelos A y a de un gene particular se presentan en las proporciones p y $q = 1 - p$. Suponiendo que estas proporciones son las mismas para los machos y para las hembras y, además, que el apareo es aleatorio, la primera y todas las generaciones sucesivas se compondrán de los tres genotipos, AA, Aa y aa, en las proporciones p^2, $2pq$ y q^2.

Demostración Como se ha visto, un individuo de la primera generación es de genotipo AA si sus dos padres contribuyen con alelos A. Como la probabilidad es p de que cualquiera de los padres contribuya con un alelo A, la probabilidad del genotipo AA en la descendencia inmediata es de p^2. De manera semejante, las probabilidades de los genotipos Aa y aa son de $2pq$ y p^2. Esto implica que las proporciones p_1 y q_1 de los alelos A y a en la primera generación están dadas por

$$p_1 = p^2 + \tfrac{1}{2}(2pq) = p(p + q) = p,$$

$$q_1 = \tfrac{1}{2}(2pq) + q^2 = q(p + q) = q.$$

Por lo tanto, las proporciones de los dos alelos no se afectan por la generación inicial. Esto continúa de generación en generación. Concluimos que, después de la generación inicial, las proporciones de los tres genotipos AA, Aa y aa permanecen constantes en p^2, $2pq$ y q^2. ■

Ejemplo 2 El color de la flor de chícharo está controlado por un par de genes. Los tres genotipos AA, Aa y aa se caracterizan por sus flores rojas, color de rosa y blancas, respectivamente. Si se cultiva un campo al azar con 60 por ciento de flores rojas y 40 por ciento de flores blancas, ¿qué proporciones de los tres genotipos estarán presentes en la cuarta generación?

Solución En este ejemplo, $p = 0.6$ y $q = 0.4$. Por la ley de Hardy-Weinberg, las proporciones de flores rojas, rosadas y blancas en la primera generación y en todas las subsecuentes son de p^2, $2pq$ y q^2, o sea de 0.36, 0.48 y 0.16, respectivamente. Nótese que la suposición de cultivo aleatorio equivale a la suposición de polinización aleatoria.

Hacemos hincapié en que la ley de Hardy-Weinberg sólo es válida cuando el apareo es aleatorio y cuando los tres genotipos son igualmente viables. En ciertos casos, es bastante difícil verificar que el apareo es aleatorio. Sin embargo, si las proporciones de los genotipos permanecen constantes durante varias generaciones, y si satisfacen la ley de Hardy-Weinberg, esto se puede tomar como una fuerte evidencia de que el apareamiento es aleatorio. Así, el conocimiento de que el apareo es aleatorio para los tipos de sangre humana, así como para muchas características de plantas y animales, se dedujo de observaciones de las proporciones de genotipos en cuanto cumplen esta ley. Se debe indicar, sin embargo que las discrepancias en las proporciones medidas para los genotipos no necesariamente implican que el apareo no es aleatorio. Estas discrepancias se pueden atribuir a otros factores, como la mortalidad diferencial.

Situaciones en las que el apareamiento no es aleatorio, se presentan frecuentemente en experimentos biológicos controlados. Un ejemplo evidente se da en la cría de caballos de carreras, donde un ganador probado tiene gran demanda como semental. El ejemplo siguiente muestra una de las situaciones que pueden presentarse en una situación controlada.

Ejemplo 3 En un experimento controlado, los individuos se aparean de tal forma que uno de los individuos de la pareja es de tipo AA y el otro se escoge al azar. La descendencia se aparea después con individuos de tipo AA, y este proceso continúa. Demostrar que, a la larga, las proporciones de los individuos de tipo AA se acercarán a 1.

Solución Sean u_n, v_n y w_n las proporciones de los tres genotipos en la generación n. Se puede construir una tabla para determinar u_1, v_1 y w_1:

	AA (u)	Aa (v)	aa (w)
AA	toda la primera generación de tipo AA	mitad de tipo AA mitad de tipo Aa	toda la primera generación de tipo Aa

Así, tenemos

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u + \tfrac{1}{2}v \\
v_1 &= \tfrac{1}{2}v + w \\
w_1 &= 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Esto puede escribirse en notación matricial.

Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

entonces el sistema (3) se transforma en

$$\mathbf{u}_1 = P\mathbf{u} \tag{4}$$

Continuando de la misma manera, si definimos $\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, encontramos que

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{u}_2 = P\mathbf{u}_1 = P(P\mathbf{u}) = P^2\mathbf{u}, \\
\mathbf{u}_3 = P\mathbf{u}_2 = P(P^2\mathbf{u}) = P^3\mathbf{u}, \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\mathbf{u}_n = P\mathbf{u}_{n-1} = P(P^{n-1}\mathbf{u}) = P^n\mathbf{u}
\end{pmatrix}
\tag{5}
$$

Así, las proporciones de los genotipos futuros están completamente determinados por el vector $\mathbf{u}$ de las proporciones iniciales y por la matriz P.*

Ahora, es fácil comprobar que los valores característicos de P son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/2$ y $\lambda_3 = 1$, con vectores característicos correspondientes

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, P será diagonalizada por la matriz

$$C \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C^{-1}PC = D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* En el lenguaje del Capítulo 9, **u** es un vector de probabilidades, y P es la matriz de transición de una cadena de Markov.

Por último, como $P = CDC^{-1}$, se tiene que

$$P^n = (CDC^{-1})^n = \underbrace{(CDC^{-1})(CDC^{-1})\ \dots\ (CDC^{-1})}_{n \text{ veces}} = CD^nC^{-1}. \tag{6}$$

Pero

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $1/2^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se ve que D^n tiende a la matriz de equilibrio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que

$$P^n \to C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Por último, como

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$P^n \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{u}_n = P^n u \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v + w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ya que $u + v + w = 1$. Así queda demostrado el resultado deseado.

Problemas • Capítulo 5

1. La posibilidad de gustar ciertas sustancias se controla genéticamente. La feniltiocarbamida (FTC) tiene un sabor amargo para aproximadamente el 70% de la gente

en una gran población y es insípida al 30% restante. Suponiendo que la posibilidad o imposibilidad de gustar la FTC se debe a un solo gene, estímense las proporciones del gene que permite gustarlo y del gene que no lo permite, si el primero es dominante y el segundo es recesivo. ¿Qué proporción de los individuos de esta población son heterócigos para este gene?

2. Muchos genes afectan la capacidad reproductora del organismo. En algunos casos, se puede seguir recurriendo a la ley de Hardy-Weinberg, para predecir las proporciones de genotipos en la siguiente generación en las etapas anteriores a la selección. Por ejemplo, la condición conocida de vestigio de alas en las moscas de las frutas es controlada por un gene recesivo. Se caracteriza por alas más cortas y afecta la posibilidad de supervivencia y de reproducción del genotipo recesivo. Supóngase que 1 adulto en 6400 en una gran población tiene alas de vestigio. Estímense las proporciones de los genotipos en la siguiente generación, antes de que ocurra la selección.

3. Considérese el siguiente experimento de apareo: Un individuo de genotipo desconocido AA, Aa o aa se aparea con un individuo heterócigo Aa. Uno de sus descendientes se escoge el azar y se vuelve a aparear con un individuo heterócigo. Después de repetir este proceso por muchas generaciones, ¿cuál es la probabilidad de que uno de sus descendientes inmediatos escogido al azar sea heterócigo? [*Sugerencia*: Esto es semejante al Ejemplo 3.]

4. En el Problema 3, supóngase que un descendiente escogido aleatoriamente se aparea con individuos recesivos (aa) en cada generación. Después de muchas generaciones, ¿cuál es la probabilidad de que uno de sus descendientes escogido al azar sea recesivo?

5. Supóngase que en el Problema 3, la primera generación de uno de los individuos de la pareja es de tipo AA y su segunda pareja se escoge al azar. En la segunda generación, una de sus parejas es de tipo Aa y su segunda pareja se escoge aleatoriamente. Supóngase que esto continúa (es decir, con una pareja Aa en las generaciones pares y con una pareja AA en las generaciones impares). ¿A qué proporciones de los tres genotipos se tiende después de muchas generaciones?

6. Considérese un gene con cuatro alelos, A_1, A_2, A_3, A_4. Escríbanse los 10 genotipos correspondientes a este gene. Supóngase que, inicialmente, estos cuatro alelos están presentes en iguales proporciones en una gran población. Suponiendo que las proporciones son las mismas entre los machos que entre las hembras, y además que el apareo es aleatorio, determínense las proporciones de los distintos genotipos en la primera y en todas las siguientes generaciones.

7. En el Problema 6, supóngase que un individuo de genotipo desconocido se aparea con un individuo de tipo A_1A_1. Esto continúa como en el Ejemplo 3.
   (a) Escríbase una matriz de 10×10 que muestre la manera de calcular las proporciones de los genotipos en la primera generación y en todas las siguientes.
   (b) Muéstrese que después de muchas generaciones, casi todos los individuos serán del tipo A_1A_1. [*Sugerencia*: Demuéstrese que los valores característicos de la matriz triangular superior P son 0, 1/2 y 1.]

8. Supóngase que un gene tiene n alelos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. En un experimento uno de los individuos de la pareja es un homócigo de tipo A_iA_i, y se escoge su pareja al azar. Esto continúa de la manera descrita en el Ejemplo 3. Explíquese por qué, después de muchas generaciones, casi toda la descendencia será del tipo A_iA_i.

CAPÍTULO **6**

Aproximación por mínimos cuadrados

En muchos de los problemas en las ciencias biológicas, físicas y sociales es útil describir la relación entre las variables del problema por medio de una expresión matemática. Así, por ejemplo, se pueden describir las relaciones entre el costo (C), los ingresos (I) y las utilidades (U) por medio de la sencilla fórmula

$$U = I - C.$$

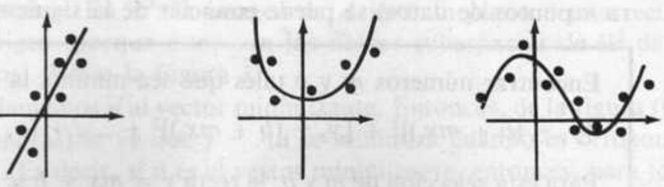
En otro campo, se puede representar la relación entre la aceleración debida a la gravedad, el tiempo que un objeto ha estado cayendo, y la altura del objeto, por la ley física

$$s = s_0 - v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

en la que s_0 es la altura inicial del objeto y v_0 es su velocidad inicial.

Desafortunadamente, no se llega fácilmente a fórmulas como éstas. Por lo general le corresponde al científico o economista trabajar con grandes cantidades de datos para encontrar relaciones entre las variables del problema. Una manera común de hacer esto consiste en ajustar una línea entre los distintos puntos de los datos. Dicha línea puede ser una recta, o una curva cuadrática,

Figura 1 (Cap. 6)



(a) Recta (b) Cuadrática (c) Cúbica

o una cúbica, etc. El objeto es encontrar la curva del tipo dado que "mejor" se ajuste a los datos. En este capítulo se mostrarán métodos para hacer esto cuando se tienen dos variables en el problema. En cada caso supondremos que se tienen n puntos de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

En la Figura 1 se muestran tres de las curvas que pueden usarse para ajustar a los datos.

6.1 Aproximación por una línea recta

Antes de continuar, debemos aclarar lo que quiere decir el "mejor ajuste". Supóngase que se busca una recta de la forma $y = b + mx$ que sea la que mejor represente a los n puntos de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

En la Figura 2 se muestra lo que sucede (al usar tres puntos de datos). En dicha figura se ve que si las variables x y y estuvieran relacionadas por la fórmula $y = b + mx$, entonces, por ejemplo, para $x = x_1$, el valor correspondiente de y es $b + mx_1$. Este valor es distinto del "verdadero" valor de y, o sea $y = y_1$.

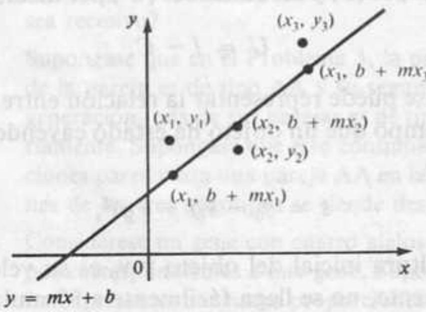


Figura 2 (Secc. 6.1)

En $\mathbb{R}^2$, la distancia entre los puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) está dada por $d = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Por lo tanto, para determinar la manera de escoger la recta $y = b + mx$ que mejor se aproxime a los datos dados, es razonable usar como criterio la selección de la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre los puntos y la recta. Nótese que como la distancia entre (x_1, y_1) y $(x_1, b + mx_1)$ es $y_1 - (b + mx_1)$, nuestro problema (para n puntos de datos) se puede enunciar de la siguiente manera:

> Encontrar números m y b tales que sea mínima la suma
>
> $$[y_1 - (b + mx_1)]^2 + [y_2 - (b + mx_2)]^2 + \ldots + [y_n - (b + mx_n)]^2. \quad (1)$$
>
> Para esta selección de m y b, la recta $y = mx + b$ se llama **aproximación de la recta de mínimos cuadrados a los puntos de datos** $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Habiendo definido el problema, podemos escoger un método para encontrar la aproximación por mínimos cuadrados. Esto se hace más fácil si se escribe la información en notación matricial. Si los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) están todos en la recta $y = b + mx$ (es decir, si son colineales), tenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= b + mx_1 \\ y_2 &= b + mx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= b + mx_n \end{aligned}$$

o bien

$$\mathbf{y} = A\mathbf{u} \tag{2}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Si los puntos no son colineales, entonces $\mathbf{y} - A\mathbf{u} \neq 0$ y el problema se transforma en

> encontrar un vector $\mathbf{u}$ tal que la norma euclidiana sea mínima.
>
> $$\|\mathbf{y} - A\mathbf{u}\| \tag{4}$$

Nótese que en $\mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; en $\mathbb{R}^3$ $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, etc. Así que minimizar (4) es equivalente a minimizar la suma de los cuadrados que aparecen en (1).

Encontrar el vector minimizante $\mathbf{u}$ no es tan difícil como parece. Ya que A es una matriz $n \times 2$ y $\mathbf{u}$ es una matriz 2×1, el vector $A\mathbf{u}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ y pertenece a la imagen de A. La imagen de A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión no mayor que dos (porque a lo más dos de las columnas de A son linealmente independientes). Suponemos que $n = 3$ para ilustrar lo que debe hacerse. En $\mathbb{R}^3$, la imagen de A será un plano o una recta que pasa por el origen (porque éstos son los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión uno o dos). Véase la Figura 3.

Llamemos $\bar{\mathbf{u}}$ al vector minimizante. Entonces, de la figura (y el teorema de Pitágoras) se ve que $\mathbf{y} - A\mathbf{u}$ se minimiza cuando es ortogonal a la imagen de A. Es decir, si $\bar{\mathbf{u}}$ es el vector minimizante, entonces, para todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$,

$$A\mathbf{u} \perp (\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}). \tag{5}$$

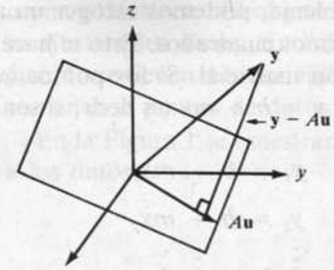


Figura 3
(Secc. 6.1)

Usando la definición del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, (5) puede expresarse como

$$A\mathbf{u}\cdot(\mathbf{y}-A\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

$$(A\mathbf{u})^t(\mathbf{y}-A\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

$$(\mathbf{u}^tA^t)(\mathbf{y}-A\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

o bien

$$\mathbf{u}^t(A^t\mathbf{y}-A^tA\bar{\mathbf{u}}) = 0. \tag{6}$$

Se puede cumplir la Ecuación (6) para todo vector $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ sólo si

$$A^t\mathbf{y}-A^tA\bar{\mathbf{u}} = 0 \tag{7}$$

Despejando $\bar{\mathbf{u}}$ de (7), se obtiene

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y}} \tag{8}$$

Aquí hemos supuesto que A^tA es inversible. Esto siempre se cumple cuando los n puntos datos no son colineales. La demostración de este enunciado es difícil y se pospone para el final de la sección.

Ejemplo 1 Encontrar la recta de mejor ajuste a los puntos de datos (1, 4), (−2, 5), (3, −1) y (4, 1).

Solución Aquí se tiene que

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 4\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{y}=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^tA=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 30\end{pmatrix},\ (A^tA)^{-1}=\frac{1}{84}\begin{pmatrix}30 & -6\\ -6 & 4\end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 300 \\ -74 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.57 \\ -0.88 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la recta de mejor ajuste está dada por

$$y = 3.57 - 0.88x.$$

Esta recta y los cuatro puntos dados se representan en la Figura 4.

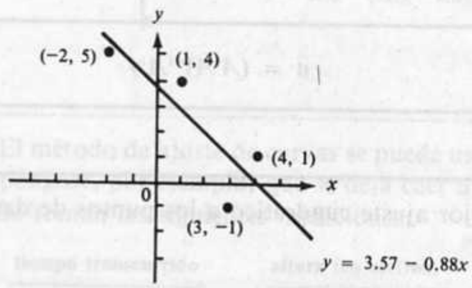


Figura 4
(Secc. 6.1)

6.2 Aproximación cuadrática

Aquí se pretende ajustar una curva cuadrática a los n puntos datos. Recuérdese que una cuadrática en x es cualquier expresión de la forma

$$y = a + bx + cx^2 \tag{9}$$

La Ecuación (9) es la de una parábola en el plano. Si los n puntos dados estuvieran en la parábola, se tendría

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 \\ &\vdots \\ y_n &= a + bx_n + cx_n^2 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{Para } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \tag{11}$$

(10) puede escribirse como

$$\mathbf{y} = A\mathbf{u},$$

igual que antes. Si los puntos dados no están todos en la misma parábola, entonces $\mathbf{y} - A\mathbf{u} \neq 0$ para cualquier vector $\mathbf{u}$ y nuestro problema vuelve a ser

$$\boxed{\text{encontrar un vector } u \text{ en } \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|\mathbf{y} - A\mathbf{u}\| \text{ sea mínimo.}}$$

Usando un razonamiento similar al anterior, se puede demostrar que si los puntos de datos no están todos en una parábola, entonces $A'A$ es inversible y el vector $\bar{\mathbf{u}}$ está dado por

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} = (A'A)^{-1}A'\mathbf{y}} \qquad (12)$$

Ejemplo 2 Encontrar el mejor ajuste cuadrático a los puntos de datos del Ejemplo 1.

Solución

$$\text{Aquí} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \; A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces} \quad A'A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 30 \\ 6 & 30 & 84 \\ 30 & 84 & 354 \end{pmatrix}, \; (A'A)^{-1} = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{\mathbf{u}} = (A'A)^{-1}A'y = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3565 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 17820 \\ -3852 \\ -180 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.75 \\ -0.81 \\ -0.04 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el mejor ajuste cuadrático a los datos está dado por la parábola

$$y = 3.75 - 0.81x - 0.04x^2.$$

La parábola y los puntos de datos se muestran en la Figura 5.

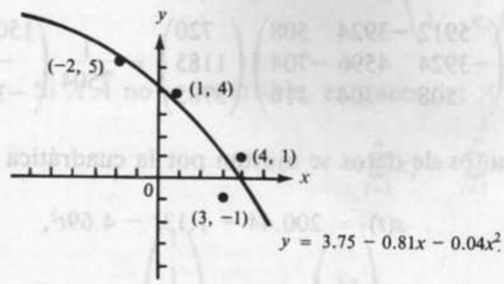


Figura 5 (Secc. 6.2)

Ejemplo 3 El método de ajuste de curvas se puede usar para medir constantes físicas. Supóngase, por ejemplo, que se deja caer un objeto desde una altura de 200 m. Se toman las siguientes mediciones:

tiempo transcurrido	altura (en metros)
0	200
1	195
2	180
4	120
6	25

Si se deja caer un objeto de una altura de 200 m, partiendo del reposo, entonces su altura después de t segundos está dada por

$$s = 200 - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Para estimar el valor de g, podemos ajustar una cuadrática a los cinco puntos dados anteriormente. Los coeficientes del término en t^2 será, si las mediciones son exactas, una aproximación razonable al número $-(1/2)g$. Usando la misma notación que antes, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix},\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 36 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 195 \\ 180 \\ 120 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{pmatrix},\ (A^tA)^{-1} = \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 5912 & -3924 & 508 \\ -3924 & 4596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{u} = \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 5912 & -3924 & 508 \\ -3924 & 4596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 195 \\ 180 \\ 120 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 5912 & -3924 & 508 \\ -3924 & 4596 & -704 \\ 508 & -704 & 116 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 720 \\ 1185 \\ 3735 \end{pmatrix} = \frac{1}{7504}\begin{pmatrix} 1504080 \\ -8460 \\ -35220 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 200.44 \\ -1.13 \\ -4.69 \end{pmatrix}$$

Así que los puntos de datos se ajustan por la cuadrática

$$s(t) = 200.44 - 1.13t - 4.69t^2,$$

y se tiene que $1/2g \approx 4.69$, o sea

$$g \approx 2(4.69) = 9.38 \text{ m/s}^2.$$

Este valor está razonablemente cerca del valor correcto, 9.81 m/s^2. Para obtener una aproximación más exacta de g sería necesario partir de observaciones más exactas.

Anotamos aquí que las aproximaciones por polinomios de orden superior se llevan a cabo virtualmente en la misma forma. Para ver los detalles, consúltense los Problemas 7 y 9.

Concluimos este capítulo demostrando el resultado que garantiza que la Ecuación (8) siempre será válida, excepto cuando los puntos de datos están en una misma recta vertical.

Teorema 1 ***(Opcional).*** Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ n puntos en $\mathbb{R}^2$, y supóngase que no son iguales todas las x_i. Entonces si se da A como en (3), la matriz A^tA es una matriz de 2×2 inversible.

Nota. Si $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$, entonces todos los puntos de datos están en la recta vertical $x = x_1$, y la mejor aproximación lineal es, claro está, esa recta.

Demostración del Teorema 1 Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Puesto que no todas las x_i son iguales, las columnas de A son linealmente independientes. Ahora bien,

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}.$$

Si A^tA no es inversible, entonces det $A^tA = 0$. Pero esto quiere decir que

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{13}$$

Sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Entonces

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = n,\ \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

por lo que la Ecuación (13) se puede escribir

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{x}\|^2 = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}|^2$$

o, extrayendo raíces cuadradas,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{x}\|.$$

Ahora, por la desigualdad de Schwartz $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{x}\|$ dándose la igualdad si y sólo si $\mathbf{x}$ es un múltiplo constante de $\mathbf{u}$. Pero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ son las columnas de A, que son linealmente independientes, por hipótesis. Esta contradicción demuestra el teorema. ■

Problemas • Capítulo 6

En los Problemas 1-3 encuéntrese la recta de mejor ajuste a los puntos de datos que se dan.

1. (1, 3), (−2, 4), (7, 0)
2. (−3, 7), (4, 9)
3. (1, −3), (4, 6), (−2, 5), (3, −1)

En los Problemas 4-6 encuéntrese el mejor ajuste cuadrático a los puntos de datos que se dan.

4. (2, −5), (3, 0), (1, 1), (4, −2)
5. (−7, 3), (2, 8), (1, 5)
6. (1, −1), (3, −6), (5, 2), (−3, 1), (7, 4)

7. La cúbica general está dada por

$$a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Demuéstrese que la mejor aproximación cúbica a n puntos de datos está dada por

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y},$$

donde $\mathbf{y}$ es lo mismo que antes, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix}.$$

8. Encuéntrese la mejor aproximación cúbica a los puntos de datos (3, −2), (0, 3), (−1, 4), (2, −2), (1, 2).

9. El polinomio general de grado k está dado por

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k.$$

Demuéstrese que el mejor ajuste de grado k a los n puntos de datos está dado por

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{pmatrix}.$$

10. Todos los puntos (1, 5.52), (−1, 15.52), (3, 11.28) y (−2, 26.43) se encuentran en una misma parábola.
    (a) Encontrar la citada parábola.
    (b) Demostrar que $\|\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}\| = 0$.

11. Un fabricante compra grandes cantidades de ciertas refacciones para máquinas. Encuentra que su costo depende del número de cajas de piezas que compre una vez y que el costo por unidad disminuye al aumentar el número de unidades compradas. Supone que el costo es una función cuadrática del volumen y, de experiencia anterior, obtiene la tabla siguiente:

Número de cajas	**Costo total**
10	$150
30	$260
50	$325
100	$500
175	$670

Encuéntrese su función de costo total.

12. Una persona lanza al aire una pelota. Su altura está dada por $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$. Se hicieron las siguientes mediciones:

Tiempo transcurrido (segundos)	Altura (en pies)
1	57
1.5	67
2.5	68
4	9.5

Usando estos datos, estímese

(a) la altura desde la cual se soltó la pelota

(b) su velocidad inicial

(c) g (en pie/s^2).

CAPÍTULO **7**

Teoría de los grafos

En los últimos años se ha puesto mucha atención en una área relativamente nueva de la investigación matemática que se llama **teoría de los grafos**. Estas representaciones, que serán definidas próximamente, sirven para estudiar las interrelaciones entre los componentes de redes de actividades que se presentan en el comercio, en las ciencias sociales, en la medicina y en muchas otras áreas. Por ejemplo, los grafos son útiles para estudiar las relaciones familiares en una sociedad tribal, la difusión de una enfermedad contagiosa, o una red de vuelos que conectan un número dado de ciudades importantes. La teoría de los grafos es una materia amplia. En este capítulo sólo se darán algunas definiciones y se mostrará la estrecha relación entre la teoría de los grafos y la teoría de matrices.

Mostramos ahora cómo se puede presentar un grafo en la práctica.

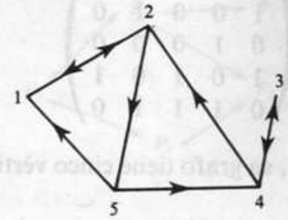
Ejemplo 1 Supóngase que estamos estudiando un sistema de comunicaciones compuesto de enlaces telefónicos. En este sistema hay cinco estaciones. En la tabla que sigue se indican las líneas disponibles desde y hacia las estaciones.

Tabla 1 *(Cap. 7)*

Estación	1	2	3	4	5
1		√			
2	√				√
3				√	
4		√	√		
5	√			√	

Por ejemplo, la marca en la casilla 1, 2 indica que hay una línea de la estación 1 a la estación 2. La información en esta tabla se puede representar por un grafo dirigido, como se muestra a continuación:

Figura 1
(Cap. 7)



En general, un **grafo dirigido** es una colección de n puntos llamados **vértices** y denotados por $V_1, V_2, \ldots, V_n$, con un número finito de **aristas** que unen pares de vértices. Cualquier grafo dirigido se puede representar por una matriz de $n \times n$, donde el número en la posición i, j es el número de aristas que unen el vértice i al vértice j.

Ejemplo 2 La representación matricial del grafo de la Figura 1 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ejemplo 3 Encontrar las representaciones matriciales de los siguientes grafos dirigidos.

Figura 2 (a)
(Cap. 7)

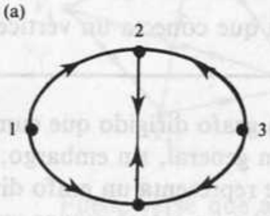
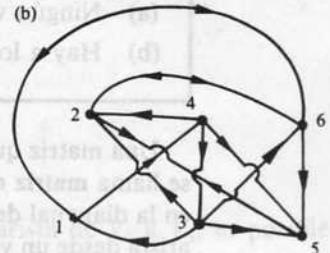


Figura 3 (b)
(Cap. 7)



Solución

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4 Trazar el grafo representado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución Como A es una matriz de 5×5, su grafo tiene cinco vértices, y es el que aparece a continuación:

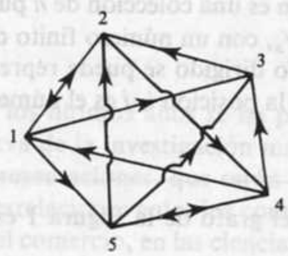


Figura 4 (Cap. 7)

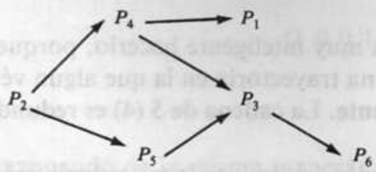
Observación. En los ejemplos considerados, los grafos dirigidos que han aparecido, satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) Ningún vértice está conectado consigo mismo.
(b) Hay a lo más una arista que conecta un vértice con otro.

Una matriz que representa un grafo dirigido que cumple estas condiciones se llama **matriz de incidencia.** En general, sin embargo, es posible tener un 1 en la diagonal de una matriz que representa un grafo dirigido (indicando una arista desde un vértice a sí mismo) o un entero mayor que 1 en la matriz (indicando más de una trayectoria de un vértice a otro). Para evitar situaciones más complicadas (pero que se pueden resolver), hemos supuesto, y así lo seguiremos haciendo, que se cumplen (a) y (b).

Ejemplo 5 Los sociólogos usan a menudo grafos dirigidos para estudiar interacciones en un grupo. En muchas situaciones de grupo, ciertos individuos dominan a otros. Este dominio puede ser físico, intelectual o emocional. Para ser más específicos, supongamos que en cierto grupo de seis personas, un sociólogo ha podido determinar quién domina a quién. (Esto se pudo hacer por pruebas sicolágicas, por medio de cuestionarios o, simplemente, por observación.) El siguiente grafo dirigido indica los descubrimientos del sociólogo:

Figura 5
(Cap. 7)

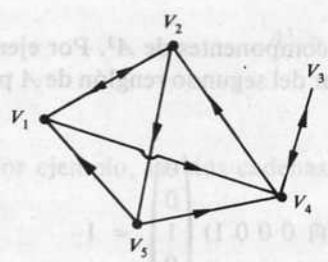


La representación matricial de este grafo es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De poca utilidad sería la representación matricial de los grafos si sólo fuera posible trazarlos. Hay varias preguntas que se podrían hacer sobre los grafos, que podrían no tener respuesta evidente. Para ilustrar esto, considérese el grafo siguiente:

Figura 6
(Cap. 7)



Puede verse que aunque no hay arista de V_1 a V_5, es posible mandar un mensaje entre estos vértices. De hecho, hay al menos dos maneras de hacerlo:

$$V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_5, \tag{2}$$

y

$$V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_5. \tag{3}$$

Una ruta de un vértice a otro se llama *trayectoria* o *cadena*. La trayectoria de V_1 a V_5 en (2) se llama *cadena de 2* (aristas), porque se recorren dos aristas. La trayectoria en (3) se denomina *cadena de 3*. En general, una trayectoria que recorre n aristas (y por lo tanto que pasa por $n + 1$ vértices) se llama *cade-*

na de n. Volviendo ahora a nuestro grafo, se ve que también se puede ir de V_1 a V_5 a través de la siguiente cadena de 5:

$$V_1 \to V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2 \to V_5. \tag{4}$$

Sin embargo, no sería muy inteligente hacerlo, porque en parte de esa trayectoria no se avanza. Una trayectoria en la que algún vértice se visita más de una vez se llama **redundante**. La cadena de 5 (4) es redundante porque el vértice 4 se visita dos veces.

Es muy interesante poder determinar la trayectoria más corta (si existe) que une dos vértices en un grafo dirigido. Existe un teorema que muestra cómo se puede hacer esto, pero primero haremos una observación interesante. Como hemos visto, la representación matricial del grafo del Ejemplo 1 está dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando queda

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos más de cerca los componentes de A^2. Por ejemplo, el 1 en la posición 2, 4 es el producto escalar del segundo renglón de A por la cuarta columna de A:

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

En el segundo renglón, el último 1 representa el enlace

$$V_2 \to V_5.$$

En la cuarta columna, el último 1 representa el enlace

$$V_5 \to V_4.$$

El producto de estos unos representa la cadena de 2:

$$V_2 \to V_5 \to V_4.$$

De manera semejante, el 2 en la posición 5, 2 de A^2 es el producto escalar del quinto renglón por la segunda columna de A:

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\,.$$

Razonando de la misma manera, puede verse que esto indica las dos cadenas de 2:

$$V_5 \to V_1 \to V_2$$

y

$$V_5 \to V_4 \to V_2.$$

De hecho, generalizando estos hechos, se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1 Si A es la matriz de incidencia de un grafo dirigido, entonces la ij-ésima componente de A^2 representa el número de cadenas de 2 del vértice i al vértice j.

Razonando de igual manera, se puede demostrar que el número de cadenas de 3 que unen el vértice i al vértice j es la ij-ésima componente de A^3. En el Ejemplo 1:

$$A^3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & 2 & 1 & 1 & 0\\2 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Por ejemplo, las dos cadenas de 3, del vértice 4 al vértice 2 son:

$$V_4 \to V_3 \to V_1 \to V_2$$

y

$$V_4 \to V_2 \to V_1 \to V_2$$

Ambas son redundantes. Las dos cadenas de 3, del vértice 5 al vértice 1 son:

$$V_5 \to V_4 \to V_2 \to V_1$$

y

$$V_5 \to V_1 \to V_2 \to V_1.$$

El teorema que sigue contesta la pregunta planteada antes sobre la búsqueda de una cadena mínima que una dos vértices. No se dará la demostración, pero partiendo de lo discutido antes, debe quedar razonablemente claro que se verifica el resultado.

Teorema 2 Sea A una matriz de incidencia de un grafo dirigido. Y sea también $a_{ij}^{(n)}$ la ij-ésima componente de A^n.

> (a) Si $a_{ij}^{(n)} = k$, entonces hay exactamente k cadenas de n, del vértice i al vértice j.
>
> Además,
>
> (b) si $a_{ij}^{(m)} = 0$ para $m < n$, entonces la cadena más corta desde el vértice i al vértice j es una cadena de n.

Ejemplo 6 En el Ejemplo 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $a_{13}^{(1)} = a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(3)} = 0$ y $a_{13}^{(4)} = 1$, se ve que la trayectoria más corta desde el vértice 1 hasta el vértice 3 es una cadena de 4. Está dada por:

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_3.$$

Nótese también que hay cinco cadenas de 5 (todas ellas redundantes) que unen el vértice 2 consigo mismo.

Ejemplo 7 En nuestro ejemplo de sociología (Ejemplo 5) una cadena (que no es una arista) representa control indirecto de una persona sobre otra. Es decir, si Pedro domina a Pablo, que a su vez domina a María, puede verse que Pedro ejerce algún control (aunque indirecto) sobre María. Para determinar quién tiene control directo y/o indirecto sobre quién, basta calcular potencias de la matriz de incidencia A.

Se tiene así que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Del grafo se concluye, igual que de las matrices, que la persona P_2 tiene control directo o indirecto sobre otra persona. La primera tiene un control directo sobre P_4 y P_5, control de segundo orden sobre P_1 y P_3, y control de tercer orden sobre P_6.

Nota. En situaciones reales, las cosas se complican mucho más. Puede haber cientos de estaciones en una red de comunicaciones o cientos de individuos en un estudio sociológico de dominantes y pasivos. En estos casos, es esencial el uso de las matrices para poder manejar la enorme cantidad de datos que se debe analizar.

Antes de terminar este capítulo, mencionaremos brevemente un concepto de gran importancia en la teoría de grafos. Se dice que un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si se puede llegar a cualquier vértice desde cualquier otro vértice. La gráfica del Ejemplo 1 es fuertemente conexa porque, como se vio en el Ejemplo 6, A^5 tiene sólo un cero. Así que es posible ir de un vértice a cualquier otro medio de una cadena de 5, con la única excepción de $V_1 \rightarrow V_2$. Pero hay una arista de V_1 a V_2. Es fácil ver que la gráfica del Ejemplo 5 no es fuertemente conexa.

El concepto de conexidad fuerte en un grafo es bastante importante en la teoría de matrices. Una discusión interesante de la conexión entre grafos fuertemente conexos y matrices irreducibles se realiza en el libro *Matrix Iterative Analysis*, de Richard Varga (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1962).

Problemas • Capítulo 7

En los Problemas del 1-4, encuéntrense las matrices que representan los grafos dados.

1.

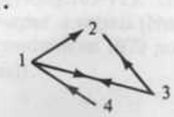
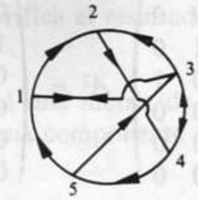


Figura 7 (Cap. 7)

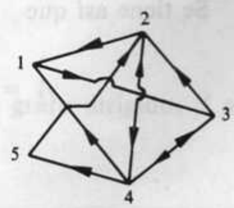
2.

Figura 8
(Cap. 7)



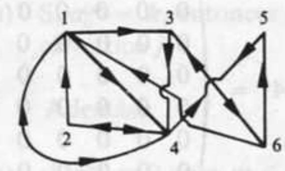
3.

Figura 9
(Cap. 7)



4.

Figura 10
(Cap. 7)



En los Problemas 5-7 dibújense los grafos representados por las matrices dadas.

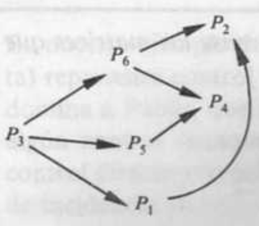
5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Determínese el número de cadenas de 2, cadenas de 3 y cadenas de 4 que conectan los vértices del grafo del Problema 2.
9. Hágase lo mismo para el grafo del Problema 3.
10. Determínense cuáles de los grafos en los Problemas 1-7 son fuertemente conexos.
11. En cierta comunidad, ciertas parejas de personas están relacionadas por la sangre. Explíquese por qué debe ser simétrica la matriz que representa un grafo que muestra las relaciones.
12. Demuéstrese que no es redundante la trayectoria más corta que une dos vértices en un grafo dirigido.
13. Si A es la matriz de incidencia de un grafo dirigido, muéstrese que $A + A^2$ representa el número total de enlaces de uno y de dos pasos entre los vértices.
14. Describa la dominancia directa e indirecta expresada por el grafo siguiente:

Figura 11
(Cap. 7)



CAPÍTULO **8**

Análisis de insumo y producción (o de entradas y salidas)

La macroeconomía es una rama de la economía que trata de los aspectos amplios y generales de un sistema económico, por ejemplo, en las relaciones entre los ingresos, las inversiones y los gastos de un país en su totalidad. Se han desarrollado muchas técnicas para tratar estos problemas en la macroeconomía. Discutiremos uno de los más importantes de tales métodos en esta sección.

Para introducir nuestro modelo suponemos que el Congreso de Estados Unidos aprobó una gran disminución en los gastos para construcción de carreteras. Si no se diera además un aumento en otras inversiones, se esperaría una disminución en los ingresos y en el empleo. Por otra parte, supóngase que el gobierno aumentara sus gastos militares en una cantidad equivalente a la disminución en la construcción de carreteras. ¿Cuál sería el cambio, si ocurriera alguno, en los ingresos y el empleo?

La respuesta es compleja por el hecho de que la construcción de carreteras y los proyectos militares usan el dinero de maneras distintas. Entonces, aunque podría darse un aumento en los ingresos y en el nivel de ocupación entre los trabajadores de industrias como las fabricantes de aviones y barcos, éso podría no compensar las pérdidas y el desempleo en tal industria constructora (al menos a corto plazo). El problema radica en que en la economía de Estados Unidos se producen muchos bienes y servicios altamente relacionados entre sí. Los aumentos o recortes en una industria se resienten frecuentemente también en otras industrias.

Un modelo para analizar estos efectos fue desarrollado por el economista estadunidense Wassily W. Leontief en 1936.* Tal modelo (o procedimiento)

* Este modelo fue presentado en el artículo precursor de Leontief "Qualitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States", *Review of Economic Statistics* 18(1936):105-125. Una versión actualizada del modelo aparece en el libro de Leontief *Input-Output Analysis* (Nueva York: Oxford University Press, 1966). Leontief ganó el premio Nobel de economía en 1973 por su desarrollo del análisis de (de insumo y producción (o de entradas y salidas)).

se llama **análisis de entradas y salidas**(o **de insumo y producción**). Antes de describir en detalle este modelo, presentamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1 Considérese un modelo muy simplificado de una economía en la que se producen dos artículos: automóviles (incluyendo camiones) y acero. Cada año se da una **demanda externa** de 360,000 toneladas de acero y de 110,000 automóviles. Aquí la palabra *externa* significa que la demanda proviene de fuera de la economía. Por ejemplo, si fuera un modelo de una porción de la economía de Estados Unidos, la demanda podría venir de otros países (de tal manera que el acero y los automóviles se exportarían), de otras industrias en Estados Unidos, y de empresas privadas.

Pero la demanda externa no es la única que se da en las dos industrias consideradas. Se requiere acero para producir automóviles. También se requieren automóviles para producir automóviles, porque las plantas manufactureras de esos vehículos requieren autos y camiones para transportar los materiales y los empleados. De igual manera, la industria del acero requiere acero (para su maquinaria) y automóviles (para el transporte del producto y de los trabajadores) en su operación. Así que cada una de las dos industrias en el sistema impone demandas a sí misma y a la otra industria. Estas acciones se llaman **demandas internas.**

En nuestro modelo simplificado, se puede suponer que la industria del acero requiere 1/4 de tonelada de acero y 1/12 de automóvil (o camión) para producir 1 tonelada de acero (es decir, se usa un automóvil o camión en la producción de 12 toneladas de acero). También la industria automotriz requiere de 1/2 tonelada de acero y 1/9 de vehículo para producir un automóvil. La pregunta planteada por el modelo de Leontief de entradas y salidas es entonces: ¿Cuántas toneladas de acero y cuántos automóviles se deben producir cada año para que la disponibilidad de cada uno sea igual a la demanda total?

Solución Sean x y y el número total de toneladas de acero y el número de automóviles, respectivamente, en cierto año. Esto constituye la oferta (o lo disponible). Si, por ejemplo, se requiere 1/4 de tonelada de acero para producir una tonelada de este metal, se necesita entonces $1/4x$ toneladas de acero para producir x toneladas de acero. Similarmente, se requiere $1/2y$ toneladas de acero para producir y automóviles. Entonces, el total de la demanda interna en la industria productora del acero es de $1/4x + 1/2y$, y la demanda total (sumando la demanda externa) es de $1/4x + 1/2y + 360{,}000$. De manera semejante, la demanda total en la industria automotriz es de $1/12x + 1/9y + 110{,}000$. Igualando la oferta con la demanda, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}y + 360{,}000 \\ y &= \tfrac{1}{12}x + \tfrac{1}{9}y + 110{,}000. \end{aligned} \tag{1}$$

Como $x - 1/4x = 3/4x$ y $y - 1/9y = 8/9y$, se puede escribir el sistema (1) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}y &= 360{,}000 \\ -\tfrac{1}{12}x + \tfrac{8}{9}y &= 110{,}000. \end{aligned} \tag{2}$$

Resolveremos el sistema (2) por reducción de renglones.

$$\left(\begin{array}{rr|r} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 360{,}000 \\ -\frac{1}{12} & \frac{8}{9} & 110{,}000 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{4}{3})} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{2}{3} & 480{,}000 \\ -\frac{1}{12} & \frac{8}{9} & 110{,}000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{1,2}(\frac{1}{12})} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{2}{3} & 480{,}000 \\ 0 & \frac{5}{6} & 150{,}000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{6}{5})} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{2}{3} & 480{,}000 \\ 0 & 1 & 180{,}000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_{2,1}(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 600{,}000 \\ 0 & 1 & 180{,}000 \end{array}\right).$$

Entonces, para que la oferta sea exactamente igual a la demanda, se deben producir 600,000 toneladas de acero y 180,000 automóviles (o camiones).

Ahora describimos el modelo general de Leontief de insumo y producción. Supóngase que un sistema económico tiene n industrias. Otra vez, hay dos clases de demandas en cada industria. Primero está la demanda *externa* de fuera del sistema. Si el sistema es un país, por ejemplo, la demanda externa podría ser de otro país. En segundo lugar está la demanda de una industria sobre otra, dentro del mismo sistema. Como se planteó, en Estados Unidos se da una demanda en la producción de acero por por parte de la industria automotriz.

Sea e_i la demanda externa sobre la industria i. Sea a_{ij} la demanda interna sobre la industria i por la industria j. Más precisamente, a_{ij} representa el número de unidades de producto de la industria i necesarias para producir 1 unidad de producto de la industria j. Sea x_i la producción de la industria i. Ahora suponemos que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de las demandas interna y externa. Para calcular la demanda interna en la industria 2, por ejemplo, notamos que $a_{21}x_1$ es la demanda sobre la industria 2 por parte de la industria 1. Así, el total de la demanda interna sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$.

Así llegamos al siguiente sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar la demanda total con la producción de cada industria.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \quad & \ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n \end{aligned} \tag{3}$$

O, escribiendo (3) de otra manera,

$$(1 - a_{11})x_1 - \qquad a_{12}x_2 - \cdots - \qquad a_{1n}x_n = e_1$$

$$
\begin{aligned}
-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - \quad a_{2n}x_n &= e_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
-a_{n1}x_1 - \quad a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n &= e_n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

El sistema (4) de n ecuaciones en n incógnitas es muy importante en el análisis económico.

Muchas veces conviene escribir los números a_{ij} en una matriz A, llamada **matriz de tecnología**. Se tiene así

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}
$$

Nótese que la matriz de tecnología es una matriz cuadrada.

Ejemplo 2 Supóngase que en un sistema económico con tres industrias las demandas externas son, respectivamente, de 10, 25 y 20. Considérese que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$ Encontrar la producción en cada industria para equilibrar con exactitud la oferta con la demanda.

Solución En este caso, $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$. Así que el sistema (4) es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10 \\
-0.4x_1 + 0.9x_2 - \ 0.3x_3 &= 25 \\
-0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema mediante una calculadora, se obtiene, sucesivamente (haciendo uso de aproximación de cinco cifras significativas y el método de eliminación de Gauss-Jordan)

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0.8 & -0.5 & -0.15 & 10 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array}\right)
$$

Ésta es la matriz de tecnología

$$
\xrightarrow{M_1\left(\frac{1}{0.8}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.625 & -0.1875 & 12.5 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[A_{1,3}(0.25)]{A_{1,2}(0.4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.625 & -0.1875 & 12.5 \\ 0 & 0.65 & -0.375 & 30 \\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 23.125 \end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow{M_2(\frac{1}{0.65})}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -0.625 & -0.1875 & 12.5\\ 0 & 1 & -0.57692 & 46.15385\\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 23.125\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,3}(0.65625)]{A_{2,1}(0.625)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -0.54808 & 41.34616\\ 0 & 1 & -0.57692 & 46.15385\\ 0 & 0 & 0.42453 & 53.41346\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3(1/0.42453)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -0.54808 & 41.34616\\ 0 & 1 & -0.57692 & 46.15385\\ 0 & 0 & 1 & 125.81787\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{3,2}(0.57692)]{A_{3,1}(0.54808)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 110.30442\\ 0 & 1 & 0 & 118.74070\\ 0 & 0 & 1 & 125.81787\end{array}\right)$$

Se concluye que las producciones requeridas para igualar la disponibilidad con la demanda son, aproximadamente, $x_1 = 110$, $x_2 = 119$ y $x_3 = 126$.

Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de tecnología, entonces

$$I - A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 1 - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & 1 - a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{6}$$

y el sistema (4) se puede escribir

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{e}, \tag{7}$$

donde $\mathbf{e} = \begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}$. La matriz $I - A$ en este modelo se llama **matriz de Leontief**.

Suponiendo que dicha matriz de Leontief es inversible, el vector de producción **x** puede expresarse como

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{e} \tag{8}$$

Hay una ventaja en escribir el vector de producción en la forma (8). La matriz de tecnología A es la matriz de las demandas internas, que —en periodos relativamente largos— permanecen fijas. Sin embargo, el vector $\mathbf{e}$ de la demanda externa puede cambiar con cierta frecuencia. Ordinariamente se requieren muchos cálculos para obtener $(I - A)^{-1}$. Pero una vez calculada esta matriz, se puede encontrar el vector de producción $\mathbf{x}$ correspondiente a cualquier vector $\mathbf{e}$ de demanda por una simple multiplicación de matrices. Si no se determina $(I - A)^{-1}$, se tendría que resolver el problema por eliminación de Gauss-Jordan cada vez que cambiara el vector $\mathbf{e}$.

Ejemplo 3 En un sistema económico con tres industrias, supóngase que la matriz A de tecnología está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.15 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Encontrar la producción total correspondiente a cada uno de los siguientes vectores de demanda.

(a) $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$

Solución La matriz de Leontief es

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 & -0.15 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 \end{pmatrix}$$

La parte (a) se resolvió por eliminación de Gauss-Jordan en el Ejemplo 2. Ahora resolveremos los tres problemas esencialmente al mismo tiempo evaluando $(I - A)^{-1}$. Como en el Ejemplo 2, se hacen los cálculos conservando cinco cifras decimales (a la derecha del punto decimal).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.8 & -0.5 & -0.15 & 1 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.9 & 0.3 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 0.85 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_1(\frac{1}{0.8})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.625 & -0.1875 & 1.25 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 0 & 1 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{1,3}(0.25)]{A_{1,2}(0.4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.625 & -0.1875 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & -0.375 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 0.3125 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2\left(\frac{1}{0.65}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.625 & -0.1875 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 0.76923 & 1.53846 & 0 \\ 0 & -0.65625 & 0.80313 & 0.3125 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,3}(0.65625)]{A_{2,1}(0.625)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.54808 & 1.73077 & 0.96154 & 0 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 0.76923 & 1.53846 & 0 \\ 0 & 0 & 0.42453 & 0.81731 & 1.00961 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3\left(\frac{1}{0.42453}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.54808 & 1.73077 & 0.96154 & 0 \\ 0 & 1 & -0.57692 & 0.76923 & 1.53846 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{3,2}(0.57692)]{A_{3,1}(0.54808)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 0 & 1 & 0 & 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 0 & 0 & 1 & 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix}$$

¡Esto debe comprobarse!

$$\begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 & -0.15 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.00001 & 0 & -0.00001 \\ 0 & 0.99999 & -0.00002 \\ 0.00001 & -0.00002 & 0.99998 \end{pmatrix}$$

Lo anterior verifica la corrección de la respuesta y manifiesta las inexactitudes pequeñas (en este caso) debidas a los errores de redondeo.

Ahora podremos resolver los problemas en cuestión:

(a) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110.30 \\ 118.74 \\ 125.82 \end{pmatrix}$$

de donde $x_1 \approx 110$, $x_2 \approx 119$, $x_3 \approx 126$. Esta es la respuesta obtenida en el Ejemplo 2.

(b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 138.73 \\ 140.77 \\ 170.66 \end{pmatrix}$$

Ahora $x_1 \approx 139$, $x_2 \approx 141$ y $x_3 \approx 171$.

(c) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.78594 & 2.26497 & 1.29103 \\ 1.87992 & 2.91048 & 1.35896 \\ 1.92521 & 2.37818 & 2.35555 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 374.63 \\ 415.39 \\ 413.35 \end{pmatrix}$$

Así que $x_1 \approx 375$, $x_2 \approx 415$ y $x_3 \approx 413$.

Obsérvese que todas estas respuestas se pueden verificar insertando los valores calculados x_1, x_2 y x_3 en la ecuación original, $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{e}$.

Observación. Requirió un poco más de trabajo en la parte (a) calcular $(I - A)^{-1}$ que el que se necesitó en el Ejemplo 2 para resolver el sistema por reducción de renglones. Sin embargo, cuando ya se tiene $(I - A)^{-1}$, se pudieron resolver (b) y (c) con muy poco trabajo adicional.

Ejemplo 4 Leontief usó su modelo para analizar la economía de Estados Unidos del año de 1958.* Este investigador dividió la economía en 81 sectores y los agrupó en seis familias de sectores relacionados. Por simplicidad, tratamos cada familia de sectores como un solo sector para poder analizar la economía estadunidense como una con seis industrias.

Tabla 1 (Cap. 8)

Sector	Ejemplos
Final no metálica (FN)	Muebles, alimentos procesados
Final metálica (FM)	aparatos domésticos, Vehículos automotores
Básica metálica (BM)	Productos de taller, minería
Básica no metálica (BN)	Agricultura, artes gráficas
Energía (E)	Petróleo, carbón
Servicios (S)	Diversiones, bienes raíces

Demandas Internas en la economía de EE.UU. en 1958

Tabla 2 (Cap. 8)

	FN	FM	BM	BN	E	S
FN	0.170	0.004	0	0.029	0	0.008
FM	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
BM	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
BN	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.039	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

* *Scientific American* (abril, 1965):26-27.

Estas industrias están enlistadas en la Tabla 1. La tabulación de entradas y salidas, Tabla 2, muestra las demandas internas en 1958 basadas en los datos de Leontief. Las unidades en la tabla son millones de dólares. Así, por ejemplo, el número 0.173 en la posición 6, 5 significa que para producir \$1 millón de energía, se necesita proporcionar \$0.173 millones = \$173,000 de servicios. De manera semejante, el 0.037 en la posición 4,2 quiere decir que para producir \$1 millón de productos finales metálicos, se necesita gastar \$0.037 millones = \$37,000 en productos básicos no metálicos. Por último, Leontief estimó las siguientes demandas sobre la economía de Estados Unidos de 1958 (en millones de dólares), según se muestra en la Tabla 3. Para poner en marcha la economía estadunidense en 1958 satisfaciendo todas las demandas externas, ¿cuántas unidades en cada sector se deben producir?

Tabla 3 (Cap. 8) *Demandas Externas sobre la Economía de E.U. en 1958 (millones de dólares)*

FN	\$99,640
FM	\$75,548
BM	\$14,444
BN	\$33,501
E	\$23,527
S	\$263,985

Solución La matriz de tecnología está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 99{,}640 \\ 75{,}548 \\ 14{,}444 \\ 33{,}501 \\ 23{,}527 \\ 263{,}985 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de Leontief, restamos y entonces queda

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.830 & -0.004 & 0 & -0.029 & 0 & -0.008 \\ -0.003 & 0.705 & -0.018 & -0.002 & -0.004 & -0.016 \\ -0.025 & -0.173 & 0.540 & -0.007 & -0.011 & -0.007 \\ -0.348 & -0.037 & -0.021 & 0.597 & -0.011 & -0.048 \\ -0.007 & -0.001 & -0.039 & -0.025 & 0.642 & -0.025 \\ -0.120 & -0.074 & -0.104 & -0.123 & -0.173 & 0.766 \end{pmatrix}$$

Es muy tedioso el cálculo de la inversa de una matriz de 6 × 6. Usando tres decimales en una calculadora, se obtiene la siguiente matriz. Se omitieron los pasos intermedios.

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.006 & 0.064 & 0.007 & 0.018 \\ 0.017 & 1.436 & 0.057 & 0.012 & 0.020 & 0.032 \\ 0.071 & 0.465 & 1.877 & 0.019 & 0.045 & 0.031 \\ 0.751 & 0.134 & 0.100 & 1.740 & 0.066 & 0.124 \\ 0.060 & 0.045 & 0.130 & 0.082 & 1.578 & 0.059 \\ 0.339 & 0.236 & 0.307 & 0.312 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector de producción "ideal" está dado por

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.006 & 0.064 & 0.007 & 0.018 \\ 0.017 & 1.436 & 0.057 & 0.012 & 0.020 & 0.032 \\ 0.071 & 0.465 & 1.877 & 0.019 & 0.045 & 0.031 \\ 0.751 & 0.134 & 0.100 & 1.740 & 0.066 & 0.124 \\ 0.060 & 0.045 & 0.130 & 0.082 & 1.578 & 0.059 \\ 0.339 & 0.236 & 0.307 & 0.312 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99{,}640 \\ 75{,}548 \\ 14{,}444 \\ 33{,}501 \\ 23{,}527 \\ 263{,}985 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 131{,}161 \\ 120{,}324 \\ 79{,}194 \\ 178{,}936 \\ 66{,}703 \\ 426{,}542 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que se requerirían 131,161 unidades (con un valor de \$131,161 millones) de productos finales no metálicos; 120,324 unidades de productos finales metálicos; 79,194 unidades de productos metálicos básicos; 178,936 unidades de productos básicos no metálicos; 66,703 unidades de energía, y 426,542 unidades de servicio para mantener en marcha la economía de Estados Unidos. en 1958 y satisfacer las demandas externas.

Problemas • Capítulo 8

1. En el modelo de insumo y producción (o entradas y salidas) de Leontief, supóngase que hay tres industrias y además que $e_1 = 10$, $e_2 = 15$, $e_3 = 30$, $a_{11} = 1/3$, $a_{12} = 1/2$, $a_{13} = 1/6$, $a_{21} = 1/4$, $a_{22} = 1/4$, $a_{23} = 1/8$, $a_{31} = 1/12$, $a_{32} = 1/3$ y $a_{33} = 1/6$. Determine la producción de cada industria de manera que la disponibilidad u oferta iguale exactamente a la demanda.
2. Resuelva de nuevo el Problema 1 si $a_{11} = 0.1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 0.05$, $a_{22} = 0.01$, $a_{23} = 0.05$, $a_{31} = 0.1$, $a_{32} = 0.2$, $a_{33} = 0.1$, $e_1 = 10$, $e_2 = 25$, $e_3 = 15$.
3. Se pide consejo a un economista para asesorar a un país cuya economía consiste de tres industrias. Las demandas internas de estas tales industrias son $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.4$, $a_{13} = 0.2$, $a_{21} = 0.7$, $a_{22} = 0.3$, $a_{23} = 0.8$, $a_{31} = 0.3$, $a_{32} = 0.4$, $a_{33} = 0.1$. El economista se horroriza con estos datos y comenta que el país está en un serio problema económico. ¿Por qué llega a esa conclusión?
4. Encuéntrese el vector **x** de producción en el modelo de Leontief si $n = 3$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ y además

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

5. Determine el vector de producción **x** para el Problema 4 si $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix}$.
6. Determine el vector **x** de producción para el Problema 4 si $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 35 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$.

★7. Considérese una economía muy simple de tres industrias, A, B y C, representadas por la tabla dada. Los datos son en millones de dólares de productos. Obtenga la matriz de tecnología y la matriz de Leontief correspondientes a este sistema de entradas y salidas.

Productor	**Consumidor**			**Demanda externa**	**Producción total**
	A	B	C		
A	90	150	225	75	540
B	135	150	300	15	600
C	270	200	300	130	900

[*Sugerencia*: Considérese el significado de los coeficientes a_{ij} en la matriz de tecnología A.]

8. En el Problema 7, supóngase que la demanda externa cambia a 50 para A, a 20 para B y a 60 para C. Calcúlese el nuevo vector de producción.

9. Resuelva de nuevo el Problema 8 si la demanda externa es de 80 para A, de 100 para B y de 120 para C.

★**10.** En una situación similar a la del Problema 7, la economía está representada en la tabla siguiente.

Productor	**Consumidor**			**Demanda externa**	**Producción total**
	A	B	C		
A	80	100	100	40	320
B	80	200	60	60	400
C	80	100	100	20	300

Determínese el vector de producción para la economía si la demanda externa cambia a 120 para A, a 40 para B y a 10 para C.

11. Resuelva otra vez el Problema 10 si la demanda externa cambia a 60 para A, 60 para B y a 60 para C.

12. Una versión muy simplificada de la tabla de entradas y salidas para la economía de Israel en 1958 divide la economía en tres sectores —agricultura, manufacturas y energía— con el siguiente resultado.*

* Wassily Leontief, *Input-Output Economics* (Nueva York: Oxford University Press, 1966), 54-57.

	Agricultura	Manufactura	Energía
Agricultura	0.293	0	0
Manufactura	0.014	0.207	0.017
Energía	0.044	0.010	0.216

(a) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para generar una unidad de producción agrícola?

(b) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para generar 200,000 unidades de producción agrícola?

(c) ¿Cuántas unidades de producto agrícola intervienen en la producción de 50,000 unidades de energía?

(d) ¿Cuántas unidades de energía intervienen para generar 50,000 unidades de productos agrícolas?

13. Continuando con el Problema 12, las exportaciones (en miles de libras israelíes) en 1958 fueron

Agricultura	138,213
Manufacturas	17,597
Energía	1,786

(a) Obtenga y evalúe las matrices de tecnología y de Leontief.

(b) Determine el número de libras israelíes en productos agrícolas, productos manufacturados y en energía requeridos para activar este modelo de la economía israelí y exportar los valores indicados de productos.

14. La interdependencia entre la industria de vehículos de motor y otras industrias básicas en la economía de Estados Unidos de 1958 se describe por la siguiente tabla de entradas y salidas para vehículos automotores (V), acero (S), vidrio (G) y caucho (o hule) y plásticos (R).

	V	S	G	R
V	0.298	0.002	0	0
S	0.088	0.212	0	0.002
G	0.010	0	0.050	0.006
R	0.029	0.003	0.004	0.030

La demanda externa para estos productos (en millones de dólares) es

V	5444
S	3276
G	119
R	943

¿Cuántos millones de dólares de cada una de estas industrias se necesita para mantener activa la economía y satisfacer la demanda externa?

15. Un análisis de entradas y salidas en la economía británica de 1963* se muestra simplificado a continuación en términos de cuatro sectores: no metales (N), metales (M), energía (E) y servicios (S).

	N	M	E	S
N	0.184	0.101	0.355	0.059
M	0.062	0.199	0.075	0.031
E	0.029	0.023	0.150	0.015
S	0.104	0.112	0.075	0.076

Las demandas externas (en millones de libras) son

N	10,271
M	5,987
E	1,161
S	13,780

¿Cuántos millones de libras de producto de cada sector se requerirían para mantener activa la economía británica de 1963 y satisfacer la demanda externa?

* L.S. Berman, "Development of Input-Output Statistics", ed. W.F. Grossling, *Input-Output in the United Kingdom*, Proc. 1968 Manchester Conf. (Londres: Frank Cass, 1970):34-35.

CAPÍTULO **9**

Cadenas de Markov

9.1 Cadenas de Markov

En esta sección se discute una técnica matemática que se usa como modelo en una gran variedad de procesos en los negocios, así como en las ciencias sociales, biológicas y físicas. Dicho método, llamado **cadenas de Markov**, fue ideado por el matemático ruso A. A. Markov (1856-1922) en 1906. Inicialmente, se usaron las cadenas de Markov para analizar procesos en física y meteorología. Una de las primeras aplicaciones fue para predecir patrones de clima. Las aplicaciones más recientes incluyen el análisis de los movimientos de precios de bienes, el mantenimiento de maquinaria, el comportamiento de los animales en el laboratorio, la selección de productos por el consumidor, la longitud de las colas en un supermercado o un aeropuerto, en el manejo de inventarios en cuanto a nivel y variedad, y en administración de plantas.

Antes de empezar nuestra discusión de las cadenas de Markov, necesitamos desarrollar más nuestra discusión de probabilidades del Capítulo 2.

Probabilidad condicional Sea E un evento (resultado de un experimento) con $P(E) > 0$. Entonces la **probabilidad condicional** de un evento A dado que E ocurrió se denota por $P(A|E)$ y se expresa por

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}. \tag{1}$$

Ejemplo 1 Dos dados normales se lanzan (con números 1 a 6). ¿Cuál es la probabilidad de que

(a) la suma de las tiradas sea 7?

(b) la suma sea 7 dado que en al menos uno de los dados salió un 2?

Solución (a) Hay 36 posibilidades [(1,1), (1,2), . . . , (1,6), (2,1), . . . , (2,6), . . . , (6,1), (6,2), . . . , (6,6)]. De éstas, seis dan una suma de 7: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3). Así que

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(b) Se nos informa que hay al menos un 2. Por lo tanto, los únicos posibles resultados son (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2) y (6,2). De estos resultados equiprobables, sólo dos dan una suma de 7: (2,5) y (5,2). Por lo tanto

$$P(7|\text{ al menos un } 2) = \frac{2}{11}.$$

Podemos llegar a esta respuesta usando la fórmula de probabilidad condicional.

$$P(7|\text{ al menos un } 2) = \frac{P(7 \text{ y al menos un } 2)}{P(\text{al menos un } 2)}$$

$$= \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

Nota. El evento 7 y al menos un 2 ocurre de dos maneras: (2,5) y (5,2), por lo que su probabilidad es de 2/36.

Los resultados del último ejemplo se pueden representar usando un **diagrama de árbol**. Esto se hace en la Figura 1. De hecho, siempre que tengamos un experimento de dos (o más) partes, se pueden representar las distintas probabilidades en un diagrama de árbol. Vamos a usar los diagramas de árbol para ilustrar la teoría de las cadenas de Markov.

Antes de dar definiciones generales, empezamos con un ejemplo.

Ejemplo 2 La empresa de abastos Gourmet tiene el 40% del negocio de abastos en una ciudad de tamaño medio. Su único competidor, Distribuciones Finas y Servicios (DFS) tiene el otro 60%. Para aumentar su competitividad, Gourmet contrata a una empresa de publicidad para mejorar su imagen. Durante una extensa campaña de publicidad, se recogen los datos de ventas mensuales. Se encuentra que el 90% de los clientes de Gourmet regresan a Gourmet el mes siguiente, mientras que el 20% de los clientes de DFS se cambian a Gourmet.

(a) ¿Qué porcentaje de los clientes usa cada servicio después de un mes?

(b) ¿Qué porcentaje usa cada servicio después de 2 meses?

(c) ¿A la larga cómo se reparte el mercado entre las dos empresas?

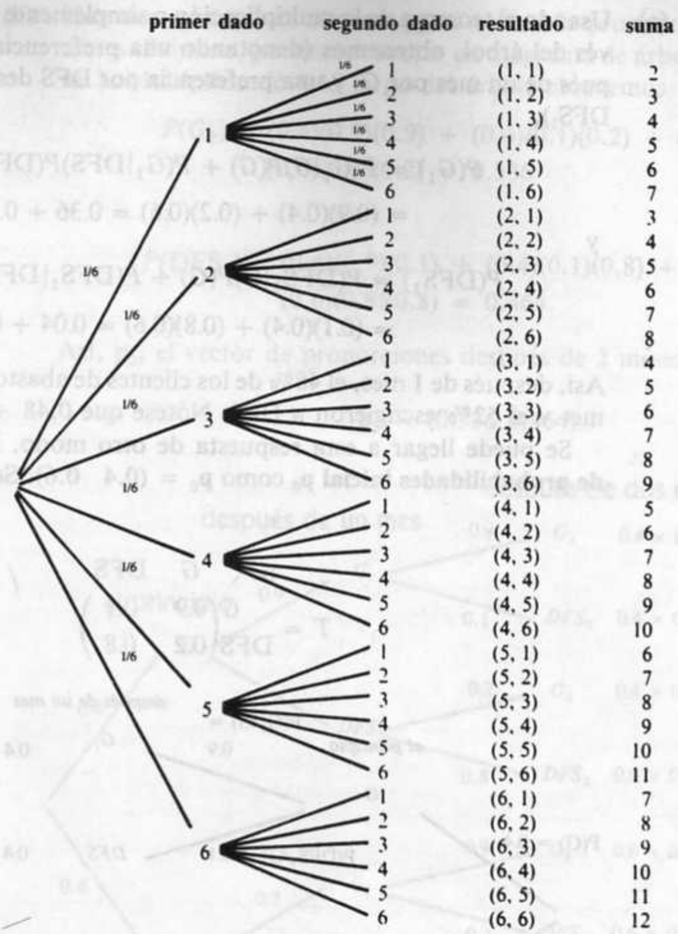


Figura 1
(Secc. 9.1)

Solución Resolveremos este problema en varios pasos. Primero, introducimos algo de terminología. En el lenguaje de las cadenas de Markov, el mercado de abastos en nuestra ciudad es un **sistema** en el que hay dos **estados**: Gourmet y DFS. Un cliente de abastos está en el estado Gourmet si usa los servicios de Gourmet. En el caso contrario, está en el estado DFS. Las probabilidades de cambiarse de un estado a otro se llaman **probabilidades de transición**. En nuestro problema, indicamos las probabilidades de transición en la Figura 2. Las cuatro probabilidades en las ramas de la derecha del árbol son todas probabilidades condicionales. Escribiéndolas, tenemos

$$P(\text{Gourmet}|\text{Gourmet}) = 0.9$$

$$P(\text{DFS}|\text{Gourmet}) = 0.1$$

$$P(\text{Gourmet}|\text{DFS}) = 0.2$$

$$P(\text{DFS}|\text{DFS}) = 0.8$$

(a) Usando el teorema de la multiplicación o simplemente multiplicando a través del árbol, obtenemos (denotando una preferencia por Gourmet después de un mes por G_1 y una preferencia por DFS después de un mes por DFS_1),

$$P(G_1) = P(G_1|G)P(G) + P(G_1|\mathrm{DFS})P(\mathrm{DFS})$$
$$= (0.9)(0.4) + (0.2)(0.6) = 0.36 + 0.12 = 0.48$$

y

$$P(\mathrm{DFS}_1) = P(\mathrm{DFS}_1|G)P(G) + P(\mathrm{DFS}_1|\mathrm{DFS})P(\mathrm{DFS})$$
$$= (0.1)(0.4) + (0.8)(0.6) = 0.04 + 0.48 = 0.52$$

Así, después de 1 mes, el 48% de los clientes de abasto escogieron a Gourmet y el 52% escogieron a DFS. Nótese que $0.48 + 0.52 = 1$.

Se puede llegar a esta respuesta de otro modo. Definimos el **vector de probabilidades inicial $\mathbf{p}_0$** como $\mathbf{p}_0 = (0.4 \quad 0.6)$. Se define la **matriz de**

$$T = \begin{array}{c c} {\scriptstyle \text{De} \backslash \text{A}} & \begin{matrix} G & \mathrm{DFS} \end{matrix} \\ \begin{matrix} G \\ \mathrm{DFS} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

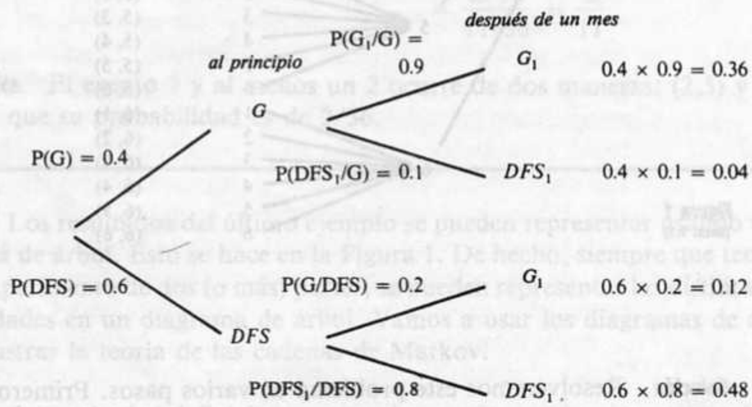


Figura 2
(Secc. 9.1)

La matriz de transición muestra las probabilidades de pasar de un estado a otro durante el experimento. Así, por ejemplo, la componente 1,2 de T es la probabilidad de pasar del estado 1 (Gourmet) al estado 2 (DFS) en un mes.

Ahora, observamos que

$$\mathbf{p}_0 T = (0.4 \quad 0.6)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.48 \quad 0.52) = \mathbf{p}_1,$$

el vector de probabilidades de las proporciones después de un mes. El lector debe poder explicar por qué el producto $\mathbf{p}_0 T$ produce el mismo resultado que las multiplicaciones en el diagrama de árbol.

(b) Hay dos maneras de obtener $\mathbf{p}_2$, el vector de proporciones después de 2 meses. Primero, podemos dibujar un diagrama de árbol como en la Figura 3. Multiplicando a lo largo del árbol, obtenemos

$$P(G_2) = (0.4)(0.9)(0.9) + (0.4)(0.1)(0.2) + (0.6)(0.2)(0.9) + (0.6)(0.8)(0.2) = 0.536$$

y

$$P(\mathrm{DFS}_2) = (0.4)(0.9)(0.1) + (0.4)(0.1)(0.8) + (0.6)(0.2)(0.1) + (0.6)(0.8)(0.8) = 0.464.$$

Así, $\mathbf{p}_2$, el vector de proporciones después de 2 meses, está dado por

$$\mathbf{p}_2 = (0.536 \quad 0.464).$$

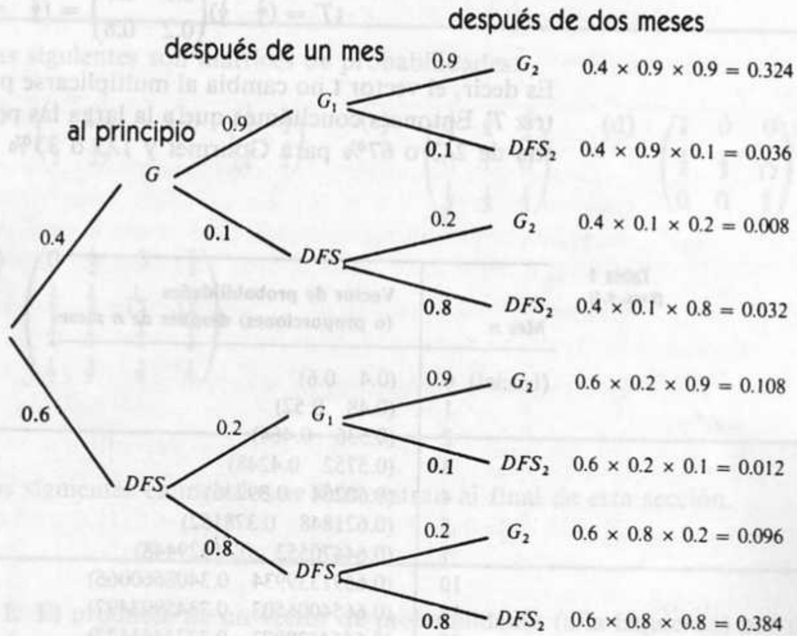


Figura 3
(Secc. 9.1)

Nótese que $0.536 + 0.464 = 1$. De otra manera, razonando como en la parte (a), se encuentra que

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 T = (0.48 \quad 0.52)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.536 \quad 0.464).$$

(c) De las partes (a) y (b) concluimos que

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 T$$
$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 T = (\mathbf{p}_0 T)T = \mathbf{p}_0 T^2$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 T = (\mathbf{p}_0 T^2)T = \mathbf{p}_0 T^3$$
$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 T = \mathbf{p}_0 T^4$$

y así sucesivamente. Por ejemplo,

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 T = (0.536 \quad 0.464)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.5752 \quad 0.4248)$$

Continuando los cálculos en una calculadora programable, obtenemos los resultados de la Tabla 1. Se ve que al aumentar n (el número de meses), las proporciones tienden a un **vector fijo de probabilidades**

$$\mathbf{t} = (0.6666\ldots \quad 0.3333\ldots) = (\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}).$$

Este se llama **vector fijo** para la matriz de probabilidades T ya que

$$\mathbf{t}T = (\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (\tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}) = \mathbf{t}.$$

Es decir, el vector $\mathbf{t}$ no cambia al multiplicarse por la derecha por la matriz T. Entonces concluimos que a la larga las proporciones del mercado son de 2/3 o 67% para Gourmet y 1/3 o 33% para DFS.

Tabla 1
(Secc. 9.1)

Mes n		Vector de probabilidades (o proporciones) después de n meses
(Inicial)	0	(0.4 0.6)
	1	(0.48 0.52)
	2	(0.536 0.464)
	3	(0.5752 0.4248)
	4	(0.60264 0.39736)
	5	(0.621848 0.378152)
	7	(0.64470552 0.35529448)
	10	(0.6591339934 0.3408660066)
	15	(0.6654006503 0.3345993497)
	20	(0.6664538873 0.3335461127)
	25	(0.6666309048 0.3333690952)
	30	(0.6666606562 0.3333393438)
	40	(0.6666664969 0.3333335031)

Antes de dar otros ejemplos, discutiremos algunas propiedades generales de una cadena de Markov.

Vector de probabilidades

El vector renglón de n componentes $\mathbf{p} = (p_1\, p_2 \ldots p_n)$ es un **vector de probabilidades** si todas sus componentes son no negativas y la suma de sus componentes es 1:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Ejemplo 3 Los siguientes son vectores de probabilidades.

(a) $\left(\frac{1}{5} \quad \frac{4}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{8}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{5}{12}\right)$

(e) $\left(0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right)$ (f) $\left(0 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{4}{15}\right)$

Matriz de probabilidades La matriz $n \times n$ designada por $P = (p_{ij})$ es una **matriz de probabilidades** si cada uno de sus renglones es un vector de probabilidades. Esto significa que todas sus componentes son no negativas y la suma de sus componentes en cada renglón es 1.

Ejemplo 4 Las siguientes son matrices de probabilidades.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Los siguientes enunciados se demuestran al final de esta sección.

Teorema 1

1. El producto de un vector de probabilidades (a la izquierda) por una matriz de probabilidades (a la derecha) es un vector de probabilidades.
2. El producto de dos matrices de probabilidades es una matriz de probabilidades.

Ejemplo 5 Sea $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{8}\right)$ y $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Verificar que $\mathbf{p}P$ es un vector de probabilidades.

Solución

$$\mathbf{p}P = \left(\frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{8}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{32} \quad \frac{21}{32} \quad \frac{3}{16}\right)$$

es un vector de probabilidades ya que $5/32 + 21/32 + 3/16 = 1$. Esto ilustra el Enunciado 1.

Ejemplo 6 Sea $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Verifíquese que PQ es una matriz de probabilidades.

Solución

$$PQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{12} & \frac{29}{48} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{9} & \frac{17}{36} \end{pmatrix}$$

Todas las componentes de PQ son no negativas. Además, $\frac{5}{16} + \frac{1}{12} + \frac{29}{48} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{5}{12} + \frac{1}{9} + \frac{17}{36} = 1$. Así que PQ es una matriz de probabilidades. Esto ilustra el Enunciado 2.

Para definir una cadena de Markov, considérese un experimento con un espacio muestra finito $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Considérese una secuencia (o **cadena**) de experimentos realizados. Se dice que el experimento está en el **estado** E_i en el intento m-ésimo si E_i es el resultado del intento m-ésimo ensayo del experimento.

Cadena de Markov Una secuencia de intentos de un experimento es una **cadena de Markov** si

(a) el resultado del intento m-ésimo depende sólo del resultado del intento $(m - 1)$-ésimo y no de los resultados en los intentos anteriores, y
(b) la probabilidad de pasar del estado E_i al estado E_j en dos intentos sucesivos del experimento permanece constante.

Por ejemplo, si la probabilidad de pasar del estado E_2 al E_4 en el tercer intento es de 0.6, entonces la probabilidad de pasar de E_2 a E_4 en el cuarto o en el décimo intento, o en el quincuagésimo, es también de 0.6.

Nótese que en el Ejemplo 2 supusimos que la probabilidad de que un cliente escogiera a Gourmet en un mes dependía sólo de qué empresa de abasto había elegido el mes anterior.

Si el clima de hoy depende solamente del clima de ayer, entonces la observación y predicción del clima es un problema de cadenas de Markov. Si la probabilidad de escoger una marca particular de coche la próxima vez que piense comprar uno depende únicamente del auto que ya se tiene, entonces el problema del patrón de ventas de automóviles es un problema que se puede resolver por cadenas de Markov.

Por otra parte, si el clima de hoy es determinado por el clima de varios días anteriores, entonces no se trata de una cadena de Markov. Similarmente, si al hacer la próxima compra de un automóvil se toma en cuenta la marca de los últimos tres coches que se han tenido, entonces el análisis de los patrones de ventas de automóviles no corresponde a una cadena de Markov. Esto es así, ya que la probabilidad de escoger una marca determinada de automóvil en el intento m-ésimo es decir, su m-ésimo coche depende de las elecciones que se hayan hecho en tres casos anteriores: los de los autos $(m-1)$-ésimo, $(m-2)$-ésimo y $(m-3)$-ésimo.

Una cadena de Markov se caracteriza por las probabilidades de que el sistema pase de un estado a otro en intentos sucesivos.

Matriz de transición de una cadena de Markov

La matriz de transición de una cadena de Markov es la matriz $n \times n$ de probabilidades $T = (p_{ij})$ cuya componente ij-ésima, p_{ij} es la probabilidad de que el sistema pase del estado E_i al estado E_j en intentos sucesivos del experimento.

Ejemplo 7

En el Ejemplo 1, la matriz de transición es $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Esto quiere decir, por ejemplo, que la probabilidad de pasar del estado 1 (Gourmet) al estado 2 (DFS) es de 0.1.

Sea T la matriz de transición de una cadena de Markov. Como el producto de dos matrices de probabilidades es una matriz de probabilidades, se concluye que las matrices $T^2 = TT$, $T^3 = T^2T$, T^4, T^5, ... son cada una, matrices de probabilidades.

Matriz regular y cadena de Markov regular

Una matriz de probabilidades T es **regular** si todas sus componentes de al menos una de sus potencias T^m son estrictamente positivas (mayores que cero). Una cadena de Markov es **regular** si su matriz de transición es regular.

Ejemplo 8

¿Cuáles de las siguientes matrices son matrices de transición para una cadena de Markov regular?

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Solución

(a) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ es regular porque todas sus componentes son positivas.

(b) $T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{15}{16} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y así sucesivamente. Como siempre hay un cero en la posición 2,1 de T^m, concluimos que T *no es* regular.

(c) $$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

por lo que T es regular.

(d) Todas las componentes son positivas, y así T es regular.

¿Por qué estudiamos cadenas de Markov? En el Ejemplo 1 vimos que la cadena de Markov regular (regular porque $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ tiene todas sus componentes positivas) tenía un vector de probabilidades fijo, $\mathbf{t} = (2/3 \quad 1/3)$ y que el vector de probabilidades $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 T^n$ tendía a $\mathbf{t}$ al crecer n. Esto no es un accidente.

Teorema 2 Si T es una matriz de probabilidades regular, entonces hay un único vector de probabilidades $\mathbf{t}$ tal que $\mathbf{t}T = \mathbf{t}$. Además, para cualquier vector de probabilidades $\mathbf{p}$, el vector de probabilidades $\mathbf{p}T^n$ se acerca más a $\mathbf{t}$ al crecer n. El **vector fijo** $\mathbf{t}$ se llama la **distribución estacionaria** de la cadena de Markov cuya matriz de transición es T. Además, al ir creciendo n, cada renglón de T^n tiende al vector fijo $\mathbf{t}$. (1)

Una demostración de parte de este teorema se da al final de la sección.

Ejemplo 9 Encontrar los vectores fijos para cada matriz regular.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Solución Se busca un vector de probabilidades $\mathbf{t}$ tal que $\mathbf{t}T = \mathbf{t}$. Si $\mathbf{t} = (x\, y)$, resolvemos la ecuación

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (x \quad y)$$

o bien

$$\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y \quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}y\right) = (x \quad y)$$

Igualando las componentes, obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y &= x \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}y &= y \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y &= 0 \end{aligned}$$

Además, como $\mathbf{t}$ es un vector de probabilidades, debemos tener que $x + y = 1$. Esto nos lleva al sistema

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Recuérdese que $M_1(-2)$ significa multiplicar el primer renglón por -2; $A_{1,2}(-\frac{1}{2})$ significa multiplicar el primer renglón por $-\frac{1}{2}$ y sumarlo al segundo renglón; $P_{2,3}$ significa intercambio (permuta) de los renglones segundo y tercero.

Haciendo reducción por renglones obtenemos, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,3}(-1)]{A_{1,2}(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3(\frac{3}{5})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{A_{3,1}(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{P_{2,3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así, $x = 2/5$, $y = 3/5$ y el único vector de probabilidades es $\mathbf{t} = (2/5 \quad 3/5)$.

Comprobación $\quad \mathbf{t}T = \left(\tfrac{2}{5} \quad \tfrac{3}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{2}{5} \quad \tfrac{3}{5}\right) = \mathbf{t}.$

(b) De modo que

$$\mathbf{t}(x \quad y \quad z) = \mathbf{t}T = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

o bien

$$(x \quad y \quad z) = \left(\tfrac{3}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z \quad \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z \quad \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z\right),$$

y así

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z &= x \\ \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z &= y \\ \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z &= z. \end{aligned}$$

Entonces, junto con la condición $x + y + z = 1$, llegamos al sistema

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 1 \\
-\tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z &= 0 \\
\tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z &= 0 \\
\tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{2}z &= 0.
\end{aligned}
$$

Ahora hacemos reducción por renglones.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 \\
-\frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow{\substack{A_{1,2}(\frac{2}{5}) \\ A_{1,3}(-\frac{1}{5}) \\ A_{1,4}(-\frac{1}{5})}}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & \frac{13}{20} & \frac{13}{20} & \frac{2}{5} \\
0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{5} \\
0 & \frac{1}{20} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{M_2(\frac{20}{13})}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & \frac{8}{13} \\
0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{5} \\
0 & \frac{1}{20} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{A_{2,1}(-1) \\ A_{2,3}(\frac{7}{10}) \\ A_{2,4}(-\frac{1}{20})}}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \\
0 & 1 & 1 & \frac{8}{13} \\
0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{13} \\
0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{13}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{M_3(\frac{4}{3})}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \\
0 & 1 & 1 & \frac{8}{13} \\
0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} \\
0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{13}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{A_{3,2}(-1) \\ A_{3,4}(\frac{3}{4})}}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \\
0 & 1 & 0 & \frac{4}{13} \\
0 & 0 & 1 & \frac{4}{13} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Así que $x = \frac{5}{13}$, $y = \frac{4}{13}$, $z = \frac{4}{13}$, y $\mathbf{t} = (\frac{5}{13} \;\; \frac{4}{13} \;\; \frac{4}{13})$.

Comprobación $\quad \mathbf{t}T = (\frac{5}{13} \;\; \frac{4}{13} \;\; \frac{4}{13})\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{5}{13} \;\; \frac{4}{13} \;\; \frac{4}{13}).$

Observación. Para la matriz en la parte (a) de este ejemplo, usamos una calculadora para evaluar algunas de las potencias de T^m.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3333\ldots & 0.6666\ldots \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4166\ldots & 0.5833\ldots \\ 0.3888\ldots & 0.6111\ldots \end{pmatrix}$$

$$T^4 = T^2T^2 \approx \begin{pmatrix} 0.400462963 & 0.599537037 \\ 0.399691358 & 0.600308642 \end{pmatrix}$$

$$T^8 = T^4T^4 \approx \begin{pmatrix} 0.4000003572 & 0.5999996428 \\ 0.3999997618 & 0.6000002382 \end{pmatrix}$$

$$T^{16} = T^8T^8 \approx \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$T^m \approx \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \quad \text{para } m > 16 \quad \text{(compruébese.)}$$

Las últimas dos matrices son correctas hasta diez decimales.

Ahora sea $\mathbf{p} = (a \;\; b)$ cualquier vector de probabilidades. Entonces para $m > 16$,

$$\mathbf{p}T^m = (a \quad b)\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (0.4a + 0.4b \quad 0.6a + 0.6b) = (0.4(a+b) \quad 0.6(a+b)).$$

Como $a + b = 1$, vemos que, con diez decimales, $\mathbf{p}T^m = (0.4 \quad 0.6) = (2/5 \quad 3/5)$ para *cualquier* vector de probabilidades inicial $\mathbf{p}$. Esto ilustra el gran resultado de (1).

Ejemplo 10 Se coloca un ratón en una caja dividida en compartimientos, como se muestra en la Figura 4. En ausencia de más información, es razonable suponer que el ratón encontrará una puerta al azar para moverse de un compartimiento a otro. Si esta suposición es válida, a la larga puede esperarse que el ratón esté

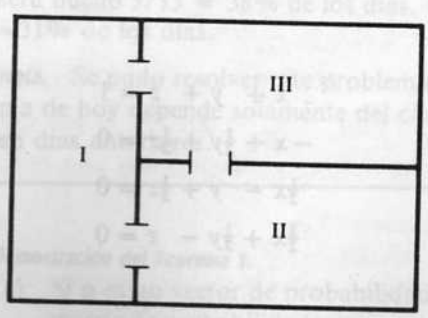


Figura 4
(Secc. 9.1)

en el interior de cada compartimiento con igual frecuencia. Wecker describe una serie de experimentos con ratones de campo que se puede analizar en estos términos.* Dejando que los ratones se muevan entre diez compartimientos, la mitad al descubierto y la mitad con techo de madera, Wecker pudo estudiar la fuerza de la preferencia de los ratones por el habitat abierto sobre el habitat cubierto.

Se puede analizar la situación de los ratones en términos de una cadena de Markov y demostrar que, a la larga, es válida nuestra suposición intuitiva de que el ratón pasaría tiempos equivalentes en cada uno de los tres compartimientos. Los tres estados obvios en este ejemplo son los compartimientos I, II y III. Como todas las puertas son igualmente fáciles de elegir, la probabilidad es de 1/2 de que el ratón se mueva a cada uno de los dos compartimientos que no ocupa en un momento dado. Esto da la matriz de transición

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que

$$T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

T es regular y tiene un único vector fijo de probabilidades **t**. Si **t** $= (x\ y\ z)$, entonces $x + y + z = 1$ y

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$$

o bien

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= x \\ \tfrac{1}{2}x \quad + \tfrac{1}{2}z &= y \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y \quad &= z \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x - y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned}$$

---

* S.C. Wecker, "Habitat Selection", *Scientific American*, 211 (oct. 1964):109-116.

Entonces, haciendo reducción por renglones, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,4}(-\frac{1}{2})]{\substack{A_{1,2}(1) \\ A_{1,3}(-\frac{1}{2})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{M_2(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,3}(\frac{3}{2})]{A_{2,1}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{M_3(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[A_{3,4}(\frac{3}{2})]{A_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así que $\mathbf{t} = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$, lo que quiere decir que, como se esperaba, el ratón pasará iguales tiempos en cada uno de los tres compartimientos.

Ejemplo 11 El clima de Montreal es bueno, regular o malo en cualquier día dado. Si el clima es bueno hoy, será bueno mañana con una probabilidad de 0.60, será regular con una probabilidad de 0.20 y será malo con una probabilidad de 0.20. Si el clima de hoy es regular, el de mañana será bueno, regular o malo con probabilidades respectivas de 0.25, 0.50 y 0.25. Por último, si el clima es malo hoy, las probabilidades son de 0.25, 0.25 y 0.50 para clima bueno, regular o malo, mañana. Esto se puede describir como una cadena de Markov de intentos de un experimento con tres posibles resultados: E_1, E_2 y E_3, que corresponden a clima bueno, regular o malo en un día dado. La matriz de transición para esta cadena de Markov es

$$P = \begin{array}{c} {}^{\text{De}}\diagdown{}^{\text{A}} \\ B \\ R \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & I & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.60 & 0.20 & 0.20 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Se aprecia que esta matriz es regular. En el Ejemplo 9 se calculó el vector fijo $(5/13 \quad 4/13 \quad 4/13)$. Esto quiere decir que, a la larga, el clima de Montreal será bueno $5/13 \approx 38\%$ de los días, regular $4/13 \approx 31\%$ de los días, y malo $\approx 31\%$ de los días.

Nota. Se pudo resolver este problema apoyados en la suposición de que el clima de hoy depende solamente del clima de ayer, y no de lo que haya pasado en días anteriores.

Algunas demostraciones

Demostración del Teorema 1.

(a) Si $\mathbf{p}$ es un vector de probabilidades de n componentes y $P = (p_{ij})$ es una matriz de probabilidades $n \times n$, entonces $\mathbf{p}P$ es un vector de probabilidades con n componentes.

Demostración El vector de probabilidades dado es $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y la matriz $n \times n$ de probabilidades dada es $P = (p_{ij})$. Defínase el vector $\mathbf{r} = \mathbf{p}P$. Entonces,

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (p_1p_{11} + p_2p_{21} + \cdots + p_np_{n1}, \ldots, p_1p_{1n} + p_2p_{2n} + \cdots + p_np_{nn}).$$

En otras palabras, $\mathbf{r} = \mathbf{p}P$ es un vector renglón de n componentes, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, cuya componente i es $\mathbf{r}_i = p_1p_{1i} + p_2p_{2i} + \ldots + p_np_{ni}$. Cada r_i es no negativa, porque es la suma de números no negativos. Para demostrar que $\mathbf{r}$ es un vector de probabilidades, se debe probar que la suma de sus componentes es 1.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} r_i &= \sum_{i=1}^{n}(p_1p_{1i} + p_2p_{2i} + \ldots + p_np_{ni}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_1p_{1i} + \sum_{i=1}^{n} p_2p_{2i} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} p_np_{ni} \\ &= p_1\sum_{i=1}^{n} p_{1i} + p_2\sum_{i=1}^{n} p_{2i} + \ldots + p_n\sum_{i=1}^{n} p_{ni} \\ &= p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.\end{aligned}$$

(b) Si $P = (p_{ij})$ y $Q = (q_{ij})$ son las matrices $n \times n$ de probabilidades, el producto de las matrices PQ es una matriz $n \times n$ de probabilidades.

Demostración Defínase el producto matricial $R = PQ = (r_{ij})$. Esta es una matriz $n \times n$ cuya componente ij es $r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj}$. Ya que las componentes de P y Q son no negativas, las componentes de $R = PQ$ son también no negativas. La suma de las componentes en el renglón i de R es

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ik}q_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(p_{ik}\sum_{j=1}^{n} q_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1.$$

En relación con esto, se invirtió el orden en la sumatoria y se usó el hecho de que $\sum_{k=1}^{n} p_{ik} = \sum_{j=1}^{n} q_{kj} = 1$, ya que P y Q son matrices de probabilidades. Hemos demostrado que *PQ es una matriz de probabilidades.* ■

Demostración Parcial del Teorema 2

Demostramos lo siguiente

Si $P = (p_{ij})$ es una matriz $n \times n$ de probabilidades, entonces existe un vector (no cero) de n componentes $\mathbf{t}$ tal que $\mathbf{t}P = \mathbf{t}$. Es decir, cada matriz de probabilidades tiene un vector fijo.

Demostración La ecuación $\mathbf{t}P = \mathbf{t}$ es equivalente a $\mathbf{t}(P - I) = 0$ o bien, tomando transpuestas, $(P - I)^t\mathbf{t}^t = 0^t$. Este sistema homogéneo tiene una solución no cero $\mathbf{t}$ si y sólo si

$$\det(P - I)^t = \det(P - I) = 0.$$

Esto es una consecuencia de la teoría de los determinantes. Pero $\det(P - I) = 0$ si y sólo si las columnas de la matriz $P - I$ son linealmente dependientes. Como P es una matriz de probabilidades, sabemos que

$$p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n} = p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2n} = \dots$$

$$= p_{n1} + p_{n2} + \dots + p_{nn} = 1.$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la siguiente forma vectorial equivalente.

$$\begin{pmatrix} p_{11}-1 \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22}-1 \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los vectores en la izquierda de esta ecuación son exactamente las columnas de $P - I$. Por lo tanto, las columnas de $P - I$ son linealmente dependientes, con lo que queda demostrado el resultado. ■

Problemas 9.1

En los Problemas 1-10, determínese si el vector dado es un vector de probabilidades.

1. $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$

2. $\left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$

3. $\left(\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5}\right)$

4. $\left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$

5. $\left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1\right)$

6. $\left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{5}{12}\right)$

7. $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

8. $(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$

9. $(0.235 \quad 0.361 \quad 0.162 \quad 0.242)$

10. $\left(\frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{5}{10}\right)$

En los Problemas 11-20, determínese si la matriz dada es una matriz de probabilidades.

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0.99 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.98 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$

En los Problemas 21-30, se da una matriz T de transición y un vector inicial de probabilidades p_0. Calcúlense p_1, p_2 y p_3.

21. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$

22. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (1 \quad 0)$

23. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (0 \quad 1)$

24. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (\frac{2}{5} \quad \frac{3}{5})$

25. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (\frac{1}{2} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8})$

26. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5})$

27. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (\frac{2}{7} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{4}{7})$

28. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$

29. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$

30. $T = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.49 & 0.35 \\ 0.23 & 0.58 & 0.19 \\ 0.37 & 0.21 & 0.42 \end{pmatrix}; \mathbf{p}_0 = (0.31 \quad 0.44 \quad 0.25)$

En los Problemas 31-40, determínese si la matriz dada de probabilidades es regular. Si es regular, encuéntrese su único vector fijo de probabilidades.

31. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

★**35.** $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, en donde $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$

36. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 0.12 & 0.37 & 0.51 \\ 0.43 & 0.19 & 0.38 \\ 0.26 & 0.59 & 0.15 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 0.283 & 0 & 0.162 & 0.555 \\ 0 & 0.217 & 0.498 & 0.285 \\ 0.361 & 0.203 & 0.092 & 0.344 \\ 0.085 & 0.416 & 0.122 & 0.377 \end{pmatrix}$

41. (a) Calcúlese un vector fijo de probabilidades para la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Es único este vector?

42. (a) Calcúlese un vector fijo de probabilidades para la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Es único este vector?

43. En un día determinado, una persona está sana o enferma. Si la persona está sana hoy, la probabilidad de que esté sana mañana se estima en un 98%. Si la persona está enferma hoy, la probabilidad de que esté sana mañana es de 30%. Descríbase la secuencia de estados de salud como una cadena de Markov. ¿Cuál es la matriz de transición?

44. Si la persona del Problema 43 está enferma hoy, ¿cuáles son las probabilidades de que se recupere mañana, dentro de 2 días o dentro de 3 días?

45. ¿Qué porcentaje de los días estará sana la persona del Problema 43?

46. Considérese el experimento de poner un ratón en la casa dibujada en la Figura 5.

(a) Suponiendo que el ratón tiene iguales probabilidades de escoger cualquier puerta para salir del compartimiento, descríbase este experimento como una cadena de Markov y determínese la matriz de transición.

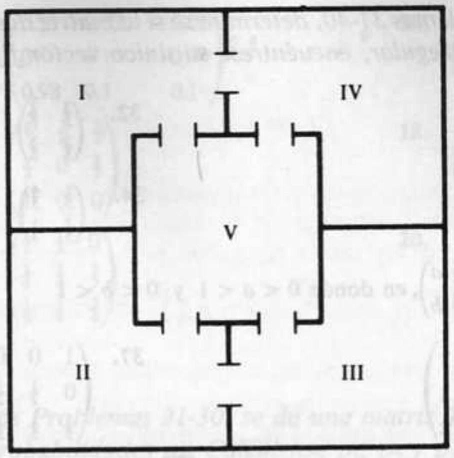


Figura 5
(Secc. 9.1)

(b) Encuéntrese el porcentaje de tiempo que a la larga estará el ratón en cada compartimiento.

47. Un examen consta de 100 preguntas de falso o verdadero. Para un estudiante promedio, el examen es tal que si contesta bien una pregunta, la probabilidad de que conteste correctamente la siguiente es de 3/4. Estímese la calificación promedio en este examen, suponiendo que la primera pregunta se contesta correctamente.

48. Un animal de laboratorio puede escoger una de tres comidas en unidades estándar. Después de largas observaciones, se encontró que si el animal escoge una comida en un intento, escogerá la misma en el siguiente intento con una probabilidad de 50% y escogerá las otras dos comidas en el siguiente intento con probabilidades de 25% cada una.

(a) Descríbase este proceso como una cadena de Markov y determínese la matriz de transición.

(b) Demuéstrese que, a la larga, se consumirán cantidades iguales de las tres comidas.

49. Hay cinco exámenes en un curso. Las calificaciones posibles en cada examen son A, B, C, D y E. Se estima que la probabilidad es de 60% que un estudiante obtenga la misma calificación que en el examen anterior, y de 10% para cada una de las otras posibilidades. Descríbase este proceso como una cadena de Markov. ¿Cuál es la matriz de transición?

50. (a) Si un estudiante recibe una A en el primer examen del Problema 49, ¿cuál es la probabilidad de que reciba una C en el segundo examen?

(b) Si un estudiante recibe una B en el segundo examen, ¿cuál es la probabilidad de que sus calificaciones en los tres exámenes restantes sean de B?

51. La UDrive Car Rental Company opera en California y cobra un cargo adicional para automóviles rentados en una ciudad y entregados en otra. Para determinar el cargo adecuado, se dividió el estado en tres áreas: norte, centro y sur. Se determinaron las probabilidades de recoger un automóvil en una área y de entregarlo en la misma área o en otra.

De \ A	Norte	Centro	Sur
Norte	0.6	0.3	0.1
Centro	0.2	0.5	0.3
Sur	0.1	0.2	0.7

Descríbase este proceso como una cadena de Markov y determínese la matriz de transición.

52. En el Problema 51, determínense los porcentajes de automóviles que, a la larga, estarán en cada una de las tres áreas.

53. Antonio Ramírez es un representante de ventas de una gran empresa librera. Vende libros de texto en una área, que se subdivide en cuatro regiones. Visita las universidades de una región cada semana y nunca visita la misma región en dos semanas consecutivas. Si en esta semana vende en la región I, tiene el 70% de probabilidades de pasar a la región II y el 30% de visitar la región IV la próxima semana. Si en esta semana vende en la región III, venderá en la región II la próxima semana. Si vende en alguna de las regiones II o IV en esta semana, venderá en alguna de las otras regiones con iguales probabilidades la semana siguiente. Descríbase el programa de viajes del Sr. Ramírez como una cadena de Markov y encuéntrese la matriz de transición.

54. En el Problema 53, ¿qué porcentaje de tiempo estará el Sr. Ramírez en cada región a la larga?

55. En el Problema 54, la empresa del Sr. Ramírez gasta $700, $650, $580 y $820 respectivamente, para pagar los gastos semanales en las cuatro regiones. ¿De cuánto serán los gastos semanales promedio, a la larga?

56. Una empresa necesita contratar copiadoras en renta, escogiendo entre dos máquinas. Las dos máquinas hacen copias que no se pueden distinguir. Cada máquina funciona o no funciona. Según los registros anteriores, se ha determinado que si la máquina I trabaja un día determinado, la probabilidad es de 0.95 que trabaje el día siguiente. Si no trabaja un cierto día, la probabilidad es de 0.75 que funcione el siguiente día. Si la máquina II trabaja hoy, la probabilidad es de 0.9 que trabaje mañana. Si no funciona hoy, la probabilidad es de 0.8 que trabaje mañana. ¿Qué máquina debe rentar la empresa?

57. En las elecciones para el Senado de un país, se ha determinado que los votos de una persona cambian según las probabilidades siguientes.

De \ A	Demócratas	Republicanos	Independientes
Demócratas	0.7	0.2	0.1
Republicanos	0.35	0.6	0.05
Independientes	0.4	0.3	0.3

A la larga, ¿qué porcentajes de los votantes votarán por los Demócratas, Republicanos e Independientes?

9.2 Cadenas de Markov absorbentes

En el experimento del Ejemplo 9.1.10 (véase la Figura 9.1.4) introducimos la modificación que consiste en que el ratón es sacado de la caja cuando llega al compartimiento III. Este nuevo procedimiento experimental se puede describir como una cadena de Markov si decimos que el sistema permanece en el tercer estado en todos los intentos una vez que ha alcanzado tal condición. Son muy comunes en las aplicaciones de las cadenas de Markov los estados con esta propiedad.

Estado absorbente Un estado E_i de una cadena de Markov se dice que es **absorbente** si, una vez alcanzado el estado E_i en algún intento, el sistema permanece en el estado E_i en todos los intentos futuros.

Cadena de Markov absorbente Una cadena de Markov es **absorbente** si tiene uno o más estados absorbentes y es posible llegar a un estado absorbente a partir de cualquiera de los estados no absorbentes.

Nota. Puede ser necesario pasar por varios estados no absorbentes para llegar a un estado absorbente.

Si el estado E_i es absorbente, la probabilidad de transición de E_i a E_i es de 1. En otras palabras, el estado E_i es absorbente si y sólo si $p_{ii} = 1$. El número de estados absorbentes de una cadena de Markov absorbente es igual al número de unos en la diagonal de su matriz de transición. Los estados no absorbentes de una cadena de Markov absorbente se llaman **estados transitorios**. La probabilidad de que el sistema esté en un estado transitorio disminuye al aumentar el número de intentos.

Ejemplo 1 Si el ratón (Ejemplo 9.1.10) permanece en el tercer compartimiento una vez que llega a él, la matriz de transición es

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso E_1 y E_2 son estados transitorios y E_3 es un estado absorbente. Se observa que se puede llegar a E_3 partiendo de E_1 o E_2 y por lo tanto la cadena de Markov es absorbente.

Ejemplo 2 La matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una cadena de Markov con tres estados. El segundo estado es absorbente. Se puede llegar a él a partir de E_3 en un intento y a partir de E_1 en dos intentos (ir primero de E_1 a E_3 con una probabilidad de 1/2 y después de E_3 a E_2 con una probabilidad de 1/3).

Ejemplo 3 Considérese un juego en el que cada uno de dos jugadores empieza con dos canicas. En cada movimiento del juego, el primer jugador tiene una probabilidad p de ganar una canica y una probabilidad $q = 1 - p$ de perder una canica. El juego termina cuando uno de los jugadores pierde sus dos canicas. Describir este juego como una cadena de Markov.

Solución Este juego tiene cinco estados, E_0, E_1, E_2, E_3 y E_4, que corresponden a los casos en los que el primer jugador tiene 0, 1, 2, 3 o 4 canicas. Los estados E_0 y E_4 son absorbentes y los estados E_1, E_2 y E_3 son no absorbentes o transitorios. La matriz de transición es

$$T = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema empieza en el estado E_2. Es decir, la distribución inicial de probabilidades es $\mathbf{p}_0 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0)$. En los movimientos siguientes, las distribuciones de probabilidades sucesivas son $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 T = (0\ q\ 0\ p\ 0)$, $\mathbf{p}_2 = (q^2\ 0\ 2pq\ 0\ p^2)$, $\mathbf{p}_3 = (q^2\ 2pq^2\ 0\ 2p^2q\ p^2)$, $\mathbf{p}_4 = (q^2 + 2pq^3\ 0\ 4p^2q^2\ 0\ p^2 + 2p^3q)$, ... Después de muchos intentos, la probabilidad de que el sistema se encuentre en uno de los estados transitorios se hace muy pequeña. Esto quiere decir que después de un número grande de movimientos, es casi seguro que uno de los jugadores haya perdido sus dos canicas. Por ejemplo, si $p = 2/3$, entonces $q = 1/3$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_4 &= \left((\tfrac{1}{3})^2 + 2(\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})^3 \quad 0 \quad 4(\tfrac{2}{3})^2(\tfrac{1}{3})^2 \quad 0 \quad (\tfrac{2}{3})^2 + 2(\tfrac{2}{3})^3(\tfrac{1}{3})\right) \\ &= (\tfrac{7}{27} \quad 0 \quad \tfrac{8}{81} \quad 0 \quad \tfrac{52}{81}). \end{aligned}$$

Estas son las probabilidades de estar en un estado transitorio después de 4 jugadas.

El resultado del último ejemplo sugiere que cuando se trata de una cadena de Markov absorbente, el sistema llegará eventualmente a un estado absorbente. No demostraremos esto aquí, pero se usará este hecho en el resto de la sección. Hay dos preguntas que surgen de manera natural.

1. ¿Cuánto tiempo, en promedio, estará el sistema en algún estado transitorio antes de llegar a un estado absorbente?
2. Si hay más de un estado absorbente, ¿cuáles son las probabilidades a largo plazo de terminar en cada uno de los estados absorbentes?

Hay una técnica para responder a estas preguntas. La demostración de que esta técnica funciona es difícil y no la discutiremos aquí. En vez de ello, ilustramos la técnica en una matriz específica y luego usaremos la técnica en otros ejemplos.

Considérese la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de transición de una cadena de Markov absorbente en la que los estados 2 y 4 son los absorbentes.

Paso 1. En la matriz de transición T, suprímanse los renglones correspondientes a los estados absorbentes. Llámese T' a esta nueva matriz.

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Paso 2. Divídase la matriz T' en estados absorbentes y no absorbentes. Llámese S a la matriz correspondiente a los estados absorbentes y R a la correspondiente a los estados no absorbentes.

En nuestro ejemplo, las columnas 2 y 4 de T' representan los estados absorbentes:

Estados absorbentes

Estados no absorbentes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Así que

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Paso 3. Calcúlese la matriz $Q = (I - R)^{-1}$. Aquí se tiene

$$I - R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

y

$$Q = (I - R)^{-1} = \tfrac{48}{13}\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{16}{13} & \frac{24}{13} \end{pmatrix}.$$

Nota. Llamamos Q a la **matriz fundamental** para la cadena de Markov absorbente.

Ahora podemos responder las preguntas.

Paso 4. La componente q_{ij} de Q se interpreta de la manera siguiente. Si partimos del estado transitorio i, q_{ij} es el número esperado de veces que nos encontraremos en el estado transitorio j antes de alcanzar algún estado absorbente. En nuestro ejemplo, el número $q_{21} = 16/13$ quiere decir que si partimos del segundo estado transitorio (que es el estado 3 en nuestro problema), volveremos al estado transitorio 1 un promedio de $16/13 \approx 1.23$ veces antes de pasar a un estado absorbente (estado 2 o estado 4). Además, como $16/13 + 24/13 = 40/13 \approx 3.08$, estaremos en algún estado transitorio un promedio de 3.08 veces si empezamos en el estado transitorio 2.

Paso 5. Calcúlese la matriz de probabilidades $A = QS$. Aquí,

$$A = QS = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 16 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} \frac{19}{4} & \frac{33}{4} \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{52} & \frac{33}{52} \\ \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.3654 & 0.6346 \\ 0.4615 & 0.5385 \end{pmatrix}.$$

Nótese que A es una matriz de probabilidades.

Para interpretar las componentes de A, le agregamos indicaciones.

$$\begin{array}{l} \\ \textbf{Estado transitorio 1} \\ \textbf{Estado transitorio 2} \end{array} \begin{array}{cc} \textbf{Estado absorbente 1} & \textbf{Estado absorbente 2} \\ \left(\begin{array}{c} 0.3654 \\ 0.4615 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0.6346 \\ 0.5385 \end{array}\right) \end{array}$$

Esto significa que si empezamos en el estado transitorio 1, terminaremos en el estado absorbente 1 en $0.3654 = 36.54\%$ de las veces, y en el estado absorbente 2, en $0.6346 = 63.46\%$ de las veces. Al segundo renglón de A se le da una interpretación semejante.

Ahora aplicaremos nuestra técnica a una situación práctica.

Ejemplo 4 El Centerville Vo-Tech es una escuela técnica de cursos bianuales. Cada 2 años, el Consejo Directivo presenta un presupuesto para Centerville a la legislatura estatal. El presupuesto se basa en el número de alumnos que asisten a la escuela y en el número de alumnos que se espera que se gradúen. Para calcular estos números, los alumnos se clasifican en cuatro categorías: primer año, segundo año, graduados y suspendidos. La última categoría incluye a los alumnos que se pasan a otra escuela.

Después de haber recogido datos durante varios años, la escuela puede predecir las proporciones de los estudiantes que pasarán de una categoría a otra en un año dado. Estos datos se dan en la Tabla 1. Si hay 2000 estudiantes de primer año y 1500 estudiantes de segundo año en Centerville este año, ¿cuántos de estos estudiantes se llegarán a graduar?

Tabla 2
(Secc. 9.2)

De \ A	Primer año (P)	Segundo año (S)	Graduados (G)	Suspendidos (X)
Primer año	0.15	0.65	0	0.2
Segundo año	0	0.1	0.75	0.15
Graduados	0	0	1	0
Suspendidos	0	0	0	1

Solución Se puede describir este proceso como una cadena de Markov absorbente con cuatro estados, de los cuales dos (graduados y suspendidos) son absorbentes. La matriz de transición para esta cadena de Markov es

$$T = \begin{array}{c} \text{De}\backslash\text{A} \\ P \\ S \\ G \\ X \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & G & X \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.15 & 0.65 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.75 & 0.15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Paso 1.
$$T' = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.65 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.75 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Paso 2.
$$R = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.65 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.75 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Paso 3.
$$I - R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.15 & 0.65 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.65 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

y

$$Q = (I - R)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.17647 & 0.84967 \\ 0 & 1.11111 \end{pmatrix}$$

Paso 4. Los números en Q indican que el estudiante promedio que está ahora en su primer año, permanecerá aproximadamente 1.18 años en primer año y 0.85 años en segundo año antes de alcanzar un estado absorbente (graduación o suspensión). El estudiante promedio de segundo año pasará 1.11 años en su segundo año antes de quedar graduado o suspendido.

Paso 5.
$$A = QS \approx \begin{pmatrix} 1.17647 & 0.84967 \\ 0 & 1.11111 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.75 & 0.15 \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} 0.63726 & 0.36274 \\ 0.83333 & 0.16667 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que el 63.7% de los estudiantes de primer año llegarán a graduarse (pasando al estado absorbente 1) y que el 36.3% serán suspendidos, mientras que el 83.3% y el 16.7% de segundo año se graduarán o serán suspendidos, respectivamente. Ahora, para contestar nuestras preguntas:

De los 2000 estudiantes de primer año,

$$2000 \times 0.63726 = 1275 \text{ se graduarán.}$$

De los 1500 estudiantes de segundo año,

$$1500 \times 0.83333 = 1250 \text{ se graduarán.}$$

Nota. En el Paso 5 se calculó el número de alumnos que eventualmente se graduarán, mientras que en el Paso 4 se determinó en cuánto tiempo "eventualmente" se realizará esto para el estudiante promedio.

Ejemplo 5 En el Ejemplo 1, E_1 y E_2 son estados transitorios, mientras que E_3 es absorbente.

$$\text{Así, como } T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tenemos que}$$

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ya que hay un solo estado absorbente, es evidente que se debe llegar a él partiendo de cualquiera de los estados no absorbentes, por lo que A debe ser la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se puede usar este hecho para verificar nuestros cálculos.

$$\text{Ahora} \quad I - R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = (I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

El sentido de $q_{12} = 2/3$, por ejemplo, es que si el sistema empieza en el estado E_1, el valor esperado del número de veces que el sistema estará en el estado E_2 es de 2/3. De manera semejante, $q_{11} + q_{12} = 4/3 + 2/3 = 2$. En otras palabras, si el ratón está en el compartimiento I en el primer movimiento, el número esperado de movimientos (incluyendo el primero) antes de llegar al compartimiento III es de 2. Por último,

$$A = QS = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

como se esperaba.

Ejemplo 6 En el Ejemplo 3, la matriz de transición para nuestro juego es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que

$$T' = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Como los estados primero y quinto son absorbentes, tenemos que

$$R = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Por simplicidad, considérese el caso $p = q = 1/2$. Entonces

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$I - R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = Q.$$

Esto indica, por ejemplo, que si el primer jugador empieza con dos canicas, puede esperar que el juego dure $q_{21} + q_{22} = 1 + 2 + 1 = 4$ movimientos antes de que gane o pierda todo. Por último,

$$A = QS = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Así que si el jugador 1 empieza con 1 canica (el estado transitorio 1), terminará con ninguna (el estado absorbente 1) 3/4 de las veces, y terminará con las 4 canicas (estado absorbente 2) 1/4 de las veces.

Problemas 9.2

En los Problemas 1-10 se da una matriz. Determínese si la matriz es la matriz de transición de una cadena de Markov absorbente. En caso afirmativo, encuéntrese el número de estados absorbentes.

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

En los Problemas 11-20, se da la matriz de transición de una cadena de Markov absorbente. Determínense las matrices T', R, S, Q y A.

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 0.21 & 0.46 & 0.13 & 0.20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.31 & 0.25 & 0.21 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **20** $\begin{pmatrix} 0.17 & 0.23 & 0.15 & 0.32 & 0.13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.21 & 0 & 0.38 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. Un animal de laboratorio debe desempeñar cierta tarea para recibir una unidad de alimento. La probabilidad de que logre hacer la tarea con éxito en cualquier intento es de 4/5. Supóngase que el animal repite su tarea hasta recibir un total de cuatro unidades de alimento. Descríbase este proceso como una cadena de Markov absorbente con cinco estados. ¿Cuál es la matriz de transición?

22. ¿Cuál es el número esperado de veces que se repetirá la tarea del Problema 21 hasta completar con éxito cuatro intentos?

★23. Dos jugadores, G_1 y G_2 se enfrentan en un juego. La probabilidad de que gane G_1 en cada movimiento es de 3/7. Supóngase que G_1 empieza con \$1. En cada movimiento, apuesta \$1 cada jugador y el juego continúa hasta que uno de los dos haya perdido todo su dinero.

(a) Descríbase este juego como una cadena de Markov con nueve estados.

(b) ¿Cuáles son las distribuciones de probabilidades de los estados después de un movimiento y después de dos movimientos?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane G_1?

24. En un juego del Problema 23, supóngase que G_2 apuesta todo su dinero en cada movimiento del juego.

(a) Descríbase este juego como una cadena de Markov con cinco estados.

(b) ¿Cuál es el número esperado de los movimientos de este juego?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane G_1?

25. Un animal de laboratorio debe escoger una de cuatro pantallas para recibir alimento. Las I y II, si se escogen, resultan en una cantidad muy pequeña de alimento. Las III y IV dan cantidades muy superiores del mismo. Si la III o la IV se eligen en un intento, se observa que se seguirá escogiendo la misma pantalla en todos los intentos posteriores. Si se escoge la pantalla I o si se escoge la II en un intento, entonces en el siguiente intento se escogerá cualquiera de las cuatro pantallas con igual probabilidad. Descríbase este proceso como una cadena de Markov absorbente con cuatro estados. Si se escoge la pantalla I en el primer intento, ¿cuál es el número esperado de intentos antes de que se escoja la pantalla III o la pantalla IV?

26. La Zephyr Electronics Co. fabrica tocacintas portátiles. Antes de mandar a ventas un casete o portacinta, se analiza el lote. Las categorías de inspección son: no funciona (NF), regular, bueno y excelente. Los portacintas NF se desechan, mientras que los lotes excelentes se envían inmediatamente a ventas. Los lotes regulares y buenos se regresan para ajuste y se vuelven a probar. Las proporciones de lotes regulares y buenos que cambian de categoría se dan en la tabla siguiente:

De \ A	NF	Regular	Buena	Excelente
Regular	0.05	0.25	0.35	0.35
Buena	0	0.15	0.2	0.65

(a) Descríbase este proceso de prueba como una cadena de Markov absorbente y calcúlese la matriz de transición.

(b) ¿Cuántas veces, en promedio, se volverá a inspeccionar un lote que ya se había probado y había resultado regular en la prueba anterior?

(c) ¿Cuántas veces, en promedio, se inspeccionará de nuevo un lote que ya se había probado y dio por resultado ser bueno?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que se deseche un lote regular?

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote regular llegue a ventas?

(f) De 30,000 lotes probados como buenos originalmente, ¿cuántos llegarán a ventas?

27. La empresa Mastervise expide tarjetas de crédito a 20,000 individuos en cierto estado. Su auditor descubre que 2356 de éstos no pagaron sus cuentas del mes pasado. La política de la empresa indica que si las cuentas no se han pagado en 3 meses consecutivos, se revocan los derechos del tarjetahabiente y la cuenta se pasa a una agencia de cobros. La experiencia anterior de Mastervise ha mostrado la experiencia de los cobros en la tabla siguiente.

De \ A	1 mes de retraso	2 meses de retraso	3 meses de retraso	Pagado	Cancelada
1 mes de retraso	0	0.35	0	0.65	0
2 meses de retraso	0	0	0.4	0.6	0
3 meses de retraso	0	0	0	0.3	0.7

(a) Descríbase este proceso como una cadena de Markov absorbente y encuéntrese su matriz de transición.

(b) ¿A cuántos de los pagadores morosos se les cancelarán sus tarjetas?

28. Con referencia al Problema 9.1.46, supóngase que una vez que un ratón llega al compartimiento II o al compartimiento IV, permanece allí.

(a) Si un ratón empieza en el compartimiento I, ¿cuántos compartimientos visitará, en promedio?

(b) ¿Qué porcentaje de los ratones que parten del compartimiento III terminarán en el compartimiento IV?

29. En el Ejemplo 4 se descubrió que el 30% de los estudiantes de primer año lo repiten, que el 45% llegan al segundo año y el 25% quedan suspendidos. Si los demás datos permanecen inalterados, ¿cuántos de los actuales 2000 estudiantes de primer año se llegarán a graduar?

★30. (a) Considérese un juego entre el equipo A y el equipo B con un total de n jugadores en los dos equipos. En cada movimiento del juego, un equipo gana un jugador del otro equipo y el juego continúa hasta que un equipo haya perdido todos sus miembros. Si hay k jugadores en el equipo A y $n - k$ jugadores en el equipo B, la probabilidad de que el equipo A gane un jugador en la siguiente jugada es $(k/n)^2$. Descríbase este juego como una cadena de

Markov absorbente. ¿Son "justas" las reglas? (Este es un modelo elemental de la competencia entre las especies.)

(b) En el juego anterior, supóngase que $k = 3$ y que $n = 6$. ¿Cuál es la distribución de probabilidades de los equipos después de un movimiento? ¿Cuál es después de dos movimientos?

CAPÍTULO **10**

Un modelo aplicado en psicología

En este capítulo se presenta un modelo sencillo para analizar un proceso de aprendizaje. Procedemos con cautela porque sólo las actividades más elementales, simplificadas, de la mente se pueden tratar con algún modelo que funcione. El modelo que describimos fue analizado inicialmente, de manera matemática, por G. H. Bower* y se llama **aprendizaje de pares asociados**.

En el modelo de Bower hay un investigador y uno o más sujetos. El investigador designa dos conjuntos: un conjunto de estímulos y un conjunto de respuestas. Para cada elemento s del conjunto S de estímulos, hay una respuesta correcta r en el conjunto R de respuestas. Así, en efecto, el investigador crea un conjunto de parejas ordenadas de la forma (s, r), donde $s \in S$ y $r \in R$. En el experimento original de Bower, S y R contenían diez elementos. Por ejemplo, S podría consistir de diez letras, y R de diez números asignados aleatoriamente a las diez letras. En un contexto distinto, S **podría** contener diez palabras en español, y R sus equivalentes en inglés. O, como ejemplo final, S podría contener diez sílabas sin sentido (da, dum, pa, etc.) y R un conjunto de sílabas adicionales, cada una de ellas asociada a cada una de las sílabas en S.†

Una vez definidos S y R, puede empezar el experimento. En cada intento del experimento, el investigador le muestra (o le dice) un elemento $s \in S$ al sujeto, y el sujeto responde con un elemento $r \in R$. El sujeto, claro está, trata de responder con la respuesta correcta, la r asociada con la s dada. Si el sujeto

* G.H. Bower, "Aplications of a Model to Paired Associate Learning", *Psychometrica*, Vol. 26, 1961, 255-280.

† En el experimento original de Bower, los estímulos consistían en diez pares de letras y las respuestas eran números 1 o 2. Es decir el sujeto recibía un par de letras y se le pedía responder "1" o "2". Después de cada intento, se le decía al sujeto si su respuesta era correcta. Si el sujeto podía contestar correctamente a cada uno de los diez estímulos dos veces consecutivas, se suponía que se había aprendido las respuestas correctas y así terminaba el experimento.

da la respuesta correcta, se registra un 0. Si da una respuesta incorrecta, se registra un 1, y el investigador le dice o le muestra la respuesta correcta.

Se supone que, inicialmente, el sujeto no sabe las respuestas correctas y tiene que adivinar. Si su respuesta es incorrecta, se le dará la respuesta correcta y, supuestamente, empezará a aprender. El experimento continúa hasta que el sujeto puede dar las respuestas correctas a los estímulos dados dos veces consecutivas. En ese momento se supone que ha aprendido completamente las respuestas.

Para analizar este modelo, se deben hacer cinco suposiciones más o menos razonables. Hacemos referencia a las parejas estímulo-respuesta en la forma (s, r).

Suposición A1 Cada pareja estímulo-respuesta está en uno de dos estados en cada intento del experimento: condicionado (C) o adivinando (G). Está en el estado C si el sujeto ha aprendido la respuesta correcta (r) a la pregunta dada o estímulo (s). Está en el estado G si el sujeto no sabe la respuesta correcta y debe adivinar.

Suposición A2 Inicialmente, todas las parejas están en estado G. Esto es, suponemos que al empezar el experimento, el sujeto no sabe ninguna de las respuestas correctas.

Suposición A3 Si un elemento está en el estado C en el intento n-ésimo del experimento, permanece en el estado C en todos los intentos siguientes. Es decir, una vez que el sujeto haya "aprendido" la respuesta adecuada a un estímulo dado, no la olvida.

Suposición A4 Si un elemento está en el estado G en el intento n-ésimo del experimento, hay una probabilidad $c > 0$ de que estará en el estado C en el intento $(n + 1)$-ésimo del experimento. Es decir, c es la probabilidad de que el sujeto aprenda la respuesta correcta antes del siguiente intento del experimento.

Nota. (A4) es la suposición menos plausible de las que se han presentado hasta ahora. Aquí se está suponiendo que (*i*) todos los elementos son igualmente fáciles (o difíciles) de aprender, y (*ii*) el sujeto no tiene más probabilidad de "aprender" la respuesta correcta después de muchos intentos que después de un solo intento de contestarla. Es de esperarse que si los sujetos son humanos de inteligencia normal, las probabilidades de aprender aumenten después de cada intento y de haber oído la respuesta correcta.

Suposición A5 Si el elemento está en el estado G y hay N respuestas posibles, la probabilidad es de $1/N$ de que el sujeto adivine la respuesta correcta. Es decir, en el estado de adivinar todas las respuestas son igualmente probables de ser escogidas.

Con estas suposiciones, se puede considerar el proceso de aprender la respuesta correcta por cada estímulo como una cadena de Markov con estados C y G.* La matriz de transición para esta cadena de Markov es

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & G \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{pmatrix} \end{array}, \tag{1}$$

porque, por (A3), una vez que estamos en C, permanecemos en C. Además, por (A4), si estamos en G, la probabilidad es c de que estemos en C en el siguiente intento del experimento.

Usando la matriz de transición dada en (1) es fácil calcular la probabilidad de que un elemento esté en el estado C o G después de un intento cualquiera del experimento. Primero, por (A2), la distribución inicial es

$$\mathbf{p}^{(0)} = (0,\ 1). \tag{2}$$

Ahora bien

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c[1 + (1-c)] & (1-c)^2 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c[1+(1-c) + (1-c)^2] & (1-c)^3 \end{pmatrix} \cdots$$

Continuando de esta manera (véase el Problema 15), se puede demostrar que

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c[1+(1-c) + (1-c)^2 + \ldots + (1-c)^{n-1}] & (1-c)^n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La fórmula para la suma de una progresión geométrica es

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, \text{ para } x \neq 1. \tag{4}$$

Así que

$$1 + (1-c) + (1-c)^2 + \ldots + (1-c)^{n-1} = \frac{1-(1-c)^n}{1-c} \tag{5}$$

e insertando (5) en (3), tenemos

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-(1-c)^n & (1-c)^n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

* Nótese que hay una cadena de Markov para cada elemento estímulo-respuesta (s, r). Así, si hay diez parejas (s, r), como en los experimentos de Bower, habrá diez cadenas de Markov. Sin embargo, considerando nuestras suposiciones, todas las diez cadenas de Markov tendrán propiedades idénticas.

Entonces las probabilidades de que un elemento esté en el estado C o G después del intento n-ésimo son

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)}P^n = (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-(1-c)^n & (1-c)^n \end{pmatrix} = (1-(1-c)^n, (1-c)^n). \quad (7)$$

La fórmula (7) es muy reveladora. Como $0 < c \leq 1$, por (A4), tenemos que $0 \leq 1 - c < 1$. Así, $(1-c)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto dice que mientras c no sea cero, la respuesta correcta al estímulo será aprendida. Cuanto mayor sea el valor de c, tanto más rápido será el aprendizaje.

Ejemplo 1 Sea $c = 0.25$. Entonces $1 - c = 0.75$. La siguiente Tabla da las probabilidades de que el elemento esté en el estado G o C después de cada intento:

Tabla 1 *(Cap. 10)*

Intento	$P(C) = 1-(0.75)^n$	$P(G) = (0.75)^n$
0	1	0
1	0.25	0.75
2	0.4375	0.5625
3	0.5781	0.4219
4	0.6836	0.3164
5	0.7627	0.2373
6	0.8220	0.1780
7	0.8665	0.1335
8	0.8999	0.1001
9	0.9249	0.0751
10	0.9437	0.0563
11	0.9578	0.0422
12	0.9683	0.0317
13	0.9762	0.0238
14	0.9822	0.0178
15	0.9866	0.0134
16	0.9900	0.0100
17	0.9925	0.0075
18	0.9944	0.0056
19	0.9958	0.0042
20	0.9968	0.0032

Nótese que después del intento 16°, hay un 99% de certeza de que el sujeto habrá aprendido la respuesta correcta.

Es interesante analizar esta cadena de Markov en términos de la teoría de cadenas de Markov absorbentes (véase la Sección 9.2). Tal cadena es absorbente porque el estado C lo es también. Ahora usamos la notación de la Sección 9.2. Podemos escribir una nueva matriz de transición.

$$P' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-c & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (8)$$