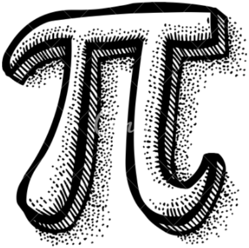


Valores y Vectores Característicos

Diagonalización

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

¿Para qué sirven los eigenvalores y los eigenvectores?
Las aplicaciones son variadas, por ejmplo: en el crecimiento poblacional (sistemas dinámicos discretos o continuos), estabilidad de estructuras, vibraciones EDO's, formas cuadráticas, superficies cuadráticas, rotaciones, etc. Estos conceptos proporcionan información crítica en diseño de ingeniería (ayudan a pronosticar éxito o fracaso del diseño). Ver Lay página 301. Revisar también https://www.hiberus.com/crecemos-contigo/analisis-de-componentes-principales/

Definición (Eigenvector y eigenvalor)

Sea A una matriz de $n \times n$. Un escalar λ se llama eigenvalor (o valor propio o valor característico) de A si existe un vector x no nulo tal que $\underline{Ax = \lambda x}$. Tal vector x se llama eigenvector (o también vector propio o vector característico) de A correspondiente a λ.

Ejemplo

Comprobar que el vector $x^T = (1, 1)$ es un eigenvector de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

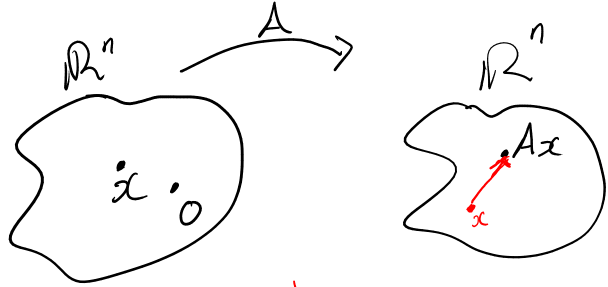
eigenvalues $\{\{1,2,1\},\{4,3,5\},\{-3,2,-1\}\}$

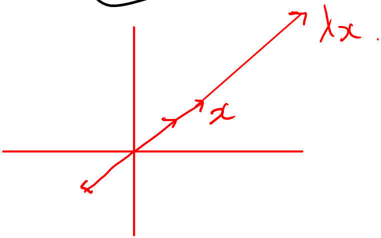
$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = \underline{4x}$ $\therefore$ 4 eigenvalor

y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su eigenvector de 4.

$$Ax = \underline{\lambda x}$$





Ejemplo

Comprobar que el 5 es un eigenvalor de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Tomar como práctica.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0_{neutro}$$

$$Ax - \lambda I x = 0 \qquad \boxed{x \neq 0}$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{B} x = 0 \Rightarrow Bx = 0$$

núcleo de B.

$$|B| = 0$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0}$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

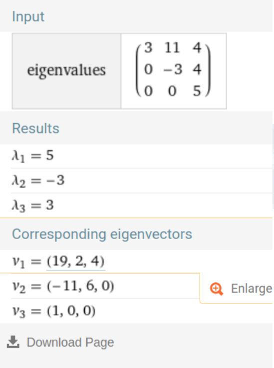
$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow v_1 = (1, 1)$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow v_2 = (-1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema

Si A es una matriz triangular o diagonal, entonces los valores de su diagonal pricipal son sus valores característicos. Ver en wolframalpha.



Teorema

Si A es una matriz triangular o diagonal, entonces los valores de su diagonal pricipal son sus valores característicos. Ver en wolframalpha.

Teorema

Si $v_1, ..., v_r$ son vectores propios que corresponden a distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_r$ de una matriz A de $n \times n$, entonces el conjunto $\{v_1, ..., v_r\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = \lambda x$ $\quad$ $\underline{x \neq 0}$

$Ax - \lambda x = 0$

$Ax - \lambda I x = 0$

$\underbrace{(A - \lambda I)}_{B} x = 0$ $\quad$ $x = 0$

$\cancel{B = 0}$ $\quad$ $\cancel{x = 0}$

$Bx = 0$

Núcleo de $\underbrace{A - \lambda I}$

$|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

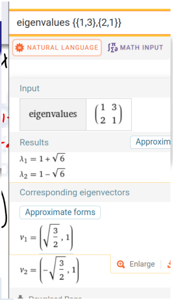
$(1-\lambda)^2 - 6 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{6}$$

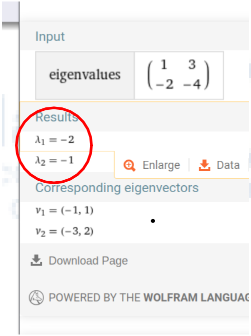


Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(A-\lambda I)x=0}$$ núcleo.



$$|A-\lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-4-\lambda)+6=0$$

$$\lambda^2+3\lambda-4+6=0$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

$$\underbrace{(x+2)}_{=0}\underbrace{(x+1)}_{=0}=0$$

$$\text{si } \lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-(-2) & 3 \\ -2 & -4-(-2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x+y=0 \qquad x=-y \qquad y=t\in\mathbb{R}$$

$$S=\{(x,y)=(-t,t): t\in\mathbb{R}\}$$

$$(-t,t)=t(-1,1)$$

S: $\lambda_2=-1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-(-1) & 3 \\ -2 & -4-(-1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2x=-3y \quad , \; y=t\in\mathbb{R}.$$

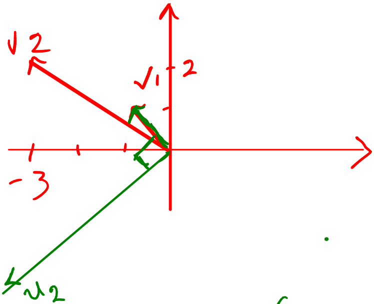
$$x=\frac{-3}{2}y$$

$$S=\{(x,y)=(-\tfrac{3}{2}t,t): t\in\mathbb{R}\}.$$

$$t\underbrace{(-\tfrac{3}{2},1)}_{\text{Base}} \Rightarrow (-3,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1=-2 \Leftrightarrow v_1=(-1,1) \\ \lambda_2=-1 \Leftrightarrow v_2=(-3,2) \end{array}\right\} \text{Procedimiento de ortogonalización}$$

Gram-Smidht



Fijo $u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$

Normalizar $x = (-3, 5)$

$$\|x\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \Rightarrow u = \frac{1}{\|x\|} x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{34}} (-3, 5)$$

Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Results Approximate fo

$\lambda_1 = 1 + i\sqrt{6}$ ⟵ complejos

$\lambda_2 = 1 - i\sqrt{6}$ ⟵ complejos

Correspondin Enlarge Dat

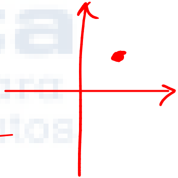
Approximate forms

$v_1 = \left(-i\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$

$v_2 = \left(i\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$

$1 + i\sqrt{6}$

$\underline{i = \sqrt{-1}}$



Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Input

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$

Correspondin Enlarge Dat

$v_1 = (1, 1, 2)$

$v_2 = (1, 0, 2)$

Corresponding generalized eigenv

$\lambda = 2, \quad u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

Download Page

¡Sólo 2 eigenvalores!

Definición (Semejante y/o diagonalizable)

Decimos que A es **semejante** *a B si existe una matriz invertible S tal que $S^{-1}AS = B$ o bien $A = SBS^{-1}$. Y decimos que A es* **diagonalizable** *si A es semejante a una matriz diagonal D, esto es $A = SDS^{-1}$.*

$$A^7 = (SDS^{-1})^7 = (SD\underbrace{S^{-1})(S}_{I}DS^{-1})\cdots(SDS^{-1})$$

$$= SD^7S^{-1}$$

Teorema

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si, y sólo si, A tiene n vectores propios linealmente independientes. De hecho, $A = PDP^{-1}$, con D como una matriz diagonal, si, y sólo si, las columnas de P son n vectores propios de A linealmente independientes. En este caso, las entradas diagonales de D son valores propios de A que corresponden, respectivamente, a los vectores propios de P.

Matrix Diagonalization o diagonalize

$$A^{10} = \underbrace{SD^{10}S^{-1}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} a_{11}^{10} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn}^{10} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}AS = B \iff \cancel{S}\cancel{S^{-1}}AS = SB \iff IAS = SB$$

$$\Rightarrow AS = SB \iff AS\underbrace{\cancel{SS^{-1}}}_{I} = SBS^{-1} \Rightarrow AI = SBS^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonalize {{1, -1}, {-3, 4}}

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

Input interpretation

diagonalize	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Result

$M = S.J.S^{-1}$

where

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{21}\right) \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{21}\right) \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)} \end{pmatrix}$$

Input

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Results Approxima

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)}$$

Corresponding eigenvectors

Approximate forms

$$\boxed{v_1 = \left(\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{21}\right), 1\right)}$$

$$\boxed{v_2 = \left(\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{21}\right), 1\right)}$$

Enlarge

Download Page

POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Definición (Base ortogonal y ortonormal)

Sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base para un espacio vectorial V de dimensión n dotado de un producto interno $<,>$. Decimos que la base β es ortogonal si $< v_i, v_j >= 0$ para todo $i \neq j$. Si además, $||v_i|| = 1$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, diremos que la base es ortonormal.

Recordar base en $\mathbb{R}^n$ una base cumple 2 cosas:

① El conjunto debe ser l.i.

② El generado del conjunto debe ser $\mathbb{R}^n$.

En $(3, -1, 5) \cdot (-2, 7, 4) = -6 - 7 + 20 = 7$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = 2 - 7 + 1 + 0 + 0 - 12 = .$

$\mathbb{R}^4 \cong M_{2\times 2} \cong M_{4\times 1} \cong M_{1\times 4}$

Definición (Base ortogonal y ortonormal)

Sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *una base para un espacio vectorial* V *de dimensión* n *dotado de un producto interno* $<,>$. *Decimos que la base* β *es ortogonal si* $< v_i, v_j >= 0$ *para todo* $i \neq j$. *Si además,* $||v_i|| = 1$ *para todo* $i = 1, 2, ..., n$, *diremos que la base es ortonormal.*

Ej. $\beta = \{\underbrace{(1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{v_3}\}$.

$v_1 \cdot v_2 = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0+0+0 = 0$.

$v_1 \cdot v_3 = (1,0,0)\cdot(0,0,1) = 0$ $\therefore$ β es una base ortogonal.

$v_2 \cdot v_3 = (0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0$.

$||v_1|| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1 = ||v_2|| = ||v_3||$

$\therefore$ β es una base ortonormal.

Definición (Base ortogonal y ortonormal)

Sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base para un espacio vectorial V de dimensión n dotado de un producto interno $<,>$. Decimos que la base β es ortogonal si $< v_i, v_j >= 0$ para todo $i \neq j$. Si además, $||v_i|| = 1$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, diremos que la base es ortonormal.

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz de orden n decimos que es **ortogonal** *si*

$$\Rightarrow \quad AA^T = I_n,$$

donde A^T, es ma matriz transpuesta de A.

$AA^{-1} = I$ $\quad \therefore A^T = A^{-1}$

$A = PDP^{-1}$

Ejemplo

La matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}$$

$\beta = \{v_1, v_2\}$ son l.i. en $\mathbb{R}^2$

$$v_1 \cdot v_2 = -\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 . \quad v_1 \perp v_2$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1} = 1 = \|v_2\| .$$

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \therefore \quad AA^T = I .$$

A es ortogonal

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobar que A es ortogonal.

$AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$

$-\frac{12}{5} + \frac{12}{5} = 0$

Recordar que AA^T y A^TA son matrices simétricas

Teorema (Espectral para matrices simétricas)

Sea A *una matriz simétrica de orden* n. *Entonces exsite una matriz* **ortogonal** P *y una matriz diagonal* D, *ambas de orden* n, *tales que*

$$A = P^{-1}DP$$

Siempre podemos diagonalizar una matriz simétrica.

En particular P es ortogonal.

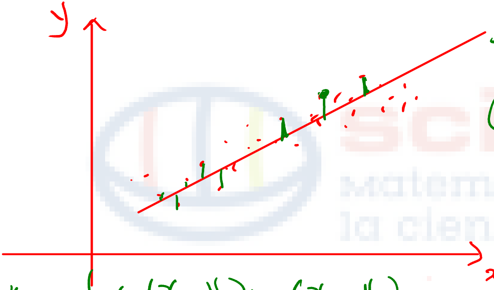
$$AA^T = I \iff A^T = A^{-1}$$

Definición (Problema de mínimos cuadrados -regresión lineal-)

Consiste básicamente en "resolver" un sistema en su forma matrical dada por

simétrica $\Rightarrow$ $$A^T A x = A^T b$$

$y = ax + b$ – a, b son incógnitas



① $a x_1 + b = y_1$

②

k puntos $(x_1, y_1) \cdots (x_k, y_k)$

$Ax = \lambda x$

$Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow Ax - \lambda I x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$

como $x \neq 0 \Rightarrow$

$x \in N(A - \lambda I) \Leftrightarrow$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \leftarrow$ polinomio característico.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-4-\lambda) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{-4} \underline{-\lambda + 4\lambda} + \lambda^2 \cancel{+6} = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda + 2 = 0 \quad y \quad \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad y \quad \lambda_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & 3 \\ -2 & -4-(-2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_1 = -2} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 3 \\ -2 & -4-(-1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ó $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$PDP^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$v_1 \cdot v_2 = (-1,1) \cdot (-3,2) = 3+2 = 5 \neq 0 \quad v_1 \not\perp v_2$

$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad (u_1 \cdot u_1 = \|u_1\|^2)$

$\|u_2\| = 1$ y $u_1 \cdot u_2 = 0.$

$$\underline{w_2} = v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1 = (-3,2) - \left((-3,2)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

$$= (-3,2) - \frac{1}{2}(3+2)(-1,1)$$

$$= (-3,2) + \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \|w_2\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_1 \cdot u_2 = \underline{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot Q^T = I$$