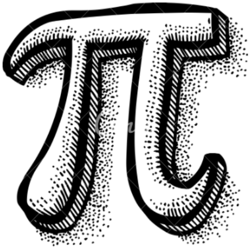
.



Criterio Primera y Segunda Derivada

Monotonía, concaviadad y optimización

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Puntos críticos de una función)

Un punto crítico c *de la función* f *ocurre cuando* f *en* c *no está definida, o no es derivable o bien* $f'(c) = 0$.

Definición (Máximos locales y globales de una función)

Decimos que la función f tiene un máximo local (global) en $x = \alpha$ si existe una vecindad U alrededor de α, tal que

$$f(\alpha) \geq f(x) \quad \forall x \in U \qquad (Global \implies \forall x \in Dom(f))$$

Definición (Mínimos locales y globales de una función)

Decimos que la función f tiene un mínimo local (global) en $x = \beta$ si existe una vecindad U alrededor de β, tal que

$$f(\beta) \leq f(x) \quad \forall x \in U \qquad (Global \implies \forall x \in Dom(f))$$

Teorema (Criterio de la primera derivada para extremos de una función)

Si f es derivable en un intervalo I, excepto posiblemente en $c \in I$, entonces $f(c)$ puede clasificarse como:

1. *mínimo relativo, si $f'(x) < 0$ para toda $x \leq c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x \geq c$,*
2. *máximo relativo si $f'(x) > 0$ para toda $x \leq c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \geq c$,*
3. *Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces en $f(c)$ no es ni mínimo ni máximo relativo (o punto de inflexión).*

Pasos para aplicar el primer criterio de la derivada.

1. Hallar la derivada de $f(x)$
2. Determinar los puntos críticos de f tales que $f'(x) = 0$
3. Determinar cuándo $f'(x) > 0$ y cuándo $f'(x) < 0$.
4. (Opcional) Evaluar nuestro(s) punto(s) crítico(s) en la función para determinar el o los valores máximos y/o mínimos de la función.

Ejemplo

Hallar los extremos, locales o globales, de

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

Teorema (Criterio de la primera derivada para monotonía de una función)

Si f es derivable en un intervalo I y $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I. Por otro lado, si $f'(x) < 0$, entonces f es decreciente en I.

Ejemplo

Determinar el conjunto donde f es creciente y decreciente.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

Ejemplo

Describa la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$$

Problema del producto máximo dada la suma.

Teorema (Criterio de la segunda derivada para extremos de una función)

Sea f una función con derivada doble sobre un intervalo I. Sea también $c \in I$ un punto crítico de f tal que $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ esté definida.

a. *Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.*
b. *Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.*
c. *$Si f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f puede tener un máximo relativo en $(c, f(c))$, un mínimo relativo en $(c, f(c))$ o ninguno de los dos.*

Definición (Función convexa)

Decimos que una función f es convexa en I si para todo $a, b \in I$, el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f. En caso que el segmento quede por debajo de dicha gráfica, diremos que f es cóncava.

Teorema (Criterio de la segunda derivada para convexidad)

Sea f una función con derivada doble sobre un intervalo I.

a. *Si $f''(x) > 0$ en I, entonces f es convexa (convexa hacia arriba) en I.*
b. *Si $f''(x) < 0$ en I, entonces f cóncava (convexa hacia abajo) en I.*

Ejemplo

El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordador espacial Discovery. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, del desplazamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en $t = 126$s, está dado por

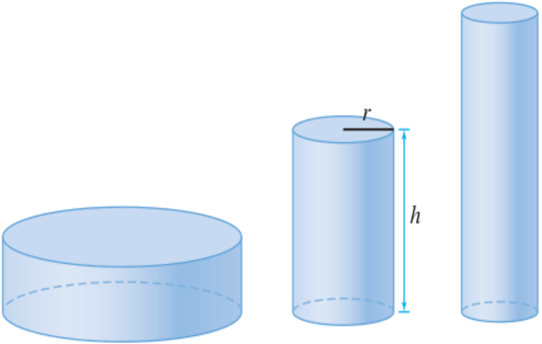
$$v(t) = 0.0003968t^3 - 0.02752t^2 + 7.196t - 0.9397 \quad \text{en } \frac{m}{s}$$

Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

(Conservación óptima) Un ecólogo cultiva peces en un lago. Cuanto más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w = 600 - 30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Maximizar ingresos Un fabricante de armella cerrada inoxidable T-304 del modelo S0327-04025 de medidas $5/32 \times 3/4''$ con límite de trabajo de 0.1 ciertas especificaciones sabe que si vende a 50 pesos cada una, entonces venderá 2500 armellas por día; sin embargo, si por cada 5 pesos que aumenta al precio de las armellas venderá 200 armellas menos al día. Si el costo en la elaboración de una armella es de $10 pesos, determine el precio de venta por armella con el que el fabricante obtendrá la ganancia máxima diaria. *Hint: Proponga una función de ganancia que dependa del aumento.*

Diseñe una lata de metal en forma de cilindro circular recto de volumen 900 cm^3, de tal forma que se emplee la menor cantidad de metal (la lata incluye la base y la tapa). Ver imagen.



Un rancho está a una distancia de 30 km de una pista (recta) que conecta a la ciudad y que a partir de este punto está a una distancia de 50 km. Se le pide construir un camino recto para conectar el rancho con la autopista que permita a los automovilistas llegar a la ciudad en el menor tiempo posible.Si la velocidad máxima permitida para el camino del rancho a la autopista es de 60 km/h y la velocidad máxima permitida en la pista es de 110 km/h, ¿Cómo debe ser diseñado el camino si se desea llegar del rancho a la ciudad en el menor tiempo posible?