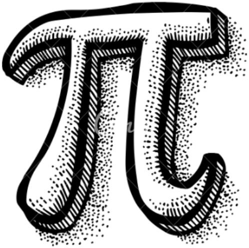
scidata

.



# Optimización de Campos Escalares

## Matriz Hessiana

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

**Definición (Máximos relativos y globales de un campo escalar)**

*Decimos que la función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tiene un máximo relativo (global) en* $x = \alpha$ *si existe una vecindad* $U$ *alrededor de* $\alpha$*, tal que*

$$f(\alpha) \geq f(x) \quad \forall x \in U \qquad (Global \implies \forall x \in Dom(f)).$$

*La definición de mínimo es análoga. Los puntos máximos o mínimos de una función* $f$ *se denominan puntos* **extremos** *de* $f$*.*

Nota: Los **puntos estacionarios** son donde la función tiene un punto máximo, mínimo o bien un punto silla.

**Teorema (Gradiente nulo)**

*Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tiene un punto extremo en* $x = a \in \mathbb{R}^n$ *y es diferenciable en* $a$*, entonces*

$$\nabla f(a) = 0$$

### Definición (Matriz Hessiana)

*Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas en un entorno de un punto estacionario $a \in \mathbb{R}^n$ de $f$. Definimos la matriz Hessiana en el punto $a$, denotada por $H(a)$, como*

$$H(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

## Teorema

*Supongamos que* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tiene derivadas parciales segundas continuas en un entorno de un punto estacionario* $a \in \mathbb{R}^n$*, esto es* $\nabla f(a) = 0$*, y si* $f$ *es diferenciable en* $a$*. Sea* $H(a)$ *la matriz Hessiana en* $a$*.*

1. *Si todos los autovalores de* $H(a)$*son positivos, entonces* $f$ *tiene un mínimo relativo en* $a$
2. *Si todos los autovalores de* $H(a)$*son negativos, entonces* $f$ *tiene un máximo relativo en* $a$
3. *Si* $H(a)$ *tiene autovalores tanto positivos como negativos,* $f$ *tiene un punto silla en* $a$

## Teorema

*Sea* $a \in \mathbb{R}^2$ *un punto estacionario de un campo escalar* $f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *con derivadas parciales segundas en un entorno de* $a$ *y sea* $\Delta$ *el determinante de la matriz Hessiana, es decir,*

$$\Delta = |H(a)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

*Tenemos entonces:*

1. *Si* $\Delta < 0$, $f$ *tiene un punto silla en* $a$.
2. *Si* $\Delta > 0$ *y* $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} > 0$, $f$ *tiene un mínimo relativo en* $a$.
3. *Si* $\Delta > 0$ *y* $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} < 0$, $f$ *tiene un máximo relativo en* $a$.
4. *Si* $\Delta = 0$ *el criterio no decide nada.*

## Ejemplo

*Hallar los extremos de*

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

## Ejemplo

*Hallar los extremos de*

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$$

**Ejemplo**

*Hallar los extremos de*

$$f(x, y) = \sin(x) - \cos(y)$$

## Ejemplo (Aplicación del volumen máximo de una caja)

*Una compañía de mensajería sólo acepta cajas rectangulares en las que la suma de su largo y su circunferencia (perímetro de una sección transversal) no exceda 108cm. Determine las dimensiones de una caja aceptable con el volumen máximo.*