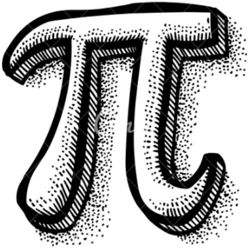
scidata



Álgebra Matricial

Aritmética y determinantes

Dr. Juan Luis Palacios Soto

Definición (Conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Una **matriz de tamaño** $m \times n$ *es un arreglo rectangular de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array},$$

la cual consta de m filas o renglones y n columnas. Una forma más corta de denotar una matriz es:

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n,$$

donde el primer subíndice i, señala el número de fila, mientras que j nos indica el número de columna, iniciando el conteo en ambos casos de la parte superior izquierda de la matriz, y los elementos $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Si $m = n$, diremos que la **matriz es cuadrada** *de orden n.*

Para A cuadrada, $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ son la **diagonal princial**. *Definir traza de A tensores.*

traza de $A = tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$

Ejemplo

Determine el tamaño de las siguientes matrices:

1. $A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ 6 & \pi \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$ $A_{3 \times 2}$.
2. $B = \begin{array}{cc} 1 & \\ \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$ $B_{3 \times 1}$
3. $C = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -23 & 17 & 9 & 5 \end{pmatrix} & 1 \end{array}.$ $C_{1 \times 4}$
4. $D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 19 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}.$ $D_{2 \times 4}$

Puede pensar a B *y* C *como elementos de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathbb{R}^4$.

Definición (Suma en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Para todo par de matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *de la forma*

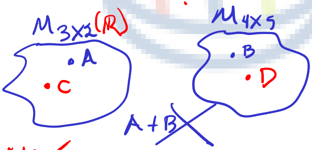
$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}),$$

definimos una operación llamada **suma** *de* A *con* B, *denotada por* $A+B$, *como*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

La suma no está definida si los tamaños de A *y* B *son diferentes.*

$\{\{1,2\},\{3,4\}\} + \{\{5,6\},\{7,8\}\}$



A+C ✓

B+D ✓

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Calcule las siguientes operaciones $\cancel{A+B}$, $A+C$, $\cancel{B+C}$ *y* $B+D$, *para*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3},\quad B=\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -7 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2},\quad C=\begin{pmatrix} -3 & -7 & 5 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

$A+C$ ✓ , $\cancel{A+B}$, $\cancel{A+D}$

$\cancel{B+C}$, $B+D$ ✓

$$A+C=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -7 & 5 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+(-3) & 7+(-7) & 2+5 \\ -2+1 & 5+9 & 8+10 \end{pmatrix}$$

Definición (Producto de una matriz con un escalar)

Para todo escalar real c *y para toda matriz* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *de la forma* $A = (a_{ij})$, *definimos una operación llamada* **producto** *de* c *con* A, *denotada por* cA, *como*

$$cA = (ca_{ij}).$$

De la anterior definición tenemos que $-A = (-1)A$ y $A - B = A + (-B)$.

Ej. $-2\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 8 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} -2(7) & -2(-5) \\ -2(8) & -2(0) \\ -2(-3) & -2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -16 & 0 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

$-A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -8 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$A - A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 8 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -8 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← Matriz nula.

Teorema (Espacio vectorial. Propiedades de la suma y el producto con escalar)

Para todo $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y para todo par de escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, se cumplen los siguientes 10 axiomas:*

$\alpha A = A\alpha$

1. $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *(Clausura bajo la suma).*
2. $\alpha A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *(Clausura bajo el producto con escalar).*
3. $A + B = B + A$ *(Conmutatividad).*
4. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(Asociatividad).*
5. *Existe un único elemento* $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ *llamado neutro tal que* $A + 0 = A$ *(Elemento neutro).*
6. *Existe un único elemento* $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *tal que* $A + C = 0$*, es decir* $C = -A$ *(Existencia de inversos).*
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = A(\alpha\beta)$ *(Asociatividad).*
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(Distributividad).*
9. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(Distributividad).*
10. $1A = A$, $1 \in \mathbb{R}$.

Definición (Matrices idénticas)

Decimos que dos matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ son idénticas si y sólo si A, B son del mismo tamaño ($i = 1, 2, ...m$, $j = 1, 2, ..., n$) y $a_{ij} = b_{ij}$ para toda $i = 1, 2, ..., m$ y $j = 1, 2, ..., n$.

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\mathcal{M}_{r\times p}(\mathbb{R})$

$\bullet A$ $\bullet C$ $\bullet B$

¿$A = B$? NO, porque son tamaños diferentes.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3x-1 & 5x+y \\ 6x-y & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2}}_{C}$$

$$\left.\begin{aligned} (1)\ & 3x-1=3 \\ (2)\ & 5x+y=1 \\ (3)\ & 6x-y=7 \\ (4)\ & 7=7 \end{aligned}\right\}$$

Definición (Matriz transpuesta)

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ *de tamaño* $m \times n$, *definimos su matriz* **transpuesta** *de tamaño* $n \times m$, *denotada por* A^T, *como*

$$A^T = (a_{ji}).$$

En la matriz transpuesta se cambian filas por columnas de la matriz A.

transpose $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

RFC1	RFC2
No.	
Sucl.	
P.	
⋮	

Ej. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

$(A^T)^T = A$

Ejemplo

Determine la transpuesta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ 6 & \pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -23 & 17 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 19 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 7 & 2 & \pi \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} -23 \\ 17 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad D^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 19 & 4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Con la anterior definición podemos ver a una matriz formada con filas o columnas de la forma siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}, \quad \text{con } F_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

$F_3 = (a_{31}\ a_{32} \cdots a_{3n}) \in \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

Retos:

$$C_j^T = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$$

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

¿Bajo qué condiciones $A = A^T$? Inicie el análisis con casos más pequeños.

$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \Rightarrow C_1^T = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \in \mathbb{R}^m$

Definición (Matriz simétrica)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, ..., n$, *es simétrica si* $a_{ij} = a_{ji}$ *para toda* i, j, *es decir, si*

$$A = A^T.$$

Ejemplos triviales de matrices simétricas son: todas las matrices nulas cuadradas, matrices diagonales como las matrices identidad.

Ej- $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ $A = A^T$

$\therefore$ A es simétrica.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 \\ a_{21} & 9 & -3 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$

$a_{21} = a_{12} = 4$

$a_{31} = a_{13} = 8$

$a_{32} = a_{23} = -3$

$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & -3 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = A^T.$

Definición (Matriz identidad)

Definimos la matriz identidad I_n, como la matriz cuadrada de orden n de la forma:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

U

L

Ejemplo

Matrices identidad de orden 2, 3 y 4.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2×2

Si no hay confusión del orden de la matriz identidad, simplemente se denota por I.

$\mathbb{R} \Rightarrow 1 \cdot x = x$

I

Definición (Matriz triangular superior)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n, $U = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, ..., n$, *es triangular superior si* $a_{ij} = 0$ *para toda* $i > j$, *esto es*

$2 > 1$

U → Upper

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Cero

Definición (Matriz triangular inferior)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n, $L = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, ..., n$, *es triangular inferior si* $a_{ij} = 0$ *para toda* $i < j$, *esto es*

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ceros

L = Lower

Ej. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ No es ninguna de las 2.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ¿A triangular inferior?

Definición (Matriz [redacted] diagonal)

Decimos que una matriz cuadrada de orden n, $D = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, ..., n$, *es diagonal si* $a_{ij} = 0$ *para toda* $i \neq j$, *es decir, será diagonal si es triangular superior e inferior a la vez.*

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A los elementos a_{ii} *con* $i = 1, 2, ..., n$ *se les conoce como elementos de la* **diagonal principal**.

Ejemplo

Determine el tipo de matriz

Matriz nula.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 2}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3}, \quad C = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{4\times 4}.$$

A = Upper

B = Lower

C = U = L = Diagonal.

Definición (Producto de matrices)

Si $A = (a_{ij})$ *es una matriz de tamaño* $m \times n$ *y* $B = (b_{ij})$ *una matriz de tamaño* $n \times p$, *entonces el producto* AB *es una matriz de tamaño* $m \times p$

$$AB = (c_{ij}),$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Nota: para que el producto de matrices esté definida, el número de columnas de la primera matriz (izquierda), debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz (derecha), por lo que debe quedar claro que no siempre $AB = BA$**, ¿por qué?.**

$\cancel{AB = BA}$

$M_{m\times n} = M_{3\times 2}$ $\qquad$ $M_{2\times 4}$

$\cdot A$ $\qquad$ AB ✓ $\qquad$ BA ✗ $\qquad$ $\cdot B$

$(3,-1)\cdot(7,3)$

$3\cdot 7 + (-1)(3)$

$21 - 3 = 18$

$a, b \in \mathbb{R}$

Conmutan $ab = ba$ ✓

$A_{3\times 2} B_{2\times 4} = C_{3\times 4}$ $\qquad$ $\cancel{B_{2\times 4} A_{3\times 2}}$

1^a mat. $\qquad$ 2^a mat. $\qquad$ $4 \neq 3$

$$\underbrace{AB}= \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{A}_{m\times n} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}}^{B}_{n\times p} \checkmark$$

$$= \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{pmatrix} \qquad F_i, C_j \in \mathbb{R}^n \qquad F_i \cdot C_j^T$$

$$= \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1^T & F_1 \cdot C_2^T & \cdots & F_1 \cdot C_p^T \\ F_2 \cdot C_1^T & F_2 \cdot C_2^T & \cdots & F_2 \cdot C_p^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_m \cdot C_1^T & F_m \cdot C_2^T & \cdots & F_m \cdot C_p^T \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}}_{m\times p}.$$

El punto $\cdot$ indica el producto punto en $\mathbb{R}^n$, así

$$c_{ij} = F_i \cdot C_j^T, \quad \text{para todo } i = 1, 2, ..., m \quad j = 1, 2, ..., p.$$

Ejemplo

Calcule AB y BA si

$(2,-3)\cdot(1,0) = 2-0 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

{{1, 2}, {3, 4}} * {{5, 6}, {7, 8}}

$$\underset{3\times 2\ 2\times 4}{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 4+9 & -2+3 & -4 \\ -1 & -2-12 & 1-4 & 2 \\ -4 & -8-15 & 4-5 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$c_{11} = (2,-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^T = (2,-3)\cdot(1,0) = 2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 13 & -1 & -4 \\ -1 & -14 & -3 & 2 \\ -4 & -23 & -1 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcule AB *y* BA *si*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \end{pmatrix}_{1\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

Observe que si $x = (5, -4)$ *y* $y = (1, 7)$, *entonces* AB *lo puede ver como* xy^T *y* BA *como* $y^T x$.

$$\underbrace{\underset{1\times 2}{A}\;\underset{2\times 1}{B}} = C_{1\times 1} = (5, -4)\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 + (-28) = -23$$

$$\underset{2\times 1}{B}\;\underset{1\times 2}{A} = \underset{2\times 2}{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 35 & -28 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Teorema (Propiedades del producto de matrices)

Sean A, B, C matrices cuyos productos están bien definidos y α un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A(BC) = (AB)C$ Asociatividad $\cancel{CAB = ABC}$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Teorema

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces $A^T A$ es una matriz simétrica de orden n y AA^T es una matriz simétrica de orden m.

$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\} * \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

$$\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times m}{A^T} \qquad \underset{n\times m}{A^T}\ \underset{m\times n}{A}$$

$$(AA^T)_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 11 & 78 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{A^T}\ \underset{2\times 3}{A} = (A^T A)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 29 & 33 & 18 \\ 33 & 50 & 10 \\ 18 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Compruebe que $\underbrace{AA^T,\ A^TA,\ BB^T}$ *y* B^TB *son todas matrices simétricas, donde*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio:

$$AA^T = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 16+4 & 12+2 & -8+10 \\ 12+2 & 9+1 & -6+5 \\ c_{31} & c_{32} & 4+25 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 14 & 2 \\ 14 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 29 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad y \quad A^TA = \begin{pmatrix} 29 & -1 \\ -1 & 30 \end{pmatrix}.$$

Definición (Matriz inversa)

Decimos que una matriz cuadrada A de orden n es invertible (inversible o no singular) si existe otra matriz cuadrada B del mismo orden n, tal que

$$AB = BA = I_n.$$

En tal caso la matriz inversa de A se denota como A^{-1}, para así

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

$A^{-1} \neq \frac{1}{A}$

inverse matrix $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

(matlab
> inv(A))

$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo

Compruebe que A es la inversa de B y viceversa, donde

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A \to A^{-1} \to (A^{-1})^{-1} = A.$$

Ej. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ A no es invertible

invertible = no singular

no invertible = singular

Ejemplo

Compruebe que A es la inversa de B y viceversa, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Teorema (Propiedades de la matriz inversa)

Sean A, B matrices cuadradas no singulares y α un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $A^{-k} = (A^k)^{-1}$, *donde* $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k-veces}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $A^{-T} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, *donde* T *denota la matriz transpuesta.*

$A^2 = A \cdot A$, $(A^3)^{-1} \neq A \cdot A \cdot A$

Teorema

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Prop. 3

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -8 & 19 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{114}\begin{pmatrix} -19 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cancel{A^{-1}B^{-1} =}$

$B^{-1}A^{-1} =$

$((AB)C)^{-1} = C^{-1}(AB)^{-1}$

$= C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$

Teorema (Propiedades de la matriz inversa)

Sean A, B matrices cuadradas no singulares y α un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $A^{-k} = (A^k)^{-1}$, *donde* $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k-veces}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $A^{-T} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, *donde* T *denota la matriz transpuesta.*

Teorema

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times p}{B})^T = (C_{m\times p})^T \Rightarrow C^T_{p\times m}$$

$$\underset{n\times m}{A^T}\ \underset{p\times n}{B^T}\ \times$$

$$\underset{p\times n}{B^T}\ \underset{n\times m}{A^T} = D_{p\times m}$$

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_K)^T = A_K^T \cdot A_{K-1}^T \cdots A_2^T \cdot A_1^T$$