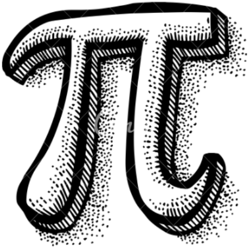


Espacios Vectoriales

Subespacios

Dr. Juan Luis Palacios Soto
palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Espacio Vectorial)

Sea $\boxed{V \neq \emptyset}$ *sobre el que están definidas dos operaciones (***una llamada suma vectorial + y otra llamada producto por escalar ****). Si los siguientes 10 axiomas se cumplen para todos* $u, v, w \in V$ *y para todo* $c, d \in \mathbb{R}$*, entonces* V *se denomina* **espacio vectorial**.

1. $u + v \in V$
2. $cu \in V$
3. $u + v = v + u$
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$
5. $u + O = u$
6. $u + (-u) = O$
7. $c(u + v) = cu + cv$
8. $(c + d)u = cu + du$
9. $c(du) = (cd)u$
10. $1(u) = u, \quad 1 \in \mathbb{R}$

cerradura.

"En Marte" en $\mathbb{R}^2$

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + y_2)$

$\in \mathbb{R}^2$?

$(3,-2)+(-1,5) = (-3,-10)$

$(-1,5)+(3,-2)=(-3,-10)$

$((3,-2)+(-1,5))+(2,1) = (-3,-10)+(2,1)$

$=(-6,-9)$

$V = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n, M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$(3,-2)+((-1,5)+(2,1)) = (3,-2)+(-2,6)$

$=(-6,4)$

Definición (Espacio Vectorial)

*Sea $V \neq \emptyset$ sobre el que están definidas dos operaciones (***una llamada suma vectorial + y otra llamada producto por escalar ****). Si los siguientes 10 axiomas se cumplen para todos $u, v, w \in V$ y para todo $c, d \in \mathbb{R}$, entonces V se denomina* **espacio vectorial***.*

1. $u + v \in V$
2. $cu \in V$
3. $u + v = v + u$
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$
5. $u + O = u$
6. $u + (-u) = O$
7. $c(u + v) = cu + cv$
8. $(c + d)u = cu + du$
9. $c(du) = (cd)u$
10. $1(u) = u, \quad 1 \in \mathbb{R}$

Def. $\mathbb{R}^2$ con la suma usual pero el prod. con escalar como:

$\alpha(x, y) = (\alpha x, 0) \in \mathbb{R}^2$

(10) $\alpha = 1$

$\Rightarrow 1 \cdot \underbrace{(7, 5)}_{u} = (7 \cdot 1, 0) = \underbrace{(7, 0)}_{v}$

$(7, 5) \neq (7, 0)$

$(V, F, +, *)$

Ejemplo $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, *)$

El conjunto $V = \mathbb{R}$ *bajo la suma* $+$ *usual en* $\mathbb{R}$ *y el producto entre ellos usual forma un e.v.*

Ejemplo $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, *)$

El conjunto $V = \mathbb{R}^2$ *bajo la suma* $+$ *estándar en* $\mathbb{R}^2$ *y el producto con escalares estándar forma un e.v.*

Ejemplo $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, *)$

El conjunto $V = \mathbb{R}^3$ *bajo la suma* $+$ *usual en* $\mathbb{R}^3$ *y el producto con escalares usual forma un e.v.*

Ejemplo $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, *)$

En general el conjunto $V = \mathbb{R}^n$ *bajo la suma* $+$ *estándar en* $\mathbb{R}^n$ *y el producto con escalares estándar forma un e.v.*

Ejemplo $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, *)$

El conjunto $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *bajo la suma* $+$ *usual en* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y el producto con escalares forma un e.v.*

escalares

Reto: $(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, +, *)$

Definamos en el conjunto $V = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ la siguiente suma: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$x + y = xy \quad \text{producto usual en } \mathbb{R},$$

y $\forall x \in \mathbb{R}^+$ y $\forall c \in \mathbb{R}$, el producto con escalar como

$$* \implies cx = x^c \quad \text{potenciación usual en } \mathbb{R}.$$

Determine si $\mathbb{R}^+$ bajo estas operaciones es un e.v., de lo contrario, describa cada axioma que no se cumple y por qué.

$\mathbb{R}^+ = (0, \infty) \neq \emptyset$

0 $\quad$ $1 > 0$

Teorema

Sean $v \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $0v = O$
2. $cO = O$
3. *Si* $cv = O$, *entonces* $c = 0$ *o bien* $v = O$
4. *(-1)v=-v*

$V = \mathbb{R}^n$, $M_{m \times n}$

① $0 \cdot v$, $0 \in \mathbb{R}$

$0v = (0, 0, \ldots, 0)$

$v = (x_1, \ldots, x_n)$ ①

$$v = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ ②

② $c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo (Conjuntos que no son espacios vectoriales)

$\mathbb{R}^2 \Rightarrow \quad V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 = 0 \}$. no es espacio vectorial.

(2) $cv \in V$

$\left\{ \begin{array}{l} v = (x,y) \Rightarrow cv = (cx, cy) \Rightarrow (1)\ cx + cy + 1 = 0 \\ w = (a,b) \Rightarrow kw = (ka, kb) \Rightarrow (2)\ ka + kb + 1 = 0 \end{array} \right\}$

$cv + kw = (cx + ka, cy + kb) \Rightarrow ¿(cx + ka) + (cy + kb) + 1 = 0?$

sumando (1) con (2)

$\cancel{cx} + \cancel{cy} + 1 + \cancel{ka} + \cancel{kb} + 1 = 0 + 0$

$(cx + ka) + (cy + kb) + 2 = 0$

Definición (Subespacio vectorial)

Decimos que W es un subespacio de un espacio vectorial V si:

1. $W \subseteq V$, *y*
2. W *es un espacio vectorial bajo las operaciones* $+$, $*$ *definidas en* V.

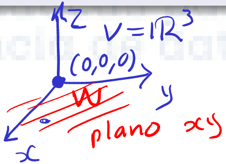
Teorema (Condición para un subespacio vectorial)

El conjunto W es un subespacio de un e.v. V bajo las operaciones $+$, $*$ en V si y sólo sí

1. $W \subseteq V$
2. *El $O \in V$ también cumple que $O \in W$.*
3. W *satisface las condiciones de clausura.* ?

$V = \mathbb{R}^n, M_{m \times n}$

$W \subseteq V$

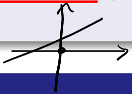


$u + r \in W$

Ejemplo (Subespacios de $\mathbb{R}^2$)

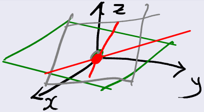
$\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $W = \mathbb{R}^2$, *porque* $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ *(subespacio trivial de dimensión 2).*
2. *Toda recta que pase por el origen,* $W = \{(x, y) : ax + by = 0\}$ *(subespacios no triviales de dimensión 1)*
3. $W = \{O\}$ *(subespacio trivial de dimensión 0).*



Ejemplo (Subespacios de $\mathbb{R}^3$)

1. $W = \mathbb{R}^3$ *(s.t.-dim 3-).*
2. *Todo plano que contenga el origen (s.n.t.-dim 2-)*
3. *Toda recta que pase por el origen (s.n.t.–dim 1-)*
4. $W = \{O\}$ *(s.t.-dim 0-).*



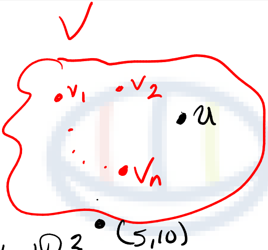
Ejemplo (Subespacios de $\mathbb{R}^n$)

1. *Subespacios triviales dos:* $\mathbb{R}^n$ *y* $W = \{O\}$.
2. *Subespacios no triviales dim* $n - 1$
3. $\vdots$
4. *Subespacios no triviales de dim 1.*

Definición (Combinación Lineal)

Sea V un espacio vectorial. Decimos que $u \in V$ es una combinación lineal de elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en V, si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

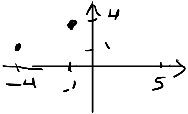
$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = u.$$



$$\alpha_1 v_1 + \alpha v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = u. \; ?$$

SEL

$V = \mathbb{R}^2$



$$\alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{v_1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{u} \checkmark$$

¿u es combinación lineal de v_1 y v_2?

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & 10 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -15 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \therefore \quad \alpha_1 = 3 \text{ y } \alpha_2 = -2.$$

$$\Rightarrow \quad 3\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+8 \\ 12-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

El vector $u = (25, 3, -15)$ *es combinación lineal de* $v_1 = (2, -1, 4)$, $v_2 = (5, 3, -3)$ *y* $v_3 = (-3, 2, 7)$, *porque*

$$\underline{u = 2v_1 + 3v_2 - 2v_3} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

esto es

$$(25, 3, -15) = 2(2, -1, 4) + 3(5, 3, -3) - 2(-3, 2, 7).$$

Por lo tanto, los escalares son: 2,3 ,-2.

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = u$

① $2x + 5y - 3z = 25$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & 25 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & -15 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$S = \{u, v_1, v_2, v_3\}$ seran l. i.?

$2v_1 + 3v_2 - 2v_3 - u = (0,0,0)$ $\therefore$ son linealmente dependientes

Definición (Vectores linealmente independientes)

Un conjunto $S = \{v_1, ..., v_n\}$ de elementos en un espacio vectorial V decimos que es **linealmente independiente** *(l.i) si la combinación lineal*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}. \in V \qquad (1)$$

se satisface únicamente para cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ (la solución trivial). En caso contrario, esto es, si una constante $\alpha_i \neq 0$, diremos que es el conjunto es **linealmente dependiente** *(l.d).*

Observación 1: Un conjunto de vectores $S = \{v_1, ..., v_n\}$ en un espacio vectorial V es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores es combinación lineal de los otros. El caso más sencillo es cuando dos vectores son paralelos. $u \parallel v$, $u = kv$, $k \neq 0$ - $kv - u = 0$ l.d.

Observación 2: Si un conjunto de vectores $S = \{v_1, ..., v_n\}$ en un espacio vectorial V contiene al neutro de V, entonces S es linealmente dependiente

linearly independent (1,2,3)(2,3,1)(1,2,3)

$A = \{(1,2,3), (2,3,1), (7,-1,0), (0,0,0)\} \Rightarrow A$ es l.d.

$S = \{v_1, v_2, .., v_{n-1}, 0\}$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n \cdot 0 = 0$ $(*)$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ y $\alpha_n \neq 0$.

Teorema

Si $S = \{v_1, ..., v_n\}$ es linealmente independiente, entonces

1. *Ninguno de los vectores v_i es el vector nulo,*
2. *cualquier subconjunto no vacío de él es también l.i.*

Teorema

Un conjunto $S = \{v_1, ..., v_n\}$ de elementos en un espacio vectorial V es l.d. si y sólo si al menos un vector de S es combinación lineal de los otros vectores en S.

Teorema

Todo conjunto $S = \{v_1, ..., v_n\}$ de elementos en un espacio vectorial V que contenga el neutro O es l.d. se repite.

Definición (Conjunto generador)

Un conjunto $S = \{v_1, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V decimos que genera o expande a V si todo elemento $u \in V$ se puede escribir como combinación lineal de elementos en S, en notación $< S >= V$, es decir,

$$< S >= \{\overbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n}^{\text{comb. lin.}} : \quad a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., n\}.$$

$V = \mathbb{R}^2$, v_1, v_2

$b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$b \in \mathbb{R}^2$

Otra notación para el generado de S es $gen\{S\}$ o $span\{S\}$.

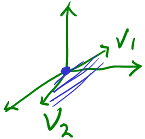
$< S > = V$

El generado de S expande a V.

Ej. $S = \{\underbrace{(-1,3,1)}_{v_1}, \underbrace{(2,0,-1)}_{v_2}\}$ $v_1 \not\parallel v_2$ y no nulos

$\therefore$ son l. ind.

$a v_1 + b v_2$, $a, b \in \mathbb{R}$.



$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Input interpretation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Result

$-3x + y - 6z = 0$

Definición (Base para un espacio vectorial)

Decimos que un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *de un espacio vectorial* V *es una base para* V*, si cumple la siguientes dos condiciones:*

a) S *es un conjunto linealmente independiente, y*

b) S *genera a* V.

A la cantidad de elementos n *en la base se denomina* **dimensión** *del espacio* V.

basis $((-1,1,0),((-1,0,1),(1,-1,0))$

$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

$S = \{(1,3),(7,-1),(5,4)\}$

$M_{3x2} \Rightarrow 6$ matrices l.i.

Ejemplo (Bases estándares o usuales)

En $\mathbb{R}^2$ *la base estándar es*

$$\beta = \{e_1, e_2\} = \{(1,0),(0,1)\}, \quad \textit{dimensión } 2.$$

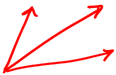
En $\mathbb{R}^3$ *la base estándar es*

$$\beta = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \quad \textit{dimensión } 3.$$

En $\mathbb{R}^n$ *la base estándar es*

$$\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\} = \{(1,0,...,0),...,(0,0,...,0,1)\}, \quad \textit{dimensión } n.$$

$$(7,-2,5) = 7(1,0,0) - 2(0,1,0) + 5(0,0,1)$$



$(3,-1,5)$

$u = (1,-1,1) \qquad v = -3u$

$v = (-3,3,-3) \qquad v \parallel u$

$\Rightarrow u, v$ l.d.

$au + bv \rightarrow$ recta; $a, b \in \mathbb{R}$

au ó bv

Ejemplo

Verifique que $S = \{(1,3),(2,5)\}$ *es una base para* $\mathbb{R}^2$.

Generador: $S = \{(-1,1),(2,3),(5,4)\}$.

¿Cómo saber que S genera a $\mathbb{R}^2$?

$\#S = 3$. Para ver si S genera a $\mathbb{R}^2$, tomemos un $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario.

Si S genera a $\mathbb{R}^2$, entonces deben existir escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que

$$a(-1,1) + b(2,3) + c(5,4) = (x,y).$$

$$a\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 5 & x\\ 1 & 3 & 4 & y\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & y\\ 0 & 5 & 9 & x+y\end{array}\right)$$

(2) $\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ \hline \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & y \\ 0 & 1 & 9/5 & \frac{x+y}{5} \end{array}\right) \underset{G-J}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/5 & -\frac{3}{5}(x+y)+y \\ 0 & 1 & 9/5 & \frac{x+y}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \in \mathbb{R}. \\ \forall \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\underbrace{a \quad b}_{\text{v. prin.}} \quad \underset{\text{v. libre.}}{c}$

tenemos infinitas soluciones.

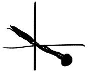
Gauss

$$b + \frac{9}{5}c = \frac{x+y}{5} \Rightarrow b = \frac{x+y}{5} - \frac{9}{5}c$$

$$a_{13} = -3\left(\frac{9}{5}\right) + 4 = -\frac{27}{5} + \frac{20}{5} = -\frac{7}{5}$$

$$a_{14} = -3\left(\frac{x+y}{5}\right) + y$$

(inconsiste $\frac{5}{x+y}$ $x = -y$!)



∴ es generador.

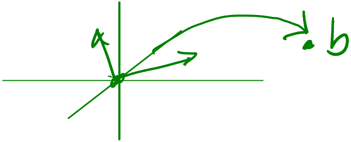
Si $S = \{\underbrace{(-1,1), (2,3)}_{\text{dim } 2}\}$ forma una base para $\mathbb{R}^2$.

Obs: 1. Un conjunto generado no necesariamente es l.i.

2. Un conjunto l.i no necesariamente es generador

$a(-1,1)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

es una recta que para por $(0,0)$.



Ejemplo

Verifique que $S = \{(-1,1,3),(0,2,1),(1,-1,-5)\}$ *es una base para* $\mathbb{R}^3$.

En un espacio de dimensión finita

$(\mathbb{R}^n, M_{m\times n})$ una base con mxn elementos

base con n elementos

Sólo basta tener n elementos l.i.

$$2\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\9\end{pmatrix}$$

Teorema (Representación única)

Sea V un espacio vectorial y sea $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para V. Entonces para todo $u \in V$, existen escalares únicos $a_1, ..., a_n$ tales que

$$u = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n.$$

En caso de que β genere a V pero no sea l.i., entonces los escalares no serán únicos, de hecho son infinitos.

Teorema (Bases y dependencia lineal)

Si $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base para V, entonces todo conjunto que contenga más de n vectores en V es linealmente dependiente.

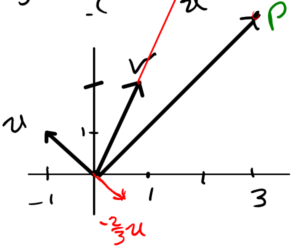
$\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{m \times n}$ son e.v.

- generadores.
- l.i, l.d.
- Bases.

Bases $\mathcal{M}_{2\times 2}$ usual

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\beta = \{(-1,1),(1,2)\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$



$p = (3,4)$

¿p es combinación lineal de u y v? Sí

$\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, tales que.

$au + bv = p$

$$a\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{array}\right]$$

(1) $-a + b = 3$

(2) $a + 2b = 4$

$$\approx \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -3\\ 0 & 3 & 7\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 7/3\end{array}\right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 7/3\end{array}\right]$$

$$-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = p$$