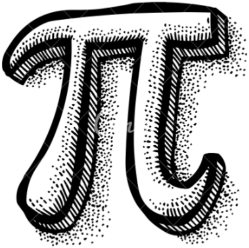
scidata



Valores y Vectores Característicos

Diagonalización

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

¿Para qué sirven los eigenvalores y los eigenvectores?
Las aplicaciones son variadas, por ejmplo: en el crecimiento poblacional (sistemas dinámicos discretos o continuos), estabilidad de estructuras, vibraciones EDO's, formas cuadráticas, superficies cuadráticas, rotaciones, etc. Estos conceptos proporcionan información crítica en diseño de ingeniería (ayudan a pronosticar éxito o fracaso del diseño). Ver Lay página 301. Revisar también https://www.hiberus.com/crecemos-contigo/analisis-de-componentes-principales/

Definición (Eigenvector y eigenvalor)

Sea A una matriz de $n \times n$. Un escalar λ se llama eigenvalor (o valor propio o valor característico) de A si existe un vector x no nulo tal que $Ax = \lambda x$. Tal vector x se llama eigenvector (o también vector propio o vector característico) de A correspondiente a λ.

Ejemplo

Comprobar que el vector $x^T = (1, 1)$ es un eigenvector de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

eigenvalues $\{\{1, 2, 1\}, \{4, 3, 5\}, \{-3, 2, -1\}\}$

Ejemplo

Comprobar que el 5 es un eigenvalor de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema

Si A es una matriz triangular o diagonal, entonces los valores de su diagonal pricipal son sus valores característicos. Ver en wolframalpha.

Teorema

Si A es una matriz triangular o diagonal, entonces los valores de su diagonal pricipal son sus valores característicos. Ver en wolframalpha.

Teorema

Si $v_1, ..., v_r$ son vectores propios que corresponden a distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_r$ de una matriz A de $n \times n$, entonces el conjunto $\{v_1, ..., v_r\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcular los eigenvalores y los eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición (Semejante y/o diagonalizable)

Decimos que A *es* **semejante** *a* B *si existe una matriz invertible* S *tal que* $S^{-1}AS = B$ *o bien* $A = SBS^{-1}$*. Y decimos que* A *es* **diagonalizable** *si* A *es semejante a una matriz diagonal* D*, esto es* $A = SDS^{-1}$*.*

Teorema

Una matriz A *de* $n \times n$ *es diagonalizable si, y sólo si,* A *tiene* n *vectores propios linealmente independientes. De hecho,* $A = PDP^{-1}$*, con D como una matriz diagonal, si, y sólo si, las columnas de* P *son n vectores propios de* A *linealmente independientes. En este caso, las entradas diagonales de* D *son valores propios de* A *que corresponden, respectivamente, a los vectores propios de* P*.*

Matrix Diagonalization o diagonalize

Definición (Base ortogonal y ortonormal)

Sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *una base para un espacio vectorial* V *de dimensión* n *dotado de un producto interno* $<,>$*. Decimos que la base* β *es ortogonal si* $< v_i, v_j >= 0$ *para todo* $i \neq j$*. Si además,* $||v_i|| = 1$ *para todo* $i = 1, 2, ..., n$*, diremos que la base es ortonormal.*

Definición (Base ortogonal y ortonormal)

Sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *una base para un espacio vectorial* V *de dimensión* n *dotado de un producto interno* $<,>$. *Decimos que la base* β *es ortogonal si* $< v_i, v_j >= 0$ *para todo* $i \neq j$. *Si además,* $||v_i|| = 1$ *para todo* $i = 1, 2, ..., n$, *diremos que la base es ortonormal.*

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz de orden n *decimos que es* **ortogonal** *si*

$$AA^T = I_n,$$

donde A^T, *es ma matriz transpuesta de* A.

Ejemplo

La matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema (Espectral para matrices simétricas)

Sea A una matriz simétrica de orden n. Entonces exsite una matriz **ortogonal** *P y una matriz diagonal D, ambas de orden n, tales que*

$$A = P^{-1}DP$$

Definición (Problema de mínimos cuadrados -regresión lineal-)

Consiste básicamente en "resolver" un sistema en su forma matrical dada por

$$A^T Ax = A^T b$$