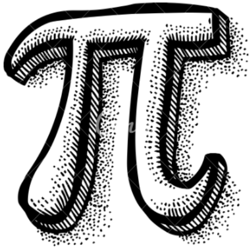
scidata



Derivabilidad

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

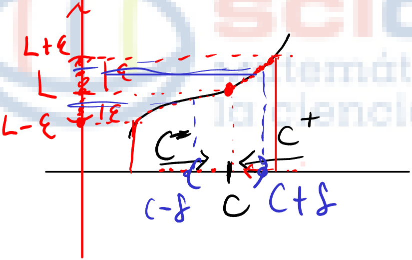
Definición (Límite de una función)

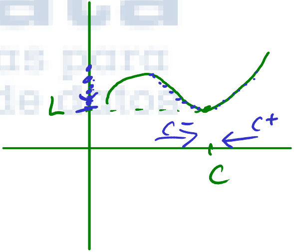
La función f tiende a el límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a c significa: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x que satisface $0 < |x - c| < \delta$ se cumple $|f(x) - L| < \epsilon$

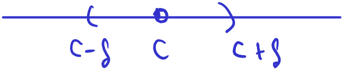
Notación: El número L al que se acerca f cuando x se aproxima a c se denota por $\lim_{x \to c} f(x)$, es decir,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Observe que el límite, en caso de existir, deberá ser un número real, es decir si un límite tiende a $+\infty$ o bien a $-\infty$, entonces no existirá el límite, toda vez que $\pm\infty$ no son números reales.





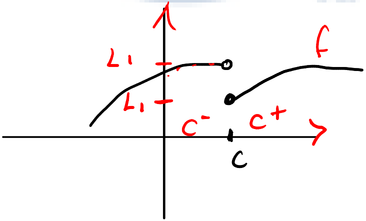


Teorema (Límites laterales)

El $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L.$

$\iff$

El $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ existe si y sólo si los límites laterales existen y son iguales.

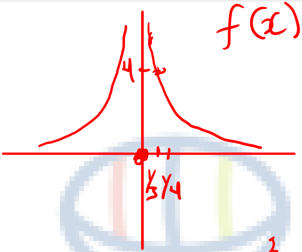


Existen los laterales pero $L_1 \neq L_2$

$\therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)$ no existe.

Teorema (Límites laterales)

El $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$.



$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$x \to 0^+$

$x \to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = -\infty$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \to 4 = \frac{1}{x^2}$ pero $\pm\infty \notin \mathbb{R}$

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow 9 = \frac{1}{x^2}$

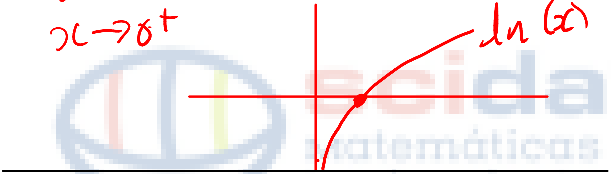
$\therefore$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe.

Teorema (Límites laterales)

El $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ No existe.



Teorema (Unicidad del límite)

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, *entonces* $L_1 = L_2$.

Teorema (Límites básicos)

Sean $b, x_0 \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{Z}^+$, *entonces*

a) $\lim_{x \to x_0} b = b$ *b)* $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ *c)* $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

todo polinomio.

$$\lim_{x \to 7} 2x^3 - 5x + 1 = 2(7)^3 - 5(7) + 1 \in \mathbb{R}.$$

En polinomios, radicales con índice impar, racionales, algebraicas, trascendentes se sustituye el x por el valor al que se quiere acercar, siempre que $c \in Dom(f)$.

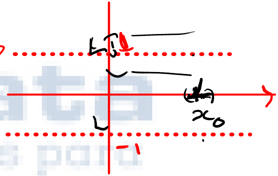
Teorema (Funciones con dominio X)

Si f es una función polinomial, racional, exponencial, trigonométrica, logarítmica, tal que $Dom(f) = X$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in X.$$

Observación: El que una función tenga de dominio $\mathbb{R}$ no implica que el límite exista para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Ejemplo:

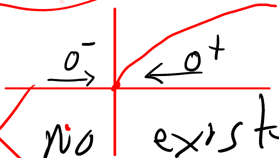
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 3} e^x - 1 = e^3 - 1$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$$



no existe porque $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ no existe.

Teorema (Funciones casi iguales)

Supongamos que $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \neq x_0$. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ *existe, entonces* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *existe y coincide con el de* g *en* x_0.

Nota: Este teorema nos ayuda a resolver límites por medio de la factorización, racionalización y operaciones algebraicas, regularmente.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\frac{2^- \to 0 \leftarrow 2^+}{2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}^{\neq 0}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} x+2 = 2+2 = 4$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

Teorema (Operaciones algebraicas con límites)

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, *entonces* $\Longrightarrow$

- (a) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 + L_2$
- (b) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = L_1 L_2$
- (c) $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *siempre que* $L_2 \neq 0$.

Ej. $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$

Pero $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Corolario

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $b \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

a. $\lim_{x \to x_0} bf(x) = b \lim_{x \to x_0} f(x) = bL$

b. $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^n = L^n$

$$\lim_{x \to 2} 3\frac{x^2-4}{x-2} = 3\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \underline{\underline{12}}$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2} \right)^3 = 4^3$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Teorema (Un límite que no existe)

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, *entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \begin{matrix} \to \neq 0 \\ \to = 0 \end{matrix}$$

no existe.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{1^2+1}{1-1} = \frac{2}{0} \nexists$$

No existe.

Teorema (Un límite que no existe)

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, *entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

Ej ① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ No existe.

$-1 \quad 0 \quad 1$

Si $0 < x < 1$

$\Rightarrow \quad x^2 < x$

$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

Teorema (Límite de funciones radicales)

Para $0 < n$ *par y* $x_0 > 0$, *o bien para* $0 < n$ *impar y* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

$$\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R}$$

Teorema (Límite de una función compuesta)

Si f, g *son funciones tales que* $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ *y* $\lim_{x \to L} f(x) = K$, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = K$$

$$\lim_{x \to 0} e^{\operatorname{sen}(x)+1} = e^{\operatorname{sen}(0)+1} = e^{1} = e.$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)+1}$$

Definición (Límite al infinito)

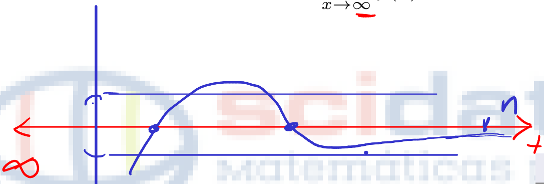
La función f tiende a el límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $+\infty$ significa: para todo $\epsilon > 0$ existe $n > 0$ tal que, para todo $x > n$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

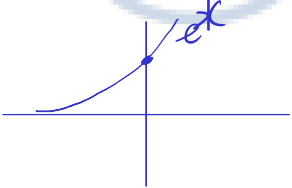
$\delta > 0$

$n \in \mathbb{N}$

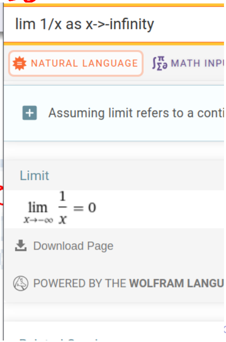
$\delta > \frac{1}{n}$

Notación: $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$





$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$



Teorema

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

y

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ejemplo

Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Definición (Asíntota horizontal)

Si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

existe, diremos que $y = L$ *es una asíntota horizontal para la gráfica de* f.

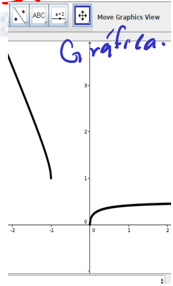
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)}{1}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{\infty}{\infty}!$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1)}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Gráfica.

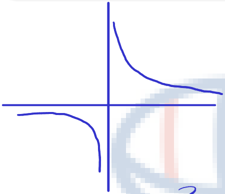


Definición (Límite infinito)

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. *Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$

diremos que f *tiende a* $+\infty$ *o bien a* $-\infty$, *pero NO significa que dicho límite exista.*



Ej. $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

$\cos(x) = 0$ si $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

$f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

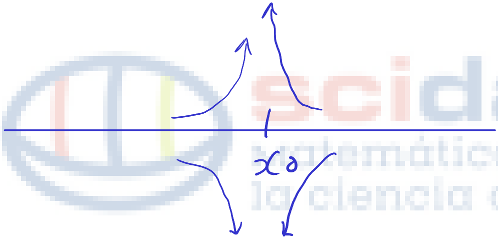
$\lim_{x\to 2} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{0}$!

Definición (Asíntota vertical)

Si

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty,$$

diremos que en $x = x_0$ *existe una asíntota vertical para la gráfica de* f.



Definición (Continuidad en un punto)

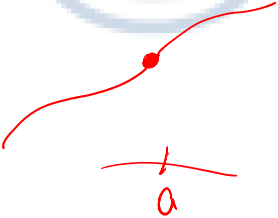
Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es continua en un punto* a, *si*

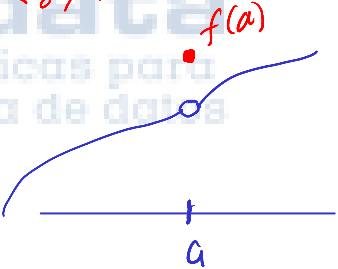
$$\lim_{x\to a} f(x) = \underline{f(a)} \in \mathbb{R}.$$

En notación $\epsilon - \delta$ esta definición queda como sigue:

$$\forall\epsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \text{tal que}\quad |x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\epsilon$$

$(0<|x-a|<\delta)\ |f(x)-L|<\varepsilon$





Definición (Continuidad en un intervalo abierto)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en un intervalo* (b, c), *si* f *es continua en toda* $a \in (b, c)$, *es decir*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \forall a \in (b, c).$$

f continua en (a,b)

Definición (Continuidad en un intervalo cerrado)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en un intervalo cerrado de la forma* $[b, c]$, *con* $-\infty < b < c < \infty$ *si* f *es continua en* (b, c) *y además*

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b) \quad y \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

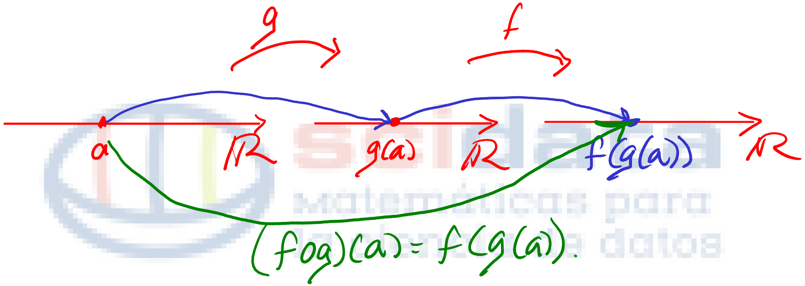
Teorema (Operaciones algebraicas)

Si f y g son funciones continuas en I, entonces

a. $f + g$ *es continua en* I,
b. fg *es continua en* I,
c. $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* I, *siempre que* g *no se anule en* I.

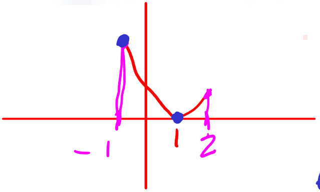
Teorema (Composición de funciones)

Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.



Nota: todo polinomio, racional, radical, exponencial, logarítmicas y trigonométricas son continuas en su dominio.

$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es conti en $[-1,2]$



El mínimo de f en $[-1,2]$ se alcanza en $x = 1$ y $f(1) = 0 \leftarrow$ min

Definición (Tipos de discontinuidad)

Si una función no es continua en un punto a, diremos que tiene una discontinuidad:

1. *de salto si*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2,$$

   pero $L_1 \neq L_2$,

2. *al finito si*

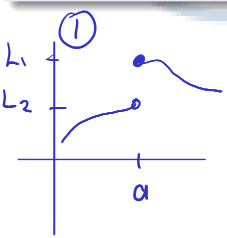
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

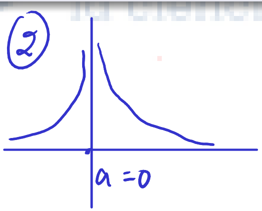
   Asíntota vertical-

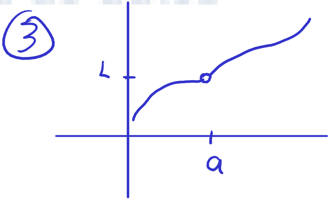
3. *removible si*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

   pero $f(a) \neq L$ *o bien* $f(a)$ *no está definido y*







Tipos de discontinuidades
- Evitables:
  - **-Removibles**
- Inevitables:
  - **-De salto**
  - **-Al infinito**

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad f(x) = \frac{2}{1-x}, \quad f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \leq 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$$

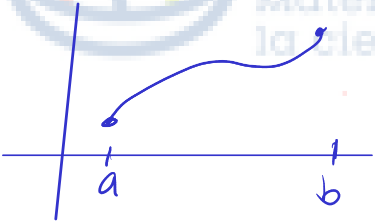
Wolframalpha.

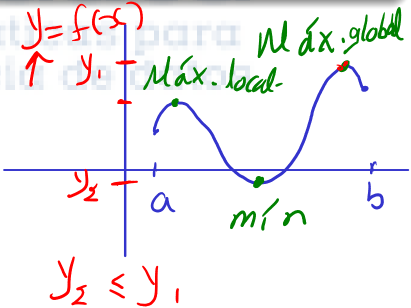
Teorema

Sea f continua sobre un intervalo de la forma $[a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$, entonces:

1. *(Teorema de función acotada). f es acotada, es decir, $\exists\ M \in \mathbb{R}^+$, tal que $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$,*
2. *(Teorema de extremos de una función). f toma valores extremos, es decir, $\exists\ \alpha, \beta \in [a, b]$, tal que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ $\forall x \in [a, b]$,*
3. *(Límite de una función compuesta). si $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ y $L \in (a, b)$, entonces*

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$





Definición

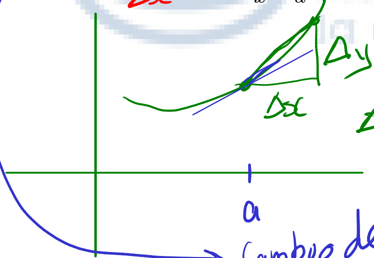
Decimos que la función f es derivable en el punto a, denotado por $f'(a)$, si

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

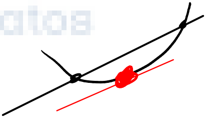
existe. Decimos simplemente que f es derivable, si es derivable en a para toda $a \in Dom(f)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \longleftrightarrow \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Cambio de variable

$h = x - a$

$h + a = x$

$\to x \to a \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Definición

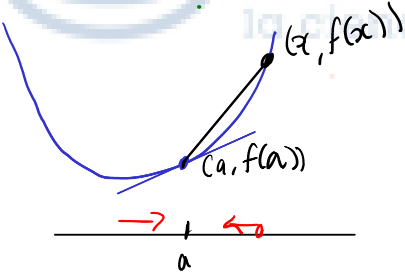
Decimos que la función f es derivable en el punto a, denotado por $f'(a)$, si

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

existe. Decimos simplemente que f es derivable, si es derivable en a para toda $a \in Dom(f)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \longleftrightarrow \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$



$$y = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\text{pendiente de recta secante.}}(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Teorema (Derivabilidad implica continuidad)

Si f es derivable en a, entonces f es continua en a

$\Longrightarrow$

Notaciones más comunes

Lagrange	Leibniz	Newton	Arbogast
$y', f'(x)$	$\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$	$\dot{y}, f(\dot{x})$	$Dy, Df(x)$

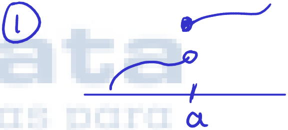
Ejemplo

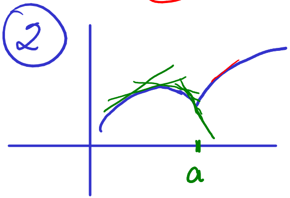
Suponga que un proyectil es lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de 45m por segundo. Suponiendo que no hay fricción, que sólo actúa la gravedad, el proyectil se moverá en línea recta. Sea $s(t)$ *la altura del proyectil dado en metros en el instante* t *segundos después del lanzamiento. Experiencias físicas indican que mientras el proyectil está en movimiento, su altura viene dada aproximadamente por la función* $s(t) = 45t - 5t^2$, *donde el término* $-5t^2$ *es debido a la influencia de la gravedad. Observemos que* $f(0) = 0 = f(9)$, *por lo que la fórmula sólo tiene sentido para* $t \in [0, 9]$. *Calcule la velocidad instantánea del proyectil en todo instante de tiempo* $t \in [0, 9]$ *y la velocidad media en el intervalo de tiempo* $[3, 7]$.

Definición (Funciones no derivables)

Una función **NO** *tiene derivada en un punto a si:*

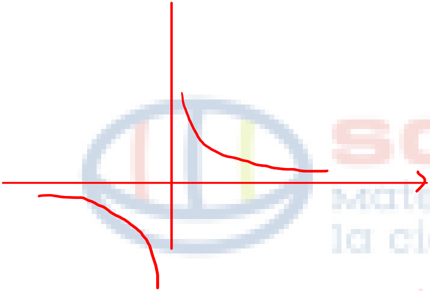
1. *la función es discontinua en $x = a$,*
2. *la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ presenta un "pico", o bien*
3. *la recta tangente en $(a, f(a))$ es vertical. La cual ocurre siempre que f sea continua en a y $\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$*





Ejemplo caso 1

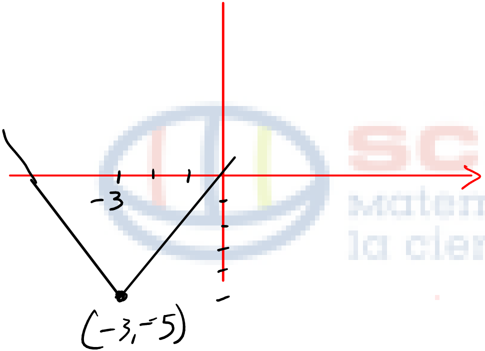
La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no es diferenciable en cero, porque no es continua en cero.



Ejemplo caso 2

La función $f(x) = |x+3| - 5$ no es derivable en $x = -3$, porque la gráfica de esta función presenta un pico en el punto $(-3, -5)$.

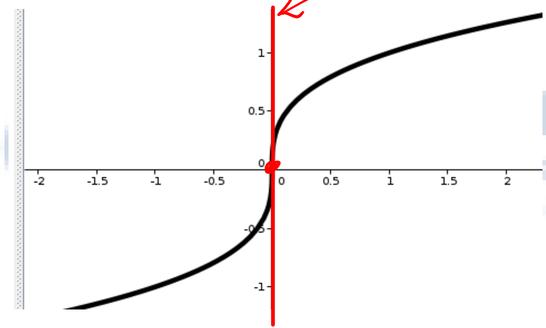
Wolfram abs(..)



Ejemplo caso 3

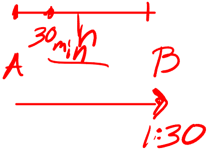
La gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tiene recta tangente vertical en el origen.

recta tangente en (0,0)



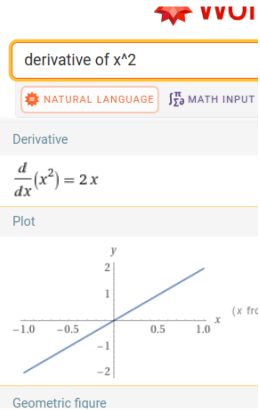
Concepto de la derivada según el contexto

Expresión	**Matemáticas**: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real	**Física**: Si $f(t)$ denota, digamos, posición de una partícula en el tiempo t	**Ingeniería**: Si $f(x)$ denota, digamos, el costo
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	**Valor medio** de f en $[a, a+h]$	**Velocidad media** de f en $[a, a+h]$	**Razón o tasa de cambio medio** del costo en $[a, a+h]$
$f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	**Pendiente** de la recta tangente a la gráfica en $(a, f(a))$	Velocidad **instantánea** de la partícula en el instante $t = a$	Razón-tasa de cambio **instantánea** del costo en el instante $x = a$



Ej. Calcular $f'(x)$ de $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$



② $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$\underbrace{f'(x) = 3x^2 - 4x + 1}_{\text{pendiente de la recta tangente al punto } (x, f(x)).}$$

① $f'(0) = 1$

2 $f'(1) = 3(1)^2 - 4(1) + 1 = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow y = 0$

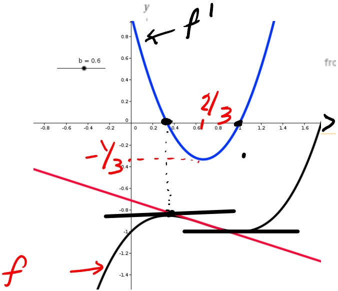
derivative of x^3-2x^2+x-1

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

Derivative

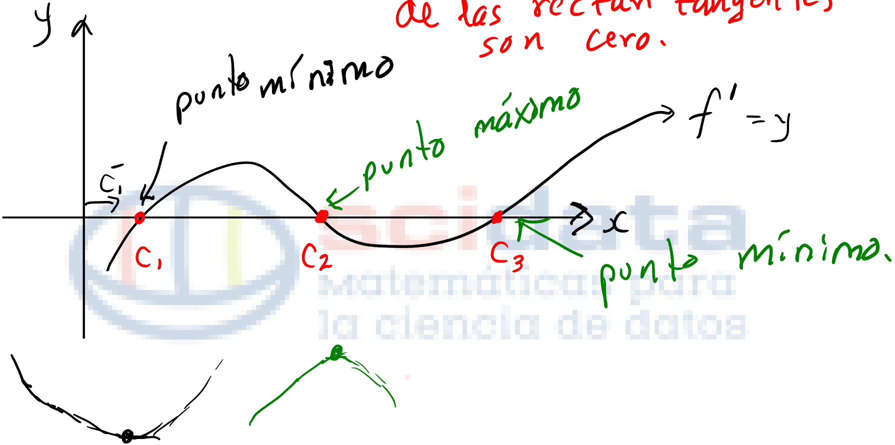
$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x - 1) = 3x^2 - 4x + 1$$

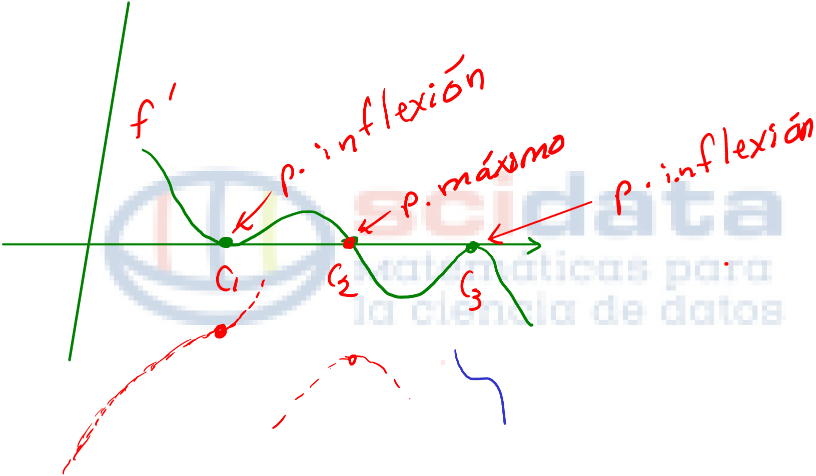
Plots



Derivadas de orden superior

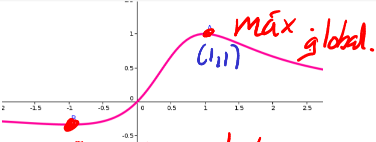
En c_1, c_2, c_3 las pendientes de las rectan tangentes son cero.




f '
p. inflexión
p. máximo
p. inflexión
c_1
c_2
c_3

Derivadas de orden superior

Ej: ① $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$



② $f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x\underbrace{e^{-x^2}}_{>0} = 0$?

$e^{-x^2} = \dfrac{1}{e^{x^2}} \neq 0$

$\therefore x = 0$

③ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

④ $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

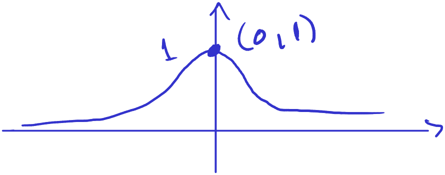
$f' > 0$ $\quad$ $f' < 0$

$-1 \quad 0 \quad 1$

p. máximo

$f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$

2 $f(x) = e^{-x^2}$ | p. máx $(0,1)$ (local o global?)



① $f' > 0$ si $x \in (-\infty, 0)$ f crece.

② $f' < 0$ si $x \in (0, \infty)$ $\therefore$ f decrece

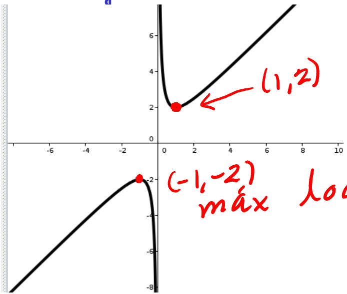
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$ $\therefore$ en $y = 0$ hay una asíntota horizontal.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$



$(1,2)$ mín local

$(-1,-2)$ máx local.

$f'>0$ $\quad$ $f'<0$ $\quad$ $f'>0$

-2 $\quad$ -1 $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ 1

máx $\quad$ mín.

$$f'(-2) = 1 - \frac{1}{(-2)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 < 0$$

$$f'(2) = \frac{3}{4} > 0$$

mín $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

máx $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

$$f(x) = \underbrace{x^{\frac{1}{x}}}_{>0}$$

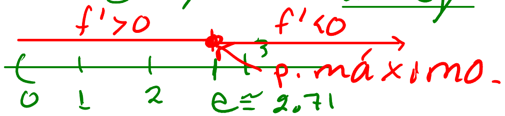
$\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$

$\mathrm{Ima}(f) = (0, e^{\frac{1}{e}}]$

$$f'(x) = \underbrace{x^{\frac{1}{x}-2}}_{>0}\,(\underbrace{1-\ln(x)}_{=0}) = 0$$

$$1-\ln(x) = 0 \iff 1 = \ln(x)$$

$$\iff e^1 = \cancel{e}^{\ln(x)} = x = e$$



$$f'(1) \cong 1 - \cancel{\ln(1)}^{0} = 1 > 0$$

$$f'(3) = 1 - \ln(3) < 0$$

$\Rightarrow$ f crece en $(0, e]$

f decrece en $[e, \infty)$

Derivative

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[x]{x}\right) = -x^{1/x-2}\,(\log(x) - 1)$$

Global maximum | Approx

$$\max\left\{\sqrt[x]{x}\right\} = \sqrt[e]{e} \text{ at } x = e$$

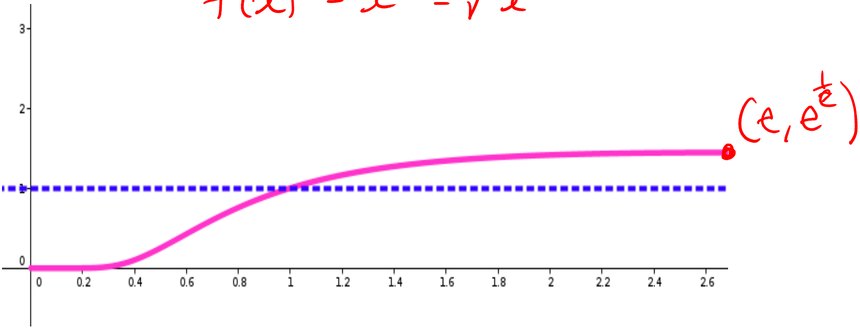
Limit | Enlarge

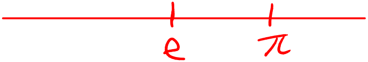
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

Download Page

Hay una asíntota horizontal en $y = 1$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{x}$$





$$f(e) > f(\pi)$$

$$\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{e\pi} > \left(\pi^{\frac{1}{\pi}}\right)^{e\pi} \iff e^{\frac{\cancel{e}\pi}{\cancel{e}}} > \pi^{\frac{e\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}}$$

$$\therefore \; \underline{e^{\pi} > \pi^{e}}$$

Derivadas de orden superior