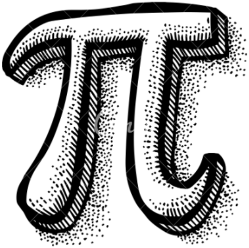
scidata



Funciones de Varias Variables

Campos escalares y campos vectoriales

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ con $f(x,y,z)=\ln(x^2-3yz)+\sqrt{x-z}$ campo escalar
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ con $f(x)=(x^3-6x,\cos(x)+3)$ campo vectorial
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ con $f(x,y)=(x+2y,1-\frac{x-2}{3+y})$ campo vectorial

Ejemplo (Magnitudes escalares)

Veamos algunos ejemplos de magnitudes escalares que pueden ser modelados por medio de un campo escalar:

a. *Supongamos que* $T(x,y,z)=x^2-y+z$ *es la temperatura en un punto en nuestro espacio tridimensional;* $T(x,y)=x^3+y^2$ *la temperatura en un punto de una placa metálica, etc.*
b. *Distancia* $f(x,y,z)$, *área* $A(x,y)$, *el volumen* $V(x,y,z)$, *altura sobre el nivel del mar* $H(x,y,z)$, *etc.*
c. $P(x,y,z)=7x-3y+4z$ *la presión atmosférica, la presión sanguínea, la presión en un recipiente, etc.*
d. *Densidad* $\delta(x,y,z)$, *masa, porosidad, etc.*
e. *Momento de inercia, tiempo, frecuencia, trabajo, rapidez, etc.*

Ejemplo (Magnitudes vectoriales)

Recordemos que un vector es un objeto que posee magnitud, dirección y sentido. Veamos algunos ejemplos de magnitudes vectoriales que pueden ser modelados por medio de un campo vectorial:

a. $F(x, y, z)$ *Fuerza aplicada a objeto, fuerza de sustentación, etc.*
b. $r(x, y, z)$ *Posición, velocidad, aceleración, etc.*
c. *Momento de fuerza, Torsión, etc.*
d. *Tensión eléctrica*
e. *Campo magnético, campo eléctrico, campo gravitacional.*
f. *Peso.*

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2 & \text{Campos escalares (dominio } \mathbb{R}^n \text{ y contradominio } \mathbb{R}) \\ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, n \geq 1, m \geq 2 & \text{Campos vectoriales (dominio } \mathbb{R}^n \text{ y contradominio } \mathbb{R}^m). \end{cases}$$

Definición (Campo escalar)

Un campo escalar es toda función f que a cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ le asocia un valor escalar, $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definición (Campo vectorial)

Un campo vectorial es toda función f que a cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ le asocia un vector en $\mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Por ejemplo,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

es un campo vectorial de m componentes, $f_1, f_2, ..., f_m$, que dependen de n variables independientes, donde las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son campos escalares para toda $i = 1, ..., m$.

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Dominio de un campo escalar)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar. El dominio de* f, *denotado por* $Dom(f)$ *es*

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Dominio de un campo vectorial)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial. El dominio de* f, *denotado por* $Dom(f)$ *es*

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \mathbb{R}^m\}.$$

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Imagen de un campo escalar)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. La imagen de f, denotado por Ima(f) es

$$\textit{Ima}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = f(x)\}.$$

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Imagen de un campo vectorial)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un campo vectorial. La imagen de* f*, denotado por Ima*(f) *es*

$$\textit{Ima}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, y = f(x)\}.$$

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Gráfica de un campo escalar)

Dado un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, definimos la gráfica de* f*, denotada por Graf*(f)*, como*

$$\textit{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\} \tag{1}$$

Definición (Gráfica de un campo vectorial)

Dado un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, definimos la gráfica de* f*, denotada por Graf*(f)*, como*

$$\textit{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\} \tag{2}$$

matemáticas para
la ciencia de datos

Definición (Límite de un campo escalar)

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tiende a el límite* $L \in \mathbb{R}$ *cuando* $x \in \mathbb{R}^n$ *tiende a* $c \in \mathbb{R}^n$*, significa que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $0 < ||x - c|| < \delta$ *se cumple* $|f(x) - L| < \epsilon$

El símbolo $|| \cdot ||$ significa la norma usual en $\mathbb{R}^n$, esto es, si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Definición (Límite de un campo vectorial)

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tiende al límite* $L \in \mathbb{R}^m$ *cuando* $x \in \mathbb{R}^n$ *tiende a* $c \in \mathbb{R}^n$*, significa que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $0 < ||x - c|| < \delta$ *se cumple* $||f(x) - L|| < \epsilon$

Básicamente el concepto de límite nos dice que si una función tiene un límite L cuando x tiende a c, significa que cada vez que x esté en un entorno de a, entonces $f(x)$ se encontrará en un entorno de L.

Definición (Continuidad en un campo escalar)

Decimos que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua en* $a \in \mathbb{R}^n$*, si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $||x - a|| < \delta$ *entonces* $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

Definición (Continuidad en un campo vectorial)

Decimos que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es continua en* $a \in \mathbb{R}^n$*, si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* x *que satisface* $||x - a|| < \delta$ *entonces* $||f(x) - f(a)|| < \epsilon$

scidata
matemáticas para
la ciencia de datos