



$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

# Integración por Descomposición en Fracciones Parciales

Fracciones propias e impropias

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

### Definición (Función racional propia)

Sean  $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$  y  $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$  dos polinomios en la variable real  $x$  de grado  $n$  y  $m$ , respectivamente. Decimos que una función de la forma  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  es una función racional **propia**, si  $\text{grado } p < \text{grado } q$ . En caso contrario ( $\text{grado } p \geq \text{grado } q$ ) decimos que es una función racional **impropia**.



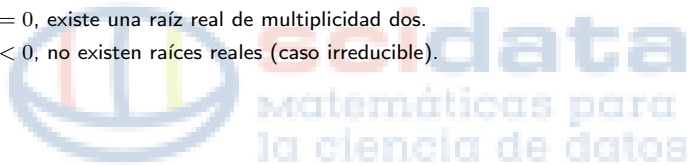
scidata  
matemáticas para  
la ciencia de datos

## Definición (Factores lineales y cuadráticos irreducibles)

*un factor cuadrático es de la forma  $(ax^2 + bx + c)$  con  $a \neq 0$ , mientras que un factor lineal es de la forma  $(dx + e)$  con  $d \neq 0$ . Todo factor lineal tiene raíces reales, esto es,  $x = -e/d$ , pero no todo factor cuadrático tiene raíces reales. Cuando un factor cuadrático no tiene raíces reales, diremos que es irreducible.*

$$\Delta = b^2 + 4ac$$

- 1 Si  $\Delta > 0$ , existen dos raíces distintas reales.
- 2 Si  $\Delta = 0$ , existe una raíz real de multiplicidad dos.
- 3 Si  $\Delta < 0$ , no existen raíces reales (caso irreducible).



## Teorema

Toda función racional propia  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  se puede escribir como suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A}{(x+a)^j} \quad y \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}, \quad (1)$$

con  $j, k \in \mathbb{Z}^+$  y  $b^2 - 4c < 0$  (el término cuadrático es irreducible o bien no tiene raíces reales).



## Ejemplo (Caso I)

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2},$$

donde las raíces son 0, 1/2 y -2.



scidata  
matemáticas para  
la ciencia de datos

## Ejemplo (Caso II)

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

donde las raíces son  $x = 1$  de multiplicidad 2 y  $x = -1$  de multiplicidad simple.



scidata  
matemáticas para  
la ciencia de datos

### Ejemplo (Caso III)

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4},$$

donde existe una raíz real  $x = 0$  de multiplicidad 1 y  $x^2 + 4$  un factor irreducible de multiplicidad simple.



scidata  
matemáticas para  
la ciencia de datos



### Ejemplo (Caso IV)

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2},$$

donde el primer factor es simple  $x$  y el segundo irreducible de multiplicidad 2



scidata  
matemáticas para  
la ciencia de datos