$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu$$

Integral Definida e Indefinida

Con límites o sin límites

Instructor. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Contenido

- Concepto de integral definida e indefinida
- Ejemplos

Definición (Integral definida)

La integral definida se representa por el símbolo $\int_a^b f(x)dx$, *siempre que dicha integral exista. Se compone del* **signo de integración** $\int$ *(se lee "s alargada"-introducida por Leibniz a finales del SXVII), el valor* a *se denomina* **límite inferior**, *mientras que el valor* b **límite superior**. *La función* f *se conoce como el* **integrando** *y* dx *se conoce como el* **diferencial de** x, *que nos indica que la variable de integración es* x.

Por otra parte si una integral no tiene los límites de integración, $\int f(x)dx$, *diremos que se trata de una* **integral indefinida**.

Ejercicio

Determine el tipo de integral, si es definida o indefinida.

a) $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$ definida

b) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}dx$ definida

c) $\int e^{-x}dx$ indefinida

d) $\boxed{\int_0^{\infty} x^{-2}dx \quad \text{definida}}$

e) $\int \ln(x-1)dx$ indefinida

f) $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{\cos(x+\pi)}dx$ indef.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = I \in \mathbb{R}.$$

´

Diferencias entre integral definida e indefinida

- La integral definida, si existe es un número, es decir $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$.
- Si la integral definida existe, este valor es **único**.

- La integral indefinida, si existe es otra función.
- Si la integral indefinida existe, entoces existen infinitas.

$5+7-7=5$ idéntico.

$5 \cdot \frac{-2}{-2} = 5$, $\sqrt{5^2} = 5$ $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$?

$f(x) = \frac{x^2}{2} + 5 \Rightarrow f'(x) =$

Definición (Primitiva o antiderivada de una función)

Una función $F(x)$ *es una* **primitiva** *o* **antiderivada** *de una función* $f(x)$ *sobre un intervalo* $[a, b]$ *si* $F'(x) = f(x)$, *para todo* $x \in (a, b)$.

Ejemplos (primitive en Wolframalpha). Determine una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x + 7$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2}$

c) $h(t) = \sin(t)$

d) $v(t) = \tan(t)$

e) $f(x) = \ln(x)$

f) $y(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 4}$

$f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow f'''(x) \rightarrow f^{(IV)}(x)$

$F(x) \rightarrow F'(x) = \underline{f(x)}$

$\rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x + 1$

Teorema

Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces

$$F(x) = G(x) + C,$$

donde C es una constante.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + 17$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + 7\right) = x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - 2^{\pi}\right) = x^2$$

Gráficas de primitivas

Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ es una familia o colección de funciones que son traslaciones de F con respecto a la constante

Ver Geogebra:

$x^2 \xrightarrow{\text{Una primitiva}} \frac{x^3}{3} + C$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$