.

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

Integral de Riemann

Sumas inferiores y sumas superiores

Instructor. Juan Luis Palacios Soto

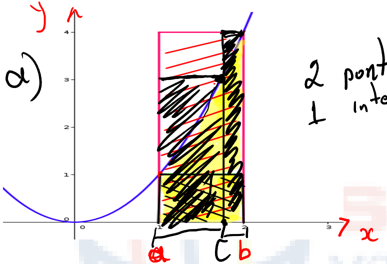
palacios.s.j.l@gmail.com

Contenido

- Aproximar el área con rectángulos: sobreestimar y subestimar
- Partición de un intervalo
- Sumas inferiores y sumas superiores
- Integral de Riemann

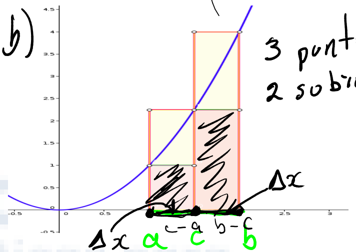
Sobrestimar y subestimar el área

a)



2 puntos
1 intervalos

b)

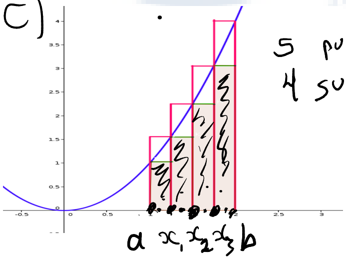


3 puntos
2 subint.

3. 11

$h = 11-3 = 8$

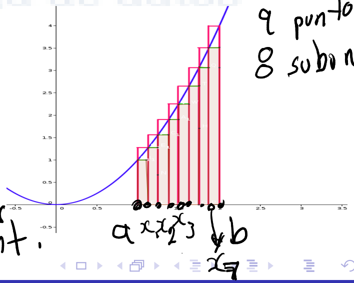
c)



5 puntos
4 subint.

100 puntos
99. subint.

d)

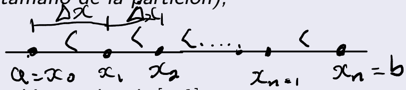


9 puntos
8 subint.

Definición (Partición y norma de la partición)

Una partición (o también llamada discretización) del intervalo $[a, b]$ *es un conjunto* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ *tal que cumple lo siguiente:*

1. $P \subseteq [a, b]$,
2. $\#P = n + 1 < \infty$ *(cardinalidad finita o tamaño de la partición),*
3. $a, b \in P$,
4. $a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$.



Toda partición P *de tamaño* $n + 1$ *induce* n *subintervalos de* $[a, b]$

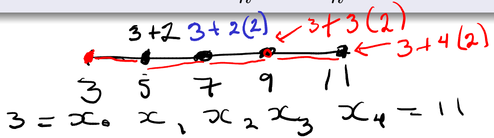
$[a, x_1]$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n] \subset [a, b],$$

cuya longitud más grande, denotada por $||P||$, *la denominamos norma de la partición, es decir*

$$||P|| = \max\{|x_{i+1} - x_i| : i = 1, ..., n\}.$$

Diremos que la partición es **regular o uniforme** *si todas las longitud de los subintervalos inducidos por la partición tienen la misma longitud, esto es* $||P|| = |x_{i+1} - x_i| = \Delta x$ *para toda* $i = 1, 2, ..., n$, *donde* $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{|a-b|}{n}$.



$$\frac{11-3}{4} = 2$$

Definición (Sumas superiores e inferiores)

Dada una partición uniforme del intervalo $[a,b]$, *definimos las sumas superiores, denotadas por* $U(f,P_n)$, *e inferiores, denotada por* $L(f,P_n)$, *de una función continua* f *como*

Upper

Lower

$$U(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + \cdots + M_n \Delta x$$

altura base

y $L(f,P_n) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(f,P_n)$

$$L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x, = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \dots + m_n \Delta x$$

donde

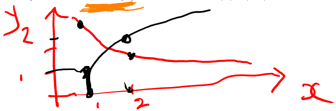
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad \textit{(partición uniforme)} \qquad [x_0, x_1]$$

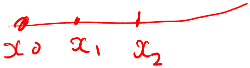
$$M_i = \max\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}, \qquad \textit{máximo de } f \textit{ en } [x_{i-1}, x_i]$$

$$m_i = \min\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}, \qquad \textit{mínimo de } f \textit{ en } [x_{i-1}, x_i]$$

para toda $i = 1, 2, ..., n$.

En WolframAlpha: (sum sqrt(i),$i = 1..n)/(n)^{1.5}$





$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$1+2+\cdots+9+10 = \frac{\cancel{10}(11)}{\cancel{2}} = 5(11) = 55$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2 = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}(11)(\overset{7}{\cancel{21}})}{\underset{3}{\cancel{6}}} = 385$

$S = 1+2+3+4+5+6+7+\cdots+99+100$

$S = 100+99+98+97 \cdots\cdots + 2+1$

$2S = \underbrace{101+101+101+\cdots\cdots+101+101}_{100}$

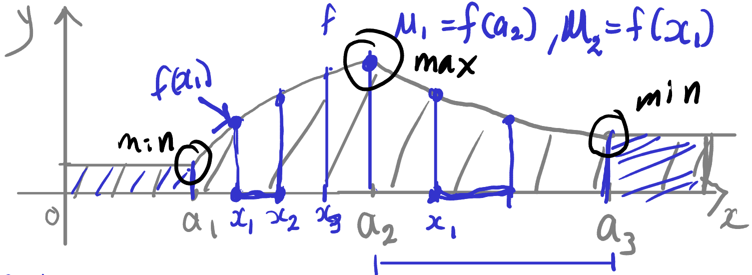
$2S = 100(101)$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

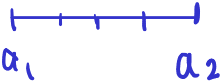
$$1^3+2^3+\cdots+10^3 = \left(\frac{10(11)}{2}\right)^2 = (55)^2 = 3025$$

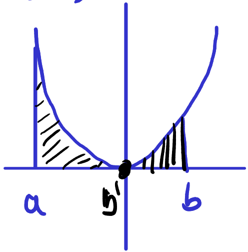
$S = \frac{100(101)}{}$

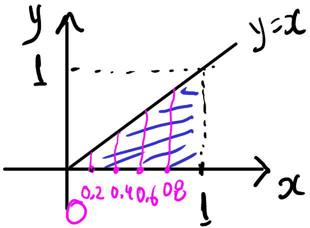
f



$M_1 = f(x_1)$
$M_2 = f(x_2)$
$M_3 = f(x_3)$







$f(x)=x$

$A = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \leftarrow 0.6$

$\epsilon = 0{,}00001$

$n = ?$

$a=0, \; b=1.$

$n = 5$ subintervalos $\Rightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$

$$P_5 = \{ \overset{a}{0}, \overset{x_1}{0.2}, \overset{x_2}{0.4}, \overset{x_3}{0.6}, \overset{x_4}{0.8}, \overset{x_5}{1} \}$$

$$L(f,P_5) = \sum_{i=1}^{5} m_i \Delta x =$$

$$= \cancel{0 \cdot \tfrac{1}{5}} + 0.2\,\tfrac{1}{5} + 0.4\left(\tfrac{1}{5}\right) + 0.6\left(\tfrac{1}{5}\right) + 0.8\left(\tfrac{1}{5}\right) + 1\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 + \tfrac{2}{5^2} + \tfrac{3}{5^2} + \tfrac{4}{5^2}$$

$$= \frac{1+2+3+4}{5^2} = \frac{\frac{4(5)}{2}}{25} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$L(f,P_5) < \int_0^1 f < U(f,P_5)$$

$x_1 = a + 1\cdot\Delta x = 0 + 1\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$x_2 = a + 2\Delta x = \frac{2}{5} = 0.4$

$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{5} = 0.6$

$x_4 = a + 4\Delta x = \frac{4}{5} = 0.8$

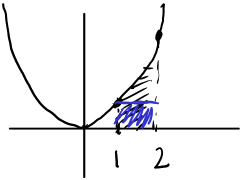
$x_5 = a + 5\Delta x = \frac{5}{5} = 1$

$x_i = a + i\Delta x = a + i\,\frac{b-a}{n}$

$i = 0, 1, 2, \dots, n.$

$f(x_i) = x_i$

$f(x) = x^2$



$a = 1, \quad b = 2, \quad n = 10$

$L(f, P_{10}) = \sum_{i=1}^{10} m_i \Delta x = \underbrace{\sum_{i=1}^{10} \left(1 + \frac{i}{5} + \frac{i^2}{100}\right) \frac{1}{10}}$!

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\underline{x_i} = a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{1}{10}\right) = \underline{1 + \frac{i}{10}}$

$i = 0, 1, \ldots, 10.$

$m_i = f(x_i)$ ó $f(x_{i-1})$? $\quad m_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\uparrow$ der. $\qquad \uparrow$ izq

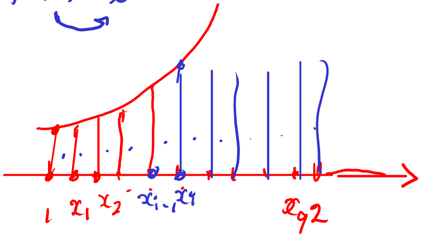
$m_i = f(x_{i-1}), \quad m_1 = f(x_0) = f(a) = f(1) = 1^2 = 1$

$m_2 = f(x_1) = f\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2$

$m_i = f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^2 = \left(1 + \frac{i}{10}\right)^2$

$= 1 + 2\left(\frac{i}{10}\right) + \frac{i^2}{10^2} \Rightarrow \left(1 + \frac{i}{5} + \frac{i^2}{100}\right)$

$f(x) = x^2$



$m_1 =$

$m_i = f(x_i^*)$

$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$

$i = 1, 2, \dots, 10$

$i = 1 \Rightarrow x_i^* = x_{i-1}$

i.e. $f(x_{i-1})$

$$m_i = f\left(1 + \frac{i-1}{10}\right) = \left(1 + \frac{i-1}{10}\right)^2$$

$$= \left(\frac{10 + i - 1}{10}\right)^2 = \left(\frac{9+i}{10}\right)^2$$

$$= \frac{81 + 18i + i^2}{10^2}$$

$$L(f, P_{10}) = \sum_{i=1}^{10} m_i \Delta x = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{81 + 18i + i^2}{10^2}\right) \cdot \frac{1}{10} \approx 2.185$$

$$U(f,P_{10}) = \sum_{i=1}^{10} M_i \Delta x = \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{10} f\left(1+\frac{i}{10}\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{10}\left(1+\frac{i}{10}\right)^2 \frac{1}{10}$$

$$= \sum_{i=1}^{10}\left(1+\frac{2i}{10}+\frac{i^2}{100}\right)\frac{1}{10} = \underline{2.485}$$

$$L(f,P_{10}) = 2.185 \le \int_1^2 x^2\,dx = 2.485 = U(f,P_{10})$$

$$\left|L(f,P_{10}) - U(f,P_{10})\right| = \left|2.185 - 2.485\right|$$

$$= 0.3$$

$n \cong$

$$e \approx 0.001$$

Teorema

Si P_n es una partición de $[a,b]$ y si $P_n \subseteq P_k$ para algún $k \geq n$, entonces

$$L(f,P_n) \leq L(f,P_k) \leq U(f,P_k) \leq U(f,P_n)$$

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_{n-1} \quad b = x_n$

$$L(f,P_n) \leq U(f,P_n)$$

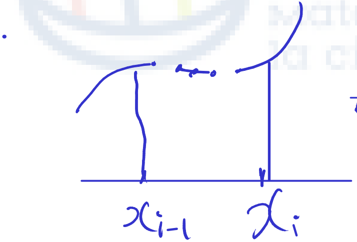
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} U(f,P_n)$$

Definición (Integral de Riemann)

Una función f decimos que es Riemann integrable sobre el intervalo $[a,b]$, denotado por $\int_a^b f(x)dx$, si

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x \in \mathbb{R}$$

Nota: en la integral de Riemann se toma cualquier valor definido de la función como la altura del rectángulo.



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que.

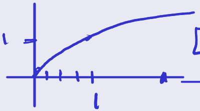
$|U - L| < \varepsilon$ si

Ejemplo

Calcular la siguiente integral por definición de Riemann:

$f(x) = \sqrt{x}$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$



$[x_{i-1}, x_i]$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$f(x_i) = \sqrt{x_i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\,\frac{1}{n} =$$

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + i\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}}\,\frac{1}{n}$$

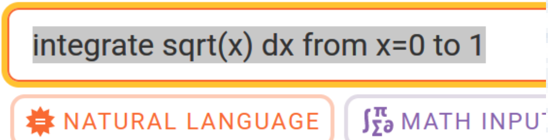
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{\frac{1}{2}}}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

Ejemplo

Calcular la siguiente integral por definición de Riemann:

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

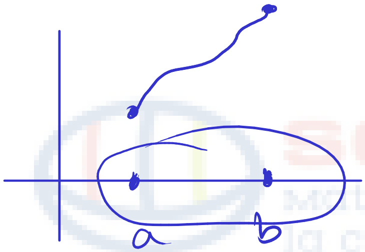
lim·(sum (i^(.5)/n^(1.5)),i=1..n) as n->infinity $= \frac{2}{3}$



$= \frac{2}{3}$

Teorema

Si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces f es Riemann integrable sobre $[a, b]$.



¿$[0, \infty)$ cerrado?

Región de integración

Teorema (Teorema del Valor Medio para Integrales)

Si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

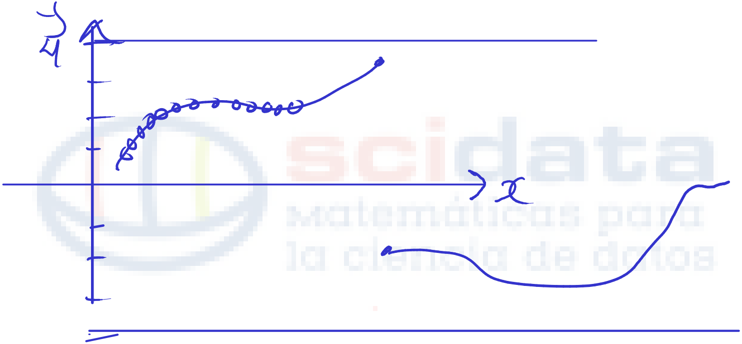
$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

.

Ver Geogebra

Teorema

Si f es acotada y el número de discontinuidades de f sobre $[a,b]$ es un número finito, entonces f es Riemann integrable sobre $[a,b]$.

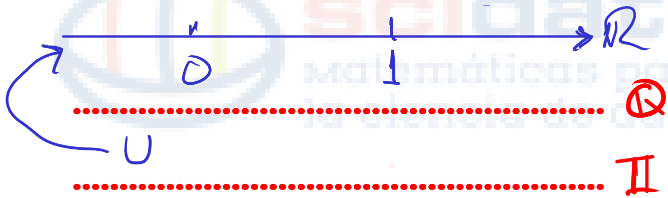


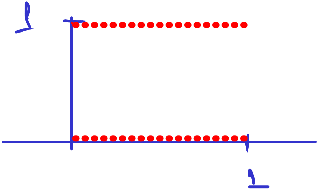
$$|f(x)| \leq N.$$

Teorema

Si f es acotada y el número de discontinuidades de f sobre $[a,b]$ es un número finito, entonces f es Riemann integrable sobre $[a,b]$.

$$f(x)=\begin{cases}1, & si\ x\in\mathbb{Q}\\ 0, & si\ x\in\mathbb{I}\end{cases}$$



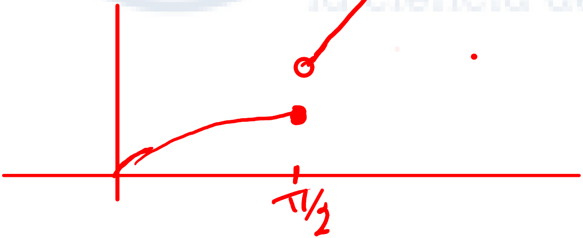


Tarea. Calculen $L, U.$, $n=10$

Teorema

Si f es acotada y el número de discontinuidades de f sobre $[a,b]$ es un número finito, entonces f es Riemann integrable sobre $[a,b]$.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x^2, & x > \pi/2 \end{cases}$$



Teorema

Si f es acotada y el número de discontinuidades de f sobre $[a, b]$ es un número finito, entonces f es Riemann integrable sobre $[a, b]$.

https://forms.gle/Dg1DCfoQg7wZQi9X9