$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu$$

Integral de Riemann

Sumas inferiores y sumas superiores

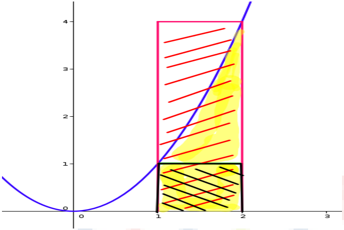
Instructor. Juan Luis Palacios Soto

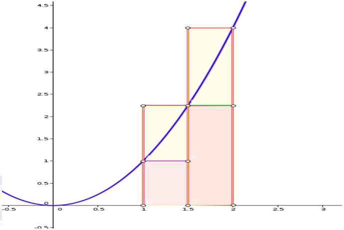
palacios.s.j.l@gmail.com

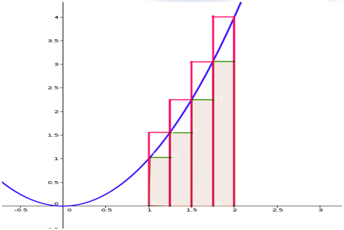
Contenido

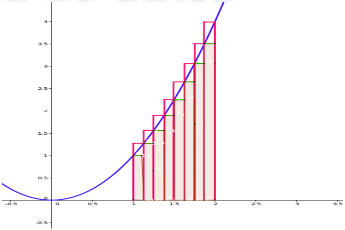
- Aproximar el área con rectángulos: sobreestimar y subestimar
- Partición de un intervalo
- Sumas inferiores y sumas superiores
- Integral de Riemann

Sobrestimar y subestimar el área









Definición (Partición y norma de la partición)

Una partición (o también llamada discretización) del intervalo $[a,b]$ *es un conjunto* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ *tal que cumple lo siguiente:*

1. $P \subseteq [a,b]$,
2. $\#P = n+1 < \infty$ *(cardinalidad finita o tamaño de la partición),*
3. $a, b \in P$,
4. $a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$.

Toda partición P *de tamaño* $n+1$ *induce* n *subintervalos de* $[a,b]$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n] \subset [a,b],$$

cuya longitud más grande, denotada por $||P||$*, la denominamos norma de la partición, es decir*

$$||P|| = \max\{|x_{i+1} - x_i| : i = 1, ..., n\}.$$

Diremos que la partición es **regular o uniforme** *si todas las longitud de los subintervalos inducidos por la partición tienen la misma longitud, esto es* $||P|| = |x_{i+1} - x_i| = \Delta x$ *para toda* $i = 1, 2, ..., n$*, donde* $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{|a-b|}{n}$.

Definición (Sumas superiores e inferiores)

Dada una partición uniforme del intervalo $[a, b]$*, definimos las sumas superiores, denotadas por* $U(f, P_n)$*, e inferiores, denotada por* $L(f, P_n)$*, de una función continua* f *como*

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x$$

y

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x,$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{b-a}{n}, && \text{(partición uniforme)} \\ M_i &= \max\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, && \text{máximo de } f \text{ en } [x_{i-1}, x_i] \\ m_i &= \min\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, && \text{mínimo de } f \text{ en } [x_{i-1}, x_i] \end{aligned}$$

para toda $i = 1, 2, ..., n$.

En WolframAlpha: (sum sqrt(i),$i = 1..n)/(n)^{1.5}$

Teorema

Si P_n es una partición de $[a,b]$ y si $P_n \subseteq P_k$ para algún $k \geq n$, entonces

$$L(f,P_n) \leq L(f,P_k) \leq U(f,P_k) \leq U(f,P_n)$$

Definición (Integral de Riemann)

Una función f decimos que es Riemann integrable sobre el intervalo $[a,b]$, denotado por $\int_a^b f(x)dx$, si

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x \in \mathbb{R}$$

Nota: en la integral de Riemann se toma cualquier valor definido de la función como la altura del rectángulo.

Ejemplo

Calcular la siguiente integral por definición de Riemann:

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

Teorema

Si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces f es Riemann integrable sobre $[a, b]$.

Teorema (Teorema del Valor Medio para Integrales)

Si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

.

Ver Geogebra

Teorema

Si f es acotada y el número de discontinuidades de f sobre $[a, b]$ es un número finito, entonces f es Riemann integrable sobre $[a, b]$.