.

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

Integración por Descomposición en Fracciones Parciales

Fraciones propias e impropias

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Función racional propia)

Sean $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ *y* $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ *dos polinomios en la variable real* x *de grado* n *y* m*, respectivamente. Decimos que una función de la forma* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *es una función racional* **propia***, si grado* $p <$*grado* q*. En caso contrario (grado* $p \geq$*grado* q*) decimos que es una función racional* **impropia***.*

Definición (Factores lineales y cuadráticos irreducibles)

un factor cuadrático es de la forma $(ax^2 + bx + c)$ *con* $a \neq 0$, *mientras que un factor lineal es de la forma* $(dx + e)$ *con* $d \neq 0$. *Todo factor lineal tiene raíces reales, esto es,* $x = -e/d$, *pero no todo factor cuadrático tiene raíces reales. Cuando un factor cuadrático no tiene raíces reales, diremos que es irreducible.*

$\Delta = b^2 + 4ac$

1. Si $\Delta > 0$, existen dos raíces distintas reales.
2. Si $\Delta = 0$, existe una raíz real de multiplicidad dos.
3. Si $\Delta < 0$, no existen raíces reales (caso irreducible).

Teorema

Toda función racional propia $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *se puede escribir como suma de fracciones de la forma:*

$$\frac{A}{(x+a)^j} \qquad y \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}, \tag{1}$$

con $j, k \in \mathbb{Z}^+$ *y* $b^2 - 4c < 0$ *(el término cuadrático es irreducible o bien no tiene raíces reales).*

Ejemplo (Caso I)

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2},$$

donde las raíces son $0, 1/2$ *y* -2.

Ejemplo (Caso II)

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

donde las raíces son $x = 1$ *de multiplicidad 2 y* $x = -1$ *de multiplicidad simple.*

Ejemplo (Caso III)

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4},$$

donde existe una raíz real $x = 0$ *de multiplicidad 1 y* $x^2 + 4$ *un factor irreducible de multiplicidad simple.*

Ejemplo (Caso IV)

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2},$$

donde el primer factor es simple x y el segundo irreducible de multiplicidad 2