$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Antiderivada o primitiva)

Decimos que F es una **primitiva o antiderivada** *de f sobre $I = [a, b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

$$f \quad \rightarrow \quad \underbrace{f'}_{derivada\ de f} \quad \rightarrow \quad \underbrace{f''}_{derivada\ de f'} \quad \rightarrow \quad \underbrace{f'''}_{derivada\ de f''} \tag{1}$$

$$\underbrace{f}_{Primitiva\ de f'} \quad \leftarrow \quad \underbrace{f'}_{primitiva\ de f''} \quad \leftarrow \quad \underbrace{f''}_{Primitiva\ de f'''} \quad \leftarrow f''' \tag{2}$$

Lema

Si F y G son dos primitivas o antiderivadas de f sobre I, entonces

$$F(x) = G(x) + C$$

$F(x) - G(x) = C.$

$F(b) + C$
$- \; F(a) + C$ $= F(b) - F(a)$

Definición (Primitivas inmediatas)

La parte derecha es una primitiva de la parte izquierda.

1. $\int k dx = kx + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ *si* $n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$

int. indef.

$x^0 = 1$

$\int k x^0 dx = k \int x^0 dx = k\left(\frac{x^{0+1}}{0+1}\right) + 1$

$= k x + C.$

En Wolframalpha: integrate f(x) dx y en Geogebra. integrate[f(x)]

$\ln(x) + c$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}\left(\ln(x) + c\right) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\frac{d}{dx}\left(x^7\right) = 7x^6$

Definición (Primitivas inmediatas)

5. $$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$
6. $$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$
7. $$\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c$$
8. $$\int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + c$$
9. $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Comprobar en Geogebra o en WolframAlpha.

dx, ∂x

Definición (Integral definida con primitivas)

En caso de que tengamos una integral definida, podemos hacer uso de una primitiva.

$$\int_a^b k\,dx = kx + c = k(b) + c - (k(a) + c) = kb - ka = k(b-a)$$

1. $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
2. $\displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$, *si* $n \neq -1$

   TFC.
3. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_a^b = \ln(b) - \ln(a)$

   TFC
4. $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$$

En Wolframalpha: integrate f(x) dx from x=a to b (o x=a..b)

Definición (Integral definida con primitivas)

5. $\int_a^b \sin(x)dx = \cos(a) - \cos(b)$
6. $\int_a^b \cos(x)dx = \sin(b) - \sin(a)$
7. $\int_a^b \sec^2(x)dx = \tan(b) - \tan(a)$
8. $\int \csc^2(x)dx = \cot(a) - \cot(b)$

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo (Versión 1))

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Definamos F en $[a,b]$ como

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

.

Si f es continua en $[a,b]$, entonces $F(x)$ es derivable en (a,b) y $F'(c) = f(c)$ para toda $c \in (a,b)$.

Ejemplo: Determina $F'(x)$ si $F(x) = \int_{-2}^{x}(2x^3 - 4x + 1000)dt$ ¿En wolframalpha?

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(y)dy$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dx \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$f(t) = 2t^3 - 4t + 1000$$

$$F'(x) = f(x) = 2x^3 - 4x + 1000.$$

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo (Versión 2))

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{F(b) - F(a)} =: F(x)\Big|_a^b,$$

donde F *es una primitiva de* f *sobre* $[a, b]$.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \cancel{\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}} = \frac{1}{3}$$

Teorema (TFC y la regla de la cadena)

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, y $a \leq g(x) \leq b$ derivable sobre (a,b), entonces la función

$2x,\ x^3,\ \operatorname{sen}(x),\ e^x$

$$\underline{G(x)} = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

es derivable y

$$\underline{G'(x)} = \underline{f(g(x))g'(x)},$$

para todo $x \in (a,b)$.

Ejercicio: calcular $F'(x)$ para

$$F(x) = \int_{x^4}^{2} \sqrt{5 - t^2}\,dt$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = n u^{n-1} du$$

$$\frac{d}{dx}\left((2x+1)^3\right) = 3\underline{(2x+1)}^2 \cdot 2$$

$$= 6(2x+1)^2$$

Teorema (TFC y la regla de la cadena)

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua, y* $a \leq g(x) \leq b$ *derivable sobre* (a,b), *entonces la función*

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

es derivable y

$$G'(x) = f(g(x))g'(x),$$

para todo $x \in (a,b)$.

Ejercicio: calcular $F'(x)$ para

$$F(x) = \int_{x^4}^{2} \sqrt{5-t^2}dt = -\int_2^{x^4 \leftarrow g(x)} \underbrace{\sqrt{5-t^2}}_{f(t)}\, dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = -f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= -\sqrt{5-g(x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^4) = -\sqrt{5-(x^4)^2} \cdot 4x^3$$

$$= -4\sqrt{5-x^8}\, x^3.$$