.

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Antiderivada o primitiva)

Decimos que F es una **primitiva o antiderivada** *de f sobre $I = [a, b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

$$f \quad \rightarrow \quad \underbrace{f'}_{derivada\ de f} \quad \rightarrow \quad \underbrace{f''}_{derivada\ de f'} \quad \rightarrow \quad \underbrace{f'''}_{derivada\ de f''} \tag{1}$$

$$\underbrace{f}_{Primitiva\ de f'} \quad \leftarrow \quad \underbrace{f'}_{primitiva\ de f''} \quad \leftarrow \quad \underbrace{f''}_{Primitiva\ de f'''} \quad \leftarrow f''' \tag{2}$$

Lema

Si F y G son dos primitivas o antiderivadas de f sobre I, entonces

$$F(x) = G(x) + C$$

Definición (Primitivas inmediatas)

La parte derecha es una primitiva de la parte izquierda.

1. $$\int k dx = kx + c$$
2. $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ si } n \neq -1$$
3. $$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$
4. $$\int e^x dx = e^x + c$$

En Wolframalpha: integrate f(x) dx y en Geogebra.

Definición (Primitivas inmediatas)

5. $$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$
6. $$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$
7. $$\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c$$
8. $$\int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + c$$
9. $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Definición (Integral definida con primitivas)

En caso de que tengamos una integral definida, podemos hacer uso de una primitiva.

1. $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
2. $\displaystyle\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$, *si* $n \neq -1$
3. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(x)\Big|_a^b = \ln(b) - \ln(a)$
4. $\displaystyle\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$

En Wolframalpha: integrate f(x) dx from x=a to b (o x=a..b)

Definición (Integral definida con primitivas)

5. $$\int_a^b \sin(x)dx = \cos(a) - \cos(b)$$
6. $$\int_a^b \cos(x)dx = \sin(b) - \sin(a)$$
7. $$\int_a^b \sec^2(x)dx = \tan(b) - \tan(a)$$
8. $$\int \csc^2(x)dx = \cot(a) - \cot(b)$$

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo (Versión 1))

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable. Definamos* F *en* $[a,b]$ *como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

.

Si f *es continua en* $[a,b]$*, entonces* $F(x)$ *es derivable en* (a,b) *y* $F(c) = f(c)$ *para toda* $c \in (a,b)$.

Ejemplo: Determina $F'(x)$ si $F(x) = \int_{-2}^{x} (2x^3 - 4x + 1000)dt$ ¿En wolframalpha?

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo (Versión 2))

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b,$$

donde F *es una primitiva de* f *sobre* $[a, b]$.

Teorema (TFC y la regla de la cadena)

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua, y* $a \leq g(x) \leq b$ *derivable sobre* (a,b)*, entonces la función*

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

es derivable y

$$G'(x) = f(g(x))g'(x),$$

para todo $x \in (a,b)$*.*

Ejercicio: calcular $F'(x)$ para

$$F(x) = \int_{x^4}^{2} \sqrt{5 - t^2}dt$$