Variables Aleatorias Binomiales

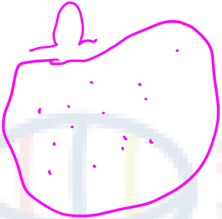
Función de probabilidad y probabilidad acumulada

Dr. Juan Luis Palacios Soto
palacios.s.j.l@gmail.com

1. Variables aleatorias: Discretas (binomiales, Poisson) y continuas (normales).
2. Esperanza, varianza y desviación estándar.
3. Función característica y de momentos.
4. Teorema del Límite Central.
5. Aplicaciones y solución a ejercicios.

Definición (Espacio muestral)

Un **espacio muestral** *es el conjunto de todos los resultados posibles de un "experimento", que denotamos como* Ω *o* S.



Definición (Espacio muestral)

Un **espacio muestral** *es el conjunto de todos los resultados posibles de un "experimento", que denotamos como* Ω *o* S*.*

Ejemplo:

1. El lanzamiento de una moneda: $S = \{H, T\}$
2. El resultado de seleccionar una persona inscrita al IMSS con respecto a su salud: $S = \{$"Enfermo", "Saludable"$\}$ → $X(\text{Enfermo}) = 1$, $X(\text{saludable}) = 0$.
3. El resultado de lanzar un dado cúbico: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. El número de accidentes que ocurren en una fábrica durante el año: $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
5. Número de clientes satisfechos en un semestre: $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
6. Número de lanzamientos de una moneda hasta caer cara: $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $= \mathbb{N}$
7. Número de lanzamientos previos de una moneda hasta caer cara: $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
8. Tiempo en horas en que un usuario de Facebook pasa en la aplicación en un día: $S = [0, 24]$
9. Tiempo en que un corredor de 100 metros planos cruza la meta: $S = (0, \infty)$ (minutos)
10. Cantidad de arena que transporta la compañia Arenita en un mes: $S = [0, \infty)$

en toneladas

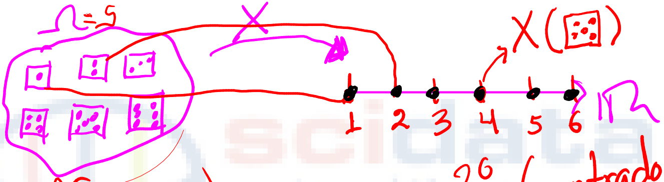
0 24

0 ∞

Definición (Variable aleatoria (v.a))

Una **variable aleatoria** *es una función que a cada elemento de un espacio muestral S le asocia un número real. En notación, $X : S \to \mathbb{R}$. Por lo tanto, si $\omega \in S$, entonces $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Esencialmente, hay dos tipos de v.a: discretas y continuas.*

Dado



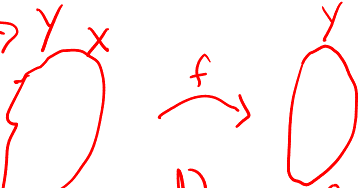
1er (dominio)

2º (contradominio)

$\varepsilon = ⚀$

$X(\omega) \in \mathbb{R}$

$f : X \to Y$



1er (v.a. ind)

2º (v. dep)

Definición (Variable aleatoria (v.a))

Una **variable aleatoria** *es una función que a cada elemento de un espacio muestral S le asocia un número real. En notación, $X : S \to \mathbb{R}$. Por lo tanto, si $\omega \in S$, entonces $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Esencialmente, hay dos tipos de v.a: discretas y continuas.*

Ejemplo

Supongamos que 3 personas entran a un consultorio y denotamos con D y N el que el paciente se diagnostique como enfermo y no enfermo con igual probabilidad (50-50), respectivamente. Entonces el espacio muestral asociado al experimento de los 3 pacientes es

$$S = \{\underset{1}{NNN}, \underset{2}{NND}, \underset{3}{NDN}, \underset{4}{DNN}, \underset{5}{NDD}, \underset{6}{DND}, \underset{7}{DDN}, \underset{8}{DDD}\}.$$

Sea $X \equiv$ la variable aleatoria que cuenta el número de pacientes enfermos en las tres personas atendidas $\Longrightarrow$ $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Es así que X cumple con la siguiente asignación:
$X(\{NNN\}) = 0$,
$X(\{NND\}) = X(\{NDN\}) = X(\{DNN\}) = 1$,
$X(\{NDD\}) = X(\{DND\}) = X(\{DDN\}) = 2$ *y*
$X(\{DDD\}) = 3$.
Luego,

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Definición (Función de probabilidad de una v.a. discreta)

El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ *es una función de probabilidad (de masa) de una* **variable aleatoria discreta** X *si, para cada resultado* x *posible,*

1. $f(x) = P(X = x) \geq 0,$
2. $\sum_{x} f(x) = 1,$

Definición (Función de probabilidad de una v.a. discreta)

El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ *es una función de probabilidad (de masa) de una* **variable aleatoria discreta** X *si, para cada resultado* x *posible,*

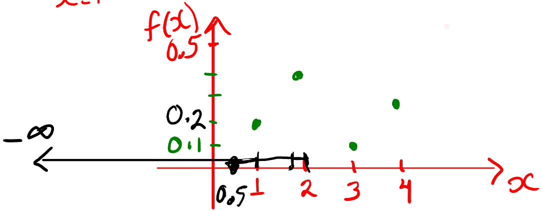
1. $f(x) = P(X = x) \geq 0,$
2. $\sum_x f(x) = 1,$

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *con* $P(X = 1) = 0.2,\ P(X = 2) = 0.4,\ P(X = 3) = 0.1,\ P(X = 4) = 0.3$

$f(1) = P(X=1)\ ,\ f(2) = P(X=2), \ldots$

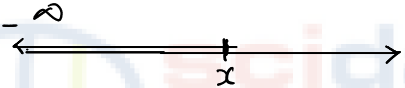
$$\sum_{x=1}^{4} f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0.2 + 0.4 + 0.1 + 0.3 = 1$$



Definición (Función de probabilidad acumulativa de una v.a. discreta)

La función de **distribución acumulativa** $F(x)$ *de una* **variable aleatoria discreta** X *con función de probabilidad* $f(x)$, *es*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \textit{para} \ -\infty < x < \infty.$$



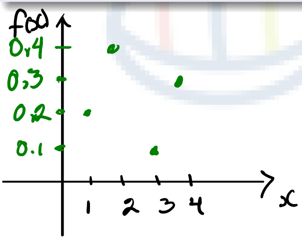
Definición (Función de probabilidad acumulativa de una v.a. discreta)

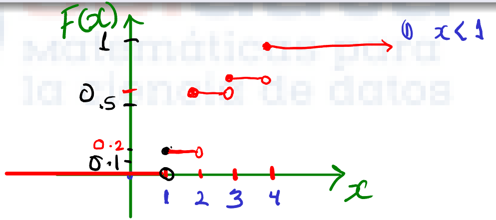
La función de **distribución acumulativa** $F(x)$ *de una* **variable aleatoria discreta** X *con función de probabilidad* $f(x)$, *es*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \textit{para } -\infty < x < \infty.$$

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *con* $P(X = 1) = 0.2,\ P(X = 2) = 0.4,\ P(X = 3) = 0.1,\ P(X = 4) = 0.3$





$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Definición (Variable Aleatoria Bernoulli)

Si un experimento tiene dos posibles resultados "éxito o fracaso", se le puede asociar una variable aleatoria, digamos X que tome los valores $1, 0$ que representen el éxito y fracaso, respectivamente en el experimento. Donde $f(1) = P(X = 1) = p$ y $f(0) = P(X = 0) = 1 - p$ son sus respectivas probabilidades. Su función de probabilidad está dada por $p \in [0,1]$

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1.$$

① $f(1) = p \geq 0$, $f(0) = 1 - p \geq 0$

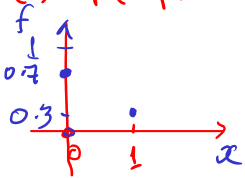
② $f(1) + f(0) = p + (1-p) = p + 1 - p = 1$ ✓

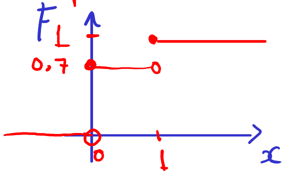
$p = 0{,}3$

$1 - p = 0{,}7$

$f(0) = p^0(1-p)^{1-0} = 1 \cdot (1-p)^1 = 1 - p$

$f(1) = p^1(1-p)^{1-1} = p(1-p)^0 = p$

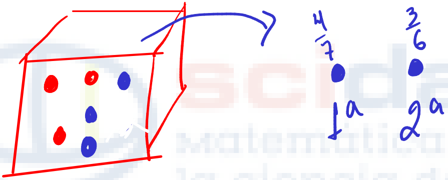




Procesos de Bernoulli

1. El experimento consta de ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de un éxito, que se denota con p, permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

De estos procesos se desprenden otras distribuciones: binomial, geométrica, binomial negativa.



Definición (Variable Aleatoria Binomial)

Si n ensayos independientes de Bernoulli pueden tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Entonces, la función de probabilidad de la variable aleatoria X, que denota el número de éxitos en los n ensayos independientes, se denomina variable aleatoria binomial, denotada por $X \sim binom(n, p)$, se calcula como

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, ..., n$$

Ejemplo: Si $X \sim binom(10, 0.7)$, calcular $f(4) = P(X = 4) = \binom{10}{4}(0.7)^4(.3)^6$
En Excel "=BINOMDIST(4,10,0.7,0)"

$n = 10$ $\quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$ $\quad$ 11 posibles resultados

$p = 0,7$

$$\underbrace{\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}}_{\text{arreglos sin orden y sin repetición}}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\, n$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$$f(0) = \binom{10}{0}(0.7)^0(1-0.7)^{10-0}$$

1 , ... 56

Ejemplo

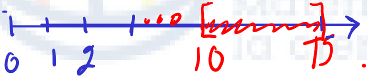
La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que a) sobrevivan al menos 10, b) sobrevivan de 3 a 8, y c) sobrevivan exactamente 5?

$X \sim binom(15, 0.4)$ $\quad Y \sim binom(15, 0.6)$

a) $P(X \geq 10) = P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) + P(X=14) + P(X=15)$

$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = \underline{1 - P(X \leq 9)}$

$= 0.0338$



$x > 10 \rightarrow x \leq 10$

$x \geq 10 \rightarrow x < 10$

= **1-BINOM.DIST(9,15,0.4,1)** $= 0.0338$

b) $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X < 3)$

$= P(X \leq 8) - P(X \leq 2) = 0.8778$

3 8

c) $P(X = 5) = 0.1859$

Ejemplo

Una cadena grande de tiendas al detalle le compra cierto tipo de dispositivo electrónico a un fabricante, el cual le indica que la tasa de dispositivos defectuosos es de 3 %. El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre estos 20?

$X \sim binom(20, 0.03)$

$n = 20$

$p = 0{,}03$

Mi éxito significa encontrar un artículo defectuoso.

$Y \sim binom(20, 0{,}97)$

Mi éxito artículo no defectuoso

$X = 0, 1, 2, \cdots, 20$

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=20)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \underbrace{P(X \leq 0)}_{0.4562} = 1 - \underbrace{P(X=0)}_{0.4562}$

$\cdot\, P(Y \leq 19) =$ **BINOM.DIST(19,20,0.97,TRUE)**

Ejemplo

Suponga que la probabilidad de que un automóvil robado en cierta ciudad se recupere es 0.63. Determine la probabilidad de que al menos 8 de 10 de los carros robados en esta ciudad se recuperarán.

$X \sim binom(10, 0.63)$

$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq 7) = 0.2205$

=1-BINOM.DIST(7,10,0.63,TRUE)

Teorema

Sea $X \sim binom(n,p)$ *una v.a binomial de parámetros* n, p*, esto es*

$$\underline{f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},} \quad x = 0, 1, 2, ..., n,$$

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

entonces $E(X) = np$ *y* $Var(X) = np(1-p)$.

$E(X)$ es el promedio de X.
$Var(X)$ es la varianza de X.
$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$ es la desviación estándar de X.

Ej. $X \sim binom(10, 0,7)$

$$E(X) = (10)(0,7) = 7$$

$$Var(X) = (10)(0,7)(1-0,7) = (10)(0,7)(0,3) = 2,1$$

$$SD(X) = \sqrt{2,1} =$$