.

Variables Normales

Funciones de densidad y acumulada

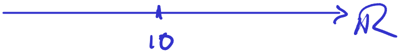
Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Variable Aleatoria Continua)

Una variable aleatoria X *es continua si* $P(X = x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

$P(X = 10) = 0$



Definición (Variable Aleatoria Continua)

Una variable aleatoria X *es continua si* $P(X = x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Definición (Función de probabilidad de una v.a. continua)

Si X *es una variable aleatoria continua, su función de probabilidad llamada función de* **densidad** *dada por* $f(x)$ *es tal que,*

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, $\leftarrow$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

$a \leq b$

caso discreto

$f(x) = P(X = x)$

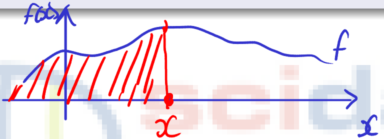
$\Rightarrow$

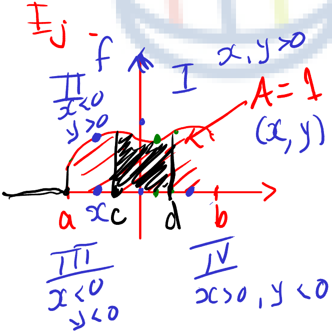
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

Definición (Función de probabilidad acumulativa de una v.a. continua)

La función de **distribución acumulativa** $F(x)$ *de una* **variable aleatoria continua** X *con función de densidad* $f(x)$*, es*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \textit{para} \ -\infty < x < \infty.$$





$y = f(x) \geq 0$

Definición (Variable Aleatoria Normal)

Una variable aleatoria continua X *decimos que tiene distribución* **normal**, *denotada por* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *si su función de densidad* f *está dada por*

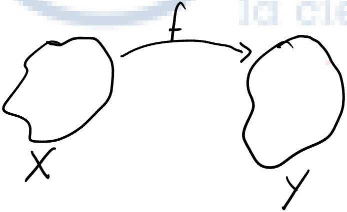
$X \sim N(\mu, \sigma)$

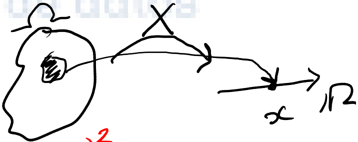
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

donde μ *y* σ^2 *son su media y varianza, respectivamente.*
En particular si $\mu = 0$ *y* $\sigma = 1$, *decimos que* Z *tiene distribución* **normal estándar** *y la notación para su densidad es*

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$





$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

Definición (Distribución acumulada normal)

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *con función de densidad* f, *entonces*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

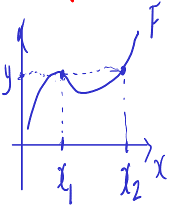
Para $\underline{Z \sim N(0,1)}$ *con función de densidad* $\phi(z)$ *su función de distribución acumulativa, denotada por* $\Phi(z)$, *está dada como*

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr$$

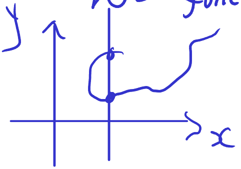
$X \sim N(5\ \ 3)$

$\sigma - 3$



1

No func.



Teorema

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *una variable aleatoria normal de parámetros* μ *y* σ^2*, entonces*

$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Ejemplo

Cierta máquina fabrica resistencias eléctricas que tienen una resistencia media de 40 ohms y una desviación estándar de 2 ohms. Si se supone que la resistencia sigue una distribución normal y que se puede medir con cualquier grado de precisión, ¿qué porcentaje de resistencias tendrán una resistencia que exceda 43 ohms?

$X \sim N(40, 2)$

$\underbrace{[0,1]}_{\text{prob.}} \longleftrightarrow \underbrace{[0\%, 100\%]}_{\text{porcentaje.}}$

$P(X > 43) = 1 - P(X \leq 43) = 1 - P(X < 43)$

=1-NORM.DIST(43,40,2,1) $= 0.0668$

$\therefore$ el porcentaje es $(0.0668)100\%$

6.68%

Ejemplo

Cierto tipo de batería de almacenamiento dura, en promedio, 3.0 años, con una desviación estándar de 0.5 años. Suponga que la duración de la batería se distribuye normalmente y calcule la probabilidad de que una batería determinada dure menos de 2.3 años.

$X \sim N(3, 0.5)$

$P(X < 2.3) = P(X \leq 2.3) =$ **=NORM.DIST(2.3,3,0.5,1)**

$= 0,0807$

$\Rightarrow$ $\underline{8.07\%}$ de baterías que duran menos de 2.3.

Ejemplo

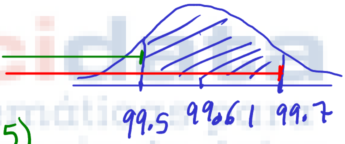
En el ejemplar de noviembre de 1990 de Chemical Engineering Progress, un estudio analiza el porcentaje de pureza del oxígeno de cierto proveedor. Suponga que la media fue de 99.61, con una desviación estándar de 0.08. Suponga que la distribución del porcentaje de pureza fue aproximadamente normal.
a) ¿Qué porcentaje de los valores de pureza esperaría que estuvieran entre 99.5 y 99.7?
b) ¿Qué valor de pureza esperaría que excediera exactamente 5 % de la población?

$X \sim N(99.61, 0.08)$

a) $P(99.5 \leq X \leq 99.7)$

$= P(X \leq 99.7) - P(X \leq 99.5)$

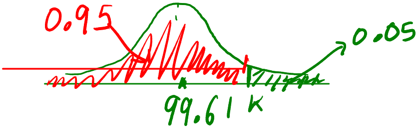
$= 0.7851$



=NORM.DIST(99.7,99.61,0.08,1)-NORM.DIST(99.5,99.61,0.08,1)

b) $P(X > k) = 0.05$

$P(X < k) = 0.95$



=NORM.INV(0.95,99.61,0.08) $= 99.74$

$$\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X - E(X)}{SD(X)}$$ ← estandarización

$$Z\sigma = X - \mu$$

$$Z\sigma + \mu = X$$