scidata

Esperanza

Caso: Discreto y Continuo

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Esperanza)

Sea X una variable aleatoria continua (discreta) con función de densidad (probabilidad) $f(x)$. La media o valor esperado de X está dado por

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

$E[X]$

$$[\mu_X = E(X) = \sum_x x f(x).]$$

$X \sim Ber(p)$ $\quad p = 0.2 \quad X \sim Ber(0.2) \quad x = 0, 1$

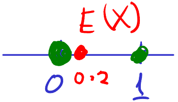
$f(0) = P(X=0) = \cancel{(0.2)^0}(1-0.2)^{1-0} \quad \left(f(x) = p^x (1-p)^{1-x}\right)$

$= 0.8$

$f(1) = P(X=1) = 0.2^1 \cancel{(1-0.2)^{1-1}} = 0.2$

$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = \cancel{0 \cdot f(0)} + 1 \cdot f(1) = f(1) = 0.2$

$\underline{E(X) = p.}$ en gral.



Definición (Esperanza)

Sea X una variable aleatoria continua (discreta) con función de densidad (probabilidad) $f(x)$. La media o valor esperado de X está dado por

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

$$[\mu_X = E(X) = \sum_x x f(x).]$$

$X \sim bin(n, p) \Rightarrow E(X) = np.$

$x = 0, 1, \ldots, n$

$X \sim bin(15, 0.1)$

$E(X) = 1.5$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x f(x) = \underbrace{0 \cdot f(0)}_{0} + 1 \cdot f(1) + \cdots + n f(n)$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x f(x) = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \cancel{x} \frac{(n-1)!\, n}{(x-1)!\, \cancel{x} (n-x)!} p^{x-1+1} (1-p)^{n-x}$$

$n! = (n-1)!\, n$

$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

$5! = \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5$

$= 4!(5)$

① $= n \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p \cdot p^{x-1} (1-p)^{n-x}$

$\left(a^m \cdot a^n = a^{m+n} \right)$

$\left(x = x - 1 + 1 \right)$

② $= np \underbrace{\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}}_{=1}$

$\left(\text{Sí } y = x - 1 \right)$
$\Rightarrow x = y + 1$

$= np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-(y+1))!} p^y (1-p)^{n-(y+1)}$

$\left(\begin{array}{l} \text{si } x = 1 \\ \Rightarrow y = 0 \\ \text{Si } x = n \\ \Rightarrow y = n-1 \end{array} \right)$

$= np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y (1-p)^{n-1-y}$.

$\left(n-(y+1) = n-1-y \right)$

$Y \sim bin(n-1, p)$, $y = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$\therefore \sum_{y=0}^{n-1} y f(y) = 1$.

$\therefore = np(1) = np$.

$X \sim N(\mu, \sigma)$ $\quad E(X) = \mu$.

Definición (Esperanza de $g(X)$)

Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x)$. El valor esperado de la variable aleatoria $g(X)$, es

$$\mu_{g(X)} = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

$$[\mu_X = E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x).]$$

$\underbrace{X_1, \ldots, X_n}_{m.a.} \rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n \leftarrow$ realización.

$\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_n + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$

Teorema

Sean X y Y dos variables aleatorias y a, b dos constantes. Entonces,

1. $E(a) = a$ $\Rightarrow E(a) = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot f(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = a.$
2. $E(aX + b) = aE(X) + b$
3. *si* $X \geq 0$ *entonces* $E(X) \geq 0$
4. *si* $X \leq Y$ *entonces* $E(X) \leq E(Y)$
5. *si* $a \leq X \leq b$ *entonces* $a \leq E(X) \leq b$
6. *si además* X, Y *son independientes, entonces* $E(XY) = E(X)E(Y)$ ✓

Teorema

Sean X y Y dos variables aleatorias y a, b dos constantes. Entonces,

1. $E(a) = a$
2. $E(aX + b) = aE(X) + b$
3. *si* $X \geq 0$ *entonces* $E(X) \geq 0$
4. *si* $X \leq Y$ *entonces* $E(X) \leq E(Y)$
5. *si* $a \leq X \leq b$ *entonces* $a \leq E(X) \leq b$
6. *si además* X, Y *son independientes, entonces* $E(XY) = E(X)E(Y)$

Teorema

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias, $a_1, a_2, ..., a_n$ constantes. Entonces,
$E(\underbrace{a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots a_nX_n}_{\text{comb. lineal.}}) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$ ✓

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

Ejemplo

Sean $X \sim Ber(p_1)$ *y* $Y \sim Ber(p_2)$. *Calcular* $E(2X - 3Y)$

$$E(2X-3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2p_1 - 3p_2.$$

Ejemplo

Se lanza una moneda cargada de \$10 con probabilidad de cara 0.8 y se lanza un dado cúbico cargado con probabilidad de obtener un par de 0.3. Definamos a X como la variable aleatoria del resultado de lanzar la moneda y definamos a Y como la variable aleatoria del resultado de lanzar el dado. Determinar $E(XY)$. $= E(X)\cdot E(Y)$ X, Y ind.

$X \sim Ber(0.8)$, $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$

$Par = \{2,4,6\}$ $P(Par) = 0.3$ $f(x)=P(2) = P(4) = P(6) = \frac{0.3}{3}$

$Imp = \{1,3,5\}$ $P(Imp) = 0.7$ $P(1) = P(3) = P(5) = \frac{0.7}{3}$

$$E(Y) = 1\cdot f(1) + 2\cdot f(2) + 3f(3) + 4f(4) + 5f(5) + 6f(6)$$
$$= 1\cdot\frac{(0.7)}{3} + 2\left(\frac{0.3}{3}\right) + 3\left(\frac{0.7}{3}\right) + 4\left(\frac{0.3}{3}\right) + 5\left(\frac{0.7}{3}\right) + 6\left(\frac{0.3}{3}\right)$$
$$= 3.3$$

$$\therefore E(XY) = (0.8)(3.3) = 2.64$$