Varianza y desviación estándar

Caso: Discreto y Continuo

Dr. Juan Luis Palacios Soto

palacios.s.j.l@gmail.com

Definición (Varianza de una variable aleatoria)

Sea X una variable aleatoria continua (discreta) con función de densidad (probabilidad) $f(x)$ y media μ. La varianza de X, es

$E(X)=\mu$

$$\underbrace{Var(X)}\ =\ \underbrace{E[(X-\mu)^2]}_{E[(X-E(X))^2]} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\left(Var(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x} (x-\mu)^2 f(x) \right)$$

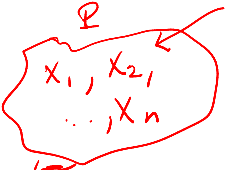
siempre que dicha integral (suma) exista.

Notación $Var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$

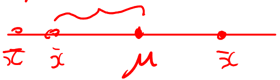
$$\left(E((X-\mu)^2) = E(X^2) - E(X)^2 \right)$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$

$\bar{X} \Rightarrow$



$\rightarrow x_1, \ldots, x_n \Rightarrow \bar{x}$



$E(\bar{X}),\ var(\bar{X})$

Definición (Desviación estándar de una variable aleatoria)

Sea X una variable aleatoria con varianza σ^2. Su desviación, denotada por $SD(X)$, se calcula como

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Notación: $\sigma = SD(X)$.

$\sigma^2 = Var(X)$

$$E[(X-E(X))^2] = E[X^2 - 2X\underbrace{E(X)}_{const} + \underbrace{E(X)^2}_{const}]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(E(X)^2)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx\right)^2$$

Teorema

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ *variables aleatorias independientes,* $a_1, a_2, ..., a_n$ *y* b *constantes. Entonces,*
$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots a_nX_n + b) = a_1^2Var(X_1) + a_2^2Var(X_2) + \cdots + a_n^2Var(X_n)$

$$Var(b) = E((b - E(b))^2) = E((b-b)^2) = 0.$$

Ejemplo

Sea $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ *una muestra aleatoria de observaciones independientes y* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Entonces

$$E(\bar{X}) = \mu \quad y \quad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

$\mu \quad \bar{x}$

$X_1, \ldots, X_n \quad E(X_i) = \mu, \; Var(X_i) = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

para toda

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right)$$
$$= E\left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right) = \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \cdots + \frac{1}{n}E(X_n)$$
$$= \frac{1}{n}\mu + \frac{1}{n}\mu + \cdots + \frac{1}{n}\mu = \frac{1}{n}(\underbrace{\mu + \mu + \cdots + \mu}_{n\text{-veces}}) = \frac{\cancel{n}\cdot\mu}{\cancel{n}} = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right)$$
$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_1) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_2) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_n)$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(\underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}_{n\text{-veces}})$$
$$= \frac{\cancel{n}\cdot\sigma^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{\sigma^2}{n}.$$