

# ON THE SET OF MOLECULES OF NUMERICAL AND PUISEUX MONOIDS

MARLY GOTTI AND MARCOS M. TIRADOR

## 1. BARRIERS EN C#

Permite que múltiples tareas trabajen de manera cooperativa en un algoritmo en paralelo a través de múltiples fases. Ninguna hebra puede comenzar una nueva fase del algoritmo hasta que las restantes hebras no hayan alcanzado la barrera (todas hallan completado la fase anterior).

El constructor más simple de la clase toma por argumento un entero, que representará el máximo número de participantes (hilos) que pueden estar esperando por la barrera en cada fase del algoritmo. Los métodos `AddParticipant()` y `RemoveParticipant()` permiten aumentar en una unidad la cantidad la cantidad máxima de participantes.

El método fundamental de la clase es `SignalAdndWait()`. Este es invocado por una hebra cuando llega a un punto en que está lista para moverse a la siguiente fase. Este advierte a la instancia de *Barrier* de que un nuevo participante ha llegado a la barrera. Cuando hayan llegado una cantidad de participantes igual al número máximo entonces la barrera entra en la post-phase. Aquí es donde incrementa el número de la fase, y le da la señal a todos los participantes de que pueden entrar en la nueva fase. Adicionalmente mediante el otro constructor de *Barrier* se puede establecer una acción que se ejecutará en cada post-phase.

El último método relevante que posee es el `Dispose()` que permite liberar los recursos usados por la barrera cuando esta no se necesite usar más. Si se intenta usar la barrera después de que esta haya sido “disposed”, lanzará una excepción del tipo *ObjectDisposedException*. Los otros tipos de excepciones lanzadas por los métodos de la clase son *InvalidOperationException* y *BarrierPostPhaseException*. La primera de estas ocurre cuando en la barrera están esperando más participantes que el máximo permitido o cuando se invoca alguno de sus métodos estando en la post-phase. La segunda ocurre cuando la acción establecida a ejecutar entre fases lanza una excepción. Esta es capturada y envuelta (wrapped) en una excepción del tipo mencionada y relanzada en cada uno de los hilos (participantes).

---

*Date:* December 11, 2022.

*2010 Mathematics Subject Classification.* Primary: 20M13; Secondary: 06F05, 20M14.

*Key words and phrases.* Puiseux monoid, numerical monoid, atomic monoid, atomicity, factorization, molecule, atom, BFM, FFM, UFM.

Para implementar la clase `Barrier` se hizo uso de la clase `Monitor`. Para ello en el cuerpo del método `SignalAndWait()` se usa `Monitor.Wait` para hacer que la hebra que lo ejecuta espere a que el resto llegue a la barrera. Cada vez que llega una hebra nueva se incrementa la cantidad de participantes que han llegado. Cuando se alcanza el máximo lo primero que se ejecuta la acción prefijada (si alguna), desde la última hebra en llegar. Entonces se incrementa el número de la fase y se invoca `Monitor.PulseAll` para que todas las hebras reanuden su ejecución. Sin embargo, se tuvo mucha sutileza para manejar la mayor cantidad de casos posibles en que pudieran ocurrir errores de sincronización, como podría ser la muerte por inanición. Se maneja cada situación de la manera más correcta posible según criterio de los autores, y se lanza la excepción adecuada en cada caso, según lo descrito sobre estas anteriormente.

## 2. PROBLEMA DE LOS 5 FILÓSOFOS

### REFERENCES

- [1] D. D. Anderson and D. F. Anderson: *Factorization in integral domains IV*, Comm. Algebra **38** (2010) 4501–4513.
- [2] D. D. Anderson, D. F. Anderson, and M. Zafrullah: *Factorizations in integral domains*, J. Pure Appl. Algebra **69** (1990) 1–19.
- [3] D. D. Anderson, D. F. Anderson, and M. Zafrullah: *Factorization in integral domains II*, J. Algebra **152** (1992) 78–93.
- [4] D. F. Anderson and D. N. El Abidine: *Factorization in integral domains III*, J. Pure Appl. Algebra **135** (1999) 107–127.
- [5] A. Assi and P. A. García-Sánchez: *Numerical Semigroups and Applications*. New York: Springer-Verlag, 2016.
- [6] N. R. Baeth and F. Gotti: *Factorization in upper triangular matrices over information semialgebras*, J. Algebra **562** (2020) 466–496.
- [7] L. Carlitz: *A characterization of algebraic number fields with class number two*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960) 391–392.
- [8] S. T. Chapman, F. Gotti, and M. Gotti: *Factorization invariants of Puiseux monoids generated by geometric sequences*, Comm. Algebra **48** (2020) 380–396.
- [9] S. T. Chapman, F. Gotti, and M. Gotti: *How do elements really factor in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ?* In: Advances in Commutative Algebra (Eds. A. Badawi and J. Coykendall), pp. 171–195, Springer Trends in Mathematics, Birkhäuser, Singapore, 2019.
- [10] S. T. Chapman, F. Gotti, and M. Gotti: *When is a Puiseux monoid atomic?*, Amer. Math. Monthly (to appear). Available on arXiv: <https://arxiv.org/pdf/1908.09227.pdf>
- [11] P. M. Cohn: *Bezout rings and their subrings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968) 251–264.
- [12] J. Coykendall and F. Gotti: *On the atomicity of monoid algebras*, J. Algebra **539** (2019) 138–151.
- [13] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales: *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, 20, Springer-Verlag, New York, 2009.
- [14] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales: *Numerical semigroups generated by intervals*, Pacific J. Math. **191** (1999), 75–83.
- [15] A. Geroldinger and F. Halter-Koch: *Non-Unique Factorizations: Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 278, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

- [16] F. Gotti: *Atomic and antimatter semigroup algebras with rational exponents*. Available on arXiv: <https://arxiv.org/pdf/1801.06779v3.pdf>
- [17] F. Gotti: *Increasing positive monoids of ordered fields are FF-monoids*, J. Algebra **518** (2019), 40–56.
- [18] F. Gotti: *Irreducibility and factorizations in monoid rings*. In: Numerical Semigroups (Eds. V. Barucci, S. T. Chapman, M. D’Anna, and R. Fröberg) pp. 129–139. Springer INdAM Series, Vol. 40, Switzerland, 2020.
- [19] F. Gotti: *Puiseux monoids and transfer homomorphisms*, J. Algebra **516** (2018) 95–114.
- [20] F. Gotti: *The system of sets of lengths and the elasticity of submonoids of a finite-rank free commutative monoid*, J. Algebra Appl. **19** (2020) 2050137 (2020).
- [21] F. Gotti and M. Gotti: *Atomicity and boundedness of monotone Puiseux monoids*, Semigroup Forum **96** (2018) 536–552.
- [22] F. Gotti and M. Gotti: *On the molecules of numerical semigroups, Puiseux monoids, and monoid algebras*. In: Numerical Semigroups (Eds. V. Barucci, S. T. Chapman, M. D’Anna, and R. Fröberg) pp. 141–161. Springer INdAM Series, Vol. 40, Switzerland, 2020.
- [23] A. Grams: *Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **75** (1974), 321–329.
- [24] W. Narkiewicz: *Numbers with unique factorization in an algebraic number field*, Acta Arith. **21** (1972) 313–322.
- [25] W. Narkiewicz: *On natural numbers having unique factorization in a quadratic number field*, Acta Arith. **12** (1966) 1–22.
- [26] W. Narkiewicz: *On natural numbers having unique factorization in a quadratic number field II*, Acta Arith. **13** (1967) 123–129.

DEPARTMENT OF RESEARCH AND DEVELOPMENT, BIOGEN, CAMBRIDGE, MA 02142, USA  
*E-mail address:* `marly.cormar@biogen.com`

FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, SAN LÁZARO Y L,  
 VEDADO, HABANA 4, CP-10400, CUBA  
*E-mail address:* `marcosmath44@gmail.com`