MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea Calculatoare Informatică și Microelectronică
Tehnologia Informației

Raport

Disciplina: Metode numerice

Lucrarea de laborator nr. 4

Tema: *“ Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale”*

Varianta: 23

Student: ______________ **Raevschi Grigore TI-231**

Coordonator: ______________ **Conf. univ. Pațiuc Vladimir**

Chișinău 2024

Cuprins

SCOPUL LUCRĂRII

1. Să se rezolve numeric problema Cauchy

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

pe intervalul [0, 1] cu pasul h = 0,1, utilizând metodele Euler, Euler modificată și Runge – Kutta de ordinul IV.

2. Să se efectueze o analiză a rezultatelor obținute.

1 PROBLEMĂ PROPUSĂ SPRE REZOLVARE

$$23.\ y' = xy + 0.1y^2, \quad y(0) = 0.5.$$

2 REZOLVAREA MATEMATICĂ PRIN METODA LUI EULER

$$x_1 = x_0 + h = 0.0 + 0.1 = 0.1$$
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0.5 + 0.1 \cdot f(0.0,0.5)$$
$$f(0.0,0.5) = 0 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot (0.5)^2 = 0 + 0.1 \cdot 0.25 = 0.025$$
$$y_1 = 0.5 + 0.1 \cdot 0.025 = 0.5 + 0.0025 = 0.5025$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 0.5025 + 0.1 \cdot f(0.1,0.5025)$$
$$f(0.1,0.5025) = 0.1 \cdot 0.5025 + 0.1 \cdot (0.5025)^2 = 0.05025 + 0.1 \cdot 0.25250625$$
$$= 0.05025 + 0.025250625 = 0.075500625$$
$$y_2 = 0.5025 + 0.1 \cdot 0.075500625 = 0.5025 + 0.0075500625 = 0.51005$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 0.51005 + 0.1 \cdot f(0.2,0.51005)$$
$$f(0.2,0.51005) = 0.2 \cdot 0.51005 + 0.1 \cdot (0.51005)^2 = 0.10201 + 0.1 \cdot 0.2601505025$$
$$= 0.10201 + 0.02601505025 = 0.12802505025$$
$$y_3 = 0.51005 + 0.1 \cdot 0.12802505025 = 0.51005 + 0.012802505025 = 0.52285$$

$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 0.52285 + 0.1 \cdot f(0.3{,}0.52285)$$
$$f(0.3{,}0.52285) = 0.3 \cdot 0.52285 + 0.1 \cdot (0.52285)^2 = 0.156855 + 0.1 \cdot 0.2733681225$$
$$= 0.156855 + 0.02733681225 = 0.18419181225$$
$$y_4 = 0.52285 + 0.1 \cdot 0.18419181225 = 0.52285 + 0.018419181225 = 0.54127$$

$$x_5 = x_4 + h = 0.4 + 0.1 = 0.5$$
$$y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 0.54127 + 0.1 \cdot f(0.4{,}0.54127)$$
$$f(0.4{,}0.54127) = 0.4 \cdot 0.54127 + 0.1 \cdot (0.54127)^2 = 0.216508 + 0.1 \cdot 0.2939738129$$
$$= 0.216508 + 0.02939738129 = 0.24590538129$$
$$y_5 = 0.54127 + 0.1 \cdot 0.24590538129 = 0.54127 + 0.024590538129 = 0.56585$$

$$x_6 = x_5 + h = 0.5 + 0.1 = 0.6$$
$$y_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = 0.56585 + 0.1 \cdot f(0.5{,}0.56585)$$
$$f(0.5{,}0.56585) = 0.5 \cdot 0.56585 + 0.1 \cdot (0.56585)^2 = 0.282925 + 0.1 \cdot 0.3191982225$$
$$= 0.282925 + 0.03191982225 = 0.31484482225$$
$$y_6 = 0.56585 + 0.1 \cdot 0.31484482225 = 0.56585 + 0.031484482225 = 0.59735$$

$$x_7 = x_6 + h = 0.6 + 0.1 = 0.7$$
$$y_7 = y_6 + h \cdot f(x_6, y_6) = 0.59735 + 0.1 \cdot f(0.6{,}0.59735)$$
$$f(0.6{,}0.59735) = 0.6 \cdot 0.59735 + 0.1 \cdot (0.59735)^2 = 0.35841 + 0.1 \cdot 0.3568069225$$
$$= 0.35841 + 0.03568069225 = 0.39409069225$$
$$y_7 = 0.59735 + 0.1 \cdot 0.39409069225 = 0.59735 + 0.039409069225 = 0.63676$$

$$x_8 = x_7 + h = 0.7 + 0.1 = 0.8$$
$$y_8 = y_7 + h \cdot f(x_7, y_7) = 0.63676 + 0.1 \cdot f(0.7{,}0.63676)$$
$$f(0.7{,}0.63676) = 0.7 \cdot 0.63676 + 0.1 \cdot (0.63676)^2 = 0.445732 + 0.1 \cdot 0.4054211776$$
$$= 0.445732 + 0.04054211776 = 0.48627411776$$
$$y_8 = 0.63676 + 0.1 \cdot 0.48627411776 = 0.63676 + 0.048627411776 = 0.68538$$

$$x_9 = x_8 + h = 0.8 + 0.1 = 0.9$$

$$y_9 = y_8 + h \cdot f(x_8, y_8) = 0.68538 + 0.1 \cdot f(0.8, 0.68538)$$

$$f(0.8, 0.68538) = 0.8 \cdot 0.68538 + 0.1 \cdot (0.68538)^2 = 0.548304 + 0.1 \cdot 0.4699271044$$

$$= 0.548304 + 0.04699271044 = 0.59529671044$$

$$y_9 = 0.68538 + 0.1 \cdot 0.59529671044 = 0.68538 + 0.059529671044 = 0.74491$$

$$x_{10} = x_9 + h = 0.9 + 0.1 = 1.0$$

$$y_{10} = y_9 + h \cdot f(x_9, y_9) = 0.74491 + 0.1 \cdot f(0.9, 0.74491)$$

$$f(0.9, 0.74491) = 0.9 \cdot 0.74491 + 0.1 \cdot (0.74491)^2 = 0.670419 + 0.1 \cdot 0.5545052681$$

$$= 0.670419 + 0.05545052681 = 0.72586952681$$

$$y_{10} = 0.74491 + 0.1 \cdot 0.72586952681 = 0.74491 + 0.072586952681 = 0.81750$$

3 CODUL PROGRAMULUI ÎN LIMBAJUL C

```
#include <stdio.h>

float x[11], y[11], ym[11], rk[11], h = 0.1, a = 0;
float y0 = 0.5;

void InitXY() {
    int i;
    y[0] = y0;
    ym[0] = y0;
    rk[0] = y0;
    x[0] = a;
    for (i = 1; i < 11; i++) {
        x[i] = x[i - 1] + h;
    }
}

float f(float p1, float p2) {
    return p1 * p2 + 0.1 * p2 * p2;
}

void Euler() {
    int i;
    for (i = 1; i < 11; i++) {
        y[i] = y[i - 1] + h * f(x[i - 1], y[i - 1]);
    }
}

void EulerM() {
    int i;
```

```
    for (i = 1; i < 11; i++) {
        float y_predict = y[i - 1] + h * f(x[i - 1], y[i - 1]);
        ym[i] = y[i - 1] + h * (f(x[i - 1], y[i - 1]) + f(x[i], y_predict)) / 2;
    }
}

void RungeKutta() {
    int i;
    for (i = 1; i < 11; i++) {
        float k1 = h * f(x[i - 1], rk[i - 1]);
        float k2 = h * f(x[i - 1] + h / 2, rk[i - 1] + k1 / 2);
        float k3 = h * f(x[i - 1] + h / 2, rk[i - 1] + k2 / 2);
        float k4 = h * f(x[i - 1] + h, rk[i - 1] + k3);
        rk[i] = rk[i - 1] + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
    }
}

int main() {
    int i;

    InitXY();

    Euler();
    EulerM();
    RungeKutta();

    printf("========================================================================
=====================================\n");
    printf("|   x   |");
    for (i = 0; i < 11; i++) {
        printf("  %.1f   |", x[i]);
    }
    printf("\n======================================================================
=======================================\n");
    printf("| Euler |");
    for (i = 0; i < 11; i++) {
        printf(" %.5f |", y[i]);
    }
    printf("\n|EulerM |");
    for (i = 0; i < 11; i++) {
        printf(" %.5f |", ym[i]);
    }
    printf("\n|RungeK |");
    for (i = 0; i < 11; i++) {
        printf(" %.5f |", rk[i]);
    }
    printf("\n======================================================================
=======================================\n");

    return 0;
}
```

4 REZULTATUL PROGRAMULUI

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Euler	0.50000	0.50250	0.51005	0.52285	0.54127	0.56585	0.59735	0.63676	0.68538	0.74491	0.81750
EulerM	0.50000	0.50503	0.51268	0.52566	0.54435	0.56931	0.60130	0.64137	0.69083	0.75144	0.82542
RungeK	0.50000	0.50504	0.51529	0.53110	0.55301	0.58175	0.61833	0.66410	0.72079	0.79068	0.87674

```
PS C:\Users\grigo\Desktop\Metode numerice>
```

CONCLUZIE

În urma realizării acestei lucrări de laborator, am rezolvat numeric problema Cauchy pe intervalul $y' = xy + 0.1y^2$, $y(0) = 0.5$ [0,1] utilizând trei metode numerice: Euler, Euler modificată și Runge-Kutta de ordin IV. Rezultatele obținute ne-au permis să observăm diferențele dintre aceste metode în ceea ce privește precizia și complexitatea. Metoda Euler, deși simplă de implementat, este cea mai puțin precisă, deoarece aproximările se bazează doar pe valorile curente. Pe de altă parte, metoda Euler modificată îmbunătățește semnificativ precizia prin utilizarea unui pas predictor-corrector, reducând erorile locale. Metoda Runge-Kutta de ordin IV s-a dovedit a fi cea mai precisă, datorită calculului detaliat al pantei pe fiecare subinterval.

Alegerea pasului h=0.1 s-a dovedit adecvată pentru această lucrare, oferind un echilibru între precizie și timpul de calcul. Metodele mai avansate, cum ar fi Runge-Kutta, permit utilizarea unor pași mai mari fără a pierde semnificativ din precizie. Comparând rezultatele obținute, s-a observat că metoda Runge-Kutta produce valori foarte apropiate de soluția exactă (dacă aceasta ar fi cunoscută), în timp ce metodele Euler și Euler modificată sunt mai puțin precise. Totuși, metoda Euler modificată reprezintă un compromis bun între simplitate și precizie, fiind ușor de implementat și oferind rezultate mai bune decât metoda Euler simplă.

Aceste metode numerice sunt esențiale pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale care nu pot fi soluționate analitic. Ele sunt aplicabile în diverse domenii, precum fizica, ingineria și economia, unde modelele matematice complexe implică ecuații diferențiale. De asemenea, această lucrare a evidențiat importanța alegerii metodei corespunzătoare în funcție de cerințele problemei, fie că este vorba de precizie, fie de timp de calcul. Astfel, am înțeles relevanța metodelor numerice și diferențele dintre ele, oferind o bază solidă pentru utilizarea lor în probleme reale.