

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
ОБЩЕЕ РУКОВОДСТВО К БИБЛИОТЕКЕ

ОПИСАНИЕ И РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

**библиотеки открытого доступа DataReconcile для
согласования неточных индустриальных данных за счет
учета взаимосвязей между ними для нужд
промышленных предприятий Индустрии 4.0 и целей
Национальной технологической инициативы на языках
MATlab, Python и C++
(v.4.0.2)**

ОГЛАВЛЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ Г

ВВЕДЕНИЕ

Г.1 ПРОБЛЕМАТИКА СОГЛАСОВАНИЯ НЕТОЧНЫХ ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ДАННЫХ

- Г.1.1 История вопроса
- Г.1.2 Постановка задачи
- Г.1.3 Аналитические и аналитические итерационные методы
- Г.1.4 Согласование данных, как задача условной оптимизации
- Г.1.5 Робастной статистика
- Г.1.6 Статический и динамический режимы измерений

Г.2 СТРУКТУРА БИБЛИОТЕКИ

Г.3 СОВРЕМЕННЫЕ ФОРМАЛИЗМЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

- Г.3.1 Применение классической и аффинной интервальных арифметик
- Г.3.2 Метод оценки на основе исчисления эллипсоидов
- Г.3.3 Арифметика гистограмм
- Г.3.4 Вероятностная арифметика (p-boxes)
- Г.3.5 Арифметика нечетких интервалов

Г.4 ПРОЦЕДУРА МЕТРОЛОГИЧЕСКИ ОБОСНОВАННОГО ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗА ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ

Г.4.1 Процедура экспресс-оценки меры неопределенности результатов согласования неточных данных

Г.4.2 Оценка потенциального дополнительного уточнения результатов согласования за счет учета отклонения действительного закона распределения погрешностей от нормального

Г.5 МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ АВТОСОПРОВОЖДЕНИЕ ПРОЦЕДУР СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ

Г.5.1 Постановка задачи метрологического автосопровождения метрологически значимых программ

Г.5.2 Автоматическое дифференцирование

Г.5.3 Применение процедуры автоматического дифференцирования в задаче метрологического автосопровождения

Г.6 УНИКАЛЬНЫЙ СТАНДАРТИЗОВАННЫЙ ПОДХОД К РАБОТЕ С РАЗНЫМИ ФОРМАЛИЗМАМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Г.6.1 Постановка задачи

Г.6.2 Стандартизованный неитерационный подход к работе с разными формализмами представления неопределенности и учетом отклонения действительного закона распределения случайных погрешностей от нормального

Г.7 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ

Г.7.1 Параметрические методы согласования неточных данных, взаимосвязи между которыми выражены системами неравенств

Г.7.2 Полунепараметрический подход на основе полиномиальной аппроксимации

Г.7.3 Полунепараметрический метод, основанный на проекционной оценке плотности распределения случайных погрешностей с применением усеченных рядом Грама-Шарлье типа А

Г.7.4 Непараметрический подход, основанный на ядерной регрессии

Г.8 МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ НЕТОЧНЫХ ДАННЫХ, ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ КОТОРЫМИ ВЫРАЖЕНЫ СИСТЕМАМИ НЕРАВЕНСТВ

Г.8.1 Параметрические методы согласования неточных данных

Г.8.2 Полунепараметрический подход на основе полиномиальной аппроксимации

Г.8.3 Полунепараметрический метод, основанный на проекционной оценке плотности распределения случайных погрешностей с применением усеченных рядом Грама-Шарлье типа А

Г.8.4 Непараметрический подход, основанный на ядерной регрессии

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ВВЕДЕНИЕ

Согласование результатов совместных измерений зависимых измеряемых величин – широко применяемая процедура обработки данных, выполняемая в киберфизических системах.

В общем случае процедура согласования представляет собой поиск оптимальных оценок значений совместно измеряемых величин, связь между которыми известна. Оптимальное решение этой задачи эквивалентно согласованию (достижению непротиворечия) всей доступной информацией об измеряемых величинах и объекте исследования или управления киберфизической системой.

Цель согласования – повысить точность полученных измерений и, следовательно, решений, принимаемых киберфизической системой на основе этих измерений. Для достижения этой цели необходимо использовать информацию из других источников, помимо прямых и/или косвенных измерений, выполняемых в измерительных каналах киберфизических систем: чаще всего используется априорная информация о зависимостях между измеряемыми величинами. Эти зависимости обычно определяются характеристиками и топологией используемой киберфизической системы и объекта, находящегося под ее контролем или наблюдением. Модель этих зависимостей может быть описана системами линейных и/или нелинейных уравнений, дифференциальных уравнений и неравенств. Такие уравнения и неравенства являются ограничениями, налагаемыми на возможные решения задачи. Стоит отметить, что настоящей целью использования этих ограничений является добавление новой информации к задаче и, таким образом, более точный расчет значений измеряемых величин.

В данном руководстве описаны как классические методы согласования неточных данных, построенные путем аналитического решения задачи условной оптимизации в динамических и стационарных системах, так и более современные методы, позволяющие учитывать отклонение закона распределения случайных погрешностей согласуемых результатов измерений о нормальности.

Настоящее руководство включает в себя обзор и достаточное для их реализации описание современных методик метрологического анализа результатов согласования неточных данных: определения характеристик погрешности оптимальных оценок, согласованных за счет дополнительной априорной информации о взаимосвязях между согласуемыми величинами.

Настоящее руководство включает три приложения, представляющие собой развернутые самостоятельные руководства пользователя библиотеки DataReconcile на трех языках Matlab, Python и C++:

Приложение А к отчету – Библиотека открытого доступа DataReconcile для согласования неточных промышленных данных за счет учета взаимосвязей между ними для нужд промышленных предприятий Индустрии 4.0 и целей Национальной технологической инициативы на языке MATLAB;

Приложение Б к отчету – Библиотека открытого доступа DataReconcile для согласования неточных промышленных данных за счет учета взаимосвязей между ними для нужд промышленных предприятий Индустрии 4.0 и целей Национальной технологической инициативы на языке Python;

Приложение В к отчету – Библиотека открытого доступа DataReconcile для согласования неточных индустриальных данных за счет учета взаимосвязей между ними для нужд промышленных предприятий Индустрии 4.0 и целей Национальной технологической инициативы на языке C++.

Г1 ПРОБЛЕМАТИКА СОГЛАСОВАНИЯ НЕТОЧНЫХ ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В англоязычной научной и научно-технической литературе сложился следующий терминологический консенсус: те алгоритмы, что используют в промышленности для математической обработки результатов измерений значений физических величин на сложных объектах, чьи значения взаимосвязаны, принято называть *Industrial Process Data Reconciliation* (то есть согласованием данных, получаемых в ходе производственных процессов) или в случае необходимости использования сокращенного обозначения – *Data Reconciliation* (согласование данных).

В англоязычной периодике термин *Data Reconciliation* (согласование данных) является устоявшимся термином, при употреблении которого обычно отдельно не поясняется о какого типа данных идет речь, в то время как в русскоязычных работах такой терминологический консенсус отсутствует. Чтобы избежать путаницы, отметим следующее: если речь идет о согласовании *промышленных или индустриальных данных* между собой, то под этим принято иметь в виду соответствующий комплекс операций и преобразований *результатов измерений* значений характеристик и параметров объекта измерений или технологического процесса, которые входят или напрямую выводятся из математической модели объекта или процесса. При этом упомянутая математическая модель существенным образом задействуется в процессе согласования индустриальных данных результатов измерений между собой. Процедура согласования позволяет достичь следующих преимуществ:

- обеспечить повышение достоверности результатов выполненных измерений,
- повысить метрологические характеристики самой информационно-измерительной системы, выполняющей измерения на объекте измерений или сопровождающей технологический процесс, или характеристики измерительной подсистемы, используемой на объекте измерения управляющей системы.

Говоря о согласовании данных, в зарубежной литературе часто подразумевают [1] целый комплекс операций по обработке данных: классификацию используемых при описании промышленного объекта переменных, поиск и исключение статистических выбросов, непосредственно согласование результатов измерений между собой. На рисунке Г.1.1 представлена блок-схема алгоритма обработки результатов измерений с использованием математической модели промышленного объекта. Здесь и далее подразумевается, что измерения проводятся совместно (одновременно), а при динамическом режиме измерений – последовательно в одни и те же моменты времени для разных физических величин.

На этапе классификации измеряемые величины делятся на *уточняемые* и *неуточняемые*, в зависимости от, соответственно, наличия или отсутствия избыточной информации, необходимой для достижения уточнения результатов измерения физических величины. Наличие модели объекта измерений не всегда подразумевает информационную избыточность для всех измеряемых физических величин, необходимую для достижения уточнения: например, при косвенных и совокупных измерениях сопровождающие измерения математические выражения необходимы и достаточны для получения единственной оценки значения искомой величины. Множество всех согласуемых

результатов измерений может содержать значения, уточнить которые за счет известных зависимостей не представляется возможным.



Рисунок Г.1.1 – Этапы обработки результатов измерений в задачах, подразумевающих согласование результатов совместных измерений (перевод работы [Г.1])

В свою очередь параметры модели подразделяются на те, что *можно оценить* за счет подстановки в модель имеющихся результатов измерений и те, что *нельзя оценить*. «Часто бывает, что некоторые переменные не могут быть измерены, так что их значения, при возможности, необходимо оценивать» [Г.1], и в этом случае модель промышленного объекта, равно как и результаты прямых измерений на нем, используется для косвенного оценивания этих переменных. Все используемые при описании объекта переменные – измеряемые, известные априорно, либо неизвестные, – следует делить на *поддающиеся* определению и *неподдающиеся* определению через используемую модель. Фактически, речь идет о возможности либо невозможности измерить искомую величину косвенно. Очевидно, измерения величин, не поддающиеся определению через модель, в согласовании данных использоваться не могут.

В англоязычной литературе после выполнения описанного анализа измерительной ситуации и после выделения переменных, поддающихся определению по модели, следует операция поиска и устранения/подавления грубых ошибок, иначе говоря – статистических выбросов. Данная операция критически необходима, так как на следующем этапе, при согласовании результатов измерений между собой аномально большие погрешности нераспознанных выбросов внесут искажения во все согласуемые данные, что приведет к огрублению, а не к уточнению согласуемых данных.

Кооптация данных напрямую связана с поиском и устранением грубых ошибок из массива результатов выполненных измерений. В ряде случаев удаление недостоверного

измерения приводит к невозможности оценить искомую величину. Тогда исключаемый результат измерения заменяют на косвенную оценку, вычисленную по модели и на основании прочих, полагаемых достоверными измерений. Пусть, например, массив результатов измерения состоит из суточного расхода газовой смеси в ветвях разветвленного трубопровода, при этом один из расходомеров с очевидностью вышел из строя в процессе эксплуатации. Заменить показания неисправного датчика нечем – он был единственным на своем участке, однако искомый расход можно оценить из уравнений баланса и на основании измерений прочих расходомеров (то есть кооптацией).

Суть непосредственно операции согласования промышленных данных сводится к математическим преобразованиям полученных результатов совместных измерений, которые обеспечивают согласие с математической моделью объекта измерений или технологического процесса, на котором выполнялись соответствующие прямые измерения. При этом изначально при выполнении согласования точностные характеристики полученной количественной информации не принимались во внимание, но в последнее время сложился консенсус, что соответствующие операции необходимо выполнять с учетом неопределенности полученных результатов измерений, которая, очевидно, сказывается на качестве конечных результатов. Отсутствие учета информации о предельно возможной погрешности выполненных измерений может даже привести к тому, что процедура согласования промышленных данных огрубит результаты измерений вместо обеспечения уточнения, поскольку не будет известно, какие сведения следует учитывать в первую очередь как более точные, а значимость каких соответственно не очень велика.

Отметим, что в рамках практической реализации существующие методы согласования данных могут быть дополнены инструментами обеспечения метрологического сопровождения производимых вычислений [Г.2-Г.4].

Г.1.1 История вопроса

Основные подходы к решению задачи согласованию промышленных данных как способу повышения точности измерений за счет учета известных зависимостей между искомыми величинами, используемые зарубежной научной и научно-технической школой, следующие. Под согласованием результатов измерений за счет учета взаимосвязей между измеряемыми величинами подразумевают получение эффективных (в смысле обеспечения наименьшей дисперсии случайной погрешности оценок значений измеряемых величин), которые соответствуют принятым во внимание взаимозависимостям между значениями этих величин. Ниже кратко изложена суть методов, применяемых в настоящее время для согласования измерительных данных в промышленности.

На рисунке Г.1.2 представлена блок-схема, иллюстрирующая последовательность основных традиционных подходов к согласованию промышленных данных, отражающая их всё более нарастающую сложность (что коррелирует также с последовательностью появления данных методов для решения промышленных задач).

Исторически первым применением согласования результатов измерений для решения промышленной задачи является работа [Г.5]. В данной статье, насколько можно судить, впервые представлено аналитическое решение задачи согласования, поставленной в предположении, что объект измерений может быть описан линейной стационарной системой и на нем напрямую измерены значения всех согласуемых величин. Математическое описание объекта измерений в упомянутой работе состояло из уравнений

материального баланса для химических производственных процессов. Аналитическое решение было получено в форме выражений обобщенного метода наименьших квадратов. В последующее десятилетие начатая в [Г.5] работа была продолжена и дополнена в [Г.6, Г.7]. Были предложены методики обработки промышленных данных для случаев, когда не все согласуемые значения измерены (речь идет по сути дела о *классификации переменных*, см. рисунок Г.1.1). Были разработаны методики декомпозиции измерительной ситуации, допускающей согласование данных с использованием теории графов.

Аналитические и аналитические итерационные методы



Численно-аналитические методы



Рисунок Г.1.2 – Основные традиционные подходы к согласованию промышленных данных с точки зрения типа решаемой задачи и применяемых методов и алгоритмов

Упомянутый выше простейший метод согласования промышленных данных был впоследствии успешно перенесен также в информационные системы предприятий, осуществляющих обогащение минерального сырья. Перенос подхода был осуществлен непосредственным образом, поскольку использованные математические модели для таких предприятий также были основаны на уравнениях материального баланса. Наиболее показательными для описанного применения являются статьи [Г.8-Г.11]. Успешность применения новых методов, позволивших повысить качество измерительной информации, сопровождающей технологические процессы, привела к дальнейшему их распространению на промышленных предприятиях – в частности с середины 70-х гг. начались работы по созданию и внедрению в производственные процессы предприятий добывающей и обрабатывающей промышленности программных средств, реализующих согласование данных [Г.12].

В 1976 году была опубликована работа [Г.13], в которой в контексте промышленного согласования рассмотрены понятия наблюдаемости переменной (*observability*) и избыточности условия (*redundancy*) – речь идет о решении линейной задачи. Для классификации переменных была использована теория графов; также авторами было выполнено моделирование процесса нефтепереработки, показывающее, что можно существенно повысить точность выполняемых измерений за счет учета априорно известных зависимостей между измеряемыми величинами.

Проблема классификации переменных [Г.14-Г.16] и идентификации статистических выбросов [Г.17-Г.27] были в значительной степени проработаны в период с начала 70-х и до конца 90-х. С подробным обзором и методологическим анализом разработанных методов классификации переменных при желании можно ознакомиться в работах [Г.27-Г.37].

В работе [Г.37] впервые для согласования совместных измерений был применен итерационный подход [Г.38]. Позднее был использован метод последовательной линеаризации [Г.39] (*successive linearization*) для согласования промышленных данных, а также методика, основанная на матрице проекций [Г.40] (*matrix projection*), для разделения исходной задачи обработки измерений на две подзадачи: задачу согласования результатов измерений и задачу вычисления неизмеряемых параметров модели объекта косвенным образом (так как последняя к согласованию отношения не имеет). Оба метода – итерационные и решают нелинейную задачу приближенно, причем получаемые оценки остаются несмещенными только в случае верности ряда допущений (например, о достаточно слабой нелинейности модели).

Универсальным инструментом для согласования результатов измерений в линейных и нелинейных системах в зарубежной научной литературе являются численные методы решения задачи условной оптимизации, в первую очередь включающие методы линейного, квадратичного, нелинейного программирования и соответствующие модификации. Главное преимущество подходов к согласованию, основанных на методах нелинейного программирования, – это возможность написать универсальный алгоритм согласования для произвольной модели зависимостей между измерениями, и в том числе – для моделей, включающих в себя неравенства.

Впервые для задачи согласования промышленных данных были использованы методы последовательного квадратичного программирования [Г.41], модифицированные подпрограммами для обнаружения и устранения статистических выбросов в

анализируемых совокупностях данных. Предложенные в [Г.41] идеи нашли свое применение в работе [Г.42], представляющей специальную (и первую в своем роде) программу RAGE, предназначенную для осуществления автоматического согласования результатов измерений с фильтрацией статистических выбросов. В последующем благодаря стремительному развитию информационных технологий программные продукты для промышленности получили самое широкое распространение [Г.43-Г.47]. Характерные примеры: использование программной среды STAN для согласования результатов измерений в нелинейной задаче [Г.48], использование среды SIGMAFINE для моделирования согласования в стационарных системах [Г.49], согласование в электросетях с помощью VALI [Г.50]. Более полный список разработанных к настоящему моменту программных продуктов, реализующих описываемые традиционные подходы к согласованию промышленных данных и удалению так называемых gross errors приведен в таблице Г.1 [Г.51].

Таблица Г.1 – Программные инструменты, реализующие (в том числе) операции согласования промышленных данных и исключения статистических выбросов

Название	Фирма-производитель	Название	Фирма-производитель
ADVISOR	Aspentech (USA)	Sigmafine	OSIsoft (USA)
Aspen Advisor	Aspen Technology Inc. (USA)	SimSci DATACON	Schneider Electric Software (USA)
DATACON	Simulation Sciences (USA)	STAN	Institute for Water Quality, Resource and Waste Management (Austria)
IOO (Interactive On-Line Opt.)	Louisiana State University (USA)	PRODUCTION BALANCE	Honeywell (USA)
MASSBAL	Hyprotech (Canada)	VALI	Belsim (Awans, Belgium)
RECON	Chemplant Technologies (Czech Republic)	VisualMesa	Sotetica (USA)
RECONCILER	Resolution Integration Solutions (USA)	—	—

Отдельную подобласть в задаче согласования промышленных данных занимает решение данной задачи в динамических системах. Основные подходы, развиваемые в зарубежной научно-технической литературе, используют для решения данной задачи не только численные методы. Так как эта задача схожа с задачей рекурсивной фильтрации, первоначально согласование измерений зависимых величин выполнялось посредством цифровой фильтрации, например – фильтра Калмана и его расширенной версии (extended Kalman filter – EKF) [Г.52] в линейных и нелинейных системах соответственно. Данный подход сопряжен со следующими основными недостатками: во-первых, при такой фильтрации не удаётся учесть налагаемые на результат оптимизации интервальные ограничения; во-вторых, игнорируется возможная погрешность параметров модели; при этом, если полагать, что эти параметры известны точно, то тогда «результат Калман-фильтрации эквивалентен результату согласованию данных» [Г.53]; в-третьих, фильтрация

будет эффективной с точки зрения подавления случайного шума только в том случае, если закон распределения этого шума нормальный (так как целевая функция определена из нормального закона). Схожие недостатки характерны для прочих нелинейных цифровых фильтров, применяемых для обработки измерений зависимых величин (iterated EKF, Gaussian second-order filter).

Численный подход, свободный от необходимости решения аналитических выражений и их программирования, для решения задачи согласования в нелинейных динамических системах впервые был использован в [Г.1] и [Г.54]. Особенностью первой работы является то, что: для повышения производительности оценка выполнялась не по всем доступным значениям, а в скользящем временном окне: «метод ортогональной коллокации (orthogonal collocation) был использован для представления дифференциальных уравнений в виде алгебраических равенств» [Г.1]. Во второй работе был предложен SLHE метод (successively linearized horizon estimation), суть которого также сводится к отысканию условного оптимума целевой функции средствами нелинейного программирования, при этом на каждой итерации нелинейные ограничения заменяются их линейным приближением в области текущих значений подбираемых параметров целевой функции. В последующие годы были предложены различные алгоритмы согласования измерений в нелинейных системах, основанные на средствах нелинейной оптимизации.

Отметим предложенный в [Г.55, Г.56] Error-in-Variables-метод (по аналогии с Error-in-Variables models), позволяющий одновременно согласовать и оценить значения измеренных и неизмеренных величин с учетом всех погрешностей (результатов текущих измерений и априорной информации о параметрах модели промышленного объекта).

Из последующих важных работ, посвященных оценке параметров динамических систем средствами численной оптимизации, стоит выделить следующие:

- согласование измерений в динамической системе как задача управления с прогнозирующей моделью [Г.57], model predictive control (MPC); обзор методов условной оптимизации в скользящем временном окне (активно развиваемые в настоящий момент «moving horizon»-методы) в контексте MPC;
- алгоритмы поиска глобального минимума с ограничениями, выраженными в виде нелинейных дифференциальных уравнений [Г.58]: проблема отыскания глобального максимума для них решается на примере двух основных подходов к работе с дифференциальными уравнениями – их коллокацией, то есть преобразованием в алгебраические уравнения посредством полиномиальной аппроксимации, и их последовательном интегрировании;
- разработанная в [Г.59] обобщенная теория методов условной оконной аппроксимации (constrained moving horizon estimation), включающая оптимизацию в нелинейных системах;
- методология согласования данных в химической промышленности с применением робастных оценок [Г.60];
- алгоритм согласования данных в нелинейных динамических моделях, основанный на методе роя частиц [Г.61], particle swarm optimization, как альтернативы методу Гаусса-Ньютона;
- робастные методы согласования измерений [Г.62], в основе которых лежат вариаций М-оценщиков (the Welsh, Quasi-Weighted Least Squares, Biweight, correntropy M-estimators).

Общим трендом зарубежных систем согласования индустриальных данных является то, что со временем с развитием возможностей электронных вычислительных машин

численная реализация согласования данных постепенно вытеснила аналитическую (с применением графовых подходов), хотя последние встречаются до сих пор. Численный подход имеет также дополнительное важное преимущество: на его основе возможно без затруднений реализовать большинство робастных оценок [Г.62], в основе которых лежит известный принцип: оптимизируемый функционал (loss/cost/objective function) формулируется/настраивается таким образом, чтобы имеющиеся в данных неотфильтрованные выбросы как можно меньше влияли на результат согласования.

Другими актуальными направлениями в зарубежной научной мысли в области согласования индустриальных данных являются:

- приложение методов непараметрической статистики (успешно применяется для решения задач схожей проблематики, например, в регрессионном анализе [Г.63, Г.64], в алгоритмах анализа независимых компонент [Г.65], к задаче согласования данных, в том числе – методов численной оптимизации на p -box(-ax) [Г.66],
- разработка методик анализа экономической целесообразности имплементации алгоритмов согласования в промышленную систему [Г.67-Г.70].

В последнем случае речь идет о том, чтобы связать между собой три характеристики: информационную избыточность измерительной ситуации, стоимость создания и/или использования этой избыточности и степень повышения точности измерений, достигаемого за счет операции согласования.

Г.1.2 Постановка задачи

Ниже представлена классическая математическая постановка задачи согласования индустриальных данных.

В общем виде задачу согласования данных обычно формулируют как задачу отыскания оценок \mathbf{x}^* и \mathbf{u}^* (при необходимости), соответствующих оптимуму $\arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} r(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, таких, что не противоречат заданным условиям:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}, \quad (\text{Г.1.1})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq \mathbf{0}, \quad (\text{Г.1.2})$$

$$\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x}^* \leq \mathbf{x}_{\max}, \quad (\text{Г.1.3})$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}^* \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (\text{Г.1.4})$$

где $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)^T$ – оценки искоемых измеряемых величин \mathbf{x} ,
 $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_C^*)^T$ – оценки значений параметров \mathbf{u} математической модели объекта, известных с погрешностями $\boldsymbol{\zeta} = (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$,

$\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_C)^T$ – неточно известные значения параметров модели, описывающей зависимости между величинами \mathbf{x} ;

матрица $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N)^T$ состоит из результатов многократных совместных измерений,

$\hat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})^T$ – это вектор-столбец результатов измерений j -ой величины, $j = 1, 2, \dots, N$, таких, что $\hat{x}_{ji} = x_j + e_{ji}$,

e_{ji} – случайное отклонение результата i -го измерения j -ой величины с законом распределения $\Phi(\mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_e)$ с нулевым математическим ожиданием и параметрами $\boldsymbol{\theta}_e$, следовательно, $\hat{\mathbf{x}} \sim \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x)$; аналогично $\hat{\mathbf{u}} \sim \Phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_u)$, если $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}$;

при однократном совместном измерении величин \mathbf{x} матрица $\hat{\mathbf{X}}$ заменяется вектором $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$;

r представляет собой некоторый функционал невязки, обычно определяемый из распределения вероятностей $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x)$ результатов $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{1i}, \hat{x}_{2i}, \dots, \hat{x}_{Ni})$ совместного измерения величин \mathbf{x} , либо из совместного распределения $\Phi(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_z)$, $\hat{\mathbf{z}}_i = (\hat{x}_{1i}, \hat{x}_{2i}, \dots, \hat{x}_{Ni}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_C)$, если значения параметров модели также подлежат согласованию;

математическая модель объекта, на котором выполняются измерения, может включать в себя: систему алгебраических и (при необходимости) дифференциальных уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, систему неравенств $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$, а также пределы возможных значений \mathbf{x} и \mathbf{u} .

В терминах математической статистики неопределенность значения \hat{z}_{ji} может быть охарактеризована соответствующей дисперсией $D[\hat{z}_{ji}] = \sigma_{\hat{z}_{ji}}^2$, либо ее оценкой $s_{\hat{z}_{ji}}^2$, выполненной по полученным результатам многократных измерений. В свою очередь, если принято, что $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{z}, \Sigma_z)$, тогда неопределенность согласованных результатов \mathbf{z}^* зависит от содержимого ковариационной матрицы Σ_z или, что то же самое, $\Sigma_{(\mathbf{e}, \boldsymbol{\zeta})}$ вектора случайных отклонений $(e_1, e_2, \dots, e_N, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_C)$. Обычно подразумевается, что корреляция между элементами векторов \mathbf{e} и $\boldsymbol{\zeta}$ отсутствует, потому выражения для Σ_z (и, в частности, для Σ_x) принимают вид $\Sigma_z = f(\Sigma_e, \Sigma_\zeta)$; вид функционального преобразования f определяется минимизируемый функционалом, методом отыскания оптимума и видом модели объекта, описывающей зависимости между согласуемыми значениями. Данное обстоятельство является основным допущением аналитического подхода к решению задачи согласования совместных измерений в линейной стационарной системе (наиболее классический случай).

Г.1.3 Аналитические и аналитические итерационные методы

Ниже описаны основные классические аналитические методы отыскания условного оптимума, традиционно используемые для решения задачи согласования результатов совместных измерений. Общий недостаток этих методов – невозможность учесть ограничивающие выражения типа неравенств.

Методы на основе символьного/аналитического дифференцирования.

Пусть требуется согласовать результаты совместного измерения величин x_1, x_2, \dots, x_N в стационарной системе, при этом функциональные связи между величинами описываются набором линейных уравнений вида

$$A_{1i} \cdot x_1 + a_{2i} \cdot x_2 + \dots + a_{Ni} \cdot x_N = b_i, \quad (\text{Г.1.5})$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (\text{Г.1.6})$$

где $\mathbf{a}_i^T = (a_{1i}, a_{2i} \dots a_{Ni})$ – вектор коэффициентов уравнения взаимосвязи;

$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2 \dots x_N)$ – вектор измеряемых величин.

Пусть параметры $\mathbf{u} = (\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_m, \mathbf{b})^T$ модели (Г.1.5) не подлежат согласованию с результатами измерений $\hat{\mathbf{x}}^T = (\hat{x}_1, \hat{x}_2 \dots \hat{x}_N)$.

Если взаимосвязи между величинами x_1, x_2, \dots, x_N описываются системой (Г.1.5) из $m > 1$ уравнений, причем коэффициенты этих уравнений известны с погрешности $\mathbf{e}^T = (e_1, e_2, \dots, e_m)$, тогда

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = b_1 + \zeta_1, \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} = b_2 + \zeta_2, \\ \dots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} = b_m + \zeta_m, \end{cases} \quad (\text{Г.1.7})$$

или в матричной форме

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\zeta}, \quad (\text{Г.1.8})$$

где матрица $\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m)$ состоит из строк \mathbf{a}_i^T ;
векторы $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2 \dots b_m)$ и $\boldsymbol{\zeta}^T = (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_m)$.

Пусть имеется набор из n уравнений измерений, записанный в матричном виде

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Bx} + \mathbf{e}, \quad (\text{Г.1.9})$$

где \mathbf{x} – как и прежде, вектор измеряемых величин;

$\hat{\mathbf{x}}$ – вектор результатов измерений;

\mathbf{e} – вектор погрешностей измерений;

\mathbf{B} – матрица размера $p \times N$, описывающая связь между значениями искомых величин \mathbf{x} и результатами измерений $\hat{\mathbf{x}}$.

Для случая прямых измерений \mathbf{B} – диагональная единичная матрица.

Подразумевается, что ковариационные матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$ и $\boldsymbol{\Sigma}_e$ погрешностей результатов измерений e и погрешностей уравнений взаимосвязей ζ известны.

Рассмотрим уравнения измерений совместно с линейными уравнениями взаимосвязей [Г.71]:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Bx} + \mathbf{e} \\ \mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\zeta} \end{cases} \quad (\text{Г.1.10})$$

единственное решение которой относительно вектора \mathbf{x} эквивалентно согласованию измерений $\hat{\mathbf{x}}$ между собой на основании модели взаимосвязей (Г.1.5).

Для удобства введем дополнительные обозначения

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}; \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_e & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_\zeta \end{pmatrix}. \quad (\text{Г.1.11})$$

В данных обозначениях система уравнений переписывается в виде:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Gx} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{Г.1.12})$$

где размер векторов \mathbf{z} и $\boldsymbol{\varepsilon}$ равен $p + m$;

размер матрицы \mathbf{G} равен $(p + m) \cdot N$;

размер вектора \mathbf{x} прежний, равен N .

В соответствии с принципами метода максимального правдоподобия, оценка \mathbf{x}^* значений \mathbf{x} может быть определена через минимизацию функционала, получаемого в предположении, что все рассматриваемые погрешности имеют нормальный закон распределения:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (\text{Г.1.13})$$

Производная по \mathbf{x} в этом выражении приравняется к нулю. В итоге получается следующая формула оценки измеряемых величин, учитывающая информацию о взаимосвязях между ними [Г.71]:

$$\mathbf{x}^* = [\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_\zeta^{-1} \mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_\zeta^{-1} \mathbf{b}]. \quad (\text{Г.1.14})$$

Ковариационная матрица оценки \mathbf{x}^* равна

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^*} = [\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_\zeta^{-1} \mathbf{A}]^{-1}. \quad (\text{Г.1.15})$$

Видно, что неопределенность оценок \mathbf{x}^* , выраженная в виде ковариационной матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^*}$ определяется содержимым матриц $\boldsymbol{\Sigma}_e$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$, то есть $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^*} = f(\boldsymbol{\Sigma}_e, \boldsymbol{\Sigma}_\zeta)$.

Если погрешностью модели пренебрегают, тогда ковариационная матрица $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta = \emptyset$, и решение (Г.1.14) получено быть не может. В таком случае для отыскания оптимальных оценок \mathbf{x}^* используют метод множителей Лагранжа.

Подход на основе метода множителей Лагранжа.

Пусть выполнен измерительный эксперимент, аналогичный предыдущему: имеются результаты измерений $\hat{\mathbf{x}}$, связанные с искомыми величинами \mathbf{x} системой уравнений

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{e}; \quad (\text{Г.1.16})$$

функциональные связи между величинами \mathbf{x} описаны с помощью системы линейных уравнений

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta}. \quad (\text{Г.1.17})$$

Требуется найти согласованные оценки \mathbf{x}^* , не противоречащие модели (Г.1.17). При этом коэффициенты a_{ji} матрицы \mathbf{A} определены с точностью достаточной, чтобы можно было утверждать, что $\zeta_j \ll e_j$ для любого j . Если вследствие этого принято, что $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$, то нет возможности построить матрицу $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$. Следовательно, упомянутое выражение не может быть использовано для получения уточняющей оценки \mathbf{x}^* .

Алгоритм нахождения согласованных оценок \mathbf{x}^* сводится к минимизации функционала

$$(\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{Г.1.18})$$

в заданных условиях (1.3), но не путем его простого дифференцирования по аргументам \mathbf{x} , как в предыдущем методе, а через применение метода множителей Лагранжа. Это приводит к необходимости отыскания безусловного минимума

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \{(\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \Sigma_e^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})\}, \quad (\text{Г.1.19})$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор неопределенных коэффициентов Лагранжа размерности m .

Продифференцировав минимизируемое выражение по \mathbf{x} и $\boldsymbol{\lambda}$ и приравняв результат к нулю, получим:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \Sigma_e^{-1} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (\text{Г.1.20})$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \Sigma_e^{-1} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (\text{Г.1.21})$$

Отбросив нижнюю часть системы, определяющую значения $\boldsymbol{\lambda}$, получим выражение для уточняющей оценки искомых величин [Г.71]:

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{D}\mathbf{F} - \mathbf{D}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{F})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{b}, \quad (\text{Г.1.22})$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1}$.

Ковариационная матрица такой оценки:

$$\Sigma_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}. \quad (\text{Г.1.23})$$

Так как $\Sigma_{\zeta} = \emptyset$ из условия, в таких задачах $\Sigma_{\mathbf{x}^*} = f(\Sigma_e)$.

Итерационные методы с использованием последовательной локальной аппроксимации зависимостей между согласуемыми величинами.

Один из классических подходов к согласованию результатов измерений нелинейно зависимых величин основан на замене исходного функционала, описывающего эти зависимости, линейным приближением в области согласуемых результатов измерений. Таким образом можно решить задачу условной оптимизации итерационно, без использования численных методов решения нелинейных уравнений.

Классическим примером такого рода подхода является работа [Г.72], предлагающая приближенное решение задачи согласования данных в условии нелинейных ограничений, основанный на последовательной (локальной) линеаризации этих ограничений.

Запишем лагранжиан для решения задачи согласования совместных измерений величин \mathbf{x} в условиях нелинейной стационарной системы:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (\text{Г.1.24})$$

где $(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ – минимизируемый функционал, полученный из совместного нормального распределения вероятностей результатов измерений $\hat{\mathbf{x}}$;

$\boldsymbol{\Sigma}$ – ковариационная матрица вектора результатов измерений $\hat{\mathbf{x}}$;

$\boldsymbol{\lambda}^T$ – вектор множителей Лагранжа;

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – нелинейный функционал, описывающий взаимосвязь между значениями измеряемых величин \mathbf{x} как $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Значения \mathbf{x} и \mathbf{u} соответствующие экстремуму данного лагранжиана могут быть получены путем решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = -\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{J}_x^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{J}_u^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{Г.1.25})$$

где $\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$, $\mathbf{J}_u = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$ – матрицы Якоби ограничивающего функционала $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

В силу нелинейности $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ значения \mathbf{x} , \mathbf{u} из полученной системы в общем виде могут быть найдены только численными методами нелинейного программирования.

Пусть алгоритм решения системы уравнений (Г.1.25) выполняется итерационно, при этом на итерации $k + 1$ вместо исходной нелинейной модели $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ используется линейное приближение в точке $\hat{\mathbf{x}}_k$, $\hat{\mathbf{u}}_k$ [Г.72]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_x^k (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{J}_u^k (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_k) = \mathbf{0}, \quad (\text{Г.1.26})$$

где k – номер итерации;

$\hat{\mathbf{x}}_k$ и $\hat{\mathbf{u}}_k$ – результаты согласования, полученные в результате предыдущей итерации номером k .

Пользуясь данным отношением, получим выражения для оценки вектора \mathbf{x} :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{J}_x^k)^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \quad (\text{Г.1.27})$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ есть решение системы линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_x^k \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{J}_x^k)^T & \mathbf{J}_u^k \\ (\mathbf{J}_u^k)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{u}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_x^k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{J}_u^k \hat{\mathbf{u}}_k - \mathbf{J}_x^k \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{Г.1.28})$$

В качестве первого приближения $\hat{\mathbf{x}}_k$, $k = 0$, используются согласуемые результаты измерений $\hat{\mathbf{x}}$, в качестве $\hat{\mathbf{u}}_k$, $k = 0$, подставляются априорные оценки значений \mathbf{u} . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения $\|\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k\|$ и $\|\hat{\mathbf{u}}_{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_k\|$ не окажутся меньше заданного предельно допустимого отклонения результата оптимизации.

Общий недостаток [Г.53] всех алгоритмов отыскания условного оптимума на основе метода множителей Лагранжа состоит в том, что увеличение размерности задачи из-за введения вектора $\boldsymbol{\lambda}$, как следствие, для решения задачи требуется больше времени. Для упрощения/ускорения вычислений в той же работе [Г.52] было предложено применять к исходному линейному приближению (Г.1.26) метод исключения переменных Гаусса.

Существуют методики согласования данных не требующие составления лагранжиана и вычисления оценки вектора λ в рамках итерационного процесса [Г.37, Г.38]:

$$\hat{\mathbf{u}}_{k+1} = \hat{\mathbf{u}}_k - [(\mathbf{J}_u^k)^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}_u^k]^{-1} (\mathbf{J}_u^k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_x^k (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_k)), \quad (\text{Г.1.29})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y} - \Sigma (\mathbf{J}_x^k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_x^k (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{J}_u^k (\hat{\mathbf{u}}_{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_k)), \quad (\text{Г.1.30})$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{J}_x^k \Sigma (\mathbf{J}_x^k)^T$.

Возможно удерживать значения параметров \mathbf{u} без измерений до тех пор, пока итерационный алгоритм не сойдется к некоторым значениям \mathbf{x} , и только тогда выполняется переоценка $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_{k+1}$. Так при большом объеме вычислений удастся получить более точны оценки величин \mathbf{x} и \mathbf{u} .

К недостаткам метода, разработанного в [Г.38], можно отнести необходимость вычислять обратные матрицы для \mathbf{R} и $(\mathbf{J}_u^k)^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}_u^k$, что не всегда возможно. Лишенную этого ограничения методику согласования данных впервые предложили в работе [Г.73] (в основе – техника вычисления матрицы проекций [Г.14]).

Подходы на основе методов цифровой фильтрации.

Методы согласования данных в динамических системах обычно основаны на методах цифровой фильтрации, как правило, – на обычной и расширенной версии фильтра Калмана. В случае с цифровой фильтрацией учет зависимостей между измеряемыми величинами, выраженных в виде неравенств, также невозможен.

Определим линейную дискретную модель динамической системы:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (\text{Г.1.31})$$

где \mathbf{x}_k – вектор-столбец значений искомым совместно измеряемых величин $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ в k -ый;

\mathbf{x}_{k-1} – вектор-столбец искомым величин \mathbf{x} момент времени $k-1$;

\mathbf{A}_{k-1} – матрица размерностью $N \times N$ коэффициентов линейного преобразования над значениями \mathbf{x}_{k-1} ;

\mathbf{B}_{k-1} – матрица размерностью $N \times C$ коэффициентов линейного преобразования над входными параметрами $\mathbf{u}_{k-1}^T = (u_1, u_2, \dots, u_C)$ дискретной модели динамической системы;

вектор $\mathbf{w}_{k-1}^T = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ содержит случайные искажения модели в момент времени $k-1$.

Система линейных уравнений измерений в матричном виде:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (\text{Г.1.32})$$

где $\mathbf{y}_k^T = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – вектор результатов совместного измерения искомым величин \mathbf{x} в момент времен k ;

\mathbf{H}_k – матрица коэффициентов линейного преобразования претерпеваемого значениями \mathbf{x}_k в измерительном канале;

$\mathbf{v}_k^T = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ – вектор случайных отклонений результатов \mathbf{y}_k от действительных значений $\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$.

Подразумевается, что $\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{w}(k)})$ и $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{v}(k)})$ для любого k . Причем $\text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j) = \text{Cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = 0$ для $j \neq k$ и $\text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$.

Ковариационные матрицы случайных отклонений \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k обозначены как

$$\text{Cov}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{R}_k = \Sigma_{\mathbf{w}(k)} = \Sigma_{\mathbf{w}}^k, \quad (\text{Г.1.33})$$

$$\text{Cov}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{Q}_k = \Sigma_{\mathbf{v}(k)} = \Sigma_{\mathbf{v}}^k. \quad (\text{Г.1.34})$$

Обозначим результат применения фильтра Калмана для k -го момента времени как $\hat{\mathbf{x}}_{j|k}$, где индекс j указывает на объем выборки $\mathbf{Y}_j = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_j)$ результатов совместных измерений, используемой для получения для получения.

Результатом согласования или, что то же самое, результатом фильтрации называют оценку $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, то есть, когда $j = k$. В таком случае для уточнения текущего измерения \mathbf{y}_k используются все имеющиеся к моменту k результаты измерений $\mathbf{Y}_k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$ плюс дискретная модель динамической системы. Оценку $\hat{\mathbf{x}}_{j|k}$ при $j > k$ называют предсказательной. При $j < k$ задача фильтрации преобразуется в задачу сглаживания.

Алгоритм вычисления результата фильтрации по Калману или согласованных оценок (что то же) в момент времени k состоит из нескольких последовательных шагов [Г.53]:
– вычисления предсказательных оценок $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ с помощью дискретной модели динамического процесса и на основании результатов согласования $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ в предыдущий момент времени:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_{k-1}, \quad (\text{Г.1.35})$$

– вычисления ковариационной матрицы предсказательных оценок:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{R}_k, \quad (\text{Г.1.36})$$

– вычисления матрицы оптимальных приращений:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{Q}_k)^{-1}, \quad (\text{Г.1.37})$$

– согласования результатов совместных измерений \mathbf{y}_k , выполненных в k -ый момент времени, с предсказательными оценками $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ (согласованные оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ как средневзвешенное между $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ и \mathbf{y}_k):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (\text{Г.1.38})$$

– вычисления ковариационной матрицы результатов согласования $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, необходимых для итерации $k + 1$:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}, \quad (\text{Г.1.39})$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Алгоритм фильтрации Калмана (результат $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$) тождественен алгоритму согласования результатов измерений $\mathbf{Y}_k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$ на момент времени k , если принять $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{0}$ [Г.53]. То есть алгоритмы тождественны, если погрешность модели зависимостей между величинами \mathbf{x} не учитывается. Другими словами, расхождение между методами вызвано различием в способе учета неопределенности априорной информации о зависимостях между величинами, результаты измерения которых подлежат согласованию.

Расширенный фильтр Калмана представляет собой модификацию оригинального цифрового фильтра, пригодную для фильтрации/сглаживания/предсказания в нелинейных динамических системах.

Действительно, описанный выше алгоритм не может быть применен в том случае, если динамическая система описывается с помощью модели

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \dot{\boldsymbol{\beta}}, \quad (\text{Г.1.40})$$

где $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ – нелинейный функционал (в гибридного фильтра Калмана непрерывная во времени модель состояния системы – здесь и далее точка над функцией означает непрерывность во времени);

вектор $\boldsymbol{\beta}$ обозначает случайную погрешность модели вида $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{w}(t)$ с нулевым математическим ожиданием и функцией ковариационной матрицы $\mathbf{R}(t)\delta(t - \tau)$, где $\delta(t - \tau)$ – дельта-функция Дирака.

То же касается уравнений измерений: если в выражении

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (\text{Г.1.41})$$

функционал $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ – нелинейный, тогда оригинальный алгоритм Калмана неприменим.

Один из способов решения этой проблемы – последовательная локальная аппроксимация нелинейных функционалов. Ключевая операция в данном подходе – взятие производных по \mathbf{x} от нелинейных функционалов $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$:

$$\mathbf{F}_{\tau|k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tau, \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}}, \quad (\text{Г.1.42})$$

где $\mathbf{F}_{\tau|k-1}$ – матрица Якоби функционала $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ в момент времени $t = \tau$,

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}. \quad (\text{Г.1.43})$$

Данная операция производится следующей последовательностью действий:
– вычислением предсказательных оценок $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\tau|k-1} = \mathbf{f}(\tau, \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}), \quad (\text{Г.1.44})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \dot{\mathbf{x}}_{\tau=kT|k-1}, \quad (\text{Г.1.45})$$

где операция $\tau = kT$ обозначает переход от функций непрерывных во времени в дискретное пространство с шагом T ,

– вычислением ковариационной матрицы предсказательных оценок:

$$\dot{\mathbf{P}}_{\tau|k-1} = \mathbf{F}_{\tau|k-1} \mathbf{P}_{\tau|k-1} + \mathbf{P}_{\tau|k-1} \mathbf{F}_{\tau|k-1}^T, \quad (\text{Г.1.46})$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \dot{\mathbf{P}}_{\tau=kT|k-1} + \mathbf{R}(t = kT), \quad (\text{Г.1.47})$$

– вычислением матрицы оптимальных приращений:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{Q}_k)^{-1}, \quad (\text{Г.1.48})$$

– согласованием результатов совместных измерений \mathbf{y}_k с предсказательными оценками $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})), \quad (\text{Г.1.49})$$

– вычислением ковариационной матрицы результатов согласования $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}, \quad (\text{Г.1.50})$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Ограничения расширенного фильтра Калмана проистекают из особенности его построения: локальная линеаризация допустима в том случае, если функционалы \mathbf{f} и \mathbf{h} не обладают высокой нелинейностью и если имеющиеся случайные погрешности невелики. Для фильтрации/согласования/предсказания в сильно нелинейных системах в [Г.74] был разработан Unscented Kalman filter.

Г.1.4 Согласование данных, как задача условной оптимизации

К основным преимуществам численных методов согласования над аналитическими в задачах согласования измерений относят:

– возможность построить универсальный алгоритм решения задачи для произвольных зависимостей между согласуемыми величинами, в том числе с ограничениями типа неравенств;

– возможность имплементировать в алгоритм согласования робастные М-оценки.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования – отыскания минимума $\min_{\mathbf{z}} r(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}})$ с условиями

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0}, \quad (\text{Г.1.51})$$

где r – некоторый функционал невязки между значениями согласуемых величин $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T$ и результатами $\hat{\mathbf{x}}$ совместных измерений и оценками $\hat{\mathbf{u}}$ параметров модели взаимосвязей, $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})^T$;

функционалы $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ и $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_k)^T$ описывают зависимости между согласуемыми величинами \mathbf{x} и ограничений, налагаемых на их возможные значения.

Для условной оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств используют обобщение Куна–Таккера метода множителей Лагранжа. Аналог лагранжиана в таком случае:

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = r(\mathbf{z}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{z})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}^T(\mathbf{z})\boldsymbol{\mu}. \quad (\Gamma.1.52)$$

Решение задачи

$$\min_{\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \quad (\Gamma.1.53)$$

может быть получено из системы

$$\begin{cases} \nabla r(\mathbf{z}^*) + \mathbf{J}_f^T(\mathbf{z}^*)\boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{J}_g^T(\mathbf{z}^*)\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \leq \mathbf{0}, \\ g_j(\mathbf{z}^*)\mu_j^* = 0, j = 1, 2, \dots, k, \\ \boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\Gamma.1.54)$$

где \mathbf{z}^* – искомые величины (результаты согласования измерений $\hat{\mathbf{x}}$ и оценок параметров $\hat{\mathbf{u}}$), $\nabla r(\mathbf{z}^*)$ – градиент функции r ;

$\mathbf{J}_f(\mathbf{z}^*)$ – матрица Якоби функционала \mathbf{f} , $\mathbf{J}_g(\mathbf{z}^*)$ – матрица Якоби функционала \mathbf{g} ;

$\boldsymbol{\lambda}^*$ и $\boldsymbol{\mu}^*$ – вспомогательные множители (по аналогии с множителями Лагранжа), размерность векторов совпадает с размерностями \mathbf{f} и \mathbf{g} , соответственно.

Таким образом, задача отыскания оптимума (Г.1.53) сводится к задаче решения системы уравнений (Г.1.54)

$$\nabla L(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \mathbf{0}, \quad (\Gamma.1.55)$$

при выполнении условий $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \leq \mathbf{0}$.

Задачу отыскания решения $\mathbf{t}^* = (\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ системы уравнений (Г.1.54) – при выполнении заданных условий $\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \leq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$, – можно свести к отысканию неподвижной точки

$$\mathbf{t}^* = \varphi(\mathbf{t}^*) \quad (\Gamma.1.56)$$

некоторого сжимающего отображения φ на пространстве $\mathbf{t} = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$.

В дискретном виде такое отображение записывают в виде:

$$\mathbf{t}_{i+1} = \mathbf{t}_i - \alpha_i \mathbf{d}_i, \quad (\Gamma.1.57)$$

где i – номер итерации процесса отыскания оптимума \mathbf{t}^* , α_i – коэффициент, определяющий длину шага в направлении координаты \mathbf{t}^* в пространстве \mathbf{t} , вектор \mathbf{d}_i размерностью $N + C$ указывает направление, обратное направлению поиска.

Способы определения α_i и \mathbf{d}_i зависят от выбранного метода численного решения системы (Г.1.54). Например, для метода Ньютона:

$$\mathbf{d}_i = [H_L(\mathbf{t}_i)]^{-1} \nabla L(\mathbf{t}_i), \quad (\text{Г.1.58})$$

$$\alpha_i = 1, \quad (\text{Г.1.59})$$

$$\mathbf{t}_{i+1} = \mathbf{t}_i - [H_L(\mathbf{t}_i)]^{-1} \nabla L(\mathbf{t}_i), \quad (\text{Г.1.60})$$

где $\nabla L(\mathbf{t}_i)$ – градиент функции $L(\mathbf{t})$;

H_L – Гессиян функции $L(\mathbf{t})$, $\alpha_i = 1$ для всех i .

В случае применения одного из методов численной оптимизации решается исходная задача оптимизации (1.9). Для методов градиентного спуска имеет место следующее отображение:

$$\mathbf{d}_i = \nabla L(\mathbf{t}_i), \quad \mathbf{t}_{i+1} = \mathbf{t}_i - \alpha_i \nabla L(\mathbf{t}_i), \quad (\text{Г.1.61})$$

где формат представления α_i зависит от выбранной модификации градиентного метода.

Г.1.5 Робастная статистика

Существующие методы построения робастных алгоритмов обработки и, в том числе, согласования неточных данных можно разделить на два типа:

- методы максимального правдоподобия (М-оценки),
- вариации ранговых/порядковых методов (R- и L-оценки).

Ранговые методы подразумевают представление исходной выборки в виде вариационного ряда и либо усечения этого ряда с двух сторон (отбрасываются элементы с наибольшими и наименьшими номерами-рангами), либо присвоению весового коэффициента каждому элементу ряда на основании его номера. Через эти коэффициенты, фактически, численно задается мера доверия элементам выборки. Как правило, чем дальше номер элемента отстоит от величины $[n/2]$, где n – число элементов вариационном ряду результатов многократных измерений, тем меньше к нему доверия – тем вероятнее, что перед нами статистический выброс.

К плюсам порядковых и ранговых методов относят: непараметричность получаемых оценок и, безусловно, робастность. К минусам можно отнести негибкость таких методов – информация о виде закона распределения, если таковая имеется, не используется. Как следствие, все эти методы не позволяют получить эффективную оценку искомой величины.

М-оценки, так же часто называемые ММП-оценками, так как в их основе лежит метод максимального правдоподобия (далее – ММП), получили широкое распространение в последние десятилетия благодаря стремительному развитию вычислительной техники. Их суть состоит в следующем. Вместо того, чтобы исключать выбросы до процедуры согласования, в качестве функционала невязки $r()$, минимизируемого в рамках процедуры условной оптимизации, выбирается функция, характер которой позволяет уменьшить влияние далеко отстоящих от центра совокупности элементов на результат оптимизации. Вместо оценщика, эффективного в условиях погрешности, распределённой по некоторому идеальному закону, используют один из альтернативных оценщиков, «обеспечивающего несмещенную оценку в условиях отклонения действительного закона от выбранного идеального» [Г.75]. Таким образом данные методы являются параметрическими – априорные сведения о виде закона

распределения погрешностей учитывается, однако вместо функционала невязки, получаемого методом максимального правдоподобия из предполагаемого закона, используется некоторая модификация данного функционала.

В общем виде, на произвольный закон распределения согласуемых величин целевую функцию r в ММП оценке записывают следующим образом [Г.60]:

$$\sum_i r\left(\frac{\hat{z}_i - z_i}{\sigma_i}\right). \quad (\text{Г.1.62})$$

Если ожидается, что случайные отклонения согласуемых результатов измерений независимы и распределены по нормальному закону, то минимизируемый функционал вырождается в знакомую квадратичную форму:

$$r(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}), \quad (\text{Г.1.63})$$

где Σ – диагональная ковариационная матрица вектора $\hat{\mathbf{z}}$.

Получаемые таким образом ММП-оценки будут смещенными, если выборка загрязнена недостоверными результатами измерений. Смещение будет тем больше, чем больше доля статистических выбросов в выборке.

Используемые для построения робастных оценщиков функции приведены в таблице Г.2 [Г.75]. Значения параметров данных функций, соответствующих эффективности 95%, приведены в таблице Г.3 [Г.75].

Таблица Г.2 – Целевые функции робастных М-оценщиков

тип М-оценщика	r -функции
ОМНК	$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_i^2$
Коши	$c_C^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_i^2}{c_C^2}\right)$
Логистическая	$2 \cdot \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\varepsilon_i}{c_{Lo}}\right)\right) - \frac{\varepsilon_i}{c_{Lo}}$
Лоренцова	$-\frac{1}{1 + \varepsilon_i^2/2 \cdot c_L^2}$
“Fair”	$2 \cdot c_F^2 \cdot \left[\frac{ \varepsilon_i }{c_F} - \ln\left(1 + \frac{ \varepsilon_i }{c_F}\right)\right]$
Восходящая М-оценка Хампела	$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_i^2, \quad 0 < \varepsilon_i \leq a_H,$ $a_H \cdot \varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot a_H^2, \quad a_H < \varepsilon_i \leq b_H,$ $a_H \cdot b_H - \frac{a_H^2}{2} + (c_H - b_H) \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_H - \varepsilon_i }{c_H - b_H}\right)^2\right],$ $b_H < \varepsilon_i \leq c_H,$ $a_H \cdot b_H - \frac{a_H^2}{2} + (c_H - b_H) \cdot \frac{a^2}{2}, \quad c_H < \varepsilon_i $

Таблица Г.3 – Параметры для различных функций r со значениями эффективности 95%

тип M -оценщика	Значения параметров
	$b_{CN} = 10, p_{CN} = 0,035$
Коши	$c_C = 2,3849$
Логистическая	$c_{Lo} = 0,602$
Лоренцова	$c_L = 2,6$
“Fair”	$c_F = 1,3998$
Восходящая M -оценка Хампела	$a_H = 1,35, b_H = 2,7, c_H = 5,4$

Общее свойство r -функций, на основе которых строятся оценки, устойчивые к выбросам, – нелинейная зависимость между значением функции влияния этих функций от меры неопределённости (дисперсии/СКО) согласуемых данных. Функцию влияния IF (influence function) определяют как [Г.76]:

$$IF(\hat{z}, T, \varphi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(\varphi_t) - T(\varphi)}{t} = \frac{\partial}{\partial t} [T(F_t)]|_{t=0}, \quad (\text{Г.1.64})$$

где T – процедура оценки;

φ – предполагаемая функция распределения;

φ_t – искаженная функция распределения.

В качестве визуального пояснения на Рис. 3 приведен сводный график [Г.60] функций влияния различных r -функций.

Как видно из рисунка Г.1.3, в случае ОМНК, эквивалентного ММП-оценке в предположении нормально распределенных случайных погрешностей, функция влияния пропорциональна погрешности измерения, следовательно, данные методы не являются робастными: стандартное отклонение ММП-оценки искомой величины пропорционально возрастает по мере отклонения действительного распределения от нормального. В случае применения функции r на основе «распределения Коши, Lorentzian-функции и восходящей M -оценки Хампела влияние выбросов снижается» [Г.60] по мере увеличения их дисперсии. «Fair»-функция и функция r на основе логистического распределения ограничивают меру влияния элементов выборки начиная с некоторого значения дисперсией некоторой константой: «функция влияния медленно увеличивается по отношению к погрешности измерения, приближаясь к постоянному значению для больших значений погрешности» [Г.60].

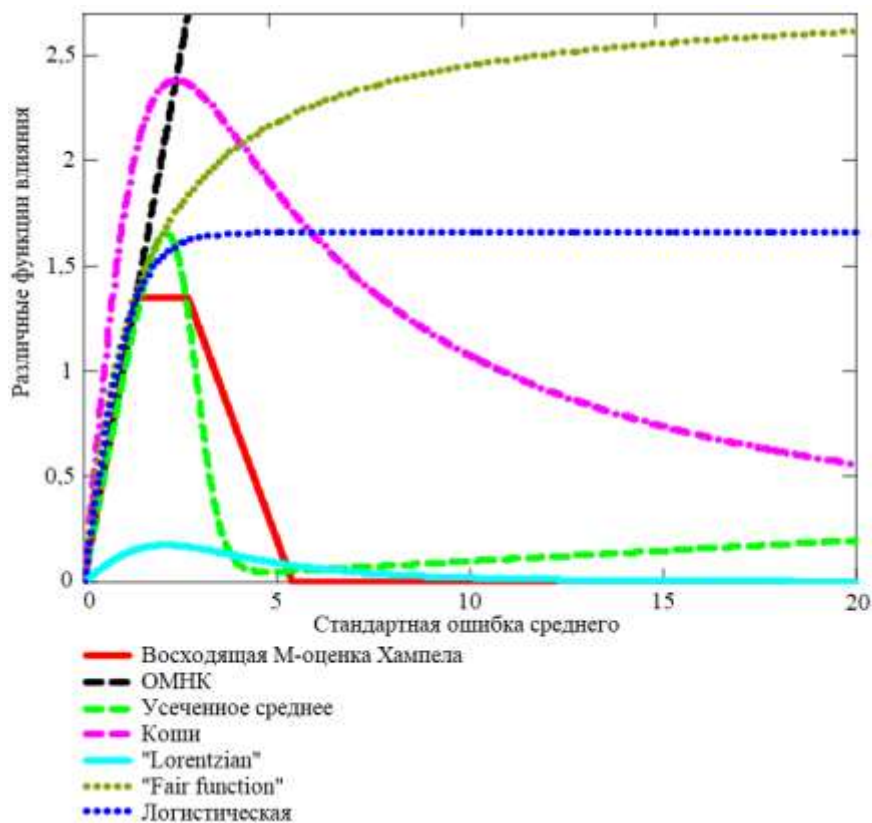


Рисунок Г.1.3 – Относительное влияние погрешности измерения на целевую функцию

Существуют также методы борьбы с выбросами, основанные на последовательной проверке статистических гипотез о принадлежности каждого элемента имеющейся совокупности. Как и в случае с робастными ММП-оценками применение данных методов предполагает, что в целом случайные отклонения результатов измерений подчинены некоторому известному закону, а статистические выбросы насматриваются как фактор, искажающий это распределение. То есть такие методы являются параметрическими. Данное обстоятельство ведет к очевидным проблемам: если стандартный (до искажения) закон распределения погрешностей неизвестен, либо определен неверно, тогда, соответственно, методы на основе проверки гипотез не может быть применен, либо его применение может привести к недостоверным результатам – неконтролируемому росту ошибок первого и второго рода.

Важнейшим обстоятельством представленного анализа классических методов согласования индустриальных данных является то, что их вывод и применение основаны на предположении о гауссовом характере распределения случайных погрешностей обрабатываемых результатов измерений. Исключением выступают методы, основанные на непараметрических оценках.

Г.1.6 Статический и динамический режимы измерений

Описанные выше методы и алгоритмы позволяют покрыть оба случая основных режимов выполнения измерений – статического режима (когда изменения во времени значений измеряемых величин не сказываются значимо на величине погрешности результатов измерений) и динамического режима (когда отсутствие учета изменений во времени сигналов измерительной информации приводит к возникновению значимой, а

порой и значительной погрешности конечных результатов). Статический режим измерений указывает на то, что все повторные (многократные) измерения одной и той же физической величины проводятся в одних и тех же условиях и могут трактоваться как реализации одной и той случайной величины. Этот случай полностью описывается представленными выше результатами и моделями (как классических подходов к согласованию индустриальных данных, так и предлагаемых инновационных с использованием методов и средств непараметрической статистики, позволяющей ввести учет отклонений распределений от гауссовости).

Статический режим измерений предполагает, что выполненные измерения не содержат погрешности, связанной с пренебрежением изменения измеряемой величины во времени, то есть полагается, что за время выполнения измерений изменения измеряемой величины привели к появлению погрешности, пренебрежимо малой в сравнении с прочими ее компонентами.

Динамический режим измерений предполагает, что изменениями измеряемой величины во времени пренебрегать нельзя и, значит, необходимо принимать во внимание инерционность используемых средств измерений. Если изменения измеряемой величины происходят достаточно быстро (т.е. выходят за пределы допустимого частотного диапазона для используемых средств измерений), то возникающее искажение формы измеряемого сигнала на выходе средства измерения приводит к возникновению значимой составляющей погрешности в результатах мгновенных измерений отсчетов измеряемого сигнала, отсутствие учета которой приводит к существенным ошибкам при дальнейших преобразованиях. Для компенсации динамической погрешности необходимо решать так называемую обратную задачу.

Описание же динамического режима измерений (если только он не сопряжен с возникновением динамических погрешностей и существенной инерционностью используемых средств измерений, приводящих к искажениям формы измеряемых информационных сигналов о значениях физических величин, изменяющихся во времени) полностью исчерпывается в первом приближении многомерным случаем представленных теоретических построений (то есть таких, когда измеряемых величин больше чем две, а уравнений взаимосвязи больше чем одно). Измеряемыми величинами в этом случае выступает каждый отсчет измеряемых временных сигналов в отдельности, а повторных измерений нет (если только речь не идет о многократном воспроизведении временных процессов и ансамблей временных сигналов – в этом случае для каждого временного отсчета будет получена отдельная выборка его реализаций). При такой интерпретации динамического режима измерений при необходимости можно использовать в качестве математических моделей взаимосвязи между различными элементами временного сигнала различные авторегрессионные модели описания временных рядов – от AR/ARIMA моделей до GARCH. Такие представления укладываются в приведенные теоретические построения, обладающие известной степенью универсальности.

Г.2 СТРУКТУРА БИБЛИОТЕКИ

Решаемая в рамках программной библиотеки задача относится к задачам повышения точности результатов совместных измерений, выполняемых на сложном объекте измерений, для которого предоставлена или получена в ходе эмпирических исследований математическая модель (возможно, не вполне точная). Снижение неопределенности получаемых результатов достигается за счет учета функциональных зависимостей между измеряемыми величинами, формализованных в рамках упомянутой математической модели. В качестве последней могут выступать как различные уравнения (алгебраические – линейные и нелинейные, дифференциальные и интегро-дифференциальные), а также наборы ограничений, вытекающие из условий решаемой измерительной задачи и условий функционирования и эксплуатации наблюдаемого объекта измерений (системы неравенств – односторонних и двусторонних). Решение задачи производится также при разном объеме известной информации, ключевое место среди которой занимают сведения о распределении погрешностей выполняемых измерений – как известно из математической статистики, при разных законах распределения случайных погрешностей разные числовые оценки для одного и того же параметра распределений будут являться эффективными (то есть будут обеспечивать наименьший статистический разброс от выборки к выборке). Данное обстоятельство указывает на обязательную необходимость привлечения сведений о распределении погрешностей (в том объеме, в котором она доступна). Решение задачи повышения точности (за счет согласования индустриальных данных) под перечисленными ограничениями представляет собой комплекс задач, решения которых имеет как общие черты, так и разнится в зависимости от типа ограничений. Эффективные вычислительные решения для разных значимых для измерительной практики ситуаций представляет собой основу настоящей библиотеки. На первом этапе основным типом рассматриваемых ограничений выступают математические модели, составленные из алгебраических уравнений (как линейных, так и нелинейных) при условии, что закон распределения случайных погрешностей отличается от нормального (возможно, несильно). Данный тип задачи должен включать в себя традиционные решения (в предположении гауссовости распределения погрешностей), так и новые, до сего момента не представленные в научной литературе по вопросу методы и подходы. Другим важным моментом является необходимость учета режима выполняемых измерений – статического (когда изменениями во времени значений измеряемых величин можно пренебречь без значимого снижения точности) или динамического (когда изменения сигналов измерительной информации во времени приводят к возникновению значимых составляющих погрешностей, отсутствие учета которых приводит к существенному снижению достоверности конечных результатов). Данная постановка задачи крайне важна для измерительной практики и предложена впервые в контексте задачи согласования индустриальных данных.

Рассматривая задачу согласования индустриальных данных целостно, следует отметить, что задача так или иначе сводится к условной оптимизационной задаче некоторой размерности и с тем или иным набором условий. Данное обстоятельство позволяет построить эффективную модель решения задачи согласования данных, выбрав для того или иного набора ограничений наиболее подходящий алгоритм оптимизации. Программная библиотека, реализующая разные методы согласования неточных данных друг с другом, также содержит в себе ряд автоматизированных инструментов.

На рисунке Г.2.1 представлена визуализация структуры библиотеки, а также входные и выходные данные.

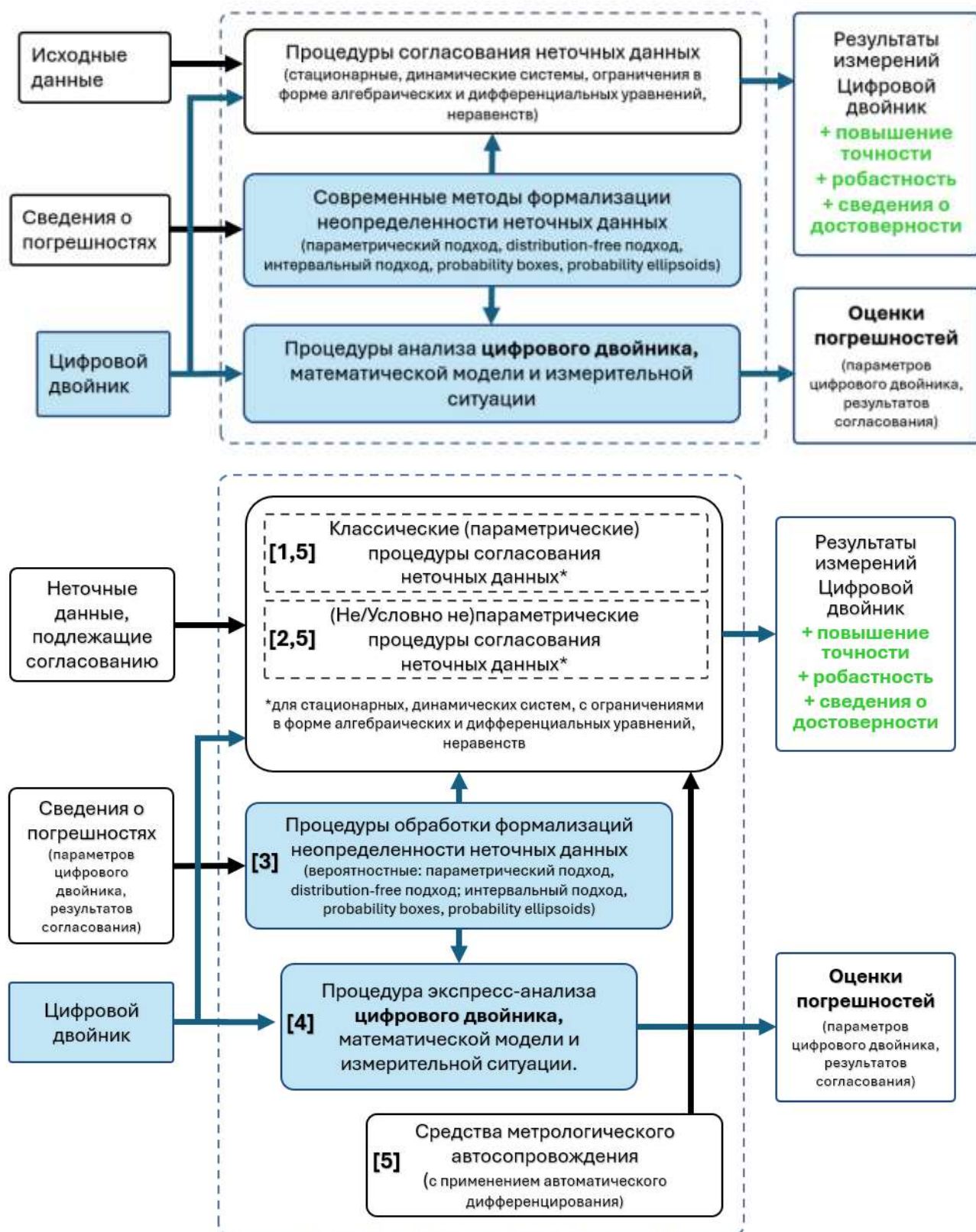


Рисунок Г.2.1 – Структура библиотеки DataReconcile

В соответствии с приведенной на рисунке Г.2.1 нумерацией, библиотека содержит:

- 1) программные средства, реализующие традиционные методы согласования промышленных данных, которые содержатся и применяются в зарубежных коммерческих продуктах,
- 2) программные средства, реализующие непараметрические и условно непараметрические методы согласования промышленных данных, позволяющие учитывать в рамках согласования существенные или малые отклонения действительного закона распределения погрешностей от нормального, применимые как в статическом режиме измерения, так и в динамическом,
- 3) программные представления и преобразования современных формализмов описания погрешности результатов измерений, таковых, чтобы результат преобразования/представления мог быть эффективно использован в качестве меры неопределенности неточных промышленных данных при их согласовании по известной модели.
- 4) программные предварительной экспресс-оценки потенциального уточнения, достигаемого при математической обработке результатов выполняемых измерений за счет выполнения их согласования на основе известной априорной информации,
- 5) программные средства для обеспечения метрологического автосопровождения производимых вычислений [Г.2-Г.4], поскольку без него нет возможности оценить точность конечных результатов согласования, а также – при необходимости – произвести согласование моментов остановки выполняемых итерационных процедур с точностью исходных данных (то есть результатов выполненных измерений),

Г.3 СОВРЕМЕННЫЕ ФОРМАЛИЗМЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Толчком к массовой разработке первых программ с метрологическим сопровождением послужила разработанная в начале 60-х годов XX века рекомендация IFIP (Международная федерация обработки информации) о необходимости снабжать вычислительные программы подпрограммами оценки интервальных характеристик погрешности каждого результата вычислений. Вскоре после этой рекомендации появились программные библиотеки, предназначенные для линейной обработки данных: например, отечественная система [Г.77] и разработанная в США библиотека LinPack. В конце 70-х годов начались разработки отечественных ИИС, содержащих в своем составе ЭВМ, а также разработки унифицированного ядра ИИС – измерительно-вычислительных комплексов (ИВК), в связи с чем проблемой аттестации программного обеспечения заинтересовалось метрологическое сообщество. Исследования велись преимущественно в двух направлениях. Одно из этих направлений – метрологическая аттестация алгоритмов вычислений [Г.78], которая заключается в выборе для применения в метрологических целях такого алгоритма из числа известных, который при наименьшей трудоемкости обеспечивает устойчивость вычислений и минимальную погрешность, связанную с его программной реализацией, при различных моделях измеряемых величин и погрешностей прямых измерений [Г.79, Г.80]. Второе направление работ – при реализации выбранного алгоритма в виде рабочей программы вычислений обеспечить средствами той же программы оценку характеристик погрешности для результата каждого выполненного вычисления. Первая попытка развить исследования в этом направлении была предпринята в 1980-1981 годах при разработке стандарта ГОСТ 26.203-81 [Г.81]. Вслед за этим в статье [Г.82] были рассмотрены два варианта придания программам вычислений свойств метрологического сопровождения:

- замена вычислений в программах с действительными числами на вычисления с интервалами, сводящаяся к замене в исходном коде программ основного используемого типа данных с чисел с плавающей точкой (float, double) на тип данных interval, арифметические действия с которым выполняются в соответствии с правилами интервального анализа [Г.83],

- оценка эллипсоидов неопределенности результата вычислений по заданным характеристикам эллипсоидов неопределенности входных данных расчета [Г.84].

Общим свойством данных подходов является то, что при их использовании в содержательную часть исходного кода метрологически значимой программы не вносятся изменений. Изменяется тип данных входных аргументов $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ функции \tilde{f} , но при этом сама функция \tilde{f} особых изменений не испытывает. Для корректного выполнения операций с новым типом данных в состав программных библиотек, задействованных метрологически значимой программой, должна быть включена специальная соответствующая библиотека.

Другим источником новых подходов к метрологическому сопровождению являлись исследования новых способов выражения погрешности и ее характеристик, плохо формализуемых классическими методами. Успехи в применении нестатистических способов выражения и учета неопределенности различной природы привели к тому, что с 1975 года по настоящее время в технической литературе обсуждаются возможности

применения в метрологических целях теории нечетких переменных в качестве способа представления не только погрешностей прямых измерений, но и погрешностей результатов их обработки [Г.85-Г.89]. К настоящему времени в работах [Г.90-Г.91] предлагается использовать в программах вычислений представление погрешностей нечеткими интервалами в совокупности с линеаризацией, достигаемой путем автоматического дифференцирования функций, заданных исходными кодами программ.

Интервальная арифметика и метод оценки эллипсоидов оперируют лишь с границами соответственно интервалов и эллипсоидов неопределенности. Чаще всего случайный характер погрешности является существенным обстоятельством, пренебрежение которым ведет к существенному завышению интервальных характеристик трансформированной погрешности вычислений. В связи с этим наряду с интервальной арифметикой и ее расширениями получили развитие методы представления погрешностей исходных данных в виде гистограмм [Г.92] и областей возможных значений для функций распределения [Г.93].

Г.3.1 Применение классической и аффинной интервальных арифметик

Интервал возможных значений является традиционной и общепринятой характеристикой погрешности. Поэтому естественно, что исторически первым способом организации вычислений с неточными данными, явилось исчисление интервалов. Впервые оно было систематически изложено в [Г.94]. На интервальное представление погрешности результатов измерений указывается в [Г.95, Г.96], поэтому идея при математической обработке неточных данных в качестве характеристики погрешности результата вычислений получать также интервал выглядит для метрологических задач целесообразной и удачной.

Интервалом $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ принято называть совокупность всех значений $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$, где $\underline{x}, \bar{x} \in R$ и $\bar{x} \geq \underline{x}$. Пусть заданы интервалы $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ и $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$. Введение арифметических операций с интервалами X и Y обычно производится так, чтобы результат $X \circ Y$ любой арифметической операции \circ содержал все значения $x \circ y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$:

сложение вводится как $X + Y = [\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$;

вычитание – по правилу $X - Y = [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$;

умножение – как $X \cdot Y = [\underline{x}, \bar{x}] \cdot [\underline{y}, \bar{y}] = \left[\min \{ \underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y} \}, \max \{ \underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y} \} \right]$;

деление – по правилу $X/Y = [\underline{x}, \bar{x}] / [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x}, \bar{x}] \cdot [\frac{1}{\bar{y}}, \frac{1}{\underline{y}}]$, если $0 \notin [\underline{y}, \bar{y}]$.

Все введенные операции таковы, что $X \circ Y = \{x \circ y: x \in X, y \in Y\}$, $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$. Таким образом, гарантируется, что результат каждой операции в рамках интервальной арифметики будет содержать абсолютно все возможные значения, возникающие при выполнении той же операции с любыми сочетаниями значений из интервалов-операндов.

Применение аппарата интервальной арифметики к задаче метрологического автосопровождения программ вычислений заключается в представлении всех исходных данных, возмущенных погрешностью, интервалами вместо действительных чисел. Чтобы

такой переход мог быть осуществлен в полной мере и без искажений конечного результата вычислений, необходимо, чтобы алгебраические свойства арифметики интервалов повторяли алгебраические свойства арифметики действительных чисел. В противном случае есть риск «заплатить» за метрологическое автосопровождение внесением дополнительных погрешностей в конечный результат вычислений, искажением физического смысла выполняемых арифметических преобразований или иными нежелательными последствиями.

Основные свойства классической алгебры интервалов по Р. Муру следующие. Сложение и умножение в интервальной арифметике обладают свойствами коммутативности и ассоциативности. Существуют нейтральные элементы операций сложения и умножения, но отсутствуют обратные элементы у операций сложения и умножения интервалов.

Важным свойством интервальной арифметики является отсутствие дистрибутивности [Г.34]. Если Z – интервал, то $X \cdot (Y + Z) \subseteq X \cdot Y + X \cdot Z$. Действительно, пусть $X = [2; 3]$, $Y = 1 = [1; 1]$, $Z = -1 = [-1; -1]$, тогда $X \cdot (Y + Z) = [2; 3] \cdot ([1; 1] + [-1; -1]) = [2; 3] \cdot [0; 0] = [0; 0]$ в то время как $X \cdot Y + X \cdot Z = [2; 3] \cdot [1; 1] + [2; 3] \cdot [-1; -1] = [2; 3] + [-3; -2] = [-1; 1]$.

Таким образом, многие свойства действительных чисел отсутствуют. *«Платой» за это при выборе интервальной арифметики в качестве инструмента метрологического автосопровождения является то, что оценка трансформированной погрешности оказывается очень часто завышенной.*

Отсутствие учета взаимосвязей между величинами, множество допускаемых значений которых описано интервалами, является значительным недостатком метода, препятствующим его непосредственному использованию для анализа трансформированной погрешности [Г.97]. Недостатки интервальной арифметики не сказываются, если функция \tilde{f} линейно зависит от своих аргументов: в этом случае результаты промежуточных вычислительных операций не будут коррелированы друг с другом. Поэтому классическую интервальную арифметику зачастую используют вместе с линеаризацией вычисляемой функции.

Интервальная арифметика не привлекает никаких сведений о характере распределений внутри интервалов и поэтому не позволяет получать вероятностные характеристики, требуемые при работе со случайными погрешностями.

К сегодняшнему дню разработано значительное количество библиотек и приложений, позволяющих осуществлять интервальные вычисления в рамках самых разных языков программирования. Среди них могут быть названы, например, INTLAB [Г.98, Г.99], COSY [Г.100, Г.101], FILIB [Г.102, Г.103]. Многие из них дополняют и развивают классическую интервальную арифметику с целью улучшить результаты ее применения для разных частных задач и ситуаций. Достаточно полный перечень этих библиотек представлен в [Г.104]. Общим вопросам реализации интервальной арифметики посвящена подробная работа [Г.105].

После того, как стали понятны перечисленные выше ограничения интервальной арифметики, появилось большое количество ее расширений и модификаций, направленных на то, чтобы уменьшить степень завышения результатов интервальных вычислений. Из числа существующих методов стоит отметить арифметику обобщенных интервалов

Хансена [Г.106], арифметику Тейлоровых интервальных расширений [Г.107] и аффинную арифметику [Г.108].

Покажем, что из перечисленных подходов аффинная арифметика в наибольшей степени близка к реализации метрологического автосопровождения.

Пусть $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ – реализованная программой математической обработки функция вычислений, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ – результаты прямых измерений, являющиеся исходными данными расчетов, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_k}$ – предельные значения их абсолютной погрешности. Аффинная арифметика предлагает для оценки предельного значения трансформированной погрешности величины \tilde{y} заменять в вычислениях действительные числа $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ на обобщенные интервалы вида $X_i = \tilde{x}_i + \Delta_{x_i} \cdot \varepsilon_i$, где \tilde{x}_i – центральное значение интервала, ε_i – фиктивная переменная, принимающая значения из интервала $[0, 1]$ и поставленная в соответствие погрешности значения \tilde{x}_i . Линейные операции с такого рода интервалами вводятся как

$$Y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot X_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \Delta_{x_i} \cdot \varepsilon_i \text{ для всех } \alpha_i \in R. \quad (\text{Г.3.1})$$

При промежуточных вычислениях символы ε_i не имеют численного значения, а лишь указывают на источник погрешности для значения промежуточного результата. Коэффициент перед символом ε_i указывает на возможные пределы составляющей погрешности, вызванной i -ым источником погрешности.

В случае если необходимо перейти от обобщенного интервала к классическому, необходимо положить все ε_i равными интервалам $[-1; 1]$ и выполнить преобразования по правилам классической интервальной арифметики: $Y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \Delta_{x_i} \cdot \varepsilon_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \Delta_{x_i} \cdot [-1, 1] = [\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \tilde{x}_i - \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot \Delta_{x_i}, \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot \Delta_{x_i}]$.

Вводимая в аффинной арифметике операция сложения является коммутативной и ассоциативной. Существует нейтральный элемент операции. Операция вычитания может быть введена как обратная операция к сложению, чего не было в классической интервальной арифметике. Следовательно, для линейных операций имеют место основные свойства арифметики действительных чисел.

Это приводит к разрешению проблемы учета взаимосвязей между величинами, множество допускаемых значений которых описано интервалами. Как следствие, *аффинная арифметика во многих ситуациях позволяет оценить интервал возможных значений результата вычислений существенно лучше, чем классическая интервальная арифметика*. За это улучшение приходится, правда, расплачиваться тем, что *при применении аффинной арифметики длительность вычислений по сравнению с классической интервальной арифметикой ощутимо увеличивается*.

Помимо линейных операций с обобщенными интервалами другие операции в рамках аффинной арифметики не вводятся. В рамках подхода предлагается заменять операции умножения и деления обобщенных интервалов их оптимальными аффинными приближениями и вводить в рассмотрение дополнительные источники погрешности $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots$, соответствующие ошибке аффинной аппроксимации [Г.108]. То же самое касается функциональных преобразований и значений элементарных функций. Такой подход приводит к завышению результатов вычислений (порой весьма значительному),

которое в среднем всё равно остается меньшим, чем при использовании классической интервальной арифметики.

Таким образом, аффинная арифметика, по сути дела, представляет собой сочетание линеаризации вычисляемой функции с возможностью автоматического контроля погрешности от нелинейности. Есть примеры практического применения данного математического аппарата для метрологического автосопровождения программ вычислений [Г.110]. Среди интервальных арифметик аффинную арифметику можно назвать наиболее близко соответствующей ожиданиям от реализации метрологического автосопровождения.

Существует ряд программных библиотек, реализующих аффинную арифметику на языках C/C++ и Java. Среди них следует отметить Libaa [Г.111, Г.112], Libaffa [Г.113], aaflib [Г.114, Г.115], YalAA [Г.116, Г.117] и java-aa [Г.118].

Важным недостатком интервальных арифметик и их расширений является невозможность удовлетворительно оперировать в их рамках со случайными погрешностями. Это вызвано тем обстоятельством, что математический аппарат исчисления интервалов не учитывает распределения значений погрешности внутри интервалов ее возможных значений. В частности, при использовании интервальной арифметики усреднение результатов многократных измерений, возмущенных только случайными погрешностями, не приводит к уменьшению интервала неопределенности среднего, как должно было бы в соответствии с теорией вероятностей.

Г.3.2 Метод оценки на основе исчисления эллипсоидов

Аффинной арифметике близок по своим основным свойствам метод на основе исчисления эллипсоидов, развитый в работах [Г.84]. Его назначением также является учет линейных зависимостей между результатами промежуточными вычислений. Отличием между подходами является то, что если для интервальных арифметик погрешности $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ исходных данных расчета должны быть ограничены интервалами $|\Delta x_1| \leq \Delta_{x_1}, |\Delta x_2| \leq \Delta_{x_2}, \dots, |\Delta x_k| \leq \Delta_{x_k}$, то для эллипсоидального подхода – эллипсоидом $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \cdot \Delta x_i^2 \leq c$, где все $\alpha_i \in R$.

Эллипсоидальные оценки естественным образом возникают в ряде задач [Г.118], в которых информация о погрешности $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ значений исходных данных представлена не предельными ее значениями для каждого входного аргумента, а совместным ограничением сразу для всех них [Г.119]. Данный подход идеологически близок к аффинной арифметике и обладает сходными достоинствами и недостатками.

Исчисление эллипсоидов позволяет охарактеризовать границы многомерной области, содержащей все возможные совместные значения исходных данных расчета (то есть характеризует границы совместного их распределения). Данное обстоятельство указывает на то, что исчисление эллипсоидов (в той же мере, что и аффинная арифметика) позволяет учесть естественные взаимосвязи между результатами промежуточных вычислений, что позволяет лучше оценить интервал возможных значений конечного результата.

Исчисление эллипсоидов включает в себя теоретико-множественные операции (объединение, пересечение и т. д.), арифметические действия, а также правила построения аппроксимирующих эллипсоидов для областей другой формы. Соответствующие правила

представлены в работе [Г.120] и в руководстве к [Г.121] и достаточно громоздки для краткого представления в рамках данного обзора.

Как и в случае аффинной арифметики, отметим, что возникают сложности с выполнением нелинейных операций: результаты нелинейных преобразований эллипсоидов не являются эллипсоидами. Для сохранения унифицированного вида результатов промежуточных вычислений приходится прибегать к построению их эллипсоидальных приближений (что приводит к завышению характеристик погрешности конечных результатов).

Арифметика операций с эллипсоидами сложна и трудности преодоления этого обстоятельства для измерительных задач не всегда окупаются получаемыми результатами ее применения. На сегодняшний день наиболее системно и полно исчисление эллипсоидов реализовано в библиотеке [Г.121] для математического пакета Matlab, сравнительно редко используемого в метрологической практике.

Интервальные методы и эллипсоидальный подход принципиально не позволяют учитывать характер распределения погрешности внутри областей их возможных значений, поскольку работают только с границами этих областей. Данное обстоятельство ограничивает их применимость в современной метрологической практике, поскольку плохо соотносится с действующими метрологическими нормами и рекомендациями.

Г.3.3 Арифметика гистограмм

Существуют подходы к метрологическому автосопровождению программ вычислений с неточными данными, построенные на предположении, что характер погрешности является случайным. Среди таких подходов – арифметика гистограмм [Г.122].

Данный подход явился результатом попыток исследователей ускорить работу метода Монте-Карло. Во многих задачах нет возможности оперировать со значительными выборками, а выборки малого объема не позволяют приемлемо оценить закон распределения результата вычислений. Арифметика гистограмм предполагает выполнение вычислений напрямую с самими случайными величинами.

Суть подхода арифметики гистограмм заключается в замене вычислений с действительными числами на точно такие же вычисления со случайными величинами, закон распределения которых оценен гистограммой. В итоге конечному результату вычислений также сопоставляется гистограмма, оценивающая его закон распределения.

Пусть некоторой случайной погрешности поставлена в соответствие гистограмма H , представляющая собой набор $H = \{I_i, p_i\}_{i=1}^{i=m}$ интервалов $I_i = [a_i, b_i)$ и вероятностей p_i того, что эта случайная погрешность примет значение, лежащее в их пределах. Как правило, требуется, чтобы соседние интервалы граничили: $a_{i+1} = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Операции с гистограммами выполняются следующим образом [Г.123]. Пусть заданы гистограммы $H_1 = \{I_{1i}, p_{1i}\}_{i=1}^{i=m_1}$ и $H_2 = \{I_{2j}, p_{2j}\}_{j=1}^{j=m_2}$, соответствующие независимым случайным величинам. Тогда результат арифметической операции $\circ \in \{+, -, \times, \backslash\}$ между ними есть гистограмма $H_3 = H_1 \circ H_2 = \{I_{3k}, p_{3k}\}_{k=1}^{k=m_3}$, получаемая следующим образом.

Вначале вычисляется Декартово произведение множеств интервалов, соответствующих гистограммам H_1 и H_2 . Каждый его элемент строится как интервал $I'_{3i,j} = I_{1i} \circ I_{2j} = \{x_1 \circ x_2: x_1 \in I_{1i}, x_2 \in I_{2j}\}$. Этому интервалу $I'_{3i,j}$ ставится в соответствие

вероятность $p'_{3i,j} = p_{1i} \cdot p_{2j}$. Далее пользователю необходимо задать набор интервалов $\{I_{3k}\}_{k=1}^{k=m_3}$, определяющих компоненты гистограммы H_3 , и затем сопоставить им вероятности p_{3k} по правилу $p_{3k} = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \frac{L[I_{3k} \cap I'_{3i,j}]}{L[I'_{3i,j}]} \cdot p'_{3i,j} = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \frac{L[I_{3k} \cap (I_{1i} \circ I_{2j})]}{L[I_{1i} \circ I_{2j}]} \cdot p_{1i} \cdot p_{2j}$, где $L[I]$ – длина интервала I , а $I_1 \cap I_2 = \{x: (x \in I_1) \wedge (x \in I_2)\}$ – общая часть интервалов I_1 и I_2 .

Подобное введение арифметических операций с гистограммами подразумевает независимость выражаемых ими случайных погрешностей.

Функциональные преобразования над гистограммами могут быть определены схожим образом.

Говорить об алгебраических свойствах арифметики гистограмм в общем случае бессмысленно, поскольку конечный результат зависит от выбора того или иного набора полос, сопоставляемых гистограмме – результату операции $H_3 = H_1 \circ H_2$. Чтобы придать арифметике завершённый вид, можно положить, что результату арифметических операций сопоставляется гистограмма с фиксированным числом полос возможно одинаковой ширины или одинаковой высоты.

Получаемые с помощью арифметики гистограмм оценки носят приближенный характер. Гистограмма H_3 результата операции тем точнее приближает действительный закон распределения вероятностей соответствующей ей случайной величины, чем большее число полос взято в рассмотрение у гистограмм H_1 и H_2 . При этом с ростом их числа значительно увеличивается время, затрачиваемое на вычисления [Г.124].

Работу с арифметикой гистограмм можно проиллюстрировать на примере операций с гистограммами H_1 и H_2 , состоящими из малого числа полос, например, трех, равной длины. Пример гистограмм представлен на рисунке Г.3.1.

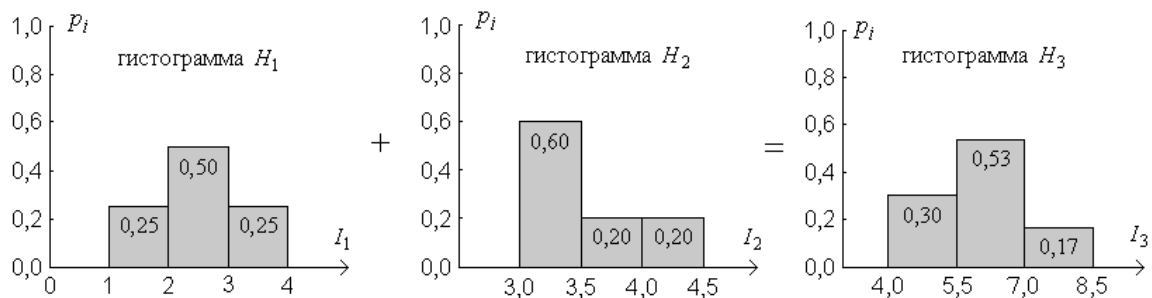


Рисунок Г.3.1 – Пример операции сложения в арифметике гистограмм

Результат операции $H_3 = H_1 \circ H_2$ строится так же, как и гистограмма из трех полос равной ширины. Тогда для таких H_1 и H_2 , что представлены на рисунке Г.3.1, может быть составлена таблица Г.3.1 границ интервалов $I'_{3i,j}$, получаемых при Декартовом перемножении компонент гистограмм-операндов.

Минимальное значение среди границ интервалов $I'_{3i,j}$ есть 4,0, максимальное – 8,5. Соответственно в качестве компонент гистограммы H_3 результата сложения следует взять $I_{3_1} = [4,0; 5,5]$, $I_{3_2} = [5,5; 7,0]$ и $I_{3_3} = [7,0; 8,5]$. С интервалом $I_{3_1} = [4,0; 5,5]$ полностью совпадает интервал $I'_{3_{1,1}} = [4,0; 5,5]$, пересекается на $\frac{2}{3}$ интервал $I'_{3_{1,2}} = [4,5; 6,0]$ и

пересекаются на $\frac{1}{3}$ интервалы $I'_{3_1,3} = I'_{3_2,1} = [5,0; 6,5]$. Следовательно, полосе I_{3_1} должна быть сопоставлена вероятность $p_{3_1} = 1 \cdot 0,15 + \frac{2}{3} \cdot 0,05 + \frac{1}{3} \cdot 0,05 + \frac{1}{3} \cdot 0,30 = 0,30$. Аналогично получается, что $p_{3_2} = \frac{8}{15}$ и $p_{3_3} = \frac{1}{6}$.

Таблица Г.3.1 – Сложение гистограмм H_1 и H_2 , представленных на рисунке Г.3.1

индексы (i, j)	I_{1_i} и p_{1_i}	I_{2_i} и p_{2_i}	$I'_{3_{i,j}}$ и $p'_{3_{i,j}}$
$i = 1, j = 1$	$[1; 2]$ и 0,25	$[3,0; 3,5]$ и 0,60	$[4,0; 5,5]$ и 0,15
$i = 1, j = 2$	$[1; 2]$ и 0,25	$[3,5; 4,0]$ и 0,20	$[4,5; 6,0]$ и 0,05
$i = 1, j = 3$	$[1; 2]$ и 0,25	$[4,0; 4,5]$ и 0,20	$[5,0; 6,5]$ и 0,05
$i = 2, j = 1$	$[2; 3]$ и 0,50	$[3,0; 3,5]$ и 0,60	$[5,0; 6,5]$ и 0,30
$i = 2, j = 2$	$[2; 3]$ и 0,50	$[3,5; 4,0]$ и 0,20	$[5,5; 7,0]$ и 0,10
$i = 2, j = 3$	$[2; 3]$ и 0,50	$[4,0; 4,5]$ и 0,20	$[6,0; 7,5]$ и 0,10
$i = 3, j = 1$	$[3; 4]$ и 0,25	$[3,0; 3,5]$ и 0,60	$[6,0; 7,5]$ и 0,15
$i = 3, j = 2$	$[3; 4]$ и 0,25	$[3,5; 4,0]$ и 0,20	$[6,5; 8,0]$ и 0,05
$i = 3, j = 3$	$[3; 4]$ и 0,25	$[4,0; 4,5]$ и 0,20	$[7,0; 8,5]$ и 0,05

Предположим, что гистограммы H_1 и H_2 на рисунке Г.3.1 полностью совпадают с оцениваемыми ими законами распределения $\phi_1(\Delta_1)$ и $\phi_2(\Delta_2)$. Тогда в соответствии с теорией вероятностей точному результату операции сложения $H_1 + H_2$ должен соответствовать закон распределения $\phi_3(\Delta_3)$, являющийся сверткой H_1 и H_2 : $\phi_3(\Delta_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(\Delta_1) \cdot \phi_2(\Delta_3 - \Delta_1) d\Delta_1$. Соответственно на его основе могут быть вычислены точные значения вероятностей $p_{3_1} = \int_{4,0}^{5,5} \phi_3(\Delta_3) d\Delta_3$, $p_{3_2} = \int_{5,5}^{7,0} \phi_3(\Delta_3) d\Delta_3$ и $p_{3_3} = \int_{7,0}^{8,5} \phi_3(\Delta_3) d\Delta_3$, приведенные в таблице Г.3.2.

Таблица Г.3.2 – Значения величин p_{3_1} , p_{3_2} и p_{3_3}

	p_{3_1}	p_{3_2}	p_{3_3}
точное значение	0,27	0,58	0,15
оценка арифметикой гистограмм	0,30	0,53	0,17

Данные таблицы Г.3.2 показывают, что уже арифметика трехкомпонентных гистограмм может дать вполне приемлемое представление о распределении результата вычислений со случайными величинами.

Отметим основные свойства метода арифметики гистограмм. *Метод позволяет работать со случайными величинами, но плохо учитывает большие отклонения случайной величины от ее математического ожидания.*

Для их учета необходимо большое число полос в гистограммах, что затрудняет вычисления. С другой стороны арифметика гистограмм позволяет избежать чрезмерного завышения оценок трансформированной погрешности для результатов вычислений в случае, если в погрешности исходных данных превалирует случайная составляющая. *Точность приближения распределения итогового результата расчетов зависит от количества полос у гистограмм, принятых к рассмотрению. С ростом числа полос*

трудоемкость расчетов ощутимо повышается (принимаемое количество полос определяется пользователем).

Существует несколько программных реализаций, позволяющих выполнять вычисления в рамках арифметики гистограмм: Statool [Г.124, Г.125] и библиотеки из работ [Г.126-Г.128]. Данные реализации, к сожалению, мало приспособлены для использования в измерительных задачах: они либо представляют собой фрагменты больших библиотек или математических пакетов, либо вовсе представляют собой уже готовые программные приложения, интегрировать которые в метрологически значимые программы затруднительно.

Перед исчислением гистограмм стоит та же проблема учета естественных корреляций, возникающих при промежуточных вычислениях с одними и теми же исходными данными, что и перед классической интервальной арифметикой. Данная проблема, впрочем, может быть преодолена [Г.129] за счет дополнительного усложнения выполняемых расчетов (гистограмм второго порядка). Характер усложнений при этом схож с теми, что имели место при переходе от классической интервальной арифметики к аффинной.

Арифметика операций со случайными величинами может быть построена не только на их плотности вероятности, но и на ее первообразной – интегральной функции вероятности. Такая арифметика получила в литературе название вероятностной арифметики.

Г.3.4 Вероятностная арифметика (p-boxes)

Пусть Δx – случайная погрешность, $F_{\Delta x}(\Delta) = P(\Delta x \leq \Delta)$ – ее интегральная функция распределения, значения которой суть вероятности $P(\Delta x \leq \Delta)$ того, что величина Δx примет значение, меньшее, чем Δ .

В теории строго доказано [Г.62], что функция распределения $F_{\Delta x_3}(\Delta)$ результата сложения или умножения $\Delta x_3 = \Delta x_1 \circ \Delta x_2$, $\circ \in \{+, \times\}$ случайных погрешностей Δx_1 и Δx_2 для всех значений коэффициента корреляции между ними лежит точно между кривыми

$$\underline{I}_o(\Delta) = \sup_{\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2} \{ \max \{ F_{\Delta x_1}(\Delta_1) + F_{\Delta x_2}(\Delta_2) - 1; 0 \} \}, \quad (\text{Г.3.2})$$

$$\overline{I}_o(\Delta) = \inf_{\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2} \{ \min \{ F_{\Delta x_1}(\Delta_1) + F_{\Delta x_2}(\Delta_2); 1 \} \}, \quad (\text{Г.3.3})$$

то есть $\underline{I}_o(\Delta) \leq F_{\Delta x_3}(\Delta) \leq \overline{I}_o(\Delta)$ при всех Δ .

Аналогично показано [Г.62], что если \circ – операция, обратная сложению или умножению (то есть $\circ = -$ либо $\circ = \div$), то тогда при всех Δ для результата операции $\Delta x_3 = \Delta x_1 \circ \Delta x_2$ выполнено неравенство $\underline{I}_o(\Delta) \leq F_{\Delta x_3}(\Delta) \leq \overline{I}_o(\Delta)$, где

$$\underline{I}_-(\Delta) = \sup_{\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2} \{ \max \{ F_{\Delta x_1}(\Delta_1) - F_{\Delta x_2}(\Delta_2); 0 \} \}, \quad (\text{Г.3.4})$$

$$\overline{I}_-(\Delta) = 1 + \inf_{\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2} \{ \min \{ F_{\Delta x_1}(\Delta_1) - F_{\Delta x_2}(\Delta_2); 0 \} \}. \quad (\text{Г.3.5})$$

Приведенные соотношения для операций умножения и деления верны, если Δx_1 и

Δx_2 принимают только положительные значения. В противном случае формулы имеют более сложный вид.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример применения приведенных соотношений. Пусть случайные величины Δx_1 и Δx_2 распределены равномерно на интервале $[1; 2]$. На рисунке Г.3.2 приведена функция распределения $F_{\Delta x_3}(\Delta)$ результата арифметических операций $\Delta x_3 = \Delta x_1 \circ \Delta x_2$ при различных значениях коэффициента корреляции ρ между величинами Δx_1 и Δx_2 . Как видим, кривая $F_{\Delta x_3}(\Delta)$ касается границ области $[I_o(\Delta), \overline{I_o}(\Delta)]$ в разных точках при разных значениях ρ . Это иллюстрирует то обстоятельство, что все точки границ $I_o(\Delta)$ и $\overline{I_o}(\Delta)$ могут оказаться на кривой $F_{\Delta x_3}(\Delta)$.

Таким образом, есть возможность для любых двух интегральных функций распределения $F_{\Delta x_1}(\Delta_1)$ и $F_{\Delta x_2}(\Delta_2)$, соответствующих случайным величинам Δx_1 и Δx_2 , указать область $[I_o(\Delta), \overline{I_o}(\Delta)]$, за границы которой точно не выходит интегральная функция распределения $F_{\Delta x_3}(\Delta_3)$ результата арифметической операции $\Delta x_3 = \Delta x_1 \circ \Delta x_2$. Соответственно нет никаких препятствий и к тому, чтобы указать подобные границы для случая, когда вместо функций $F_{\Delta x_1}(\Delta_1)$ и $F_{\Delta x_2}(\Delta_2)$ заданы области $[F_{\Delta x_1}(\Delta_1), \overline{F_{\Delta x_1}}(\Delta_1)]$ и $[F_{\Delta x_2}(\Delta_2), \overline{F_{\Delta x_2}}(\Delta_2)]$, в которых они лежат.

Действительно, в этом случае функция распределения $F_{\Delta x_3}(\Delta_3)$ результата сложения или умножения $\Delta x_3 = \Delta x_1 \circ \Delta x_2$, $\circ \in \{+, \times\}$ случайных величин Δx_1 и Δx_2 будет проходить в точности между кривыми

$$\underline{F_{\Delta x_3}}(\Delta_3) = \sup_{\Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_2} \left\{ \max \left\{ \underline{F_{\Delta x_1}}(\Delta_1) + \underline{F_{\Delta x_2}}(\Delta_2) - 1; 0 \right\} \right\}, \quad (\text{Г.3.6})$$

$$\overline{F_{\Delta x_3}}(\Delta_3) = \inf_{\Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_2} \left\{ \min \left\{ \overline{F_{\Delta x_1}}(\Delta_1) + \overline{F_{\Delta x_2}}(\Delta_2); 1 \right\} \right\} \quad (\text{Г.3.7})$$

при всех Δ_3 . Если же \circ – вычитание или деление, то значение функции $F_{\Delta x_3}(\Delta_3)$, соответствующей результату операции $\Delta x_3 = \Delta x_1 \circ \Delta x_2$, лежит между значениями

$$\underline{F_{\Delta x_3}}(\Delta_3) = \sup_{\Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_2} \left\{ \max \left\{ \underline{F_{\Delta x_1}}(\Delta_1) - \overline{F_{\Delta x_2}}(\Delta_2); 0 \right\} \right\}, \quad (\text{Г.3.8})$$

$$\overline{F_{\Delta x_3}}(\Delta_3) = 1 + \inf_{\Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_2} \left\{ \min \left\{ \overline{F_{\Delta x_1}}(\Delta_1) - \underline{F_{\Delta x_2}}(\Delta_2); 0 \right\} \right\} \quad (\text{Г.3.9})$$

для всех Δ_3 .

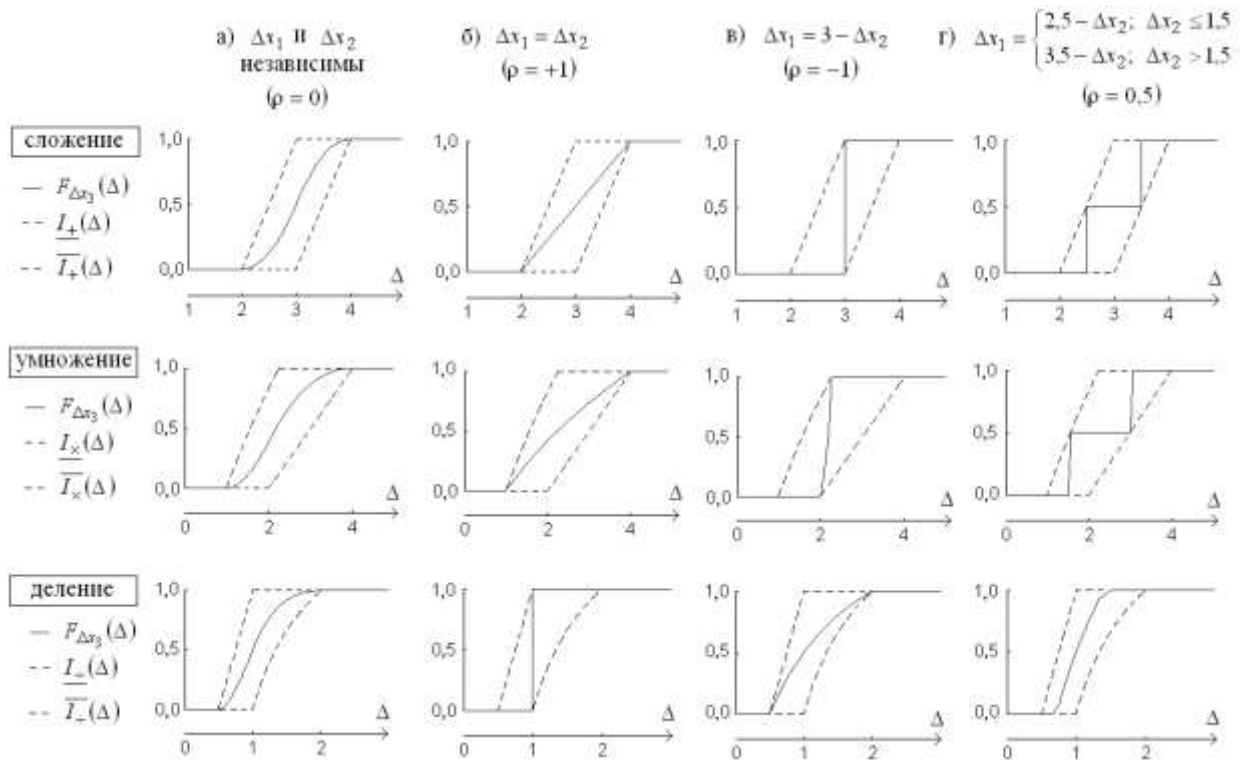


Рисунок Г.3.2 – Результаты выполнения арифметических операций в рамках вероятностной арифметики для двух равномерно распределенных на интервале $[1, 2]$ случайных величин при разных значениях коэффициента корреляции между ними

Таким образом, вероятностная арифметика есть исчисление областей возможных значений для интегральных функций распределения случайных величин. Выполняя с ее помощью математические преобразования с результатами прямых измерений, для каждого промежуточного результата вычислений получим область, в которой гарантированно лежит соответствующая ему интегральная функция распределения вероятности.

В случае, если $F_{\Delta x_1}(\Delta_1)$ и $F_{\Delta x_2}(\Delta_2)$ соответствуют непрерывным случайным величинам, производить операции вероятностной арифметики с ними весьма затруднительно. Поэтому для упрощения вычислений используют приближения, наподобие представленного на рисунке Г.3.3. Таким образом, применение вероятностной арифметики приводит к завышению получаемых характеристик случайной погрешности результатов.

Численное приближение $[F_{\Delta x}(\Delta), \overline{F_{\Delta x}}(\Delta)]$ функции $F_{\Delta x}(\Delta)$ должно быть таково, что $\underline{F_{\Delta x}}(\Delta) \leq F_{\Delta x}(\Delta) \leq \overline{F_{\Delta x}}(\Delta)$ при всех значениях Δ . Область $[F_{\Delta x}(\Delta), \overline{F_{\Delta x}}(\Delta)]$ образована двумя ступенчатыми функциями $\underline{F_{\Delta x}}(\Delta)$ и $\overline{F_{\Delta x}}(\Delta)$, которые можно полностью описать конечным фиксированным числом параметров $\{\Delta_i, \underline{h_i}, \overline{h_i}\}_{i=1}^{i=n}$, представляющим собой координаты и величины скачков. Вероятностная арифметика может быть переформулирована как правила работы с наборами таких параметров, что и проделано в [Г.130].

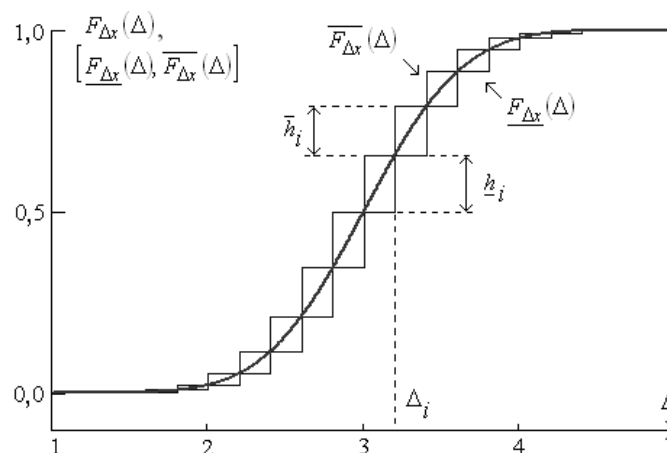


Рисунок Г.3.3 – Замена непрерывной функции распределения $F_{\Delta x}(\Delta)$ областью $[F_{\Delta x}(\Delta), \overline{F_{\Delta x}}(\Delta)]$, задающей ее численное приближение

Для применения вероятностной арифметики и арифметики гистограмм в целях метрологического автосопровождения вычислений необходимо иметь сведения о законе распределения случайной погрешности результатов прямых измерений, как правило, гораздо более обширные, чем представлены в технической документации. Поэтому *наиболее естественной областью применения данных арифметик может служить математическая обработка результатов многократных измерений*, на основе которых гистограммы и области возможных значений для функций распределения случайных погрешностей могут быть заранее оценены или построены [Г.131].

Существенным недостатком вероятностной арифметики является невозможность учесть корреляцию между результатами промежуточных вычислений, что, как и в случае классической интервальной арифметики, в конечном счете приводит к завышению оценок характеристик погрешности. С алгебраической точки зрения данное обстоятельство говорит об отсутствии у вероятностной арифметики дистрибутивности. Схожее замечание имеет место и в отношении арифметики гистограмм. Основным способом избежать влияния данного недостатка является использование линеаризации вычисляемой функции в предположении малости погрешностей исходных данных расчета. Такое упрощение позволяет нивелировать недостатки вероятностной арифметики и арифметики гистограмм и является приемлемым в метрологических целях. В литературе отмечаются попытки совместить вероятностную арифметику с аффинной [Г.132].

Вероятностная арифметика не позволяет одновременно оперировать и со случайными, и с систематическими погрешностями исходных данных.

На сегодняшний день такой библиотеки, что реализовала бы вероятностную арифметику и которую можно было бы использовать для метрологического автосопровождения, в открытом доступе нет. Наиболее полно вероятностная арифметика реализована в коммерческом программном комплексе RAMAS [Г.133] и в авторских библиотеках из работ [Г.126, Г.132], закрытых для стороннего использования.

Выполнение вычислений с формализмом р-box представления неопределенности согласуемых индустриальных данных при нелинейных преобразованиях, свободное от перечисленных выше недостатков, возможно с помощью довольно трудоемких вычислительных схем.

Здесь и в дальнейшем для краткости будет в обозначении областей возможных значений функций распределения случайной погрешности следовать принятому в научной литературе англоязычному термину p -box в силу отсутствия пока устоявшегося русскоязычного аналога. Также для краткости в качестве обозначения функции распределения вероятностей случайной погрешности будет использоваться общеупотребительное в научной литературе сокращение cdf .

Стратегии выполнения вычислений с неточными данными, неопределенность которых описывается с применением аппарата p -boxes, могут быть различными:

- 1) допустимо использовать представленную выше так называемую вероятностную арифметику [Г.62], которая построена на объектно-ориентированном подходе и заключается в аналитическом расширении вычислений над числами действительной оси к вычислениям в алгебре p -boxes путем определения всех основных арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, логические операции) и математических примитивов (аналитическое расширение элементарных функций действительного аргумента или многих действительнозначных аргументов на множество p -boxes или его декартова произведения с самим собой соответствующее количество раз);
- 2) возможно использовать аналитические или полу-аналитические представления, заключающиеся в замене выражений уравнений взаимосвязи между согласуемыми величинами на более простые модели (например, полиномиальные; данный подход не позволяет, правда, задействовать ограничения в виде неравенств и требует алгебраического представления интегро-дифференциальных уравнений, т.е. перехода к их конечно-разностным приближениям).

Недостатком первого из перечисленных подходов является то обстоятельство, что сохраняются все «родовые» недостатки интервальной арифметики: в отсутствие учета внутренних зависимостей в выполняемых вычислениях неопределенность конечного результата расчетов оказывается существенно завышена. Вместе с тем исчисление p -boxes позволяет довольно эффективно получить вероятностные характеристики погрешности результата в виде интерквантильных промежутков с вероятностной мерой $P < 1$. Выполненные в рамках данной научно-исследовательской работы расчеты показывают, что отмеченный выше эффект завышения тем сильнее проявляется, чем ближе значение P к единице. Наконец, при $P=1$ эффект становится полностью тождественен аналогичному для классической интервальной арифметики (IEEE 1788.1-2017 [Г.72]). Подобных результатов в научной литературе в настоящее время не представлено.

Как следствие, первый подход целесообразен при использовании линеаризованных постановок задач – наподобие тех, что были развиты в рамках данной научно-исследовательской работы для оценки потенциально достижимого уточнения данных при применении методов и средств согласования индустриальных данных.

Естественным подходом для учета внутренних взаимосвязей в производимых вычислениях является стохастизация вычислений – по модели методов типа Монте-Карло или путем аналитического расширения классической детерминированной постановки задачи на область случайных процессов, включающих в себя детерминированный случай как предельный частный [Г.134]. Перенос результатов обоих подходов на вычисления в рамках конкретной задачи приводит к необходимости практического осуществления генерации псевдослучайных возмущений исходных данных и анализа получаемых вариаций конечных данных. Вычислительная сложность такой модификации классической

задачи при этом возрастает прямо пропорционально количество генерируемых наборов возмущений исходных данных N , поскольку в равное количество раз увеличивается число обращений к решению той же задачи вычислений, но в классической детерминированной постановке. Для решения данной задачи стохастизации одним из авторов отчета в [Г.135] была предложена следующая двухэтапная схема, к которой с точки зрения наивной практической реализации сводится как первый из описанных подходов, так и второй. В предположении, что все допустимые распределения из p -box равновозможны (фидуциальное распределение возможных cdf равномерно в Фишеровском смысле), осуществляется генерация возможных распределений случайных величин r , чьи cdf $F_r(x)$ целиком лежат внутри p -box $F(x)$, т.е. $F_r(x) \in F(x)$ для всех x . Для снижения общей трудоемкости функция $F_r(x)$ параметризируются либо кусочно-постоянной аппроксимацией $F_r(x) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m 1(x - a_i)$ или кусочно-линейной $F_r(x) = m \cdot$

$$\frac{x - \max_{j: a_j < x} a_j}{\max_{j: a_j < x} a_{(j+1)} - \max_{j: a_j < x} a_j} + \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^m 1(x - a_i) - 1}{2 \cdot m}. \text{ Здесь } 1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} - \text{функция Хевисайда единичного}$$

скачка; значения a_i образуют поле перебора при генерации; указание индекса элементов массива в скобках (\cdot) указывает на вариационный ряд (сортировку элементов массива по возрастанию); количество ступеней m – задаваемый параметр, от величины которого зависит вычислительная трудоемкость процедуры. Моделирование показывает, что m должно быть не меньше значения n количества тех данных, на которых построен p -box или числа ступеней в кусочно-постоянной аппроксимации верхней и нижней его границ. Пусть генерации подлежит M cdf . Указанная процедура повторяется для каждой из k тех входных переменных анализируемой программы, чья область возможных значений охарактеризована с помощью соответствующего p -box. Далее полученные распределения комбинируются для конструирования множества возможных значений входных аргументов анализируемой программы. Число таких комбинаций составляет M^k . Для каждой комбинации функций распределения осуществляется генерация совместной выборки размером N значений в предположении независимости погрешностей аргументов анализируемой программы. В итоге получаем оценку cdf $T_q(x)$ для конечного результата расчетов в виде эмпирической функции распределения или аппроксимации Каплана-Мейера, $q = 1, 2, \dots, M^k$. Границы p -box для конечного результата представляют собой также кусочно-постоянные (кусочно-линейные) функции от x : $\left[\min_q T_q(x), \max_q T_q(x) \right]$.

Общее количество вызовов вычисляемой функции при таком подходе составляет $(M^k \cdot N)$, что накладывает довольно строгие ограничения на возможные значения параметров M и N : так как общее количество вызовов в традиционных подходах типа Монте-Карло при решении интервальных задач на практике имеет порядок $R = 10^3$ итераций [Г.136], то $M^k \cdot N < 10^3$ или $k \cdot \lg M < 3 - \lg N$. Величина m зависит от соотношения времени $t_1(m, k)$ решения задачи сэмпирования одного совместного распределения и длительности t_0 одного вызова анализируемой программы: $t_1(m, k)/t_0 \approx 0,2 \cdot R$ (дополнительно затрачиваемое время должно быть на порядок меньше времени, связанного с работой анализируемой программы).

Такая процедура с вычислительной точки зрения эквивалентна традиционной slicing-модели для решения задач оптимизации в интервальной постановке [Г.137], образованной

тремя этапами: дискретизации (discretization), распространения (propagation) и слияния (merging).

Близкий подход, связанный с заменой процедуры генерации псевдослучайных чисел на использование иных последовательностей чисел при численном моделировании, обеспечивающих сходимость к верному результату, но при этом более высокую, чем при стохастическом подходе метода Монте-Карло, был назван в работе [Г.138] интервальным квази-Монте-Карловский подходом. Его сравнением в вычислительном плане с традиционными схемами взаимодействия с p-boxes, описанными выше, показывает меньшие временные затраты [Г.138], что указывает на выигрыш в вычислительной сложности по сравнению с описанными ранее схемами.

Второй подход, заключающийся в замене выражений уравнений взаимосвязи между согласуемыми величинами на более простые модели, может быть реализован либо с помощью двухэтапной модели работы [Г.137], когда для определения границ итогового p-box происходит замена вычисляемой функции полиномиальной аппроксимацией (довольно трудоемкий – в сравнении с представленной выше схемой стохастизации он позволяет сократить лишь один этап из включаемых в нее трех), либо с помощью универсального подхода, предложенного авторами отчета. Последний оказывается более предпочтителен, поскольку предполагает единый стандартный подход к любым представлениям информации о погрешности входных данных.

В ноябре 2023 г. появилась работа [Г.139], в которой впервые был предложен алгоритм более эффективного и простого решения задачи оценки распространения неопределенности исходных данных, выраженных в форме p-box через программы, реализующие алгоритмы произвольной сложности, нежели описанная двухступенчатая схема. Суть данного подхода после его адаптации к задаче согласования индустриальных данных заключается в предположении, что p-box, соответствующие исходным данным, довольно узки, что сужает область применимости подхода.

Пусть дана функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для каждой входной переменной которой представлен соответствующий p-box $F_i(x_i)$. Требуется построить p-box $G(y)$ (допустимо приближенно) для выходного значения функции f . Для этого предлагается выполнить следующие действия.

1. Все p-box $F_i(x_i)$ представить в виде $[F_i(x_i) - \Delta F_i(x_i), F_i(x_i) + \Delta F_i(x_i)]$, где функции $F_i(x_i) = \text{mid } F_i(x_i)$, т.е. равны полусумме нижней и верхней границ p-box, а функции $\Delta F_i(x_i) = 0,5 \cdot \text{wid } F_i(x_i)$, т.е. равны половине разности верхней и нижней границы p-box.
2. Положив cdf $F_i(x_i)$ за имеющие место в действительности, можно получить функцию распределения для результата y (например, обычным методом Монте-Карло). Обозначим ее за $G(y)$ по аналогии с пунктом 1.

Предположим, что функция $\Delta G(y)$, такая что $G(y) = [G(y) - \Delta G(y), G(y) + \Delta G(y)]$, зависит от $\Delta F_1(x_1), \Delta F_2(x_2), \dots, \Delta F_n(x_n)$ через некоторую зависимость S : $\Delta G(y) = S(\Delta F_1(x_1), \Delta F_2(x_2), \dots, \Delta F_n(x_n))$. Полагая, что p-box довольно узки (и, следовательно, значения $\Delta F_i(x_i)$ довольно малы), можем прибегнуть к локальной линеаризации S : $\Delta G(y) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \Delta F_i(x_{ij})$, где индекс j указывает на заданную дискретизацию p-box, $j = 1, 2, \dots, N$.

3. Сформируем наборы cdf $F_1^{(kt)}(x_{1j}), F_2^{(kt)}(x_{2j}), \dots, F_n^{(kt)}(x_{nj})$ для всех $j = 1, 2, \dots, N$ так, что $F_{i'}^{(kt)}(x_{i'j}) = \begin{cases} F_{i'}(x_{i't}), i' \neq k, \\ \underline{F}_k(x_{kj}), i' = k, j \leq t, \text{ для } k = 1, 2, \dots, n, \text{ для } t = 1, 2, \dots, N \text{ и для } i' = 1, 2, \dots, n, \\ \overline{F}_k(x_{kj}), i' = k, j > t, \end{cases}$
4. С помощью метода Монте-Карло определяется значение ΔG_{kt} , которое
5. Определяем оценки коэффициентов a_{kt} как $a_{kt} = \frac{\Delta G_{kt} - \Delta G_{k(t-1)}}{2 \cdot \Delta F_k(x_{kt})}$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$ и $t = 1, 2, \dots, N$.
6. Решаем оптимизационную задачу $\Delta G(y) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \rightarrow \max$ при следующих условиях:
 $-\Delta F_i(x_{ij}) \leq \Delta_{ij} \leq \Delta F_i(x_{ij})$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, N$;
 $(x_{ij}) + \Delta_{ij} \leq F_i(x_{i(j+1)}) + \Delta_{i(j+1)}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, N$,

Полученный результат является оценкой р-бокс для результатов расчетов. Вычислительная сложность данного алгоритма на порядок ниже описанных выше (произведен отказ от итерирования по двум или трем вложенным циклам, сложность алгоритма сведена к линейной зависимости времени от размера задачи). Была выполнена реализация данного метода для практического использования.

Г.3.5 Арифметика нечетких интервалов

Погрешности $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ результатов прямых измерений $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$, являющихся аргументами программы \tilde{f} , в наиболее общем случае складываются из составляющих, отличающихся друг от друга характером проявления: систематических составляющих $\Delta_{\text{сист}}x_1, \Delta_{\text{сист}}x_2, \dots, \Delta_{\text{сист}}x_k$ и случайных составляющих $\Delta_{\text{случ}}x_1, \Delta_{\text{случ}}x_2, \dots, \Delta_{\text{случ}}x_k$. Данные составляющие должны обрабатываться по соответствующим им правилам.

Пусть в качестве примера функция \tilde{f} представляет собой среднее арифметическое результатов многократных измерений одной и той же физической величины: $\tilde{y} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i$. При этом известно, что средство измерения, с помощью которого выполнены измерения, имеет значимые случайную и систематическую составляющие инструментальной погрешности. Из технической документации известно, что $|\Delta_{\text{сист}}x_i| \leq \Delta_{\text{сист}}$ и с вероятностью, не меньшей чем P , $|\Delta_{\text{случ}}x_i| \leq \Delta_{\text{случ}}$ для всех i . В этом случае для результата вычислений \tilde{y} справедливы соотношения $|\Delta_{\text{сист}}y| \leq \Delta_{\text{сист}}$ и с вероятностью, не меньшей чем P , $|\Delta_{\text{случ}}y| \leq \frac{\Delta_{\text{случ}}}{\sqrt{k}}$, отражающие тот факт, что усреднение уменьшает случайную составляющую погрешности и оставляет без изменения систематическую составляющую. Представленные оценки при этом не могут быть улучшены без привлечения дополнительной информации.

Если в качестве модели составляющих погрешности любой из величин \tilde{x}_i выбрать интервалы $[-\Delta_{\text{сист}}, \Delta_{\text{сист}}]$ и $[-\Delta_{\text{случ}}, \Delta_{\text{случ}}]$ и воспользоваться для их обработки интервальной арифметикой, то для результата вычислений по указанной программе \tilde{f} будут получены следующие оценки составляющих трансформированной погрешности: $|\Delta_{\text{сист}}y| \leq \Delta_{\text{сист}}$ и $|\Delta_{\text{случ}}y| \leq \Delta_{\text{случ}}$. Оценка для систематической составляющей погрешности совпадает с наилучшей, оценка же для случайной составляющей оказывается значительно завышенной. При этом приходится оперировать не с одним, а с парой интервалов.

Если в качестве модели случайной погрешности каждой из величин \tilde{x}_i выбрать гистограмму и в вычислениях использовать арифметику гистограмм, то для случайной составляющей $\Delta_{\text{случ}}$ у трансформированной погрешности может быть достигнута наилучшая оценка. С другой стороны, нет возможности рационально представить сведения о случайной составляющей погрешности и о предельных значениях ее систематической составляющей с помощью одной гистограммы. Поэтому гистограммный подход для метрологического автосопровождения пригоден не в полной мере. Такое же замечание справедливо и для вероятностной арифметики.

Таким образом, *представленные в обзоре выше способы описания погрешностей не дают возможности одновременно оперировать со случайными и систематическими составляющими погрешности, что препятствует их использованию в целях метрологического автосопровождения.*

В литературе известны работы, направленные на объединение нескольких формализмов представления погрешности [Г.119, Г.140]. Однако на их основе необходимый для метрологического автосопровождения аппарат построить не удастся (такое объединение позволяет уменьшить завышение оценок погрешности результатов вычислений, но не позволяет добиться возможности одновременной работы и с систематической, и со случайной погрешностями). Помимо упомянутых в обзоре способов описания известны также и другие подходы, в частности функции доверия Демпстера-Шейфера [Г.141], подход неточных вероятностей [Г.142] и другие. В работе [Г.143] показано, что перечисленные методы с практической точки зрения эквиваленты друг другу и эквивалентны аппарату нечетких переменных. В рамках последнего подхода есть простая возможность получить аппарат, позволяющий работать и с систематической, и со случайной составляющими погрешности, что необходимо для достижения метрологического автосопровождения программ вычислений.

Для целей метрологического автосопровождения нет необходимости в контроле закона распределения случайной составляющей погрешности, нужна лишь ее интервальная характеристика. Поэтому необходимо построить исчисление интервалов возможных значений для систематической составляющей погрешности и для случайной составляющей погрешности. С такой точки зрения наиболее удобным для выражения полной погрешности Δx_i способом оказывается понятие нечеткого интервала ее допускаемых значений [Г.144] и соответствующей ему функции принадлежности.

Нечетким интервалом предельного значения погрешности является такой интервал, который содержит предел допускаемых значений систематической и случайной погрешностей, причем границы его размыты. Каждому возможному значению его границы поставлено в соответствие число от 0 до 1, указывающее на степень принадлежности этого значения нечеткому интервалу для предельной погрешности. Рассмотрим, в какой степени такая конструкция отвечает метрологическим требованиям и позволяет выразить неопределенность неточных исходных данных при реализации метрологического автосопровождения вычислений с ними.

Предел $\Delta_{\text{случ}}$ интервальной характеристики случайной составляющей погрешности функционально связан с величиной доверительной вероятности P , с которой случайная погрешность не выходит за границы интервала $[-\Delta_{\text{случ}}, \Delta_{\text{случ}}]$. С увеличением значения P растет значение величины $\Delta_{\text{случ}}$. Если $P = 0$, то $\Delta_{\text{случ}} = 0$. Конкретный вид взаимосвязи

$\Delta_{\text{случ}} = \Delta_{\text{случ}}(P)$ во многом определяется использованным методом оценки величины $\Delta_{\text{случ}}$ при метрологической аттестации средства измерений.

Поскольку известно, что систематическая составляющая погрешности с вероятностью $Q = 1$ не превысит значения $\Delta_{\text{сист}}$, можно утверждать, что полная погрешность не превысит значения $\Delta_{\text{полн}}(P) = \Delta_{\text{сист}} + \Delta_{\text{случ}}(P)$ с вероятностью $P \cdot Q = P$.

Если взять несколько значений $P_1 < P_2 < \dots < P_m$ величины доверительной вероятности P , то получим наборы значений пределов $\Delta_{\text{случ}}(P_1) \leq \Delta_{\text{случ}}(P_2) \leq \dots \leq \Delta_{\text{случ}}(P_m)$ и соответственно $\Delta_{\text{полн}}(P_1) \leq \Delta_{\text{полн}}(P_2) \leq \dots \leq \Delta_{\text{полн}}(P_m)$, представленные на рисунках Г.3.4а, Г.3.4б.

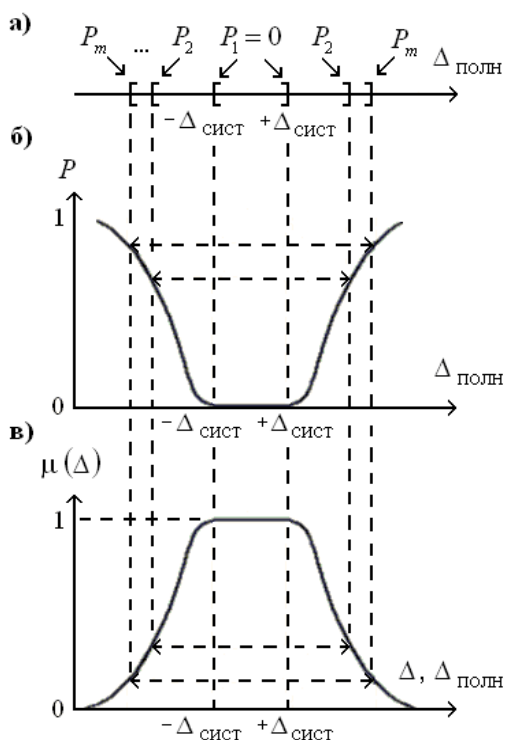


Рисунок Г.3.4 – Построение функции принадлежности нечеткого интервала

С одной стороны, в условиях ограниченных сведений о метрологических характеристиках результатов прямых измерений мы можем быть уверены, что интервал возможных значений их полной погрешности не может быть уже интервала допускаемых значений для ее систематической составляющей. С другой стороны величина, на которую первый интервал шире второго, зависит от случайной составляющей погрешности и носит вероятностный характер. Степень расширения границ этого интервала связывается с той или иной доверительной или, вообще говоря, субъективной вероятностью, которую принято именовать уровнем доверия. Данные соображения легко могут быть перенесены на термины функции принадлежности, что иллюстрирует рисунок Г.3.4в.

Если каждому интервалу $[-\Delta_{\text{полн}}(P), \Delta_{\text{полн}}(P)]$ сопоставить значение $\alpha = 1 - P$, то получившаяся кривая $\alpha = \alpha(\Delta_{\text{полн}})$ будет соответствовать определению функции принадлежности $\alpha = \mu(\Delta)$ некоторого нечеткого интервала, который будем считать отражающим сведения о полной погрешности. Кривая $\mu(\Delta)$ имеет вид криволинейной трапеции, верхнее основание которой отражает сведения о систематической составляющей погрешности, а боковые стороны несут информацию о случайной составляющей.

Функция принадлежности $\mu(\Delta)$ нечеткого интервала может быть построена на основе субъективных соображений, она не обязательно определяется из статистической информации, полученной опытным путем. Кривая $\alpha = \mu(\Delta)$ может отражать плохо формализуемые априорные сведения о характере погрешности или быть получена на основе экспертных оценок. Таким образом, аппарат нечетких интервалов имеет более широкую сферу применимости в метрологии, чем классические теоретико-вероятностные подходы.

Если вслед за [Г.144] в качестве функции $\alpha = \mu(\Delta)$ выбрать криволинейную трапецию, боковые стороны которой суть левая и правая половины кривой Гаусса, как на рисунке Г.3.5, то тогда всю функцию принадлежности можно описать с помощью всего двух действительных чисел: $\{\Delta_0, \sigma\}$.

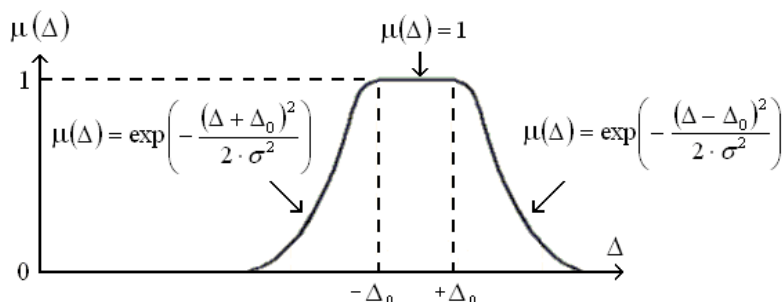


Рисунок Г.3.5 – Пример функции принадлежности нечеткого интервала.

Для работы с нечеткими интервалами могут быть заданы различные правила арифметических операций, выбор которых определяется конкретной решаемой задачей. Представленной выше интерпретации погрешности нечетким интервалом в наибольшей степени близки следующие общеупотребительные правила.

Пусть $\mu_1(\Delta_1)$ и $\mu_2(\Delta_2)$ – две функции принадлежности нечетких интервалов, соответствующих погрешностям Δx_1 и Δx_2 . Тогда результату $\Delta x_3 = \Delta x_1 \circ \Delta x_2$ арифметической операции \circ с ними будет соответствовать функция принадлежности $\mu_3(\Delta_3) = \sup_{\Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_2} \{\mu_1(\Delta_1) \cdot \mu_2(\Delta_2)\}$ [Г.145]. Результату $\Delta x_3 = c \cdot \Delta x_1$ умножения на постоянный коэффициент c сопоставляется функция принадлежности $\mu_3(\Delta_3) = \mu_1(c \cdot \Delta_1)$.

Правила работы с нечеткими множествами (с нечеткими интервалами в том числе) могут быть заданы неединственным образом, необязательно так, как представлено выше. Обоснованный выбор правил арифметических действий зависит от решаемой задачи и от требуемых результатов. В работах [Г.146, Г.147] показано, что приведенный вариант в наибольшей степени соответствует задаче метрологического автосопровождения.

Если $\mu_1(\Delta_1)$ и $\mu_2(\Delta_2)$ имеют вид, как на рисунке Г.3.5, то тогда они могут быть представлены наборами параметров $\{\Delta_{01}, \sigma_1\}$ и $\{\Delta_{02}, \sigma_2\}$. Арифметические операции с нечеткими интервалами могут быть сведены к операциям с данными параметрами. Результату $\Delta x_3 = \Delta x_1 \pm \Delta x_2$ сложения или вычитания погрешностей Δx_1 и Δx_2 будет соответствовать функция принадлежности с параметрами $\{\Delta_{01} + \Delta_{02}, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\}$. Функции принадлежности результата $\Delta x_3 = c \cdot \Delta x_1$ умножения на постоянный множитель c погрешности Δx_1 будут сопоставлены параметры $\{|c| \cdot \Delta_{01}, |c| \cdot \sigma_1\}$. При этом для перечисленных операций вид функции принадлежности результата будет по-прежнему как на рисунке Г.3.5.

Как видим, операции с параметрами повторяют хорошо известные в метрологии правила работы с пределами систематических погрешностей и правила работы со среднеквадратическими отклонениями случайных погрешностей.

Если вернуться к примеру оценки характеристик погрешности среднего арифметического результатов многократных измерений одной и той же физической величины, то может быть получен следующий результат.

Пусть в качестве модели полных погрешностей $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ результатов прямых измерений $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ выбраны нечеткие интервалы, функции принадлежности которых заданы параметрами $\{\Delta_{\text{сист}}, \Delta_{\text{случ}}/2\}$, где $\Delta_{\text{сист}}$ – предел допускаемых значений систематической составляющей каждой из погрешностей Δx_i , $i = 1, 2, \dots, k$; $\Delta_{\text{случ}}$ – предел допускаемых значений их случайной составляющей с доверительной вероятностью $P = 0,90$. Тогда полной погрешности Δy среднего арифметического $\tilde{y} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i$ окажется сопоставлена функция принадлежности с параметрами $\{\Delta_{\text{сист}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \Delta_{\text{случ}}/2\}$. Если теперь восстановить из функции принадлежности пределы систематической $\Delta_{\text{сист}} y$ и случайной $\Delta_{\text{случ}} y$ составляющих погрешности Δy , то окажется, что $|\Delta_{\text{сист}} y| \leq \Delta_{\text{сист}}$ и с вероятностью, не меньшей чем P , $|\Delta_{\text{случ}} y| \leq \Delta_{\text{случ}}/\sqrt{k}$. Таким образом, получаются оптимальные оценки для трансформированной погрешности среднего арифметического.

Операция усреднения приводит к уменьшению размытости границ нечеткого интервала и приближает его к классическому интервалу (рисунок Г.3.6), что в полной мере согласуется с классическими представлениями метрологии.



Рисунок Г.3.6 – Функция принадлежности нечеткого интервала, соответствующего трансформированной погрешности среднего арифметического

Таким образом, естественная интерпретация погрешности нечеткими интервалами, позволяет одновременно работать как с систематической, так и со случайной составляющими погрешности, и соответствует требованиям метрологического автосопровождения. Получаемые результаты в случае линейных операций с исходными данными являются точными, завышения нет.

Важным недостатком исчисления нечетких интервалов является то обстоятельство, что нелинейные операции с ними в рамках приведенных арифметических правил отклоняют форму функции принадлежности результата от представленной на рисунке Г.3.5. В связи с этим для получения замкнутого аппарата приходится прибегать к построению аппроксимаций, так же как это имело место в исчислении эллипсоидов. Исчисление нечетких интервалов, как и классическая интервальная арифметика, не обладает свойством дистрибутивности и не позволяет в полной мере учитывать

естественные корреляции при промежуточных расчетах. Преодолеть данное обстоятельство можно также с помощью линеаризации.

Исчисление нечетких интервалов представляет собой частный случай вычислений с нечеткими множествами, для которых разработано существенное количество программных библиотек для разных языков программирования (см., например, [Г.104]). При их применении можно выбрать правило задания арифметических действий, что указано в настоящем пункте обзора, и задать надлежащую форму функции принадлежности. Тем самым будет реализовано исчисление нечетких интервалов. Существует также библиотека [Г.148], которая содержит только арифметику нечетких интервалов и потому справляется с вычислениями быстрее.

Представленные в разделе положительные свойства исчисления нечетких интервалов справедливы только при линейных операциях, перенести их на нелинейные действия с интервалами не представляется возможным. В качестве выхода из этой затруднительной ситуации представление погрешности нечеткими интервалами можно дополнить локальной линеаризацией вычисляемой функции.

Г.4 ПРОЦЕДУРА МЕТРОЛОГИЧЕСКИ ОБОСНОВАННОГО ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗА ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ

Перед решением задачи учета априорной информации о взаимосвязях между измеряемыми величинами следует провести предварительный анализ целесообразности этого учета. Оставив в стороне безусловно важные экономической факторы – выгоду от повышения точности и издержки, связанные с ее достижением, рассмотрим проблему с точки зрения метрологии. Основная цель учета функциональных зависимостей между значениями измеряемых величин – уточнение результатов прямого или косвенного измерения. Следовательно, главная характеристика, которую необходимо оценить, – достигаемая степень повышения точности или, что то же самое, достигаемая степень сужения интервала неопределенности для оценок значений искомых взаимосвязанных величин.

Неопределенность численного приближения искомой величины (под «численным приближением» подразумевается либо результат измерения, либо результат, полученный с учетом априорной информации о взаимосвязях) обусловлена неопределенностью априорной и измерительной информации, задействованной для получения этого приближения.

В разделе описан реализованный в библиотеке метод экспресс-оценки степени повышения точности k , основанный на подходе, подразумевающем разделение алгоритма условной оптимизации (*согласования данных по заданной модели*) на под-алгоритмы – отыскания оптимального решения на множестве совместных измерений и согласовании полученных точечных оценок между собой по модели, применяемые последовательно. Также описана методика метрологического анализа результатов непараметрического согласования результатов совместных измерений – оценки степени уточнения, достигаемого за счет учета отклонения действительного закона распределения погрешностей от нормального (обычное допущения в случае параметрических методов согласования).

Г.4.1 Процедура экспресс-оценки меры неопределенности результатов согласования неточных данных

Реализованная в библиотеке процедура экспресс-оценки неопределённости результатов измерения следующая обобщенная методика предварительного метрологического анализа измерительной ситуации, допускающей учет взаимосвязи между измеряемыми величинами (методика приведена для случая одного уравнения взаимосвязи и системы уравнений):

1) Формализуем априорную информацию о зависимости между значениями подлежащих измерению величин в виде алгебраического уравнения

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0, \quad (\text{Г.4.1})$$

либо системы

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \mathbf{0}, \quad (\text{Г.4.2})$$

где $\mathbf{R} = (r_1, r_2, \dots, r_m)^T$ – вектор-функция, элементы которого являются достаточно гладкими функциями (настоящее относится и к r);

$\mathbf{0}$ – вектор-столбец, заполненный нолями;

вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ содержит подлежащие измерению величины;

вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ содержит параметры уравнения взаимосвязи;

для случая системы уравнений вектор $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$ состоит из m векторов параметров, входящих в данный функционал уравнений.

2) Если планируемый измерительный эксперимент предполагает многократное совместное измерение взаимосвязанных величин \mathbf{x} , то тогда для каждой из измеряемых величин рассчитываем численное приближение ее значения по полученным результатам измерений

$$y_i = EV(\hat{\mathbf{x}}_i), i = 1, 2, \dots, N. \quad (\Gamma.4.3)$$

где EV – выбранный алгоритм оценки значения величины x_i по результатам $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \dots, \hat{x}_{in})^T$ ее многократного измерения;

n – число многократных измерений.

При однократном совместном измерении следует принять:

$$y_i = \hat{x}_i, i = 1, 2, \dots, N. \quad (\Gamma.4.4)$$

3) При необходимости (если применение EV это подразумевает) пересчитываем погрешности $\Delta_{\hat{x}_i}$ измерения величин x_i в погрешности Δ_{y_i} оценок y_i .

При однократном совместном измерении:

$$\Delta_{y_i} = \Delta_{\hat{x}_i}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (\Gamma.4.5)$$

4) Выбираем величину, потенциал уточнения результатов измерения которой требуется оценить; обозначим эту величину как x_j , где j – индекс этой величины в векторе $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, состоящем из измеряемых величин.

5) Рассчитываем коэффициент k_j потенциального уточнения выбранной величины (обозначим ее как x_j) по формуле

$$k_j = \sqrt{1 + \frac{\Delta_{y_j}^2}{\Delta_{M_{лн}j}^2}}, \quad (\Gamma.4.6)$$

где $\Delta_{M_{лн}j}$ – оценка предельной погрешности расчета величины x_j по результатам измерений взаимосвязанных с ней величин $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{N-1})$, в линейном приближении равная:

– для случая единственного уравнения взаимосвязи $r(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$

$$\Delta_{M_{\text{лн}j}}^2 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial r(x_j, x'_1, \dots, x'_{N-1}, a_1, \dots, a_k)}{\partial a_i} / \frac{\partial r(x_j, x'_1, \dots, x'_{N-1}, a_1, \dots, a_k)}{\partial x_j} \right)^2 \cdot \Delta_{a_i}^2 + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial r(x_j, x'_1, \dots, x'_{N-1}, a_1, \dots, a_k)}{\partial x'_i} / \frac{\partial r(x_j, x'_1, \dots, x'_{N-1}, a_1, \dots, a_k)}{\partial x_j} \right| \cdot \Delta_{y'_i}. \quad (\text{Г.4.7})$$

– для случая системы уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$:

$$\Delta_{M_{\text{лн}j}}^2 = \text{tr}(\Sigma_{\text{лн}j}^{-1})^{-2} \cdot \text{tr}(\Sigma_{\text{лн}j}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{\text{лн}j}^2 \cdot \Sigma_{\text{лн}j}^{-1}), \quad (\text{Г.4.8})$$

где $\mathbf{D}_{\text{полн}j}$ – квадратная диагональная матрица, главная диагональ которой заполнена пределами погрешностей $\Delta_{\text{лн}j1}, \Delta_{\text{лн}j2}, \dots, \Delta_{\text{лн}jm}$ результатов измерений, представляющими собой решение системы

$$\begin{cases} \Delta_{\text{лн}j1} = \sqrt{\left(\frac{\partial r_1(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_1)}{\partial x_j} \right)^{-2} \cdot \sum_{i=1}^{k+N-1} \left(\frac{\partial r_1(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_1)}{\partial z_i} \right)^2 \cdot \Delta_{z_i}^2}, \\ \dots \\ \Delta_{\text{лн}jm} = \sqrt{\left(\frac{\partial r_m(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_m)}{\partial x_j} \right)^{-2} \cdot \sum_{i=1}^{k+N-1} \left(\frac{\partial r_m(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_m)}{\partial z_i} \right)^2 \cdot \Delta_{z_i}^2}. \end{cases} \quad (\text{Г.4.9})$$

Δ_{zi} – i -ый элемент вектора $\Delta_{\mathbf{z}} = (\Delta_{\mathbf{y}'}, \Delta_{\mathbf{a}})$;

$\text{tr}()$ обозначает операцию вычисления следа матрицы.

Значения $\Delta_{\mathbf{a}}$ представляют собой пределы абсолютной погрешности параметров уравнения/уравнений взаимосвязи (если неточностью модели пренебрегают, то $\Delta_{a_i} = 0, i = 1, 2, \dots, k$). Величины \mathbf{x}' представляют собой прочие величины, измеряемые помимо уточняемого значения x_j , а значения $\Delta_{\mathbf{y}'}$ – пределы погрешности полученных в п. 3 оценок этих величин.

б) Если это необходимо, вычисляем интервал I_{k_j} возможных значений k_j :

$$k_{j1,2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\Delta_{y_j}^2} \left(\left(1 \pm \frac{\delta_{\Delta_{Mj}}}{100\%} \right) \cdot \Delta_{Mj} \right)^2}, \quad (\text{Г.4.10})$$

$$I_{k_j} = \{ \min(k_{j1,2}), \max(k_{j1,2}) \}. \quad (\text{Г.4.11})$$

где $\delta_{\Delta_{Mj}}$ – ожидаемая неучтенная нелинейность $r(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}) = 0$, либо $r(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, относительно уточняемого x_j в области $\mathbf{x}' \pm \Delta_{\mathbf{x}'}, \mathbf{a} \pm \Delta_{\mathbf{a}}$.

В первом приближении мера нелинейности $\delta_{\Delta_{Mj}}$, %, может быть задана исходя из общих соображений о характере функциональной связи между измеряемыми величинами.

Точное значение величины $\delta_{\Delta_{Mj}}$ формально определено как

$$\delta_{\Delta_{Mj}} = \frac{\Delta_{Mj} - \Delta_{M_{\text{лн}j}}}{\Delta_{Mj}} \cdot 100\%, \quad (\text{Г.4.12})$$

где Δ_{Mj} – погрешность оценки x_j по результатам измерения x'_1, \dots, x'_{N-1} , рассчитанная с учетом нелинейности функционала взаимосвязи.

7) Если получаемый интервал I_{kj} не позволяет принять решение о целесообразности учета взаимосвязи между величиной x_j и прочими измеряемыми величинами, значит, нелинейность функционала связи относительно x_j слишком велика: предлагаемый метод предварительного метрологического анализа в данном случае неприменим.

8) Если это необходимо повторяем алгоритм п. 4 – п. 7 для каждой измеряемой величины, входящей в вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$, потенциал уточнения результатов измерения которой необходимо оценить.

Аналогично выполняется оценка для случая, когда погрешности результатов согласуемых совместных измерений определены через дисперсии: пределы погрешностей в представленных выражениях заменяются стандартными отклонениями согласуемых результатов прямых измерений взаимосвязанных величины.

Основное преимущество данной методики – вычислительная простота при достаточной достоверности получаемых результатов. Оценки погрешностей результатов согласования взаимосвязанных величин между собой, а также степень достигаемого в результате согласования уточнения могут быть получены без проведения объемного статистического эксперимента. При этом с алгоритмической точки зрения представленная методика достаточно проста: стандартные арифметические операции требуется дополнить только процедурой численного дифференцирования.

Г.4.2 Оценка потенциального дополнительного уточнения результатов согласования за счет учета отклонения действительного закона распределения погрешностей от нормального

Рассмотрим модель на основе разложения плотности распределения случайных погрешностей в ряды на примере ряда Грама-Шарлье (как наиболее часто встречающегося на практике). В этом случае отклонения закона распределения $\phi(\tilde{\mathbf{X}})$ погрешностей результатов измерений $\tilde{\mathbf{X}}$ от нормального могут быть описаны следующим образом.

Пусть измерению подлежат значения величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, которые изменяются согласованно. Взаимосвязи их значений описываются математической моделью M , состоящей из уравнений $\mathbf{f}_M(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{f}_M = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$ – вектор-функция. Пусть $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ суть результаты многократного измерения величин x_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Здесь $\tilde{\mathbf{x}}_j^T = (\tilde{x}_{j1}, \tilde{x}_{j2}, \dots, \tilde{x}_{jn})^T$, $\tilde{x}_{jk} = x_j + \varepsilon_{jk}$, а ε_{jk} есть случайная погрешность k -го результата измерения величины x_j .

Для оценки эффективности согласования следует определить, насколько значения \mathbf{x}_j^* окажутся точнее оценок $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)^T$ измеряемых значений \mathbf{x} , полученных лишь на основании результатов $\tilde{\mathbf{X}}$ их прямых многократных измерений. Оценкой качества согласования выступают, как правило, отношения вида

$$q_j^2 = \frac{n \cdot \text{Var}(\hat{x}_j)}{\sum_{k=1}^n \text{Var}(x_{jk}^*)}, \quad (\text{Г.4.13})$$

где чем значение q_j больше, тем большей степени уточнения можно добиться, используя согласование.

В качестве значения \hat{x}_j выступает эффективная оценка центра закона распределения, которому подчиняются результаты многократных измерений \tilde{x}_j . Как следствие, значение $\text{Var}(\hat{x}_j)$ определяется из асимптотик метода максимального правдоподобия через информацию Фишера.

Для того, чтобы принять во внимание отличие закона распределения $\varphi(\tilde{X})$ погрешностей результатов измерений \tilde{X} от нормального, можно использовать два подхода: – когда оценки $\hat{x}_j = \hat{x}_j^{pr}$ строятся параметрически для установленного заранее закона распределения $\varphi(\tilde{X})$,

– когда выполняется непараметрическое оценивание $\hat{x}_j = \hat{x}_j^{npr}$, справедливое для произвольного закона $\varphi(\tilde{X})$.

Каждый из этих способов будет характеризоваться разной степенью достигаемого уточнения. Для получения оценки снизу на степень потенциального уменьшения погрешности используем оценки $\hat{x}_j = \hat{x}_j^{pr}$, характеризующиеся наименьшей дисперсией в силу своей эффективности. Тогда получаем, что

$$q_{j[s]}^2 = \frac{\text{Var}(\hat{x}_j^{[s]})}{\text{Var}(\hat{x}_j^{pr}) \left(1 + \frac{\text{Var}(\hat{x}_j^{pr})}{\text{Var}(\tilde{x}_{jk}^{pr})} \right)^2 + \text{Var}(\tilde{x}_{jk}^{pr}) \left(1 + \frac{\text{Var}(\tilde{x}_{jk}^{pr})}{\text{Var}(\hat{x}_j^{pr})} \right)^2}, \quad (\text{Г.4.14})$$

где в качестве идентификатора $[s]$ следует подставлять pr (для параметрических оценок) или npr (для непараметрического случая соответственно).

Для оценки дисперсии $\text{Var}(\hat{x}_j^{npr})$ предлагается использовать неравенство Крамера-Рао (при соблюдении условий регулярности и несмещенности \hat{x}_j^{npr})

$$\text{Var}(\hat{x}_j^{npr}) \geq I_n^{-1}(\hat{x}_j^{npr}), \quad (\text{Г.4.15})$$

где $I_n(x_j)$ – информация по Фишеру.

Пусть искомые величины x_j выступают в качестве параметров сдвига плотностей $\varphi_j(\hat{x}_j^{npr}, \theta)$ распределения оценок \hat{x}_j^{npr} , где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ – прочие параметры распределения.

Поскольку случайные погрешности результатов многократных измерений реализуются независимо, но подчинены одному закону, то

$$I_n(\hat{x}_j^{npr}) = -E \left[\frac{\partial^2 L_j(\hat{x}_j^{npr}, \theta)}{\partial \mu_j^2} \right], \quad (\text{Г.4.16})$$

где $L_j = \sum_{k=1}^n \ln \varphi_j(\hat{x}_{jk}^{npr}, \theta)$ – логарифмическая функция правдоподобия;

E – оператор вычисления математического ожидания;

μ_j – математическое ожидание результатов измерения \tilde{x}_j (в случае систематических погрешностей может не совпадать с x_j).

Непараметрические подходы основываются на той или иной процедуре оценки распределения φ_j , позволяющей охватить широкое семейство возможных распределений. В качестве алгоритма построения оценки плотности распределения φ_j использован проекционный метод, заключающийся в приближении φ_j ее усеченным рядом Грама-Шарлье.

Пусть в качестве опорной плотности φ_{0j} , относительно которой выполняется разложение в ряд, выбран нормальный закон. Обозначим для краткости $\text{Var}[\tilde{x}_{jk}]$ как σ_j^2 . Ограничимся при разложении в ряд Грама-Шарлье лишь первым слагаемым. Тогда получим:

$$L_j = \sum_{k=1}^n \ln \varphi_j(\hat{x}_{jk}, \theta) = \sum_{k=1}^n \ln \varphi_{0j}(\hat{x}_{jk}, \theta) + \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{6} \cdot Sk_j \cdot H_3 \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right), \quad (\text{Г.4.17})$$

где Sk_j – коэффициент асимметрии соответствующей плотности φ_j случайной погрешности результатов \tilde{x}_j измерения x_j ;

H_s – полином Эрмита порядка s .

Если принять, что асимметрия мала, $|Sk_j| \ll 1$, то

$$\frac{\partial L_j}{\partial \mu_j} \approx \frac{1}{\sigma_j^2} \cdot n \cdot \bar{x}_j - \frac{1}{\sigma_j^2} \cdot n \cdot \mu_j - \frac{Sk_j}{2 \cdot \sigma_j} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 - 1 \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot Sk_j \cdot H_3 \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right), \quad (\text{Г.4.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_j}{\partial^2 \mu_j} \approx & -\frac{n}{\sigma_j^2} - \frac{Sk_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} - \frac{Sk_j}{6} \cdot \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^4 + \frac{Sk_j}{2} \cdot \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right) - \\ & - \frac{Sk_j^2}{4 \cdot \sigma_j^2} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{\hat{x}_{jk} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{Г.4.19})$$

В силу независимости результатов многократных измерений получаем, что

$$M \left[\frac{\partial^2 L_j}{\partial^2 \mu_j} \right] \approx -\frac{n}{\sigma_j^2} + \frac{Sk_j^2}{6 \cdot \sigma_j^2} \cdot n \cdot (Ku_j - 3) - \frac{Sk_j^2}{4 \cdot \sigma_j^2} \cdot n \cdot (Ku_j - 1), \quad (\text{Г.4.20})$$

где Ku_j – коэффициент эксцесса плотности φ_j случайной погрешности результатов \tilde{x}_j измерения значения x_j .

При необходимости значение степени уточнения, потенциально достижимого за счет непараметрического согласования результатов совместного измерения величин x , может быть приближенно оценено по формуле (Г.4.14). При этом, как было отмечено выше, необходимо в качестве $\text{Var}(\hat{x}_j^{npr})$ использовать оценку по неравенству Крамера-Рао:

$$\text{Var}(\hat{x}_j^{npr}) \geq \left(\frac{1}{\sigma_j^2} - \frac{Sk_j^2}{6 \cdot \sigma_j^2} \cdot (Ku_j - 3) + \frac{Sk_j^2}{4 \cdot \sigma_j^2} \cdot (Ku_j - 1) \right)^{-1} / n. \quad (\text{Г.4.21})$$

Получаемые таким образом оценки потенциального уточнения по состоятельны в той мере, в какой окажется состоятельной оценка плотности φ_j , полученная путем усечения ряда Грама-Шарлье. В той же мере будут состоятельны результаты полу-непараметрического

согласования совместных измерений, выполненное с применением разложения неизвестной плотности распределения случайных погрешностей в усеченный ряд Грама-Шарлье.

Настоящий раздел посвящен реализованным методам метрологического сопровождения процедур вычислений с неточными исходными данными, обеспечивающая автоматический контроль трансформации погрешности исходных данных выполняемых расчетов в погрешность конечных результатов вычислений. Затем представлен обзор существующих методов и подходов, позволяющих реализовать метрологическое сопровождение, отмечены их недостатки и достоинства.

Поскольку погрешности и неопределенности в первую очередь выступают свойством результатов измерений, то в первую очередь соответствующие формализмы их описания должны быть связаны с метрологически значимыми программами [Г.149].

Метрологическое обеспечение измерительных преобразований регулируется в первую очередь Законом РФ «Об обеспечении единства измерений» и созданным в его рамках нормативным обеспечением, в состав которой входит около тысячи государственных стандартов, среди которых отметим ГОСТ 8.009 [Г.150], ГОСТ 8.596 [Г.151]. В этой государственной системе решены вопросы нормирования, контроля и обеспечения сохранности метрологических характеристик измерительных приборов и преобразователей, эксплуатирующихся автономно или в составе сложных средств измерений. Выходные сигналы АЦП вместе с погрешностями, накопленными на всех этапах аппаратных физически реализованных преобразований, поступают в средство вычислений в качестве исходных данных для их обработки. Погрешности исходных данных подвергаются той же обработке, что и сами результаты измерений, и к концу вычислений они преобразуются в *трансформированные* или *наследственные погрешности* [Г.83, Г.152]. Понятно, что кроме них результаты вычислений могут обладать погрешностями, вызванными ошибками при программировании и реже – от дискретного представления чисел. Наличие этих погрешностей может быть установлено при проверке средств измерений и почти полностью устранено корректным программированием.

Если вопросы метрологического обеспечения аппаратных преобразователей в большинстве своем разрешены, то приходится признать, что полный цикл метрологического обеспечения средств измерений, обладающих программным обеспечением, не замкнут. Вопросы нормирования, оценки и контроля характеристик погрешности результатов вычислений, вызванной погрешностями исходных данных, до сих пор не имеет исчерпывающей научной, нормативной и практической метрологической поддержки, несмотря на несколько нормативных документов, созданных в последние годы [Г.149, Г.153, Г.154], и специализированное справочное пособие [Г.155].

В первом из этих документов – ГОСТ Р 8.654 [Г.149] – регламентируются общие требования, которые предъявляются при метрологической аттестации программного обеспечения в составе средств измерения. Существенным является выделение из общего программного обеспечения той его части, которая именуется в п. 1.10 этого стандарта метрологически значимым программным обеспечением. Из этого следует, что метрологическое сопровождение должно относиться только к этой части программного обеспечения. Два других упомянутых документа регламентируют общие требования к метрологической аттестации метрологически значимых программ и защите их от несанкционированного или умышленного редактирования.

Использование метрологически значимого программного обеспечения характерно для разных средств измерений. Вычисления по результатам аналого-цифровых преобразований выполняются не только в измерительных и управляющих системах, но и в современных приборах, осуществляющих прямые и косвенные измерения.

Естественно, что требования к метрологической аттестации сформулированы по отношению к программам, не подлежащим изменениям в процессе эксплуатации. Ясно, что подобным требованиям не будут удовлетворять программы, создаваемые для приборов и систем, предназначенных для исследовательских работ, когда программы обработки данных могут перестраиваться в зависимости от цели и путей научного поиска. Мало того, даже если программы обработки результатов измерений не должны изменяться, но количество измерительных каналов достаточно велико и количество комбинаций значений измеряемых величин вместе с нормами на их погрешности внутри диапазонов измерений разных каналов также значительно, то процедура метрологической аттестации соответствующих программ будет очень трудоемкой. В этой ситуации довольно сложно будет занести в инструкцию по эксплуатации или в техническое описание характеристики, нормирующие погрешности вычислений при всех комбинациях значений измеряемых величин, возможных при реальной эксплуатации средства измерений. Такая норма будет являться сложной функцией многих переменных, неудобной для представления. Дело многократно усложняется, если вычислению подлежит сразу несколько величин. Экспериментальный контроль погрешностей, нормированных таким образом, в сильной степени усложняется.

При метрологической аттестации программного обеспечения для анализа трансформации им погрешностей входных данных международный метрологический документ [Г.156] рекомендует использовать метод Монте-Карло, применение которого также вызывает определенные затруднения. На практике редко когда известно, какое распределение погрешности исходных данных расчета внутри интервалов их возможных значений следует выбрать и каков необходимый объем выборки. Как возможное решение, работа [Г.157] предлагает перечень рекомендуемых распределений при применении метода Монте-Карло, а дополнение [Г.156] к Руководству по выражению неопределенности [Г.158] предлагает выполнять не менее 10^6 статистических испытаний, но ничем это значение не подкрепляет. Учитывая отмеченное выше огромное количество комбинаций значений измеряемых сигналов, при которых надлежит выполнить метрологический контроль и, следовательно, выполнить анализ трансформации погрешности методом Монте-Карло, можно заключить, что применить данную рекомендацию становится попросту невозможно, поскольку задача становится запредельно трудоемкой. Вместе с тем, если нормирована только полная погрешность и не осуществлено выделение систематической и случайной составляющих, то в этом случае возникает возможность обоснованного расчета количества требуемых итераций метода Монте-Карло [Г.136], которое оказывается существенно меньше миллиона повторов, но всё же остается достаточно большим.

Из вышесказанного следует, что метод Монте-Карло оказывается абсолютно непригодным для метрологического автосопровождения метрологически значимого программного обеспечения, поскольку в силу высокой трудоемкости не может быть реализован в реальном времени. В процессе эксплуатации средств измерений метод можно применять либо до, либо после выполнения штатных вычислений. При этом расчеты следует проводить для всех возможных комбинаций входных данных.

Выполненный краткий анализ состояния метрологического обслуживания вычислительных процедур в современных средствах измерений – особенно в многоканальных измерительных системах – показывает, что эта проблема еще требует своего решения. В качестве одного из возможных вариантов предлагается предпринять экспресс-оценку трансформированной (наследственной) погрешности средствами каждой штатной метрологически значимой программы при каждом факте вычисления результата и сообщать пользователю полученные сведения о границах значений погрешности. Идея такой организации программного обеспечения, при которой пользователю автоматически в реальном времени выдается результат оценки погрешности результата вычислений, наследованной от исходных данных, была сформулирована еще в 60–х годах Международной федерацией обработки информации (ИФИП) и отражена в п. 3.7.8 стандарта [Г.159]. С тех пор интерес к этой проблематике и в России, и за рубежом сильно возрос, увеличилось количество журнальных публикаций и научных конференций по вопросам компьютерных вычислений и моделирования по неточным исходным данным. Как уже было отмечено, в отечественной метрологической практике оценку наследственной погрешности результатов вычислений собственными средствами используемых программ удобно было бы назвать *«метрологическим автосопровождением метрологически значимых программ»*. В англоязычной литературе аналогичные исследования относятся, в основном, к вычислительной математике и для их обозначения применяются такие понятия, как *«self-validation»*, *«self-verification»*, *«self-assurance»*, а наиболее точным – *«self-tracking of uncertainty propagation»* или просто *«self-tracking»* [Г.160].

Результатом исследований в этой области явился целый ряд методов, способных в той или иной степени реализовать метрологическое автосопровождение программ. Перечень рассматриваемых в настоящем разделе методов и подходов включает следующие методы:

- интервальная арифметика и ее расширения,
- метод оценки на основе исчисления эллипсоидов,
- арифметика гистограмм,
- вероятностная арифметика,
- представление погрешностей в виде нечетких интервалов и совмещение его с процедурой автоматического дифференцирования.

Настоящий раздел посвящен рассмотрению использованных в библиотеке подходов к описанию погрешностей с метрологических позиций.

Заметим, что кроме трансформированных или наследственных погрешностей результаты вычислений могут обладать погрешностями, порожденными иными причинами, а именно, погрешностями ошибочного или некорректного программирования. Для того, чтобы убедиться в корректности программ вычислений, необходимо в ходе проверки средства измерений осуществлять проверку верности результатов расчетов и выполненной оценки их погрешности при заранее установленных неблагоприятных комбинациях исходных данных. С этой целью уже может быть применен метод Монте-Карло. После успешного выполнения такой проверки кода метрологически значимого программного обеспечения его следует защитить от несанкционированного доступа в соответствии с [Г.153, Г.154].

5.1 Постановка задачи метрологического автосопровождения метрологически значимых программ

Пусть получены результаты прямых измерений $\tilde{x}_1 = x_1 + \Delta x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 + \Delta x_2$, ..., $\tilde{x}_k = x_k + \Delta x_k$ величин x_1, x_2, \dots, x_k , сопровождаемые погрешностями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$, характеристики которых нормированы и определяются экспериментально при поверке или калибровке. Эти данные подвергаются математической обработке. При вычислении результата косвенного измерения y в соответствии с функцией измерений $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ потребитель должен получить не только результат самого измерения $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k) = \tilde{f}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_k + \Delta x_k)$, но и характеристику его погрешности

$$\Delta y = \tilde{f}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_k + \Delta x_k) - f(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (\Gamma.5.1)$$

Последняя по большей части определяется своей трансформированной составляющей. Та же компонента погрешности, что определяется отличием программной реализации \tilde{f} функции f от ее желаемого целевого вида, пренебрежимо мала в случае выполнения корректного программирования. При использовании современных подходов к тестированию и QA в большинстве практических случаев $\tilde{f} \cong f$. Значит, величиной $\|\tilde{f} - f\| \cong 0$ и ошибками округления можно пренебречь. В корректности программирования функций можно убедиться путем тестовых расчетов на модельных исходных данных с известными конечными результатами. В качестве средства поддержки при проверке верности совершаемых расчетов может быть также использован, как это было отмечено выше, метод Монте-Карло.

В реальных метрологических приложениях основной вклад в погрешность результата вычислений вносит, как правило, трансформированная (наследственная) составляющая, предельные значения которой и необходимо оценивать. Грубые ошибки в программном коде, сильно искажающие результаты, как правило, удастся обнаружить на стадии тестирования кода, или же уже на последующих процедурах калибровки и поверки средства измерений при его испытаниях. Возможность присутствия таких ошибок в метрологически значимом программном обеспечении можно считать несущественной, а появление новых ошибок можно проконтролировать проверкой аутентичности кода программного обеспечения. То обстоятельство, что пределы возможной погрешности конечных результатов измерений должны быть выражены числами, содержащими одну, максимум, две значащие цифры, с выполнением округления в сторону увеличения, позволяет не принимать в рассмотрение остальные, менее значимые, составляющие погрешности результатов вычислений.

В измерительной практике нередкой является ситуация, когда функция f , которую надлежит запрограммировать, неизвестна точно и приближенно представлена аппроксимирующей функцией, таблицей или графиком. Тогда результаты работы ее программной реализации \tilde{f} будут нести в себе также методическую составляющую погрешности, вызванную тем, что $\|\tilde{f} - f\| \neq 0$. Оценить ее величину возможно только проведением соответствующих экспериментальных исследований, распространить на которые идеологию метрологического автосопровождения не представляется возможным, поэтому вынесем данную ситуацию за рамки настоящего обзора.

Подытоживая, будем считать, что погрешность результата вычислений y выражается формулой

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_k + \Delta x_k) - f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \\ &= \widetilde{f}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_k + \Delta x_k) - \widetilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_k),\end{aligned}\quad (\Gamma.5.2)$$

отражающей тот факт, что вся погрешность результатов вычислений определяется трансформированием погрешности исходных данных.

Функция f в общем случае может быть достаточно сложна. Например, при выполнении совместных или совокупных измерений результат вычислений может быть многомерным, и хотя бы на одном этапе вычислений придется решать систему уравнений. Соответственно априорная оценка характеристик погрешности Δy на основе аналитического рассмотрения функции f часто может быть затруднительна. Целесообразно выполнять оценку характеристик погрешности автоматически вместе с самим вычислением $\widetilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$. В пользу такого решения говорит и то обстоятельство, что метрологическому контролю подвергается не сама функция f , а ее реализация \widetilde{f} , представленная исходным кодом соответствующей программы, в который могут вноситься изменения и дополнения.

Таким образом, метрологическое автосопровождение программ в составе средств измерений должно быть обязательно применено в ситуациях, когда

- программа обработки является метрологически значимой и в обязательном порядке подлежит метрологической аттестации [Г.153];
- отсутствуют образцовые средства, которые могли бы воспроизвести одну или несколько вычисляемых величин с необходимой и нормированной погрешностью;
- допускается свободное программирование встроенных средств вычислительной техники и (или) использование интеллектуальных средств измерений с адаптивным программным обеспечением с перестраиваемой структурой.

Если образцовые средства (меры) воспроизведения вычисляемых величин имеются, то метрологическое автосопровождение метрологически значимых программ обработки может и не требоваться, поскольку при поверке (калибровке) средств измерений определяются характеристики погрешности обеих процедур: прямых измерений и математической обработки их результатов. Вместе с тем, возможны ситуации, когда таких образцов нет. Например, одной из первых работ, предлагающих подход к реализации метрологического автосопровождения, была статья [Г.161], в которой была рассмотрена задача метрологического сопровождения измерительной системы для контроля качества высокоомных кристаллов кремния. Для поверки системы эталонов не существовало, поэтому программное обеспечение системы подвергалось отдельным метрологическим испытаниям с помощью специально разработанной процедуры.

Понятие «метрологическое автосопровождение программ математической обработки результатов прямых измерений» подразумевает, что характеристики трансформированной (наследственной) погрешности результата обработки должны определяться при *каждом* вычислении быстро и *одновременно* с вычислением самого результата той же программой. В связи с этим процедуры имитационного моделирования погрешностей исходных данных (результатов прямых измерений), требующие многократных вычислений значений функции \widetilde{f} и последующей статистической обработки

результатов, не могут быть применены с целью метрологического автосопровождения программ. Подобные процедуры, важнейшими среди которых являются метод Монте-Карло и метод В. Я. Крейновича [Г.161], основанный на оригинальном использовании распределения Коши для моделирования погрешностей, могут быть корректно применены для априорной или для апостериорной оценки трансформированной погрешности, то есть до или после получения самого результата вычислений \tilde{y} . Упомянутые методы требуют значительного времени для оценки характеристик погрешности Δy для каждого конкретного набора исходных данных $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$. Такая процедура может оказаться очень трудоемкой и не сможет быть применена, как это уже отмечалось, для многих реальных измерительных ситуаций.

Таким образом, имитационное моделирование и метод статистических испытаний не могут быть основой для метрологического автосопровождения метрологически значимых программ и поэтому они не включены в предлагаемый обзор. Вместе с тем, как уже отмечалось, целесообразно их применение для поддержки метрологического автосопровождения при аттестации и сертификации метрологически значимого программного обеспечения [Г.162].

Г.5.2 Автоматическое дифференцирование

Линеаризация функции измерений $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ в области, соответствующей малым отклонениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ значений исходных данных расчета от значений x_1, x_2, \dots, x_k , является общепринятым приемом в метрологии при оценке характеристик погрешности результата вычислений y и закреплена в нормативных документах [Г.163-Г.165]. Как правило, линеаризацию выполняют заменой функции f линейными членами ее ряда Тейлора. Следовательно, данная операция сводится к определению частных производных функции f , являющихся коэффициентами упомянутых линейных членов, а также, по сути, – коэффициентами чувствительности к погрешности исходных данных.

Пусть, как и прежде, $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ – реализованная программой математической обработки функция вычислений, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ – результаты прямых измерений, являющиеся входными аргументами расчетов, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_k}$ – предельные значения их полной абсолютной погрешности. Тогда предел Δ_y абсолютных значений трансформированной погрешности результата вычислений y может быть приближенно оценен по формуле

$$\begin{aligned} \Delta_y &\leq |\tilde{f}(\tilde{x}_1 + \Delta_{x_1}, \tilde{x}_2 + \Delta_{x_2}, \dots, \tilde{x}_k + \Delta_{x_k}) - \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)| \approx \\ &\approx \left| \sum_{i=1}^k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k) \cdot \Delta_{x_i} \right| \leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k) \right| \cdot \Delta_{x_i}, \end{aligned} \quad (\text{Г.5.3})$$

где $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ – значение частной производной функции \tilde{f} по аргументу \tilde{x}_i .

Поскольку оцененное значение Δ_y должно быть округлено в большую сторону до одной, максимум двух значащих цифр, и значения $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_k}$, как правило, малы, приведенная формула в большинстве измерительных задач предоставляет достоверные оценки. Поэтому метрологическое автосопровождение программ вычислений может быть построено на основе этой формулы без существенных потерь в общности.

Приведенная выше формула содержит в своем составе частные производные

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ от реализованной программой функции \tilde{f} , в общем случае неизвестной. Для реализации метрологического автосопровождения при использовании линеаризации ключевым моментом является достоверная оценка значения этих производных. Следовательно, к определению величин $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ должны быть предъявлены те же требования, что были предъявлены к оценке трансформированной погрешности результата вычислений в целом: значения производных должны быть определены *автоматически* и *одновременно* с вычислением значения самой функции \tilde{f} .

Положим для простоты, что функция \tilde{f} зависит только от одного аргумента и, значит, $\tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Наиболее известным способом оценки значения производной $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})$ является метод конечных разностей: $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \approx \frac{\tilde{f}(\tilde{x}+\Delta) - \tilde{f}(\tilde{x})}{\Delta}$. Данный метод требует двукратного вычисления значения функции \tilde{f} и уже потому не полностью удовлетворяет требованиям, выдвинутому к метрологическому автосопровождению.

На значения величины Δ на практике накладываются противоречивые условия: значение $|\Delta|$ должно быть с одной стороны достаточно малым, а с другой – достаточно большим. Действительно, при вычислениях необходимо иметь дело с цифровым представлением вещественных чисел \tilde{x} и $\tilde{x} + \Delta$. Из-за конечности разрядной сетки при малых значениях $|\Delta|$ имеет место равенство $\tilde{x} + \Delta = \tilde{x}$ и, следовательно, в качестве оценки производной получим величину ноль. С другой стороны известно, что отношение $\frac{\tilde{f}(\tilde{x}+\Delta) - \tilde{f}(\tilde{x})}{\Delta}$ оценивает значение производной $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})$ с ошибкой, равной $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \tilde{f}}{d\tilde{x}^2}(\theta) \cdot \Delta$, где $\theta \in [\tilde{x}, \tilde{x} + \Delta]$, если $\Delta > 0$, и $\theta \in [\tilde{x} + \Delta, \tilde{x}]$, если $\Delta < 0$. Таким образом, если величина $|\Delta|$ будет взята достаточно большой, то оценка производной получится грубой. Следовательно, *использование метода конечных разностей требует обоснованного выбора значения величины Δ , поскольку задача численного дифференцирования является некорректной и ее необходимо решать методом регуляризации* [Г.166]. Кроме того, *дифференцирование по конечным разностям грозит существенными ошибками при оценке производных в точках разрыва вычисляемых функций*. Отмеченными недостатками не обладает аппарат автоматического дифференцирования функций в программных кодах.

Есть возможность улучшить метод конечных разностей [Г.167], что позволит адаптировать его к задаче метрологического автосопровождения. Пусть вычисления с действительными числами в программе \tilde{f} заменены на вычисления с комплексными числами. Выберем в качестве величины Δ мнимую величину $i \cdot \alpha$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а α – достаточно малое действительное число. В этом случае выполнено $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \approx \frac{\tilde{f}(\tilde{x}+\Delta) - \tilde{f}(\tilde{x})}{\Delta} = \frac{\tilde{f}(\tilde{x}+i \cdot \alpha) - \tilde{f}(\tilde{x})}{i \cdot \alpha} \approx \frac{\text{Im}(\tilde{f}(\tilde{x}+i \cdot \alpha))}{\alpha}$, где $\text{Im } z$ – мнимая часть комплексного числа z . Таким образом, для оценки производной уже не требуется вычислять разность двух очень близких чисел, как то имело место в классическом методе конечных разностей. Следовательно, величина $|\Delta| = |\alpha|$ может быть выбрана практически сколь угодно малой и оценка производной $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})$ становится сколь угодно точной. *Однократное вычисление значения функции \tilde{f} и отсутствие необходимости заботиться о выборе величины Δ являются основными преимуществами данного метода, называемого методом*

комплексного приращения. Данное обстоятельство может быть проиллюстрировано примерами, представленными на рисунке Г.5.1: видно, что метод комплексного приращения предоставляет почти точную оценку значения производной вычисляемой функции в существенно более широкой полосе значений величины Δ , чем метод конечных разностей. Данное улучшение во многом обусловлено тем, что арифметические действия с комплексными числами имеют те же алгебраические свойства, что и арифметические действия с действительными числами.

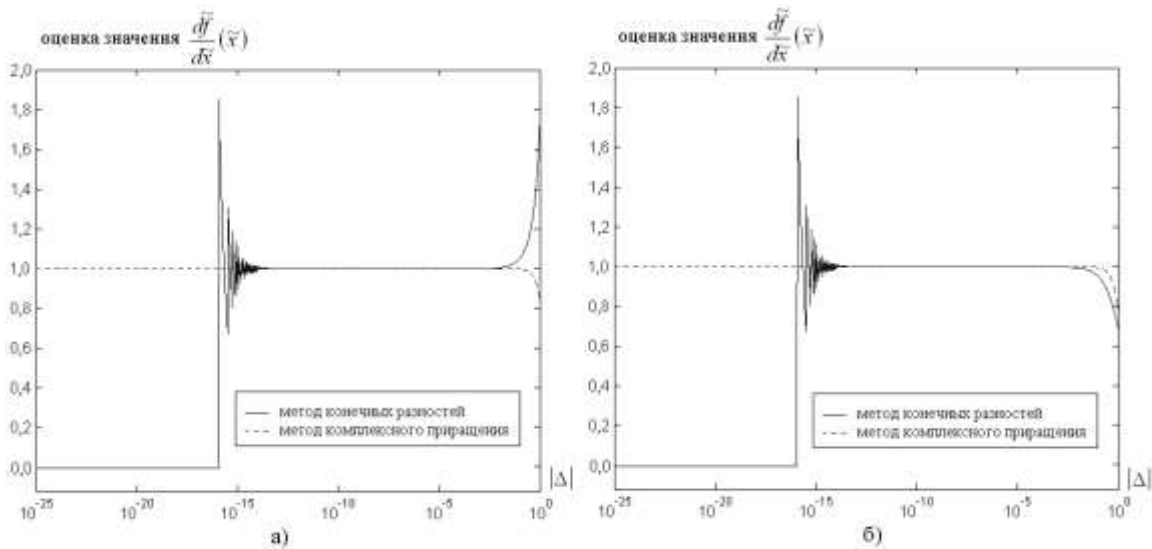


Рисунок Г.5.1 – Значения оценки производной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ методом конечных разностей и методом комплексного приращения при различных значениях величины $|\Delta|$:

$$\text{а) } \tilde{f}(\tilde{x}) = \exp(\tilde{x}), \tilde{x} = 0, \quad \text{б) } \tilde{f}(\tilde{x}) = \ln \tilde{x}, \tilde{x} = 1$$

Таким образом, чтобы воспользоваться методом комплексного приращения в задаче метрологического автосопровождения, необходимо произвести вычисления $y = \tilde{f}(\tilde{x} + i \cdot \alpha)$. Результатом будет комплексное число, действительная часть которого $\text{Re } y \approx \tilde{f}(\tilde{x})$, а мнимая – $\text{Im } y \approx \alpha \cdot \frac{d\tilde{f}(\tilde{x})}{d\tilde{x}}$. Точность данных соотношений обратно пропорциональна величине α .

Вычисления с действительными числами в программе \tilde{f} можно заменить вычислениями с другим видом чисел так, что становится возможным автоматическое получение *точного* значения производной $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})$. Для этого необходимо перейти к арифметике дуальных чисел $z = (a, b)$, представляющих собой упорядоченную пару действительных чисел a и b . Компонента a называется действительной частью z и обозначается $\text{Re } z$, а компонента b – инфинитезимальной частью z и обозначается $\text{Inf } z$.

Операции с дуальными числами вводятся следующим образом. Пусть $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ – два дуальных числа. Тогда арифметические действия с ними заданы

$$\text{сложением } z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$\text{вычитанием } z_1 - z_2 = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2),$$

$$\text{умножением } z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1),$$

$$\text{делением } \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1}{a_2^2} \right), \text{ если } a_2 \neq 0.$$

Все введенные операции \circ с дуальными числами таковы, что $\text{Re}(z_1 \circ z_2) = a_1 \circ a_2$,

откуда следует $Re(\tilde{f}(z)) = \tilde{f}(a)$. Алгебраические свойства арифметики дуальных чисел повторяют все основные свойства арифметики действительных чисел, что позволяет выполнить переход на вычисления с ними без каких-либо ограничений.

Дуальное число $z = (a, b)$ можно представить в виде $z = a + \varepsilon \cdot b$, где a и b – действительные числа, а ε – знак-разделитель между ними, называемый инфинитезимальной единицей. Величина ε не является вещественным числом. В принятых выше обозначениях $\varepsilon = (0, 1)$. Квадрат этого числа соответственно равен $\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (0, 0)$. Следовательно, справедливо равенство $\varepsilon^2 = 0$ при $\varepsilon \neq 0$ [90].

Пусть теперь $\Delta = \varepsilon$. Тогда получаем, что $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{f}(\tilde{x}+\Delta) - \tilde{f}(\tilde{x})}{\Delta} = \frac{\tilde{f}(\tilde{x}+\varepsilon) - \tilde{f}(\tilde{x})}{\varepsilon} = \text{Inf } \tilde{f}(\tilde{x} + \varepsilon)$. Равенство точно, поскольку $R^2 \sim \Delta^2 = 0$ и, значит, ошибка оценки производной такой конечной разностью есть в точности $|R| = 0$.

Таким образом, чтобы воспользоваться рассмотренным методом в задаче метрологического автосопровождения, необходимо произвести вычисления $y = \tilde{f}(\tilde{x} + \varepsilon)$. Результатом будет дуальное число, действительная часть которого $Re y = \tilde{f}(\tilde{x})$, а инфинитезимальная – в точности $\text{Inf } y = \frac{d\tilde{f}(\tilde{x})}{d\tilde{x}}$.

Метод оценки производных на основе замены вычислений с действительными числами на вычисления с дуальными числами называют методом автоматического дифференцирования. Посвященная ему литература достаточно обширна [Г.168].

При необходимости метод автоматического дифференцирования может быть естественным образом расширен для вычислений частных производных и производных высших порядков. При этом растет время, необходимое на выполнение соответствующих вычислений.

Г.5.3 Применение процедуры автоматического дифференцирования в задаче метрологического автосопровождения

Выше отмечалось, что недостатки рассмотренных методов реализации метрологического автосопровождения могут быть нивелированы применением линейаризации. Выше был рассмотрен метод автоматического дифференцирования, позволяющий осуществлять локальную линейаризацию вычисляемой функции при произвольных значениях ее аргументов.

Используя линейаризацию вычисляемой функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$, получаем, что трансформирование программой \tilde{f} погрешностей $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ исходных данных расчета определяется линейной комбинацией $\Delta y \approx \sum_{i=1}^k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k) \cdot \Delta x_i$, коэффициенты которой определяются методом автоматического дифференцирования и представляют собой, по сути дела, коэффициенты чувствительности погрешности Δy результатов вычислений к погрешностям Δx_i входных данных. Выше было выяснено, что в наибольшей степени задачам метрологического автосопровождения соответствует метод автоматического дифференцирования.

Для достижения метрологического автосопровождения необходимо принять ту или иную модель погрешности Δx_i исходных данных, чтобы с ее помощью оценить предельные значения трансформированной погрешности. Выбор интервального описания

погрешностей влечет за собой использование в расчетах интервальной арифметики, выбор описания погрешностей гистограммами – использование в расчетах арифметики гистограмм и так далее. Таким образом, модель погрешности определяет, как в соотношении $\Delta y \approx \sum_{i=1}^k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k) \cdot \Delta x_i$ заданы операции сложения и умножения на коэффициент, от чего в конечном счете зависит оценка величины Δy .

С метрологической точки зрения наиболее удачным способом описания погрешности входных данных является формализм нечетких интервалов. Данный подход при сравнительной простоте имеет метрологическую направленность и позволяет приемлемо работать как с систематической, так и со случайной погрешностями. *Таким образом, совместное применение представления погрешностей в виде нечетких интервалов и автоматического дифференцирования позволяет обеспечить метрологическое сопровождение программ вычислений в полной мере.*

Современные формализмы выражения неопределенности тесно связаны с возможностями их использования в качестве ядерного способа описания при гранулярных вычислениях, когда вычисления ведутся не просто с переменной, имеющей некоторое значение, но сразу и с комплексом сопутствующих ее свойств. В данном разделе было показано, что обстоятельство делает задачу вычислений с ними задачей, которую необходимо рассматривать через призму алгебраических свойств описаний неопределенности и возможности их использования в качестве инструмента метрологического сопровождения вычислений с неточными данными. Задача метрологического сопровождения программ вычислений выдвигает комплекс требований и условий к оценке трансформированной погрешности вычислений. Задача носит алгебраический характер и решается заменой вычислений с действительными числами на вычисления с числовыми объектами другого типа: интервалами, гистограммами, областями возможных значений функций распределения, нечеткими интервалами. Метрологическое сопровождение достигается тем полнее, чем ближе по своим алгебраическим свойствам данная новая арифметика к арифметике действительных чисел.

Все рассмотренные методы могут быть использованы для реализации метрологического сопровождения программ вычислений с неточными данными, но не все – в полной мере. Каждый из подходов позволяет получать сведения о наследственной погрешности всех промежуточных и конечных результатов вычислений с неточными данными, но сопряжен с определенными ограничениями и недостатками. Опыт практического применения представленных в обзоре подходов показывает, что рассмотренные методы можно в первом приближении качественно упорядочить в порядке возрастания времени, затрачиваемого на метрологическое сопровождение программ вычислений с неточными данными, следующим образом: классическая интервальная арифметика, затем арифметика нечетких интервалов в сочетании с автоматическим дифференцированием, затем аффинная арифметика и исчисление эллипсоидов, затем исчисление гистограмм и вероятностная арифметика. Стоит иметь в виду, что данный порядок достаточно условен и может изменяться в зависимости от настроек рассмотренных методов и особенностей их реализации. Кроме того, на удлинении расчетов сказывается то обстоятельство, что данные подходы оперируют с разным количеством информации о неопределенности исходных данных.

По совокупности достоинств и недостатков наиболее удобным способом достичь метрологического сопровождения программ вычислений является совместное применение метода автоматического дифференцирования и метода представления погрешности в виде нечеткого интервала, позволяющего одновременно выполнить линейные операции как с систематическими, так и со случайными погрешностями.

Г.6 УНИКАЛЬНЫЙ СТАНДАРТИЗОВАННЫЙ ПОДХОД К РАБОТЕ С РАЗНЫМИ ФОРМАЛИЗМАМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Г.6.1 Постановка задачи

В 2023 г. были получены новые теоретические результаты [Г.155] в области решения задачи условной оптимизации при выполнении условий Каруша-Куна-Таккера, которые были положены в основу метода синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов. Эти результаты имеют важное приложение для решаемой в рамках календарного плана работ задачи построения универсального алгоритма согласования индустриальных данных. В работе [Г.169] указано, что решение задачи условной оптимизации вида

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\substack{\mathbf{x}: \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \leq r^2}} \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (\text{Г.6.1})$$

достигается оператором вида

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot (1 + \lambda)^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}, \quad (\text{Г.6.2})$$

где n – размер векторов \mathbf{x} и \mathbf{c} ;

$\mathbf{D} = \mathbf{E}_n - \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}$;

\mathbf{E}_n – единичная матрица размером $n \times n$;

$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1}$; множители Лагранжа λ определяются решением квадратного уравнения

$$a \cdot \lambda^2 + h \cdot \lambda + d = 0, \quad (\text{Г.6.3})$$

$$a = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{c} - r^2, \quad (\text{Г.6.4})$$

$$h = 2 \cdot a, d = a + \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}; \quad (\text{Г.6.5})$$

$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}$ – Евклидова норма вектора \mathbf{x} .

Как видим, данное решение учитывает линейные ограничения и ограничения, заданные в форме неравенств, при необходимости легко может быть переписано для случая минимизации функционала в виде $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$, как это проделано в работе [Г.93], но справедливо только для Евклидовой нормы L_2 , взятой в качестве метрики несогласия между согласуемыми величинами (что соответствует согласно условиям оптимальности применения метода наименьших квадратов случая нормального закона распределения случайных ошибок). Соответственно ограничениями данного решения для непосредственного применения в задаче согласования индустриальных данных являются:

- невозможность непосредственного учета нелинейных ограничений,
- невозможность учета отклонений законов распределения от нормального,

Вместе с тем, данные ограничения не являются непреодолимыми. Приведенное в работе [Г.169] доказательство может быть распространено и на случай малых отклонений от Евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$, что как раз позволило бы рассмотреть случай малых отклонений от нормальности. Нелинейные ограничения могут быть в первом приближении

линеаризованы и заменены локально оптимальным линейным приближением в окрестности точки пространства R^n , соответствующей согласуемым результатам измерений.

Будем искать решение задачи условной оптимизации в виде

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\substack{\mathbf{x}: A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \leq r^2}} (\|\mathbf{x}\|_2^2 + \varepsilon \cdot g(\mathbf{x})), \quad (\text{Г.6.6})$$

где $g(\mathbf{x})$ – положительнозначная функция от вектора \mathbf{x} , призванная учесть отклонения распределения от нормальности;

$\varepsilon > 0$ – малая константа.

6.2 Стандартизованный неитерационный подход к работе с разными формализмами представления неопределенности и учетом отклонения действительного закона распределения случайных погрешностей от нормального

Выпишем вслед за [Г.155] функцию Лагранжа для данной задачи:

$$L = (\|\mathbf{x}\|_2^2 + \varepsilon \cdot g(\mathbf{x})) + \lambda_0 \cdot (A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}) + \lambda \cdot ((\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2). \quad (\text{Г.6.7})$$

Необходимыми условиями достижения оптимума в соответствии с условиями Каруша-Куна-Таккера являются равенства нулю всех соответствующих частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2 \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \cdot \frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + A^T \cdot \lambda_0 + 2 \cdot \lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}_n, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}_m, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2 = 0. \end{cases} \quad (\text{Г.6.8})$$

Для пояснения пути решения в первом приближении данных соотношений рассмотрим вырожденный случай безусловной задачи решения уравнения: пусть x_0 – корень уравнения вида $f(x) = 0$, требуется определить корень уравнения вида $f(x) + \varepsilon \cdot g(x) = 0$, где ε – малое число. В силу малости ε будем искать корень в виде небольшой флуктуации значения x_0 , то есть в форме $x_0 + \Delta x$:

$$f(x_0 + \Delta x) + \varepsilon \cdot g(x_0 + \Delta x) = 0, \quad (\text{Г.6.9})$$

$$f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot g(x_0) + \varepsilon \cdot \frac{dg(x_0)}{dx} \cdot \Delta x \approx 0, \quad (\text{Г.6.10})$$

$$\left(\frac{df(x_0)}{dx} + \varepsilon \cdot \frac{dg(x_0)}{dx} \right) \cdot \Delta x \approx -\varepsilon \cdot g(x_0), \quad (\text{Г.6.11})$$

$$\Delta x \approx - \frac{\varepsilon \cdot g(x_0)}{\frac{df(x_0)}{dx} + \varepsilon \cdot \frac{dg(x_0)}{dx}}. \quad (\text{Г.6.12})$$

Аналогичным образом возможно обеспечить уточнение значения решения системы уравнений вида $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, где, как и прежде, \mathbf{F} – вектор-функция векторного аргумента \mathbf{x} , а $\mathbf{0}$ – вектор соответствующего размера, заполненный нулями. Пусть решением данной системы уравнений является вектор \mathbf{x}_0 , а дополнительным малым членом в системе

уравнений выступает вектор-функция $\varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})$, значительная часть компонент которой тождественно равна нулю и где ε – по-прежнему малое число. В силу малости ε будем искать корень в виде небольшой флуктуации значения \mathbf{x}_0 , то есть в форме $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$. Тогда получим, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) + \varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (\text{Г.6.13})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{0}, \quad (\text{Г.6.14})$$

$$\left(\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} + \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \right) \cdot \Delta \mathbf{x} \approx -\varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0), \quad (\text{Г.6.15})$$

Обратим внимание, что, как и ранее, $\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}$ и $\frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}$ являются матрицами Якоби и имеют соответствующий размер (необязательно квадратный). Введем обозначение $\mathbf{Q} = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} + \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}$. Тогда

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \Delta \mathbf{x} \approx -\varepsilon \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0), \quad (\text{Г.6.16})$$

$$\Delta \mathbf{x} \approx -\varepsilon \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0). \quad (\text{Г.6.17})$$

Соответственно решение приведенной выше системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2 \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \cdot \frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + A^T \cdot \lambda_0 + 2 \cdot \lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}_n, \quad (\text{Г.6.18})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}_m, \quad (\text{Г.6.19})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2 = 0. \quad (\text{Г.6.20})$$

становится возможным в виде:

$$\mathbf{x}^{**} = P \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot (1 + \lambda)^{-1} \cdot D \cdot \mathbf{c} + \Delta \mathbf{x}, \quad (\text{Г.6.21})$$

где множитель Лагранжа λ отыскивается в виде выражения

$$\lambda = \Delta \lambda - 1 - \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \mathbf{c}^T \cdot D \cdot \mathbf{c}} \quad (\text{Г.6.22})$$

(знак минус при решении приведенного выше квадратного уравнения определяется условиями теоремы Куна-Таккера для решения задачи условной минимизации). Аналитические добавки $\Delta \mathbf{x}$ и $\Delta \lambda$ определяются из выражения

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} \approx -\varepsilon \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}^*), \quad (\text{Г.6.23})$$

$$\text{где } \mathbf{F} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathbf{x} + A^T \cdot \lambda_0 + 2 \cdot \lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \\ (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon \cdot \left(\frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right)^T \\ \mathbf{0}_{m+1} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} (2 \cdot (1 + \lambda) \cdot E_n, 2 \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c})) \\ (A, \mathbf{0}_m) \\ (2 \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c})^T, 0) \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \left(\frac{dG(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}}, \mathbf{0}_{n+m+1} \right).$$

Все размерности соблюдаются, так как функция $g(\mathbf{x})$ является скалярной (флуктуацией векторной нормы L_2), по этой причине матрица Якоби $dg(\mathbf{x})/d\mathbf{x}$ для нее представляет собой вектор той же длины, что и \mathbf{x} .

Таким образом, удается преодолеть одно из ограничений применения теоретических результатов, полученных в работах [Г.169, Г.170], в задаче согласования промышленных данных. Второе ограничение, связанное с невозможностью в постановке задачи Куна-Таккера заменить линейные условия нелинейными, преодолевается с полученными в рамках данной научно-исследовательской работы соотношениями о зависимости решения системы уравнений от неточности исходных данных. Наконец, неточность уравнений взаимосвязи, накладываемых на согласуемые значения, вводится в полученные соотношения в виде неточности коэффициентов компонент вектора \mathbf{b} . Данные обстоятельства создают возможность для аналитического преобразования задачи согласования промышленных данных к виду, допускающему непосредственные прямые вычисления (straight-forward computing) без необходимости прибегать к решению вычислительных задач итерационными методами, которые неизбежно могут оказываться плохо обусловленными в определенных условиях. Поскольку вектор \mathbf{b} непосредственно входит в полученные соотношения, то влияние отображаемых с помощью его погрешности неопределенностей уравнений взаимосвязи на конечные результаты оказывается возможным учесть непосредственно в рамках традиционной схемы линеаризации. Единственным препятствием для достижения полной общности является групповое выражение ограничений в виде неравенств в виде одного неравенства $(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \leq r^2$. Впрочем, остаются определенные возможности и для преодоления данного обстоятельства. Особенности доказательства теоретического результата работ [Г.169, Г.170], на котором построен приведенный подход, не позволяют задать ограничения-неравенства в произвольном виде, но вполне могут быть обобщены на случай перехода к взвешенной сумме в левой части неравенства: $(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot Y^T \cdot Y \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \leq r^2$. Задание матрицы весов $Y^T \cdot Y$ может быть произведено таким образом, чтобы отношение максимального по модулю собственного числа $Y^T \cdot Y$ к минимальному составило бы заведомо большое значение, позволит превратить ограничение-неравенство из группового в индивидуальное. Другим направлением исследований является рассмотрение ограничений в форме $(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \leq R$, где R уже представляет собой квадратную матрицу. Подобный вариант сопряжен, правда, с некоторыми сложностями соответствия условиям Каруша-Куна-Таккера и возможностью использования подстановки при выводе конечных аналитических выражений, предложенной в работе [Г.169, Г.170].

Первый предложенный подход приводит к следующим модификациям:

$$\mathbf{x}^* = Y^{-1} \cdot P \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot (1 + \lambda)^{-1} \cdot Y^{-1} \cdot D \cdot Y \cdot \mathbf{c}, \quad (\text{Г.6.24})$$

где n – размер векторов \mathbf{x} и \mathbf{c} ;

$D = E_n - A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot A$; E_n – единичная матрица размером $n \times n$;

$P = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$;

множители Лагранжа λ определяются решением квадратного уравнения

$$a \cdot \lambda^2 + h \cdot \lambda + d = 0, \quad (\text{Г.6.25})$$

$$a = \mathbf{b}^T \cdot P^T \cdot P \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \cdot P^T \cdot Y \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot P \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot Y \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot D \cdot Y \cdot \mathbf{c} - r^2, \quad (\text{Г.6.26})$$

$$h = 2 \cdot a, d = a + \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot D \cdot Y \cdot \mathbf{c}; \quad (\text{Г.6.27})$$

$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}$ – как и прежде, Евклидова норма вектора \mathbf{x} .

Отметим, что в случае задания матрицы весов в виде отдельной квадратной матрицы (из условий задачи следует с необходимостью, что обязательно положительно определенной) представление ее в форме $Y^T \cdot Y$ осуществляется путем разложения Холецкого, являющейся стандартной вычислительной задачей.

Таким образом, удастся преодолеть практически все имеющиеся место ограничения, что составляет **прорыв в области Data Reconciliation** – ранее в литературе не было представлено выражений, позволяющих **решить общую задачу согласования данных** (при законах распределения, отличающихся от нормального, при учете неточности согласуемых данных, при учете неточности уравнений взаимосвязи, при накладываемых ограничениях, заданных в том числе в виде неравенств) при довольно слабых допущениях (малость ε , необходимость локальной линеаризации нелинейной вектор-функции уравнений взаимосвязи, переход к алгебраическим уравнениям от интегро-дифференциальных, что в целом является стандартом де-факто при численном решении подобных уравнений). Полученные соотношения открывают новую страницу в области Data Reconciliation: обладая прямыми аналитическими формулами, определяющими результаты согласования, можно осуществлять оптимизацию самой процедуры согласования, что ранее (при численном итерационном характере соответствующих вычислительных процедур) было сделать на порядки сложнее и существенно более трудоемко и только численно. Сейчас же появляется возможность для аналитической оптимизации довольно простых (хоть и громоздких) выражений.

Для придания полученному теоретическому аппарату законченности и замкнутости авторы отчета использовали следующую схему:

- 1) для любого выбранного фреймворка или формализма описания неопределенности согласуемых данных есть возможность выделить носитель возможных значений результата измеряемой величины (предельные возможные границы) – за исключением, быть может, бесконечных r -boxes, на которые вместе с тем может быть наложены внешние ограничения из условий решаемой задачи измерений или математической обработки эмпирических данных, превращающие неограниченные случайные погрешности в ограниченные;
- 2) пользователю предлагается указать, есть ли основания считать присутствующими в данных неисключенные систематические погрешности или таких оснований нет – в первом случае выделенные пределы носят абсолютный характер и формируют границы, в которых в обязательном порядке должны находиться результаты согласования, а во втором случае границы возможных значений должны быть шире;
- 3) задав соответствующее ограничение на носитель в виде неравенства указанного выше вида, пользователь выполняет расчеты по полученной формуле для \mathbf{x}^* или \mathbf{x}^{**} с применением метрологического автосопровождения, учитывающего погрешности

результатов измерений, перенесенные на вектор \mathbf{c} , и погрешности уравнений взаимосвязи, перенесенные на вектор \mathbf{b} – тем самым в конце вычислений у пользователя оказывается результат согласования сразу для всех анализируемых величин (вектор \mathbf{x}^* или \mathbf{x}^{**}), оптимальный по Карушу-Куну-Таккеру, и характеристика его погрешности, унаследованной как от вектора \mathbf{x} , так и от уравнений взаимосвязи; отсутствие нарушения условий оптимальности определяется значением r^2 , которое учитывает возможные отклонения согласованных значений от несогласованных.

Г.7 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ

Основными путями получения согласованных оценок при законах распределения погрешностей, отличающихся от нормального, являлись следующие:

- 1) использование приближений законов распределений на основе разложений в ряд с нормальным законом в качестве референса, коэффициенты которого зависят от основных числовых характеристик распределений (в качестве которых выступают либо моменты, либо кумулянты распределения),
- 2) использование коэффициентов отклонения плотности распределения от нормальности, интегрально связывающие отличия формы реального распределения от кривой Гаусса, с основными характеристиками распределения,
- 3) использование оценок распределения, построенных целиком и полностью на выборочных данных на основе ядерных оценок или областей возможных значений функций распределений (probability boxes), без оценки частных числовых характеристик.

Все перечисленные выше пути решения задачи распространения задачи согласования данных от класса задач с нормально распределенными случайными погрешностями к классу задач с квази-нормально распределенными погрешностями имеют свои преимущества и недостатки, сказывающиеся на областях применения этих подходов и качестве получаемых в конечном счете результатов.

Первый подход в представленном списке основан на использовании разложений плотностей распределения в ряд, сходимость и вид которого зависит от того, какие именно полиномы используются для построения разложения: в ряду Грама-Шарлье используются полиномы Эрмита в так называемой «вероятностной» постановке, в ряду Гаусса-Эрмита – функции Эрмита-Гаусса, в ряду Эджворта используется рекомбинация полиномов Эрмита, могут быть использованы разложения на систем ортогональных полиномов, что обеспечит более высокую сходимость. Использование быстросходящихся рядов, безусловно, обеспечивает более низкую погрешность соответствия реальному распределению, но сопряжено с использованием в составе коэффициентов разложения в ряд моментов и кумулянт распределения высоких порядков, а выборочные оценки этих величин, как известно, сопряжены с большой статистической неопределенностью, тем более высокой, чем выше порядок момента или кумулянта (или, что то же, полу- или семиинварианта). Отмеченное обстоятельство приводит к классической задаче оптимизации для построения компромиссного решения, отвечающего принципу минимума итоговой полной погрешности: в практике обработки результатов измерений сложилось консенсусное мнение о допустимости использования для подавляющего большинства задач только оценок первых четырех моментов или кумулянт (характеризуют математическое ожидание, дисперсию, коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса распределения), из которых старшие два описывают отличие формы плотности распределения от кривой Гаусса. Моменты более высоких порядков используются на практике редко.

Использование разложений плотностей распределения случайных погрешностей в ряды имеет ограничения: при больших отклонениях формы действительного распределения от гауссова обозначенные разложения в ряды могут начать расходиться, в этом случае обозначенное выше усечение рядов лишь до первых нескольких членов носит также и регуляризирующий характер и позволяет получить результат даже в таких условиях (но с меньшей эффективностью). Поскольку восстановление распределения по оцененным

выборочным моментам является некорректной задачей, то данное решение (использование усеченных рядов) обеспечивает достижение отмеченного выше минимума суммарной погрешности.

Второй из рассматриваемых подходов обеспечивает равноценное описание отклонений распределения случайной погрешности от нормальности, в общем случае содержащее также два коэффициента, которые позволяют описать как асимметрию распределения, так и поведение унимодального распределения около его пика. Суть данного подхода заключается в том, что строятся оптимальные линейные приближения к унимодальной функции плотности распределения по обе стороны от его вершины, в ней сходящиеся к друг другу.

Ограничением данного подхода является предположение об унимодальности распределения случайных погрешностей, что хоть и является частой ситуацией на практике, тем не менее реализуется в действительности не всегда.

Г.7.1 Полунепараметрический подход на основе полиномиальной аппроксимации

Второй подход предполагает приближение отклонений закона распределения случайных погрешностей от гауссова с помощью полиномиальных приближений (в базовой случае – в линейном приближении, отдельном для каждого из так называемых хвостов распределения).

Пусть результаты измерений значений величин x_j возмущены погрешностями, имеющими случайный характер и подчиняющимися распределениям $\varphi_j(t)$, близким к нормальному.

Рассмотрим задачу уточнения результатов измерений в случае, если функции f_1, f_2, \dots, f_m системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \end{cases} \quad (\text{Г.7.1})$$

определяющих математическую модель, которой подчиняются измеряемые величины, известны. Пусть выполнено n независимых многократных измерений величин x_j и получены результаты $\hat{x}_{ji}, i = 1, 2, \dots, n$, образующие вектора $\hat{\mathbf{x}}_i^T = (\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \dots, \hat{x}_{iN})$, которые составляют матрицу $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N)$.

Результаты измерений имеют вид

$$\hat{x}_{ji} = \mu_{1j} + \varepsilon_{ji}, \quad (\text{Г.7.2})$$

где ε_{ji} – случайная погрешность, имеющая вне зависимости от индекса j распределение $\varphi_j(t_j)$.

Пусть математические ожидания погрешностей ε_{ji} равны нулю, а среднеквадратические отклонения – σ_j .

Пусть $\varphi_j(t_j)$ мало отличаются от нормального закона распределения. Представим их в виде:

$$\sigma_j \cdot \varphi_j(\sigma_j t_j + \mu_{1j}) = \varphi_0(t_j) \cdot (1 + \alpha_j(t_j)), \quad (\Gamma.7.3)$$

где $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ – стандартный нормальный закон распределения;

α_j – функции малых отклонений от стандартного нормального распределения, $|\alpha_j(t)| \ll 1, j = 1, 2 \dots N$ для всех $t_j = (\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j$.

В результате многократных независимых измерений получим величины x_{ji} , имеющие многомерное распределение

$$P(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}) = \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2}} \left(1 + \alpha_j\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j}\right)\right). \quad (\Gamma.7.4)$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия примет вид

$$\begin{aligned} l(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2}} \left(1 + \alpha_j\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j}\right)\right) \right) = \\ &= -n \sum_{j=1}^N \ln(\sigma_j \sqrt{2\pi}) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j}\right)\right). \end{aligned} \quad (\Gamma.7.5)$$

Максимум функции правдоподобия при оценке значения μ_{1j} находится при том же значении, что и минимум выражения

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j}\right)\right), \quad (\Gamma.7.6)$$

следовательно, оценка действительных значений \mathbf{x}^* может быть определена как

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1^* &= \arg \min_{\boldsymbol{\mu}_1} r(\boldsymbol{\mu}_1, \hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j}\right)\right) \right). \end{aligned} \quad (\Gamma.7.7)$$

Воспользуемся методом множителя Лагранжа, чтобы учесть в оптимизационной задаче взаимосвязи между измеряемыми величинами.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 r(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(\boldsymbol{\mu}_1), \quad (\Gamma.7.8)$$

где в качестве условий f_k выступают m уравнений взаимосвязи;

$\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – множители Лагранжа.

Если у функции Лагранжа есть экстремумы, то ее минимальное значение может достигаться в одном из них. Необходимое условие экстремума функции L может быть записано в виде системы уравнений, представляющих собой частные производные по \mathbf{x} и $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mu_{1j}} = 0, & j = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial L(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} = 0, & k = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (\Gamma.7.9)$$

После дифференцирования:

$$\begin{cases} \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{1i}}{\sigma_1^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_1((\hat{x}_{1i} - \mu_{11})/\sigma_1)/\partial \mu_{11}}{1 + \alpha_1((\hat{x}_{1i} - \mu_{11})/\sigma_1)} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{11}} = 0, \\ \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{2i}}{\sigma_2^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_2((\hat{x}_{2i} - \mu_{12})/\sigma_2)/\partial \mu_{12}}{1 + \alpha_2((\hat{x}_{2i} - \mu_{12})/\sigma_2)} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{12}} = 0, \\ \dots \\ \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{1N}}{\sigma_N^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{Ni}}{\sigma_N^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_N((\hat{x}_{Ni} - \mu_{1N})/\sigma_N)/\partial \mu_{1N}}{1 + \alpha_N((\hat{x}_{Ni} - \mu_{1N})/\sigma_N)} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{1N}} = 0, \\ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - x_j)^2}{2\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right) \right) = 0, \\ f_1(\boldsymbol{\mu}_1) = 0, \\ f_2(\boldsymbol{\mu}_1) = 0, \\ \dots \\ f_m(\boldsymbol{\mu}_1) = 0. \end{cases} \quad (\Gamma.7.10)$$

Все возможные решения данной системы уравнений можно разделить на две группы: при $\lambda_0 = 0$ и при $\lambda_0 \neq 0$. Первая группа корней тривиальна и не обеспечивает глобального максимума-минимума φ_0 . В соответствии с принципом Лагранжа точкой условного экстремума функции L будет решение данной системы уравнений при ненулевом векторе $\boldsymbol{\lambda}$. Для оценки экстремума множитель λ_0 можно принять равным произвольной отличающейся от нуля константе.

Пусть $\lambda_0 = 1$. Кроме того, введем обозначения

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij}, \quad (\Gamma.7.11)$$

и, так как $|\alpha_j(t)| \ll 1$, примем

$$\frac{\partial \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j)/\partial \mu_{1j}}{1 + \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j)} \approx \partial \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j)/\partial \mu_{1j}. \quad (\Gamma.7.12)$$

В этом случае система уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2} - \frac{\bar{x}_1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_1((\hat{x}_{1i} - \mu_{11})/\sigma_1)/\partial \mu_{11} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\mu_1)}{\partial \mu_{11}} = 0, \\ \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} - \frac{\bar{x}_2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_2((\hat{x}_{2i} - \mu_{12})/\sigma_2)/\partial \mu_{12} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\mu_1)}{\partial \mu_{12}} = 0, \\ \dots \\ \frac{\mu_{1N}}{\sigma_N^2} - \frac{\bar{x}_N}{\sigma_N^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_N((\hat{x}_{Ni} - \mu_{1N})/\sigma_N)/\partial \mu_{1N} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\mu_1)}{\partial \mu_{1N}} = 0, \\ f_1(\mu_1) = 0, \\ f_2(\mu_1) = 0, \\ \dots \\ f_m(\mu_1) = 0. \end{array} \right. \quad (\Gamma.7.13)$$

или в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{-1} \mu_1 - S^{-1} \bar{x} - \alpha(\mu_1, \hat{X}) + \frac{1}{n} J_f(\mu_1) \lambda = 0, \\ f(\mu_1) = 0, \end{array} \right. \quad (\Gamma.7.14)$$

где $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_N)^T$ – вектор среднеарифметических значений результатов измерений величин $x_{истj}$,

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_N^2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(\mu_1, \hat{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_1((\hat{x}_{1i} - \mu_{11})/\sigma_1)/\partial \mu_{11} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_2((\hat{x}_{2i} - \mu_{12})/\sigma_2)/\partial \mu_{12} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_N((\hat{x}_{Ni} - \mu_{1N})/\sigma_N)/\partial \mu_{1N} \end{pmatrix},$$

$$J_f(\mu_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mu_1)}{\partial \mu_{11}} & \frac{\partial f_2(\mu_1)}{\partial \mu_{11}} & \dots & \frac{\partial f_m(\mu_1)}{\partial \mu_{11}} \\ \frac{\partial f_1(\mu_1)}{\partial \mu_{12}} & \frac{\partial f_2(\mu_1)}{\partial \mu_{12}} & \dots & \frac{\partial f_m(\mu_1)}{\partial \mu_{12}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1(\mu_1)}{\partial \mu_{1N}} & \frac{\partial f_2(\mu_1)}{\partial \mu_{1N}} & \dots & \frac{\partial f_m(\mu_1)}{\partial \mu_{1N}} \end{pmatrix},$$

$$f(\mu_1) = \begin{pmatrix} f_1(\mu_1) \\ f_2(\mu_1) \\ \dots \\ f_m(\mu_1) \end{pmatrix}.$$

Функция $\alpha_j(t_j)$ определена как

$$\alpha_j(t_j) = \frac{\varphi_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j})}{\varphi_0(t_j)} \cdot \sigma_j - 1, \quad (\Gamma.7.15)$$

где $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ – стандартный нормальный закон распределения;

$$t_{ji} = (\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j.$$

В качестве среднеквадратического отклонения σ_j j -ой величины на практике используем оценка s_j , вместо μ_{1j} используем среднее арифметическое \bar{x}_j . При это неизвестными остаются значения функции плотности распределения случайной величины x в точках

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T. \quad (\Gamma.7.16)$$

Введем обозначение для разности выборочной интегральной функции распределения вероятностей F_j и функции нормального закона F_0 :

$$\Delta F_j(t_j) = \sigma_j \cdot F_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j}) - F_0(t_j). \quad (\Gamma.7.17)$$

Заменяем функцию $\Delta F_j(t_j)$ полиномами $\hat{f}(t_j, \mathbf{a}_{\text{left}})$ и $\hat{f}(t_j, \mathbf{a}_{\text{right}})$, параметры которых определим как

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{left}} = \arg \min_{\mathbf{a}_{\text{left}}} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{left}}} \left(\Delta F_j(t_{j(i)}) - \hat{f}(t_{j(i)}, \mathbf{a}_{\text{left}}) \right)^2 \right), \quad (\Gamma.7.18)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{right}} = \arg \min_{\mathbf{a}_{\text{right}}} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{right}}} \left(\Delta F_j(t_{j(i)}) - \hat{f}(t_{j(i)}, \mathbf{a}_{\text{right}}) \right)^2 \right), \quad (\Gamma.7.19)$$

где $t_{j(i)}$ – i -ый член вариационного ряда нормированной величины t_j ;

n_{left} – индекс (i) наибольшего значения вариационного ряда $\hat{x}_{j(1)}, \hat{x}_{j(2)}, \dots, \hat{x}_{j(n)}$, для которого выполняется условие $\hat{x}_{j(i)} \leq \bar{x}_j$;

аналогично, n_{right} – индекс (i) наименьшего значения вариационного ряда $\hat{x}_{j(1)}, \hat{x}_{j(2)}, \dots, \hat{x}_{j(n)}$, для которого выполняется условие $\hat{x}_{j(i)} > \bar{x}_j$.

Можно сказать, что ряд $\Delta F_j(t_{j(1)}), \Delta F_j(t_{j(2)}), \dots, \Delta F_j(t_{j(n)})$ делится надвое по признаку меньше/больше значение $t_{j(i)}$, чем среднее арифметическое данного ряда. Пример такой аппроксимации для случая полинома второй степени продемонстрирован на рисунке Г.7.1.

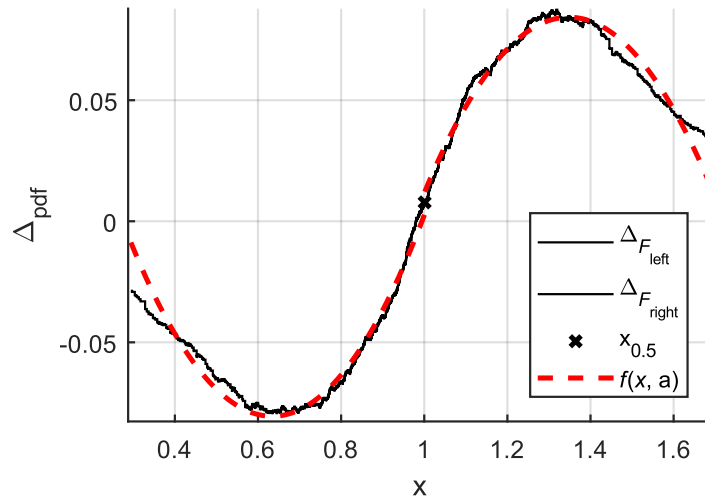


Рисунок Г.7.1 – Полиномиальная аппроксимация разности выборочной функции распределения вероятностей и нормального закона

Тогда

$$\alpha_j(t_j) = \frac{\sigma_j \cdot \varphi_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j}) - \varphi_0(t_j)}{\varphi_0(t_j)} = \frac{\varphi_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j})}{\varphi_0(t_j)} \cdot \sigma_j - 1 \approx \frac{\frac{d\hat{f}(t_j, \hat{a})}{dt_j}}{\varphi_0(t_j)}, \quad (\text{Г.7.20})$$

где $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{\text{left}}$ для $t_{j(i)} \leq \bar{t}_j$, $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{\text{right}}$ для $t_{j(i)} > \bar{t}_j$.

Пример приближения $(d\hat{f}(t_j, \hat{\mathbf{a}})/dt_j)/\varphi_0(t_j)$ приведен на рисунке Г.7.2.

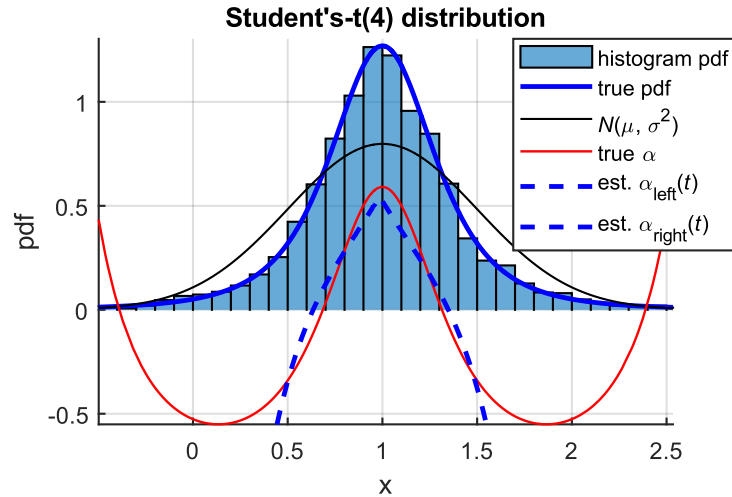


Рисунок Г.7.2 – Приближение функции расхождения выборочной плотности распределения вероятностей и нормального закона полиномом второй степени

В таком случае функционал $\alpha(\mu_1, \hat{X})$ можно заменить его оценкой:

$$\hat{\alpha}(\mu_1, \hat{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 \hat{f}(t_{1(i)}, \hat{a}_1)}{dt_{1(i)}^2} / \varphi_0(t_{1(i)})}{1 + \frac{d\hat{f}(t_{1(i)}, \hat{a}_1)}{dt_{1(i)}} / \varphi_0(t_{1(i)})} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 \hat{f}(t_{2(i)}, \hat{a}_2)}{dt_{2(i)}^2} / \varphi_0(t_{2(i)})}{1 + \frac{d\hat{f}(t_{2(i)}, \hat{a}_2)}{dt_{2(i)}} / \varphi_0(t_{2(i)})} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 \hat{f}(t_{N(i)}, \hat{a}_N)}{dt_{N(i)}^2} / \varphi_0(t_{N(i)})}{1 + \frac{d\hat{f}(t_{N(i)}, \hat{a}_{N(i)})}{dt_{N(i)}} / \varphi_0(t_{N(i)})} \end{pmatrix}. \quad (\Gamma.7.21)$$

Если $\hat{f}(t_j, \hat{a}_j) = \hat{a}_{j2} \cdot t_j^2 + \hat{a}_{j1} \cdot t_j + \hat{a}_{j0}$, получим:

$$\hat{\alpha}(\mu_1, \hat{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot \hat{a}_{12} / \varphi_0(t_{1(i)})}{1 + (2 \cdot \hat{a}_{12} \cdot t_{1(i)} + \hat{a}_{11}) / \varphi_0(t_{1(i)})} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot \hat{a}_{22} / \varphi_0(t_{2(i)})}{1 + (2 \cdot \hat{a}_{22} \cdot t_{2(i)} + \hat{a}_{21}) / \varphi_0(t_{2(i)})} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot \hat{a}_{N2} / \varphi_0(t_{N(i)})}{1 + (2 \cdot \hat{a}_{N2} \cdot t_{N(i)} + \hat{a}_{N1}) / \varphi_0(t_{N(i)})} \end{pmatrix}. \quad (\Gamma.7.22)$$

Данные выражения исчерпывающе представляют описанную теоретическую модель.

Г.7.2 Полунепараметрический метод, основанный на проекционной оценке плотности распределения случайных погрешностей с применением усеченных рядом Грама-Шарлье типа А

Альтернативный подход [Г.171] основан на построении оценки искомой плотности около некоторой опорной (реперной) плотности с применением системы ортонормированных полиномов (используются для коррекции реперного закона так, чтобы он походил на искомый). Далее использованы полиномы из усеченного ряда Грама-Шарлье типа А [Г.172]. В качестве реперной плотности выбран нормальный закон.

Пусть u_d – ортогональные полиномы степени d , нормированные в соответствии с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{d_1}(\hat{x}_j) \cdot u_{d_2}(\hat{x}_j) \cdot \varphi_0(\hat{x}_j) d\hat{x}_j = \delta(d_1, d_2), \quad (\Gamma.7.23)$$

где $u_0 = 1$;

$\delta(d_1, d_2) = \begin{cases} 1, & d_1 = d_2, \\ 0, & d_1 \neq d_2, \end{cases}$ – символ Кронекера.

Коэффициенты полиномов u_d можно рассчитать с помощью процедуры ортогонализации Грама-Шмидта. Значения этих коэффициентов зависят от заданного условия, то есть от вида закона распределения $\varphi_0(\hat{x}_j)$ выбранного в качестве реперного.

Пользуясь введенными обозначениями, искомое распределение $\varphi_j(\hat{x}_j)$, необходимое для непараметрического согласования совместных измерений, можно представить как

$$\varphi_j(\hat{x}_j) = \varphi_0(\hat{x}_j) \cdot \sum_{d=0}^{\infty} \beta_d \cdot u_d(\hat{x}_j), \quad (\Gamma.7.24)$$

$$\text{где } \beta_d = \int_{-\infty}^{\infty} u_d(\hat{x}_j) \cdot \varphi_0(\hat{x}_j) d\hat{x}_j.$$

Значения β_d используются в данном случае в качестве масштабирующих коэффициентов, являясь при этом математическим ожиданием случайной величины $u_d(\hat{x}_j)$. Для выборки $\hat{\mathbf{x}}_j^T = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})$ из n многократных измерений величины x_j , значение β_d можно рассчитать как

$$\beta_d^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_d(\hat{x}_{ji}). \quad (\Gamma.7.25)$$

Приближенную оценку $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$ искомого распределения $\varphi_j(\hat{t}_j)$ можно найти как

$$\varphi_j^*(\hat{t}_j) = \varphi_0(\hat{t}_j) \cdot \sum_{d=0}^D \beta_d^* \cdot u_d(\hat{t}_j), \quad (\Gamma.7.26)$$

где D – верхний предел степени ортогональных полиномов, используемых для идентификации искомого закона используемым проекционным методом.

Если в качестве референса выбран нормальный закон, функции u_d примут вид полиномов Эрмита He_d . Тогда оценка $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$ искомого распределения может быть получена проекционным методом Грама-Шарлье:

$$\varphi_j^*(\hat{t}_j) = \frac{1}{\sigma_j} \cdot \varphi_0(\hat{t}_j) \cdot \left(1 + \sum_{d=3}^D \frac{1}{d!} \beta_d^* \cdot He_d(\hat{t}_j)\right), \quad (\Gamma.7.27)$$

$$\text{где } He_d - d\text{-ый полином Эрмита, равный } He_d(\hat{t}_j) = \sum_{i=0}^{[d/2]} \frac{2^{-i} \cdot (-1)^i \cdot d!}{i! \cdot (d-2 \cdot i)!} \cdot (\hat{t}_j)^{d-2 \cdot i};$$

$[x]$ – целая часть числа x .

Если в качестве референса выбран нормальный закон, тогда оценки коэффициентов β_3 и β_4 равны $\beta_3^* = Sk_j^*$ и $\beta_4^* = Ku_j^* - 3$, где Sk_j^* и Ku_j^* – выборочные оценки асимметрии и эксцесса анализируемого распределения $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$, то есть ключевые численные характеристики формы распределения, которые можно рассчитать по формулам

$$Sk_j^* = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^3}{\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^2\right)^{3/2}}, Ku_j^* = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^4}{\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^2\right)^2}. \quad (\Gamma.7.28)$$

Обратимся к выражению, связывающему искомый закон распределения погрешностей с реперным через некоторую функцию расхождения $\alpha_j(\hat{t}_j)$. Используя проекционный метод Грама-Шарлье, оценку анной функции можно вычислить как

$$\alpha_j^*(\hat{t}_j) = \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot He_d(\hat{t}_j). \quad (\Gamma.7.29)$$

Чтобы получить оценку элементов вектор-функции $\alpha(\hat{X}, \mu)$, нужно найти производные $\partial/\partial \mu_i$ функционалов $\alpha_i(t_j)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_j^*(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} &= \frac{\partial}{\partial \mu_j} \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot He_d(\hat{t}_j) = \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot \frac{\partial He_d(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} = \\ &= \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot \left[\sum_{i=0}^{[d/2]} 2^{-i} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \frac{d! \cdot (d-2 \cdot i)}{i! \cdot (d-2 \cdot i)!} \cdot \frac{(\hat{x}_j - \mu_j)^{d-2 \cdot i-1}}{\sigma_j^{k-2 \cdot i}} \right]. \end{aligned} \quad (\Gamma.7.30)$$

Если ограничиться первыми четырьмя членами ряда Грама-Шарлье ($D = 4$), тогда можно получить модель $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$, описывающую искомое распределение всего четырьмя параметрами (их выборочными оценками): математическим ожиданием μ_j ; стандартным отклонением σ_j ; асимметрией Sk_j и эксцессом Ku_j .

Тогда

$$\alpha_j^*(\hat{t}_j) = \frac{\beta_3^*}{3!} \cdot He_3(\hat{t}_j) + \frac{\beta_4^*}{4!} \cdot He_4(\hat{t}_j) = \frac{Sk_j^*}{3!} \cdot (\hat{t}_j^3 - 3 \cdot \hat{t}_j) + \frac{Ku_j^{*-3}}{4!} \cdot (\hat{t}_j^4 - 6 \cdot \hat{t}_j^2 + 3), \quad (\Gamma.7.31)$$

$$\frac{\partial a_j^*(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} = \frac{\beta_3^*}{3!} \cdot \frac{\partial He_3(t_j)}{\partial \mu_j} + \frac{\beta_4^*}{4!} \cdot \frac{\partial He_4(t_j)}{\partial \mu_j} = \frac{Sk_j^*}{2 \cdot \sigma_j} \cdot (1 - \hat{t}_j^2) + \frac{Ku_j^{*-3}}{3! \cdot \sigma_j} \cdot (3 \cdot \hat{t}_j - \hat{t}_j^3). \quad (\Gamma.7.32)$$

Наконец, слагаемое $\alpha(\hat{\mathbf{X}}, \mu)$ принимает следующий вид:

[illegible]

В силу ограничений метода Грама-Шарлье для восстановления плотности распределения случайной величины применение полученной таким образом системы уравнений для уточнения результатов обоснованное в случаях, когда ожидается, что отклонение действительного закона распределения от заданного будут невелико.

Г.7.3 Непараметрический подход, основанный на ядерной регрессии

Третий подход к выражению отличий распределения случайных погрешностей от нормального закона предполагает использование ядерных оценок: кратко суть подхода заключается в построении непараметрической M -оценки значений совместно измеряемых взаимосвязанных величин с использованием метода ядерной регрессии для оценки плотностей распределения вероятностей. В качестве весовой функции использовано, как и прежде, Гауссово ядро. Предполагалось, что измерения выполнены независимо,

корреляция между случайными отклонениями результатов измерений отсутствует, следовательно, ковариационная матрица является диагональной.

Ядерная оценка плотности записывается следующим образом:

$$\hat{\varphi}(x|h, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum_{k=1}^n K\left(\frac{x - \hat{x}_k}{h}\right), \quad (\Gamma.7.34)$$

где $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ – выборка результатов измерений, по которым осуществляется построение ядерной оценки плотности распределения случайных погрешностей;

K является ядром операции (то есть представляет собой функцию сглаживания);

h – ширина сглаживающего окна, определяющая глубину сглаживания;

n – объём выборки.

Ядерная оценка плотности может быть использована для построения оценок параметров оцениваемого распределения. Для этого ядерную оценку подвергают параметризации – то есть вводят в ее состав искомый параметр. В рассмотренной задаче в качестве отмеченного параметра в ядерную оценку плотности введены значения математического ожидания измеряемых величин.

Для многомерного варианта задачи согласования индустриальных данных, то есть задачи согласования результатов многократных измерений, завершившихся получением независимых результатов $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$ измерения величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, параметризацию осуществляют следующим образом. Пусть функция $\hat{\varphi}_{0j}(t_j|h_j, \hat{t}_{j1}, \hat{t}_{j2}, \dots, \hat{t}_{jn})$ представляет собой ядерную оценку плотности для случайной величины $t_j = (x_j - \mu_{1j})/\sigma_j$, чье математическое ожидание равно нулю, а среднее квадратическое отклонение равно единице, построенная по выборке $\hat{t}_{j1}, \hat{t}_{j2}, \dots, \hat{t}_{jn}$, $\hat{t}_{ji} = (\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j$, где μ_{1j} – математическое ожидание случайной погрешности x_j , σ_j – среднее квадратическое отклонение СВ x_j .

Запишем функцию правдоподобия для однократного совместного измерения величин \mathbf{x} :

$$\hat{L}(\mu_1) = \prod_{j=1}^N \hat{\varphi}_{0j}\left(\frac{\hat{x}_j - \mu_{1j}}{\sigma_j}\right), \quad (\Gamma.7.35)$$

где N – число совместно измеряемых величин.

Так как для ядерных оценок $K(x) = K((x - x_k)/h)$, где h – ширина ядерного окна, а x_k – k -ое выборочное значение, выступающее в качестве центра (математического ожидания) ядра, для однократного совместного измерения величин \mathbf{x} получим:

$$\hat{L}(\mu_1) = \prod_{j=1}^N \hat{\varphi}_{0j}(\hat{x}_j - \mu_{1j}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{p \cdot h_j} \sum_{k=1}^n K\left(\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j - (\hat{x}_{jk} - \mu_{1j})/\sigma_j}{h_j}\right). \quad (\Gamma.7.36)$$

Аналогично для многократных измерений:

$$\hat{L}(\mu_1) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{p \cdot h_j} \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^n K\left(\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j - (\hat{x}_{jk} - \mu_{1j})/\sigma_j}{h_j}\right). \quad (\Gamma.7.37)$$

Чтобы параметры μ_{1j} не сокращались при вычислении M -оценки будем, как предложено в работе [173], вычислять значение ядра не в точках $(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})$, а в точках $(\hat{x}_{ji} - \bar{x}_{1j})$, где \bar{x}_j – оценка математического ожидания случайной величины x_j по выборке $\hat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})^T$ многократных равноточных измерений объемом n (несмещенная оценка μ_{1j}). Кроме того, заменим точные значения среднеквадратического отклонения σ_j несмещенными оценками s_j по выборкам $\hat{\mathbf{x}}_j, j = 1, 2, \dots, N$.

Оценке максимального правдоподобия параметров $\boldsymbol{\mu}_1$ соответствует решение задачи отыскания оптимума:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1^* &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}_1} (\widehat{\ln L}(\boldsymbol{\mu}_1)) = \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}_1} \left(N \cdot \ln \left(\frac{1}{p} \right) + \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{1}{h_j} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(\sum_{k=1}^n K \left(\frac{(\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)/s_j - (\hat{x}_{jk} - \mu_{1j})/s_j}{h_j} \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{Г.7.38})$$

то есть к решению системы:

$$\frac{\partial (\widehat{\ln L}(\boldsymbol{\mu}_1))}{\partial \mu_{1j}} = \mathbf{0}, \quad (\text{Г.7.39})$$

относительно $\boldsymbol{\mu}_1$, где $\widehat{\ln L}$ – логарифмическая функция правдоподобия.

Если в качестве ядра $K(x)$ выбрать Гауссову функцию вида

$$K(x) = \exp \left(\frac{-x^2}{2} \right) / \sqrt{2 \cdot \pi}, \quad (\text{Г.7.40})$$

получим следующие уравнение для эффективной оценки математического ожидания μ_{1j} случайной величины x_j с неизвестной плотностью распределения:

$$\frac{\partial (\widehat{\ln L}(\boldsymbol{\mu}_1))}{\partial \mu_{1j}} = \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right) \cdot \frac{(\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j})}{h_j^2 \cdot s_j^2}}{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right)} = 0, \quad (\text{Г.7.41})$$

$$\mu_{1j} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right) \cdot \hat{x}_{jk}}{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right)} = 0, \quad (\text{Г.7.42})$$

Применив метод неопределенных множителей Лагранжа, можно преобразовать функцию правдоподобия так, чтобы ее максимум при варьировании переменной $\boldsymbol{\mu}_1$ соответствовал бы набору заданных ограничений $\mathbf{f}(\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1N}) = \mathbf{0}, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_1^* &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}_1: \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}_1) = \mathbf{0}} \widehat{\ln L}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\lambda}) = \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}_1: \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}_1) = \mathbf{0}} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \widehat{\ln \varphi}_{0j} \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}_1) \right), \end{aligned} \quad (\text{Г.7.43})$$

где $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – вектор множителей Лагранжа (задано $\lambda_0 = 1$).

Непараметрическая оценка параметров μ_1 , полученная с учетом зависимостей $f(\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1N}) = \mathbf{0}$, может быть получена путем решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial(\ln L(\mu_1, \lambda))}{\partial \mu_1} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial(\ln L(\mu_1, \lambda))}{\partial \lambda} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\Gamma.7.44)$$

Так как $\lambda_0 = 1$, получим:

$$\begin{cases} \mu_{11} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{1i} - \hat{x}_1 - \hat{x}_{1k} + \mu_{11}}{h_1 \cdot s_1}\right) \cdot \hat{x}_{1k}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{1i} - \hat{x}_1 - \hat{x}_{1k} + \mu_{11}}{h_1 \cdot s_1}\right)} + \frac{h_1^2 \cdot s_1^2}{n} \cdot \lambda^T \cdot \frac{\partial f(\mu_1)}{\partial \mu_{11}} = 0, \\ \mu_{12} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{2i} - \hat{x}_2 - \hat{x}_{2k} + \mu_{12}}{h_2 \cdot s_2}\right) \cdot \hat{x}_{2k}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{2i} - \hat{x}_2 - \hat{x}_{2k} + \mu_{12}}{h_2 \cdot s_2}\right)} + \frac{h_2^2 \cdot s_2^2}{n} \cdot \lambda^T \cdot \frac{\partial f(\mu_1)}{\partial \mu_{12}} = 0, \\ \dots \\ \mu_{1N} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{Ni} - \hat{x}_N - \hat{x}_{Nk} + \mu_{1N}}{h_N \cdot s_N}\right) \cdot \hat{x}_{Nk}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{Ni} - \hat{x}_N - \hat{x}_{Nk} + \mu_{1N}}{h_N \cdot s_N}\right)} + \frac{h_N^2 \cdot s_N^2}{n} \cdot \lambda^T \cdot \frac{\partial f(\mu_1)}{\partial \mu_{1N}} = 0, \\ f(\mu_1) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\Gamma.7.45)$$

При правильном выборе значений h_1, h_2, \dots, h_N решение данной системы относительно μ_1 будет обеспечивать получение эффективной оценки требуемых величин. При этом при конечных размерах обрабатываемых выборок дисперсия получаемых оценок может не совпадать в точности с нижней границей Крамера-Рао, но будет достаточно близка к ней (тем ближе, чем больше будет размер обрабатываемых выборок). Так или иначе, дисперсия полученной выборки будет меньше, чем при параметрическом оценивании, осуществленном в ошибочном предположении о законе распределения случайных погрешностей.

Г.8 МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ НЕТОЧНЫХ ДАННЫХ, ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ КОТОРЫМИ ВЫРАЖЕНЫ СИСТЕМАМИ НЕРАВЕНСТВ

Материалы, представленные в данном разделе, опираются на результаты, описанные в прошлом, 7-м разделе, данного описания. Для экономии места производится частичная отсылка к материалам 7-го раздела. Ранее были представлены численные средства для решения задачи согласования индустриальных данных или результатов измерений в условиях, когда распределения случайных погрешностей имели произвольных закон распределения, возможно отличающийся от нормального. Данный базовый сценарий для производимой обработки данных обеспечивает универсальность полученных программных средств и непараметричность (полную или частичную) процедуры согласования данных. В данном разделе для описания численных процедур решения задачи согласования индустриальных данных для случаев, когда априорная информация о накладываемых на них ограничениях в виде систем неравенств.

Ранее были представлены методы для случая, когда сведения о взаимосвязях между измеряемыми величинами или индустриальными данными были представлены в виде алгебраических уравнений (возможно, нелинейных). Основным способом решения возникающей численной задачи условной оптимизации являлся метод неопределенных множителей Лагранжа. Универсальность сведения задачи к такому виду обеспечивается тем обстоятельством, что наложение условий на согласуемые данные в виде систем неравенств также сводится к задаче условной оптимизации и методу неопределенных множителей Лагранжа в постановке Куна-Таккера, то есть по сути дела к тем же самым ядерным численным процедурам. Это счастливое обстоятельство позволяет организовать программную библиотеку в иерархическом виде: набор процедур решения задачи условной оптимизации в заданной постановке представляют собой ядро библиотеки, к которому осуществляется обращения из других процедур, реализующих нужную функциональность и распространяемых на разные практические случаи задачи согласования результатов измерений или иных индустриальных данных.

Случай, когда ограничения, наложенные на возможные значения измеряемых величин или индустриальные данные, представлены системами неравенств, сводится к следующей процедуре. Для выполнения условной оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств использовано обобщение Куна-Таккера метода множителей Лагранжа, а также разработана следующая процедура.

Г.8.1 Параметрические методы согласования

Если набор ограничений представляет собой смешанный набор ограничений в виде уравнений $F(x) = 0$, связывающих значения измеряемых величин x друг с другом, и неравенств $A \cdot x < b$, где A – матрица согласованной с x размерности, а b – вектор, а знак «<» следует понимать как применяемый поэлементно, то наиболее простым подходом к решению соответствующей задачи может выступать следующая последовательность действий.

- 1) Выполнить решение задачи согласования только с учетом уравнений $F(x)$.
- 2) Если полученные в ходе решения задачи согласования из п.1 оценки x^* удовлетворяют неравенствам $A \cdot x^* < b$, то на этом решение задачи завершается.

3) В случае, если хотя бы одно из неравенств для хотя бы одного из поэлементных сочетаний компонент векторов $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^*$ и \mathbf{b} не выполнено, соответствующее невыполненное неравенство обращают в равенство и вводят в систему уравнений в качестве дополнительного условия. Далее процедура повторяется, вновь начиная с пункта 1.

Уравнения $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ могут представлять как изначально заданную информацию о взаимосвязях между измеряемыми величинами, так и уже результат редукции прочей информации, выраженной в иной форме (например, интегро-дифференциальных), к виду алгебраических уравнений.

Полная постановка задачи и ее решение для случая задания ограничений в виде неравенств представлена ниже.

Г.8.2 Полунепараметрический подход на основе полиномиальной аппроксимации

Пусть даны результаты измерений $\hat{\mathbf{x}}^T = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$, полученные для значений физических величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$. Эти результаты возмущены случайными искажениями и погрешностями, как это всегда бывает для результатов измерений и промышленных данных. Пусть данные случайные погрешности имеют плотности распределения $\varphi_1(\hat{x}_1), \varphi_2(\hat{x}_2), \dots, \varphi_N(\hat{x}_N)$, близкие к нормальному закону. Пусть на значения \mathbf{x} наложены ограничения в виде систем неравенств $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, где $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \dots, r_p(\mathbf{x}))^T$ является вектор-функцией. Пусть элементы вектора \mathbf{x} измерены по n раз и результаты записаны в матричной форме $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N)$, в которой столбцы отображают вектора $\hat{\mathbf{x}}_j^T = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})$, представляющие собой выборки результатов измерений для каждой из измеряемых величин в отдельности, $j = 1, 2, \dots, N$. Каждый результат измерения \hat{x}_{ji} равен $\hat{x}_{ji} = x_j + \varepsilon_{ji}$, где ε_{ji} представляют собой реализации случайных погрешностей ε_j , распределенных по законам $\varphi_j(x_j + \varepsilon_j)$. Положим, что значимыми являются только случайные погрешности (поскольку являются неустраняемыми), а все систематические погрешности компенсированы или отсутствуют, т.е. $M[\varepsilon_j] = 0$, где M обозначает оператор математического ожидания случайной переменной. Пусть также среднеквадратическое отклонение для величины ε_j равно σ_j . Тогда математические ожидания μ_j для величин \hat{x}_{ji} в точности равны x_j . Введем стандартизованное представление для случайных величин \hat{x}_j в следующем виде: $\hat{t}_j = (\hat{x}_j - \mu_j)/\sigma_j$. Обозначим для краткости значения реализаций таких стандартных величин как $\hat{t}_{ji} = (\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j$.

Пусть плотность $\varphi_j(x_j + \varepsilon_j)$ в достаточной мере близка к нормальному закону распределения:

$$\sigma_j \cdot \varphi_j(\hat{x}_j) = \varphi_0(\hat{t}_j) \cdot (1 + \alpha_j(\hat{t}_j)), \quad (\text{Г.8.1})$$

где $\varphi_0(\hat{t}_j) = \exp(-\hat{t}_j^2/2)/\sqrt{2\pi}$ – стандартное нормальное распределение (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией);

α_j – функции малых отклонений от φ_0 ; $|\alpha_j(\hat{t}_j)| \ll 1, j = 1, 2, \dots, N$.

Пусть результаты многократных независимых измерений обозначены как \hat{x}_{ji} . Эти индустриальные данные соответственно имеют следующее многомерное распределение:

$$P(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) = \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_j \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \hat{t}_{ji}^2\right) \cdot \left(1 + \alpha_j(\hat{t}_{ji})\right), \quad (\Gamma.8.2)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$, а вектор $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T$ представляет собой вектор параметров для P .

Соответственно может быть записана функция логарифмического правдоподобия, которая оказывается равна

$$\begin{aligned} L(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sigma_j \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \hat{t}_{ji}^2\right) \cdot \left(1 + \alpha_j(\hat{t}_{ji})\right) \right) = \\ &= -n \sum_{j=1}^N \ln(\sigma_j \cdot \sqrt{2\pi}) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\hat{t}_{ji}^2}{2} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j(\hat{t}_{ji})\right). \end{aligned} \quad (\Gamma.8.3)$$

Максимальное правдоподобие достигается при том же значении вектора $\boldsymbol{\mu}$, при котором достигается минимум редуцированного функционала L_1 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^* &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} L(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) = \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} L_1(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) = \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \hat{t}_{ji}^2 - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j(\hat{t}_{ji})\right) \right). \end{aligned} \quad (\Gamma.8.4)$$

Следовательно, оценка $\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\mu}^*$ значений измеряемых физических величин может быть получена \mathbf{x} путем решения соответствующей оптимизационной задачи.

Для решения задачи условной оптимизации был использован метод неопределенных множителей Лагранжа в постановке, учитывающей наложенные на согласуемые данные связи в виде системы алгебраических уравнений (возможно, нелинейных). Для случая, когда ограничения заданы системой неравенств, ситуация не изменяется. Запишем функцию Лагранжа Q в следующем виде:

$$Q(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})^T) = L_1(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) = L_1(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot r_k(\boldsymbol{\mu}), \quad (\Gamma.8.5)$$

где ограничения, накладываемые на возможные значения измеряемых величин или индустриальных данных, служат в качестве дополнительных условий, а вектор $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ заполнен множителями Лагранжа.

Если функция Q имеет экстремум, то ее минимум достигается в одном из них them. Необходимые условия существования экстремума функции Q могут быть записаны в качестве системы уравнений, содержащих частные производные по \mathbf{x} и $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{cases} \partial Q(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})^T) / \partial \mu_j = 0, & j = 1, 2, \dots, N, \\ \partial Q(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})^T) / \partial \lambda_k = 0, & k = 1, 2, \dots, p, \end{cases} \quad (\Gamma.8.6)$$

После дифференцирования получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(n \cdot \frac{\mu_j}{\sigma_j^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{ji}}{\sigma_j^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_1((\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j)/\partial \mu_j}{1 + \alpha_1(\hat{t}_{ji})} \right) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial r_k(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_j} = 0, j = 1, 2, \dots, N, \\ \lambda_k \cdot r_k(\boldsymbol{\mu}) = 0, k = 1, 2, \dots, p, \\ \lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p, \\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (\Gamma.8.7)$$

К решению представлена систему уравнений того же вида, что и раньше, за исключением необходимости дополнительного контроля выполнения неравенств и видоизменения алгебраической формы наложенных условий в форме равенств.

Для определения положения условного оптимума функционала L_1 необходимо решить представленную систему относительно $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$. Пусть для краткости выборочное среднее обозначено как $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij}$. Поскольку $|\alpha_j(\hat{t}_j)| \ll 1$, то получаем, что

$$\frac{\partial \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j)/\partial \mu_j}{1 + \alpha_j(\hat{t}_{ji})} \approx \partial \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j)/\partial \mu_j. \quad (\Gamma.8.8)$$

В этом случае решаемая система примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\mu_j - \bar{x}_j - \frac{\sigma_j^2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \partial \alpha_1((\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j)/\partial \mu_j \right) + \frac{\sigma_j^2}{n} \cdot \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial r_k(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_j} = 0, j = 1, 2, \dots, N \\ \lambda_k \cdot r_k(\boldsymbol{\mu}) = 0, k = 1, 2, \dots, p, \\ \lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p, \\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (\Gamma.8.9)$$

или в матричной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu} - S^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \frac{1}{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{n} \cdot J_{\mathbf{R}}^T(\boldsymbol{\mu}) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}, \\ \lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p, \\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (\Gamma.8.10)$$

где $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_N)^T$ – это вектор выборочных средних, определенных по выборкам результатов многократных измерений значений величин \mathbf{x} ;

$S = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\sigma}$; \mathbf{I} является единичной матрицей;

$J_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\mu})$ – матрица Якоби для вектор-функции $\mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})$,

т.е.

$$J_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_1} & \frac{\partial r_1(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_2} & \dots & \frac{\partial r_1(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_N} \\ \frac{\partial r_2(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_1} & \frac{\partial r_2(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_2} & \dots & \frac{\partial r_2(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_p(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_1} & \frac{\partial r_p(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_2} & \dots & \frac{\partial r_p(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_N} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha}(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_1((\hat{x}_{1i} - \mu_1)/\sigma_1)/\partial \mu_1 \\ \sum_{i=1}^n \partial \alpha_2((\hat{x}_{2i} - \mu_2)/\sigma_2)/\partial \mu_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \partial \alpha_N((\hat{x}_{Ni} - \mu_N)/\sigma_N)/\partial \mu_N \end{pmatrix}. \quad (\Gamma.8.11)$$

Получаем, что $\alpha_j(\hat{t}_j) = \sigma_j \cdot \varphi_j(\hat{x}_j)/\varphi_0(\hat{t}_j) - 1$. Таким образом, задача аппроксимации функций α_j по сути дела эквивалентна задаче оценки плотностей распределения φ_j .

Для оценки значений стандартизованных переменных $\hat{t}_j = (\hat{x}_j - \mu_j)/\sigma_j$ на практике используют оценки среднеквадратических отклонений s_j по выборкам $\hat{\mathbf{x}}_j$ вместо их соответствующих генеральных значений. В некоторых местах анализируемой системы уравнений предлагается выполнить замену значений μ на выборочные средние $\bar{\mathbf{x}}$. Такие упрощения тем не менее не снижают степени непараметричности подхода, поскольку значения плотностей $\varphi_j(\hat{x}_{ji})$ по-прежнему остаются неизвестными.

Введем обозначение для разности между выборочной функцией распределения $\Phi^*(\hat{x}_j)$ и интегральной функцией распределения $\Phi_0(\hat{t}_j)$ стандартного нормального закона распределения:

$$\Delta\Phi_j(\hat{t}_j) = \Phi_j^*(\hat{x}_j) - \Phi_0(\hat{t}_j). \quad (\text{Г.8.12})$$

Заменим функцию $\Delta\Phi_j$ двумя полиномами $q_{j-}^*(\hat{t}_j, \mathbf{c}_{j-}^*)$ и $q_{j+}^*(\hat{t}_j, \mathbf{c}_{j+}^*)$ порядка d , которые аппроксимируют левую и правую часть функции $\Delta\Phi_j$ («хвосты») соответственно в смысле метода наименьших квадратов:

$$\mathbf{c}_{j-}^* = \arg \min_{\mathbf{c}_{j-}^*} \sum_{\hat{t}_{ji} < \bar{t}_j} \left(\Delta\Phi_j(\hat{t}_{ji}) - q_{j-}^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_{j-}^*) \right)^2, \quad (\text{Г.8.13})$$

$$\mathbf{c}_{j+}^* = \arg \min_{\mathbf{c}_{j+}^*} \sum_{\hat{t}_{ji} \geq \bar{t}_j} \left(\Delta\Phi_j(\hat{t}_{ji}) - q_{j+}^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_{j+}^*) \right)^2, \quad (\text{Г.8.14})$$

где $\bar{t}_j = (\bar{x}_j - \mu_j)/\sigma_j$ является выборочным средним.

Тогда

$$\alpha_j(\hat{t}_{ji}) = \frac{\sigma_j \cdot \varphi_j(\sigma_j \cdot \hat{t}_{ji} + \mu_j) - \varphi_0(\hat{t}_{ji})}{\varphi_0(\hat{t}_{ji})} \approx \frac{dq_j^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_j^*)}{dt_j} \cdot \frac{1}{\varphi_0(\hat{t}_{ji})} = \begin{cases} \frac{dq_{j-}^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_{j-}^*)}{dt_j} \cdot \frac{1}{\varphi_0(\hat{t}_{ji})}, & \hat{t}_{ji} < \bar{t}_j, \\ \frac{dq_{j+}^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_{j+}^*)}{dt_j} \cdot \frac{1}{\varphi_0(\hat{t}_{ji})}, & \hat{t}_{ji} \geq \bar{t}_j, \end{cases} \quad (\text{Г.8.15})$$

где $q_j^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_j^*)$ является кусочно-полиномиальной функцией, которая равна $q_{j-}^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_{j-}^*)$ при $\hat{t}_{ji} < \bar{t}_j$ и $q_{j+}^*(\hat{t}_{ji}, \mathbf{c}_{j+}^*)$ при $\hat{t}_{ji} \geq \bar{t}_j$.

Тогда функционал $\alpha(\hat{\mathbf{X}}, \mu)$ может быть заменен соотношениями:

$$\alpha^*(\hat{\mathbf{X}}, \mu) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 q_j^*(\hat{t}_{1i}, \mathbf{c}_j^*)}{dt_1^2} / \varphi_0(\hat{t}_{1i})}{1 + \frac{dq_j^*(\hat{t}_{1i}, \mathbf{c}_j^*)}{dt_1} / \varphi_0(\hat{t}_{1i})}, \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 q_j^*(\hat{t}_{2i}, \mathbf{c}_j^*)}{dt_2^2} / \varphi_0(\hat{t}_{2i})}{1 + \frac{dq_j^*(\hat{t}_{2i}, \mathbf{c}_j^*)}{dt_2} / \varphi_0(\hat{t}_{2i})}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 q_j^*(\hat{t}_{Ni}, \mathbf{c}_j^*)}{dt_N^2} / \varphi_0(\hat{t}_{Ni})}{1 + \frac{dq_j^*(\hat{t}_{Ni}, \mathbf{c}_j^*)}{dt_N} / \varphi_0(\hat{t}_{Ni})} \right)^T. \quad (\text{Г.8.16})$$

Применяя $q_j^*(\hat{t}_j, \mathbf{c}_j^*) = c_{j2}^* \cdot \hat{t}_j^2 + c_{j1}^* \cdot \hat{t}_j + c_{j0}^*$, где $\mathbf{c}_j^* = (c_{j0}^*, c_{j1}^*, c_{j2}^*)^T$, получим

$$\alpha^*(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot c_{12}^* / \varphi_0(\hat{t}_{1i})}{1 + \frac{(2 \cdot c_{12}^* \cdot \hat{t}_{1i} + c_{11}^*)}{\varphi_0(\hat{t}_{1i})}}, \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot c_{22}^* / \varphi_0(\hat{t}_{2i})}{1 + \frac{(2 \cdot c_{22}^* \cdot \hat{t}_{2i} + c_{21}^*)}{\varphi_0(\hat{t}_{2i})}}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot c_{N2}^* / \varphi_0(\hat{t}_{Ni})}{1 + \frac{(2 \cdot c_{N2}^* \cdot \hat{t}_{Ni} + c_{N1}^*)}{\varphi_0(\hat{t}_{Ni})}} \right)^T. \quad (\text{Г.8.17})$$

Г.8.3 Полунепараметрический метод, основанный на проекционной оценке плотности распределения случайных погрешностей с применением усеченных рядов Грама-Шарлье типа А

Второй подход основан на оценке плотности распределения случайных искажений согласуемых индустриальных данных, путем разложения ее вокруг выбранной точки в функциональном пространстве в систему ортогональных полиномов, в качестве которых выбраны ряды Грама-Шарлье по типу А. Разложение выполнено около нормальной плотности распределения.

Пусть заданы полиномы u_d порядков d , нормализованные таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{d_1}(\hat{x}_j) \cdot u_{d_2}(\hat{x}_j) \cdot \varphi_0(\hat{x}_j) d\hat{x}_j = \delta(d_1, d_2), \quad (\text{Г.8.18})$$

где $u_0 = 1$, а $\delta(d_1, d_2) = \begin{cases} 1, & d_1 = d_2, \\ 0, & d_1 \neq d_2, \end{cases}$ – символ Кронекера.

Коэффициенты полиномов u_d оценены используя процедуру ортогонализации Грама-Шмидта. Действительные значения коэффициентов зависят от приведенного выше условия в том смысле, что определяются выбором плотности распределения $\varphi_0(\hat{x}_j)$, вокруг которой ведется разложение в ряд.

Оцениваемые плотности $\varphi_j(\hat{x}_j)$ в решаемой задаче согласования индустриальных данных могут быть описаны как

$$\varphi_j(\hat{x}_j) = \varphi_0(\hat{x}_j) \cdot \sum_{d=0}^{\infty} \beta_d \cdot u_d(\hat{x}_j), \quad (\text{Г.8.19})$$

где $\beta_d = \int_{-\infty}^{\infty} u_d(\hat{x}_j) \cdot \varphi_0(\hat{x}_j) d\hat{x}_j$.

Значения β_d выступают в роли масштабных коэффициентов и отображают математические ожидания случайных величин $u_d(\hat{x}_j)$. Эти значения могут быть оценены численно по выборке $\hat{\mathbf{x}}_j^T = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})$, составленной из результатов n повторных измерений величины x_j , следующим образом: $\beta_d^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_d(\hat{x}_{ji})$.

Тогда приближенная оценка $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$ искомой плотности $\varphi_j(\hat{t}_j)$ может быть записана как

$$\varphi_j^*(\hat{t}_j) = \varphi_0(\hat{t}_j) \cdot \sum_{d=0}^D \beta_d^* \cdot u_d(\hat{t}_j), \quad (\text{Г.8.20})$$

где D задает ограничение на количество членов ряда (по сути дела – ортогональных функций), которые использованы для восстановления искомой плотности распределения проекционным методом.

Использование нормального распределения в качестве той точки функционального пространства, вокруг которого производится разложение в ряд, указывает на то, что в качестве семейства ортогональных полиномов u_d должны быть выбраны полиномы Эрмита He_d . Тогда оценка $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$ искомой плотности распределения случайных погрешностей определяется как

$$\varphi_j^*(\hat{t}_j) = \frac{1}{\sigma_j} \cdot \varphi_0(\hat{t}_j) \cdot \left(1 + \sum_{d=3}^D \frac{1}{d!} \beta_d^* \cdot He_d(\hat{t}_j)\right), \quad (\Gamma.8.21)$$

где He_d является полиномом Эрмита порядка d , соответственно равного $He_d(\hat{t}_j) = \sum_{i=0}^{[d/2]} \frac{2^{-i} \cdot (-1)^i \cdot d!}{i! \cdot (d-2 \cdot i)!} \cdot (\hat{t}_j)^{d-2 \cdot i}$;

$[x]$ – это целая часть числа x .

Оценки значений коэффициентов β_3^* и β_4^* для случая использования нормальной плотности в точки разложения соответственно равны $\beta_3^* = Sk_j^*$ и $\beta_4^* = Ku_j^* - 3$, где Sk_j^* и Ku_j^* являются выборочными оценками коэффициентов асимметрии и эксцесса анализируемой плотности $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$, то есть по сути дела главными характеристиками формы распределения. Могут быть использованы классические оценки для этих характеристик или иные несмещенные оценки:

$$Sk_j^* = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^3}{\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, Ku_j^* = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^4}{\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^2\right)^2}. \quad (\Gamma.8.22)$$

Обратившись к соотношениям выше, можно увидеть возможность применения представленных выше соотношений при условии, что функции $\alpha_j(\hat{t}_j)$ заменяются оценками $\alpha_j^*(\hat{t}_j) = \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot He_d(\hat{t}_j)$.

Тогда для оценки $\alpha(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu})$ следует отыскать производные $\partial/\partial \mu_j$ для $\alpha_j(t_j)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_j^*(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} &= \frac{\partial}{\partial \mu_j} \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot He_d(\hat{t}_j) = \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot \frac{\partial He_d(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} = \\ &= \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot \left[\sum_{i=0}^{[d/2]} 2^{-i} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \frac{d! \cdot (d-2 \cdot i)!}{i! \cdot (d-2 \cdot i)!} \cdot \frac{(\hat{x}_j - \mu_j)^{d-2 \cdot i-1}}{\sigma_j^{k_j-2 \cdot i}} \right]. \end{aligned} \quad (\Gamma.8.23)$$

Если использовать в разложении только $D = 4$ слагаемых, то тогда будет получена математическая модель, которая характеризует интересующую плотность $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$ четырьмя параметрами: отыскиваемых математическим ожиданием μ_j ; среднеквадратическим отклонением σ_j , оцененным с помощью величины s_j ; коэффициентом асимметрии Sk_j и коэффициентом эксцесса Ku_j , приближенных выборочными оценками Sk_j^* и Ku_j^* .

В этом случае

$$\alpha_j^*(\hat{t}_j) = \frac{\beta_3^*}{3!} \cdot \text{He}_3(\hat{t}_j) + \frac{\beta_4^*}{4!} \cdot \text{He}_4(\hat{t}_j) = \frac{Sk_j^*}{3!} \cdot (\hat{t}_j^3 - 3 \cdot \hat{t}_j) + \frac{Ku_j^{*-3}}{4!} \cdot (\hat{t}_j^4 - 6 \cdot \hat{t}_j^2 + 3), (\Gamma.8.24)$$

$$\frac{\partial \alpha_j^*(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} = \frac{\beta_3^*}{3!} \cdot \frac{\partial \text{He}_3(t_j)}{\partial \mu_j} + \frac{\beta_4^*}{4!} \cdot \frac{\partial \text{He}_4(t_j)}{\partial \mu_j} = \frac{Sk_j^*}{2 \cdot \sigma_j} \cdot (1 - \hat{t}_j^2) + \frac{Ku_j^{*-3}}{3! \cdot \sigma_j} \cdot (3 \cdot \hat{t}_j - \hat{t}_j^3). \quad (\Gamma.8.25)$$

В конечном счете выражение $\alpha(\hat{X}, \mu)$ принимает следующий вид:

[illegible]

Ввиду ограничений метода Грама-Шарлье для оценки плотностей распределения случайных величин использование системы (8.2) вместе с описанным подходом возможно и целесообразно тогда, когда известно, что действительное распределение согласуемых данных или их погрешностей отличается от плотности, выбранной в качестве точки разложения в ряду Грама-Шарлье по типу А, не очень существенно.

Г.8.4 Непараметрический подход, основанный на ядерной регрессии

Третий вариант выполнения согласования промышленных данных, полностью или по большей части не зависящий от вида распределения их случайных погрешностей, заключается в использовании М-оценок для значений x с применением ядерной регрессии для плотностей распределения. В качестве ядра использовано Гауссова весовая функция. Поскольку, как и прежде, предполагается, что все значения для данных, подлежащих согласованию, получены независимо друг от друга, то обрабатываемые данные или результаты измерений не являются коррелированными друг с другом и соответствующая им ковариационная матрица является диагональной.

Оценка с применением ядерной регрессии имеет вид:

$$\varphi_j^*(x_j|h, \hat{\mathbf{x}}_j) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_j - \hat{x}_{ji}}{h}\right), \quad (\Gamma.8.27)$$

где, как и раньше, $\hat{\mathbf{x}}_j^T = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})$ является выборкой результатов измерений одной и той же величины x_j , используемой для ядерной оценки требуемой плотности распределения;

K – это ядро (в качестве которого выбрана Гауссова весовая функция);

h – это ширина сглаживающего окна, которое определяет степень сглаживания;

n – размер выборки;

вертикальная черта ‘|’ в использованных обозначениях указывает на дополнительные условия, при которых выполняется оценка плотности $\varphi_j^*(x_j|h, \hat{\mathbf{x}}_j)$.

Для оценки параметров распределения некоторой случайной величины с использованием ядерной регрессии необходимо параметризовать получаемую оценку, то есть искомый параметр должен быть внесен в состав ядра в качестве одного из его аргументов. Для решения задачи согласования данных таким параметром обычно выступают значения математического ожидания, как это было отмечено выше.

Для многомерного случая независимо полученных результатов измерений $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)^T$ значений величин $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ параметризование может быть выполнено следующим образом. Функция правдоподобия для результатов однократных измерений величин имеет вид

$$\begin{aligned} L(\hat{\mathbf{x}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) &= \prod_{j=1}^N \varphi_j \left(\frac{\hat{x}_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \approx \prod_{j=1}^N \varphi_j^* \left(\frac{\hat{x}_j - \mu_j}{\sigma_j} | h, \hat{\mathbf{x}}_j \right) = \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{1}{n \cdot h_j} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j - (\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j}{h_j} \right). \end{aligned} \quad (\Gamma.8.28)$$

Соответственно для случая многократных измерений получаем, что

$$L(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{n \cdot h_j} \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^n K \left(\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_j)/\sigma_j - (\hat{x}_{jk} - \mu_j)/\sigma_j}{h_j} \right), \quad (\Gamma.8.29)$$

где, как и было отмечено выше, $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N)$ является матрицей, в которой столбцами выступают вектора $\hat{\mathbf{x}}_j^T = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})$ результатов измерений каждого из элементов искомого вектора \mathbf{x} в отдельности.

Для предотвращения ситуации, когда искомые параметры μ_j сокращаются в аналитическом представлении ядра при вычислении М-оценки, предлагается оценивать значения ядра не в точках $(\hat{x}_{ji} - \mu_j)$, а в точках $(\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)$, где \bar{x}_j является выборочным средним по выборке $\hat{\mathbf{x}}_j$. В дополнение заменим точные значения среднеквадратического отклонения σ_j в представленных выражениях их соответствующими несмещенными выборочными оценками s_j , полученными по тем же самым выборкам $\hat{\mathbf{x}}_j, j = 1, 2, \dots, N$.

Оценки метода максимального правдоподобия $\boldsymbol{\mu}^*$ для искоемых параметров $\boldsymbol{\mu}$ точно так же соответствуют задаче поиска оптимума

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^* &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} (\ln L(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T)) = \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \sum_{k=1}^n K \left(\frac{(\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)/s_j - (\hat{x}_{jk} - \mu_j)/s_j}{h_j} \right) \right), \end{aligned} \quad (\Gamma.8.30)$$

то есть решению систему уравнений $\partial \ln L(\hat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) / \partial \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ относительно $\boldsymbol{\mu}$.

Если выбрать стандартное нормальное распределение $K(t) = \exp(-t^2/2) / \sqrt{2 \cdot \pi}$ в качестве ядерной функции $K(t)$, то получается следующее выражение для эффективной оценки μ_j с помощью ядерной регрессии:

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\mathbf{X}}, (\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T)}{\partial \mu_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_j}{h_j \cdot s_j}\right) \cdot \frac{(\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_j)}{h_j^2 \cdot s_j^2}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_j}{h_j \cdot s_j}\right)} = 0, \quad (\Gamma.8.31)$$

$$\mu_j - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_j}{h_{j \cdot s_j}}\right) \hat{x}_{jk}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_j}{h_{j \cdot s_j}}\right)} = 0. \quad (\Gamma.8.32)$$

Для замыкания всех подходов в один общий здесь точно так же, как и выше, используется обобщение Куна-Таккера для метода неопределенных множителей Лагранжа при условии наложения условий в виде систем неравенств. Перепишем функцию правдоподобия, так, чтобы достигаемый в точке $\mathbf{\mu}$ максимум не противоречил наложенным ограничениям $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, где $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \dots, r_p(\mathbf{x}))^T$ – это вектор-функция:

$$\boldsymbol{\mu}^* = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}: \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})=0} \ln L(\widehat{\mathbf{X}}, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})^T) = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}: \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})=0} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \varphi_j^* \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_j}{\sigma_j} |h, \hat{\mathbf{x}}_j \right) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) \right). \quad (\Gamma.8.33)$$

Здесь $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – множители Лагранжа.

После дифференцирования получим систему уравнений и неравенств, аналогичную записанным ранее:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{1i} - \hat{x}_{1k} - \hat{x}_{1k} + \mu_1}{h_1 \cdot s_1}\right) \cdot \hat{x}_{1k}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{1i} - \hat{x}_{1k} - \hat{x}_{1k} + \mu_1}{h_1 \cdot s_1}\right)} + \frac{h_1^2 \cdot s_1^2}{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_1} = 0, \\ \mu_2 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{2i} - \hat{x}_{2k} - \hat{x}_{2k} + \mu_2}{h_2 \cdot s_2}\right) \cdot \hat{x}_{2k}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{2i} - \hat{x}_{2k} - \hat{x}_{2k} + \mu_2}{h_2 \cdot s_2}\right)} + \frac{h_2^2 \cdot s_2^2}{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \mu_N - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{Ni} - \hat{x}_{Nk} - \hat{x}_{Nk} + \mu_N}{h_N \cdot s_N}\right) \cdot \hat{x}_{Nk}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{Ni} - \hat{x}_{Nk} - \hat{x}_{Nk} + \mu_N}{h_N \cdot s_N}\right)} + \frac{h_N^2 \cdot s_N^2}{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_N} = 0, \\ \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}, \\ \lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p, \\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (\Gamma.8.34)$$

При правильном выборе значений h_1, h_2, \dots, h_N решение данной системы относительно μ приведет к эффективной со статистической точки зрения оценке: ее дисперсия будет превышать нижнюю границу неравенства Крамера-Рао, но будет значительно меньше, чем у параметрических оценок, сделанных при неверном предположении о характеристике распределения случайных погрешностей.

Для решения системы (8.2) во всех трех описанных численных постановках для случая задачи согласования данных при условии наложения на индустриальные данные ограничений в виде неравенств могут быть использованы как традиционные методы решения оптимизационных задач (что целесообразно при налагаемых требованиях к скорости получения решения), так и подход интервальной бисекции, позволяющей итерационно получать оценки искомых величин в виде интервалов, достоверные на каждом

шагу. Данный численный подход предпочтителен, поскольку позволяет осуществить распространение полученных численных процедур на случаи использования современных формализмов представления неопределенности согласуемых индустриальных данных.

Кратко данный подход может быть изложен следующим образом. Пусть ищется решение системы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$, где \mathbf{x} – искомые величины, а вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ содержит параметры уравнения, которые могут быть представлены в любом гранулярном виде, то есть описаны с применением любого современного формализма представления неопределенности, конкретно в примере – нечеткими переменными или нечеткими интервалами. Интервал локализации корня уравнения изначально принимается равным области I_1 (в одномерном случае равной, например, $[a_1, b_1]$). Предлагаемый алгоритм по умолчанию предполагает монотонность элементов вектор-функции \mathbf{F} в зоне локализации решения, а также необходимо, чтобы элементы \mathbf{F} принимали значения разных знаков на границах области I_1 .

Алгоритм разделен на две части. Его первый этап заключается в выполнении традиционного метода дихотомии. Во второй части определяются границы множества возможных значений решений, возникающих из-за неопределенности коэффициентов уравнений, в качестве которых выступают индустриальные данные. Выходом алгоритма является последовательность сужающихся областей $I_1 \supset I_2 \supset \dots I_n$, каждый из которых гарантированно локализует искомое решение вектор-функции \mathbf{F} .

На первом этапе алгоритма на каждой итерации $i = 1, 2, \dots$ вычисляются центры областей I_i (в одномерном случае – $c_i = (a_i + b_i)/2$). После этого область поиска решения сокращается. Если знаки значений функций-элементов \mathbf{F} в центре области локализации и на границе разные (в одномерном случае – в точках c_i и a_i , т.е. $f(a_i, \mathbf{p}) \cdot f(c_i, \mathbf{p}) < 0$), то решение (корень) будет находиться в левой половине области локализации – так в одномерном случае подобласть I_{i+1} (в одномерном случае равная $[a_i, c_i]$) выбирается для следующего шага. В противном случае, когда указанные знаки совпадают (т.е. в одномерном случае $f(a_i, \mathbf{p}) \cdot f(c_i, \mathbf{p}) > 0$), то решение (корень) будет находиться в правой части области локализации и подобласть I_{i+1} (в одномерном случае равная $[c_i, b_i]$) выбирается для следующей итерации. Чтобы учесть влияние погрешностей коэффициентов уравнения, необходимо вычислять значения $\Delta \mathbf{F}(\mathbf{c}, \mathbf{p})$, представляющие собой погрешности значений элементов вектор-функции \mathbf{F} в указанной точке \mathbf{c} (в одномерном случае – точке c_i). Его можно рассчитать с помощью метода метрологического автосопровождения для работы с неточными данными при их математической обработке. Данный подход конкретно в рассматриваемом примере состоит из автоматического дифференцирования и исчисления нечетких интервалов и обеспечивает в основном линейаризованные оценки, но также пригоден для генерации оценок второго и более высокого порядка. Таким образом,

$$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{c}, \mathbf{p})}{\partial p_k} \right| \cdot \Delta p_k \quad (\Gamma.8.35)$$

где Δp_k – погрешность параметра p_k вектор-функции \mathbf{F} , представленного обычным или нечетким интервалом или иным современным формализмом выражения неопределенности;

производные $\partial \mathbf{F}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) / \partial p_k$ вычисляются с использованием указанного автоматического дифференцирования;

операции «+» и «×» понимается в смысле интервального или нечеткого исчисления или в том смысле используемого гранулярного исчисления, которое задействовано в выбранном современном формализме описания неопределенности.

Выполняется проверка условий $|\mathbf{F}(\mathbf{c}, \mathbf{p})| < \Delta\mathbf{F}(\mathbf{c}, \mathbf{p})$. Если условие выполнено, то знаки значений элементов вектор-функции в середине \mathbf{c} области локализации решения системы уравнений точно определить невозможно. Поэтому дальнейшее сокращение области \mathbf{I}_i невозможно, так как нельзя выделить ту его половину, что содержит искомое решение. После возникновения такой ситуации осуществляется переход ко второму этапу алгоритма, на котором левая и правая границы области локализации решения ищутся отдельно.

Пусть условие перехода ко второй части алгоритма выполнено на итерации $i = k$, а область локализации решения есть \mathbf{I}_k (в одномерном случае – $\mathbf{I}_k = [a_k, b_k]$) соответственно. Теперь его левая половина используется для оценки левой границы возможных значений решения, локализованной на первом шаге второго этапа алгоритма областью \mathbf{a}_1 (в одномерном случае $\mathbf{a}_1 = [a_k, c_k]$). Аналогично, \mathbf{b}_1 (в одномерном случае $\mathbf{b}_1 = [c_k, b_k]$), являясь правой частью области \mathbf{I}_k , становится интервалом локализации правой границы.

Обозначим через j независимую индексацию итераций внутри второго этапа алгоритма интервальной бисекции. Далее области \mathbf{a}_j и \mathbf{b}_j (в одномерном случае $\mathbf{a}_j = [\underline{a}_j, \bar{a}_j]$ и $\mathbf{b}_j = [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$) сокращаются на каждой итерации. Далее рассчитываются середины этих областей ($\text{mid } \mathbf{a}_j$ и $\text{mid } \mathbf{b}_j$, в одномерном случае – $\text{mid } \mathbf{a}_j = (\underline{a}_j + \bar{a}_j)/2$ и $\text{mid } \mathbf{b}_j = (\underline{b}_j + \bar{b}_j)/2$) и погрешности $\Delta\mathbf{F}(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})$ and $\Delta\mathbf{F}(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})$ значений элементов вектор-функции \mathbf{F} в этих точках, обусловленные неточностью параметров \mathbf{F} . Затем проверяются условия сокращения областей \mathbf{a}_j и \mathbf{b}_j . Для левой границы возможных значений решения поэлементно проверяется условие $|\mathbf{F}(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})| < \Delta\mathbf{F}(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})$. Если оно выполнено, то для следующего шага выбирается левая подобласть \mathbf{a}_j , лежащая левее $\text{mid } \mathbf{a}_j$, в противном случае – выбирается правая подобласть \mathbf{a}_j , лежащая правее $\text{mid } \mathbf{a}_j$. Для правой границы проверяется условие: если $|\mathbf{F}(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})| < \Delta\mathbf{F}(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})$, то в качестве следующей оценки \mathbf{b}_{j+1} выбирается правая подобласть \mathbf{b}_j , в противном случае – левая подобласть \mathbf{b}_j . Области \mathbf{a}_j и \mathbf{b}_j уточняются до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки.

На каждой итерации вычисляется оценка возможной погрешности решения системы уравнений Δ_j . Из практических соображений это значение округляется до одной, максимум до двух значащих цифр (как это принято в метрологии и при математической обработке неточных данных). Итерационный процесс следует остановить при выполнении следующего условия:

$$\text{round}(\Delta_j) = \text{round}(\Delta_{j-1}), \quad (\Gamma.8.36)$$

где «round» – оператор округления.

Описанный алгоритм можно естественным образом расширить для использования с любым из современных формализмов описания неопределенности, например – для нечеткого интервала. Пусть нечеткое множество для некоторой величины x определяется как $\{(x, \mu_\alpha(x)) | x \in X\}$, где $\mu_\alpha(x)$ – функция принадлежности, характеризующая степень неопределенности; ее значения называются уровнем доверия; X – универсальное множество возможных значений x . Функция $\mu_\alpha(x)$ принимает значения из диапазона $[0, 1]$,

как это обычно принято на практике. Совокупность значений x , для которых выполнено неравенство $\mu_\alpha(x) \leq \alpha$, образует интервал, который принято называть вложенным интервалом функции принадлежности. В контексте обсуждаемой задачи он имеет дополнительный смысл такого интервала J_α , который удовлетворяет уравнению

$$P(J_\alpha \subseteq [-\Delta_j, +\Delta_j]) = \alpha, \quad (\Gamma.8.37)$$

где $P(A)$ – вероятность случайного события A – объективная в случае наличия статистических данных, используемых для построения функции принадлежности, или субъективная в других случаях (например, при обработке экспертных знаний или при использовании подхода субъективных вероятностей). Такой интервал имеет нечеткие границы, поэтому его принято обозначать как нечеткий интервал. Функции принадлежности соответствующих нечетких чисел или неточных данных можно описать как семейства вложенных интервалов. Вложенные интервалы с разными степенями достоверности включают в себя набор возможных значений описываемой переменной для сопоставленных им уровней доверия. Для уровня доверия, равного $\alpha = 1$, соответствующий вложенный интервал J_1 содержит значения, которые точно попадают в набор возможных значений переменной. При уменьшении значения α соответствующие вложенные интервалы могут включать не только возможные значения, но и значения, которые могут и не встретиться (это обстоятельство точно неизвестно). При $\alpha = 0$ границы J_α таковы, что интервал точно шире анализируемого изначально множества возможных значений переменной. Таким образом, степень уверенности является субъективной мерой уверенности в том, что вложенный интервал полностью содержится в пределах множества возможных значений переменной. Такое определение весьма удачно для задачи универсализации взаимодействия с современными формализмами описания неопределенности: нет необходимости рассматривать природу формализма неопределенности, размывающих границы интервала, а достаточно лишь феноменологически описать нечеткость этих границ. Это обстоятельство делает исчисление нечетких интервалов полезным. С одинаковой простотой нечеткий интервал может выражать все виды неопределенностей, соответствующие некоторой переменной: ошибки, вызванные округлением и влиянием известных факторов, ограничиваются вложенным интервалом при $\alpha = 1$; дополнительная нечеткость, унаследованная от плохо учтенных знаний о неточности математической формализации рассматриваемой переменной, определяется интервалами на уровнях $\alpha < 1$. Данные обстоятельства иллюстрирует рисунок Г.8.1.

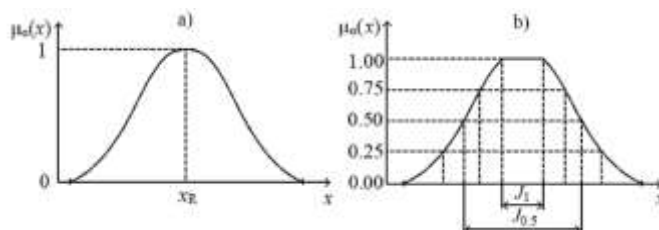


Рисунок 8.1 – Функции принадлежности для традиционного нечеткого числа (а) и нечеткого интервала (б)

Рисунок Г.8.1 показывает разницу между традиционной интерпретацией нечетких переменных и преимуществами нечетких интервалов для задачи согласования промышленных данных. Обычное нечеткое число рассматривает функцию принадлежности анализируемой переменной x как вероятность того, что ее соответствующие значения возможны. На рисунке Г.8.1а видно, что результат измерения x_R сопровождается степенью доверия, равной 1, – действительно, значение x_R уже получено и точно известно, что это значение может встречаться. Напротив, вложенные интервалы J_α для нечеткого интервала, представленного на рисунке Г.8.1б, не задают вероятность каждому потенциально возможному значению переменной, а задают уровень доверия границам диапазона ее значений. Очевидно, что чем меньше значение α , тем шире соответствующий интервал J_α . Поскольку предполагается, что границы нечетких интервалов должны меняться непрерывно, $J_{\alpha_1} \subseteq J_{\alpha_2} \subseteq \dots \subseteq J_{\alpha_m}$ для $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ (см. рисунок Г.8.1б).

Чтобы распространить описанное выше процедуру интервальной бисекции на решение нечетких уравнений или уравнений, параметры которых являются нечеткими интервалами, предлагается следующий простой подход. Степень уверенности α следует интерпретировать как меру уверенности в том, что изучаемый набор возможных значений покрывает соответствующий вложенный интервал J_α . Проведем расчеты с несколькими переменными p_1, p_2, \dots, p_n , которые представлены соответствующими вложенными интервалами $J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_n}$, где значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ могут быть разными. Пусть x – результат вычислений, тогда интервал его полученных значений представляет собой вложенный интервал, также обозначаемый как J_β . Вопрос в том, чему равна его степень уверенности β .

Если оператор взятия вероятности P в приведенном выше соотношении имеет смысл объективной вероятности и все неопределенности реализуются независимо друг от друга, то $\beta \geq \prod_{i=1}^m \alpha_i$. Если вероятность субъективна и все функции принадлежности оценивались одной группой экспертов, то $\beta = \min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Эти варианты соответствуют двум популярным правилам работы с нечеткими переменными. Второй вариант предпочтительнее, поскольку в определение нечеткого интервала входит упомянутое выше требование непрерывности изменения ширины вложенных интервалов. Таким образом, для случая, когда $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$, имеем $\beta = \alpha$.

Тогда при решении системы уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$, где вектор \mathbf{p} параметров заполнен нечеткими интервалами p_1, p_2, \dots, p_n , есть возможность применить алгоритм бисекции для набора вложенных интервалов для элементов \mathbf{p} для заданного уровня доверия α . Результатами будут вложенные интервалы функций принадлежности элементов решения, соответствующие тому же уровню доверия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [Г.1] Leibman M. J., Edgar T. F., Lasdon L. S. Efficient data reconciliation and estimation for dynamic processes using nonlinear programming techniques //Computers & chemical engineering. – 1992. – Т. 16. – №. 10-11. – С. 963-986.
- [Г.2] Semenov K.K., Solopchenko G.N. Theoretical prerequisites for implementation of metrological self-tracking of measurement data analysis programs // Measurement Techniques. – 2010. – Vol. 53. – No 6. – P. 592-599.
- [Г.3] Semenov K.K., Solopchenko G.N.. Combined method of metrological self-tracking of measurement data processing programs general problems of metrology and measurement technique // Measurement Techniques. – 2011. – Vol. 54. – P. 14–9.
- [Г.4] Семенов К.К. Метрологическое автосопровождение программ вычислений в информационно-измерительных системах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.11.16. Информационно-измерительные и управляющие системы. Санкт-Петербург. 2011.
- [Г.5] Kuehn D. R., Davidson H. Computer control. Chem. Engng Prog. 57, – 1961. – С. 44–47
- [Г.6] Vaclavek V. Studies on system engineering. II. On the application of the calculus of observations in calculations of chemical engineering balances //Collection of Czechoslovak Chemical Communications. – 1969. – Т. 34. – №. 2. – С. 364-372.
- [Г.7] Vaclavek V., Loučka M. Selection of measurements necessary to achieve multicomponent mass balances in chemical plant //Chemical Engineering Science. – 1976. – Т. 31. – №. 12. – С. 1199-1205.
- [Г.8] Wiegel R. L. Advances in mineral processing material balances //Canadian Metallurgical Quarterly. – 1972. – Т. 11. – №. 2. – С. 413-424.
- [Г.9] Hodouin D., Everell M. D. A hierarchical procedure for adjustment and material balancing of mineral processes data //International Journal of Mineral Processing. – 1980. – Т. 7. – №. 2. – С. 91-116.
- [Г.10] Simpson D. E., Voller V. R., Everett M. G. An efficient algorithm for mineral processing data adjustment //International Journal of Mineral Processing. – 1991. – Т. 31. – №. 1-2. – С. 73-96.
- [Г.11] Heraud N., Maquin D., Ragot J. Multilinear balance equilibration: Application to a complex metallurgical process //Mining, Metallurgy & Exploration. – 1991. – Т. 8. – №. 4. – С. 197-204.
- [Г.12] Reid K. J. et al. A Survey of Material Balance Computer Packages in the Mineral Processing Industry //Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry. – Soc of Min Eng of AIME, 1982. – С. 41-62.
- [Г.13] Mah R. S., Stanley G. M., Downing D. M. Reconciliation and rectification of process flow and inventory data //Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development. – 1976. – Т. 15. – №. 1. – С. 175-183.
- [Г.14] Crowe C. M., Campos Y. A. G., Hrymak A. Reconciliation of process flow rates by matrix projection. Part I: linear case //AIChE Journal. – 1983. – Т. 29. – №. 6. – С. 881-888.
- [Г.15] Swartz C. L. E. Data reconciliation for generalized flowsheet applications //THE AMERICAN CHEMICAL SOCIETY. – 1155 16TH ST, NW, WASHINGTON, DC 20036 : AMER CHEMICAL SOC, 1989. – Т. 197. – С. 58-64.
- [Г.16] Sanchez M., Romagnoli J. Use of orthogonal transformations in data classification-reconciliation //Computers & chemical engineering. – 1996. – Т. 20. – №. 5. – С. 483-493.

- [Г.17] Ripps D. L. Adjustment of experimental data //Chem. Eng. Prog. Symp. Ser. – 1965. – Т. 61. – №. 8. – С. 8-13.
- [Г.18] Reilly P. M., Carpani R. E. Application of statistical theory of adjustment to material balances //13th Canadian Chemical Engineering Congress, Montreal, Quebec. – 1963.
- [Г.19] Almasy, G. A, and T. Sztano. Checking and Correction of Measurements on the Basis of Linear System Model. //Prob. Control Inform. Theory 4 – 1975. – С. 57-69.
- [Г.20] Narasimhan, S., and R.S.H. Mah. Generalized Likelihood Ratio Method for Gross Error Identification. //AIChE Journal 33, – 1987. – С.1514-1521
- [Г.21] Tamhane. A. C., C. Jordache, and R.S.H. Mah. A Bayesian Approach to Gross Error Detection in Chemical Process Data. Part I: Model Development. //Chemometrics and Intel. Lab. Sys. 4, –1988. – 33.
- [Г.22] Tong, H., and C. M. Crowe. Detection of Gross Errors in Data Reconciliation by Principal Component Analysis. //AIChE Journal 41, – 1995. – С. 1712-1722.
- [Г.23] Romagnoli, J. A., and G. Stephanopoulos. Rectification of Process Measurement Data in the Presence of Gross Errors //Chem. Eng. Sci. 36, – 1981, – С. 1849-1863
- [Г.24] Serth, R.W., and W. A. Heenan. Gross Error Detecting and Data Reconciliation in Steam-Metering Systems. //AIChE Journal 30, – 1986. – С. 743-747.
- [Г.25] Rosenberg, J., R.S.H. Mah, and C. Jordache. Evaluation of Schemes for Detecting and Identification of Gross Errors in Process Data. //Ind. & Eng. Chem. Proc. Des. Dev. 26, – 1987. – С. 555-564
- [Г.26] Jordache, C., R.S.H. Mah, and A. C. Tamhane. Performance Studies of the Measurement Test for Detecting of Gross Error in Process Data. //AIChE Journal 31, – 1985. – С. 1187-1201.
- [Г.27] Rollins, D. K., and J. F. Davis. Unbiased Estimation Technique for Identification of Gross Errors. // AIChE Journal 38, – 1992. – С. 563-571
- [Г.28] Hlavacek, V. Analysis of a Complex Plant--Steady State and Transient Behavior I--Plant Data Estimation and Adjustment. Computers Chem. Engng. 1, – 1977. – С. 75-81.
- [Г.29] Mah, R.S.H. Design and Analysis of Performance Monitoring Systems //Chemical Process Control H (edited by D. E. Seborg and T. F. Edgar). New York: Engineering Foundation, – 1982.
- [Г.30] Tamhane, A. C., and R.S.H. Mah Data Reconciliation and Gross Error Detection in Chemical Process Networks. //Technometrics 27, – 1985. С. 409-422
- [Г.31] Mah, R.S.H. Data Screening, //Foundations of Computer-Aided Process Operations (edited by G. V. Reklaitis and H. D. Spriggs). Amsterdam: CACHE/Elsevier, – 1987, – С. 67-94.
- [Г.32] Crowe, C. M., Data Reconciliation Progress and Challenges. //J. Proc. Cont. 6, – 1996, – С. 89-98
- [Г.33] Mah, R.S.H. Chemical Process Structures, and Information Flows. //Boston: Butterworths, – 1990.
- [Г.34] Bodington, C. E. Planning, Scheduling and Control Integration in Process Industries. //New York: McGraw-Hill, – 1995
- [Г.35] Madron, F. Process Plant Performance: Measurement and Data Processing for Optimization and Retrofits. //Chichester, West Sussex, England: Ellis Horwood Limited Co., – 1992.
- [Г.36] Veverka, V. V., Madron, F. Material and Energy Balancing in Process Industries: From Microscopic Balances to Large Plants. Amsterdam, //The Netherlands: Elsevier, – 1997.
- [Г.37] Knepper, J. C., Gorman J. W. Statistical Analysis of Constrained Data Sets. //AIChE Journal 26, – 1980. – С. 260-264.

- [Г.38] Britt, H. I., and R. H. Luecke. The Estimation of Parameters in Nonlinear Implicit Models. //Technometrics 15, – 1973. – C. 233-247.
- [Г.39] Kanzow C. et al. Successive linearization methods for nonlinear semidefinite programs //Computational Optimization and Applications. – 2005. – T. 31. – №. 3. – C. 251-273.
- [Г.40] Crowe C. M. Reconciliation of process flow rates by matrix projection. Part II: The nonlinear case //AIChE Journal. – 1986. – T. 32. – №. 4. – C. 616-623.
- [Г.41] Tjoa, I. B., Biegler, L. T.. Simultaneous Strategies for Data Reconciliation and Gross Error Detection of Nonlinear Systems. //Computers Chem. Engng. 15, – 1991. – C. 679–690.
- [Г.42] Ravikumar, V., S. R. Singh, M. O. Garg, and S. Narasimhan. RAGeMA Software Tool for Data Reconciliation and Gross Error Detection, //Foundations of Computer-Aided Process Operations (edited by D.W.T. Rippin, J. C. Hale, and J. F. Davis). Amsterdam: CACHE/Elsevier, – 1994. – C. 429-436
- [Г.43] De Mulder C. et al. An open software package for data reconciliation and gap filling in preparation of Water and Resource Recovery Facility Modeling //Environmental Modelling & Software. – 2018. – T. 107. – C. 186-198.
- [Г.44] Farzi A., Mehrabani-Zeinabad A., Boozarjomehry R. B. Data reconciliation: Development of an object-oriented software tool //Korean Journal of Chemical Engineering. – 2008. – T. 25. – №. 5. – C. 955-965.
- [Г.45] Lam H. L. et al. Software tools overview: process integration, modelling and optimisation for energy saving and pollution reduction //Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering. – 2011. – T. 6. – №. 5. – C. 696-712.
- [Г.46] Manenti F. et al. Adaptive data reconciliation coupling C++ and PRO/II and on-line application by the field //Computer Aided Chemical Engineering. – Elsevier, 2010. – T. 28. – C. 373-378.
- [Г.47] Buzzi-Ferraris G., Manenti F. BzzMath: Library overview and recent advances in numerical methods //Computer Aided Chemical Engineering. – 2012. – T. 30. – C. 1312-1316.
- [Г.48] Cencic O. Nonlinear data reconciliation in material flow analysis with software STAN //Sustainable Environment Research. – 2016. – T. 26. – №. 6. – C. 291-298.
- [Г.49] Jiang T. et al. Strategy for improving data quality for a Kraft pulp mill recausticizing plant //FOCAPO 2003: Proceedings Foundations Of Computer Aided Process Operations. – 2003. – C. 467-470.
- [Г.50] Yong J. Y. et al. Data reconciliation for energy system flowsheets //Computer Aided Chemical Engineering. – Elsevier, 2016. – T. 38. – C. 2277-2282.
- [Г.51] Câmara M. M. et al. Numerical aspects of data reconciliation in industrial applications //Processes. – 2017. – T. 5. – №. 4. – C. 56.
- [Г.52] Stanley, G. M., Mah R.S.H. Estimation of Flows and Temperatures in Process Networks. //AIChE Journal 23, – 1977. – C. 642-650.
- [Г.53] Narasimhan S., Jordache C. Data reconciliation and gross error detection: An intelligent use of process data. – Elsevier, – 1999.
- [Г.54] Ramamurthi, Y., P. B. Sistu, Bequette B. W. Control Relevant Dynamic Data Reconciliation and Parameter Estimation. //Computers Chem. Engng. 17, – no. 1, – 1993. – C. 41-59.
- [Г.55] Kim, I. W., M. J. Liebman, and T. F. Edgar. Robust Error in Variables Estimation using Nonlinear Programming Techniques. //AIChE Journal 36, – 1990. – C. 985-993,

- [Г.56] Kim, I. W., M. J. Liebman, and T. F. Edgar. A Sequential Error in Variables Estimation Method for Nonlinear Dynamic Systems. //Computers Chem. Engng. 15, – 1991. – C. 663-670.
- [Г.57] Allgöwer F. et al. Nonlinear predictive control and moving horizon estimation—an introductory overview //Advances in control. – 1999. – C. 391-449
- [Г.58] Esposito W. R., Floudas C. A. Global optimization for the parameter estimation of differential-algebraic systems //Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2000. – T. 39. – №. 5. – C. 1291-1310
- [Г.59] Rao C. V., Rawlings J. B., Mayne D. Q. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations //IEEE transactions on automatic control. – 2003. – T. 48. – №. 2. – C. 246-258
- [Г.60] Özyurt D. B., Pike R. W. Theory and practice of simultaneous data reconciliation and gross error detection for chemical processes //Computers & chemical engineering. – 2004. – T. 28. – №. 3. – C. 381-402
- [Г.61] Prata D. M. et al. Nonlinear dynamic data reconciliation and parameter estimation through particle swarm optimization: Application for an industrial polypropylene reactor //Chemical Engineering Science. – 2009. – T. 64. – №. 18. – C. 3953-3967
- [Г.62] Llanos C. E., Sanchez M. C., Maronna R. A. Robust estimators for data reconciliation //Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2015. – T. 54. – №. 18. – C. 5096-5105
- [Г.63] [Г. Groeneboom P., Jongbloed G. Nonparametric estimation under shape constraints. – Cambridge University Press, 2014. – T. 38.,
- [Г.64] Horowitz J. L., Lee S. Nonparametric estimation and inference under shape restrictions //Journal of Econometrics. – 2017. – T. 201. – №. 1. – C. 108-126
- [Г.65] Shariatmadar K., Versteyhe M. Linear programming under p-box uncertainty model //2019 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCMA). – IEEE, 2019. – C. 84-89.
- [Г.66] Shariatmadar K., Versteyhe M. Linear programming under p-box uncertainty model //2019 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCMA). – IEEE, 2019. – C. 84-89.
- [Г.67] Bagajewicz M. Data reconciliation and instrumentation upgrade. Overview and challenges //FOCAPO (Foundations of Computer Aided Process Operations), Coral Springs, FL, USA. – 2003. – T. 372.,
- [Г.68] Bagajewicz M., Markowski M. Instrumentation design and upgrade using an unconstrained method with pure economical objectives //Proceedings of FOCAPO. – 2003.,
- [Г.69] Gala M., Bagajewicz M. J. Rigorous methodology for the design and upgrade of sensor networks using cutsets //Industrial & engineering chemistry research. – 2006. – T. 45. – №. 20. – C. 6679-6686.,
- [Г.70] Kotecha P. R., Bhushan M., Gudi R. D. Multi-objective optimization based robust sensor network design //IFAC Proceedings Volumes. – 2010. – T. 43. – №. 5. – C. 79-84.
- [Г.71] Reznik L. K., Solopchenko G. N. Use of priori information on functional relations between measured quantities for improving accuracy of measurement //Measurement. – 1985. – T. 3. – №. 3. – C. 98-106.
- [Г.72] Madron, F. Process Plant Performance: Measurement and Data Processing for Optimization and Retrofits. Chichester, West Sussex, England: Ellis Horwood Limited Co., – 1992.
- [Г.73] Pai, C.C.D., Fisher G. Application of Broyden's Method to Reconciliation of Nonlinearly Constrained Data. //AIChE Journal 34, – no. 5, – 1988, – C. 873-876.

- [Г.74] Julier S. J., Uhlmann J. K. New extension of the Kalman filter to nonlinear systems // Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI. – International Society for Optics and Photonics, – 1997. – Т. 3068. – С. 182-193.
- [Г.75] Wang D., Romagnoli J. A. Robust data reconciliation based on a generalized objective function // IFAC Proceedings Volumes. – 2002. – Т. 35. – №. 1. – С. 191-196.
- [Г.76] Hampel F. R. et al. Robust statistics: the approach based on influence functions. – Wiley-Interscience; New York, – 1986.
- [Г.77] Матиясевич Ю. В. Пакет алгол-процедур для вычислений с контролируемой точностью. // В кн.: Труды Всесоюз. симпози. "Искусственный интеллект и автоматизация исследований в математике". – Киев: ИК АН УССР, 1978. – С. 61-62.
- [Г.78] Челпанов И. Б. Задачи выбора и аттестации алгоритмов обработки сигналов средств измерений // Метрология. – 1981. – №6.
- [Г.79] Тарбеев Ю. В., Челпанов И. Б., Кудрявцев М. Д., Сирая Т. Н. Задачи и методы аттестации алгоритмов // Измерительная техника. – 1983. – № 9. – С. 28-29.
- [Г.80] Тарбеев Ю. В., Челпанов И. Б., Сирая Т. Н. Аттестация алгоритмов обработки данных при измерениях // Измерения, контроль, автоматизация. – 1991. – № 2 (78). – С. 3-13.
- [Г.81] ГОСТ 26.203-86. ЕССП. Комплексы измерительно-вычислительные. Признаки классификации. Общие требования. – М.: Изд-во стандартов, 1986. – 11 с.
- [Г.82] Принципы нормирования, определения и контроля характеристик
- [Г.83] Шокин Ю. И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981.
- [Г.84] Destouches J. L., Fevrier P. New Trends in Expressing Results of Measurements // Proc. of IMEKO Coll. Budapest. 1980. – P. 37.
- [Г.85] Mari L. Notes on Fuzzy Set Theory as a Tool for the Measurement Theory // Proc. of XII IMEKO World Congress «Fundamental metrology, measurement theory and education». Beijing, China. 1991. – Vol. 3. – P. 70-74.
- [Г.86] Otto M., Bandemer H. Calibration with Imprecise Signals and Concentrations based on Fuzzy Theory // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. – Vol. 1. – No 1. – 1986. – P. 71-78.
- [Г.87] Reznik L. K., Jonson W. C., Solopchenko G. N. Fuzzy interval as a Basis for Measurement Theory // Proc. NASA Conf. NAFIPS'94. San-Antonio, Texas. 1994. – P. 405-406.
- [Г.89] Солопченко Г. Н. Представление измеряемых величин и погрешностей измерений как нечетких переменных // Измерительная техника. – 2007. – №2. – С. 9-12.
- [Г.90] Семенов К. К., Солопченко Г. Н. Теоретические предпосылки реализации метрологического автосопровождения программ обработки результатов измерений // Измерительная техника. – 2010. – № 6. – С. 9-14.
- [Г.91] Семенов К. К., Солопченко Г. Н. Исследование комбинированного метода метрологического автосопровождения программ обработки результатов измерений // Измерительная техника. – 2011. – № 4. – С. 14-19.
- [Г.92] Colombo A. G., Jaarsma R. J. A Powerful Numerical Method to Combine Random Variables // IEEE Transactions on Reliability. – 1980. – Vol. R-29. – No 2. – P. 126-129.
- [Г.93] Williamson R. C., Downs T. Probabilistic Arithmetic. I. Numerical Methods for Calculating Convolutions and Dependency Bounds // International Journal of Approximate Reasoning. – 1990. – No 4. – P. 89-158.
- [Г.94] Moore R. E. Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing: a thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy. – Stanford University, 1962.

- [Г.95] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement / International Organization of Standardization, 1993. Аутентичный перевод представлен в: Руководство по выражению неопределенности измерения / под ред. Слаева В. А. – СПб.: ГП «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1999. – 126 с.
- [Г.96] МИ 1317-2004. Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров. – М.: Изд-во Госстандарта, 2000.
- [Г.97] Krämer W. Generalized Intervals and the Dependency Problem // Proc. Appl. Math. Mech. – 2006. – No 6. – P. 683-684.
- [Г.98] INTLAB – INTerval LABoratory [Электронный ресурс]. URL: <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>. Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.99] Rump S. M. INTerval LABoratory. In: Developments in Reliable Computing / Tibor Csendes (ed.). – Kluwer, Dordrecht, 1999. – p. 77-104.
- [Г.100] Wittig A., Berz M. Rigorous high precision interval arithmetic in COSY INFINITY // Proc. of the Fields Institute. – 2009.
- [Г.101] COSY INFINITY [Электронный ресурс]. URL: cosyinfinity.org. Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.102] FI_LIB and FILIB++ [Электронный ресурс]. URL: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~xsc/software/filib.html>. Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.103] Lerch M., Tischler G., Gudenberg J. W. V., Hofschuster W., Kramer W. Filib++, a fast interval library supporting containment computations // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2006. – Vol. 32. – No. 2. – P. 299-324.
- [Г.104] Kreinovich V., Berleant D. J., Koshelev M. Interval and related software [Электронный ресурс]. URL: <http://www.cs.utep.edu/interval-comp/intsoft.html>. Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.105] Hickey T., Ju Q., Van Emden M. H. Interval arithmetic: From principles to implementation // Journal of the ACM (JACM). – 2001. – Vol. 48. – No. 5. – P. 1038-1068.
- [Г.106] Hansen E. R. Generalized Interval Arithmetic // In: Interval Mathematics / Edited by K. L. Nickel. – Vol. 29 of lecture notes in computer science. – Berlin: Springer-Verlag, 1975. – P. 7-18
- [Г.107] Berz M., Hoffstätter G. Computation and Application of Taylor Polynomials with Interval Remainder Bounds // Reliable Computing. – 1998. – Vol. 4. – No 1. – P. 83-97.
- [Г.108] de Figueiredo L. H., Stolfi J. An Introduction to Affine Arithmetic // TEMA Tend. Mat. Apl. Comput. – 2003. – Vol. 4. – No 3. – P. 297-312.
- [Г.109] Sun J., Huang Y., Li J., Wang J. M. Chebyshev Affine Arithmetic Based Parametric Yield Prediction Under Limited Descriptions of Uncertainty // Proc. of Conference ASP-DAC'2008. COEX. Seoul, Korea. Abstract 6B-3. – 2008. – P.531-536.
- [Г.110] Sun J., Huang Y., Li J., Wang J. M. Chebyshev Affine Arithmetic Based Parametric Yield Prediction Under Limited Descriptions of Uncertainty // Proc. of Conference ASP-DAC'2008. COEX. Seoul, Korea. Abstract 6B-3. – 2008. – P.531-536.
- [Г.111] Gay O. Libaa: Une librairie C++ d'Affine Arithmetic. EPFL, 2003.
- [Г.112] Stolfi J. Libaa [Электронный ресурс]. Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный. URL: www.ic.unicamp.br/~stolfi/EXPORT/software/c/Index.html#libaa.

- [Г.113] LibAffa, an LGPL implementation of affine arithmetic. C++ Affine Arithmetic library. [Электронный ресурс]. URL: <http://savannah.nongnu.org/projects/libaffa>. Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.114] techniques for range based system simulations. – Specification Design Languages (FDL 2010). – 2010. – P. 1-6.
- [Г.115] aaflib – An Affine Arithmetic C++ Library [Электронный ресурс]. URL: <http://aaflib.sourceforge.net/> Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.116] Kie S. YalAA: Yet Another Library for Affine Arithmetic // Reliable Computing. – 2012. – Vol. 16. – P. 114-129.
- [Г.117] YalAA: Yet Another Library for Affine Arithmetic [Электронный ресурс]. URL: <http://www.scg.inf.uni-due.de/fileadmin/Projekte/YalAA/index.html>. Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.118] Neumaier A. The wrapping effect, ellipsoid arithmetic, stability and confidence regions // Computing Supplement. – 1993. – Vol. 9. – P. 175-190.
- [Г.119] Kreinovich V., Neumaier A., Xiang G. Towards a combination of interval and ellipsoid uncertainty // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13. – № 6. – С. 5-16.
- [Г.120] Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Ser. SCFA. Birkhauser, 1997.
- [Г.121] Ellipsoids: Ellipsoidal Toolbox for Matlab [Электронный ресурс]. URL: <http://systemanalysisdpt-cmc-msu.github.io/ellipsoids> Дата обращения: 15.08.2016. Формат доступа: свободный.
- [Г.122] Colombo A. G., Jaarsma R. J. A Powerful Numerical Method to Combine Random Variables // IEEE Transactions on Reliability. – 1980. – Vol. R-29. – No 2. – P. 126-129.
- [Г.123] Williamson R. C. Probabilistic Arithmetic: a thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy. – Department of Electrical Engineering, University of Queensland. – 1989
- [Г.124] Berleant D. Automatically verified reasoning with both intervals and probability density functions // Interval Computations. – 1993. – No. 2. – P. 48-70.
- [Г.125] Berleant D., Xie L., Zhang J. Statool: A Tool for Distribution Envelope Determination (DEnv), an Interval-Based Algorithm for Arithmetic on Random Variables // Reliable Computing. – 2003. – Vol. 9. – No 2. – P. 91-108.
- [Г.126] W. Li, Hyman J. Computer arithmetic for probability distribution variables // Reliability Engineering and System Safety. – 2004. – Vol. 85.
- [Г.127] Герасимов В. А., Добронев Б. С., Шустров М. Ю. Численные операции гистограммной арифметики и их применения // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 2. – С. 83–88.
- [Г.128] Dobronets B. A., Krantsevich A. M., Krantsevich N. M. Software implementation of numerical operations on random variables // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2013. – Vol. 6. – No 2. – P. 168–173.
- [Г.129] Добронев Б. С., Попова О. А. Распространение неопределенности для входных неизвестных распределений // Тр. XVI Международной ЭМ конференции по эвентологической математике и смежным вопросам. Красноярск. – 2012. – С. 93-96.
- [Г.130] Williamson R. C., Downs T. Probabilistic Arithmetic. I. Numerical Methods for Calculating Convolutions and Dependency Bounds // International Journal of Approximate Reasoning. – 1990. – No 4. – P. 89-158.
- [Г.131] Ferson S., Kreinovich V., Ginzburg L., Myers D. S., Sentz K. Constructing Probability

Boxes and Dempster-Shafer Structures. Report SAND2002-4015. Sandia National Laboratories, 2003.

[Г.132] Bouissou O., Goubault E., Goubault-Larrecq J., Putot S. A generalization of p-boxes to affine arithmetic // Computing. – 2012. – Vol. 94. – No 2-4. – P. 189-201

[Г.133] Ferson S. RAMAS Risk Calc 4.0: risk assessment with uncertain numbers. Boca Raton, FL: Lewis Press; 2002.

[Г.134] Карачанская Е.В. Стохастизация классических моделей с динамическими инвариантами // Математические заметки СВФУ. – 2020. – Т. 27. – Вып.1. – С. 69-87.

[Г.135] How can I generate samples efficiently from probability boxes? [Г.Электронная страница]. – Формат доступа: свободный. Дата обращения: 01.06.2024. URL: <https://www.researchgate.net/post/How-can-I-generate-samples-efficiently-from-probability-boxes>

[Г.136] Семенов К. К. Достоверность результатов применения метода Монте-Карло в задачах интервального анализа // Вычислительные технологии. – 2016. – Т. 21. – № 2. – С. 42-52.

[Г.137] Schöbi, R., Sudret, B. (2017). Uncertainty propagation of p-boxes using sparse polynomial chaos expansions. Journal of Computational Physics. Vol. 339. P. 307-327.

[Г.138] Zhang, H., Beer, M. (2012). Interval quasi-Monte Carlo method for reliability assessment with imprecise probability. REC 2012. P. 13-15.

[Г.139] Kosheleva, O., Kreinovich, V. (2023). How to Efficiently Propagate P-Box Uncertainty. University of Texas at El Paso. Departmental Technical Reports (CS). Available online 11-1-2023. Technical Report UTEP-CS-23-65. URL: https://scholarworks.utep.edu/cs_techrep/1850

[Г.140] Berleant D., Ceberio M., Kreinovich V., Xiang G. Towards Adding Probabilities and Correlations to Interval Computations // International Journal of Approximate Reasoning. – 2007. – Vol. 46. – № 3. – P. 499-510.

[Г.141] Shafer G. A mathematical Theory of Evidence. – Princeton. New-Jersey: Princeton University Press, 1976. – 297 p.

[Г.142] Walley P. Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. – London: Chapman and Hall, 1991.

[Г.143] Regan H. M., Ferson S., Berleant D. Equivalence of methods for uncertainty propagation of real-value random variables // International Journal of Approximate Reasoning. – 2004. – Vol. 36. – № 1 – P. 1-30.

[Г.144] Резник Л. К. Математическое обеспечение обработки нечеткой информации экспериментатора в ИВК // Труды ВНИИЭП «Архитектура, модели и программное обеспечение ИИС и ИВК». – Л.: 1983.

[Г.145] Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / Борисов А. Н., Алексеев А. В., Меркурьева Г. В. и др. – М.: Радио и связь. 1989. – 304

[Г.146] Семенов К. К. Нечеткие переменные как способ формализации характеристик погрешности в задачах математической обработки // Информатика и её применения. – 2012. – Т. 6. – № 2. – С. 101-112.

[Г.147] Semenov K. K., Solopchenko G. N. Automatic propagation of measurement uncertainties through metrological software // Proceedings of XXI IMEKO World Congress “Measurement in Research and Industry”, 2015, Prague. – P. 2035-2041.

[Г.148] Семенов К. К. Метрологическое сопровождение программ вычислений в информационно-измерительных системах / дисс. на соискание степени канд. техн. наук по

- спец. 05.11.16 «Информационно-измерительные и управляющие системы», СПбГПУ, 2011.
- [Г.149] ГОСТ Р 8.654. ГСИ. Требования к программному обеспечению средств измерений. Основные положения. – М.: Госстандарт России, 2009.
- [Г.150] ГОСТ 8.009. ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1985.
- [Г.151] ГОСТ 8.596. ГСИ. Метрологическое обеспечение измерительных систем. – М.: Госстандарт России, 2002.
- [Г.152] Желнов Ю. А. Точностные характеристики управляющих вычислительных машин. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
- [Г.153] МИ 2955. Рекомендации по метрологии. ГСИ. Типовая методика аттестации программного обеспечения средств измерений. – М.: Госстандарт России, 2010
- [Г.154] МИ 3286. Рекомендации по метрологии. ГСИ. Проверка защиты программного обеспечения и определение ее уровня при испытаниях средств измерений в целях утверждения типа. – М.: Госстандарт России, 2010.
- [Г.155] Слаев В. А., Чуновкина А. Г. Аттестация программного обеспечения, используемого в метрологии: справочная книга. / Под ред. В.А. Слаева. – СПб.: Профессионал, 2009. – 320 с.
- [Г.156] Трансформирование распределений с использованием метода Монте-Карло. Приложение 1 к «Руководству по выражению неопределенности измерения» – Оценивание данных измерений / ОКРМ 101:2008. Пер. с англ.; под науч. ред. В. А. Слаева, А. Г. Чуновкиной. – СПб.: Профессионал, 2010. – 182 с.
- [Г.157] Чуновкина А. Г., Слаев В. А., Степанов А. В., Звягин Н. Д. Оценивание неопределенности измерений при использовании программ обработки данных // Измерительная техника. – 2008. – № 7. – С. 3 – 8.
- [Г.158] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement / International Organization of Standardization, 1993. Аутентичный перевод представлен в: Руководство по выражению неопределенности измерения / под ред. Слаева В. А. – СПб.: ГП «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1999. – 126 с.
- [Г.159] ГОСТ 26.203-86. ЕССП. Комплексы измерительно-вычислительные. Признаки классификации. Общие требования. – М.: Изд-во стандартов, 1986. – 11 с.
- [Г.160] Applications of Interval Computations / Kearfort R. B., Kreinovich Vladik (eds). – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1996. – 425 p.
- [Г.161] Крейнвич В. Я., Павлович М. И. Оценка погрешности результата косвенных измерений с помощью вычислительного эксперимента // Измерительная техника. – 1985. – №3. – С. 11-13.
- [Г.162] Semenov K. K., Reznik L. K., Solopchenko G. N. Fuzzy Intervals Application for Software Metrological Certification in Measurement and Information Systems // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. – 2015. – Vol. 23, Suppl. 1. – P. 95-104.
- [Г.163] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement / International Organization of Standardization, 1993. Аутентичный перевод представлен в: Руководство по выражению неопределенности измерения / под ред. Слаева В. А. – СПб.: ГП «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1999. – 126 с.
- [Г.164] МИ 1317-2004. Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы

использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров. – М.: Изд-во Госстандарта, 2000.

[Г.165] МИ 2174-91. Рекомендация по метрологии. ГСИ. Аттестация алгоритмов и программ обработки данных при измерениях. Основные положения. – СПб.: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева. – 27 с.

[Г.166] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 286 с.

[Г.167] Squire W., Trapp G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions // SIAM Rev. – 1998. – Vol. 40. – № 1. – P. 110-112.

[Г.168] Corliss G., Faure C., Griewank A., Hascoët L., Naumann U. Automatic Differentiation Bibliography // In: Automatic Differentiation of Algorithms: From Simulation to Optimization. – New York: Springer, 2002. – P. 383–425.

[Г.169] Ефремов А.А., Козлов В.Н. Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов // Информационно-управляющие системы. – 2023. – № 4. – С. 47-55.

[Г.170] Efremov A.A. Projection operator for solving generalized problems of program motions stabilization // Информатика, телекоммуникации и управление. – 2023. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 49-59.

[Г.171] Garanin, V.A., Semenov, K.K. (2021b). Semi-nonparametric approach for measured data reconciliation based on the Gram-Charlier series expansion. Measurement: Sensors

[Г.172] Kolassa, J. E. (2006). Series approximation methods in statistics (Vol. 88). Springer Science & Business Media

[Г.173] Jaki T., West R. W. Maximum kernel likelihood estimation // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 2008. – Т. 17. – №. 4. – С. 976-993.