凯特摆实验报告

姓名：张积翔　　学号：PB23020595

摘要：

本实验利用凯特摆及多用数字测试仪测量了重力加速度并计算了拓展不确定度,得到当地的重力加速度为$9.8087(44)m/s^2$。

关键词：凯特摆；重力加速度；不确定度分析

1. 引言

1818 年凯特(Kater)设计出一种物理摆，他巧妙地利用物理摆的共轭点，避免和减少了某些不易准确测量的物理量对实验结果的影响，提高了测量重力加速度的精度。19 世纪 60 年代雷普索里德对此作了改进，成为当时测重力加速度的最精确方法。波斯坦大地测量所曾同时以五个凯特摆花了八年时间(1896-1904)测得当地重力加速度的值$g = 981.274 \pm 0.003\mathrm{cm}/s^2$。凯特摆测量重力加速度的实验方法不仅设计思想上有其独到之处，而且在科学史上有重要价值。[1]

本实验对通过凯特摆测量重力加速度，旨在学习凯特摆的实验设计思想和技巧，掌握如何用凯特摆精确的测量重力加速度，并学习毫秒计时器的使用方法及减小测量误差的方法。

2. 实验原理

2.1 实验仪器

凯特摆、光电探头、多用数字测试仪、卷尺、钢尺、T 字形支架。

2.2 实验原理

首先对于图 1 所示复摆，G 为其质心，所受重力加速度为 g，复摆绕转轴 O 做周期性转动。其动力学方程为：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mghsin\theta$$

当摆动幅度很小时，$sin\theta \approx \theta$，代入上式得到简谐振动方程，由此得到小幅度摆动下复摆的摆动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

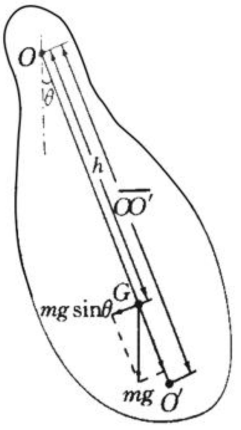

图 1：复摆示意图

设复摆绕平行于 O 轴并且通过重心 G 的转动惯量为I_G，根据平行轴定理$I_G = I + mh^2$得到复摆振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + mh^2}{mgh}}$$

对比单摆的周期公式$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，得

$$l = \frac{I + mh^2}{mh}$$

l 称为复摆的等效摆长。如果能够精确测定测出周期 T 和等效摆长 l，便可精确得到重力加速度 g。如图 2 所示为基于复摆原理设计的凯特摆，可分别以 O 和O'作为转轴进行摆动。

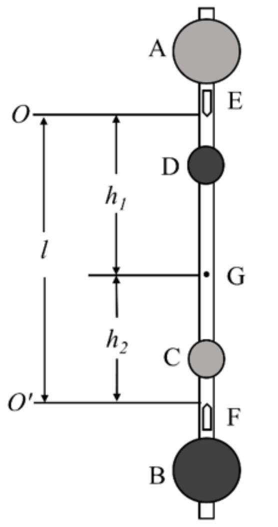

图 2：凯特摆示意图

代入复摆转动周期公式得到凯特摆的周期公式为:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + m{h_1}^2}{mgh_1}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + m{h_2}^2}{mgh_2}}$$

其中T_1和h_1为摆绕 O 轴的摆动周期和 O 轴到重心 G 的距离，T_2和h_2为摆绕O'轴的摆动周期和O'轴到重心 G 的距离。当调节至$T_1 \approx T_2$时，可以证明$h_1 + h_2 \approx l$即等效摆长，此时将上面两式消去I_G得到：

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2l} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)}$$

此式中，l、T_1、T_2都是可以精确测定的量，而h_1、h_2则不易测准。由此可知，上式右端第一项可以精确求得，而第二项则不易精确求得。但当$T_1 \approx T_2$以及$2(h_1 - h_2)$值较大时，第二项的值中分子很小，而分母可以很大，相对第一项项是非常小的，可以看作是T_1、T_2不完全相等的修正（当T_1、T_2完全相等时，第二项项等于 0），这样第二项的不精确对测量结果产生的影响就微乎其微了。凯特摆在设计时，两个大摆锤一个是金属材质，一个是塑料材质，正是为了使得重心偏向一遍，使得$2(h_1 - h_2)$有较大差值，以减小第二项的影响。

2.3 实验内容

首先调节仪器水平，使凯特摆的刀口置于刀承上呈线接触。在摆锤摆幅为 3cm（小角度）下，通过调节摆锤的位置使$|T_1 - T_2| < 1ms$。轮流测量摆动周期 10T_1、10T_2各五次；用 T 型支架确定此时的重心，并分别测量l、h_1(或h_2)各三次。处理数据求出重力加速度 g 和U_g（P = 0.95）。

3. 实验结果与分析

3.1 实验原始数据

以较大金属摆锤在下时作为编号 1，摆动周期及测量的l、h_1数据如下

表 1：凯特摆的摆动周期数据

10T_1（s）	17.2089	17.2067	17.2088	17.2075	17.2080
10T_2（s）	17.2022	17.2000	17.2009	17.2003	17.2021

表 2：测量的l、h_1数据

l(cm)	73.38	73.40	73.37

h_1(cm)	30.10	30.05	29.97

3.2 实验数据处理

由原始数据计算$\overline{T}_1$、$\overline{T}_2$、$\overline{h_1}$、$\overline{l}$、h_2：

$$\overline{T}_1=\frac{17.2089+17.2067+17.2088+17.2075+17.2080}{50}=1.720798s$$

$$\overline{T}_2=\frac{17.2022+17.2000+17.2009+17.2003+17.2021}{50}=1.72011s$$

$$\overline{h_1}=\frac{30.10+30.05+29.97}{3}=30.04cm$$

$$\overline{l}=\frac{73.38+73.40+73.37}{3}=73.38cm$$

$$h_2=\overline{l}-\overline{h_1}=43.34cm$$

将数据代入公式

$$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{T_1^2+T_2^2}{2l}+\frac{T_1^2-T_2^2}{2(h_1-h_2)}$$

计算得

$$g=\frac{4\times3.1416^2}{\frac{1.780798^2+1.72011^2}{2\times0.7338}+\frac{1.780798^2-1.72011^2}{2(0.3004-0.4334)}}=9.8087m/s^2$$

调查资料知合肥重力加速度为$9.7947m/s^2$，故相对误差为

$$\varepsilon=\frac{9.8087-9.7947}{9.7947}\times100\%=0.143\%$$

3.3 不确定度分析

对于公式

$$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{T_1^2+T_2^2}{2l}+\frac{T_1^2-T_2^2}{2(h_1-h_2)}$$

由于公式右侧第二项较小，故其带来的误差也较小，因此在进行不确定度分析时仅考虑公式右侧第一项的误差。

首先分析等效长度 l 的标准不确定度。建立如下测量模型$l=\overline{l}+l_0$，其中l_0为钢卷尺的实验误差对测量的影响。

对于$\overline{l}$，计算其 A 类不确定度：

$$u_{\overline{l}}=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{3}\left(l_n-\overline{l}\right)^2}{3\times2}}=9.129\times10^{-5}m$$

对于l_0，考虑钢卷尺最大允差为 0.12mm 且仪器误差为正态分布，计算其 B 类不确定度

$$u_{l_0}=\frac{0.00012}{3}=4\times10^{-5}m$$

因此 l 的标准不确定度为：

$$u_l=\sqrt{u_l^2+u_{l_0}^2}=9.967\times10^{-5}m$$

然后分析周期T_1的标准不确定度。建立如下测量模型$T_1=\overline{T}_1+\frac{1}{10}T_0$，其中$T_0$为实验中测量十个周期时实验仪器误差造成的影响。

对于$\overline{T_1}$，计算其 A 类不确定度：

$$u_{\overline{T_1}}=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{5}(T_{1n}-\overline{T})^2}{5\times4}}=4.1158\times10^{-5}s$$

对于T_0，考虑实验仪器的误差为正态分布，最大允差为 0.0001s，则

$$u_{T_0}=\frac{0.0001}{3}=3.333\times10^{-5}s$$

因此周期T_1的标准不确定度为

$$u_{T_1}=\sqrt{u_{\overline{T_1}}^2+\left(\frac{1}{10}u_{T_0}\right)^2}=4.129\times10^{-5}s$$

同理分析周期T_2的标准不确定度，测量模型$T_2=\overline{T}_2+\frac{1}{10}T_0$

$$u_{\overline{T_2}}=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{5}(T_{2n}-\overline{T})^2}{5\times4}}=4.4102\times10^{-5}s$$

周期T_2的标准不确定度为：

$$u_{T_2}=\sqrt{u_{\overline{T_2}}^2+\left(\frac{1}{10}u_{T_0}\right)^2}=4.4228\times10^{-5}s$$

下面计算重力加速度 g 的标准不确定度：

$$u_g=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}u_l\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial T_1}u_{T_1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial T_2}u_{T_2}\right)^2}$$

$$=g\sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2+\left(\frac{2T_1}{T_1^2+T_2^2}u_{T_1}\right)^2+\left(\frac{2T_2}{T_1^2+T_2^2}u_{T_2}\right)^2}=1.376\times10^{-3}m/s^2$$

最后计算重力加速度的拓展不确定度，各分量的有效自由度为：

$$v_{eff}(l)=\frac{u_l^4}{\frac{u_l^4}{3-1}+\frac{u_{l_0}^4}{\infty}}\approx3$$

$$v_{eff}(T_1)=\frac{u_{T_1}^4}{\frac{u_{\overline{T_1}}^4}{5-1}+\frac{u_{T_0}^4}{\infty}}\approx4$$

$$v_{eff}(T_2)=\frac{u_{T_2}^4}{\frac{u_{T_2}^4}{5-1}+\frac{u_{T_0}^4}{\infty}}\approx 4$$

因此重力加速度 g 的有效自由度为

$$v_{eff}(g)=\frac{u_g^4}{\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial l}u_l\right)^4}{v(l)}+\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial T_1}u_{T_1}\right)^4}{v(T_1)}+\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial T_2}u_{T_2}\right)^4}{v(T_2)}}\approx 3$$

查表得$k_{0.95}=3.18$，故拓展不确定度为

$$u_{0.95}=k_{0.95}\times u_g=4.376\times 10^{-3}m/s^2$$

综上实验数据处理，重力加速度为

$$g=9.8087(44)m/s^2$$

4. 思考题

4.1 凯特摆测量重力加速度, 在实验设计上有什么特点？避免了什么量的测量？降低了哪个量测量精度？实验室如何来实现？

实验特点：将较难测量、误差较大的物理量转化为较易测量的物理量来减小误差。实验在原理上将较难测量的转动惯量消除，从而避免了测量转动惯量I_G，利用复摆的共轭性，当$T_1=T_2$时，可以证明$h_1+h_2=l$即等效摆长，在实验室条件下调节$T_1\approx T_2$，得到公式

$$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{T_1^2+T_2^2}{2l}+\frac{T_1^2-T_2^2}{2(h_1-h_2)}$$

公式中的h_1、h_2测量精度较低，但当$T_1\approx T_2$以及$2(h_1-h_2)$值较大时，第二项的值中分子很小，而分母可以很大，相对第一项非常小。在实际的实验过程中，通过调节摆锤的位置使$|T_1-T_2|<1ms$即认为$T_1\approx T_2$。

4.2 结合误差计算, 影响凯特摆测量精度的主要因素是什么？将所得的实验结果与当地的重力加速度的公认值比较，有无偏差？为什么？

由不确定度分析知, 摆长测量的仪器误差以及统计数据的偏差以及周期测量的误差均会对凯特摆的测量精度造成影响。实验的重力加速度测量值与合肥当地的重力加速度公认值的相对误差为$\varepsilon=0.143\%$，有较小偏差。造成误差的原因包括实验仪器的误差、实验过程中人为读数的误差、空气阻力的影响、凯特摆刀口与凹槽之间摩擦带来的影响等。

4.3 摆的角振幅的大小，对实验结果有无影响？

有影响。在复摆的周期公式的证明中需要用到$sin\theta\approx\theta$的近似，因此摆的角幅度不可过

大使近似产生较大误差。而如果摆的角振幅过小则会增大凯特摆刀口与凹槽之间摩擦带来的影响。同时应尽可能使每次凯特摆的角振幅相近来减小空气阻力带来的影响，实验过程中通过控制初始释放位置做到这一点。

4.4 总结测量重力加速度的方法，比较其优缺点。

首先是匀加速直线运动测重力加速度，实验优点为较易操作，利用气垫导轨确实在一定程度上减小了误差，但是由于空气阻力以及测量量较不精准，故会有较大误差。

其次是单摆法测重力加速度，其优点是实验较为简单较易操作，尽管利用累计放大法但是仍然会因为有空气阻力等影响而产生较大误差。

相较于前两种方法，用凯特摆测重力加速度则有误差较小的优点，而缺点则是需要调整摆锤位置使$T_1 \approx T_2$，操作上较前两者复杂。

5. 结论

本实验利用凯特摆测量了当地的重力加速度并计算了拓展不确定度，得到的重力加速度为$9.8087(44) m/s^2$，与当地的重力加速度公认值的相对误差为$\varepsilon = 0.143\%$，可认为相对误差较小。

6. 参考文献

[1]. 弗兰克-赫兹实验.实验讲义.2024

[2]. 测量的不确定度与数据处理方法.实验讲义.2024

附录：签字的原始数据

张积翔　　PB23020595

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

以金属大摆锤为编号

$10T_1(s)$	17.2089	17.2067	17.2088	17.2075	17.2080
$10T_2(s)$	17.2022	17.2000	17.2009	17.2003	17.2021

$h_1 =$ ~~31.00cm~~ 30.10cm , 30.05cm , 29.97cm

$l = 73.38cm$, 73.40 cm , 73.37cm

得 $\bar{h}_1 = 30.04\ cm$, $\bar{l} = 73.38\ cm$, $h_2 = 43.34\ cm$

$\bar{T}_1 = 1.720798s$, $\bar{T}_2 = 17.2011s$

计算得,

$g = 9.80868\ m/s^2$

相对误差 $\varepsilon = \frac{|9.80868-9.7947|}{9.7947} \times 100\% = 0.143\%$

李 . 11.15

思考题：凯特摆设计较重可减小空气阻力影响。

摆锤不同材质大小可以使 $\frac{T_1^2-T_2^2}{2(h_1-h_2)}$ 项中的 h_1-h_2 较大，从而使这一项较小。

圆形为对称形状，可以使不同半周期振动相同，保持振动稳定性，同时可减小空气阻力影响。

重量不同、形状不同摆锤交叉安放可以保证两侧重量相近，同时便于两侧重量调整(即均有粗调、细调)。