Lecture notes on theoretical mechanics

Scientific LAN

2024 年 10 月 24 日

前言

这里是某科学的懒羊羊，该课程笔记为本人大二上于中国科学技术大学潘海俊老师的理论力学课程的学习笔记，并以潘海俊老师编著的理论力学导论为参考书籍编纂，用于本人学习巩固课程知识并在此公开分享与各位共同学习。如有错误之处还请谅解。

Scientific LAN

2024 年 10 月 24 日

目录

第一章　运动学

1.1　坐标变换

1.1.1　符号

求和约定: 在某一单项式中同一指标重复出现，则意味着对其求和。

$$(AB)_{ij} = \sum_{k}^{n} A_{ik}B_{kj} \Leftrightarrow (AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

求和指标称为哑指标，若无特殊说明则均使用求和约定。如：$A_{ii} = trA$

kronecker 符号:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

因此有

$$\delta_{ii} = 3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$$

$$A_{ik}\delta_{ki} = trA$$

$$A_{ij}B_{ji} = trAB$$

levi-civita(排列) 符号

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j1} & \delta_{j1} \\ \delta_{k1} & \delta_{k1} & \delta_{k1} \end{vmatrix}$$

因此有

$$\varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = detA$$

$$\varepsilon_{ijk} A_{il} A_{jm} A_{kn} = \varepsilon_{lmn} detA$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

1.1.2　右手直角坐标系

右手直角坐标系中的基矢满足

$$\hat{x_i} \cdot \hat{x_j} = \delta_{ij}$$

$$(\hat{x_i} \times \hat{x_j}) \cdot \hat{x_k} = \varepsilon_{ijk}$$

在右手直角坐标系中的任意一个向量表示为：

$$\overrightarrow{r} = r_i \hat{x_i} = (\overrightarrow{r} \cdot \hat{x_i}) \hat{x_i}$$

1.1.3　坐标变换

旋转变换矩阵:

$$\lambda_{ij} \equiv \hat{x_i}' \hat{x_j}$$

该矩阵第 i 行是 $\hat{x}_i{}'$ 轴在原坐标系中的三个方向余弦，第 j 列是 $\hat{x}_j$ 轴在新坐标系中的三个方向余弦

$$\hat{x}_i{}' = (\hat{x}_i{}' \cdot \hat{x}_j)\hat{x}_j = \lambda_{ij}\hat{x}_j$$

故

$$x_i^{'} = \lambda_{ij}x_j$$

同理有逆变换

$$\hat{x}_i = \lambda_{ji}\hat{x}_j{}'$$

$$x_i = \lambda_{ji}x_j^{'}$$

旋转变换矩阵为特殊正交阵，即

$$\lambda\lambda^T = I$$

$$det\lambda = 1$$

定义正交变换 $\hat{x}_i{}' = \lambda_{ij}\hat{x}_j$，$det\lambda = 1$ 的变换为旋转变换，$det\lambda = -1$ 的变换为反演旋转变换

变换 λ 具有主动观点及被动观点：主动观点将变换视为作用于空间各点上的；被动观点将变换视为作用于坐标系上的。

1.1.4　转动公式

转动公式:

$$\overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r}\cos\theta + \hat{n}(\hat{n}\cdot\overrightarrow{r})(1-\cos\theta) + \hat{n}\times\overrightarrow{r}\sin\theta$$

转动矩阵：

$$\lambda_{ij} = \delta_{ij}\cos\theta + n_i n_j(1-cos\theta) - \varepsilon_{ijk}n_k\sin\theta$$

通过转动矩阵，转动公式分类表示为 $\hat{x}_i{}' = \lambda_{ij}x_j$

转动角度 θ 为：$\cos\theta=\frac{tr\lambda-1}{2}$, 转动矩阵的转轴 $\hat{n}$ 为其特征向量:$\lambda\cdot\hat{n}=\hat{n}$
即转动矩阵这一代数特征与其对应转动的几何特征相互推导。

无限小转动：

$$d\overrightarrow{\theta}\equiv\overrightarrow{n}d\theta$$

故

$$d\overrightarrow{r}=d\overrightarrow{\theta}\times\overrightarrow{r}$$
$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}=\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{r}$$

$$|\overrightarrow{r}(t)|=const\Leftrightarrow\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}=\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{r}$$

1.1.5　正交曲线坐标系

球坐标系：

$$\overrightarrow{r}=r\hat{r}$$

由

$$d\overrightarrow{\Theta}=d\theta\hat{\varphi}+d\varphi\hat{z}=d\varphi\cos\theta\hat{r}-d\varphi\sin\theta\hat{\theta}+d\theta\hat{\varphi}$$

得

$$\overrightarrow{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}+r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$
$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial r}=\hat{r}\quad\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}=\hat{\phi}\times\overrightarrow{r}\quad\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\phi}=\hat{z}\times\overrightarrow{r}$$

柱坐标系：

$$\overrightarrow{r}=s\hat{s}+z\hat{z}$$

$$\overrightarrow{v}=\dot{s}\hat{s}+s\dot{\varphi}\hat{\varphi}+\dot{z}\hat{z}$$

1.1.6 相对运动

$$\frac{d\overrightarrow{G}}{dt} = (\frac{d\overrightarrow{G}}{dt})_{rot} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{G}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}'$$

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}' + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}') + 2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v}' + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r}'$$

其中 $\overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}')$ 为向心加速度，$2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v}'$ 为科里奥利加速度，$\dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r}'$ 为横向加速度。

1.2 张量

1.2.1 定义

n 阶张量 $\overleftrightarrow{T}$ 满足变化：

$$T'_{i_1\cdots i_n} = \lambda_{i_1 j_1 \cdots i_n j_n} T_{j_1 \cdots j_n}$$

赝张量：$T'_{i_1\cdots i_n} = det\lambda \cdot \lambda_{i_1 j_1 \cdots i_n j_n} T_{j_1 \cdots j_n}$

二者在旋转变换下无区别，但在反演（宇称）变换下不同。

一阶张量 (矢量)$\overrightarrow{A}$ **：**

$$A'_i = \lambda_{ij} A_j$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \equiv A_i B_i$$

$$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B})_i \equiv \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

二阶张量 $\overleftrightarrow{T}$:

$$T'_{ij} = \lambda_{ik} \lambda_{jl} T_{kl}$$

或写为矩阵形式

$$T' = \lambda T \lambda^T$$

并矢：

$$(\overrightarrow{A}\overrightarrow{B})_{ij} \equiv A_i B_j$$

九个张量 $\hat{x}_i \hat{x}_j$ 构成了二阶张量空间的一组基

$$\overleftrightarrow{T} = T_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j$$

1.2.2　张量代数运算

张量积：

$$R^{m+n阶} = T^{m阶} \otimes S^{n阶}$$

$$R_{i_1 \cdots i_{m+n}} = T_{i_1 \cdots i_m} R_{i_1 \cdots i_n}$$

并矢也为张量积。**张量不变性**

$$T'_{ij} \hat{x}_i{}' \hat{x}_j{}' = T_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j$$

点乘: 张量与矢量点乘满足 1、就近原则 2、$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$

故

$$\overleftrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{A} = (T_{ik} A_k) \hat{x}_i$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{T} = (A_k T_{kj}) \hat{x}_j$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{T} \overrightarrow{B} = T_{ij} A_i B_j$$

矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

叉乘: 张量与矢量叉乘满足 1、就近原则 2、$\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_k$

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (\varepsilon_{ijk} A_j B_k)\hat{x}_i$$

轴矢量之间的叉乘得到的是极矢量.

1.3　场的导数

1.3.1　梯度算子

梯度算子 ∇ ：

$$\nabla \equiv \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{x}_i \partial_i$$

$$\nabla\varphi = (\partial_i \varphi)\hat{x}_i$$

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\overrightarrow{r}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \partial_i F_i$$

$$\nabla\overrightarrow{F} = (\partial_i F_j)\hat{x}_i\hat{x}_j$$

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = (\varepsilon_{ijk}\partial_j F_k)\hat{x}_i$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = (\partial_k T_{ki})\hat{x}_i$$

定理:

$$\nabla \times (\overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g}) = (\nabla \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{g} \cdot \nabla)\overrightarrow{f} - (\nabla \cdot \overrightarrow{f} + \overrightarrow{f} \cdot \nabla)\overrightarrow{g}$$

$$\nabla \times \nabla\varphi \equiv 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{A}) \equiv 0$$

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \Leftrightarrow \nabla \times \overrightarrow{F} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F} = \nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

1.3.2　场的变换

在两个坐标系中的同一个标量场满足:

$$\varphi^{'}(x_1^{'},x_2^{'},x_2^{'})=\varphi(x_1,x_2,x_3)$$

1.3.3　求导约定

对矢量求导：

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{A}}\equiv\frac{\partial f}{\partial A_i}\hat{x}_i\equiv(\frac{\partial f}{\partial A_1},\frac{\partial f}{\partial A_2},\frac{\partial f}{\partial A_3})^T$$

若 $f=f(\overrightarrow{r},\dot{\overrightarrow{r}},t)$，则其对 t 全导数：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{r}}\dot{\overrightarrow{r}}+\frac{\partial f}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}\ddot{\overrightarrow{r}}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

对一组变量求导：

$$f=f(q_1\cdots q_n)$$
$$\frac{\partial f}{\partial q}=(\frac{\partial f}{\partial q_1},\frac{\partial f}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial q_n})^T$$

1.4　约束

1.4.1　自由体系

N 个质点的质点组，状态参量为 $(\overrightarrow{r},\dot{\overrightarrow{r}})=(\overrightarrow{r_1},\cdots,\overrightarrow{r_n},\dot{\overrightarrow{r_1}},\cdots,\dot{\overrightarrow{r_n}})$

1.4.2　完整约束体系

一般约束

$$f(\overrightarrow{r},\dot{\overrightarrow{r}},t)=0$$

完整约束

$$f(\overrightarrow{r},t)=0$$

一个 N 个质点 K 个完整约束的体系：

自由度 n=3N-k，构成 n 维位形曲面，法向量：

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overrightarrow{r}}$$

n 维广义坐标 q，有

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(q,t)$$

切向量 $\overrightarrow{\tau_k} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$

同理有 n 维广义速度 $\dot{q}$，得

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t}$$

定理:

$$\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

1.4.3　理想约束假设

约束 $f\alpha(\overrightarrow{r},t) = 0$ 提供的约束力：

$$\overrightarrow{N}^\alpha = (\overrightarrow{N}_1^\alpha, \overrightarrow{N}_2^\alpha, \cdots, \overrightarrow{N}_N^\alpha)$$

理想约束假设:

$$\overrightarrow{N} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overrightarrow{r}}$$

即约束力与位型曲面垂直。

1.4.4　动能

$$T = \frac{1}{2} m_a \dot{\overrightarrow{r}}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}} = \overrightarrow{p}$$

广义动能：

$$T \equiv T(\dot{\overrightarrow{r}}(q, \dot{q}, t))$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\tau_k}$$

1.4.5　势能

$$U(\overrightarrow{r}, t) = U^{外}(\overrightarrow{r}, t) + \frac{1}{2}\sum_{a \neq b} U_{ab}(r_{ab})$$

粒子 a 受到的力：

$$\overrightarrow{F}_a = -\frac{U^{外}}{\partial \overrightarrow{r}_a} - \sum_{a \neq b} \frac{\partial U_{ab}}{\partial \overrightarrow{r_a}}$$

故体系受力：

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r}}$$

广义力:

$$Q_k \equiv \overrightarrow{F} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$$

第二章 Lagrange 力学

2.1 Hamilton 原理

Hamilton 原理：在满足约束，且有相同端点的所有可能路径中，真实运动是使得作用量 $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ 取得最小值的路径。其中 $L = L(\overrightarrow{r}, \dot{\overrightarrow{r}}, t) = T - U$ 为 Lagrange 函数.

Lagrange 函数中的动能 T 为体系总动能，势能 U 为主动力所贡献的势能之和.

2.1.1 泛函

泛函:

$$I[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)$$

路径变分 $\delta q(t)$

速度变分 $\delta \dot{q} \equiv \frac{d}{dt} \delta q$

加速度变分 $\delta \ddot{q} \equiv \frac{d}{dt} \delta \dot{q}$

$$\delta L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$$

泛函变分：

$$\delta I[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

即变分与积分、导数均可换序。Leibniz formula:

$$\delta(fg) = g(\delta f) + f(\delta g)$$

链式法则：

$$\delta g(f) = \frac{\partial g}{\partial f}\delta f$$

若对于任意函数 $\eta_1(x), \eta_2(x), \cdots, \eta_n(x)$, 有

$$\int_a^b [\sum_{k=1}^{n} G_k(x)\eta_k(x)]dx = 0$$

则 $G_1(x) = G_2(x) = \cdots = G_n(x) = 0$

驻值路径

$$\delta I[q(t)] = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta L}{\delta q_k} \equiv \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} = 0$$

Eular-Lagrange 方程

推论：

若 L 不显含 q_k，则 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} = const$

Jacob 积分:

$$h(q, \dot{q}, t) \equiv \dot{q_k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - L$$

Lagrange 方程等价于

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

当 L 不显含 t 时，则 $h = const$，且此时 $h = T + U = E$.

2.1.2 Hamilton 原理的证明

证明：[1]

[1]本人认为这段证明很 cool，遂记录

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=\frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{r}}\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\dot{q}_k}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{q_k}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k})=\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{q_k})=(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}})\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{q_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{q_k}$$

故 $\frac{\delta L}{\delta q_k}$ 可改写为：

$$\frac{\delta L}{\delta q_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=(\frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{r}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}})\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

对于 Lagrange 函数

$$L=T(\dot{\overrightarrow{r}},t)-U(\overrightarrow{r},t)$$

将 T 和 U 代入改写后的 $\frac{\delta L}{\delta q_k}$

$$\frac{\delta T}{\delta q_k}=(\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{r}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}})\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}=-\dot{\overrightarrow{p}}\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\delta T}{\delta q_k}=(\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{r}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}})\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}=-\overrightarrow{F}\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

故 Eular-Lagrange 方程可改写为

$$\frac{\delta L}{\delta q_k}=(\overrightarrow{F}-\dot{\overrightarrow{q}})\cdot\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}=0$$

这就是理想约束假设下的牛顿第二定律。

2.1.3 推论

广义动量:

$$p_k\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

故 Jacob 积分

$$h(q,\dot{q},t)\equiv\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=p_k\dot{q}_k-L$$

满足 $\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}$

若 L 不显含 q_k，则 $p_k=const.$

若 L 不显含 t，则 h=const.

广义力：

$$Q_k \equiv \overrightarrow{F}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}=-\frac{\partial U}{\partial q_k}$$

即广义力是势能对广义坐标的导数。体系的平衡位置即是使广义力 $Q_k=0$ 的位置。

2.1.4 Lagrange 函数的性质

惯性系: Lagrange 函数的动能与势能是在惯性系下观测得到的，若在非惯性系中，则 Lagrange 函数的动能为非惯性系中的动能，势能则除了主动力还需考虑惯性力的贡献。

一般不采用非惯性系中的 Lagrange 函数，只需在惯性系中写出 L 函数，并利用下面的规范变换化简即可得到相同结果。

Lagrange 函数的不确定性（规范变换）:

$$L^{'}(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{dF(q,t)}{dt}$$

规范变换前后的 Lagrange 函数满足相同的拉格朗日方程，故可描述同一体系, 其中不依赖于 $\dot{q}$ 的 $F(q,t)$ 称为规范函数。

可加性：对于一个体系的 A，B 两部分，若两部分之间相互作用的势能可忽略，则

$$L_{A+B}=L_A(q_A,\dot{q_A})+L_B(q_B,\dot{q_B})$$

即此时二者可视为孤立体系处理。

通常情况下，我们反向使用该性质：即对于一个体系，可以通过选取合适的广义坐标 q_A 和 q_B，将对应的 Lagrange 函数化简为分别只和 q_A,q_B 相关的两部分，即可将耦合的体系拆分成了孤立的研究对象。

2.2 拉格朗日乘子法

2.2.1 约束力 $f(\overrightarrow{r},t)=0$

对于自由度为 s 的体系，为求解约束力 $f(\overrightarrow{r},t)=0$，

1、设想将该约束解除,则体系由 s+1 个不独立的广义坐标 $q=(q_1,\cdots,q_{s+1})$ 描述。

通过变换方程将约束方程写为

$$f(q,t)=0$$

2、**广义约束力**：

$$Q_k^{'}=\overrightarrow{N}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}$$

其中 λ 称为拉格朗日乘子，若将 $Q_k^{'}$ 排列为矢量 $\overrightarrow{Q}^{'}$，则在广义坐标 q 构成的空间中，$\overrightarrow{Q}^{'}$ 与超曲面 f=0 垂直。

将牛顿方程 $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{N}-\dot{\overrightarrow{P}}=0$ 在方向 $\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}$ 上作投影。

得到：

$$\frac{\delta L}{\delta q_k}+Q_k^{'}=0$$

即在求解约束力问题时有 q,λ 这 s+2 个未知量及如下 s+2 个方程：

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q_k}}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}\\ f(q,t)=0\end{cases}$$

注意写出上式第一个方程（也叫带乘子的拉格朗日方程）时不可提前代入约束条件，否则将会化为广义坐标相互独立的情况。

由这 s+2 个方程就可以确定体系的位形 q_k 以及广义约束力 $\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}$。

2.2.2 几点说明

若将 λ 视为广义坐标，则可定义如下拉格朗日函数：

$$\widetilde{L}\triangleq L(q,\dot{q},t)+\lambda f(q,t)=\widetilde{L}(q,\lambda,\dot{q},t)$$

拉格朗日方程则化为

$$\begin{cases} \frac{\delta \widetilde{L}}{\delta q_k} = \frac{\delta L}{\delta q_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0 \\ \frac{\delta \widetilde{L}}{\delta \lambda} = f = 0 \end{cases}$$

即对应了 2.2.1 中求解约束力问题的 s+2 个方程。

同样的定义了新的 Jacob 积分：

$$\widetilde{h} \triangleq \widetilde{P_k}\dot{q}_k + \widetilde{P_\lambda}\dot{\lambda} - \widetilde{L} = h - \lambda f$$

与不含约束方程的雅可比积分有相同结论，若 $\widetilde{L}$ 不显含 t，则 $\widetilde{h} = const$

而对于多个约束的情况，只需将 λf 用 $\lambda_\alpha f_\alpha$ 替换即可。

静力学问题:

前面提到，若仅需求解平衡位置，则使广义力为 0 即可求解：

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$$

若要得到体系平衡位置的约束力，则使用拉格朗日乘子法：

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_k}$$

即

$$Q_k^{'} + Q_k = 0$$

2.3 更一般的相互作用下的拉格朗日力学

2.3.1 有势力与广义势能

若主动力 $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$ 可以被**广义势能** $U(\overrightarrow{q}, \dot{\overrightarrow{q}}, t)$ 描述如下

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\delta U}{\delta \overrightarrow{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}$$

广义主动力

$$Q_k \triangleq \overrightarrow{F} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k} = -\frac{\delta U}{\delta q_k}$$

此时拉格朗日方程 $\frac{\delta L}{\delta q_k}$ 仍然成立。通常的势能只是广义势能的特例。

与拉格朗日函数类似，广义势能也具有不确定性，即：

$$U^{'} = U + \frac{dF(q,t)}{dt}$$

其中 $U^{'}$ 与 U 描述相同的主动力，且对应相同拉格朗日方程，故可描述同一体系。

惯性力也可被广义势能描述：在平动的非惯性系中 $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0}(t) + \overrightarrow{v^{'}}$，体系拉格朗日函数可化简为

$$L^{'} = T^{'} - U - U^{'}$$

其中 $T^{'} = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v^{'}}^2$ 为体系在非惯性系中的动能，$U^{'} = m\overrightarrow{a_0} \cdot \overrightarrow{r^{'}}$。

同样的转动非惯性系中也有 $L^{'} = T^{'} - U - U^{'}$

因而建议在惯性系中写出体系拉格朗日函数 L，化简后可得到非惯性系中的物理解读。

2.3.2 非势力

主动力可以表示为两部分

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F^P} + \overrightarrow{F^D}$$

其中 $\overrightarrow{F^P} = -\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r}}$ 为可被广义势能描述的主动力，而 $\overrightarrow{F^D}$ 则不可被广义势能描述。

由于牛顿方程为 $\overrightarrow{F^P} + \overrightarrow{F^D} - \dot{\overrightarrow{P}} = 0$ 和 $\frac{\delta L}{\delta q_k} = (\overrightarrow{F^P} - \dot{\overrightarrow{P}}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$

因此此时拉格朗日方程应拓展为更一般的形式：

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} + D_k = 0$$

其中广义力 $D_k \triangleq \overrightarrow{F^D} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$

耗散力：若 $\overrightarrow{F^D}$ 具有如下形式

$$\overrightarrow{F^D}=-g(v)\hat{v}\quad(g>0)$$

, 则称之为耗散力。

广义耗散力

$$D_k\triangleq\overrightarrow{F^D}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}=-g(v)\frac{\partial v}{\partial\dot{q}_k}=-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{q}_k}$$

即广义耗散力被耗散函数描述, 耗散函数定义为：

$$\mathcal{F}\triangleq\int_0^v g(z)dz=\mathcal{F}(v)=\mathcal{F}(q,\dot{q},t)$$

故在耗散力的作用下拉格朗日方程可写为：

$$\frac{\delta L}{\delta q_k}+D_k=\frac{\delta L}{\delta q_k}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{q}_k}=0$$

2.3.3 d'Alembert 原理

定义虚位移 $\delta\overrightarrow{r}\triangleq\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}\delta q_k$ ，根据虚位移定义知，虚位移应满足约束与位形曲面相切。

则牛顿方程可写为：

$$(\overrightarrow{F}-\dot{\overrightarrow{P}})\cdot\delta\overrightarrow{r}=0$$

借助虚位移，理想约束假设有等价表述：

$$Q_k^{'}=\overrightarrow{N}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}=0\Leftrightarrow Q_k^{'}\delta q_k=\overrightarrow{N}\cdot\delta\overrightarrow{r}=0$$

即约束力与虚位移垂直

2.3.4 平衡问题

体系平衡时

$$Q_k\triangleq\overrightarrow{F}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}=0$$

由于 $\overrightarrow{F}$ 无法表示为 $-\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r}}$，故此时不可用 $\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r}} = 0$

虚功原理：

$$Q_k \delta q_k = \overrightarrow{F} \cdot \delta \overrightarrow{r} = 0$$

当体系受到多个主动力时，只需满足 $\overrightarrow{F_\alpha} \cdot \delta \overrightarrow{r_\alpha} = 0$ 即可。

2.3.5　冲击力问题

冲击力问题是指作用时间 $\Delta t \to 0$ 的一类问题，可认为作用前后体系位形不变。

对牛顿方程 $\frac{\delta T}{\delta q_k} + Q_k = 0$ 积分得到冲击力问题的运动方程：

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q_k}}\right|_0^{\Delta t} = I_k \triangleq I_\alpha \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}$$

2.4　对称与守恒

2.4.1　守恒量

状态参量的函数 $\Gamma(q, \hat{q}, t)$ 称为力学量，如果体系运动过程中有 $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ 则称该力学量是守恒的。

一个自由度为 n 的系统，至多有 2n 个独立的守恒量，至多有 2n-1 个不显含时间 t 的独立的守恒量。

对于不同的守恒量 f_α，可通过下面的方法判断其是否相互独立：构造矩阵 M：

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} & \frac{\partial f_n}{\partial \dot{q}} \end{pmatrix}$$

若矩阵 M 的行列式 det(M)=n，则这 n 个守恒量相互独立。

2.4.2 对称性

对于坐标 X 及标量函数 $\varphi(X)$，变换将 $X \to X'$，同时将 X 处的函数值 φ 带到了 X' 处并由此定义了一个新的函数 φ'，即 $\varphi'(X') = \varphi(X)$。

如果有 $\varphi'(X') = \varphi(X')$ 即 $\varphi(X') = \varphi(X)$，则称变换 $X \to X'$ 是 $\varphi(X)$ 的对称变换。

2.4.3 动力学对称性

单参数点变换：将位形空间中依赖于一个参数 ε 的坐标变换称为单参数点变换，数学表示为：

$$q_k \to Q_k = Q_k(q, t; \varepsilon)$$

且 $\varepsilon = 0$ 时该变换为恒等变换, 广义速度在此变换下变为：

$$\dot{q}_k \to \dot{Q}_k(q, \dot{q}, t; \varepsilon) = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial Q_k}{\partial t}$$

无穷小变换：在 $\varepsilon \to 0$ 时，变换为无穷小变换，仅保留 ε 的一阶项：

$$q_k \to Q_k = q_k + \varepsilon s_k$$

其中

$$s_k = \left.\frac{\partial Q_k}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

$$\dot{q}_k \to \dot{Q}_k = \dot{q}_k + \varepsilon \dot{s}_k$$

对于如上变换，**定义**：

$$L_\varepsilon(q, \dot{q}, t) \triangleq L(Q, \dot{Q}, t)$$

应当注意式中 $L(Q, \dot{Q}, t)$ 不为以 Q 为广义坐标的拉格朗日函数，仅是将 Q 直接替换 $L(q, \dot{q}, t)$ 的 q 中得到的。

我们称 $L(q,\dot{q},t)$ 在变换下是**不变**的，如果

$$L_\varepsilon(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)$$

我们称 $L(q,\dot{q},t)$ 在变换下是**规范不变**的，如果

$$L_\varepsilon(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{dF(q,t;\varepsilon)}{dt}$$

显然，“不变”是“规范不变”的一种特殊情况，此时我们称该变换为 $L(q,\dot{q},t)$ 的对称变换。

在无穷小变换下，保留 ε 的一阶项：

$$L_\varepsilon=L+\varepsilon\frac{dG}{dt}$$

其中

$$G\triangleq\left.\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

2.4.4 Noether' theorem

如果变换 $q_k\to Q_k(q,t;\varepsilon)$ 是体系 $L(q,\dot{q},t)$ 的对称变换，即

$$L_\varepsilon(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{dF(q,t)}{dt}$$

则

$$\Gamma=p_ks_k-G$$

为守恒量，其中 k 满足求和约定，$p_k=\frac{\partial L}{\partial q_k}$ 为广义动量，$s_k=\left.\frac{\partial Q_k}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$，$G\triangleq\left.\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$

诺特定理的另一种表述：

如果变换 $q_k\to Q_k=q_k+\delta q_k$ 是体系 $L(q,\dot{q},t)$ 的对称变换，即

$$L_\varepsilon(q,\dot{q},t)=\frac{d}{dt}\delta F(q,t)$$

则

$$\Gamma=p_k\cdot\delta q_k-\delta F$$

为守恒量。

2.4.5　三维空间的诺特定理

三维空间中无穷小变换为：

$$\vec{r}(q,t) \to \vec{R}(q,t;\varepsilon) = \vec{r} + \varepsilon\vec{\eta}$$

若 $\vec{r}(q,t) \to \vec{R}(q,t;\varepsilon)$ 是体系 $L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ 的对称变换，即

$$L_\varepsilon(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \triangleq L(\vec{R},\dot{\vec{R}},t) = L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) + \frac{dF(\vec{r},t)}{dt}$$

则

$$\Gamma = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \vec{\eta} - G$$

为守恒量，其中 $\vec{\eta} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$

2.4.6　孤立体系

孤立体系中：

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{r_a}}^2 - U_{ab}(r_{ab})$$

$$\Gamma = \vec{p_a} \cdot \vec{\eta_a} - G$$

1、空间平移

$$\vec{r_a} \to \vec{R_a} = \vec{r_a} + \varepsilon\hat{n}$$

L 不变，$\vec{P} = m_a v_a^2$ 为守恒量

2、空间转动

$$\vec{r_a} \to \vec{R_a} = \vec{r_a} + \varepsilon\hat{n} \times \vec{r_a}$$

L 不变，$\vec{L} = \vec{r_a} \times \vec{P_a}$ 为守恒量。

3、速度变换（推动）

$$\overrightarrow{r_a} \to \overrightarrow{R_a} = \overrightarrow{r_a} + \varepsilon \hat{n} t$$
$$\Rightarrow \dot{\overrightarrow{r_a}} \to \dot{\overrightarrow{R_a}} = \dot{\overrightarrow{r_a}} + \varepsilon \hat{n}$$

L 规范不变，$\ddot{\overrightarrow{R_c}} = 0$，即质心作匀速直线运动。

2.4.7　非孤立体系的动量与角动量

外场中的体系拉格朗日函数为：

$$L = \frac{1}{2} m_a v_a^2 - \frac{1}{2} U_{ab}(r_{ab}) - U^{外}(\overrightarrow{r}, t)$$

其中 $U^{外}(\overrightarrow{r}, t)$ 是外场贡献的势能。

由于 2.4.6 的讨论，体系的动能及体系内部相互作用的势能在空间平移和空间转动下是不变的，因此拉格朗日函数是否具有对称性完全由外场决定。

对于处在外场中的体系，为了判断其动量和角动量的分量是否守恒，只需考察产生外场的“荷”是否具有相应的平移或转动对称性。特别的，对于均匀分布的“荷”，其对称性即为其几何对称性。

例如：

对于 XOY 平面上的无限大的均匀荷分布，由于沿 x、y 方向的空间平移对称性，动量的 x、y 分量为守恒量；由于以 z 为转轴的空间转动对称性，z 方向的角动量为守恒量。

对于圆心位于圆点处于 x、y 平面的均匀圆盘，由于以 z 为转轴的空间转动对称性，z 方向的角动量为守恒量。

对于两个点荷的场，沿点荷连线方向的角动量分量为守恒量。

对于无限长圆柱螺旋线场，可以通过空间平移荷转动的组合得到对称性。

2.4.8 有关时间的变换

将 t 视为广义坐标，以 σ 为自变量，则 $t = t(\sigma)$，$q = q[t(\sigma)]$，记 $t' \triangleq \frac{dt}{d\sigma}$, 则 $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{q'}{t'}$ 作用量 $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \widetilde{L}(q,t,q',t')d\sigma$ 其中 $\widetilde{L} \triangleq t'L(q,\frac{q'}{t'},t)$，同时有：

$$\widetilde{P_k} \triangleq \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_k'} = P_k, \widetilde{P}_t \triangleq \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t'} = -h$$

以时间 t 作为广义坐标时诺特定理为：

对于变换 $q_k \to Q_k(q,t;\varepsilon)$,$s_k = \frac{\partial Q_k}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ 或 $t \to \tau(q,t;\varepsilon), s_t = \frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$

若上述变换为对称变换，即 $\frac{d\tau}{dt}L_\varepsilon(q,\dot{q},t) \triangleq \frac{d\tau}{dt}L(Q,\frac{Q'}{\tau'},\tau) = L(q,\dot{q},t) + \frac{dF(q,t;\varepsilon)}{dt}$, 则 $\Gamma = P_k s_k - hs_t - G$ 为守恒量。

第三章　微振动

3.1　简谐近似

3.1.1　体系描述

关于微振动体系的假设有以下两点：

首先，体系外部约束和外场稳定：坐标变换方程不显含时间 t，即 $\vec{r} = \vec{r}(q)$。外场稳定则势能函数也不显含时间 t，即 $U = U(q)$。

此时动能为广义速度的二次齐次函数

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

其次，体系存在稳定平衡位置记作 $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \cdot, q_n^{(0)})$。因此有：

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}\Big|_{q=q^{(0)}} = 0$$

即微小偏移引起的体系势能变化为广义坐标偏离的二阶小量。

3.1.2　简谐近似

将广义坐标与平衡位置的偏离量 $\xi_i \triangleq q_i - q_i^{(0)}$ 作为新的广义坐标。

仅考虑二阶项系数不为零的简谐近似。由于动能 T 中的 $\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = \dot{q}_i \dot{q}_j$ 为二阶小量，故只需保留 m_{ij} 的常数项，取 $M_{ij} \triangleq m_{ij}(q = q^{(0)})$，有

$$T = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$$

对于势能的近似，可以将常数项略去（因为拉格朗日函数的规范变换），得到

$$U = \frac{1}{2}K_{ij}\xi_i\xi_j$$

因此简谐近似下体系的动能和势能分别为广义速度和广义坐标的二次齐次且正定的函数。

拉格朗日函数为：

$$L = T - U = \frac{1}{2}M_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \frac{1}{2}K_{ij}\xi_i\xi_j$$

拉格朗日方程为：

$$-\frac{\delta L}{\delta \xi_k} = M_{kj}\ddot{\xi}_j + K_{kj}\xi_j = 0$$

将拉格朗日方程写成矩阵形式即为：

$$M\ddot{\xi} + K\xi = 0$$

其中 M、K 均为对称正定矩阵。

在解决实际问题时，可以直接写出保留二阶项的拉格朗日函数，并通过下式求得 M，K：

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\xi}_i\partial\dot{\xi}_j}$$

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\xi_j}$$

3.2　简正坐标与简正模

3.2.1　简正坐标

在简谐近似下的拉格朗日方程为 $M\ddot{\xi} + K\xi = 0$，下面的思路即是通过对该方程解耦来进行处理。

而**简正坐标** η 便是方程解耦后新的自变量。设变换 $\xi = A\eta$，其中 A 为可逆矩阵且元素为常数。

拉格朗日方程变为

$$MA\ddot{\eta} + KA\eta = 0$$

令 ξ与η 的变换矩阵 A 满足：

$$KA = MA\Omega_d$$

其中 $\Omega_d = diag(\omega_1^2, \cdots, \omega_n^2)$。则由拉格朗日方程可得：

$$\ddot{\eta} + \Omega_d \eta = 0$$

或者写为分量式

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0 \quad \text{（不求和）}$$

也就是我们通过将 ξ 变为简正坐标 η 使得拉格朗日方程解耦。

3.2.2　特征值与特征向量

将 A 以列向量排列 $A = (A^{(1)}, \cdots, A^{(n)})$ 即 $A_{ij} = A_i^{(j)}$，则 A 所满足的方程写为：

$$KA^{(i)} = \omega_i^2 MA^{(i)}$$

用列向量 X 表示 A 的列向量，则求矩阵 A 的问题变为求解下面的方程：

$$KX = \omega^2 MX$$

该方程称为矩阵 K 关于对称正定矩阵 M 的特征向量方程，方程的非零解 X 称为特征值 ω^2 的特征向量。

对于该特征向量方程，若方程有非零解，则

$$det(\omega^2 M - K) = 0$$

将由该特征值方程（久期方程）得到的 n 个 ω^2（且可以证明 $\omega^2 > 0$）代回特征向量方程 $KX = \omega^2 MX$，此时特征向量方程为实系数线性齐次方程组，便可求得实的特征向量 X，也就求得了变换矩阵 A。

3.2.3 简正模

通过变换 $\xi = A\eta$ 解耦后的拉格朗日方程为

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0 \quad \text{（不求和）}$$

即每一个简正坐标满足简谐振动方程，有

$$\eta_i(t) = \lambda_i cos(\omega_i t + \varphi) = a_i cos(\omega_i t) + b_i sin(\omega_i t)$$

通过变换公式即可求得广义坐标：

$$\xi = A\eta = A^{(1)}\eta_1(t) + \cdots + A^{(n)}\eta_n(t)$$

我们将每一个频率为 ω_i 的简谐振动 $A^{(i)}\eta_i(t)$ 称为一个简正模，故真实运动即为简正模的线性组合。