Lecture notes on theoretical mechanics

Scientific LAN

2024 年 10 月 10 日

前言

这里是某科学的懒羊羊，该课程笔记为本人大二上于中国科学技术大学潘海俊老师的理论力学课程的学习笔记，并以潘海俊老师编著的理论力学导论为参考书籍编纂，用于本人学习巩固课程知识并在此公开分享与各位共同学习。如有错误之处还请谅解。

Scientific LAN

2024 年 10 月 10 日

目录

第一章　运动学

1.1　坐标变换

1.1.1　符号

求和约定: 在某一单项式中同一指标重复出现，则意味着对其求和。

$$(AB)_{ij} = \sum_{k}^{n} A_{ik}B_{kj} \Leftrightarrow (AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

求和指标称为哑指标，若无特殊说明则均使用求和约定。如：$A_{ii} = trA$

kronecker 符号:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

因此有

$$\delta_{ii} = 3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$$

$$A_{ik}\delta_{ki} = trA$$

$$A_{ij}B_{ji} = trAB$$

levi-civita(排列) 符号

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j1} & \delta_{j1} \\ \delta_{k1} & \delta_{k1} & \delta_{k1} \end{vmatrix}$$

因此有

$$\varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = detA$$

$$\varepsilon_{ijk} A_{il} A_{jm} A_{kn} = \varepsilon_{lmn} detA$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

1.1.2　右手直角坐标系

右手直角坐标系中的基矢满足

$$\hat{x_i} \cdot \hat{x_j} = \delta_{ij}$$

$$(\hat{x_i} \times \hat{x_j}) \cdot \hat{x_k} = \varepsilon_{ijk}$$

在右手直角坐标系中的任意一个向量表示为：

$$\overrightarrow{r} = r_i \hat{x_i} = (\overrightarrow{r} \cdot \hat{x_i}) \hat{x_i}$$

1.1.3　坐标变换

旋转变换矩阵:

$$\lambda_{ij} \equiv \hat{x_i}' \hat{x_j}$$

该矩阵第 i 行是 $\hat{x_i}'$ 轴在原坐标系中的三个方向余弦，第 j 列是 $\hat{x_j}$ 轴在新坐标系中的三个方向余弦

$$\hat{x_i}' = (\hat{x_i}' \cdot \hat{x_j})\hat{x_j} = \lambda_{ij}\hat{x_j}$$

故

$$x_i^{'} = \lambda_{ij}x_j$$

同理有逆变换

$$\hat{x_i} = \lambda_{ji}\hat{x_j}'$$

$$x_i = \lambda_{ji}x_j^{'}$$

旋转变换矩阵为特殊正交阵，即

$$\lambda\lambda^T = I$$

$$det\lambda = 1$$

定义正交变换 $\hat{x_i}' = \lambda_{ij}\hat{x_j}$，$det\lambda = 1$ 的变换为旋转变换，$det\lambda = -1$ 的变换为反演旋转变换

变换 λ 具有主动观点及被动观点：主动观点将变换视为作用于空间各点上的；被动观点将变换视为作用于坐标系上的。

1.1.4　转动公式

转动公式:

$$\overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r}\cos\theta + \hat{n}(\hat{n}\cdot\overrightarrow{r})(1-\cos\theta) + \hat{n}\times\overrightarrow{r}\sin\theta$$

转动矩阵：

$$\lambda_{ij} = \delta_{ij}\cos\theta + n_in_j(1-cos\theta) - \varepsilon_{ijk}n_k\sin\theta$$

通过转动矩阵，转动公式分类表示为 $\hat{x_i}' = \lambda_{ij}x_j$

转动角度 θ 为: $\cos\theta = \frac{tr\lambda - 1}{2}$, 转动矩阵的转轴 $\hat{n}$ 为其特征向量:$\lambda \cdot \hat{n} = \hat{n}$
即转动矩阵这一代数特征与其对应转动的几何特征相互推导。

无限小转动:

$$d\overrightarrow{\theta} \equiv \overrightarrow{n} d\theta$$

故

$$d\overrightarrow{r} = d\overrightarrow{\theta} \times \overrightarrow{r}$$

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

$$|\overrightarrow{r}(t)| = const \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

1.1.5 正交曲线坐标系

球坐标系:

$$\overrightarrow{r} = r\hat{r}$$

由

$$d\overrightarrow{\Theta} = d\theta\hat{\varphi} + d\varphi\hat{z} = d\varphi\cos\theta\hat{r} - d\varphi\sin\theta\hat{\theta} + d\theta\hat{\varphi}$$

得

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial r} = \hat{r} \quad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} = \hat{\phi} \times \overrightarrow{r} \quad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\phi} = \hat{z} \times \overrightarrow{r}$$

柱坐标系:

$$\overrightarrow{r} = s\hat{s} + z\hat{z}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{s}\hat{s} + s\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z}$$

1.1.6　相对运动

$$\frac{d\overrightarrow{G}}{dt}=(\frac{d\overrightarrow{G}}{dt})_{rot}+\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{G}$$
$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}_0+\overrightarrow{v}'+\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{r}'$$
$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}_0+\overrightarrow{a}'+\overrightarrow{\omega}\times(\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{r}')+2\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{v}'+\dot{\overrightarrow{\omega}}\times\overrightarrow{r}'$$

其中 $\overrightarrow{\omega}\times(\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{r}')$ 为向心加速度，$2\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{v}'$ 为科里奥利加速度，$\dot{\overrightarrow{\omega}}\times\overrightarrow{r}'$ 为横向加速度。

1.2　张量

1.2.1　定义

n 阶张量 $\overleftrightarrow{T}$ 满足变化：

$$T'_{i_1\cdots i_n}=\lambda_{i_1j_1\cdots i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}$$

赝张量：$T'_{i_1\cdots i_n}=det\lambda\cdot\lambda_{i_1j_1\cdots i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}$

二者在旋转变换下无区别，但在反演（宇称）变换下不同。

一阶张量 (矢量)$\overrightarrow{A}$ **：**

$$A'_i=\lambda_{ij}A_j$$
$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\equiv A_iB_i$$
$$(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})_i\equiv\varepsilon_{ijk}A_jB_k$$

二阶张量 $\overleftrightarrow{T}$:

$$T'_{ij}=\lambda_{ik}\lambda_{jl}T_{kl}$$

或写为矩阵形式

$$T'=\lambda T\lambda^T$$

并矢：

$$(\overrightarrow{A}\overrightarrow{B})_{ij} \equiv A_i B_j$$

九个张量 $\hat{x}_i\hat{x}_j$ 构成了二阶张量空间的一组基

$$\overleftrightarrow{T} = T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j$$

1.2.2　张量代数运算

张量积：

$$R^{m+n阶} = T^{m阶} \otimes S^{n阶}$$

$$R_{i_1 \cdots i_{m+n}} = T_{i_1 \cdots i_m} R_{i_1 \cdots i_n}$$

并矢也为张量积。**张量不变性**

$$T'_{ij}\hat{x}_i{}'\hat{x}_j{}' = T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j$$

点乘: 张量与矢量点乘满足 1、就近原则 2、$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$

故

$$\overleftrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{A} = (T_{ik}A_k)\hat{x}_i$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{T} = (A_k T_{kj})\hat{x}_j$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{T}\overrightarrow{B} = T_{ij}A_i B_j$$

矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

叉乘: 张量与矢量叉乘满足 1、就近原则 2、$\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_k$

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (\varepsilon_{ijk}A_jB_k)\hat{x}_i$$

轴矢量之间的叉乘得到的是极矢量.

1.3　场的导数

1.3.1　梯度算子

梯度算子 ∇ ：

$$\nabla \equiv \hat{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{x}_i\partial_i$$

$$\nabla\varphi = (\partial_i\varphi)\hat{x}_i$$

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\overrightarrow{r}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \partial_iF_i$$

$$\nabla\overrightarrow{F} = (\partial_iF_j)\hat{x}_i\hat{x}_j$$

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = (\varepsilon_{ijk}\partial_jF_k)\hat{x}_i$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = (\partial_kT_{ki})\hat{x}_i$$

定理:

$$\nabla \times (\overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g}) = (\nabla \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{g} \cdot \nabla)\overrightarrow{f} - (\nabla \cdot \overrightarrow{f} + \overrightarrow{f} \cdot \nabla)\overrightarrow{g}$$

$$\nabla \times \nabla\varphi \equiv 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{A}) \equiv 0$$

$$\partial_iF_j = \partial_jF_i \Leftrightarrow \nabla \times \overrightarrow{F} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F} = \nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

1.3.2　场的变换

在两个坐标系中的同一个标量场满足:

$$\varphi^{'}(x_1^{'},x_2^{'},x_2^{'})=\varphi(x_1,x_2,x_3)$$

1.3.3　求导约定

对矢量求导：

$$\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{A}}\equiv\frac{\partial f}{\partial A_i}\hat{x}_i\equiv(\frac{\partial f}{\partial A_1},\frac{\partial f}{\partial A_2},\frac{\partial f}{\partial A_3})^T$$

若 $f=f(\overrightarrow{r},\dot{\overrightarrow{r}},t)$，则其对 t 全导数：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{r}}\dot{\overrightarrow{r}}+\frac{\partial f}{\partial\dot{\overrightarrow{r}}}\ddot{\overrightarrow{r}}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

对一组变量求导：

$$f=f(q_1\cdots q_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}=(\frac{\partial f}{\partial q_1},\frac{\partial f}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial q_n})^T$$

1.4　约束

1.4.1　自由体系

N 个质点的质点组，状态参量为 $(\overrightarrow{r},\dot{\overrightarrow{r}})=(\overrightarrow{r_1},\cdots,\overrightarrow{r_n},\dot{\overrightarrow{r_1}},\cdots,\dot{\overrightarrow{r_n}})$

1.4.2　完整约束体系

一般约束

$$f(\overrightarrow{r},\dot{\overrightarrow{r}},t)=0$$

完整约束

$$f(\overrightarrow{r},t)=0$$

一个 N 个质点 K 个完整约束的体系：

自由度 n=3N-k，构成 n 维位形曲面，法向量：

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overrightarrow{r}}$$

n 维广义坐标 q，有

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(q,t)$$

切向量 $\overrightarrow{\tau_k} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$

同理有 n 维广义速度 $\dot{q}$，得

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t}$$

定理:

$$\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

1.4.3　理想约束假设

约束 $f\alpha(\overrightarrow{r},t) = 0$ 提供的约束力：

$$\overrightarrow{N}^\alpha = (\overrightarrow{N}_1^\alpha, \overrightarrow{N}_2^\alpha, \cdots, \overrightarrow{N}_N^\alpha)$$

理想约束假设:

$$\overrightarrow{N} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overrightarrow{r}}$$

即约束力与位型曲面垂直。

1.4.4　动能

$$T = \frac{1}{2} m_a \dot{\overrightarrow{r}}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}} = \overrightarrow{p}$$

广义动能：

$$T \equiv T(\dot{\overrightarrow{r}}(q, \dot{q}, t))$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\tau_k}$$

1.4.5　势能

$$U(\overrightarrow{r}, t) = U^{外}(\overrightarrow{r}, t) + \frac{1}{2}\sum_{a \neq b} U_{ab}(r_{ab})$$

粒子 a 受到的力：

$$\overrightarrow{F}_a = -\frac{U^{外}}{\partial \overrightarrow{r}_a} - \sum_{a \neq b} \frac{\partial U_{ab}}{\partial \overrightarrow{r_a}}$$

故体系受力：

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r}}$$

广义力:

$$Q_k \equiv \overrightarrow{F} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$$

第二章　Lagrange 力学

2.1　Hamilton 原理

Hamilton 原理：在满足约束，且有相同端点的所有可能路径中，真实运动是使得作用量 $S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$ 取得最小值的路径。其中 $L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T - U$ 为 Lagrange 函数.

Lagrange 函数中的动能 T 为体系总动能，势能 U 为主动力所贡献的势能之和.

2.1.1　泛函

泛函:

$$I[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)$$

路径变分 $\delta q(t)$

速度变分 $\delta \dot{q} \equiv \frac{d}{dt}\delta q$

加速度变分 $\delta \ddot{q} \equiv \frac{d}{dt}\delta \dot{q}$

$$\delta L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k$$

泛函变分：

$$\delta I[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

即变分与积分、导数均可换序。Leibniz formula:

$$\delta(fg) = g(\delta f) + f(\delta g)$$

链式法则：

$$\delta g(f) = \frac{\partial g}{\partial f}\delta f$$

若对于任意函数 $\eta_1(x), \eta_2(x), \cdots, \eta_n(x)$, 有

$$\int_a^b [\sum_{k=1}^{n} G_k(x)\eta_k(x)]dx = 0$$

则 $G_1(x) = G_2(x) = \cdots = G_n(x) = 0$

驻值路径

$$\delta I[q(t)] = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta L}{\delta q_k} \equiv \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} = 0$$

Eular-Lagrange 方程

推论：

若 L 不显含 q_k，则 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} = const$

Jacob 积分:

$$h(q, \dot{q}, t) \equiv \dot{q_k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - L$$

Lagrange 方程等价于

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

当 L 不显含 t 时，则 $h = const.$

2.1.2 Hamilton 原理的证明

证明：[1]

[1]本人认为这段证明很 cool，遂记录

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{r}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{\dot{q_k}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{q_k}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{q_k}) = (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}{q_k}$$

故 $\frac{\delta L}{\delta q_k}$ 可改写为：

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} = (\frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

对于 Lagrange 函数

$$L = T(\dot{\overrightarrow{r}}, t) - U(\overrightarrow{r}, t)$$

将 T 和 U 代入改写后的 $\frac{\delta L}{\delta q_k}$

$$\frac{\delta T}{\delta q_k} = (\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k} = -\dot{\overrightarrow{p}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\delta T}{\delta q_k} = (\frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overrightarrow{r}}}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k} = -\overrightarrow{F} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}$$

故 Eular-Lagrange 方程可改写为

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = (\overrightarrow{F} - \dot{\overrightarrow{q}}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k} = 0$$

这就是理想约束假设下的牛顿第二定律。

2.1.3　推论

广义动量:

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}$$

故 Jacob 积分

$$h(q, \dot{q}, t) \equiv \dot{q_k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - L = p_k\dot{q_k} - L$$

满足 $\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}$

若 L 不显含 q_k，则 $p_k=const.$

若 L 不显含 t，则 h=const.

广义力：

$$Q_k \equiv \overrightarrow{F}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}=-\frac{\partial U}{\partial q_k}$$

即广义力是势能对广义坐标的导数。体系的平衡位置即是使广义力 $Q_k=0$ 的位置。

2.1.4　Lagrange 函数的性质

惯性系: Lagrange 函数的动能与势能是在惯性系下观测得到的，若在非惯性系中，则 Lagrange 函数的动能为非惯性系中的动能，势能则除了主动力还需考虑惯性力的贡献。

一般不采用非惯性系中的 Lagrange 函数，只需在惯性系中写出 L 函数，并利用下面的规范变换化简即可得到相同结果。

Lagrange 函数的不确定性（规范变换）:

$$L^{'}(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{dF(q,t)}{dt}$$

规范变换前后的 Lagrange 函数满足相同的拉格朗日方程，故可描述同一体系, 其中不依赖于 $\dot{q}$ 的 $F(q,t)$ 称为规范函数。

可加性：对于一个体系的 A，B 两部分，若两部分之间相互作用的势能可忽略，则

$$L_{A+B}=L_A(q_A,\dot{q_A})+L_B(q_B,\dot{q_B})$$

即此时二者可视为孤立体系处理。

通常情况下，我们反向使用该性质：即对于一个体系，可以通过选取合适的广义坐标 q_A 和 q_B，将对应的 Lagrange 函数化简为分别只和 q_A,q_B 相关的两部分，即可将耦合的体系拆分成了孤立的研究对象。

2.2 拉格朗日乘子法

2.2.1 约束力 $f(\overrightarrow{r},t)=0$

对于自由度为 s 的体系，为求解约束力 $f(\overrightarrow{r},t)=0$，

1、设想将该约束解除,则体系由 s+1 个不独立的广义坐标 $q=(q_1,\cdots,q_{s+1})$ 描述。

通过变换方程将约束方程写为

$$f(q,t)=0$$

2、**广义约束力：**

$$Q_k^{'}=\overrightarrow{N}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}$$

其中 λ 称为拉格朗日乘子，若将 $Q_k^{'}$ 排列为矢量 $\overrightarrow{Q}^{'}$，则在广义坐标 q 构成的空间中，$\overrightarrow{Q}^{'}$ 与超曲面 f=0 垂直。

将牛顿方程 $\overrightarrow{F}+\overrightarrow{N}-\dot{\overrightarrow{P}}=0$ 在方向 $\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_k}$ 上作投影。

得到：

$$\frac{\delta L}{\delta q_k}+Q_k^{'}=0$$

即在求解约束力问题时有 q,λ 这 s+2 个未知量及如下 s+2 个方程：

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q_k}}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}\\ f(q,t)=0\end{cases}$$

注意写出上式第一个方程（也叫带乘子的拉格朗日方程）时不可提前代入约束条件，否则将会化为广义坐标相互独立的情况。

由这 s+2 个方程就可以确定体系的位形 q_k 以及广义约束力 $\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}$。

2.2.2 几点说明

若将 λ 视为广义坐标，则可定义如下拉格朗日函数：

$$\widetilde{L}\triangleq L(q,\dot{q},t)+\lambda f(q,t)=\widetilde{L}(q,\lambda,\dot{q},t)$$

拉格朗日方程则化为

$$\begin{cases}\frac{\delta\widetilde{L}}{\delta q_k}=\frac{\delta L}{\delta q_k}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}=0\\ \frac{\delta\widetilde{L}}{\delta\lambda}=f=0\end{cases}$$

即对应了 2.2.1 中求解约束力问题的 s+2 个方程。

同样的定义了新的 Jacob 积分：

$$\widetilde{h}\triangleq\widetilde{P_k}\dot{q}_k+\widetilde{P_\lambda}\dot{\lambda}-\widetilde{L}=h-\lambda f$$

与不含约束方程的雅可比积分有相同结论，若 $\widetilde{L}$ 不显含 t，则 $\widetilde{h}=const$

而对于多个约束的情况，只需将 λf 用 $\lambda_\alpha f_\alpha$ 替换即可。

静力学问题:

前面提到，若仅需求解平衡位置，则使广义力为 0 即可求解：

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}=0$$

若要得到体系平衡位置的约束力，则使用拉格朗日乘子法：

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}$$

即

$$Q_k^{'}+Q_k=0$$