ЧОУ ВО «УГП имени А.К. Айламазяна»

А. Ю. Попов

Двусторонние оценки сумм значений функции в целых точках и их приложения

Издательство Университета города Переславля

Переславль-Залесский
2016

УДК 517.53
ББК 22.161.5

П58

А. Ю. Попов. *Двусторонние оценки сумм значений функции в целых точках и их приложения*. — Переславль-Залесский: «Университет города Переславля», 2016, **78** с.

Можно ли сложные выражения можно вычислять с той же легкостью, как сумму арифметической или геометрической прогрессии? Пусть точный ответ может быть получен лишь в исключительно редких случаях, зато ответ с желаемой точностью нередко достижим. Важным примером является широко используемая в прикладных расчётах формула Стирлинга.

В этой книге известный российский математик Антон Юрьевич Попов раскрывает оригинальный подход к получению таких формул. Увлекательное и эмоциональное изложение сочетается в книге с безупречными формулировками и строгими математическими доказательствами.

Профессиональные математики найдут в ней отсутствующие в учебной литературе двусторонние оценки высокой точности частичных сумм числовых рядов. Аспирантов и студентов старших курсов математических специальностей книга научит получению приближённых формул с гарантией требуемой точности.

ISBN 978-5-901795-35-4

Введение

В центре нашего внимания будет следующая задача. Даны целые числа a, n $(a < n)$ и функция f, которая определена на отрезке $[a, n]$, имеет на нём ограниченную вариацию, а также непрерывна во всех целых точках этого отрезка. Требуется как можно точнее оценить сумму $\sum\limits_{k=a}^{n} f(k)$.

Здесь и далее под $\sum\limits_{k=a}^{n} f(k)$ понимается сумма значений функции f во всех целых точках $k \in [a, n]$. Интуитивно ясно, что если функция f меняется «не слишком быстро», то в качестве приближения суммы разумно взять интеграл с добавкой:

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) \approx \int\limits_{a}^{n} f(x)dx + \frac{f(a) + f(n)}{2}. \tag{0.1}$$

Необходимость добавки к интегралу в (0.1) проще всего объясняется желанием получить приближённую формулу, которая оказалась бы точной на линейных функциях. Нетрудно убедиться в том, что в случае $f(x) = kx + b$ (k, b — произвольные постоянные) в (0.1) имеет место точное равенство.

В этом пособии будут выведены формулы, выражающие погрешность приближения (0.1), а из этих формул в частных случаях, когда f является степенной или логарифмической функцией будут получены двусторонние оценки сумм, часто встречающихся в различных приложениях. Одним из следствий таких оценок станет уточнение асимптотической формулы Стирлинга для факториала:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right) < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{1}{12n}\right). \tag{0.2}$$

Это двойное неравенство не только дает второе слагаемое в асимптотике $n!$, но и справедливо при любом натуральном n. На основании (0.2) будут получены двусторонние оценки коэффициентов разложения в степенной ряд полного эллиптического интеграла первого рода

$$\mathcal{K}(k) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{2\nu - 1}{2\nu}\right)^2, |k| < 1, \tag{0.3}$$

с помощью которых удастся достаточно точно оценить сверху и снизу полный эллиптический интеграл (0.3) на интервале $0 < k < 1$ элементарными функциями.

В теоремах общего характера об оценке (или интегральном представлении) сумм значений функции f к гладкости f предъявляются минимальные требования. Например, в теореме 1 предполагается, что f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, n]$ и непрерывна в целых точках. Поясним разумность этих требований.

Если мы хотим, чтобы приближённая формула (0.1) имела практический смысл, то обе её части должны «примерно одинаково» реагировать на изменение функции. в случае отказа от требования непрерывности f хотя бы в одной целой точке $k \in (a, n)$, мы можем произвольным образом изменить значение функции f в одной лишь точке k. в результате этого правая часть (0.1) никак не изменится, а сумма в левой части может стать равной любому числу. Что же касается ограниченности вариации, то это — общепринятое условие, запрещающее функции иметь «слишком большой» разброс значений, который не позволил бы сумму приблизить интегралом. Кроме того, ограниченность вариации функции f позволяет определить интеграл

$$\int_a^n \psi(x) df(x), \tag{0.4}$$

называемый интегралом Стильтьеса, не используя какие–либо дифференциальные свойства функции f. С теорией интеграла Стильтьеса и свойствами функции ограниченной вариации можно познакомиться в учебнике [1], гл. 8. Здесь мы напомним только те свойства интеграла (0.4), которые будут использоваться ниже. Линейное пространство функций, имеющих ограниченную вариацию на отрезке $[a, n]$, обозначим $V[a, b]$.

Интеграл (0.4) существует, какова бы ни была пара функций $\psi \in C[a, n]$ и $f \in V[a, n]$. Он существует также, если функция ψ имеет не более, чем счётное множество точек разрыва, но все точки разрыва ψ являются точками непрерывности f. Если в дополнение к этому $\psi \in V[a, n]$ и существуют пределы

$$\lim_{x \to a+} \psi(x) f(x) = A, \quad \lim_{x \to n-} \psi(x) f(x) = N,$$

то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^n \psi(x) df(x) = N - A - \int_a^n f(x) d\psi(x) \tag{0.5}$$

Для интеграла Стильтьеса верны следующие оценки:

$$\left|\int\limits_a^n \psi(x)df(x)\right| \leqslant \left(\sup_{a\leqslant x\leqslant n}|\psi(x)|\right) \mathrm{Var}\ f(x)\big|_a^n. \tag{0.6}$$

Если же функция f не убывает, то

$$(f(n)-f(a))\inf_{a\leqslant x\leqslant n}\psi(x) \leqslant \int\limits_a^n \psi(x)df(x) \leqslant (f(n)-f(a))\sup_{a\leqslant x\leqslant n}\psi(x). \tag{0.7}$$

Если функция ψ измерима по Лебегу и ограничена на $[a,n]$, а функция f абсолютно непрерывна на $[a,n]$, (это символически записывается $f\in\mathcal{AC}\,[a,n]$), то интеграл (0.4) существует как интеграл Лебега—Стильтьеса и верно равенство

$$\int\limits_a^n \psi(x)df(x) = \int\limits_a^n \psi(x)f'(x)dx. \tag{0.8}$$

Если к тому же ψ и f' интегрируемы по Риману, то интеграл (0.4) существует как интеграл Римана—Стильтьеса, а интеграл в правой части (0.8) — интеграл Римана. Приведем достаточное условие абсолютной непрерывности функции f. Если $f\in\mathcal{C}\,[a,n]\bigcap\mathcal{D}\,((a,n)\setminus\mathcal{N})$, а множество $\mathcal{N}$ пусто, конечно или счётно, то $f\in\mathcal{AC}\,[a,n]\Leftrightarrow f'\in L\,[a,n]$. Если множество точек недифференцируемости f несчётно (пусть даже оно имеет меру нуль), то такое утверждение перестает быть верным.

В конце введения хочу специально отметить, что почти все теоремы, доказанные в этом пособии, имеют более чем столетнюю давность и автор ни в какой степени не претендует на оригинальность и новизну. Исключениями являются теорема 22 из §7 о двусторонней оценке факториала и теоремы 26, 28 из §8 о двусторонней оценке полных эллиптических интегралов. Таких результатов я не встретил в математической литературе и доказал их самостоятельно. Впрочем, про Гамма-функцию и эллиптические функции написано огромное множество статей и книг и лишь небольшая их часть известна автору данного пособия. Так что вполне может оказаться, что и эти результаты не новы. Автор будет весьма признателен читателям, которые сообщат ему о различных нетривиальных результатах, связанных с двусторонними оценками полных эллиптических интегралов элементарными функциями. Автор будет также благодарен за различные критические замечания.

Завершая введение, скажу несколько слов о том, кому адресовано это учебное пособие, и как его, по мнению автора, следует изучать. в основном, оно предназначено для лиц, освоивших на «отлично» курс математического анализа, преподаваемый студентам математических факультетов классических университетов, и желающих углубить свои познания в этой области. Поэтому при чтении пособия я рекомендую читателю после знакомства с формулировкой каждой теоремы попытаться доказать её самостоятельно и только после этого ознакомиться с приведенным в пособии текстом доказательства. Итогом такого изучения изложенного в пособии материала станет овладение читателем различными приёмами, позволяющими давать двусторонние оценки «регулярно» ведущих себя последовательностей. Надеюсь также, что пособием можно будет пользоваться как справочным материалом, поскольку во многих курсах анализа выводятся асимптотики различных сумм с символами O и o, а двусторонние оценки остаточных членов либо отсутствуют, либо не очень точны.

§1. Интегральные формулы Эйлера

Всюду ниже, как обычно, через $[x]$ обозначена целая часть действительного числа x, а через $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x.

Теорема 1. *Пусть $a, n \in \mathbb{Z}$, $a < n$, $f \in V\,[a, n]$, f непрерывна во всех целых точках отрезка $[a, n]$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_{a}^{n} f(x)dx + \frac{f(a) + f(n)}{2} - \int\limits_{a}^{n} \rho(x)df(x), \tag{1.1}$$

в котором $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$.

Доказательство. Продолжим функцию f на отрезки $[a-1, a]$ и $[n, n+1]$ значениями $f(a)$ и $f(n)$ соответственно. По определению интеграла Стильтьеса и ввиду непрерывности функции f во всех целых точках отрезка $[a, n]$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ выполняется равенство

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_{a-\varepsilon}^{n+\varepsilon} f(x)d\,[x]\,. \tag{1.2}$$

Ввиду непрерывности функции f и целой части $[x]$ в точках $a - \varepsilon$, $n + \varepsilon$ и включения $f \in V\,[a - \varepsilon, n + \varepsilon]$ возможно интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int\limits_{a-\varepsilon}^{n+\varepsilon} f(x)d\,[x] &= [x]\,f(x)\big|_{a-\varepsilon}^{n+\varepsilon} - \int\limits_{a-\varepsilon}^{n+\varepsilon} [x]\,df(x) \\ &= nf(n+\varepsilon) - (a-1)f(a-\varepsilon) - \int\limits_{a-\varepsilon}^{n+\varepsilon} [x]\,df(x) \qquad (1.3) \\ &= nf(n) - (a-1)f(a) - \int\limits_{a}^{n} (x - \{x\})\,df(x). \end{aligned}$$

В заключительном переходе использовано постоянство функции f на отрезках $[a-1, a]$ и $[n, n+1]$. Из (1.2), (1.3) находим

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = nf(n) - (a-1)f(a) - \int\limits_{a}^{n} xdf(x) + \int\limits_{a}^{n} \{x\}\,df(x). \tag{1.4}$$

Имеем также

$$\int_a^n x df(x) = nf(n) - af(a) - \int_a^n f(x)\,dx, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \int_a^n \{x\}\,df(x) &= \int_a^n \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) df(x) + \frac{1}{2}\int_a^n df(x) \\ &= -\int_a^n \rho(x) df(x) + \frac{f(n)-f(a)}{2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из (1.4) – (1.6) получаем (1.1). Теорема доказана.

$\square$

Последнее слагаемое в формуле (1.1) можно преобразовать, если функция f обладает некоторой гладкостью. Такое преобразование оказывается полезным, когда производная f' меняется медленнее, чем сама функция.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $a, n \in \mathbb{Z}$, $a < n$, $f \in \mathcal{C}\,[a, n]$, функция f дифференцируема на (a, n) всюду кроме множества $\mathcal{N}$, относительно которого известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счетно. Известно также, что f' имеет на множестве $(a, n)\backslash\mathcal{N}$ ограниченную вариацию. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int_a^n f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(n)}{2} + \int_a^n \frac{\{x\} - \{x\}^2}{2} df'(x). \tag{1.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва обоснуем корректность формулировки теоремы. Это необходимо, поскольку классический интеграл Римана–Стильтьеса $\int_a^n g(x)d\varphi(x)$ определяется в случае, когда функция φ определена всюду на отрезке $[a, n]$, а в нашем случае ($\varphi = f'$) она определена на множестве $(a, n)\backslash\mathcal{N}$. Поэтому укажем, как её следует доопределить. Если $\varphi \in V\,((a, n)\backslash\mathcal{N})$, где множество $\mathcal{N}$ или пусто, или конечно, или счётно, то функция φ, во-первых, ограничена на $(a, n)\backslash\mathcal{N}$, а во-вторых, представима в виде разности двух монотонных функций (это доказывается в точности так же, как и для функции φ, которая всюду определена на $[a, n]$). Следовательно, функция φ имеет односторонние пределы в каждой точке отрезка $[a, n]$.

Ввиду сказанного мы применяем следующий классический способ доопределения функции φ: в концах отрезка полагаем её равной её пределам, а во внутренних точках отрезка, где она не определена, определяем её так, чтобы её значение было заключено между пределом слева и пределом справа. Доопределённая таким образом функция φ будет принадлежать пространству $V[a,n]$ и её вариация на всём отрезке $[a,n]$ будет совпадать с её вариацией на множестве $(a,n)\backslash\mathcal{N}$. Разумеется, доопределённая таким способом функция φ будет интегрируемой по Риману на $[a,n]$. Заметим также, что интегралы $\int\limits_a^n g(x)d\varphi(x)$ (если $g\in C[a,n]$) и $\int\limits_a^n \varphi(x)dg(x)$ (если g — непрерывная функция ограниченной вариации на $[a,n]$) не будут зависеть от произвола в доопределении φ в точках разрыва, если мы придерживаемся правила, чтобы значение φ было заключено между её пределами слева и справа. Таким образом, мы можем рассматривать производную $f'(x)$ как всюду определённую на $[a,n]$ функцию ограниченной вариации. Поэтому верны равенства

$$\int\limits_a^n \rho(x)df(x)=\int\limits_a^n \rho(x)f'(x)\,dx=\int\limits_a^n f'(x)d\sigma(x), \tag{1.8}$$

где

$$\sigma(x)=\int\limits_0^x \rho(t)dt\equiv\frac{\{x\}-\{x\}^2}{2},\quad x\in\mathbb{R}. \tag{1.9}$$

При выводе тождества (1.9) решающую роль играет 1−периодичность функции ρ и равенство $\int\limits_0^1 \rho(t)dt=0$.

Из (1.1) и (1.8) находим

$$\sum_{k=a}^n f(k)=\int\limits_a^n f(x)\,dx+\frac{f(a)+f(n)}{2}-\int\limits_a^n f'(x)d\sigma(x). \tag{1.10}$$

Ввиду включения $f'\in V\,[a,n]$, непрерывности функции σ и обращения её в нуль в целых точках возможно интегрирование по частям:

$$\int\limits_a^n f'(x)d\sigma(x)=-\int\limits_a^n \sigma(x)df'(x).$$

Отсюда и из (1.10) получаем (1.7). Теорема доказана. □

Замечание 1. *Условие теоремы 2 «функция f дифференцируема на (a,b) всюду кроме, может быть, счётного множества точек» может показаться на первый взгляд искусственным. Почему бы не ограничиться функциями, дифференцируемыми на (a,b) всюду или всюду кроме, может быть, конечного множества точек? Это более общее условие вызвано желанием целиком охватить такой важный класс функций как выпуклые и вогнутые.*

Напомним, что функция $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ называется выпуклой, если при любых $x_1,x_2\in[a,b]$ верно неравенство

$$f(x)\leqslant f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)\quad \forall x\in[x_1,x_2]\,. \tag{1.11}$$

Другими словами, функция выпукла, если отрезок, соединяющий две произвольные точки её графика, лежит не ниже графика. Функция $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ называется вогнутой, если в (1.11) выполняется противоположное неравенство, то есть функция $-f$ является выпуклой.

Приведем теорему о дифференциальных свойствах выпуклых функций ([2], стр. 204-207).

Функция $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ является выпуклой на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда она обладает следующими дифференциальными свойствами. в каждой точке интервала (a,b) функция f имеет как левую, так и правую производную; существуют (возможно, бесконечные) $f'_{\Pi}(a)$ и $f'_{\Lambda}(b)$. Односторонние производные $f'_{\Lambda}(x)$ и $f'_{\Pi}(x)$ являются неубывающими функциями на $(a,b]$ и на $[a,b)$ соответственно и при любом $x\in(a,b)$ верно неравенство $f'_{\Lambda}(x)\leqslant f'_{\Pi}(x)$. Множество $\{x\in(a,b)\mid f'_{\Lambda}(x)<f'_{\Pi}(x)\}$ либо пусто, либо конечно, либо счётно.

Заметим, что какое бы счётное подмножество $\mathcal{N}$ интервала (a,b) мы ни взяли, найдётся выпуклая на $[a,b]$ функция f, производная которой существует в точности на $[a,b]\backslash\mathcal{N}$.

Производная выпуклой на $[a,b]$ функции имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $f'_{\Pi}(a)>-\infty$ и $f'_{\Lambda}(b)<+\infty$. в силу монотонности производной верно равенство

$$Var f'|_a^b=f'(b)-f'(a).$$

(В дальнейшем в записи производных функции в концах отрезка нижние индексы «Λ” и «Π” будем опускать).

При наличии у функции f ещё большей гладкости, чем предполагается в теореме 2, возможно дальнейшее преобразование последнего интеграла в правой части (1.7). Таким методом выводится общая формула суммирования Эйлера–Маклорена [3] глава 4, §3, частным случаем которой являются формулы (1.1), (1.7). Эта общая формула находит применение реже, чем её частные случаи, рассматриваемые в теоремах 1 и 2, поэтому мы её здесь не доказываем.

Остановимся только на ещё одном частном случае, который будет полезен для дальнейшего. Положим

$$\sigma_1(x) = \frac{\{x\}}{12} - \frac{\{x\}^2}{4} + \frac{\{x\}^3}{6}, \tag{1.12}$$

$$\sigma_2(x) = \frac{\{x\}^2}{24} - \frac{\{x\}^3}{12} + \frac{\{x\}^4}{24} = \frac{\sigma^2(x)}{6}. \tag{1.13}$$

Теорема 3. *Пусть $a, n \in \mathbb{Z}$, $a < n$, $f \in \mathcal{C}^1[a, n]$. Тогда если f' имеет производную на (a, n) всюду кроме множества $\mathcal{E}$, которое либо пусто, либо конечно, либо счётно, $f'' \in V((a, n)\backslash\mathcal{E})$, справедливо равенство*

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_a^n f(x)\,dx + \frac{f(a) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(a)}{12} + \int\limits_a^n \sigma_1(x) df''(x). \tag{1.14}$$

Если $f \in \mathcal{C}^2[a, n]$, $f''(x)$ дифференцируема на (a, n) всюду кроме множества $\mathcal{E}_1$, которое либо пусто, либо конечно, либо счётно, и $f''' \in V((a, n)\backslash\mathcal{E}_1)$, то

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_a^n f(x)\,dx + \frac{f(a) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(a)}{12} - \int\limits_a^n \sigma_2(x) df'''(x). \tag{1.15}$$

Доказательство. Начнём с доказательства формулы (1.14). в свете теоремы 2 требуется доказать равенство

$$\int_a^n \sigma(x)df'(x) = \frac{f'(n)-f'(a)}{12} + \int_a^n \sigma_1(x)df''(x). \tag{1.16}$$

По условию теоремы 3 интеграл $\int_a^n \sigma_1(x)df''(x)$ существует. Преобразуем его, воспользовавшись формулой интегрирования по частям (0.5). Поскольку функция $\sigma_1(x)$ непрерывна и обращается в нуль в целых точках, а вторая производная $f''(x)$ ограничена на $[a,n]$ в силу ограниченности её вариации, предел произведения $\sigma_1(x)f''(x)$ при $x \to a+$ и $x \to n-$ существует и равен нулю. Следовательно, верны равенства

$$\begin{aligned}\int_a^n \sigma_1(x)df''(x) &= -\int_a^n f''(x)\,d\sigma_1(x) = \int_a^n f''(x)\left(\sigma(x)-\frac{1}{12}\right)dx \\ &= \int_a^n f''(x)\sigma(x)dx - \frac{1}{12}\int_a^n f''(x)\,dx = \int_a^n \sigma(x)df'(x) - \frac{f'(n)-f'(a)}{12}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

(Мы использовали то, что согласно (1.12) всюду кроме целых точек верно равенство $\sigma_1'(x) = 1/12 - \sigma(x)$.) Из (1.17), перенося в левую часть $\frac{f'(n)-f'(a)}{12}$, получаем (1.16). Формула (1.14) доказана. Формула (1.15) выводится из формулы (1.14) интегрированием по частям

$$\int_a^n \sigma_2(x)df'''(x) = -\int_a^n f'''(x)d\sigma_2(x) = -\int_a^n f'''(x)\sigma_1(x)dx = -\int_a^n \sigma_1(x)df''(x).$$

Теорема доказана. □

В следующих параграфах мы продемонстрируем, как формулы (1.1), (1.7), (1.14), (1.15) (вернее, их модификации) применяются для вывода двусторонних оценок сумм значений степенной и логарифмической функции. Сейчас мы применим теорему 3 для получения явных выражений для сумм квадратов, кубов и четвёртых степеней первых n натуральных чисел. Разумеется, эти задачи несложно решаются методами элементарной математики, но теорема 3 почти сразу дает ответ.

Действительно, применив формулу (1.15) последовательно для функций $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \int\limits_0^n x^2\,dx + \frac{n^2}{2} + \frac{2n}{12} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \int\limits_0^n x^3\,dx + \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{12} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4 = \int\limits_0^n x^4\,dx + \frac{n^4}{2} + \frac{4n^3}{12} - \int\limits_0^n \sigma_2(x)d\,(\,24x) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3}$$

$$- \int\limits_0^n \left(\{x\}^2 - 2\{x\}^3 + \{x\}^4\right)\,dx.$$

Воспользовавшись 1−периодичностью дробной части, находим

$$\int\limits_0^n \left(\{x\}^2 - 2\{x\}^3 + \{x\}^4\right)\,dx = n\int\limits_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right)\,dx = \frac{n}{30}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Приведём модификации формул суммирования (1.1), (1.7), (1.14), (1.15) в случае, когда функция f определена на луче $[a, +\infty)$, обладает на нём соответствующей гладкостью и какая-либо производная f имеет ограниченную вариацию на всём луче $[a, +\infty)$. Именно эти модификации позволяют получать асимптотики сумм $\sum\limits_{k=a}^{n} f(k)$ при $n \to \infty$ с достаточно точными оценками остатков.

Теорема 4. *Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $f\colon\ [a, +\infty) \to \mathbb{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если функция $f \in V\,[a, +\infty)$ непрерывна в целых точках луча $[a, +\infty)$, то при любом целом $n > a$ верно равенство*

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_a^n f(x)dx + A_0(f, a) + \frac{f(n)}{2} + \int\limits_n^{+\infty} \rho(x)df(x), \tag{1.18}$$

в котором $A_0(f,a) = \frac{f(a)}{2} - \int\limits_a^{+\infty} \rho(x)df(x)$.

(2) *Если* $f \in \mathcal{C}\,[a,+\infty)$ *имеет производную на* $(a,+\infty)$ *всюду кроме множества* $\mathcal{E}$*, относительно которого известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно,* $f' \in V\left((a,+\infty)\backslash\mathcal{E}\right)$*, то при любом целом* $n > a$ *верно равенство*

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_a^n f(x)dx + A_1(f,a) + \frac{f(n)}{2} - \int\limits_n^{+\infty} \sigma(x)df'(x), \tag{1.19}$$

в котором $A_1(f,a) = \frac{f(a)}{2} - \int\limits_a^{+\infty} \sigma(x)df'(x)$.

(3) *Если* $f \in \mathcal{C}^1\,[a,+\infty)$*, вторая производная существует на* $[a,+\infty)$ *всюду кроме множества* $\mathcal{E}_1$*, относительно которого известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно,* $f'' \in V\left((a,+\infty)\backslash\mathcal{E}_1\right)$*, то при любом целом* $n > a$ *верно равенство*

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_a^n f(x)dx + A_2(f,a) + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} - \int\limits_n^{+\infty} \sigma_1(x)df''(x), \tag{1.20}$$

в котором $A_2(f,a) = \frac{f(a)}{2} - \frac{f'(a)}{12}\int\limits_a^{+\infty} \sigma_1(x)df''(x)$.

(4) *Если* $f \in \mathcal{C}^2\,[a,+\infty)$*, третья производная существует на* $[a,+\infty)$ *всюду кроме множества* $\mathcal{E}_2$*, относительно которого известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно,* $f''' \in V\left((a,+\infty)\backslash\mathcal{E}_2\right)$*, то при любом целом* $n > a$ *верно равенство*

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) = \int\limits_a^n f(x)dx + A_3(f,a) + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} + \int\limits_n^{+\infty} \sigma_2(x)df'''(x), \tag{1.21}$$

в котором $A_3(f,a) = \frac{f(a)}{2} - \frac{f'(a)}{12} - \int\limits_a^{+\infty} \sigma_2(x)df'''(x)$.

Теорема 4 сразу же следует из теорем 1–3 и сходимости соответствующих несобственных интегралов.

Сделаем полезное для дальнейшего замечание.

Замечание 2.

(1) *Если выполнены условия раздела 2 теоремы 4, функция* $f \in V\,[a, +\infty)$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, *то верно равенство*

$$A_1(f; a) = A_0(f; a). \tag{1.22}$$

(2) *Если выполняются условия раздела 3 теоремы 4, производная функции* $f' \in V\,[a, +\infty)$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, *то верно равенство*

$$A_1(f; a) = A_2(f; a). \tag{1.23}$$

(3) *Если выполняются условия раздела 4 теоремы 4, вторая производная* $f'' \in V\,[a, +\infty)$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$, *то верно равенство*

$$A_2(f; a) = A_3(f; a). \tag{1.24}$$

Равенства (1.22) – (1.24) выводятся с помощью интегрирования по частям непосредственно из определения величин $A_k(f; a)$.

§2. Оценки погрешности приближённых формул суммирования значений функций и квадратурных формул

В этом параграфе выводятся оценки погрешности приближённых формул суммирования значений функции в целых точках, составляющих содержание теорем 1—4. Полученные результаты, в частности, дают возможность оценить погрешность некоторых формул приближённого вычисления интегралов. Теорема 8 позволит получить в следующих параграфах весьма точные двусторонние оценки сумм значений степенной и логарифмической функций.

Всюду в §3 предполагается, что $a, n \in \mathbb{Z}$, $a < n$, функция f определена на $[a, n]$, принимает (вообще говоря) комплексные значения и непрерывна в целых точках. Если о функции говорится, что она монотонна или выпукла, то это автоматически означает, что она действительнозначна.

Теорема 5. *Если $f \in V\,[a, n]$, то для величины*

$$R(f; a, n) = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int_a^n f(x)dx - \frac{f(a) + f(n)}{2} \tag{2.1}$$

верна оценка

$$|R(f; a, n)| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Var} f|_a^n\,. \tag{2.2}$$

Если $f \in V\,[a, +\infty)$ и непрерывна во всех целых точках луча $[a, +\infty)$, то при любом $n > a$ для величины

$$\tilde{R}(f; a, n) = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int_a^n f(x)dx - A_0(f; a) - \frac{f(n)}{2} \tag{2.3}$$

верна оценка

$$\left|\tilde{R}(f; a, n)\right| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{Var} f|_n^{+\infty}, \tag{2.4}$$

а если функция f монотонна на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, то

$$\left|\tilde{R}(f; a, n)\right| \leqslant \frac{|f(n)|}{2}. \tag{2.5}$$

Теорема 5 немедленно следует из формул суммирования (1.1), (1.18) и оценки остаточного члена с помощью неравенств (0.6) и $|\rho(x)| \leqslant 1/2$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Напомним, что если функция f монотонна на отрезке $[n, n_1]$, то $\mathrm{Var}\; f|_n^{n_1} = |f(n_1) - f(n)|$.

Теорема 6. *Если $f \in \mathcal{C}\,(a, n)$ и имеет производную на (a, n) всюду кроме множества $\mathcal{N}$, относительно которого известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно, $f' \in V\,((a, n)\backslash\mathcal{N})$, то верно неравенство*

$$|R(f; a, n)| \leqslant \frac{1}{8}\,\mathrm{Var}\; f'|_a^n. \tag{2.6}$$

Если функция f выпукла на $[a, n]$, то выполняется двойное неравенство

$$0 \leqslant R(f; a, n) \leqslant \frac{1}{8}\left(f'(n) - f'(a)\right), \tag{2.7}$$

а если функция f вогнута, то

$$\frac{1}{8}\left(f'(n) - f'(a)\right) \leqslant R(f; a, n) \leqslant 0. \tag{2.8}$$

Если функция f выпукла (вогнута) и её график на отрезке $[a, n]$ не является ломаной, то знаки неравенства в (2.7) ((2.8)) строгие.

Если $f \in \mathcal{C}\,[a, +\infty)$ и имеет производную на $(a, +\infty)$ всюду кроме множества $\mathcal{N}$, относительно которого известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно, $f' \in V\,((a, +\infty)\backslash\mathcal{N})$, то для величины

$$\tilde{R}_1(f; a, n) = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int\limits_a^n f(x)dx - A_1(f; a) - \frac{f(n)}{2} \tag{2.9}$$

верна оценка

$$\left|\tilde{R}_1(f; a, n)\right| \leqslant \frac{1}{8}\,\mathrm{Var}\; f'|_n^{+\infty}. \tag{2.10}$$

Если, в дополнение к предыдущему условию, функция f выпукла на $[n, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то верна двусторонняя оценка

$$\frac{1}{8}f'(n) \leqslant \tilde{R}_1(f; a, n) \leqslant 0, \tag{2.11}$$

а если функция f вогнута, то

$$0 \leqslant \tilde{R}_1(f;a,n) \leqslant \frac{1}{8} f'(n). \tag{2.12}$$

Если функция f выпукла (вогнута) на луче $[n,+\infty)$ её график на этом луче не является ломаной, то неравенства (2.11) ((2.12)) строгие.

Замечание 3. *Из замечания 2 и соотношения (1.22) следует, что если в теореме 6 выполняются условия $f \in V\,[n,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то*

$$\tilde{R}_1(f;a,n) = \tilde{R}(f;a,n). \tag{2.13}$$

Теорема 6 непосредственно следует из соотношений (1.7), (1.19), (0.6), (0.7) и двусторонней оценки

$$0 \leqslant \sigma(x) \leqslant 1/8 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Теорема 7. *Если $f \in \mathcal{C}^1\,[a,n]$ и на (a,n) существует $f''(x)$ всюду кроме множества $\mathcal{N}_1$, относительно которого известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно, $f' \in V\,((a,n)\backslash\mathcal{N}_1)$, то для величины*

$$R_2(f;a,n) = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int\limits_a^n f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(n)}{2} - \frac{f'(n)-f'(a)}{12}$$

верна оценка

$$|R_2(f;a,n)| \leqslant \frac{1}{72\sqrt{3}} \operatorname{Var}\, f''|_a^n.$$

Если $f \in \mathcal{C}^1\,[a,+\infty)$ и во всех точках $x \in (a,+\infty)\backslash\mathcal{E}$ существует $f''(x)$, а относительно множества $\mathcal{E}$ известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно, $f'' \in V\,((a,+\infty)\backslash\mathcal{E})$, то для величины

$$\tilde{R}_2(f;a,n) = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int\limits_a^n f(x)\,dx - A_2(f;a) - \frac{f(n)}{2} - \frac{f'(n)}{12}$$

верна оценка

$$\left|\tilde{R}_2(f;a,n)\right| \leqslant \frac{1}{72\sqrt{3}} \operatorname{Var}\, f''|_n^{+\infty},$$

а если вторая производная монотонна на $[n,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$, то

$$\left|\tilde{R}_2(f;a,n)\right| \leqslant \frac{|f''(n)|}{72\sqrt{3}}.$$

Замечание 4. *Из соотношения* (1.23) *видно, что если в дополнение к условиям теоремы* 7 *справедливы включение* $f' \in V\,[a,+\infty)$ *и равенства* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$*, то выполняется соотношение*

$$\tilde{R}_1(f;a,n) - \frac{f'(n)}{12} = \tilde{R}_2(f;a,n).$$

Теорема 7 доказывается с помощью соотношений (1.14), (1.20), (0.6) и равенства

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |\sigma_1(x)| = 1/\left(72\sqrt{3}\right).$$

Теорема 8. *Если* $f \in \mathcal{C}^2\,[a,n]$ *и на* $(a,n)\backslash\mathcal{N}_2$ *существует* $f'''(x)$*, а относительно множества* $\mathcal{N}_2$ *известно, что оно либо пусто, либо конечно, либо счётно,* $f''' \in V\,((a,n)\backslash\mathcal{N}_2)$*, то для* $R_2(f;a,n)$ *верна оценка*

$$|R_2(f;a,n)| \leqslant \frac{1}{384}\,\mathrm{Var}\; f'''|_a^n. \tag{2.15}$$

Если функция f'' *выпукла на* $[a,n]$*, то*

$$\frac{f'''(a)-f'''(n)}{384} \leqslant R_2(f;a,n) \leqslant 0, \tag{2.16}$$

а если f'' *вогнута на* $[a,n]$*, то*

$$0 \leqslant R_2(f;a,n) \leqslant \frac{f'''(a)-f'''(n)}{384}. \tag{2.17}$$

Если f'' *выпукла (вогнута) на* $[a,n]$*, но график на отрезке* $[a,n]$ *не является ломаной, то знаки неравенств в* (2.16) ((2.17)) *строгие.*

Если $f \in \mathcal{C}^2\,[a,+\infty)$ *и во всех точках* $[a,+\infty)\backslash\mathcal{E}_2$ *существует* $f'''(x)$ *а множество* $\mathcal{E}_2$ *либо пусто, либо конечно, либо счётно,* $f''' \in V\,[a,+\infty)$*, то для величины*

$$\tilde{R}_3(f;a,n) = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int\limits_a^n f(x)\,dx - A_3(f;a) - \frac{f(n)}{2} - \frac{f'(n)}{12}$$

верна оценка

$$\left|\tilde{R}_3(f;a,n)\right| \leqslant \frac{1}{384}\operatorname{Var} f'''\Big|_n^{+\infty}. \tag{2.18}$$

Если вторая производная f'' выпукла на $[n,+\infty]$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$, то

$$0 \leqslant \tilde{R}_3(f;a,n) \leqslant -\frac{f'''(n)}{384}, \tag{2.19}$$

а если f'' вогнута на $[n,+\infty]$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$, то

$$-\frac{f'''(n)}{384} \leqslant \tilde{R}_3(f;a,n) \leqslant 0. \tag{2.20}$$

Если функция f'' выпукла (вогнута) на $[n,\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$ и график f'' на $[n,\infty)$ не является ломаной, то знаки неравенств (2.19) ((2.20)) строгие.

Теорема 8 непосредственно следует из формул суммирования (1.15), (1.19) и оценки остаточного члена в них, проводимой на основе неравенств (0.6), (0.7) и двусторонней оценки $0 \leqslant \sigma_2(x) \leqslant 1/384$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

Замечание 5. *Если в теореме 8 выполняются условия $f'' \in V\,[a,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$, то $\tilde{R}_3(f;a,n)=\tilde{R}_2(f;a,n)$. Это сразу же видно из (1.24) и определения величин $\tilde{R}_2(f;a,n)$ и $\tilde{R}_3(f;a,n)$.*

Поскольку оценки (2.19) и (2.20) будут ниже неоднократно применяться, то посвятим им отдельную теорему, сформулировав её не используя обозначения $\tilde{R}_3(f;a,n)$.

Теорема 9. *Пусть $f \in \mathcal{C}^2\,[a,+\infty)$, а вторая производная f'' является либо выпуклой, либо вогнутой на $[n,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$.*

Если f'' выпукла на $[n,+\infty)$ и её график на этом луче не является ломаной, то справедливо двойное неравенство

$$\int\limits_a^n f(x)\,dx + A_3(f;a) + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} < \sum_{k=a}^{n} f(k) < \int\limits_a^n f(x)\,dx$$
$$+A_3(f;a) + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} - \frac{f'''(n)}{384}. \tag{2.21}$$

Если f'' вогнута на $[n, +\infty)$ и её график на этом луче не является ломаной, то справедливо двойное неравенство

$$\int_a^n f(x)\,dx + A_3(f;a) + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} - \frac{f'''(n)}{384} < \sum_{k=a}^{n} f(k)$$

$$< \int_a^n f(x)\,dx + A_3(f;a) + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12}. \tag{2.22}$$

Под $f'''(n)$ здесь понимается правая третья производная f в точке n — она существует и монотонна в силу выпуклости (вогнутости) f'' на луче $[a, +\infty)$. Поэтому в силу стремления $f'''(x)$ к нулю при $x \to +\infty$ в случае возрастания f''' (т. е. выпуклости f'') имеем $f'''(x) < 0$, а в случае убывания f''' (т. е. вогнутости f'') имеем $f'''(x) > 0$.

Доказанные в теоремах 1—3 формулы суммирования могут быть использованы также для приближённого вычисления интеграла, когда первообразная функции не является элементарной. Для приближённого вычисления интеграла от непрерывной функции по отрезку (для определённости рассмотрим отрезок $[0, 1]$) применяется большое количество различных формул (см., например, учебник [4]). Простейшие из них таковы:

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right), \qquad \int_0^1 g(x)\,dx \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right), \tag{2.23}$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \frac{1}{n}\left(\frac{g(0)+g(1)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\right). \tag{2.24}$$

Формулы (2.23) называются формулами прямоугольников, а формула (2.24) — формулой трапеции. в случае $g(0) = g(1)$ — тогда функция g непрерывно продолжается на $\mathbb{R}$ с периодом 1 — все формулы (2.23), (2.24) совпадают между собой.

Предположим, что функция g не только непрерывна на отрезке $[0, 1]$, но и имеет на нём ограниченную вариацию. Множество всех таких функций (нетрудно убедиться в том, что оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$, если функции действительнозначные и над $\mathbb{C}$, если они комплекснозначные) обозначается $CV\,[0,1]$. Пространство CV (строго не определяя) рассматривал Леонард Эйлер. в письме к Бернулли он написал: «Непрерывной я назову функцию, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги». в действительности он ввёл пространство CV, поскольку график непрерывной на отрезке функции имеет конечную длину тогда и только тогда, когда сама функция имеет ограниченную вариацию на этом отрезке. Таким образом $CV\,[0,1]$ — именно те непрерывные на $[0,1]$ функции, графики которых можно пытаться построить; графики же других непрерывных функций изобразить в полной мере нам не дано. Поэтому вполне понятно, что непрерывные функции, не имеющие ограниченной вариации на отрезке, в реальных практических задачах встречаются значительно реже, чем функции из CV.

Мы сейчас увидим, что формулы (2.23), (2.24) позволяют вычислить интеграл от функции $g \in CV\,[0,1]$ с точностью $O\,(1/n)$, причём формула трапеции на некоторых важных классах функций обеспечивает меньшую погрешность.

Обозначим

$$r_n(g) = \int\limits_0^1 g(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$R_n(M) = \sup\left\{|r_n(g)|\, g \in CV\,[0,1]\,, \quad \mathrm{Var}\ f(x)|_0^1 \leqslant M\right\}.$$

Теорема 10. *При любых $M > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$R_n(M) = M/n. \tag{2.25}$$

Таким образом, во-первых, какова бы ни была функция $g \in CV\,[0,1]$, формула прямоугольников даёт приближённое значение её интеграла с ошибкой, не превышающей $\left(\mathrm{Var}\ g|_0^1\right)/n$, а во-вторых, эта оценка погрешности не может быть улучшена на всём множестве функций $g \in CV\,[0,1]$, вариация которых не превышает заданного числа M.

Доказательство. Начнём с вывода оценки сверху

$$|r_n(g)| \leqslant \frac{1}{n} \operatorname{Var} g|_0^1 \quad \forall g \in CV\,[0,1]\,. \tag{2.26}$$

На отрезке $0 \leqslant x \leqslant n$ рассмотрим функцию $f(x) = g(x/n)$ и применим теорему 1, взяв $a = 0$. Получим равенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g\left(\frac{k}{n}\right)\, dx + \frac{g(0)+g(1)}{2} - \int_0^1 \rho(x) dg\left(\frac{k}{n}\right). \tag{2.27}$$

Разделив обе части (2.27) на n и сделав в интегралах замену переменной $x = nt$, перепишем равенство (2.27) в следующей равносильной форме:

$$\int_0^1 g(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\int_0^1 \rho(nt) dg(t) - \frac{g(0)+g(1)}{2}. \tag{2.28}$$

Прибавив к обеим частям (2.28) величину $g(1)/n$, получим представление

$$r_n(g) = \frac{1}{n}\int_0^1 \rho(nt)\, dg(t) + \frac{g(1)-g(0)}{2n} = \frac{1}{n}\int_0^1 \left(\rho(nt) + \frac{1}{2}\right)\, dg(t)$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 (1 - \{nt\})\, dg(t).$$

Отсюда и из (0.6) находим

$$|r_n(g)| \leqslant \frac{1}{n}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |1 - \{nt\}|\right) \operatorname{Var} g|_0^1 = \frac{1}{n} \operatorname{Var} g|_0^1.$$

Неравенство (2.26) доказано.

Теперь для любых $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ и $\varepsilon \in (0,1)$ укажем функцию $\tilde{g}_\varepsilon = \tilde{g}_{\varepsilon,n,M} \in CV\,[0,1]$, вариация которой на отрезке $[0,1]$ равна M, а $r_n(\tilde{g}_\varepsilon) > M(1-\varepsilon)/n$. Положим

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n}, \\ M & \text{при } 1 - \frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

а на отрезке $1-\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1-\frac{1-\varepsilon}{n}$ функцию $\tilde{g}_\varepsilon$ можно определить произвольным образом, лишь бы она была непрерывной, возрастающей, равнялась 0 на левом конце отрезка и M на правом. в силу монотонности и определения функции $\tilde{g}_\varepsilon$ имеем

$$\operatorname{Var}\ \tilde{g}_\varepsilon|_0^1 = \tilde{g}_\varepsilon(1) - \tilde{g}_\varepsilon(0) = M,$$

$$\int\limits_0^1 \tilde{g}_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^1 \tilde{g}_\varepsilon(x)\,dx > \int\limits_{1-\frac{1-\varepsilon}{n}}^1 M\,dx = \frac{(1-\varepsilon)M}{n}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$r_n(\tilde{g}_\varepsilon) > \frac{M(1-\varepsilon)}{n}, \quad R_n(M) \geqslant \sup_{\varepsilon\in(0,1)} r_n(\tilde{g}_\varepsilon) = \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \frac{M(1-\varepsilon)}{n} = \frac{M}{n}.$$

Тем самым, выведена оценка снизу $R_n(M) \geqslant M/n$, а из (2.26) следует, что $R_n(M) \leqslant M/n$. Поэтому справедливо равенство (2.25). Теорема доказана. □

Замечание 6. *Для многих функций оценку* (2.26) *погрешности формулы прямоугольников нельзя улучшить даже в 2 раза. Из доказанной ниже теоремы* 11 *следует, что если функция g убывает и выпукла на $[0,1]$, то $r_n(g) \leqslant -\left(\operatorname{Var}\ g|_0^1\right)/(2n)$, а если возрастает и вогнута, то $r_n(g) \geqslant \left(\operatorname{Var}\ g|_0^1\right)/(2n)$. Причём, если график g на $[0,1]$ не является ломаной, то эти неравенства строгие.*

Формула трапеций во многих случаях точнее формулы прямоугольников. Обозначим её невязку

$$r_n^{(1)}(g) = \int\limits_0^1 g(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{g(0)+g(1)}{2}. \tag{2.29}$$

Из (2.27) *сразу следует неравенство*

$$\left|r_n^{(1)}(g)\right| \leqslant \frac{1}{2n} \operatorname{Var}\ g|_0^1.$$

Но существенный прогресс в оценке $\left|r_n^{(1)}\right|$ по сравнению с оценкой $|r_n|$ наблюдается, если функция g обладает некоторой гладкостью.

Через $R_n^{(1)}$ *обозначим точную верхнюю грань* $\left|r_n^{(1)}(g)\right|$, *взятую по всем таким функциям* $g \in CV\,[0,1]$, *каждая из которых имеет производную на* $(0,1)$ *всюду кроме, может быть, счётного множества точек, обладающую ограниченной вариацией на* $[0,1]$ *и удовлетворяющую ограничению* $\mathrm{Var}\ g'|_0^1 \leqslant M$.

Теорема 11. *При любых* $M > 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство* $R_n^{(1)}(M) = M/(8n^2)$. *Если функция* g *выпукла на* $[0,1]$, *то верно двойное неравенство*

$$\frac{g'(0)-g'(1)}{8n^2} \leqslant r_n^{(1)}(g) \leqslant 0. \tag{2.30}$$

Если функция g *вогнута на* $[0,1]$, *то верно двойное неравенство*

$$0 \leqslant r_n^{(1)}(g) \leqslant \frac{g'(0)-g'(1)}{8n^2}. \tag{2.31}$$

Под $g'(0)$ *понимается правая производная в нуле, а под* $g'(1)$ *— левая производная в единице (напомним, что любая выпуклая или вогнутая функция имеет в каждой точке односторонние производные). Если график функции* g *не является ломаной на отрезке* $[0,1]$, *то знаки неравенств* (2.30) *и* (2.31) *строгие.*

Доказательство. Введём функцию $f(x) = g(x/n)$. Из (2.1) и (2.29) следует равенство

$$r_n^{(1)}(g) = -\frac{1}{n}R(f;0,n). \tag{2.32}$$

Поскольку

$$f'(x) = \frac{1}{n}g\left(\frac{x}{n}\right), \tag{2.33}$$

то

$$\mathrm{Var}\ f'|_0^n = \frac{1}{n}\,\mathrm{Var}\ g'|_0^1 \tag{2.34}$$

Из (2.6), (2.32), (2.33) сразу же получается оценка

$$\left|r_n^{(1)}(g)\right| \leqslant \frac{\mathrm{Var}\ g'|_0^1}{8n^2}, \tag{2.35}$$

а из (2.7), (2.8), (2.32), (2.33) непосредственно вытекают двойные неравенства (2.30) и (2.31). Для завершения доказательства теоремы осталось лишь при каждом $n \in \mathbb{N}$ предъявить такую функцию g_n, что неравенство (2.35) обратится в равенство.

Возьмём произвольное положительное число M и положим

$$g_n(x) = \begin{cases} M\left(\frac{1}{2n} - x\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.36}$$

Из (2.36) видно, что $g_n \in CV\,[0,1]$, $g_n \in \mathcal{D}\left([0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right)$,

$$g_n'(x) = \begin{cases} -M & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{Var} g_n'|_0^1 = M.$$

Вычислим $r_n^{(1)}(g_n)$. Имеем

$$\int\limits_0^1 g_n(x)\,dx = \frac{M}{8n^2}, \quad \frac{1}{n}\left(\frac{g_n(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{g_n(1)}{2}\right) = \frac{g_n(0)}{2n} = \frac{M}{4n^2}.$$

Следовательно, $r_n^{(1)}(g_n) = -M/\left(8n^2\right)$. Этим примером (поскольку функция g_n выпукла) подтверждается неулучшаемость как оценки (2.35), так и оценки (2.30). Неулучшаемость оценки (2.31) становится видна после рассмотрения функции $-g_n$. Теорема полностью доказана. □

Обратим внимание на интегральное представление невязки формулы трапеций, которое является прямым следствием теоремы 2:

$$r_n^{(1)}(g) = -\frac{1}{n^2}\int\limits_0^1 \sigma(nt)\,dg'(t). \tag{2.37}$$

Если производная функции g не только имеет ограниченную вариацию на отрезке, но и абсолютно непрерывна, то (см. (0.7)) формула (2.37) приобретает вид

$$r_n^{(1)}(g_n) = -\frac{1}{n^2}\int\limits_0^1 \sigma(nt) g''(t)\,dt. \tag{2.38}$$

Если функция g' только абсолютно непрерывна, то представление (2.38) не даст оценки, лучшей, чем (2.35) (напомним, что $\int\limits_0^1 |g''(x)|\ dx = \operatorname{Var}\ g'|_0^1$). Но если в дополнение к абсолютной непрерывности g' верно включение $g'' \in L^p[0,1]$, где p — некоторое число, большее 1 (тогда принято говорить, что g принадлежит соболевскому пространству $W_p^2[0,1]$), то из (2.38) выводится оценка

$$\left|r_n^{(1)}(g)\right| \leqslant A(p)n^{-2}\left(\int\limits_0^1 |g''(t)|^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

в которой

$$A(p) = \left(\int\limits_0^1 (\sigma(x))^q\ dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Нетрудно доказать, что $A(p)$ является непрерывной убывающей функцией переменной p (и, разумеется, возрастает по q) и верны соотношения

$$A(1) = \frac{1}{8}, \quad A(2) = \frac{1}{\sqrt{120}}, \quad \lim_{p\to+\infty} A(p) = \frac{1}{12}.$$

Если же $g \in \mathcal{C}^1[0,1]$ и

$$\sup\left\{\left|\frac{g'(\beta)-g'(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \middle| 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1\right\} = M < +\infty$$

(это равносильно абсолютной непрерывности g' в сочетании с неравенством $|g''(x)| \leqslant M$, выполняющимся в тех точках x — множество таких точек имеет полную меру — в которых $\exists\, g''(x)$), то из (2.38) и равенства $\int\limits_0^1 \sigma(x)\,dx = 1/12$ следует оценка

$$\left|r_n^{(1)}(g)\right| \leqslant \frac{M}{12n^2}.$$

В случае, когда вторая производная $g''(x)$ не только ограничена, но и имеет ограниченную вариацию, а значения производной g на концах отрезка «мало отличаются» друг от друга (например, совпадают), то оценка погрешности формулы прямоугольников при достаточно больших значениях n допускает дальнейшее уточнение. Следующая теорема доказывается на основе теорем 7 и 8.

ТЕОРЕМА 12. *Если $g \in \mathcal{C}^1[0,1]$, $g''(x)$ существует на $(0,1)$ всюду кроме, может быть, счётного множества точек, $g'' \in V[0,1]$, то*

$$\left|r_n^{(1)}(g)\right| \leqslant \frac{|g'(1)-g'(0)|}{12n^2} + \frac{1}{72\sqrt{3}n^3}\,\mathrm{Var}\ g''|_0^1 .$$

Если $g \in \mathcal{C}^2[0,1]$, g''' существует на $(0,1)$ всюду кроме, может быть, счётного множества точек, $g''' \in V[0,1]$, то

$$\left|r_n^{(1)}(g)\right| \leqslant \frac{|g'(1)-g'(0)|}{12n^2} + \frac{1}{384n^4}\,\mathrm{Var}\ g'''|_0^1 .$$

В теореме 12 подразумевается, что g'' в первой части теоремы и g''' во второй части теоремы доопределены на весь отрезок $[0,1]$ по правилу, изложенному в доказательстве теоремы 2.

Приведём два примера применения теоремы 12, показывающие, как легко получить (без таблиц и компьютера) рациональные приближения к числам $\ln 2$ и π с точностью лучшей 10^{-3}, использовав формулу трапеций с очень малым количеством узлов для приближенного вычисления соответствующих интегралов.

В первом примере рассмотрим функцию $g(x) = (x+1)^{-1} - (3/8)x^2$. Имеем

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \ln 2 - \frac{1}{8}, \quad g'(0) = g'(1) = -1,$$

$$\mathrm{Var}\ g'''|_0^1 = \mathrm{Var}\ \frac{-6}{(x+1)^4}\bigg|_0^1 = \frac{45}{8}.$$

(Мы отняли функцию $(3/8)x^2$ для того, чтобы уравнять значения производных на концах отрезка.) Согласно теореме 12 при любом $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\left|\int_0^1 g(x)\,dx - \frac{1}{n}\left(\frac{g(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{g(1)}{2}\right)\right| \leqslant \frac{15}{1024n^4}$$

Взяв $n = 2$ (всего лишь!) получим

$$\left|\left(\ln 2 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{3}{32} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{1092}.$$

Производя соответствующие вычисления, получим

$$\left|\ln 2 - \frac{133}{192}\right| < \frac{1}{1092}.$$

На самом деле $\ln 2 = 0.693147\ldots$, $133/192 = 0.6927083\ldots$ и различие между этими числами меньше $1/2000$.

Заметим также, что для приближённого вычисления логарифмов рациональных чисел с давних времён использовали степенной ряд

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad |x| < 1. \tag{2.39}$$

Подставив в (2.39) значение $x = 1/3$ и взяв 4 первых слагаемых ряда, получим приближённое значение $\ln 2$ с точностью, лучшей $1/80000$:

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + \frac{2}{1215} + \frac{2}{15309} + \epsilon, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{80000}. \tag{2.40}$$

Во втором примере рассмотрим функцию $g(x) = x^2 + 4/(x^2+1)$. Имеем

$$g'(x) = 2x - \frac{8x}{(x^2+1)^2}, \quad g'(0) = g'(1) = 0, \quad g'''(x) = \frac{96x\left(1-x^2\right)}{(x^2+1)^4}.$$

По теореме 12 находим

$$\left|r_n^{(1)}(g)\right| \leqslant \operatorname{Var}\left.\frac{x\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^4}\right|_0^1 < \frac{1}{12n^4}. \tag{2.41}$$

(Несложно проверяется, что функция $x\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)^{-4}$ возрастает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant x_0 = \left(1 - 2/\sqrt{5}\right)^{1/2}$, убывает на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant 1$, обращается в нуль на концах и значение её в точке x_0 меньше $1/6$.)

Из (2.41) заключаем, что сумма

$$S_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{g(0)+g(1)}{2} + g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

даст рациональное приближение интеграла

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \pi + \frac{1}{3}$$

с точностью, лучшей $1/3072$. Имеем

$$S_4 - \frac{1}{3} = 3 + \frac{11}{102} + \frac{27}{800} = 3.14 + \frac{1}{800} + \frac{7}{51\cdot 400} = 3.1416 - \frac{7}{51\cdot 20000}.$$

Таким образом, вычисление интеграла от функции g по отрезку $[0,1]$ по формуле трапеций с разбиением отрезка всего на 4 части дало приближённое значение $\pi \approx 3.1416$ с теоретической оценкой погрешности $\frac{1}{3072} + \frac{7}{51\cdot 20000} < \frac{1}{3000}$. Но на самом деле точность приближения оказалась значительно выше: $\pi - 3.1416 = -0.00000734\ldots$.

Подчеркнём, что в рассматриваемых примерах точность формулы трапеций оказалась столь высокой из-за введения дополнительного слагаемого ax^2, уравнивающего значения производной на концах отрезка.

§3. Двусторонняя оценка сумм гармонического ряда. Постоянная Эйлера

Гармоническим называется ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Он расходится: суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ стремятся к ∞ при $n\to\infty$. Простейшая двусторонняя оценка этих сумм

$$\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1+\ln\, n \tag{3.1}$$

получается сложением по $k\in[1,n]$ неравенств $\int\limits_{k}^{k+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$ и сложением по $k\in[2,n]$ неравенств $\frac{1}{k} < \int\limits_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}$. Наша цель — существенно уточнить грубую двустороннюю оценку (3.1).

Рассмотрим числа

$$A_m\left(\frac{1}{x};1\right),\quad 0\leqslant m\leqslant 3, \tag{3.2}$$

определённые в теореме 4. Поскольку функция $f(x)=1/x$ монотонна на луче $(0,+\infty)$, стремится к 0 при $x\to+\infty$, и этими же свойствами обладают все её производные, то видно, что числа (3.2) корректно определены и согласно замечанию 2 совпадают друг с другом. Число

$$\gamma = A_0\left(\frac{1}{x};1\right) = A_1\left(\frac{1}{x};1\right) = A_2\left(\frac{1}{x};1\right) = A_3\left(\frac{1}{x};1\right) \tag{3.3}$$

называется постоянной Эйлера. Расшифруем равенства (3.3):

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}+\int\limits_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-\{x\}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\{x\}-\{x\}^2}{x^3}\,dx\\ &= \frac{7}{12}-\int\limits_{1}^{+\infty}\left(\frac{\{x\}}{2}-\frac{3\{x\}^2}{2}+\{x\}^3\right)\frac{dx}{x^4} = \frac{7}{12}-\int\limits_{1}^{+\infty}\left(\{x\}-\{x\}^2\right)^2\frac{dx}{x^5}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Ввиду неотрицательности функции $\{x\}-\{x\}^2$ и её квадрата из (3.4) сразу же получаем численную оценку $1/2<\gamma<7/12$. А неравенство $\{x\}-\{x\}^2\leqslant 1/4$, из которого находим

$$\int_1^{+\infty} \left(\{x\}-\{x\}^2\right)^2 \frac{dx}{x^5} \le \frac{1}{16} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{64},$$

даёт более сильный результат

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{64}=\frac{109}{192}<\gamma<\frac{7}{12} \Rightarrow 0.5677<\gamma<0.5834.$$

Как известно,

$$\gamma = 0.57721566490153286061\ldots.$$

Поскольку вторая производная $(1/x)'' = 2x^{-3}$ является выпуклой, то неравенство (2.21) теоремы 9 приводит к следующему утверждению.

Теорема 13. *При любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо двойное неравенство*

$$\ln\, n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\ln\, n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{64n^4}.$$

Из теоремы 13 сразу же следуют предельное отношение

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\, n\right)$$

(его часто берут за определение постоянной Эйлера) и более простая двусторонняя оценка сумм гармонического ряда

$$\ln\, n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\ln\, n+\gamma+\frac{1}{2n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Заметим ещё, что постоянная Эйлера входит в большое количество интегральных равенств и предельных отношений. Приведём два наиболее известных:

$$(3.5) \qquad \gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\, dx, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau(k)-\ln\, n\right)=2\gamma-1$$

($\tau(k)$ — количество делителей натурального числа k: $\tau(1)=1$, $\tau(2)=\tau(3)=2$, $\tau(4)=3$, $\tau(5)=2$, $\tau(6)=4$ и т.д.). Доказательство равенств (3.5) выходит за рамки данного пособия.

Сейчас с помощью теоремы 13 мы найдём 4 верных знака после запятой в десятичном разложении постоянной Эйлера. Взяв $n = 4$, получим двойное неравенство

$$\ln\,4 + \gamma + \frac{1}{8} - \frac{1}{192} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \ln\,4 + \gamma + \frac{1}{8} - \frac{1}{192} + 2^{-14}.$$

Перепишем его в равносильной форме:

$$\frac{4}{3} - \ln\,4 + \frac{5}{8} + \frac{1}{192} - 2^{-14} < \gamma < \frac{4}{3} - \ln\,4 + \frac{5}{8} + \frac{1}{192}.$$

Воспользовавшись двусторонней оценкой $\ln\,4$, получающейся умножением на 2 соотношения (2.40), придём к неравенству

$$\gamma_1 - \frac{3^{-9}}{2} - 2^{-14} < \gamma < \gamma_1, \quad \gamma_1 = \frac{5}{8} + \frac{1}{192} - \frac{4}{81} - \frac{4}{1215} - \frac{4}{15309}. \tag{3.6}$$

Найдём рациональное приближение числа γ_1, имеющее «небольшой» знаменатель. Произведя ряд действий с дробями (выкладки мы опустим), получим равенство

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{1}{24380} + \frac{1}{43200} - \frac{1}{68850} + \frac{1}{3815 \cdot 1701}, \tag{3.7}$$

в котором

$$\gamma_2 = 10^{-2}\left(57 + \frac{13}{18}\right) = 0.5772222\ldots.$$

Из (3.6), (3.7) следует оценка $|\gamma - \gamma_2| < 10^{-4}$; и действительно, первые четыре значащие цифры десятичных разложений γ и γ_2 совпадают.

В настоящее время такие примеры представляют, в основном, исторический интерес. Они демонстрируют, каким образом аналитики, жившие в 18-19 веках, вычисляли с достаточно хорошей точностью различные математические константы.

В заключение параграфа добавим, что теорема 13 допускает уточнения. Читатель может получить их сам, интегрируя по частям остаточный член в теореме 4. Этот метод изложен во многих книгах, в которых изучаются асимптотические разложения; одной из лучших, по мнению автора, является монография [5]; асимптотикам сумм значений функций в ней посвящена глава 8.

§4. Сумма значений степенной функции. Дзета-функция Римана

Как известно, ряд

$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z} \tag{4.1}$$

сходится при любом комплексном значении z, действительная часть которого больше 1, и в любой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma > 1$ сходимость равномерна. Сумма ряда (4.1), рассматриваемая как функция комплексной переменной z, называется дзета-функцией Римана. Она заведомо голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$, но на самом деле допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}\setminus\{1\}$; функция $(z-1)\zeta(z)$ является целой. Доказательство последнего утверждения выходит за рамки данного пособия; читателю можно порекомендовать книги [**6**–**8**], в которых доказано много интересных теорем о дзета-функции Римана. Здесь с помощью теоремы 4 мы получим менее сильный, но весьма важный результат.

Теорема 14. *Сумма ряда* (4.1) *допускает аналитическое продолжение в полуплоскость* $\operatorname{Re} z > -3$ *с выколотой точкой* $z=1$. *В точке* $z=1$ *функция* $\zeta(z)$ *имеет полюс первого порядка с вычетом, равным 1. Для дзета-функции Римана справедливы следующие интегральные представления:*

$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}-\int_{1}^{+\infty}\rho(x)dx^{-z}=$$

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}+z\int_{1}^{+\infty}\frac{1/2-\{x\}}{x^{z+1}}\,dx,\quad \operatorname{Re} z>0, \tag{4.2}$$

$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}-z\int_{1}^{+\infty}\sigma(x)\,dx^{-z-1}=$$

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}+\frac{z(z+1)}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{\{x\}-\{x\}^2}{x^{z+2}}\,dx,\quad \operatorname{Re} z>-1, \tag{4.3}$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + z(z+1)\int\limits_1^{+\infty} \sigma_1(x)\,dx^{-z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{z}{12}$$

$$-\,z(z+1)(z+2)\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{\{x\}}{12} - \frac{\{x\}^2}{4} + \frac{\{x\}^3}{6}\right)\frac{dx}{x^{z+3}}, \quad \operatorname{Re} z > -2, \tag{4.4}$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + z(z+1)(z+2)\int\limits_1^{+\infty} \sigma_2(x)\,dx^{-z-3} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}$$

$$+\,\frac{z}{12} - \frac{z(z+1)(z+2)(z+3)}{24}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\left(\{x\}-\{x\}^2\right)^2}{x^{z+4}}dx, \quad \operatorname{Re} z > -3. \tag{4.5}$$

Все формулы теоремы 14 получаются, если в формулах теоремы 4 взять $f(x) = x^{-z}$ и осуществить предельный переход при $n \to \infty$.

Из (4.1) сразу же видно, что $\lim\limits_{u\to+\infty}\zeta(u) = 1$, $\lim\limits_{u\to 1+}\zeta(u) = +\infty$ и ζ-функция Римана убывает и выпукла на луче $(1, +\infty)$. Представление (4.2) вместе с первым равенством (3.4) даёт уточнение последнего предельного соотношения:

$$\lim_{z\to 1}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z-1}\right) = \gamma. \tag{4.6}$$

С помощью интегральных представлений (4.2) – (4.5) мы сейчас изучим поведение $\zeta(u)$ на полуинтервале $-2 \leqslant u < 1$.

Теорема 15. *Функция $\zeta(u)$ убывает и вогнута на полуинтервале $-2 \leqslant u < 1$. Верны также следующие соотношения:*

$$\zeta(-2) = 0, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \tag{4.7}$$

$$\lim_{u\to 1-}\zeta(u) = -\infty, \quad \zeta(u) \sim \frac{1}{u-1}, \quad u \to 1, \tag{4.8}$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1+\sqrt{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2m(2m-1)}\left(\sqrt{2m}+\sqrt{2m-1}\right)}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Обозначим $P(z) = z(z+1)(z+2)(z+3)$. Напомним, что $\sigma(x) = \frac{\{x\}-\{x\}^2}{2}$. Согласно (4.5) имеем

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{z}{12} - \frac{P(z)}{6}\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^2(x)}{x^{z+4}}dx. \tag{4.10}$$

Далее будем рассматривать действительные значения комплексной переменной $z = u + iv$. Непосредственной подстановкой в (4.10) значений $z = u = -2, -1, 0$ получаем первые три равенства (4.7). Соотношения (4.8) следуют из (4.6).

Продифференцируем представление (4.10):

$$\zeta'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{12} - \frac{P'(z)}{6}\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^2(x)}{x^{z+4}}dx + \frac{P(z)}{6}\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^2(x)\ln x}{x^{z+4}}dx, \tag{4.11}$$

$$\zeta''(u) = \frac{2}{(u-1)^3} - \frac{P''(u)}{6}\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^2(x)}{x^{u+4}}dx + \frac{P'(u)}{3}\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^2(x)\ln x}{x^{u+4}}dx$$
$$- \frac{P(u)}{6}\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^2(x)\ln^2 x}{x^{u+4}}dx. \tag{4.12}$$

Вогнутость функции $\zeta(u)$ на полуинтервале $-2 \leqslant u < 1$ будет выведена из отрицательности $\zeta''(u)$. Оценим $\zeta''(u)$ сверху. Имеем

$$\begin{gathered} P'(z) = 4z^3 + 18z^2 + 22z + 6, \quad P''(z) = 12z^2 + 36z + 22, \\ \min_{u\in\mathbb{R}} P''(u) = P''\left(-\frac{3}{2}\right) = -5, \max_{-2\leqslant u\leqslant -1} P''(u) = P''(-2) = P''(-1) = -2. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Отсюда видно, что производная $P'(u)$ убывает на отрезке $[-2,-1]$ и

$$P'(u) \leqslant P'(-2) = 2, \quad u \in [-2,-1]. \tag{4.14}$$

Имеем также

$$P(u) \geqslant 0 \text{ при } u \in [-2,-1]\,. \tag{4.15}$$

Из (4.12) – (4.15) получаем неравенство

$$\zeta''(u) \leqslant \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{5}{6}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)dx}{x^{u+4}} + \frac{2}{3}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)\ln x}{x^{u+4}}\,dx, \quad u \in [-2,-1]\,.$$

А так как $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant 1/8$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, то при $u \in [-2,-1]$ верно неравенство

$$\begin{aligned}\zeta''(u) &\leqslant \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{5}{384}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{u+4}} + \frac{1}{96}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{u+4}}\,dx \\ &= \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{5}{384(u+3)} + \frac{1}{96(u+3)^2} \\ &\leqslant -\frac{2}{27} + \frac{5}{384} + \frac{1}{96} = -\frac{175}{3456} < 0.\end{aligned}$$

Отрицательность $\zeta''(u)$ на отрезке $[-2,-1]$ доказана. Перейдём к оценке сверху $\zeta''(u)$ на интервале $(-1,0)$. Поскольку при $u \in (-1,0)$ имеем

$$P''(u) > P''(-1) = -2, \quad P'(u) < 6, \quad P(u) \geqslant P\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right) = -1,$$

то при $u \in (-1,0)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\zeta''(u) &< \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{1}{3}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{x^{u+4}}dx + 2\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)\ln x}{x^{u+4}}\,dx + \frac{1}{6}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)\ln^2 x}{x^{u+4}}\,dx \\ &\leqslant \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{1}{192}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{u+4}} + \frac{1}{32}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^{u+4}} + \frac{1}{384}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^{u+4}} \\ &= \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{1}{192(u+3)} + \frac{1}{32(u+3)^2} + \frac{1}{192(u+3)^3} \\ &< -\frac{1}{4} + \frac{1}{384} + \frac{1}{128} + \frac{1}{192\cdot 8} < 0.\end{aligned}$$

Если $u \geqslant 0$, то $P(u) \geqslant 0, P''(u) > 0$, а при $u \in [0,1)$ верна оценка $P'(u) < P'(1) = 50$. Отсюда, из (4.12) и (2.14) при $u \in [0,1)$ находим

$$\begin{aligned}\zeta''(u) &\leqslant \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{50}{3}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)\ln x}{x^{u+4}}\,dx < \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{1}{3}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{u+4}}\,dx \\ &= \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{1}{3(u+3)^2} \leqslant -2 + \frac{1}{27} < -1.\end{aligned}$$

Отрицательность $\zeta''(u)$ (а значит и вогнутость $\zeta(u)$) на полуинтервале $-2 \leqslant u < 1$ полностью доказаны. Из отрицательности $\zeta''(u)$ следует убывание $\zeta'(u)$. в частности, выполняется неравенство

$$\zeta'(u) \leqslant \zeta'(-2) \quad \forall u \in [-2, 1). \tag{4.16}$$

Из (4.11) и (4.14) находим

$$\zeta'(-2) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{P'(-2)}{6} \int_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{x^2}\,dx = -\frac{1}{36} - \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{x^2}\,dx < 0.$$

Отсюда и из (4.16) следует отрицательность $\zeta'(u)$ на полуинтервале $-2 \leqslant u < 1$, а значит и убывание $\zeta(u)$.

Для доказательства равенства (4.9) рассмотрим функцию

$$L(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-z} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2m-1)^z} - \frac{1}{(2m)^z} \right). \tag{4.17}$$

Ввиду оценки

$$\left| \frac{1}{(2m-1)^z} - \frac{1}{(2m)^z} \right| \leqslant \frac{|z|}{(2m-1)^{1+\operatorname{Re} z}} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall z\colon\ \operatorname{Re} z > 0$$

заключаем, что ряд (4.17) сходится равномерно на любом компакте, лежащем в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и, следовательно, сумма этого ряда голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Из (4.1) и (4.17) видно, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$ верны тождества

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{-z} = 2^{-z}\zeta(z), \quad L(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (2m)^{-z} = \zeta(z). \tag{4.18}$$

Из (4.18) находим

$$L(z) + 2^{1-z} \cdot \zeta(z) = \zeta(z).$$

Следовательно, в полуплоскости $Rez > 1$ справедливо тождество

$$L(z) = \zeta(z)\left(1 - 2^{1-z}\right) \tag{4.19}$$

Выше было доказано, что левая часть (4.19) голоморфна в полуплоскости $Rez > 0$, а правая — в полуплоскости $Rez > -3$ без точки $z = 1$. Но из (4.6) видно, что

$$\lim_{z\to 1} \zeta(z)\left(1 - 2^{1-z}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{1 - 2^{1-z}}{z-1} = \lim_{w\to 0} \frac{1 - 2^{-w}}{w} = \ln 2.$$

Отсюда заключаем, что правая часть (4.19) не имеет особенности в точке $z = 1$ и голоморфна в полуплоскости $Rez > -3$. Поэтому тождество (4.19) справедливо в общей области аналитичности обеих его частей — в полуплоскости $Rez > 0$. (На самом деле, обе части (4.19) являются целыми функциями порядка 1 бесконечного типа, но доказательство этого факта здесь не приводится. По этому поводу см. монографии [6–8].)

При $z = 1/2$ имеем

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\sqrt{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1+\sqrt{2}\right)L\left(\frac{1}{2}\right). \tag{4.20}$$

Имеем также

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}} - \frac{1}{\sqrt{2m}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2m}-\sqrt{2m-1}}{\sqrt{(2m-1)\cdot 2m}} \tag{4.21}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2m(2m-1)}\left(\sqrt{2m}+\sqrt{2m-1}\right)}.$$

Из (4.20) и (4.21) следует (4.9). Теорема полностью доказана. □

На основании теорем 9 и 14 выводится двусторонняя оценка суммы значений степенной функции, показатель которой лежит в интервале $(-1, 3)$. Вывод её из указанных теорем несложен и предоставляется читателю.

Теорема 16. *При любом $a \in (-1, 3)$ и любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется двойное неравенство*

(1)

$$\frac{n^{a+1}}{a+1} + \zeta(-a) + \frac{n^a}{2} + \frac{an^{a-1}}{12} - \frac{a(a-1)(a-2)n^{a-3}}{384} < \sum_{k=1}^{n} k^a$$

$$< \frac{n^{a+1}}{a+1} + \zeta(-a) + \frac{n^a}{2} + \frac{an^{a-1}}{12}, \quad a \in (0,1)\cup(2,3),$$

(2)

$$\frac{n^{a+1}}{a+1}+\zeta(-a)+\frac{n^a}{2}+\frac{an^{a-1}}{12}<\sum_{k=1}^{n}k^a$$
$$<\frac{n^{a+1}}{a+1}+\zeta(-a)+\frac{n^a}{2}+\frac{an^{a-1}}{12}-\frac{a(a-1)(a-2)n^{a-3}}{384},\quad a\in(-1,0)\cup(1,2).$$

В частности, при любом натуральном n верны двойные неравенства

$$\frac{\sqrt{n}}{2}+\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{24n\sqrt{n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{\sqrt{n}}{2}+\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{n}}$$
$$-\frac{1}{24n\sqrt{n}}+\frac{5}{1024n^{7/2}},$$
$$\frac{2n\sqrt{n}}{3}+\frac{\sqrt{n}}{2}+\zeta\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{1}{24\sqrt{n}}-\frac{5}{1024n^{5/2}}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{2n\sqrt{n}}{3}$$
$$+\frac{\sqrt{n}}{2}+\zeta\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{1}{24\sqrt{n}}.$$

Немалый интерес, в особенности в связи с приложениями к задачам теории чисел, представляет поведение функции $\zeta(s)$ в полосе $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$. Мы не затрагиваем эти вопросы и рекомендуем читателю монографии [7, 8].

§5. Асимптотика одного интеграла

Дана функция F, выпуклая на (a,b), $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$ (возможны случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$), $a < 0 < b$,

$$\min_{a<x<b} F(x) = F(0) = 0. \tag{5.1}$$

Требуется найти асимптотику интеграла

$$J(s) = \int\limits_a^b \exp\left(-sF(x)\right)\,dx \quad \text{при } s \to +\infty.$$

Такого рода задачи начал изучать Лаплас около двухсот лет назад. Его подход к их решению изложен во многих книгах по асимптотическим методам (см., например, [5], гл. 3 §7). Здесь рассмотрена простейшая задача из данной проблематики.

Теорема 17. *Если существует предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = A \in (0,+\infty). \tag{5.2}$$

то верна асимптотика

$$J(s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{As}}, \quad s \to +\infty. \tag{5.3}$$

Замечание 7. *Если функция F в некоторой окрестности нуля дифференцируема и существует $F''(0)$, то $A = F''(0)/2$.*

Напомним тождество

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\lambda x^2\right)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \in (0,+\infty). \tag{5.4}$$

Тем самым в случае $a = -\infty$, $b = +\infty$, $F(x) = Ax^2$ условия (5.1), (5.2) выполняются, но асимптотика (5.3) превращается в обычное равенство. Этот факт рождает идею доказательства теоремы 17. Мы покажем, что при всех достаточно больших положительных значениях параметра s интеграл от разности между $\exp(-sF(x))$ и $\exp(-sAx^2)$ (функция F заменяется своей асимптотикой в нуле) уходит в остаточный член. Мы доказываем также, что интеграл $\int\limits_{|x|>\delta} \exp(-sF(x))\,dx$, каково бы ни было фиксированное число $\delta > 0$, экспоненциально мал по s; поэтому конечны или бесконечны пределы интегрирования a и b, не имеет существенного значения.

Доказательство теоремы 17. Первая часть доказательства теоремы состоит в выводе двусторонних оценок функции F на различных участках промежутка (a, b).

Для любого $\varepsilon > 0$ определим множество

$$E_\varepsilon = \left\{ \delta > 0 \;\middle|\; \left| \frac{F(x)}{x^2} - A \right| < \varepsilon \text{ при всех } x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \right\}. \tag{5.5}$$

Из (5.2) и определения понятия «предел функции в точке» следует, что множество E_ε при любом $\varepsilon > 0$ непусто. Таким образом, на интервале $0 < \varepsilon < A/2$ корректно определена положительная функция

$$\delta(\varepsilon) = \sup E_\varepsilon. \tag{5.6}$$

Очевидно, что либо $\delta(\varepsilon) > 0$, либо $\delta(\varepsilon) = +\infty$. Равенство $\delta(\varepsilon) = +\infty$ означает, что неравенство $\left|x^{-2}F(x) - A\right| < \varepsilon$ верно при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а тождество $\delta(\varepsilon) = +\infty$ возможно лишь в случае $F(x) = Ax^2$. Выше было отмечено, что для функции $F(x) = Ax^2$, $A > 0$, теорема верна. Поэтому рассмотрим ситуацию, в которой существует число $\varepsilon_1 \in (0, A/2)$ такое, что $\delta(\varepsilon) < +\infty$ при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Из (5.5), (5.6) видно также, что функция $\delta(\varepsilon)$ не убывает. Легко доказать (мы оставляем это читателю для самостоятельного упражнения), что если на полуинтервале $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеется положительная неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$, то существует положительная, непрерывная и возрастающая функция $\delta_1(\varepsilon)$ такая, что выполняются соотношения

$$\delta_1(\varepsilon) < \delta(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \delta_1(\varepsilon) = 0.$$

Итак, мы пришли к выводу, что существуют число $\varepsilon_1 \in (0, A/2)$ и положительная, непрерывная, возрастающая функция $\delta_1(\varepsilon)$ на полуинтервале $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ такая, что при любом $x \in (-\delta_1(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon))$ выполняется неравенство

$$-\varepsilon x^2 \leqslant F(x) - Ax^2 \leqslant \varepsilon x^2. \tag{5.7}$$

На самом деле неравенство (5.7) верно и при $x = \pm\delta_1(\varepsilon)$ ввиду непрерывности функции F. Через $\omega(\delta)$ обозначим функцию, обратную к $\delta_1(\varepsilon), 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Она определена на полуинтервале $0 < \delta \leqslant \delta_1(\varepsilon_1)$, непрерывна, возрастает, $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(\delta) = 0$.

Ввиду выпуклости функции F её график при $x > \delta_1(\varepsilon)$ проходит не ниже прямой, соединяющей две точки $(0,0)$, $(\delta_1(\varepsilon), F(\delta_1(\varepsilon)))$ её графика. Тем самым, верно неравенство

$$F(x) \geqslant \frac{xF(\delta_1(\varepsilon_1))}{\delta_1(\varepsilon)} \quad \forall x \in (\delta_1(\varepsilon), b).$$

Оценив снизу значение $F(\delta_1(\varepsilon))$ согласно замечанию, сделанному после (5.7), придём к неравенству

$$F(x) \geqslant \frac{(A-\varepsilon)\delta_1^2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}x > \frac{A}{2}\delta_1(\varepsilon)x \quad \forall x \in (\delta_1(\varepsilon), b). \tag{5.8}$$

Аналогичным методом находим

$$F(x) > \frac{A}{2}\delta_1(\varepsilon)|x| \quad \forall x \in (a, -\delta_1(\varepsilon)). \tag{5.9}$$

Вторая часть доказательства теоремы состоит в выводе двусторонних оценок интеграла $J(s)$ при всех достаточно больших значениях параметра s на основании неравенств (5.7) — (5.9). Перепишем эти неравенства, взяв в них в качестве $\varepsilon = \varepsilon(s)$ следующую функцию переменной s:

$$\varepsilon = \varepsilon(s) = \omega(s^{-1/3}). \tag{5.10}$$

Тогда по определению обратной функции

$$\delta_1(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon(s)) = \delta_1(\omega(s^{-1/3})) = s^{-1/3}. \tag{5.11}$$

Воспользовавшись соотношениями (5.10), (5.11), получим

$$(A - \omega(s^{-1/3})x^2 \leqslant F(x) \leqslant (A + \omega(s^{-1/3}))x^2, \quad |x| \leqslant s^{-1/3}, \tag{5.12}$$

$$F(x) > \frac{A}{2}|x|s^{-1/3}, \quad |x| > s^{-1/3}. \tag{5.13}$$

Теперь всё подготовлено для того, чтобы дать двустороннюю оценку интеграла $J(s)$. Начнём с оценки снизу. Поскольку при всех достаточно больших s имеем $s^{-1/3} < \min(|a|, b)$, а подынтегральная функция положительна, то

$$J(s) > \int\limits_{|x|\leqslant s^{-1/3}} \exp(-sF(x))\,dx.$$

Отсюда и из (5.12), обозначив $A_s^\pm = A \pm \omega(s^{-1/3})$, находим

$$J(s) > \int\limits_{|x|\leqslant s^{-1/3}} \exp(-sA_s^+ x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \int\limits_{|t|\leqslant s^{1/6}} \exp(-A_s^+ t^2)\,dt \tag{5.14}$$

(была сделана замена переменной $x\sqrt{s} = t$). Оценим сверху остаток интеграла

$$r_s = \int\limits_{s^{1/6}}^{+\infty} \exp(-Bt^2)\,dt, \quad B > 0, \quad s \geqslant 1.$$

Имеем

$$r_s < \int\limits_{s^{1/6}}^{+\infty} \exp(-Bs^{1/6}t)\,dt = \frac{\exp(-Bs^{1/3})}{Bs^{1/6}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|t|\leqslant s^{1/6}} \exp(-A_s^+ t^2)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-A_s^+ t^2)\,dt - 2\int\limits_{s^{1/6}}^{+\infty} \exp(-A_s^+ t^2)\,dt \tag{5.15}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{A_s^+}} - 2\int\limits_{s^{1/6}}^{+\infty} \exp(-A_s^+ t^2)\,dt > \sqrt{\frac{\pi}{A_s^+}} - \frac{2\exp(-A_s^+ s^{1/3})}{A_s^+ s^{1/6}}.$$

Из (5.14), (5.15) получаем

$$\varliminf_{s\to+\infty} \sqrt{s}J(s) \geqslant \varliminf_{s\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{A_s^+}} - \frac{2\exp(-A_s^+ s^{1/3})}{A_s^+ s^{1/6}}\right). \tag{5.16}$$

А так как $\lim\limits_{s\to+\infty} A_s^+ = A$, то выражение, стоящее под знаком нижнего предела в (5.16), имеет обычный предел, равный $\sqrt{\pi/A}$. Поэтому приходим к неравенству

$$\varliminf_{s\to+\infty} \sqrt{s}J(s) \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{A}}. \tag{5.17}$$

Перейдём к оценке интеграла $J(s)$ сверху. Из (5.12), (5.13) следует неравенство

$$J(s) < \int\limits_{|x|\leqslant s^{-1/3}} \exp(-sA_s^- x^2)\,dx + \int\limits_{|x|\geqslant s^{-1/3}} \exp(-\frac{A}{2}|x|s^{2/3})\,dx <$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-sA_s^- x^2)\,dx + 2\int\limits_{0}^{+\infty} \exp(-\frac{A}{2}xs^{2/3})\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{sA_s^-}} + \frac{4}{As^{2/3}}.$$

Отсюда видно, что

(5.18)
$$\varlimsup_{s\to+\infty} \sqrt{s}J(s) \leqslant \varlimsup_{s\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{A_s^-}} + \frac{4}{As^{1/6}}\right) = \lim_{s\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{A_s^-}} + \frac{4}{As^{1/6}} = \sqrt{\frac{\pi}{A}}.$$

Из (5.17), (5.18) заключаем, что

$$\exists \lim_{s\to+\infty} \sqrt{s}J(s) = \sqrt{\frac{\pi}{A}},$$

а это предельное отношение эквивалентно (5.3). Теорема доказана. □

Несомненно, внимательный читатель обнаружит, что выпуклость функции F оказалась не столь уж необходимой. Она использовалась лишь для вывода оценки снизу функции F (5.13). Но не достаточно ли вместо (5.13) какой-либо другой (возможно, более слабой) оценки? Эти соображения приводят к такому аналогу теоремы 17.

Теорема 18. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$, $F \in \mathcal{C}[a,b]$, $F(0) = 0$, $F(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]\setminus\{0\}$. Тогда при условии (5.2) верна асимптотика (5.3).*

Доказательство теоремы 18 оставим изучающим этот раздел для самостоятельного упражнения. В случае $a = -\infty, b = +\infty$ верна такая теорема.

Теорема 19. *Пусть $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$, $F(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что*

$$F(x) \geqslant c_2 \ln|x| \quad \forall x \in (-\infty, -c_1) \cup (c_1, +\infty).$$

Тогда при условии (5.2) верна асимптотика (5.3).

Приведём пример применения теоремы 17: вывод асимптотики при $s \to +\infty$, $s \in \mathbb{R}$, гамма-функции

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx. \tag{5.19}$$

В качестве следствия будет получена асимптотическая формула Стирлинга для факториала:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n \to \infty. \tag{5.20}$$

Нетрудно убедиться в том (это предоставляется читателю для самостоятельного упражнения), что интеграл (5.19) абсолютно сходится в полуплоскости $Re\, s > 0$ и сходимость равномерна на любом компакте в этой полуплоскости. Следовательно, гамма-функция аналитична в полуплоскости $Re\, s > 0$. Интегрируя по частям в (5.19), мы получаем тождество

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad Re\, s > 0. \tag{5.21}$$

Это тождество позволяет аналитически продолжить гамма-функцию в $\mathbb{C} \setminus (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{1-m\})$. Таким образом, Γ является мероморфной функцией в $\mathbb{C}$ и в точках $0, -1, -2, \dots$ имеет простые полюсы.

Сейчас мы рассмотрим положительные значения переменной s. Преобразуем интеграл (5.19), осуществив последовательно замены переменной интегрирования $x = sy$, $y = 1 + t$. Имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} (sy)^s e^{-sy} d(sy) \\ &= s^{s+1} e^{-s} \int_0^{+\infty} \exp(-s(y-1) + s\ln y) dy = s^{s+1} e^{-s} \int_{-1}^{+\infty} \exp(-sF(t)) dt, \end{aligned} \tag{5.22}$$

где $F(t) = t - \ln(1+t), \quad -1 < t < +\infty.$

Поскольку верны равенства

$$F(0) = 0, \quad F'(t) = \frac{t}{t+1}, \quad F''(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \quad \lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{t^2} = \frac{1}{2},$$

то функция F удовлетворяет всем условиям теоремы 17. Применив теорему 17, получаем асимптотику

$$\int_{-1}^{+\infty} \exp(-sF(t))dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \to +\infty,$$

которая вместе с (5.22) дает

$$\Gamma(s+1) \sim s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}, \quad s \to +\infty. \tag{5.23}$$

Из очевидного равенства $\Gamma(1) = 1$ и функционального уравнения (5.21) находим $\Gamma(n+1) = n!(\forall n \in \mathbb{N})$. Это вместе с (5.23) влечёт за собой (5.20). в частности, имеем

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + o(1), \quad n \to +\infty. \tag{5.24}$$

В следующем параграфе для бесконечно малой величины, стоящей в правой части (5.24) будут выведены достаточно точные двусторонние оценки.

§6. Сумма значений логарифмической функции комплексного аргумента. Двусторонняя оценка $n!$ и числа сочетаний из $2n$ по n

В этом параграфе выведено интегральное представление суммы

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \ln(k+z) \tag{6.1}$$

(с оценкой остаточного члена при $n \to \infty$), когда переменная $z \in \mathbb{C}$ лежит вне луча $(-\infty, 0]$. Под логарифмом в (6.1) понимается главная ветвь

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi, \quad r > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi).$$

Напомним (см. формулы (1.9) и (1.13)) определение функции

$$\sigma(x) = \frac{\{x\} - \{x\}^2}{2}.$$

Теорема 20. *В $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ справедливо тождество*

$$S_n(z) = \left(n + z + \frac{1}{2}\right) \ln(n+z) - n + \left(\frac{1}{2} - z\right) \ln z + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{z}\right) + \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{(x+z)^4}\, dx - R_n(z), \tag{6.2}$$

в котором остаточный член

$$R_n(z) = \int_n^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{(x+z)^4}\, dx \tag{6.3}$$

допускает оценку

$$|R_n(u+iv)| < \frac{1}{192(n+u)^3} \quad \text{при условии } u, v \in \mathbb{R}, n+u > 0, v \neq 0, \tag{6.4}$$

$$0 < R_n(u) < \frac{1}{192(n+u)^3} \quad \forall u > 0. \tag{6.5}$$

Доказательство. Согласно разделу 4 теоремы 4, определению функции σ_2 в формуле (1.13) и тождеству $\frac{d^4}{(dx)^4}\ln(x+z) = -6(x+z)^{-4}$ верно интегральное представление

$$S_n(z) = \int\limits_0^n \ln(x+z)\,dx + \frac{\ln z + \ln(n+z)}{2} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{z}\right) + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{(x+z)^4}\,dx - R_n(z),$$

в котором функция $R_n(z)$ задана формулой (6.3). Вычислив интеграл

$$\int\limits_0^n \ln(x+z)\,dx = n\ln(n+z) - n + z\ln(n+z) - z\ln z,$$

придём к тождеству (6.2).

Если $z = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, то $|x+z|^2 = (x+u)^2 + v^2$. Следовательно, $R_n(z)$ оценивается сверху таким интегралом:

$$|R_n(u+iv)| \leqslant \int\limits_n^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)dx}{((x+u)^2+v^2)^2} < \frac{1}{64}\int\limits_n^{+\infty} \frac{dx}{((x+u)^2+v^2)^2} = \frac{1}{64}\int\limits_{n+u}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+v^2)^2}. \tag{6.6}$$

При $v \neq 0$ имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2+v^2)^2} = \frac{1}{2v^2}\left(\frac{t}{t^2+v^2} - \frac{1}{|v|}\operatorname{arcctg}\left(\frac{t}{|v|}\right)\right) + const.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{n+u}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+v^2)^2} = \frac{1}{2v^2}\left(\frac{1}{|v|}\operatorname{arcctg}\left(\frac{n+u}{|v|}\right) - \frac{n+u}{(n+u)^2+v^2}\right). \tag{6.7}$$

Обозначим $\lambda = \frac{|v|}{n+u}$. Проделав несложные тождественные преобразования правой части (6.7), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int\limits_{n+u}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+v^2)^2} = \frac{1}{2|v|^3}\left(\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right), \quad \lambda > 0. \tag{6.8}$$

Далее воспользуемся неравенством (его доказательство оставим читателю)

$$\operatorname{arctg}\lambda < \frac{\lambda}{\lambda^2+1} + \frac{2\lambda^3}{3} \quad \forall\lambda > 0. \tag{6.9}$$

Из (6.6), (6.8), (6.9) находим

$$|R_n(u+iv)| \leqslant \frac{1}{192}\left(\frac{\lambda}{|v|}\right)^3 = \frac{1}{192(n+u)^3}.$$

Неравенство (6.4) и оценка сверху в (6.5) доказаны. Положительность $R_n(u)$ при $u > 0$ сразу же видна из (6.3). Теорема 20 полностью доказана. □

Теперь мы можем доказать обещанное во введении уточнение знаменитой асимптотической формулы Стирлинга для факториала (5.20). Обозначим

$$A(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Теорема 21. *При любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы двойные неравенства*

$$A(n)\exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right) < n! < A(n)\exp\left(\frac{1}{12n}\right), \tag{6.10}$$

$$A(n)\left(1 + \frac{1}{12n}\right) < n! < A(n)\left(1 + \frac{1}{12n - 0.5}\right). \tag{6.11}$$

Доказательство. Из определения факториала следует равенство

$$\ln n! = \sum_{m=1}^{n} \ln m = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(k+1) = S_{n-1}(1). \tag{6.12}$$

Согласно теореме 20 сумма $S_{n-1}(1)$ допускает представление

(6.13)

$$S_{n-1}(1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - (n-1) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{(x+1)^4}\,dx - \rho_n,$$

где

$$\rho_n = \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\sigma^2(x)}{(x+1)^4} = \int_n^{+\infty} \frac{\sigma^2(t)}{t^4}. \tag{6.14}$$

Обозначим

$$C = \frac{11}{12} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sigma^2(t)}{t^4}\,dt.$$

Из (6.12), (6.13) находим

$$\ln n! = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + C + \frac{1}{12n} - \rho_n.$$

Следовательно,

$$n! = n^{n+1/2} e^{-n} e^c \exp\left(\frac{1}{12n} - \rho_n\right). \tag{6.15}$$

Сравнивая представление (6.15) с асимптотикой (5.20), заключаем, что $C = \ln(\sqrt{2\pi})$, и (6.15) переписывается в виде

$$n! = A(n) \exp\left(\frac{1}{12n} - \rho_n\right). \tag{6.16}$$

Представление факториала (6.16) показывает, что для доказательства двойного неравенства (6.10) остаётся проверить справедливость двусторонней оценки

$$0 < \rho_n < \frac{1}{360n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.17}$$

Левое неравенство (6.17) сразу же следует из положительности (всюду кроме целых точек) подынтегральной функции в (6.14). Докажем правое неравенство. Заметим, что согласно (6.5) верна оценка $\rho_n < \frac{1}{192n^3}$, но нам требуется получить более сильный результат. Этот результат в определённом смысле является окончательным: как мы увидим далее, постоянную $1/360$ в (6.17) нельзя заменить меньшей при достаточно больших значениях n.

Функция $\sigma^2(t) = (\{t\} - \{t\}^2)/4$ является 1-периодичной. Её интеграл по отрезку длины 1 равен

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 (t - t^2)^2\,dt = \frac{1}{120}.$$

Тем самым, функция

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \left(\frac{1}{120} - \sigma^2(t)\right) dt \equiv \frac{\{x\}}{120} - \frac{\{x\}^3}{12} + \frac{\{x\}^4}{8} - \frac{\{x\}^5}{20} \tag{6.18}$$

является 1-периодичной и обращается в нуль в целых точках. Отсюда находим (6.19)

$$\rho_n = \int\limits_n^{+\infty} \frac{\sigma^2(t)}{t^4}\,dt = \int\limits_n^{+\infty} \left(\sigma^2(t) - \frac{1}{120}\right)\frac{dt}{t^4} + \frac{1}{120}\int\limits_n^{+\infty}\frac{dt}{t^4} = \frac{1}{360n^3} - \int\limits_n^{+\infty}\frac{d\Phi(t)}{t^4}$$

$$= \frac{1}{360n^3} + \int\limits_n^{+\infty}\Phi(t)\,d\left(\frac{1}{t^4}\right) = \frac{1}{360n^3} - 4\int\limits_n^{+\infty}\frac{\Phi(t)}{t^5}\,dt.$$

Из (6.18) видно, что интеграл по отрезку длины 1 от функции Φ равен нулю. Следовательно, одна из её первообразных имеет вид

$$\Phi_1(x) = \frac{\{x\}^2}{240} - \frac{\{x\}^4}{48} + \frac{\{x\}^5}{40} - \frac{\{x\}^6}{120} = \frac{\{x\}^2(1-\{x\})^2(1+2\{x\}-2\{x\}^2)}{240}.$$

Непрерывность функции Φ_1, её обращение в нуль в целых точках, положительность всюду, кроме целых точек дают возможность проинтегрировать по частям в интеграле

$$\int\limits_n^{+\infty}\Phi(t)t^{-5}\,dt = \int\limits_n^{+\infty} t^{-5}\,d\Phi_1(t) = -\int\limits_n^{+\infty}\Phi_1(t)\,d(t^{-5}) = 5\int\limits_n^{+\infty} t^{-6}\Phi_1(t)\,dt$$

и сделать заключение о его положительности, что вместе с (6.19) доказывает первое неравенство (6.17). Двойное неравенство (6.10) полностью доказано.

Выведем (6.11) из (6.10). Для этого достаточно убедиться в справедливости следующих двух неравенств:

$$1 + \frac{1}{12n} < \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6.20}$$

$$\exp\left(\frac{1}{12n}\right) < 1 + \frac{1}{12n - 1/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.21}$$

Перепишем неравенство (6.20) в равносильной форме

$$\ln\left(1 + \frac{1}{12n}\right) < \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

и воспользуемся известной оценкой

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x > 0.$$

Получим, что (6.20) является следствием неравенства

$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{288n^2} + \frac{1}{3\cdot 12^3 n^3} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{360} + \frac{1}{3\cdot 12^3}\right)\frac{1}{n^3} < \frac{1}{288n^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{3\cdot 144} < \frac{n}{24}.$$

Последнее неравенство очевидно, и тем самым (6.20) доказано.

Для доказательства (6.21) обозначим $x = 1/(12n)$ и заметим, что

$$\frac{1}{12n - 0.5} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}} = \frac{x}{1 - x/2} = x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k = x + \sum_{m=2}^{\infty} 2^{1-m}x^m.$$

Поэтому (6.21) переписывается в виде

$$e^x < 1 + x + \sum_{m=2}^{\infty} 2^{1-m}x^m. \tag{6.22}$$

Это неравенство верно при любых $x > 0$, поскольку коэффициент разложения e^x по степеням x при x^m равен $1/m! < 2^{1-m}$ при любом $m \geqslant 3$, а первые три слагаемых степенного ряда $e^x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} x^m/m!$ совпадают с первыми тремя слагаемыми ряда в правой части (6.22). Неравенство (6.21) доказано и этим доказательство теоремы 21 завершено. $\square$

Сделаем несколько замечаний относительно теоремы 21.

Оценка сверху (6.10) имеется во многих учебниках, но в качестве оценки снизу $n!$ обычно приводятся более слабые неравенства, чем левое неравенство (6.10). Подобного рода неравенства, к сожалению, являются редкостью в математической литературе. Отметим публикацию **[9]**, в которой доказана оценка снизу (6.10), а в качестве оценки сверху получен более сильный результат:

$$n! < A(n)\exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.23}$$

Ниже мы докажем это утверждение, а также выведем двустороннюю оценку $n!$ в несколько иной форме. Действительно, коль скоро последовательность $A(n)\exp(1/(12n))$ достаточно хорошо приближает $n!$ сверху, то естественно искать уточнение этого приближения, добавив в знаменатель дроби $1/(12n)$ какую-либо положительную величину.

Недавно профессор И.В. Тихонов обратил внимание автора на статью **[10]**, в которой была доказана оценка снизу

$$A(n)\exp\left(\frac{1}{12n+1}\right) < n! \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.24}$$

Нетрудно убедиться в том, что теорема 21 немедленно даёт такое усиление этой оценки:

$$A(n)\exp\left(\frac{1}{12n+\frac{c}{n}}\right) < n! \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{где } c = \frac{12}{29} = 0.4137931\ldots. \tag{6.25}$$

Действительно, для вывода (6.25) из оценки снизу (6.10) достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{1}{12n+\frac{c}{n}} \leqslant \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} \Leftrightarrow \frac{1}{30n^2} \leqslant \frac{c}{12n^2+c} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство последнего неравенства является элементарной задачей; равенство в нём имеет место только при $n = 1$.

Весной 2014 года студентка математического факультета МПГУ Т. З. Аджиева, желая улучшить результат (6.24), в своей дипломной работе рассмотрела следующий вопрос. Какую можно взять постоянную k, чтобы неравенство

$$A(n)\exp\left(\frac{1}{12n+k}\right) < n! \tag{6.26}$$

было верным при всех $n \in \mathbb{N}$? Т. З. Аджиева доказала, что (6.26) выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$, если взять $k = 0.6$. Из (6.25) сразу же видно, что в (6.26) можно взять $k = 0.42$.

Займёмся доказательством неравенства (6.23). Для этого надо оценить снизу величину ρ_n (см. (6.14), (6.16)) более точно, чем в (6.17). Воспользуемся выведенным в доказательстве теоремы 21 представлением

$$\rho_n = \frac{1}{360n^3} - \int_n^{+\infty} \frac{B(t)}{t^6}\,dt,$$

где

$$B(t) = \frac{\{t\}^2}{12} - \frac{5\{t\}^4}{12} + \frac{\{t\}^5}{2} - \frac{\{t\}^6}{6}.$$

Функция B является 1-периодичной и верно равенство

$$\int_0^1 B(t)\,dt = \frac{1}{36} - \frac{1}{42} = \frac{1}{252}.$$

Следовательно,

$$\rho_n = \frac{1}{360n^3} - \int\limits_n^{+\infty} \frac{dt}{252t^6} + \int\limits_n^{+\infty} \left(\frac{1}{252} - B(t)\right) \frac{dt}{t^6} = \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{1260n^5} + I_n.$$

Для вывода оценки сверху (6.23) осталось доказать, что интеграл

$$I_n = \int\limits_n^{+\infty} \left(\frac{1}{252} - B(t)\right) \frac{dt}{t^6}$$

является положительным при любом $n \in \mathbb{N}$. Действительно, из неравенства $I_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) следует неравенство

$$\rho_n > \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{1260n^5} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

а это вместе с (6.16) влечёт за собой (6.23).

Приступим к доказательству положительности интеграла I_n. Заметим, что функция

$$B_1(x) = \int\limits_0^x \left(\frac{1}{252} - B(t)\right) dt$$

обращается в нуль во всех целых точках. Поэтому она 1-периодична и выражается формулой

$$B_1(x) = \frac{\{x\}}{252} - \frac{\{x\}^3}{36} + \frac{\{x\}^5}{12} - \frac{\{x\}^6}{12} + \frac{\{x\}^7}{42}.$$

Проинтегрировав по частям, находим

$$I_n = \int\limits_n^{+\infty} B_1(t)\, d\left(-t^{-6}\right) = 6 \int\limits_n^{+\infty} B_1(t) t^{-7}\, dt.$$

Нетрудно проверяются (проделать выкладки мы предоставляем читателю) следующие свойства функции B_1:

$$B_1(t) > 0 \text{ \textit{при} } t \in (k,\ k+1/2) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$B_1(t) < 0 \text{ \textit{при} } t \in (k+1/2,\ k+1) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\int\limits_k^{k+1/2} B_1(t)\, dt = - \int\limits_{k+1/2}^{k+1} B_1(t)\, dt.$$

А так как функция t^{-7} положительна и убывает, то по теореме о среднем имеем ($\xi_k \in (k,\ k+1/2)$), $\eta_k \in (k+1/2,\ k+1)$)

$$\int\limits_{k}^{k+1} t^{-7} B_1(t)\,dt = \int\limits_{k}^{k+1/2} t^{-7} B_1(t)\,dt + \int\limits_{k+1/2}^{k+1} t^{-7} B_1(t)\,dt =$$

$$= \xi_k^{-7} \int\limits_{k}^{k+1/2} B_1(t)\,dt + \eta_k^{-7} \int\limits_{k+1/2}^{k+1} B_1(t)\,dt = \left(\xi_k^{-7} - \eta_k^{-7}\right) \int\limits_{k}^{k+1/2} B_1(t)\,dt > 0.$$

Отсюда находим

$$I_n = 6 \sum_{k=n}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} t^{-7} B_1(t)\,dt > 0,$$

что и требовалось доказать. Доказательство неравенства (6.23) завершено.

Теперь докажем теорему, содержащую усиление оценки (6.25).

Теорема 22. *При любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо двойное неравенство*

$$A(n) \exp\left(\frac{1}{12n + \frac{0.4}{n}}\right) < n! < A(n) \exp\left(\frac{1}{12n + \frac{0.4-\alpha_n}{n}}\right) \tag{6.27}$$

в котором $\alpha_n = 0.11n^{-2}$.

Доказательство. Правое неравенство (6.27) несложно вывести из (6.23). Для этого достаточно при любом $n \in \mathbb{N}$ установить справедливость соотношения

$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} < \frac{1}{12n + \frac{0.4-\alpha_n}{n}} \Leftrightarrow \tag{6.28}$$
$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{12n + \frac{0.4-\alpha_n}{n}} < \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{1260n^5} \Leftrightarrow$$
$$\frac{0.4-\alpha_n}{12n(12n^2 + 0.4 - \alpha_n)} < \frac{1}{12n}\left(\frac{1}{30n^2} - \frac{1}{105n^4}\right).$$

Умножив обе части (6.28) на $12n$, придём к задаче доказательства неравенства

$$\frac{0.4-\alpha_n}{12n^2 + 0.4 - \alpha_n} < \frac{1}{30n^2} - \frac{1}{105n^4} \Leftrightarrow \frac{12n^2 - 3.3}{12n^2 + 0.4 - \alpha_n} < 1 - \frac{2}{7n^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{2}{7n^2} < 1 - \frac{12n^2 - 3.3}{12n^2 + 0.4 - \alpha_n} \Leftrightarrow \frac{2}{7n^2} < \frac{3.7 - \alpha_n}{12n^2 + 0.4 - \alpha_n} \Leftrightarrow$$
$$2(12n^2 + 0.4 - \alpha_n) < 7n^2(3.7 - \alpha_n).$$

Справедливость последнего неравенства при всех $n \in \mathbb{N}$ элементарно проверяется.

Левое неравенство (6.27) мы выведем как следствие возрастания последовательности

$$a_n = \frac{A(n)}{n!} \exp\left(\frac{1}{12n + \frac{0.4}{n}}\right)$$

и предельного соотношения, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Действительно, если последовательность возрастает и стремится к 1, то все её элементы меньше 1, что и составляет левое неравенство (6.27). Стремление же a_n к 1 является следствием доказанной выше формулы Стирлинга.

Итак, докажем возрастание последовательности $\{a_n\}$. Имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{A(n)(n+1)}{A(n+1)} \exp\left(\frac{n}{12n^2+0.4} - \frac{n+1}{12(n+1)^2+0.4}\right) = \tag{6.29}$$
$$= e\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-0.5} \exp\left(\frac{12n(n+1)-0.4}{144n^2(n+1)^2+4.8(n^2+(n+1)^2)+0.16}\right).$$

Поскольку все элементы a_n положительны, то возрастание этой последовательности равносильно справедливости неравенства

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В свете (6.29) это означает, что требуется доказать неравенство

$$\frac{12n(n+1)-0.4}{144n^2(n+1)^2+4.8(n^2+(n+1)^2)+0.16} < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.30}$$

Обозначим $x = n + 0.5$. Тогда неравенство (6.30) переписывается в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{12(x-0.5)(x+0.5)-0.4}{144((x-0.5)(x+0.5))^2+4.8((x-0.5)^2+(x+0.5)^2)+0.16} < \tag{6.31}$$
$$< x\ln\left(\frac{x+0.5}{x-0.5}\right) - 1,$$

причём его достаточно доказать при любом $x \geqslant 3/2$. Преобразуем обе части (6.31), сделав замену переменной $t = 0.5/x$ (тогда $0 < t \leqslant 1/3$). Получим

$$x\ln\left(\frac{x+0.5}{x-0.5}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k+1},$$

$$\frac{12(x-0.5)(x+0.5)-0.4}{144((x-0.5)(x+0.5))^2+4.8((x-0.5)^2+(x+0.5)^2)+0.16} =$$
$$\frac{x^2(12(1-t^2)-0.4(2t)^2)}{x^4(144(1-t^2)^2+9.6(1+t^2)(2t)^2+0.16(2t)^4)} =$$
$$= \frac{(12-13.6t^2)t^2}{36(1-2t^2+t^4)+9.6(t^2+t^4)+0.64t^4}.$$

В результате сделанных преобразований приходим к задаче доказательства неравенства

$$\frac{(12-13.6t^2)t^2}{36(1-2t^2+t^4)+9.6(t^2+t^4)+0.64t^4} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k+1}.$$

Покажем, что на самом деле выполняется даже более сильное неравенство

$$\frac{(12-13.6t^2)t^2}{36(1-2t^2+t^4)+9.6(t^2+t^4)} < \frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}. \tag{6.32}$$

(Мы отбросили ряд из положительных слагаемых в правой части и последнее положительное слагаемое в знаменателе левой части.) Разделим обе части неравенства (6.32) на $t^2/3$. Получим равносильное неравенство

$$\frac{12-13.6t^2}{12(1-2t^2+t^4)+3.2(t^2+t^4)} < 1+\frac{3t^2}{5} \Leftrightarrow$$
$$\frac{12-13.6t^2}{12-20.8t^2+15.2t^4} - 1 < \frac{3t^2}{5} \Leftrightarrow$$
$$\frac{7.2t^2-15.2t^4}{12-20.8t^2+15.2t^4} < \frac{3}{5}t^2 \Leftrightarrow$$
$$5(7.2t^2-15.2t^4) < 3t^2(12-20.8t^2+15.2t^4) \Leftrightarrow$$
$$36t^2-76t^4 < 36t^2-62.4t^4+45.6t^6.$$

Последнее неравенство, очевидно, верно при любом $t>0$ и этим доказательство неравенства (6.30), а значит и возрастания последовательности $\{a_n\}$ завершено. Теорема 22 полностью доказана. □

Таким образом, верны следующие приближённые формулы факториала и точность каждой последующей выше, чем у предыдущей:

$$n! \approx A(n), \quad n! \approx A(n)\exp\left(\frac{1}{12n}\right), \quad n! \approx A(n)\exp\left(\frac{n}{12n^2+0.4}\right).$$

n	n!	$A(n)$	$A(n)exp\left(\frac{1}{12n}\right)$	$A(n)exp\left(\frac{n}{12n^2+0.4}\right)$
1	1	$0.923\ldots$	$1.002274\ldots$	$0.99958\ldots$
2	2	$1.919\ldots$	$2.000652\ldots$	$1.9999632\ldots$
3	6	$5.836\ldots$	$6.00059\ldots$	$5.999984\ldots$
4	24	$23.506\ldots$	$24.00102\ldots$	$23.999984\ldots$
5	120	$118.019\ldots$	$120.003\ldots$	$119.999973\ldots$
6	720	$710.078\ldots$	$720.009\ldots$	$719.999973\ldots$
7	5040	$4980.4\ldots$	$5040.04\ldots$	$5039.99979\ldots$
8	40320	$39902.4\ldots$	$40320.21\ldots$	$40319.99914\ldots$
9	362880	$359536.8\ldots$	$362881.3\ldots$	$362879.9957\ldots$
10	3628800	$3598695.6\ldots$	$3628810.051\ldots$	$3628799.97\ldots$
11	39916800		$39916883.11\ldots$	$39916799.82\ldots$
12	479001600		$479002368.4\ldots$	$479001598.65\ldots$
13	6227020800			$6227020788.3\ldots$
14	87178291200			$87178291086.8\ldots$

В качестве примера приведём таблицу для значений $n \in [1, 14]$.

Мы не заполнили второй столбец таблицы, начиная с $n = 11$, и третий столбец, начиная с $n = 13$, потому, что отклонение значения приближения от $n!$ становится уже слишком большим, но это касается лишь абсолютной погрешности и происходит потому, что $n!$ растёт очень быстро, а относительная погрешность всех трёх приближений стремится к нулю. Особенно быстро идёт этот процесс в последнем столбце таблицы. Из таблицы видно, что при $n \geqslant 12$ относительная погрешность третьего приближения меньше 10^{-8}.

С помощью теоремы 21 выведем двустороннюю оценку последовательности

$$c_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_0 = 1, \tag{6.33}$$

равной отношению произведения первых n нечётных натуральных чисел к произведению первых n чётных. Последовательность c_n встречается в различных задачах теории функций и теории вероятностей. В частности, имеем

$$c_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = 4^{-n} \binom{2n}{n}, \quad (1-z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, |z| \leqslant 1, z \neq 1. \tag{6.34}$$

(В разложении $(1-z)^{-1/2}$ в степенной ряд рассматривается главная ветвь корня: $(re^{i\varphi})^{-1/2} = r^{-1/2} e^{-i\varphi/2}, r > 0, -\pi < \varphi < \pi$.)

Приведём значения нескольких первых элементов последовательности $\{c_n\}$:

$$c_0 = 1,\ c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{3}{8},\ c_3 = \frac{5}{16},\ c_4 = \frac{35}{128},\ c_5 = \frac{63}{256},\ c_6 = \frac{231}{1024}.$$

ТЕОРЕМА 23. *При любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы двойные неравенства*

$$1 - \frac{1}{8n} < \sqrt{\pi n} c_n < 1 - \frac{1}{9n}, \qquad (6.35)$$
$$1 - \frac{1}{4n} < \pi n c_n^2 < 1 - \frac{1}{5n}.$$

При $n \geqslant 2$ правые неравенства (6.35) допускают усиление:

$$\sqrt{\pi n} c_n < 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{90n^2} < 1 - \frac{1}{8n+1}, \qquad (6.36)$$
$$\pi n c_n^2 < 1 - \frac{1}{4n} + \frac{3}{80n^2} < 1 - \frac{1}{4n+2/3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 21 верны неравенства

(6.37)
$$\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \exp\left(\frac{1}{24n} - \frac{1}{2880n^3}\right) < (2n)! < \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \exp\left(\frac{1}{24n}\right),$$
$$\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n \exp\left(\frac{1}{6n} - \frac{1}{180n^3}\right) < (n!)^2 < \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n \exp\left(\frac{1}{6n}\right).$$

Из (6.37) находим

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(\frac{1}{24n} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{2880n^3}\right) < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(\frac{1}{24n} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{180n^3}\right).$$

Отсюда и из (6.34) получаем двойные неравенства

$$\exp\left(-\frac{1}{8n} - \frac{1}{2880n^3}\right) < \sqrt{\pi n} c_n < \exp\left(-\frac{1}{8n} + \frac{1}{180n^3}\right), \qquad (6.38)$$
$$\exp\left(-\frac{1}{4n} - \frac{1}{1440n^3}\right) < \pi n c_n^2 < \exp\left(-\frac{1}{4n} + \frac{1}{90n^3}\right).$$

Теперь воспользуемся двусторонней оценкой экспоненты

$$1 - t + t^2/2 - t^3/6 < e^{-t} < 1 - t + t^2/2 \quad \forall t > 0. \qquad (6.39)$$

Согласно ей при $n \geqslant 2$ имеем

$$\exp\left(-\frac{1}{8n}+\frac{1}{180n^3}\right) < 1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{180n^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8n}-\frac{1}{180n^3}\right)^2 <$$
$$< 1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{180n^3}+\frac{1}{128n^2} \leqslant 1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{360n^2}+\frac{1}{128n^2} <$$
$$< 1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{90n^2} < 1-\frac{1}{8n+1},$$

$$\exp\left(-\frac{1}{4n}+\frac{1}{90n^3}\right) < 1-\frac{1}{4n}+\frac{1}{90n^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n}-\frac{1}{90n^3}\right)^2 <$$
$$< 1-\frac{1}{4n}+\frac{1}{90n^3}+\frac{1}{32n^2} \leqslant 1-\frac{1}{4n}+\frac{1}{180n^2}+\frac{1}{32n^2} <$$
$$< 1-\frac{1}{4n}+\frac{3}{80n^2} < 1-\frac{1}{4n+2/3}.$$

Оценив сверху правые части (6.37) с помощью этих неравенств получим (6.36). Оценки сверху в (6.35) при $n=1$ проверяются непосредственным вычислением.

Оценку снизу (6.39) при $t\in(0,1)$ можно огрубить, одновременно упростив её, следующим образом: $e^{-t} > 1-t+t^2/3$. Поэтому
$$\exp\left(-\frac{1}{8n}-\frac{1}{2880n^3}\right) > 1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{2880n^3}+\frac{1}{192n^2} > 1-\frac{1}{8n},$$
$$\exp\left(-\frac{1}{4n}-\frac{1}{1440n^3}\right) > 1-\frac{1}{4n}+\frac{1}{1440n^3}+\frac{1}{48n^2} > 1-\frac{1}{4n}.$$
Отсюда и из (6.38) получаем левые неравенства (6.35). Теорема полностью доказана. $\square$

§7. Двусторонняя оценка полных эллиптических интегралов

В этом параграфе теорема 23 применяется для исследования поведения полных эллиптических интегралов

$$K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},\quad 0\leqslant k<1,\tag{7.1}$$

$$E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad 0\leqslant k\leqslant 1.$$

Функции K и E встречаются во многих задачах механики и теории управления [11, 12], но не является элементарными. Поэтому важно оценить $K(k)$ и $E(k)$ как сверху, так и снизу элементарными функциями с достаточно хорошей точностью.

Исследование мы начнём с полного эллиптического интеграла первого рода K. Простейшей оценкой, которая будет вскоре доказана, является такая:

$$\ln 4+\ln\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}<K(k)\leqslant\frac{\pi}{2}+\ln\frac{1}{\sqrt{1-k^2}},\quad 0\leqslant k<1.\tag{7.2}$$

Она равносильна тому, что значения функции

$$K_0(k)=K(k)-\ln\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tag{7.3}$$

на полуинтервале $0\leqslant k<1$ лежат между числами $\ln 4=1.386294\ldots$ и $\pi/2=1.5707963\ldots$.

Пока функция K_0 не определена в точке $k=1$, но сейчас будет доказано, что на полуинтервале $0\leqslant k<1$ она совпадает с суммой степенного ряда, равномерно и абсолютно сходящегося в круге $\{k\in\mathbb{C}\mid |k|\leqslant 1\}$. Поэтому мы имеем полное право говорить о функции K_0 как о функции непрерывной в замкнутом единичном круге комплексной плоскости и голоморфной внутри него. в частности, функция K_0 непрерывна на отрезке $[0,1]$, но её левая производная в точке 1 равна $-\infty$.

ТЕОРЕМА 24. *Функция K_0 разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся в круге $|k| \leqslant 1$ степенной ряд*

$$K_0(k) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n k^{2n}, \tag{7.4}$$

коэффициенты которого допускают двустороннюю оценку

$$\frac{1}{8n^2} - \frac{3}{160n^3} < b_n < \frac{1}{8n^2} \quad \forall n \geqslant 2, \quad b_1 = \frac{4-\pi}{8}. \tag{7.5}$$

Функция K_0 убывает и вогнута. Справедливы равенства

$$K_0(0) = \frac{\pi}{2}, \quad K_0(1) = \ln 4. \tag{7.6}$$

Равенства (7.6) показывают, что постоянную $\pi/2$ в правой части (7.2) нельзя уменьшить, а постоянную $\ln 4$ в левой части (7.2) нельзя увеличить.

Перед доказательством теоремы 24 докажем теорему о разложении в степенные ряды полных эллиптических интегралов.

ТЕОРЕМА 25. *Справедливы разложения в степенные ряды*

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n}, \quad |k| \leqslant 1, \quad k \neq \pm 1,$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2 k^{2n}}{1-2n}, \quad |k| \leqslant 1,$$

в которых величины c_n определены формулой (6.34).

Доказательство. Воспользуемся разложениями бинома

$$(1-z)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n, |z|\leqslant 1, z\neq 1, (1-z)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nz^n}{1-2n}, |z|\leqslant 1. \tag{7.7}$$

Известна теорема (она доказывается в любом курсе математического анализа), которая утверждает, что если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ сходится в некоторой точке $z=z_0\in\mathbb{C}$, то он сходится равномерно на отрезке $\{z=rz_0 \mid 0\leqslant r\leqslant 1\}$. Следовательно, равномерно по $\varphi\in[0,\pi/2]$ сходятся ряды

$$\begin{gathered}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nk^{2n}\sin^{2n}\varphi,\ |k|\leqslant 1,\ k\neq\pm 1,\\ (1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nk^{2n}}{1-2n}\sin^{2n}\varphi,\ |k|\leqslant 1.\end{gathered} \tag{7.8}$$

Почленно интегрируя ряды (7.8) по отрезку $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ (это возможно вследствие их равномерной сходимости), получаем тождества

$$K(k)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nI_nk^{2n},\ |k|\leqslant 1,\ k\neq\pm 1,\ E(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nI_nk^{2n}}{1-2n},\ |k|\leqslant 1,$$

в которых $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$. Отсюда видно, что для доказательства теоремы осталось вывести равенства

$$I_n=\frac{\pi}{2}c_n\quad\forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{7.9}$$

Это делается так. Из определения последовательностей I_n, c_n находим

$$c_0=1, I_0=\frac{\pi}{2}, c_n=\frac{2n-1}{2n}c_{n-1}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Если теперь доказать, что для интегралов I_n справедлива та же рекуррентная формула, что и для c_n, а именно

$$I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}\quad(\forall n\ \in\ \mathbb{N}),$$

то справедливость равенств (7.9) станет очевидной. Имеем

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}\varphi\, d(-\cos\varphi) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d(\sin^{2n-1}\varphi) =$$

$$(2n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin^{2n-2}\, d\varphi = (2n-1)\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\sin^{2n-2}\, d\varphi =$$

$$(2n-1)(I_{n-1} - I_n).$$

Перенеся выражение $(2n-1)I_n$ в левую часть равенства, находим

$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1},$$

что и требовалось доказать. Теорема полностью доказана. □

Напишем несколько первых членов разложения в степенные ряды полных эллиптических интегралов:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \frac{25k^6}{256} + \frac{1225}{16384}k^8 + \frac{3969}{65536}k^{10} + \dots\right),$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} - \frac{5k^6}{256} - \frac{175}{16384}k^8 - \frac{441}{65536}k^{10} - \dots\right).$$

Доказательство теоремы 24. Поскольку

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq 1,$$

то из (7.3) и теоремы 25 выводим разложение в ряд

$$K_0(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi c_n^2}{2} - \frac{1}{2n}\right)k^{2n} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n k^{2n}. \tag{7.10}$$

Пока мы знаем, что ряд (7.10) сходится в единичном круге всюду кроме, может быть, точек $k = \pm 1$. Но если мы докажем неравенства (7.5) для коэффициентов

$$b_n = \frac{1 - \pi n c_n^2}{2n} \tag{7.11}$$

этого ряда, то окажется, что он сходится абсолютно (и, естественно, равномерно) во всём единичном круге. Из (6.35) находим

$$b_n < \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{4n}\right)}{2n} = \frac{1}{8n^2}, \tag{7.12}$$

а из (6.36) при $n \geqslant 2$ следует оценка

$$b_n > \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{3}{80n^2}\right)}{2n} = \frac{1}{8n^2} - \frac{3}{160n^3}.$$

Двусторонняя оценка коэффициентов ряда (7.10) получена. Убывание и вогнутость функций $K_0(k)$ и $K_0(\sqrt{k})$ на отрезке $0 \leqslant k \leqslant 1$ следует из (7.10) и положительности коэффициентов b_n.

Осталось доказать равенства (7.6). Первое из них сразу же следует из (7.10). Равенство $K_0(1) = \ln 4$ доказывается с помощью цепи преобразований интеграла (7.1).

В алгебраическом интеграле (7.1) сделаем замену переменной $y = \sqrt{1 - k^2 x^2}$ и положим $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $b = 1/k'$. Получим

$$K(k) = \int\limits_{k'}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - k'^2}}.$$

В последнем интеграле сделаем замену $y = 1/t$, которая даст представление

$$K(k) = \int\limits_{1}^{b} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}\sqrt{1 - (t/b)^2}} = G(b) + g(b), \tag{7.13}$$

где

$$G(b) = \int\limits_{1}^{b} \frac{dt}{t\sqrt{1 - (t/b)^2}}, \quad g(b) = \int\limits_{1}^{b} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{1 - (t/b)^2}}.$$

Вычислим интеграл $G(b)$, сделав последовательно замены переменной $t = bs$, $x = 1/s$:

$$G(b) = \int\limits_{1}^{k'} \frac{ds}{s\sqrt{1 - s^2}} = \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\Big|_1^b =$$

$$\ln(b + \sqrt{b^2 - 1}) = \ln b + \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}}\right) = \ln\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} + \ln(1 + k). \tag{7.14}$$

Из (7.13), (7.14) находим

$$K_0(k) = \ln(1 + k) + g\left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}\right),$$

и, следовательно, равенство $K_0(1) = \ln 4$ равносильно справедливости предельного соотношения

$$\lim_{b\to+\infty} g(b) = \ln 2. \tag{7.15}$$

Докажем его. Поскольку

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln 2,$$

то

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln 2. \tag{7.16}$$

Заметим, что верны неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} > 0 \ \forall t > 1, \quad 1 < \frac{1}{\sqrt{1-(t/b)^2}} < 1 + \frac{1}{b} \text{ при } 1 \leqslant t \leqslant \sqrt{b}, b \geqslant 2$$

Следовательно, выполняется двойное неравенство

$$\int_1^{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) dt < \int_1^{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{\sqrt{1-(t/b)^2}} <$$

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right) \int_1^{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) dt. \tag{7.17}$$

Из (7.16), (7.17) и теоремы об оценочном признаке существования предела следует, что

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^{\sqrt{b}} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{\sqrt{1-(t/b)^2}} = \ln 2. \tag{7.18}$$

При $t \geqslant \sqrt{b}$ имеем

$$0 < \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} = \frac{t-\sqrt{t^2-1}}{t\sqrt{t^2-1}} =$$
$$\frac{1}{(t+\sqrt{t^2-1})t\sqrt{t^2-1}} < \frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}} \leqslant \frac{1}{b\sqrt{b-1}}.$$

Следовательно, выполняется двойное неравенство

$$0 < \int\limits_{\sqrt{b}}^{b} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{1-(t/b)^2}} < \frac{1}{b\sqrt{b-1}} \int\limits_{\sqrt{b}}^{b} \frac{dt}{\sqrt{1-(t/b)^2}} <$$
$$\frac{1}{\sqrt{b-1}} \int\limits_{\sqrt{b}}^{b} \frac{d(t/b)}{\sqrt{1-(t/b)^2}} < \frac{1}{\sqrt{b-1}} \int\limits_{0}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b-1}}.$$

Отсюда находим

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{b}}^{b} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{1-(t/b)^2}} = 0. \tag{7.19}$$

Из (7.18), (7.19) получаем (7.15). Теорема полностью доказана. □

Итак, для функции $K_0(k)$ выведена двусторонняя оценка

$$\ln 4 = K_0(1) \leqslant K_0(k) \leqslant K_0(0) = \frac{\pi}{2} \tag{7.20}$$

и доказаны убывание и вогнутость этой функции на отрезке $0 \leqslant k \leqslant 1$. Наша дальнейшая цель — получение более тонкой, чем (7.20), оценки

$$\varphi_1(k) \leqslant K_0(k) \leqslant \varphi_2(k), \quad 0 \leqslant k \leqslant 1, \tag{7.21}$$

в которой будут фигурировать элементарные функции φ_1, φ_2, как и K_0 убывающие и вогнутые на отрезке $[0,\ 1]$, а также имеющие одинаковые значения на каждом из концов отрезка:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = K_0(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(1) = K_0(1) = \ln 4.$$

Нам удалось получить такую оценку со следующим зазором между верхней и нижней границами:

$$\max_{0\leqslant k\leqslant 1}(\varphi_2(k)-\varphi_1(k)) < \frac{1}{29}, \tag{7.22}$$
$$\int_0^1 (\varphi_2(k)-\varphi_1(k))\,dk = \left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\left(\frac{\pi}{4}-0.72\right) < \frac{1}{82}.$$

Теорема 26. *При любом $k \in (0,\,1)$ справедливо двойное неравенство*

$$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\left(\frac{3}{5}k^2+\frac{2}{5}k^4\right) < K_0(k) < \ln 4 + \left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\sqrt{1-k^2}. \tag{7.23}$$

Ключом к доказательству теоремы 26 станет

Лемма 1. *Дана последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Первые m её элементов отрицательны, а все последующие — положительны. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна 0. Тогда сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ отрицательна на интервале* $0<t<1$.

Доказательство. Положим $A_n = -a_n > 0$ при $1 \leqslant n \leqslant m$. Тогда

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=1}^{m} A_n t^n,$$

и требуется доказать неравенство

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n t^n < \sum_{n=1}^{m} A_n t^n, \quad 0<t<1. \tag{7.24}$$

Вычтем из обеих частей (7.24) число $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m} A_n$, а потом разделим обе части на $t-1<0$, изменив знак неравенства. Получим равносильные (7.24) неравенства

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n(t^n-1) < \sum_{n=1}^{m} A_n(t^n-1) \Leftrightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{m}\left(A_n\sum_{\nu=0}^{n-1} t^\nu\right) < \sum_{n=m+1}^{\infty}\left(a_n\sum_{\nu=0}^{n-1} t^\nu\right). \tag{7.25}$$

Запишем обе части неравенств (7.25), которое мы собираемся доказать, в виде рядов по степеням t:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(A_n\sum_{\nu=0}^{n-1}t^{\nu}\right)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\sigma_\nu t^{\nu},\quad \text{где } \sigma_\nu=\sum_{n=\nu+1}^{m}A_n,\ \text{при } 0\leqslant\nu<m,$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(a_n\sum_{\nu=0}^{n-1}t^{\nu}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}S_\nu t^{\nu},\quad \text{где } S_\nu=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n,\ \text{при } 0\leqslant\nu<m, \tag{7.26}$$

$$\sigma_\nu=0 \text{ при } \nu\geqslant m,\quad S_\nu=\sum_{n=\nu+1}^{\infty}a_n \text{ при } \nu\geqslant m.$$

Из (7.26) видно, что $\sigma_0=S_0$ и $0\leqslant\sigma_\nu<S_\nu$ при любом $\nu>0$. Отсюда сразу же следует справедливость неравенства (7.25). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 26. Обозначим $k^2=t$. Исходя из (7.4) заключаем, что неравенство (7.23) равносильно следующему:

$$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\left(\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}t^2\right)<\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}b_nt^n<\ln 4+\left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\sqrt{1-t},$$
$$0<t<1. \tag{7.27}$$

Напомним, что в теореме 24 было получено явное выражение коэффициентов b_n, выведена их двусторонняя оценка, доказаны сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ и равенство $K_0(1)=\ln 4$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{\pi}{2}-\ln 4. \tag{7.28}$$

Докажем сперва левое неравенство (7.27). Запишем его в равносильной форме

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nt^n-\left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\left(\frac{3}{5}t+\frac{2}{5}t^2\right)<0\Leftrightarrow$$
$$\left(b_1-\frac{3}{5}\left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\right)t+\left(b_2-\frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2}-\ln 4\right)\right)t^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_nt^n<0. \tag{7.29}$$

Согласно (7.5) имеем $b_n>0$,

$$b_1 - \frac{3}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right) = \frac{4-\pi}{8} - \frac{3}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right) < -0.003,$$
$$b_2 - \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right) = \frac{1}{32} - \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right) < -0.04.$$

Следовательно, первые два коэффициента ряда по степеням t в (7.29) отрицательны, а все последующие — положительны. Из (7.28) видно, что сумма его коэффициентов равна 0. Поэтому по лемме неравенство (7.29), а вместе с ним и левое неравенство (7.27) верны.

Теперь докажем правое неравенство (7.27). Для этого, используя формулу (7.7), разложим в степенной ряд функцию из правой части (7.27):

$$\ln 4 + \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\sqrt{1-t} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2n-1}t^n.$$

Отсюда видно, что правое неравенство (7.27) равносильно следующему

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n < 0 \quad \forall t \in (0,\, 1), \tag{7.30}$$

где

$$a_n = \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\frac{c_n}{2n-1} - b_n. \tag{7.31}$$

Из (7.31), (7.28) и равенства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n/(2n-1) = 1$, вытекающего из разложения (7.7) в степенной ряд функции $(1-z)^{1/2}$, следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0. \tag{7.32}$$

Из (7.31), (7.11) и (6.19) непосредственными вычислениями выводим неравенства

$$a_n < 0 \text{ при } 1 \leqslant n \leqslant 4, \quad a_5 > 0. \tag{7.33}$$

Наконец, докажем, что

$$a_n > 0 \text{ при любом } n \geqslant 6. \tag{7.34}$$

В свете равенства (7.31) это означает, что

$$b_n < \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\frac{c_n}{2n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.35}$$

воспользовавшись неравенством (7.12) и оценкой снизу

$$c_n > \left(1 - \frac{1}{8n}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

содержащейся в теореме 23, заключаем, что мы вправе заменить (7.35) более сильным неравенством

$$\frac{1}{8n^2} < \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\left(1 - \frac{1}{8n}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi n}(2n-1)} \quad \forall n \geqslant 6. \tag{7.36}$$

и доказать именно его.

Поскольку $\left(1 - \frac{1}{8n}\right) / \left(1 - \frac{1}{2n}\right) > 1, \pi/2 - \ln 4 > 0.1845$, то неравенство (7.36) следует из такого

$$\frac{1}{8n^2} < \frac{0.1845}{\sqrt{\pi n}2n} \Leftrightarrow \sqrt{\pi} < 0.738\sqrt{n}.$$

Последнее неравенство выполняется при $n = 6$ и тем более при всех $n > 6$. Этим неравенство (7.35), а значит и (7.34) доказано. Из (7.32) – (7.34) видно, что все условия леммы для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ выполнены, и, следовательно, неравенство (7.30) верно. Теорема полностью доказана. □

Итак, выведена оценка (7.21), в которой

$$\varphi_1(k) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\left(\frac{3}{5}k^2 + \frac{2}{5}k^4\right),$$
$$\varphi_2(k) = \ln 4 - \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\sqrt{1-k^2}.$$

Неравенства (7.22) доказываются несложными вычислениями на основе явных выражений функций φ_1, φ_2.

Получим двусторонние оценки полного эллиптического интеграла второго рода E, выразив его через K и воспользовавшись доказанными выше двусторонними оценками функции K.

ТЕОРЕМА 27. *На отрезке* $0 \leqslant k \leqslant 1$ *справедливы тождества*

$$E(k) = \frac{\pi}{2} - k \int\limits_0^k \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\, dt, \tag{7.37}$$

$$E(k) = k + (1-k)\frac{\pi}{2} + k \int\limits_k^1 \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\, dt. \tag{7.38}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 25 функция $f(k) = \left(\frac{\pi}{2} - E(k)\right)/k$ допускает следующее разложение в степенной ряд:

$$f(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2n-1} k^{2n-1}, \quad |k| \leqslant 1. \tag{7.39}$$

Тождество же (7.37) равносильно такому:

$$f(k) = \int\limits_0^k \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\, dt, \quad 0 \leqslant k \leqslant 0. \tag{7.40}$$

Ввиду абсолютной сходимости несобственного интеграла $\int\limits_0^1 t^{-2}\left(K(t) - \frac{\pi}{2}\right) dt$ и очевидного равенства $f(0) = 0$ тождество (7.40) в свою очередь равносильно следующему:

$$f'(k) = k^{-2}\left(K(t) - \pi/2\right), \quad 0 < k < 1. \tag{7.41}$$

Продифференцировав почленно ряд (7.39) и затем умножив его на k^2, находим

$$k^2 f'(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k^{2n}, \quad 0 < k < 1.$$

Последний ряд по теореме 25 сходится к $K(k) - \pi/2$. Тождество (7.41), а вместе с ним и (7.37) доказаны.

Из (7.37) находим

$$1 = E(1) = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\,dt,$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} - k\left(\int_0^1 \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\,dt - \int_k^1 \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - k\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + k\int_k^1 \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\,dt = k + (1-k)\frac{\pi}{2} + k\int_k^1 \frac{K(t) - \pi/2}{t^2}\,dt.$$

Тождество (7.38) доказано и доказательство теоремы завершено. □

В задаче аппроксимации $E(k)$ нам потребуется функция

$$E_0(k) = -\frac{k}{2}\int_k^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = \frac{k}{2}\int_k^1 \ln(1-t^2)\,d\left(\frac{1}{t} - 1\right), \quad 0 \leqslant k \leqslant 1.$$

Она является элементарной. Несложные вычисления дают равенство

$$E_0(k) = (1-k)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right) + k\ln\left(\frac{2}{1+k}\right), \quad 0 \leqslant k < 1.$$

Очевидно, что функция E_0 непрерывна на $[0,1]$, положительна на $(0,1)$, $E_0(0) = E_0(1) = 0$.

Теорема 28. *При любом $k \in [0,1]$ справедливо двойное неравенство*

$$k + (1-k)\frac{\pi}{2} + E_0(k) - \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)k(1-k) \leqslant E(k) \leqslant k + (1-k)\frac{\pi}{2} + E_0(k),$$

которое обращается в равенство только в точках $k = 0$ и $k = 1$.

Доказательство. Согласно (7.2), (7.3) и (7.23) полный эллиптический интеграл K допускает следующую двустороннюю оценку

$$\frac{\pi}{2} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)t^2 < K(t) < \frac{\pi}{2} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right), \quad 0 < t < 1.$$

Следовательно,

(7.42)
$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)t^2 < K(t) - \frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right), \quad 0 < t < 1.$$

Из (7.38) и (7.42) находим

$$E(k) < k + (1-k)\frac{\pi}{2} - \frac{k}{2}\int\limits_k^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = k + (1-k)\frac{\pi}{2} + E_0(k),$$

$$E(k) > k + (1-k)\frac{\pi}{2} - \frac{k}{2}\int\limits_k^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt - k\left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right)\int\limits_k^1 dt =$$

$$= k + (1-k)\frac{\pi}{2} + E_0(k) - k(1-k)\left(\frac{\pi}{2} - \ln 4\right).$$

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М: Наука, 1974.

[2] Шварц Л. Анализ, т.1, М: Мир, 1972.

[3] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967.

[4] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М: Бином. Лаборатория знаний, 2003.

[5] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М: Наука, 1990.

[6] Титчмарш К. Е. Теория функций. М: Наука, 1980.

[7] Титчмарш К. Е. Теория дзета-функции Римана. ИЛ: Наука, 1953.

[8] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М: Физматлит, 1994.

[9] Мачис Ю. Ю. О формуле Стирлинга // Liet. Matem. Rink., 2007, v47, spec. nr, p. 526–530.

[10] Robbins H. A remark on Stirling's formula // The American mathematical monthly, 1955, v62, No1(Jan), p. 26–29.

[11] Ляв А. Математическая теория упругости. М: ОНТИ НКТП СССР, 1935.

[12] Sachkov Yu. L. Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane. ESAM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 17 (2011), 293-321.

Оглавление

ISBN 978-5-901795-35-4

д.ф.-м.н. Антон Юрьевич Попов

Двусторонние оценки сумм значений функции в целых точках и их приложения

Публикуется по решению учёного совета УГП имени А.К. Айламазяна

Подписано к публикации 31 октября 2016 г. Объём 2,53 уч.-изд.л.

Ответственный за выпуск д.ф.-м.н. С. В. Знаменский Цена свободная