Задачи по байесовскому подходу к классификации

Денисов Д.М.

Исходные данные:

$$p(x|y=-1) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \sim C(0,1),$$
$$p(x|y=+1) = \frac{1}{3} I_{[a,b]} \sim U(0,3),$$
$$\lambda_- = 2,\ \lambda_+ = 1,$$
$$p(y=-1) = 0.4,\ p(y=+1) = 0.6.$$

1 Оптимальный байесовский классификатор

Имеем:

$$\begin{aligned} a^*(x) &= \underset{y}{\operatorname{argmax}}\ \lambda_y P(y) p(x|y) \\ &= \underset{y}{\operatorname{argmax}} \left\{ \lambda_- P(y=-1) p(x|y=-1), \lambda_+ P(y=+1) p(x|y=+1) \right\} \\ &= \underset{y}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{0.8}{\pi(1+x^2)}, 0.2 I_{[a,b]} \right\} \\ &= \underset{y}{\operatorname{argmax}} \left\{ f(x), g(x) \right\}. \end{aligned}$$

Графики распределений $f(x)$ и $g(x)$ представлены на рис. 1.
Из рис. 1 видно, что

$$g(x) \geq f(x) \iff x \in [x_0, 3].$$

Таким образом, оптимальный классификатор будет иметь вид

$$a^*(x) = \begin{cases} -1,\ x \in (-\infty, x_0) \cup (3, +\infty) \\ +1,\ x \in [x_0, 3] \end{cases}.$$

Координату x_0 найдём следующим образом:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.2 \implies \frac{0.8}{\pi(1+{x_0}^2)} = 0.2 \implies$$
$$\implies \pi(1+{x_0}^2) = 4 \implies x_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}.$$

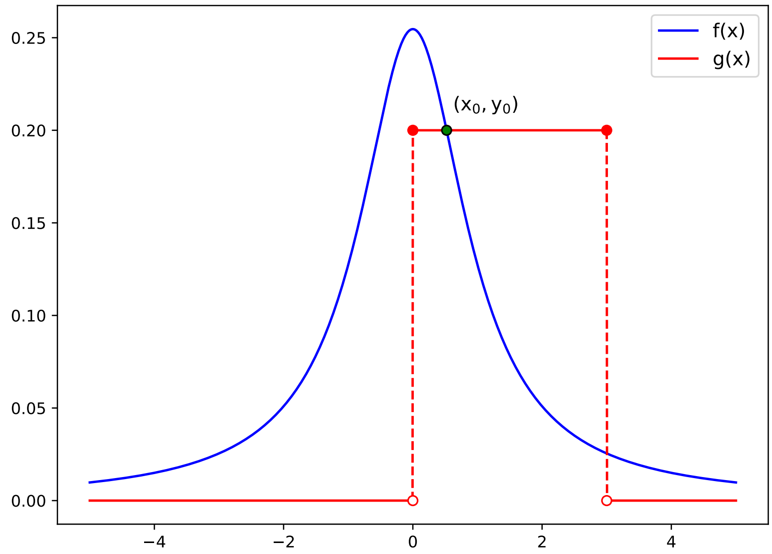

Рис. 1: Графики распределений

2 Оптимальный средний риск

Имеем:

$$
\begin{aligned}
R^* &= \iint L(a^*(x), y) p(x, y)\, dx\, dy \\
&= \iint \lambda_y [a^*(x) \neq y] p(x|y) P(y)\, dx\, dy \\
&= \iint \lambda_y (1 - [a^*(x) = y]) p(x|y) P(y)\, dx\, dy \\
&= \int \min_y \lambda_y p(x|y) P(y)\, dx\, dy \\
&= \int \min_y \{\lambda_- p(x|y=-1) P(y=-1), \lambda_+ p(x|y=+1) P(y=+1)\}\, dx\, dy \\
&= \int \min_y \{f(x), g(x)\}\, dx\, dy.
\end{aligned}
$$

Аналогично пункту 1, получаем:

$$
\begin{aligned}
R^* &= \int_{-\infty}^{x_0} g(x)\, dx + \int_{x_0}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{+\infty} g(x)\, dx \\
&= \int_0^{x_0} 0.2\, dx + \int_{x_0}^{3} \frac{0.8}{\pi(1 + x^2)}\, dx \\
&= 0.2 x_0 + \frac{0.8}{\pi} (\arctan 3 - \arctan x_0) \approx 0.299958 \approx 0.3.
\end{aligned}
$$

3 Наивный байесовский классификатор

Имеем:

$$a^*(x_1, x_2) = \underset{y}{\operatorname{argmax}}\ P(y)p(x_1, x_2|y),$$

$$p(x_1, x_2|y) = p(x_1|y)p(x_2|y).$$

По исходным данным нетрудно определить априорные вероятности классов:

$$P(y = -1) = \frac{n_-}{n_+ + n_-} = 0.4,$$

$$P(y = +1) = \frac{n_+}{n_+ + n_-} = 0.6.$$

Предположим, что исходные данные соответствуют нормальному распределению, то есть

$$p(x_1|y = -1) \sim N(\mu_{11}, \sigma_{11}^2),\ p(x_2|y = -1) \sim N(\mu_{21}, \sigma_{21}^2),$$

$$p(x_1|y = +1) \sim N(\mu_{12}, \sigma_{12}^2),\ p(x_2|y = +1) \sim N(\mu_{22}, \sigma_{22}^2).$$

Определим параметры распределений по следующим формулам:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}.$$

Получим следующие значения:

$$\mu_{11} \approx -0.101,\ \sigma_{11} \approx 1.17,$$

$$\mu_{21} \approx 0.792,\ \sigma_{21} \approx 2.014,$$

$$\mu_{12} \approx 1.018,\ \sigma_{12} \approx 1.011,$$

$$\mu_{22} \approx 0.497,\ \sigma_{22} \approx 1.918.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
a^*(x_1, x_2) &= \underset{y}{\operatorname{argmax}}\ P(y)p(x_1, x_2|y) \\
&= \underset{y}{\operatorname{argmax}} \{P(y = -1)p(x_1, x_2|y = -1), P(y = +1)p(x_1, x_2|y = +1)\} \\
&= \underset{y}{\operatorname{argmax}} \begin{Bmatrix} P(y = -1)p(x_1|y = -1)p(x_2|y = -1), \\ P(y = +1)p(x_1|y = +1)p(x_2|y = +1) \end{Bmatrix} \\
&= \underset{y}{\operatorname{argmax}} \{f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$f(x) = \frac{0.4}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{21}} e^{-\frac{1}{2}\left[(\frac{x_1-\mu_{11}}{\sigma_{11}})^2 + (\frac{x_2-\mu_{21}}{\sigma_{21}})^2\right]},$$

$$g(x) = \frac{0.6}{2\pi\sigma_{12}\sigma_{22}} e^{-\frac{1}{2}\left[(\frac{x_1-\mu_{12}}{\sigma_{12}})^2 + (\frac{x_2-\mu_{22}}{\sigma_{22}})^2\right]}.$$

Таким образом, оптимальный наивный классификатор будет иметь вид

$$a^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -1,\ f(x_1, x_2) \geq g(x_1, x_2) \\ +1,\ f(x_1, x_2) < g(x_1, x_2) \end{cases}.$$