

IMN 359 - Outils mathématiques du traitement d'images

Contenu du cours donné par le Pr. Maxime Descoteaux

I. Nombres complexes.

I.1. Définition

Problème posé aux algébristes du 16e siècle: Résoudre des équations du 2^e et 3^e degré:

Équations du 2^e degré:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Discriminant } D: D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1,2}$ racines réelles et distinctes si $D > 0$

$x_1 = x_2$ réelles si $D = 0$

$x_{1,2}$ racines complexes conjuguées si $D < 0$

La racine carrée d'un nombre réel a : $\sqrt{a^2} = \pm a$

Exemple: $\sqrt{2^2} = \pm 2$

Si le nombre est négatif: $\sqrt{-2^2} = \sqrt{i^2 2^2} = \pm 2i$

soit :

$$-1 = i^2$$

Exemples: $-2 \times -2 = (-2)^2 = 2^2 = 4$

$$-2i \times -2i = (-2i)^2 = 2^2 i^2 = -4$$

Confusions:

- Dans certains ouvrages, j représente la valeur complexe au lieu de i , comme en électricité, où la lettre i désigne l'intensité du courant.
- Les lettres i et j pourraient être utilisées comme les vecteurs unitaires d'un repère en 2D, dans ce cas là, choisir u et v comme vecteurs unitaires (ou e_1 et e_2 etc...).
- Dans certains logiciels, la lettre i est réservée à la valeur unitaire complexe (Matlab, ...), la distinguer de la variable utilisée dans les boucles.

Exemple 1:

Trouver les racines de $x^2 - 3x - 4 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

$$D > 0 \implies \text{Les racines sont réelles: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\implies x_1 = 4 \text{ et } x_2 = -1$$

Exemple 2:

Trouver les racines de $x^2 - 3x + 3 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$.

$$D < 0 \implies \text{Les racines sont imaginaires conjuguées: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \implies$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Équations du 3^e degré:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \text{ ou } x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \quad R = \frac{9a_1a_2 - 2a_3 - 2a_1^3}{5 \cdot 4}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$x_1 = S + T - \frac{a_1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{S + T}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S + T}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

Exemple 1:

$$4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0;$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \text{ ou } x^3 + 0.75x^2 + 0.5x + 0.25a_3 = 0$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} = \frac{3 \times 0.5 - 0.75^2}{9} = 0.104$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} = \frac{9 \times 0.75 \times 0.5 - 27 \times 0.25 - 2 \times 0.75^3}{54} = -0.078$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^2 + R^2}} = \sqrt[3]{-0.078 + \sqrt{0.104^2 + (-0.078)^2}} = 0.190$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^2 + R^2}} = \sqrt[3]{-0.078 - \sqrt{0.104^2 + (-0.078)^2}} = -0.546$$

$$x_1 = S + T - \frac{a_1}{3} = 0.19 - 0.546 - \frac{0.75}{3} = -0.606$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) = -\frac{0.19-0.546}{2} - \frac{0.75}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19+0.546) = -0.072 + 0.637i$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) = -\frac{0.19-0.546}{2} - \frac{0.75}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19+0.546) = -0.072 - 0.637i$$

Nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels ou $z = (a, b)$

a est la partie réelle de z : $a = Re(z)$. b est la partie imaginaire de z : $b = Im(z)$.

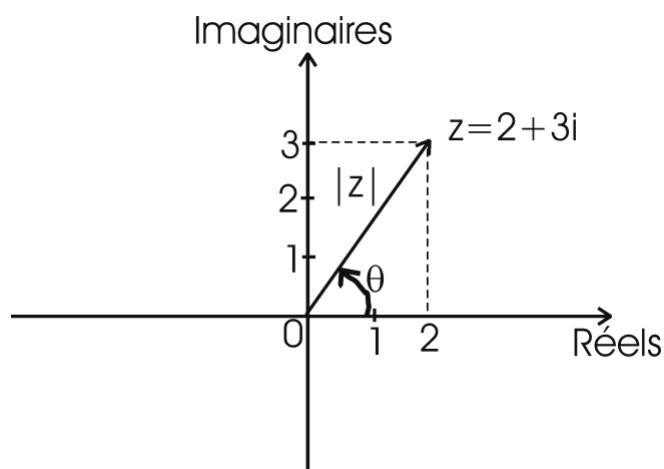


Figure 1. Représentation graphique d'un nombre complexe. La partie réelle est portée par l'axe des abscisses, et la partie imaginaire est portée par l'axe des ordonnées.

I.2. Opérations sur les nombres complexes (représentation algébrique ou cartésienne)

Addition:

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2;$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Exemple: $z_1 = 3 + 2i; z_2 = 6 + 5i; z_1 + z_2 = 9 + 7i$

$$z_1 = -3 + 2i; z_2 = 6 - 5i; z_1 + z_2 = 3 - 3i$$

Multiplication:

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2;$$

$$z_1 \times z_2 = a_1 \times (a_2 + ib_2) + ib_1 \times (a_2 + ib_2)$$

$$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$$

$$= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

Exemple 1: $z_1 = 2 + 3i; z_2 = 4 + 5i;$

$$z_1 \times z_2 = (2 \times 4 - 3 \times 5, 2 \times 5 + 4 \times 3) = (-7, 22) = -7 + 22i$$

$$z_1 = 2 - 3i; z_2 = 4 + 5i;$$

$$z_1 \times z_2 = (2 \times 4 - (-3) \times 5, 2 \times 5 + 4 \times (-3)) = (23, -2) = 23 - 2i$$

Conjugué:

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{est le conjugué de} \quad z = a + i$$

Module:

Le module (ou la valeur absolue ou la longueur du vecteur \vec{z}) de $z = a + ib$ s'écrit comme $|z|$:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sous forme vectorielle de $z = (a, b)$: $z^2 = a^2 + b^2$ (théorème de Pythagore).

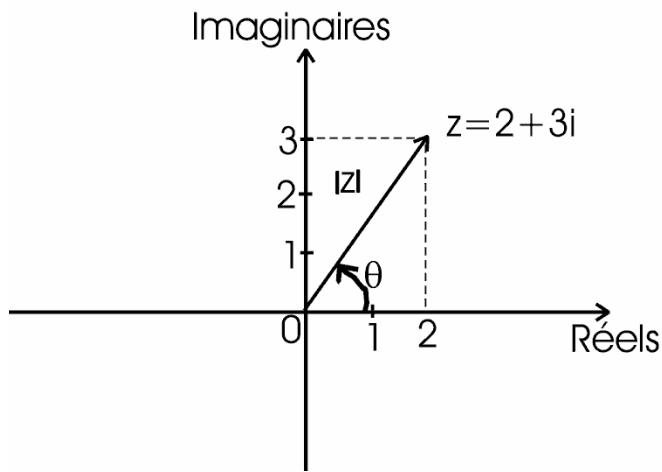


Figure 2. Module d'un nombre complexe

Division:

$$z = a + ib$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

ainsi $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ avec $z \neq 0$

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Exemple:

Résoudre le système d'équation (par substitution, addition, déterminant etc...):

$$(3 + 2i)x_1 + (1 + 3i)x_2 = 3$$

$$2x_1 + (2 + i)x_2 = 5$$

Le déterminant est donné par

$$D = \begin{vmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{vmatrix} = (3+2i)(2+i) - 2(1+3i) = 6-2+i(3+4)-2-6i = 2+i$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+3i \\ 5 & 2+i \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{3(2+i) - 5(1+3i)}{2+i} = \frac{6+3i - 5-15i}{2+i} = \frac{1-12i}{2+i} = \frac{(1-12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-10-25i}{5}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+2i & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{5(3+2i) - 2 \times 3}{2+i} = \frac{15+10i-6}{2+i} = \frac{9+10i}{2+i} = \frac{(9+10i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{28+11i}{5}$$

Matriciellement: $\begin{vmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

de la forme $Ax = B$ d'où $x = A\backslash B$ en Matlab.

Interprétation géométrique

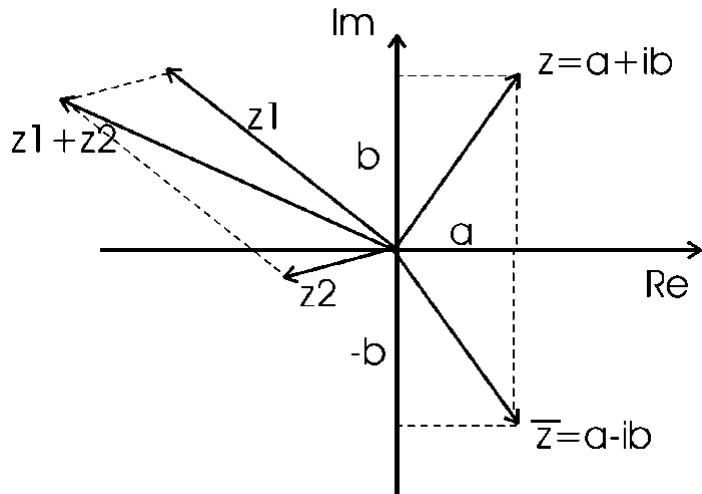


Figure 3. Représentation géométrique des vecteurs.

I.3. Forme polaire d'un nombre complexe (représentation trigonométrique)

$$z = a + ib \text{ et } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

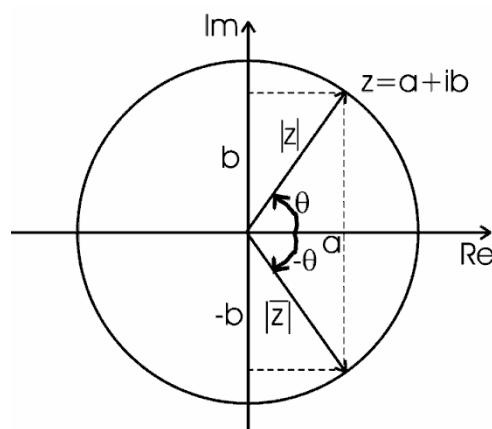


Figure 4. Représentation polaire d'un nombre complexe. θ est l'angle formé par z et l'axe des réels.

Si on appelle $r = |z|$, alors $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta) \Rightarrow$

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

L'angle θ est appelé l'argument du nombre complexe z : $\theta = \arg(z)$.

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$\arg(z) = \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \Rightarrow \bar{z} = r(\cos(\theta) - i \sin(\theta))$$

$$\Rightarrow \bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \Rightarrow \arg(z) = -\arg(\bar{z})$$

$$\text{Si } z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \text{ et } z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$$

alors:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

et

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

I.4. La notation d'Euler (représentation exponentielle)

Le développement en série de Taylor (MacLaurin à $x - a = x$) de $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{ avec } i^2 = -1; \quad i^4 = 1; \quad i^6 = -1$$

$$\cos(x) = 1 + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^6 x^6}{6!} + \dots$$

$$i \sin(x) = i x + i \frac{i^2 x^3}{3!} + i \frac{i^4 x^5}{5!} + i \frac{i^6 x^7}{7!} + \dots = i x + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \frac{i^7 x^7}{7!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + i x + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \frac{i^6 x^6}{6!} + \frac{i^7 x^7}{7!} + \dots = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

Conjugué:

$$\bar{z} = r(\cos(\theta) - i \sin(\theta)) = re^{-i\theta}$$

Expressions du Cosinus et du sinus:

$$z = \cos(\theta) + i \sin(\theta); \quad \bar{z} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

$$z + \bar{z} = 2 \cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

$$\text{et } z - \bar{z} = 2i \sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Multiplication:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Division:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Les dérivées:

$$\frac{d(e^{i\theta})}{d\theta} = ie^{i\theta} = -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$$

Les intégrales:

$$\int e^{i\theta} d\theta = \frac{e^{i\theta}}{i} + cte = -ie^{i\theta} + cte = \sin(\theta) - i \cos(\theta) + cte$$

I.5. Racines n^{ième} d'un nombre complexe. (Optionnel – pas dans les TPs ni examens)

$$z = r e^{i\theta}$$

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Formule de De Moivre:

$$z^n = (r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Si $m = 1/n$, avec $n, m \in \mathbb{N}^+$ $\Rightarrow w = z^{1/m} = (r e^{i(\theta+2k\pi)})^{1/m} = r^{1/m} e^{i(\theta+2k\pi)/m}$ avec $k=0,1,2,3,\dots,m-1$.

Exemple:

$z = \sqrt{3} + 3i$. Trouver les racines 6^{ième} de z.

Réécrire z avec la notation d'Euler: $z = r e^{i\theta}$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = 3.4641$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{3}{\sqrt{3}} = 60^\circ = \frac{2\pi}{6}$$

La solution sous la forme $w = z^{1/m} = r^{1/m} e^{i(\theta+2k\pi)/m}$ avec $m = 6$ est:

$$w = z^{1/6} = r^{1/6} e^{i(\theta+2k\pi)/6} = 3.4641^{1/6} e^{i(\frac{2\pi}{6} + 2k\pi)/6}$$

$$w = 1.23 e^{i(\frac{2\pi}{6} + 2k\pi)/6}$$

Les 6 arguments de w selon $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 avec $\theta = (\frac{2\pi}{6} + 2k\pi)/6 = \frac{2\pi + 12k\pi}{36}$ sont:

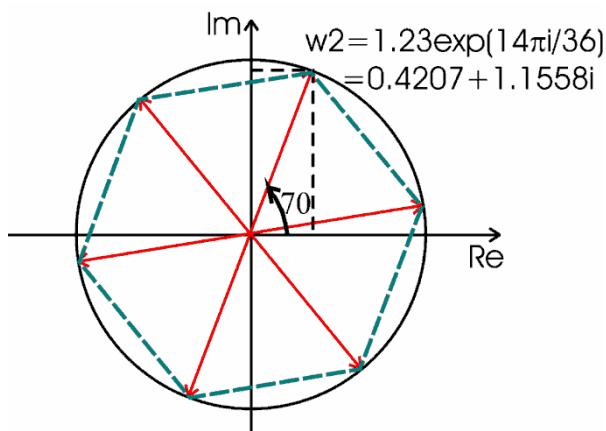
$$\theta_1 = \frac{2\pi}{36}; \quad \theta_2 = \frac{14\pi}{36}; \quad \theta_3 = \frac{26\pi}{36}; \quad \theta_4 = \frac{38\pi}{36}; \quad \theta_5 = \frac{50\pi}{36}; \quad \theta_6 = \frac{62\pi}{36}$$

Cela correspond aux angles : $10^\circ \quad 70^\circ \quad 130^\circ \quad 190^\circ \quad 250^\circ \quad 310^\circ$

Si l'on continue avec d'autres valeurs de k, soient $k = 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$

on retrouve cycliquement (période de 2π) les mêmes valeurs de θ .

Sur une représentation graphique:



I.6. C^n et produit hermitien

L'espace vectoriel C^n sur C est défini par:

$$C^n = \{\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid \forall i = 1, \dots, n, z_i \in C\}$$

avec l'opération d'addition:

$$\vec{z}^1 + \vec{z}^2 = (z_1^1, \dots, z_n^1) + (z_1^2, \dots, z_n^2) = z_1^1 + z_1^2, \dots, z_n^1 + z_n^2$$

et l'opération de multiplication:

$$\lambda \vec{z} = \lambda(z_1, \dots, z_n) = \lambda z_1, \dots, \lambda z_n$$

Le produit hermitien (ou hermitique ou scalaire) sur C^n est défini par:

$$\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = \sum_{i=1}^n z_i^1 \bar{z}_i^2 \in C$$

Le produit hermitien possède les propriétés suivantes:

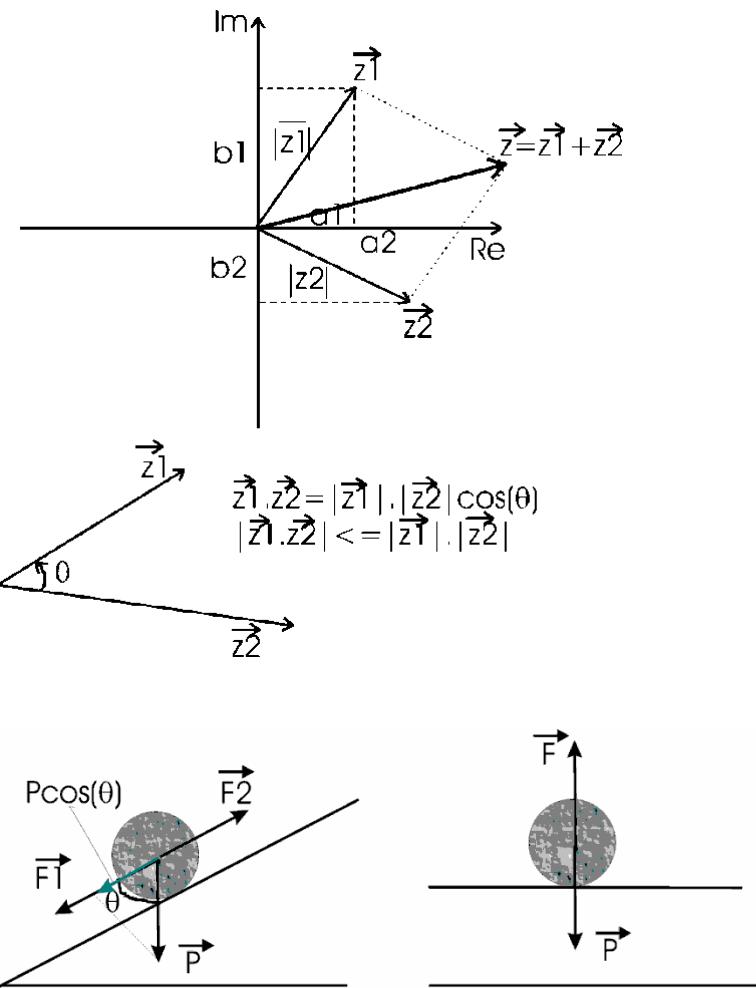
1. $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0 \iff \vec{z} = 0$
2. $\langle \lambda \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = \lambda \langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle$ et $\langle \vec{z}^1, \lambda \vec{z}^2 \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle$
3. $\langle \vec{z}, \vec{z}^1 + \vec{z}^2 \rangle = \langle \vec{z}, \vec{z}^1 \rangle + \langle \vec{z}, \vec{z}^2 \rangle$
4. $\langle \vec{z}^2, \vec{z}^1 \rangle = \overline{\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle}$

Orthogonalité: \vec{z}^1 et \vec{z}^2 , deux éléments de C^n , sont orthogonaux si:

$$\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = 0$$

La norme (ou longueur) d'un élément de C^n est définie par:

$$\begin{aligned} \|z\| &= \sqrt{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle} \quad \text{avec } \|z\| \geq 0 \text{ et } \|z\| = 0 \iff \vec{z} = 0; \|\lambda \vec{z}\| = |\lambda| \|\vec{z}\| \\ \|\vec{z}^1, \vec{z}^2\| &\leq \|\vec{z}^1\| \|\vec{z}^2\| \quad \text{i n\'egalit\'e Cauchy-Schwarz} \\ \|\vec{z}^1 + \vec{z}^2\| &\leq \|\vec{z}^1\| + \|\vec{z}^2\| \\ \|\vec{z}^1 + \vec{z}^2\|^2 &= \|\vec{z}^1\|^2 + \|\vec{z}^2\|^2 \quad \langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = 0 \quad \text{Th\'eor\`e Pythagore} \end{aligned}$$



Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{F} et \vec{P} s'écrit: $\vec{F} \cdot \vec{P} = |\vec{F}| |\vec{P}| \cos(\theta)$

Si $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3$ et $\vec{P} = P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 + P_3 \vec{e}_3$: \vec{F} et \vec{P} orthogonaux si $F_1 P_1 + F_2 P_2 + F_3 P_3 = 0$.

Exercices:

Trouver les racines suivantes et les représenter graphiquement.

- 1- Trouver la racine 3^{ième} de $z = \exp(-i\pi/6)$
- 2- Trouver la racine 4^{ième} de $z = 2.5 - 2.5\sqrt{3}i$

II. Série de Fourier.



Jean Baptiste Joseph Fourier, France, 1768-1830.

Fourier travaillait sur la diffusion de la chaleur dans les matériaux et a proposé de représenter une fonction, continue ou discontinue, par une série de cosinus et de sinus.

II.1. Développement orthogonal

Soit la fonction f définie sur $[0, T]$ et à valeurs complexes:

$$f(t) \in C \quad \forall t \in [0, T]$$

$f(t)$ est de carré intégrable si:

$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$. On dit alors que $f(t)$ est dans l'ensemble $L^2(0, T)$ des fonctions carrés intégrables définies sur l'intervalle $[0, T]$.

Le produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt \quad (\text{Par analogie à } z : \langle \bar{z}^1, \bar{z}^2 \rangle = \sum_{i=1}^n z_i^1 \bar{z}_i^2)$$

La norme de f (l'intervalle de l'intégration peut être de $-t_1$ à t_2):

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t) \bar{f}(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(Rappel des $z : z=a+ib \rightarrow$ module de $z : |z|^2=(a^2+b^2)$). Ce même résultat peut s'obtenir avec le produit: $|z|^2 = z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = (a^2 + b^2)$.

Rappel des vecteurs : la norme d'un vecteur \mathbf{v} : $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$.

Deux fonctions f et g sont orthogonales ssi:

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Deux fonctions f et g sont orthonormées ssi:

$$\langle f, g \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \|f\| = 1 \quad \text{et} \quad \|g\| = 1$$

La valeur absolue et la norme: la valeur absolue d'un nombre est la valeur de ce nombre sans son signe. Exemple: $|-5| = |5| = 5$.

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est $|z| = (\bar{z}z)^{1/2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

La norme d'un vecteur est la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes dans un repère orthonormé. Ceci concerne aussi les nombres complexes qui ont deux composantes. Ex.: $z = a + ib$ et $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \Rightarrow v_{x,y}^2 = 3^2 + 5^2 \text{ et } v^2 = v_{x,y}^2 + 2^2 \Rightarrow v = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2}$$

La norme est un scalaire souvent appelé module, longueur, distance,....

Par contre la norme d'une fonction complexe ne se résume pas à sa valeur absolue. Ex.:

$f(t) = 6t + 3i$ définie sur $[0,1]$. Sa norme est:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t) \bar{f}(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (6t + 3i)(6t - 3i) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (36t^2 + 9) dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\left[\frac{36t^3}{3} + 9t \right]_0^1 \right)^{1/2} = \sqrt{21} \end{aligned}$$

et sa valeur absolue, tout comme un nombre complexe, est: $\|f\| = \sqrt{36^2 + 9}$

Exemple 1:

Calculer le produit hermitien de $f(t) = 3t$ et $g(t) = \sin(2\pi t)$ sur $[0,1]$.

Le produit hermitien s'écrit: $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt$, soit $\langle f, g \rangle = \int_0^1 3t \cdot \sin(2\pi t) dt$

Intégration par partie: $\int u dv = [uv] - \int v du$

$u = 3t$; $du = 3dt$; $dv = \sin(2\pi t)dt$, soit $v = -\cos(2\pi t)/2\pi$.

$$\int_0^1 3t \cdot \sin(2\pi t) dt = \left[-3t \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{3}{2\pi} \cos(2\pi t) dt = -\frac{3}{2\pi}$$

Exemple 2:

Calculer le produit hermitien de $f(t) = t^2$ et $g(t) = 9+8it$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt = \int_0^1 t^2 (9 - 8i) dt = \int_0^1 (9t^2 - 8i) dt \\ &= \left[\frac{9t^3}{3} - \frac{8i t}{4} \right]_0^1 = 3 - 2i\end{aligned}$$

Exemple 3:

Calculer la norme de $f(t) = 3t + i$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\|f\| &= \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t) \bar{f}(t) dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_0^1 (3t+i) \bar{(3t+i)} dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (9t^2+1) dt \right)^{1/2} = \left(3t^3 + t \Big|_0^1 \right)^{1/2} = 2\end{aligned}$$

Exemple 4:

Les fonctions $f(t) = t$ et $g(t) = 3t - 2$ sont-elles orthogonales sur $[0,1]$?

f et g sont orthogonales si $\langle f, g \rangle = 0$.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt = \int_0^1 t(3t-2) dt = \left[t^3 - t^2 \right]_0^1 = 0$$

Exemple 5:

Vérifier que l'ensemble $\{ e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \frac{nT}{T} t} \}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, est orthonormé dans $L^2(0,T)$.

Vérifier l'orthogonalité:

Soit deux éléments $e_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \frac{mT}{T} t}$ et $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \frac{nT}{T} t}$, avec $m \neq n$. Ils sont orthogonaux si

le produit hermitien est nul: $\langle e_m(t), e_n(t) \rangle = 0 \iff$

$$\begin{aligned}\langle e_m(t), e_n(t) \rangle &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \frac{mt}{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2\pi i \frac{nt}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i(m-n)t/T} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2\pi i(m-n)} e^{2\pi i(m-n)t/T} \right]_0^T = \left[\frac{\cos(2\pi(m-n)t/T) - i \sin(2\pi(m-n)t/T)}{2\pi i(m-n)} \right]_0^T = \\ &= \frac{\cos(2\pi(m-n)T/T) - i \sin(2\pi(m-n)T/T)}{2\pi i(m-n)} - \frac{\cos(0) - i \sin(0)}{2\pi i(m-n)} = 0 \quad \forall m, n \quad (m \neq n)\end{aligned}$$

Vérifier l'orthonormalité:

$$\|e_n\| = \left[\int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i nt/T} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2\pi i nt/T} dt \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T e^0 dt \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T} [t]_0^T \right]^{1/2} = 1$$

Exemple 6:

Vérifier l'orthogonalité sur $[0, T]$ de $\cos(2\pi nt/T)$ et $\sin(2\pi nt/T)$.

$$\langle \cos(2\pi nt/T), \cos(2\pi nt/T) \rangle = 0 \implies$$

$$\int_0^T \cos(2\pi nt/T) \cos(2\pi nt/T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}(m-n)\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}(m+n)\right) \right] dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{T}{2\pi(m-n)} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}(m-n)\right) + \frac{T}{2\pi(m+n)} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}(m+n)\right) \right]_0^T = 0$$

$$\int_0^T \sin(2\pi nt/T) \sin(2\pi nt/T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}(m-n)\right) - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}(m+n)\right) \right] dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{T}{2\pi(m-n)} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}(m-n)\right) - \frac{T}{2\pi(m+n)} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}(m+n)\right) \right]_0^T = 0, \quad m \neq n$$

$$\text{if } m = n \Rightarrow \int_0^T \cos(2\pi nt/T) \cos(2\pi nt/T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi nt}{T}\right) \right] dt$$

$$\left[\frac{1}{2} \left[t + \frac{T}{4\pi n} \sin\left(\frac{4\pi nt}{T}\right) \right] \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

$$\text{if } m = n \Rightarrow \int_0^T \sin(2\pi nt/T) \sin(2\pi nt/T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi nt}{T}\right) \right] dt$$

$$\left[\frac{1}{2} \left[t - \frac{T}{4\pi n} \sin\left(\frac{4\pi nt}{T}\right) \right] \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

On démontre (faites-le comme exercice) de la même façon que pour $m = n$ ou $m \neq n$:

$$\langle \cos(2\pi nt/T), \sin(2\pi nt/T) \rangle = \langle \sin(2\pi nt/T), \cos(2\pi nt/T) \rangle = 0$$

II.2. Les fonctions périodiques

Par définition, une fonction $f(t)$ est périodique de période T si $f(t) = f(t+T)$, ou, d'une façon générale: $f(t) = f(t+nT)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

T est la plus petite période de $f(t)$: c'est la période fondamentale.

Exemple 1:

Trouver la période de $f(t) = \cos(t/3) + \cos(t/4)$.

$$\cos(t/3) + \cos(t/4) = \cos((t+T)/3) + \cos((t+T)/4)$$

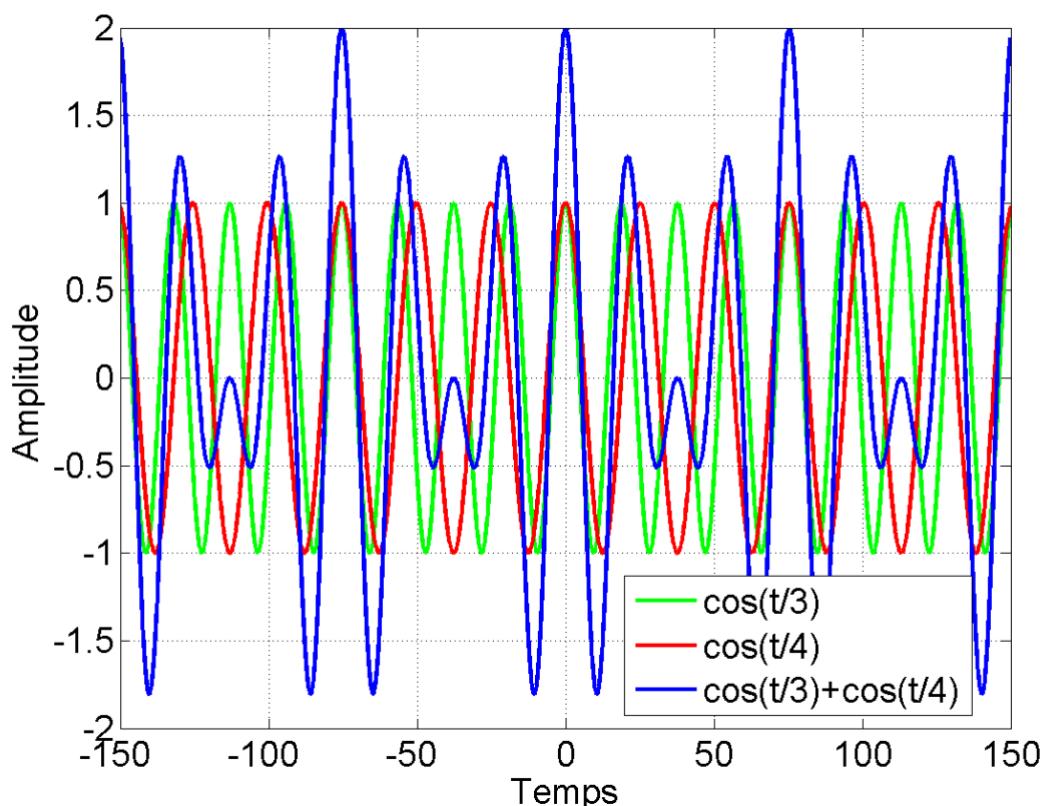
Sachant que la période de $\cos(t)$ est 2π , soit $\cos(t) = \cos(t + 2\pi m)$, alors

avec un changement de variable $x = t/3$ et $T_1 = T/3$, $\cos(x + T_1)$ a une période de $T_1 = 2\pi m$, soit $T/3 = 2\pi m \Rightarrow T = 6\pi m$.

Une autre méthode: le cosinus a une période de 2π et s'exprime comme $\cos(2\pi t/T_1)$. En identifiant les coefficients du temps t dans $\cos(t/3)$ et dans $\cos(2\pi t/T_1)$, on obtient: $2\pi/T_1 = 1/3 \Rightarrow T_1 = 6\pi$.

Idem pour $\cos(t/4 + T/4) \Rightarrow T = 8\pi n$.

La période fondamentale est la plus petite période, soit le plus petit commun multiple de 6 et 8, i.e. $m = 4$ et $n = 3 \Rightarrow T = 24\pi$.



Voir code python dans démo pour la génération de ce graphique.

Exemple 2:

Trouver la période de $f(t) = \cos^2(t)$.

$$\cos^2(t) = (1+\cos(2t))/2$$

$$\cos^2(t) = (1+\cos(2(t+T)))/2$$

$$= (1+\cos(x+T_1))/2 \text{ avec } x = 2t \text{ et } T_1 = 2T.$$

Puisque la période de $\cos(x)$ est $2\pi \Rightarrow T_1 = 2\pi m$, ou bien $2T = 2\pi m$

$\Rightarrow T = m\pi$. La période fondamentale de $f(t)$ est donc π .

Exemple 3:

Trouver la période de $f(t) = \sin(t) + \sin(t/3) + \sin(t/5)$. $2\pi/T_1=1 \Rightarrow T_1 = 2\pi$; $2\pi/T_2=1/3 \Rightarrow T_2 = 6\pi$;

$2\pi/T_3=1/5 \Rightarrow T_3 = 10\pi$. Le PPCM de T_1 , T_2 et T_3 est $30\pi \Rightarrow T = 30\pi$.

Exercice:

Trouver la période de $f(t) = \sin(\pi t) + \sin(\pi t/3) + \sin(\pi t/5)$.

II.3. Les Séries de Fourier

$$\text{Supposons que } f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (1)$$

autrement dit la somme de sinus/cosinus converge vers $f(x)$ sur $[-L, L]$. On peut alors que pour $n=1, 2, 3, \dots$:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad A = \frac{a_0}{2} \quad (2)$$

Noter que généralement on utilise la lettre T pour les périodes en temps et la lettre L (ou D ...) pour les périodes en longueur (distance).

Notons aussi que si l'identité (1) a lieu, comme les sinus et cosinus sont des fonctions périodiques, la fonction $f(x)$ de gauche, même si elle n'est définie que sur $[0, T]$ à priori peut être considérée définie sur \mathbb{R} avec la propriété dite de périodicité $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

En multipliant (1) par $\cos(n\pi x/L)$ et en intégrant entre $-L$ et L (ce qui revient à faire le produit Hermitien entre $f(x)$ et $\cos(n\pi x/L)$, $\langle f(x), \cos(mx/L) \rangle$):

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= A \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Prenons le premier terme:

$$\begin{aligned} A \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= A \left[\frac{L}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = \frac{AL}{m\pi} \left[\sin\left(\frac{m\pi L}{L}\right) - \sin\left(-\frac{m\pi L}{L}\right) \right] = \\ \frac{AL}{m\pi} [\sin(m\pi) - \sin(-m\pi)] &= 0 \end{aligned}$$

Prenons le deuxième terme:

$$\begin{aligned} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_n}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx = \\ \frac{a_n}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right] dx &= \quad \text{avec } m \neq n. \\ \frac{a_n}{2} \left[\frac{L}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \frac{L}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L &= 0 \end{aligned}$$

Si $m = n$:

$$a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \\ a_n \left[\frac{x}{2} + \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = a_n \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi L}{L}\right) - \left(\frac{-L}{2} + \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{-2n\pi L}{L}\right) \right) \right] = a_n L$$

Prenons le troisième terme:

$$b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right] dx = \\ \frac{b_n}{2} \left[-\frac{L}{(m+n)\pi} \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) - \frac{L}{(m-n)\pi} \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = \text{avec } m \neq n. \\ \frac{b_n}{2} \left[-\frac{L \cos((m+n)\pi)}{(m+n)\pi} - \frac{L \cos((m-n)\pi)}{(m-n)\pi} - \left(-\frac{L \cos((m+n)\pi)}{(m+n)\pi} - \frac{L \cos((m-n)\pi)}{(m-n)\pi} \right) \right] = 0$$

Si $m = n$:

$$b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(n+n)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(n-n)\pi x}{L}\right) \right] dx = \\ \frac{b_n}{2} \left[-\frac{L}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = \frac{b_n}{2} \left[-\frac{L}{2n\pi} \cos(2n\pi) - \left(-\frac{L}{2n\pi} \cos(2n\pi) \right) \right] = 0$$

Si $m = n = 0$:

$$b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Finalement, l'équation (3) se résume à :

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n L \Rightarrow a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Refaisons la même procédure en prenant le produit Hermitien entre $f(x)$ et $\sin(n\pi x/L)$

$(\langle f(x), \sin(m\pi x/L) \rangle)$:

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = A \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} \\ = b_m L \quad \text{av em} = n \text{ et } m \neq 0$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalement, prenons le produit Hermitien entre $f(x)$ et $1, \langle f(x), 1 \rangle$:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L A dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\}$$

Le premier terme donne :

$$\int_{-L}^L A dx = 2AL$$

Le second terme donne :

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = 0$$

Le 3^e terme donne :

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = -\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi) - (-\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi)) = 0$$

Finalement :

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2AL \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

et posons $n = 0$ dans $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, nous obtenons: $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow A = \frac{a_0}{2}$

Conclusion:

La série de Fourier de $f(x)$ s'exprime, avec L la demi-période:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Des fois on écrit la série de Fourier de $f(t)$ comme $SF(f(t))$, $SF_f(t)$ ou $S_f(t)$

Lorsqu'on utilise la période T, on préfère écrire T au lieu de T/2. De même que les bornes de l'intégrale peuvent être indiquées par t₁ et t₂ avec t₂ - t₁ = T. Habituellement, mais pas obligatoirement, t₁ = -T/2 et t₂ = T/2.

Par analogie entre la période spatiale 2L et la période temporelle T, les équations des séries de Fourier s'écrivent:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \right\} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{T/2} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \Leftrightarrow a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \Leftrightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \Leftrightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

En se servant de la forme $\omega = \frac{2\pi}{T}$, les équations se simplifient davantage en écriture:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \Leftrightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(\omega n t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \Leftrightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(\omega n t) dt \end{aligned}$$

Noter que l'on peut écrire $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et alors $\omega n = \frac{2\pi n}{T}$, ou bien en définissant ω_0 comme la

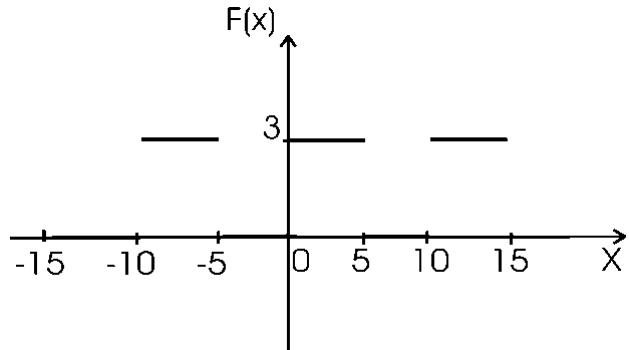
vitesse angulaire (ou pulsation) fondamentale, alors $\omega n = n\omega_0$. Il est possible aussi que n soit écrit en indice comme $\omega_n = n\omega_0$ et $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Exemple 1:

a) Trouver les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ de période 10:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 \leq x < 0 \\ 3 & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

b) Tracer $f(x)$ pour $x=-20$ à 20 avec des pas de 0.1 et pour $n=1$; $n=1$ à 3; $n=1$ à 10 et pour $n=1$ à 100.



La période vaut 10, donc de $-L$ à L vaut 10 $\Rightarrow 2L = 10$ ou $L = 5$.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx, \quad a_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 dx + \int_0^5 3 dx \right\} = \frac{1}{5} [3x]_0^5 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx + \int_0^5 3 \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx \right\} = \frac{3}{5} \frac{5}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \right]_0^5 = 0 \quad \text{avec } n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx + \int_0^5 3 \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx \right\} = \frac{3}{5} \frac{5}{n\pi} \left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \right]_0^5 = \frac{3}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$$

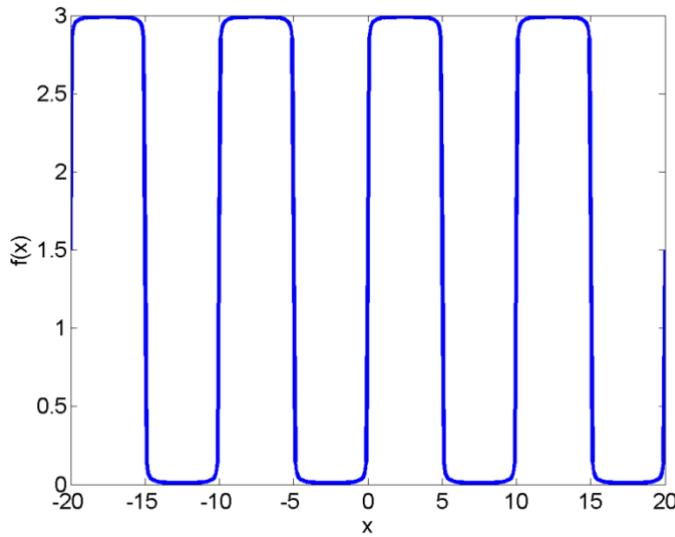
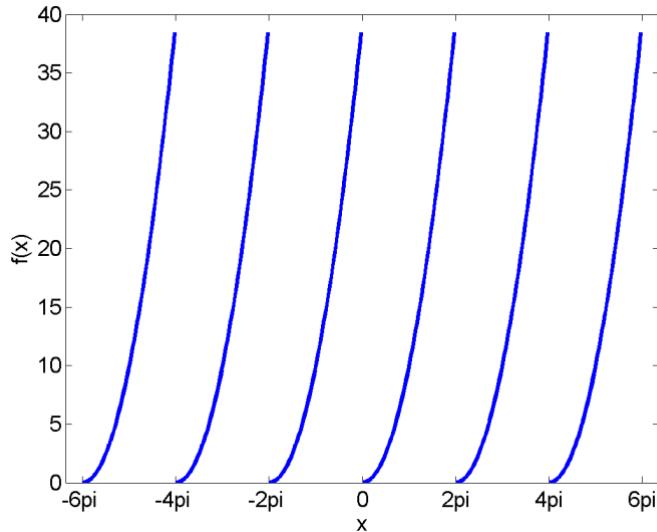


Figure. Série de Fourier de $f(x)$ tracée avec Matlab pour $x = -20:0.1:20$ et $n = 1$ à 100.

Exemple 2:

Trouver la série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ pour $0 < x < 2\pi$, si la période est 2π .



Graphique de $f(x) = x^2$ répétée à chaque 2π .

La période vaut 2π , donc de $-L$ à L vaut 2π : $2L = 2\pi$ ou $L = \pi$.

Au lieu de considérer l'intégrale de $-L$ à L , on la considère de 0 à $2L$ selon l'énoncé de $f(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \left\{ \int_0^{2L} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx \right\} \\ &= \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

avec $\int x^2 \cos(ax)dx = \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + (\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}) \sin(ax)$ ou par intégration par parties 2 fois : $u_1=x^2$ et

$du_1=2xdx$; ensuite $u_2=2x$ et $du_2=2dx$.

$$b_n = \frac{1}{L} \left\{ \int_0^{2L} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx) dx \right\}$$

$$= -\frac{4\pi}{n}$$

avec $\int x^2 \sin(ax)dx = \frac{2x}{a^2} \sin(ax) + (-\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}) \cos(ax)$ ou par intégration par parties 2 fois : $u_1=x^2$ et

$du_1=2xdx$; ensuite $u_2=2x$ et $du_2=2dx$.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right] \quad \text{avec } 0 < x < 2\pi$$

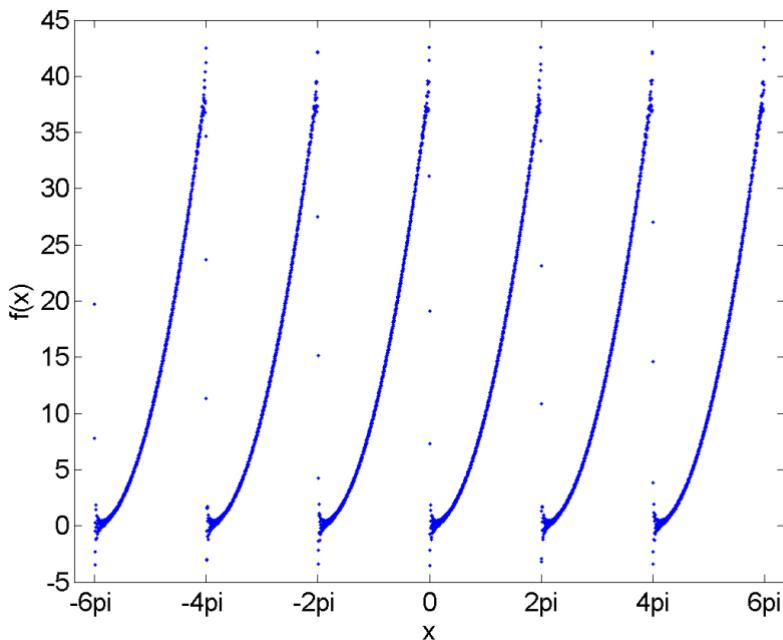


Figure. Série de Fourier de $f(x)$ tracée avec Matlab pour $x = -6\pi:0.01:6\pi-0.01$ et $n = 1$ à 100.

Exercices:

Trouver la série de Fourier de

1- $f(t) = 1$ pour $-\pi < t < 0$, $f(t) = 0$ pour $0 < t < \pi$ et $f(t+2\pi) = f(t)$.

Réponse: $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$

2- $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$ et $f(t+2\pi) = f(t)$.

Réponse: $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} s i n(n\pi)}{n}$

II.4. Les harmoniques (Optionnel – pas à l'examen)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\} \quad (1)$$

peut s'écrire sous la forme:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_0 n t - \theta_n) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n\omega_0$$

$$\text{Identifiant } c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Prenant les 2 termes entre accolades de (1), remplacer $2\pi n/T$ par $n\omega_0$, et multipliant et divisant par

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} :$$

$$a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n \cos(\omega_0 n t)}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} + \frac{b_n \sin(\omega_0 n t)}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)$$

$$\text{En appelant } \cos(\theta_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) &= c_n [\cos(\theta_n) \cos(\omega_0 n t) + \sin(\theta_n) \sin(\omega_0 n t)] \\ &= c_n [\cos(\omega_0 n t - \theta_n)] \end{aligned}$$

Ainsi:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_0 n t - \theta_n)$$

- ❖ La $n^{\text{ième}}$ composante de $f(t)$ de pulsation $\omega_n = n\omega_0$ est appelée le $n^{\text{ième}}$ harmonique de la fonction périodique. C'est le coefficient c_n .
- ❖ La 1^{er} harmonique est appelé la composante fondamentale, et elle a la même période que la fonction $f(t)$.
- ❖ $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ est la pulsation fondamentale ou fréquence angulaire fondamentale en radian/seconde (rad/sec).
- ❖ f_0 est la fréquence fondamentale en cycle/sec ou Hertz (Hz) ou sec⁻¹.
- ❖ T est la période fondamentale en seconde.
- ❖ c_n et θ_n sont les harmoniques des amplitudes et des phases.

II.5. La forme complexe de la SF.

La forme complexe de la SF: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt)\}$

$$\cos(\omega nt) = \frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\omega nt) = \frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2i}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} + b_n \frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2i} \right\}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} - ib_n \frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2} \right\}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n - ib_n) e^{i\omega nt} + (a_n + ib_n) e^{-i\omega nt} \right\}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\omega nt} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i\omega nt}$$

Sachant que $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega nt) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega nt) dt$

alors $a_{-n} = a_n$ et $b_{-n} = -b_n$. Ceci nous permet de changer n en $-n$ dans le 3e terme de $f(t)$ et en même temps parcourir n de $-\infty$ à -1 (ce qui est sans effet) et $f(t)$ devient:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\omega nt} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} (a_n - ib_n) e^{i\omega nt}$$

qui donne $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt}$ avec $c_0 = a_0/2$; $c_n = (a_n - ib_n)/2$; $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega nt) dt - i \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega nt) dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(\omega nt) - i \sin(\omega nt)] dt$$

$$\cos(\omega nt) - i \sin(\omega nt) = \frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} - i \frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2i} = e^{-i\omega nt}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega nt} dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega nt} dt \quad \text{si } f(t) \text{ réelle : } c_{-n} = c_n^*$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt \quad \text{pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

ou bien puisque $f(t)e^{-i\omega nt}$ est périodique de période T: $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega n t} dt$

$c_n = (a_n - i b_n)/2 \rightarrow$ spectre d'amplitude en fonction de ω de la fonction périodique $f(t)$:

$$|c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

\rightarrow spectre de phase en fonction de ω de la fonction périodique $f(t)$:

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

- \rightarrow On trace habituellement le spectre de phase et le spectre d'amplitude en fonction de la fréquence angulaire $n\omega$.
- \rightarrow Puisque les spectres d'amplitude et de phase sont évalués à des points discrets selon les valeurs de n (non continus), ces spectres sont appelés spectres discrets.
- \rightarrow La représentation de c_n en fonction de $n\omega$ montre la périodicité de c_n dans le domaine des fréquences, tout comme $f(t)$ (ou $f(x)$) est représentée en fonction de t (ou x) dans le domaine temporel (ou spatial).

Exemple 1:

Trouver la série de Fourier de $f(t) = A \sin(\pi t)$ pour $0 < t < 1$ et $T = 1$.

Les formules sont: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}$ et $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt$

Puisque $\omega = 2\pi/T = 2\pi$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n t}$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi nt} dt = \int_0^1 A \sin(\pi t) e^{-i2\pi nt} dt = \frac{A}{2i} \int_0^1 (e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}) e^{-i2\pi nt} dt \\
&= \frac{A}{2i} \int_0^1 (e^{-i\pi(2n-1)t} - e^{-i\pi(2n+1)t}) dt = \frac{A}{2i} \left[\frac{e^{-i\pi(2n-1)t}}{-i\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)t}}{-i\pi(2n+1)} \right]_0^1 \\
&= \frac{A}{2} \left[\frac{e^{-i\pi(2n-1)t}}{\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)t}}{\pi(2n+1)} \right]_0^1 = \frac{A}{2} \left[\frac{e^{-i\pi(2n-1)} - 1}{\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)} - 1}{\pi(2n+1)} \right]
\end{aligned}$$

Sachant que $e^{\pm i\pi(2n-1)} = -1$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{A}{2} \left[\frac{-2}{\pi(2n-1)} - \frac{-2}{\pi(2n+1)} \right] = A \left[\frac{-2n-1-(-2n+1)}{\pi(4n^2-1)} \right] = \frac{-2A}{\pi(4n^2-1)} \\
\Rightarrow f(t) &= \frac{-2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} e^{i2\pi nt}
\end{aligned}$$

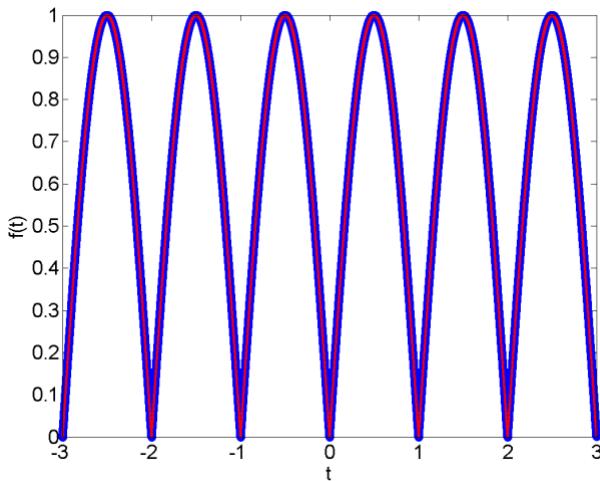


Figure. Reproduction de $f(t) = \text{Asin}(\pi t)$ avec $A = 1$ dans $[0, 1]$ (en bleu), pour chacun des intervalles indiqués. La fonction en rouge découle de la série de Fourier correspondante à $f(t)$.

Exemple 2:

Trouver la série de Fourier complexe de la fonction porte $f(t)$ de période T et définie par:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| < d/2 \\ \frac{A}{2} & \text{si } |t| = d/2 \\ 0 & \text{si } d/2 < |t| < T/2 \end{cases},$$

c.à.d $f(t) = A \times \text{rect}_{d/2}(t)$ pour $|t| \leq T/2$, est une fonction porte de largeur d et d'amplitude A .

Par définition $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}$ avec $\omega = 2\pi/T$, et $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \left[\int_{-d/2}^{-d/2} \frac{A}{2} e^{-i\omega n t} dt + \int_{-d/2}^{d/2} A e^{-i\omega n t} dt + \int_{d/2}^{d/2} \frac{A}{2} e^{-i\omega n t} dt \right] = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} A e^{-i\omega n t} dt \\
c_n &= \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n t}}{-i\omega n} \right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n t}}{-i\omega n} \right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n d/2} - e^{+i\omega n d/2}}{-i\omega n} \right] \\
c_n &= \frac{A}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{i\omega n} \right] = \frac{Ad}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{2i\omega n d/2} \right] = \frac{Ad}{T} \left[\frac{\sin(\omega n d/2)}{\omega n d/2} \right] \\
c_n &= \frac{Ad}{T} \sin(\omega n d/2) \quad (\text{sinc}(x) \neq 1 \text{ si } x=0 \text{ et } \text{sinc}(x) \neq \sin(x)/x \quad xi \neq 0)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} = \frac{Ad}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\omega n d/2) * e^{i\omega n t}$$

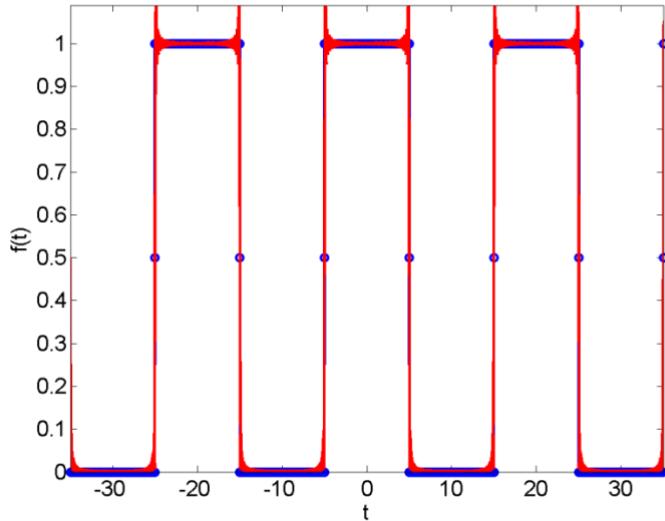


Figure. rect (bleu), sa SF complexe (rouge). T=2d=20.

$$c_n = \frac{Ad}{T} \sin c(\omega n d/2) = (a_n - i b_n)/2 \Rightarrow a_n = 2 \operatorname{Re}[c_n] \text{ et } b_n = -2 \operatorname{Im}[c_n].$$

c_n est réel \Rightarrow les $b_n = 0 \Rightarrow$ le spectre de phase $\phi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n) = 0$.

Tracer le spectre d'amplitude $|c_n| = f(\omega)$ pour n valeurs de $\omega = 2\pi/T$.

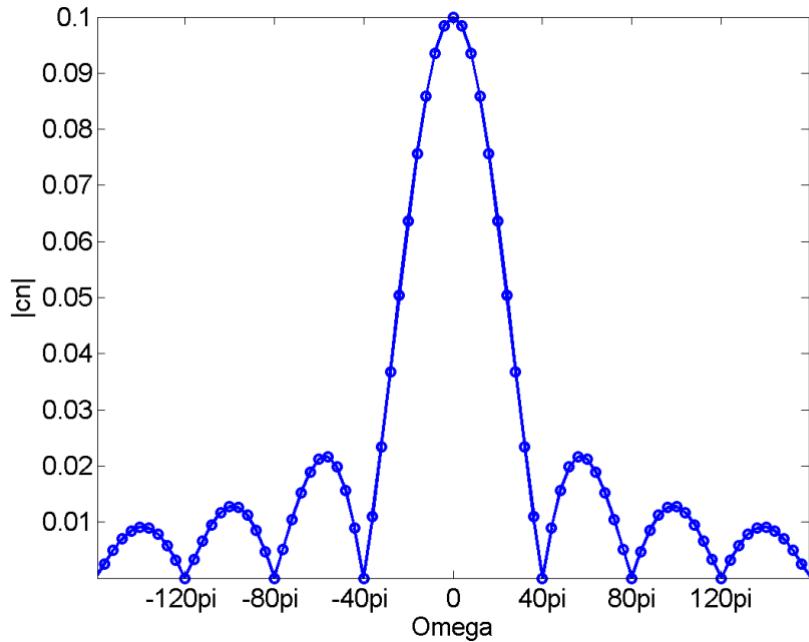


Figure. Spectre d'amplitude $|c_n|$ pour $A=1$, $T=1/2$ et $d=1/20$.

Exemple 3: Trouver les spectres d'amplitude et de phase de la fonction $f(t)$ de période T :

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq ts \leq id \\ 0 & d < s \leq T \end{cases} \quad d < T; \quad \omega = 2\pi/T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega nt} dt = \frac{A}{T} \int_0^d e^{-i\omega nt} dt = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega nt}}{-i\omega n} \right]_0^d = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega nd}}{-i\omega n} - \frac{1}{-i\omega n} \right]$$

$$c_n = \frac{A}{T} \left[\frac{1}{i\omega n} - \frac{e^{-i\omega nd}}{i\omega n} \right] = \frac{A e^{-i\omega nd/2}}{T} \left[\frac{e^{i\omega nd/2} - e^{-i\omega nd/2}}{i\omega n} \right]$$

$$c_n = \frac{A d e^{-i\omega nd/2}}{T} \left[\frac{e^{i\omega nd/2} - e^{-i\omega nd/2}}{2i\omega n d/2} \right] = \frac{A d e^{-i\omega nd/2}}{T} \left[\frac{\sin(\omega n d/2)}{\omega n d/2} \right]$$

$$c_n = \frac{A d}{T} \operatorname{sinc}(\omega n d/2) e^{-i\omega nd/2} \quad \text{de la forme} \quad c_n e^{i\phi_n}$$

$$\text{avec } |c_n| = \left| \frac{A d}{T} \operatorname{sinc}(\omega n d/2) \right| \quad \text{et} \quad \phi_n = -\frac{\omega n d}{2} = -\frac{\frac{2\pi}{T} n d}{2} = -\frac{\pi n d}{T}$$

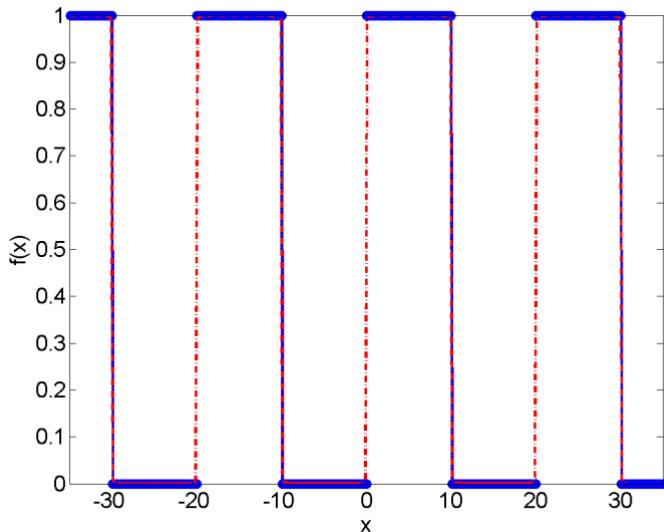


Figure. rect (bleu), sa SF complexe (rouge). A=1, T=2d=20. Donne même spectre d'amplitude que précédemment.

II.6. Propriétés d'approximation en moindres carrés. L'erreur de la Série de Fourier.

(Optionnel – pas dans les TPs ni dans l'examen).

La série de Fourier trigonométrique définie sur $-T/2 < t < T/2$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt)\}$$

peut être approximée par les k premiers termes:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \{a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt)\}$$

L'erreur alors introduite est $e_k(t) = f(t) - s(t)$

L'erreur quadratique moyenne (ou erreur moyenne quadratique) est donnée par:

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [e_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - s(t)]^2 dt$$

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

Théorème de Parseval: si a_n et b_n sont les coefficients de la SF de $f(t)$ de période T, alors:

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

Exemple:

Trouver la série de Fourier de $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$ et $f(t+2\pi) = f(t)$. Calculer l'erreur quadratique

moyenne, E_k , pour les 5 premiers harmoniques non nuls. Résultat SF: $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$

Réponse:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt$$

$$u=t \rightarrow du=dt; dv=\cos(nt)dt \rightarrow v=\sin(nt)/n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \{ [t \sin(nt)/n]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt \} = \frac{1}{\pi} \{ [0-0] - [-\frac{1}{n^2} \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} \} \\ &= \frac{1}{\pi} \{ 0 + \frac{1}{n^2} [\cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} \} = \frac{1}{\pi} \{ 0 + \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] \} = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

$$u = t; du = dt; dv = \sin(nt)dt; v = (-1/n)\cos(nt).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[t(-1/n)\cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (1/n)\cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[(-1/n)\pi\cos(n\pi) - (-1/n)(-\pi)\cos(n\pi) \right]_{-\pi}^{\pi} - 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) - \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi) \sin(nt)$$

$$\text{avec } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ et } (-1)^n \cos(n\pi) = (-1)^{n+1}: f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

Pour le calcul de l'erreur quadratique moyenne E_k :

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2 \cos(n\pi)}{n} \right)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2 \cos(n\pi)}{n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^k \left(\frac{\cos(n\pi)}{n} \right)^2$$

Nous avons proposé de tracer $f(t)$ et sa série de Fourier pour certaines harmoniques et d'observer les variations de E_k et de l'ajustement de $f(t)$ par sa SF:

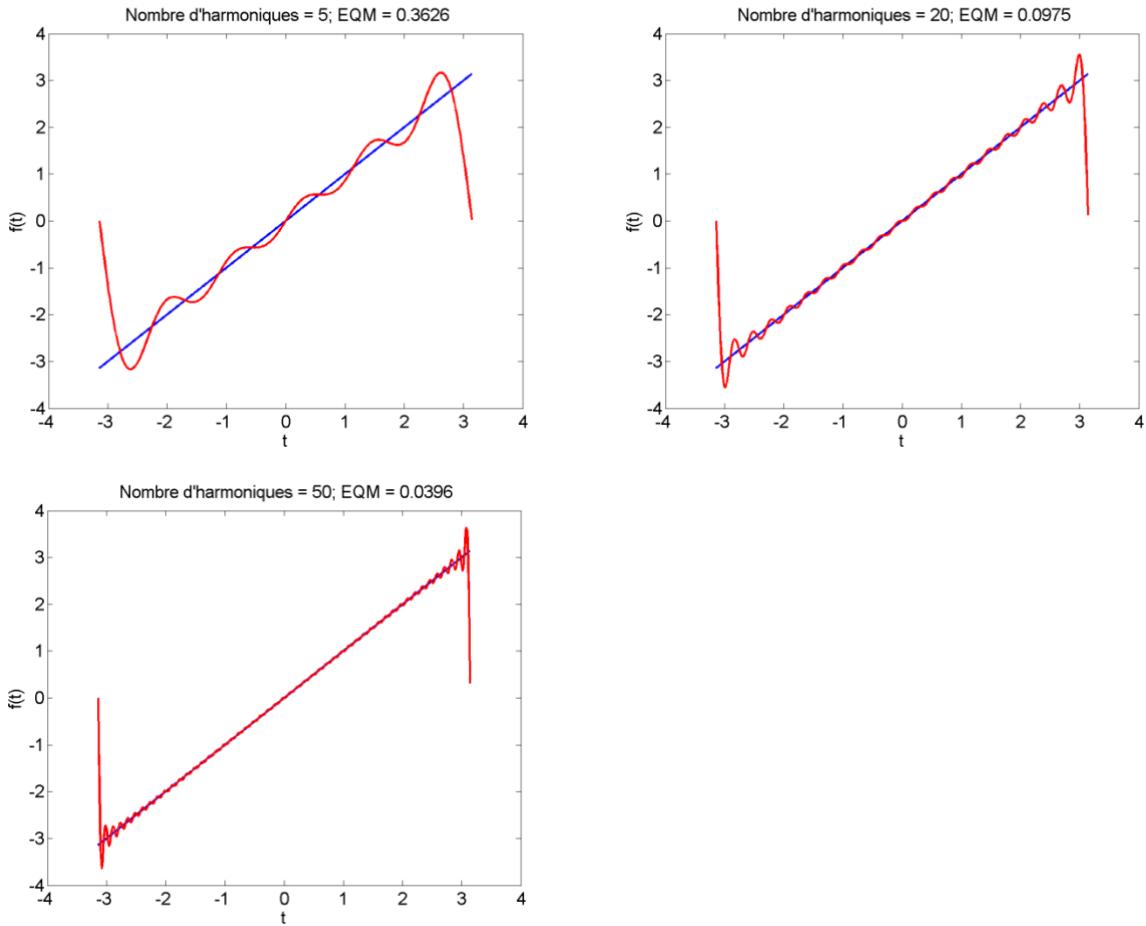


Figure. Étude de E_k et SF pour $f(t)=t$ sur $[-\pi, \pi]$. $ts=0.01$. EQM=erreur quadratique moyenne.

II.7. Symétries et séries de Fourier.

II.7.1. Différentes symétries

Une fonction est **paire** si $f(t) = f(-t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Si une fonction est paire: $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

Le graphe de $f(t)$ est symétrique par rapport à l'axe des y.

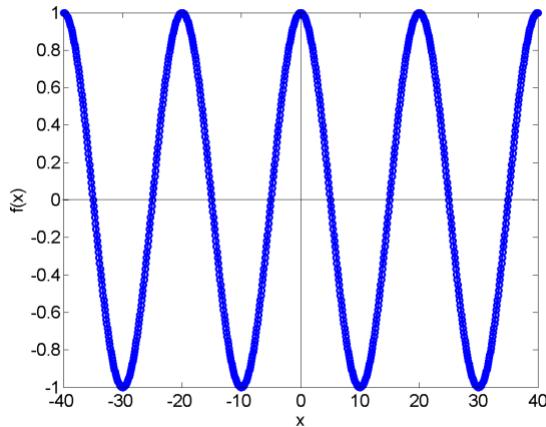


Figure. Fonction cosinus: paire. (Ex.: x^2 ; gaussienne,).

Une fonction est **impaire** si $f(t) = -f(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si une fonction est impaire: $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ et $f(0)=0$

Le graphique de $f(t)$ est alors symétrique par rapport à l'origine.

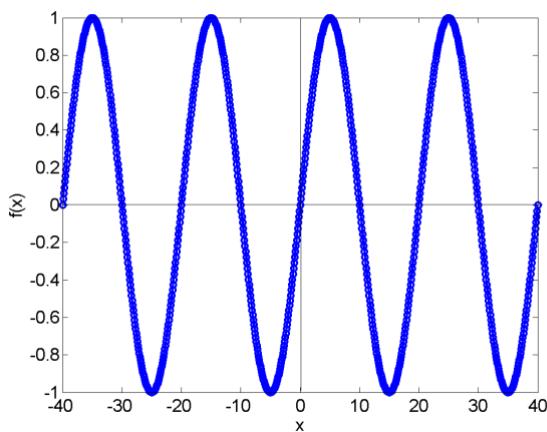


Figure. Fonction sinus: impaire. (Ex.: x^3 , tangente,).

Composantes paire et impaire:

Une fonction peut s'écrire comme la somme de deux composantes paire et impaire.

$$f(t) = f(t)/2 + f(t)/2 + f(-t)/2 - f(-t)/2 = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

$$= \frac{1}{2}f_{pair}(t) + \frac{1}{2}f_{impair}(t)$$

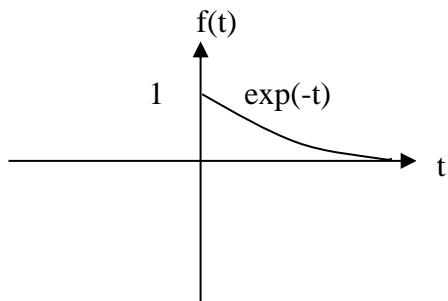
Exemple 1:

Trouver les composantes paire et impaire de

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

De $f(t)$ on déduit $f(-t)$:

$$f(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases}$$



$$f_{pair}(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \\ \frac{1}{2}e^t & t < 0 \end{cases}$$

$$f_{impair}(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \\ -\frac{1}{2}e^t & t < 0 \end{cases}$$

Symétrie de demi-période:

Une fonction périodique de période T est dite symétrique de semi-période si $f(t) = -f(t + T/2)$.

Symétrie d'un quart de période:

Si une fonction périodique $f(t)$ a une symétrie de demi-période, et si elle est de plus paire ou impaire, alors $f(t)$ est symétrique d'un quart de période paire ou impaire.

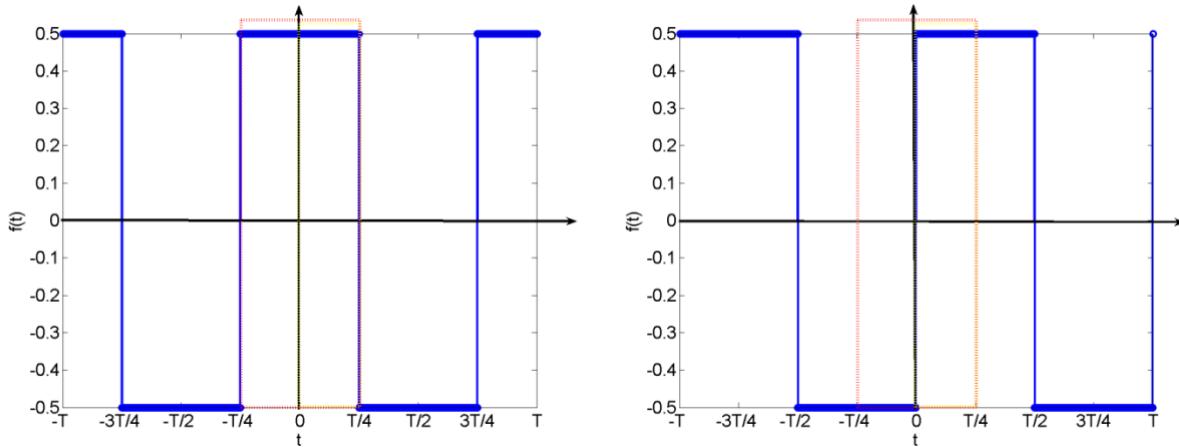


Figure. Exemple de fonctions paire et impaire et toutes deux symétriques de demi-période, elles sont alors symétriques d'un quart de période paire ou impaire.

II.7.2. Séries de Fourier de fonctions symétriques

L'utilisation de la symétrie des fonctions simplifie le calcul des séries de Fourier.

Fonction paire:

Rappel des formules:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\}$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Si $f(t)$, de période T , est **paire**, sa transformée de Fourier se réduit à:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

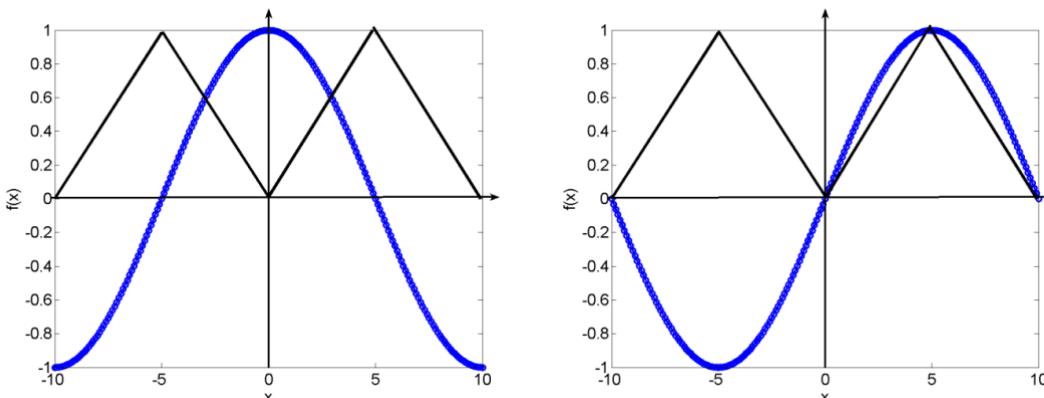


Figure. La fonction $f(t)$ en noir est paire. Lorsqu'elle multiplie un cosinus (en bleu, figure de gauche), comme dans le cas des a_n , l'intégrale du produit $f(t)\cos(n\omega t)$ ne s'annule pas. Tandis que lorsqu'elle

multiplie un sinus (en bleu, figure de droite), comme dans le cas des b_n , l'intégrale du produit $f(t)\sin(n\omega t)=0 \Rightarrow b_n=0$.

Fonction impaire:

Si $f(t)$, de période T , est **impaire**, sa transformée de Fourier se réduit à:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

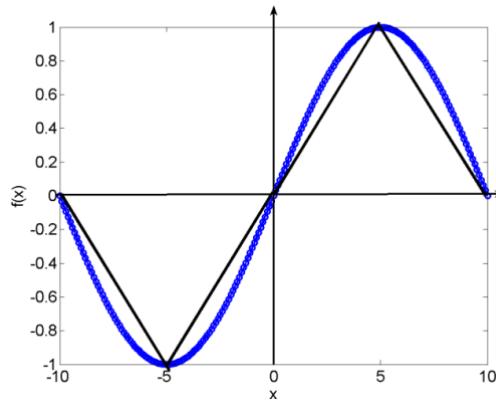
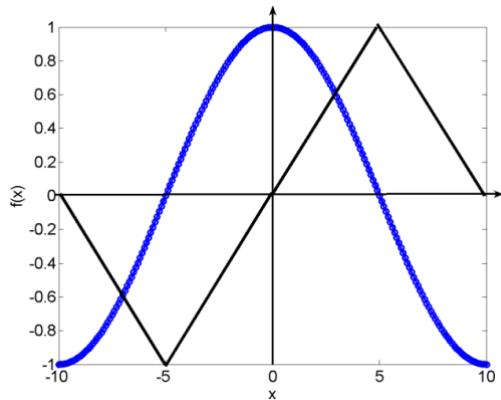


Figure. La fonction $f(t)$ en noir est impaire. Lorsqu'elle multiplie un cosinus (en bleu, figure de gauche), comme dans le cas des a_n , l'intégrale du produit $f(t)\cos(n\omega t)$ s'annule $\Rightarrow a_n=0$. Tandis que lorsqu'elle multiplie un sinus (en bleu, figure de droite), comme dans le cas des b_n , l'intégrale du produit $f(t)\sin(n\omega t)$ ne s'annule pas.

Fonction symétrique de demi-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique et symétrique de demi-période contient seulement les harmoniques impaires:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt \quad n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt \quad n=1,2,3,\dots$$

Fonction paire et symétrique de quart-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique paire et symétrique de quart-période contient seulement les harmoniques impaires en cosinus:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega t]$$

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt$$

Fonction impaire et symétrique de quart-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique impaire et symétrique de quart-période contient seulement les harmoniques impaires en sinus:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin[(2n-1)\omega t]$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt$$

II.8. Conditions de Dirichlet:

- 1- Si $f(x)$ est définie sur $[-L, L]$, sauf à un nombre déterminé de points,
 - 2- $f(x)$ est périodique de période $2L$,
 - 3- $f(x)$ et $df(x)/dx$ sont continues par morceaux sur $[-L, L]$,
- alors la série de Fourier de $f(x)$ converge:

- a) vers $f(x)$ au point x si $f(x)$ est continue en ce point,
- b) vers $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ si $f(x)$ est discontinue au point x .

Exemple 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \text{avec la période } L = 10$$

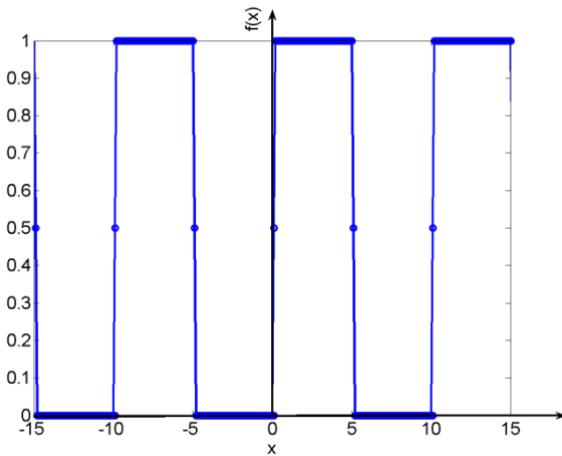


Figure. $f(x)$.

Quelles sont les valeurs de $f(x)$ à $-5, -3, 0, 2$ et 5 ?

$$f(-5) = \frac{f(-5-0) + f(-5+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(-3) = 0$$

$$f(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 1$$

$$f(5) = \frac{f(5-0) + f(5+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

II.9. Phénomène de Gibbs

Lors des discontinuités d'une fonction, les sommes partielles de la série de Fourier de $f(t)$ sont affectées par des oscillations autour des points de discontinuités. Ces oscillations sont appelées le phénomène de Gibbs.

Exemple 1.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases} \quad \text{Période } T = 2\pi$$

La série de Fourier de $f(t)$ est:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)t]$$

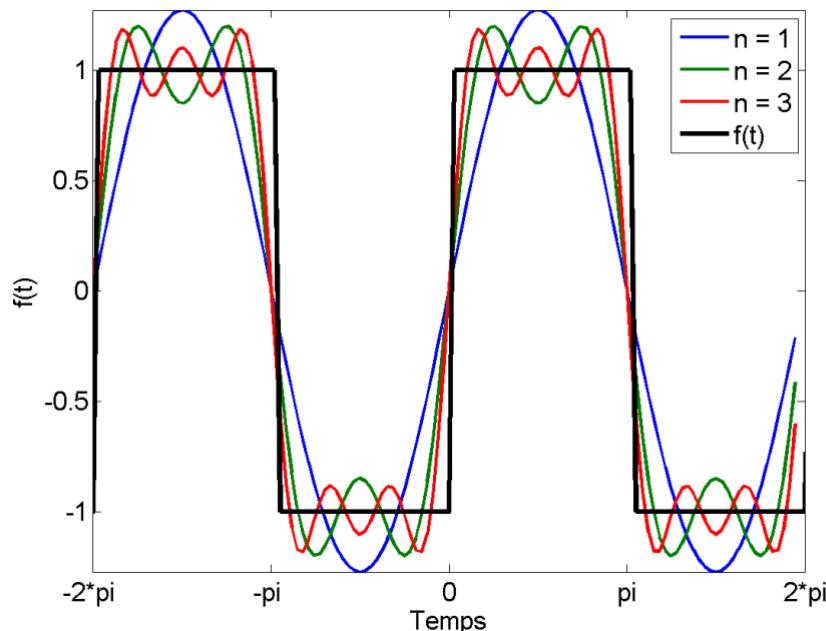


Figure. Phénomène de Gibbs (overshoot, ou ringing).

III. Transformée de Fourier.

Soit la série de Fourier complexe

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Nous appelons la fonction g au lieu de f pour ne pas confondre avec la fréquence f .

avec $\omega_n = n\omega = 2\pi n/T \Rightarrow \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = 2\pi n/T - 2\pi(n-1)/T = 2\pi/T$

$$\Rightarrow \Delta\omega = 2\pi/T \rightarrow 1/T = \Delta\omega/2\pi$$

Remplaçons c_n dans $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t}$$

Remplaçant $1/T$ par $\Delta\omega/2\pi$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega$$

En se servant de la somme de Riemann qui s'énonce comme suit:

soit un intervalle $[a,b]$ partitionné en plusieurs points tel que

$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < b$, et les intervalles entre ces points sont:

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \dots$ et Δx_n . Soit y , un point d'un sous-intervalle Δx_k , alors la somme d'une

fonction g des points y correspondants dans chaque sous-intervalle Δx_k est donnée par: $\sum_{k=1}^n g(y) \Delta x_k$

et cette fonction devient une intégrale lorsque les sous-intervalles Δx tendent vers 0.

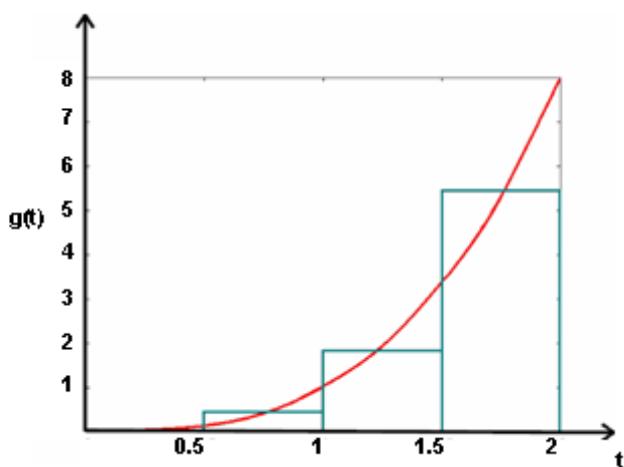


Figure. Somme de Riemann.

Dans la fonction $g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega$ et $\Delta\omega = 2\pi/T$

lorsque $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$, ce qui justifie l'utilisation de l'intégrale de Riemann:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega$$

Puisque $\omega_n = n\omega$ avec $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1}$, l'indice n est omis et l'intégration se fait sur ω .

Définissons:

$$G(\omega) = TF(g(t)) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] \quad \text{TF = transformée de Fourier}$$

et $g(t) = TF^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{TF}^{-1} = \text{Transformée de Fourier inverse.}$

La variable dans le domaine de Fourier, correspondant à la variable spatiale x (cm) ou à la variable temporelle t (sec), est la fréquence f . f a l'unité de cm^{-1} ou s^{-1} (Hertz, Hz).

En posant $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$, soit $f = 1/T$ et les transformées de Fourier deviennent:

$$G(f) = TF(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df$$

Pour que TF existe, il faut que $g(t)$ soit de carré intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$. D'autres définitions:

$g(t)$ définie sur $[0, T]$ et à valeurs complexes. Elle est de carré intégrable si $\int_0^T |g(t)|^2 dt < \infty$. Aussi,

la condition pour que $G(f)$ existe est que $g(t)$ soit absolument intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$.

Exemple 1:

Calculer la TF de $g(t) = \exp(-\alpha t)$ pour $t > 0$; et $g(t) = 0$ pour $t < 0$; $\alpha > 0$.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$

$$G(f) = \int_{-\infty}^0 0 e^{-i2\pi ft} dt + \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+i2\pi f)t} dt$$

$$G(f) = \left| \frac{1}{-(\alpha+i2\pi f)} e^{-(\alpha+i2\pi f)t} \right|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+i2\pi f} = \frac{\alpha-i2\pi f}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}$$

Le module est : $|G(f)| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+4\pi^2 f^2)^2} + \frac{4\pi^2 f^2}{(\alpha^2+4\pi^2 f^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+4\pi^2 f^2}}$

L'argument est: $\arg(G) = \arctg\left(\frac{-2\pi f}{\alpha}\right)$

$G(f)$ peut s'écrire sous la forme $G(f) = |G(f)| * \exp(i * \arg(G))$:

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+4\pi^2 f^2}} \exp\left[i * \arctg\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]$$

$\alpha=0.05$; $ts=1$; $t=0:ts:100$; $N=\text{length}(t)$;

Pour retrouver avec plus de précision les fréquences sur le graphique des transformées de Fourier, on doit augmenter le nombre N de points dans la transformée de Fourier en allongeant avec des zéros la fonction de départ.

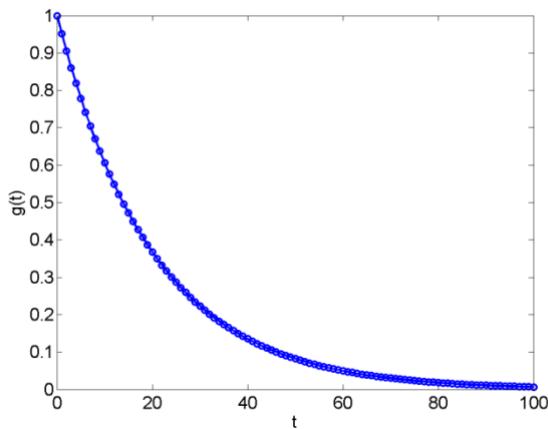


Figure. $g(t) = \exp(-0.05t)$ avec $t = 0:1:100$.

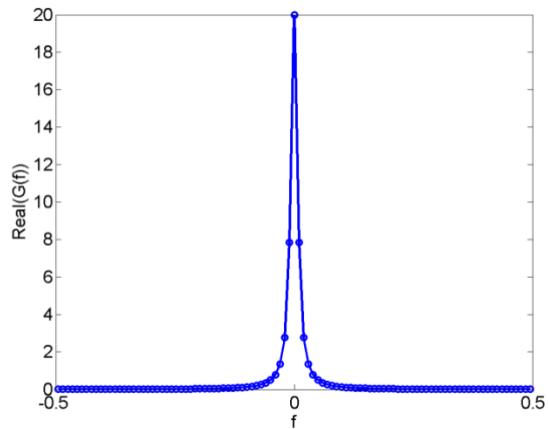


Figure. $\text{Re}(G(f))$.

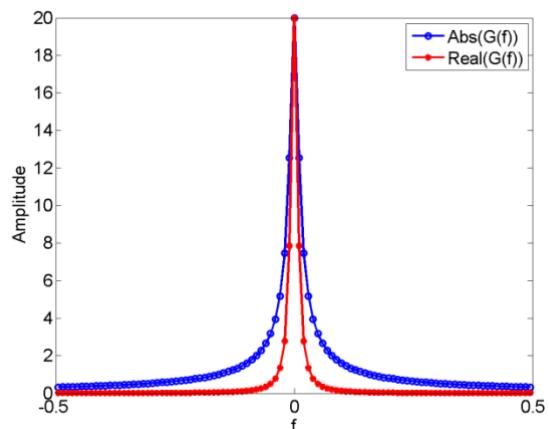
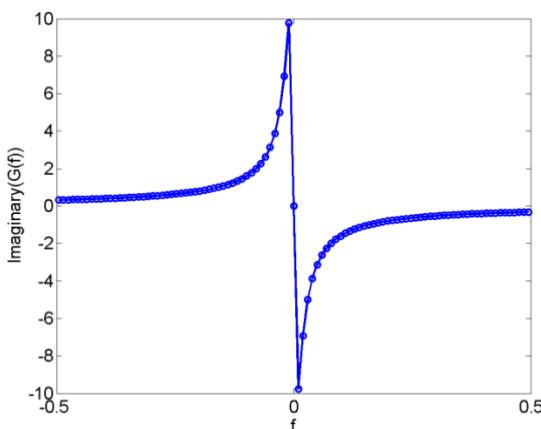


Figure. $\text{Im}(G(f))$.

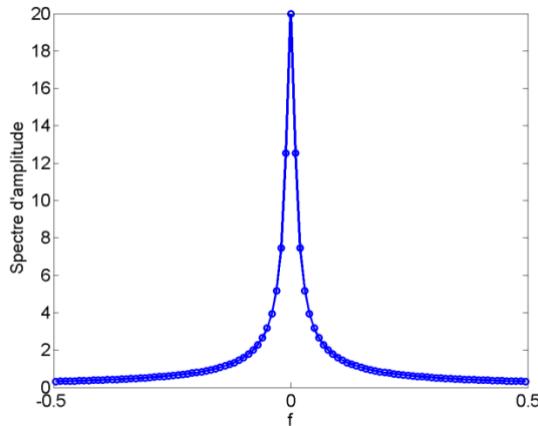


Figure. Spectre d'amplitude.

Figure. $\text{Abs}(G(f))$. ($z = a + ib$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

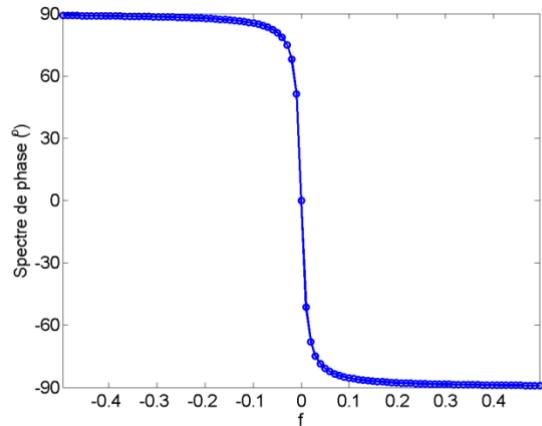


Figure. Spectre de phase.

Calcul de la transformée inverse de $G(f) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \exp\left[i * \text{arctg}\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]$

La formule s'écrit : $g(t) = \text{TF}^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i * \text{arctg}\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]} e^{i2\pi ft} df$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i * (2\pi ft - \text{arctg}\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right))\right]} df \dots \text{approche compliquée}$$

$$\text{Si l'on garde } G(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{i2\pi ft} df$$

$$\text{on multiplie et on divise par } e^{\alpha t}: g(t) = \frac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{\alpha t} e^{i2\pi ft} df$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{(\alpha + i2\pi f)t} df$$

soit $u = \alpha + i2\pi f \Rightarrow du = i2\pi df \Rightarrow df = du/i2\pi$.

$$\Rightarrow g(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} e^{ut} du \dots \text{On doit recourir aux tables d'intégration.}$$

Exemple 2:

Calculer la TF de $g(t) = 1$ si $|t| < d$ et $g(t) = 0$ si $|t| > d$, et $d > 0$.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-d}^{d} e^{-i2\pi f t} dt = \left| \frac{e^{-i2\pi f t}}{-i2\pi f} \right|_{-d}^d = \frac{1}{-i2\pi f} (e^{-i2\pi f d} - e^{i2\pi f d})$$

$$G(f) = \frac{1}{i2\pi f} (e^{i2\pi f d} - e^{-i2\pi f d}) = d \left(\frac{e^{i2\pi f d} - e^{-i2\pi f d}}{i2\pi f d} \right) = 2d \frac{\sin(2\pi f d)}{2\pi f d}$$

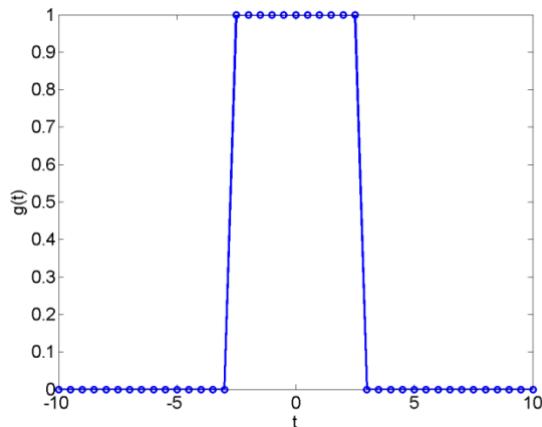
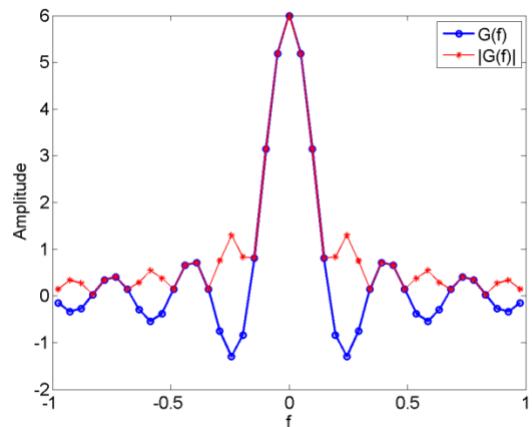


Figure. $g(t)$ avec $T=20$, $d=3$, $ts=0.5$.



$G(f)$ et spectre d'amplitude.

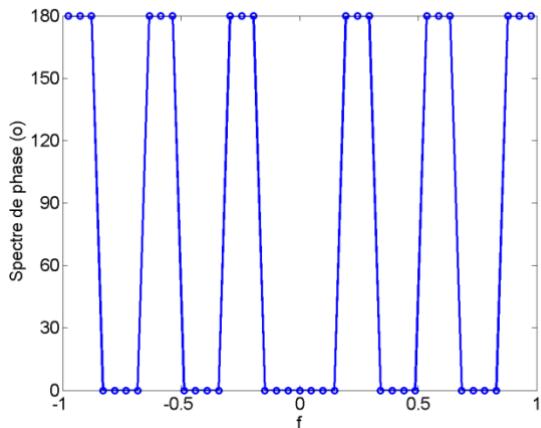


Figure. Spectre de phase.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t) = \cos(\omega_0 t)$ pour $|t| < d/2$, $d > 0$ et $g(t)=0$ ailleurs.

$$\text{Par définition: } G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-i2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} + e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} [\sin c((\omega_0 - 2\pi f)d/2) + \sin c((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

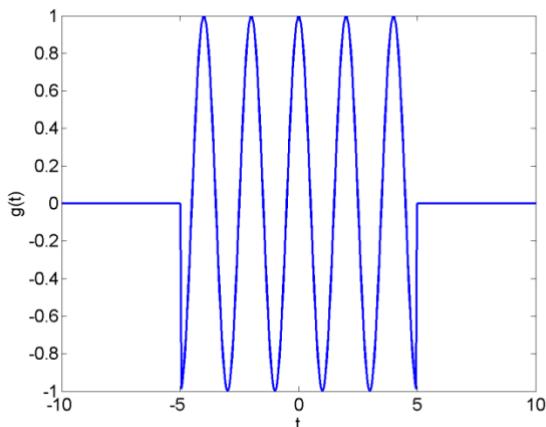


Figure. $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. $f_0=0.5$ et $T=2$.

$ts=0.5$; $t=-10:ts:10$; $d=10$.

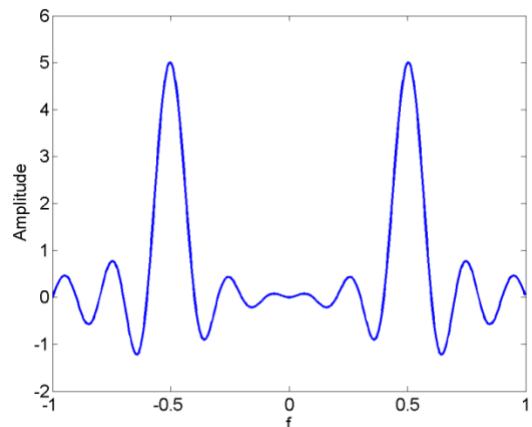


Figure. $G(f)$.

Exemple 4 :

Calculer la TF de $g(t) = \sin(\omega_0 t)$ pour $|t| < d/2$, $d > 0$ $g(t)=0$ ailleurs.

$$\text{Par définition: } G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-i2\pi f t} dt = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{-i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} [\operatorname{sinc}((\omega_0 - 2\pi f)d/2) - \operatorname{sinc}((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

$$G(f) = -\frac{id}{2} [\operatorname{sinc}((\omega_0 - 2\pi f)d/2) - \operatorname{sinc}((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

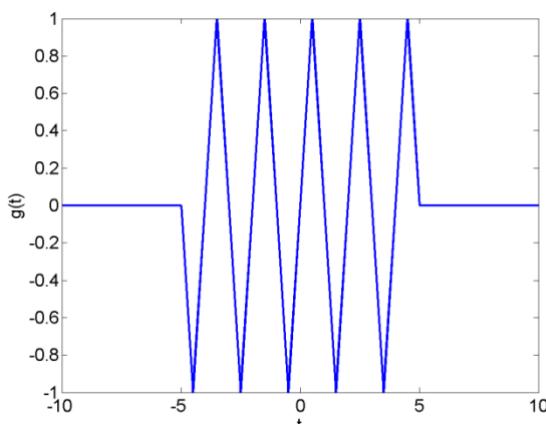


Figure. $g(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. $f_0=0.5$ et $T=2$.

$ts=0.5$; $t=-10:ts:10$; $d=10$.

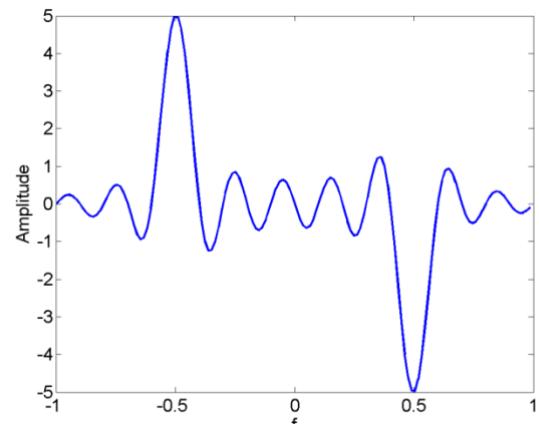


Figure. $G(f)$.

Autre exemple: La TF de $g(t) = \exp(-t^2)$.

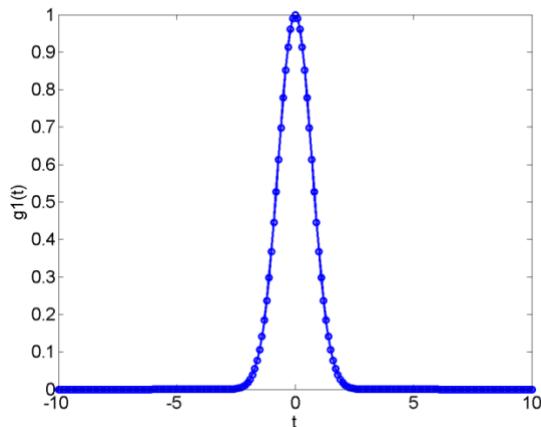


Figure. $g_1(t) = \exp(-t^2)$; $\sum(g_1) = 17.72$,

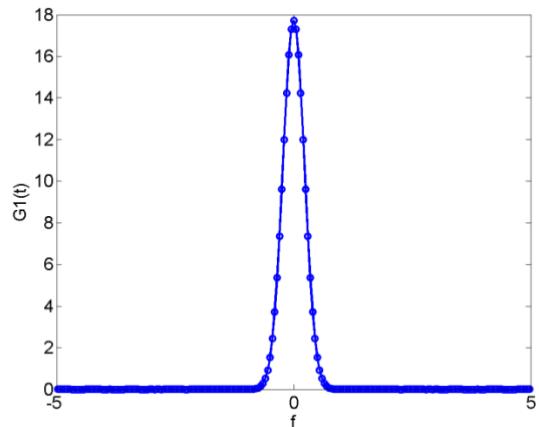


Figure. $\text{FT}[g_1(t)]$.

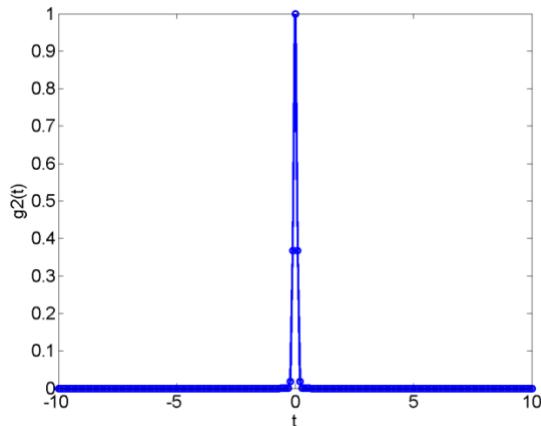


Figure. $g_2(t) = \exp(-(10t)^2)$. $\sum(g_2) = 1.77$.

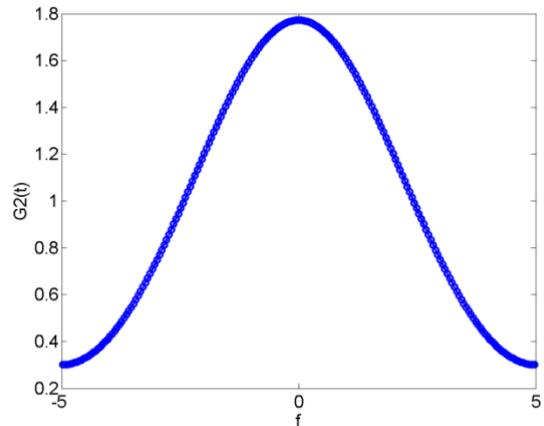


Figure. $\text{FT}[g_2(t)]$. g dense $\Rightarrow G$ large:

Propriétés de la transformée de Fourier (TF)

Les propriétés de la TF sont résumées dans la Table. Ici, nous voyons quelques démonstrations.

Autres notations dans les transformées de Fourier:

En posant $\omega = 2\pi f$:

$$TF[g(t)] = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt \rightarrow G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\omega = 2\pi f$, $d\omega = 2\pi df \Rightarrow df = d\omega / 2\pi$:

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df \rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Linéarité:

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

$$\begin{aligned} TF[a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)] e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 g_1(t) e^{-i2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 g_2(t) e^{-i2\pi f t} dt = a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f) \end{aligned}$$

Symétrie:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df . \quad \text{Changer } t \leftrightarrow -t \Rightarrow g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{-i2\pi f t} df$$

$$\text{En interchangeant } t \text{ et } f: g(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i2\pi ft} dt = TF(G(t))$$

Échelle du temps (*time scaling*):

$$g(at) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right), \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

$$TF[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-i2\pi ft} dt \quad x = at \Rightarrow dx = adt \Rightarrow dt = dx/a$$

$$\text{Si } a > 0: \quad F\bar{T}g(a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f/x} dx = \frac{1}{a} G(f/a)$$

C'est l'argument de l'exponentiel qui donne l'argument de G.

$$\text{Si } a < 0: FT[g(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-\infty} g(x) e^{-i2\pi fx/a} dx = \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi fx/a} dx = \frac{1}{|a|} G(f/a)$$

$$FT[g(at)] = \frac{1}{|a|} G(f/a)$$

Décalage temporel d'un scalaire réel $a = t_0$:

$$TF[g(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} G(w).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} TF[g(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega(u+t_0)} du, \quad \text{avec le changement de variable } u = t - t_0, du = dt \\ &= e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \\ &= e^{-i\omega t_0} G(w) \end{aligned}$$

Décalage fréquentiel d'une fréquence $b=w_0$:

$$TF^{-1}[G(\omega - \omega_0)] = e^{it\omega_0} g(t) \text{ et donc, } TF[e^{it\omega_0} g(t)] = G(\omega - \omega_0).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} TF[e^{it\omega_0} g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega_0} g(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-it(\omega - \omega_0)} dt \\ &= G(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Parité:

$G(\omega)$ est la transformée de Fourier de $g(t)$

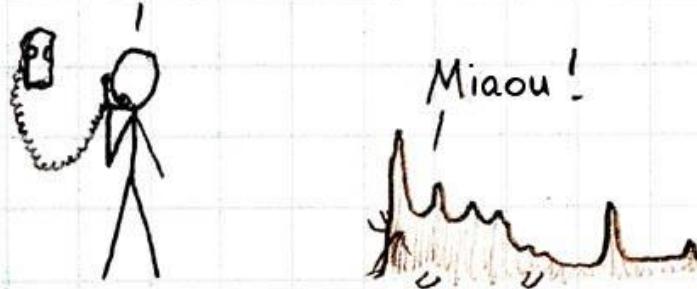
Si $g(t)$ est réelle et paire $\Rightarrow G(\omega)$ est réelle et paire

Si $g(t)$ est réelle et impaire $\Rightarrow G(\omega)$ est imaginaire et impaire

Si $G(\omega)$ est réelle et positive \Rightarrow elle fait un angle 0 avec l'axe des réels \Rightarrow la phase vaut zéro ($\phi(\omega) = 0$).

Si $G(\omega)$ est réelle et négative \Rightarrow elle fait un angle de $\pm \pi$ avec l'axe des réels \Rightarrow la phase vaut $\pm \pi$ ($\phi(\omega) = \pm \pi$).

Allo, Dr. Elizabeth?
 Heu... J'ai accidentellement réalisé
 une transformation de Fourier
 sur mon chat...



Propriété	$g(t)$	$G(w)$
Linéarité	$a \cdot g(t) + b \cdot h(t)$	$a \cdot G(\omega) + b \cdot H(\omega)$
Symétrie	$G(t)$	$2\pi g(-\omega)$
Échelle du temps (<i>time scaling</i>)	$g(at)$	$\frac{1}{ a } G\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Décalage temporel (<i>time shifting</i>)	$g(t - a)$	$e^{-i\omega a} G(\omega)$
Décalage fréquentiel (<i>frequency shifting</i>)	$e^{itb} g(t)$	$G(\omega - b)$

TABLE 1 – Table des propriétés de la transformée de Fourier (TF) de la fonction $g(t)$. La $\text{TF}[g(t)] = G(\omega)$ peut s'exprimer en fréquences f ou en fréquences angulaires $\omega = 2\pi f$. Dans la table, a et b représentent des scalaires réels et $\text{TF}[h(t)] = H(\omega)$.

La fonction de Dirac δ

La fonction de Dirac δ peut être définie comme la dérivée de la fonction de Heaviside qui est définie comme:

$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et $\delta(x)$ et le δ de Kronecker (la version discrète et numérique du Dirac) sont définies comme:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \left(\delta_{\text{de Kronecker}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \right)$$

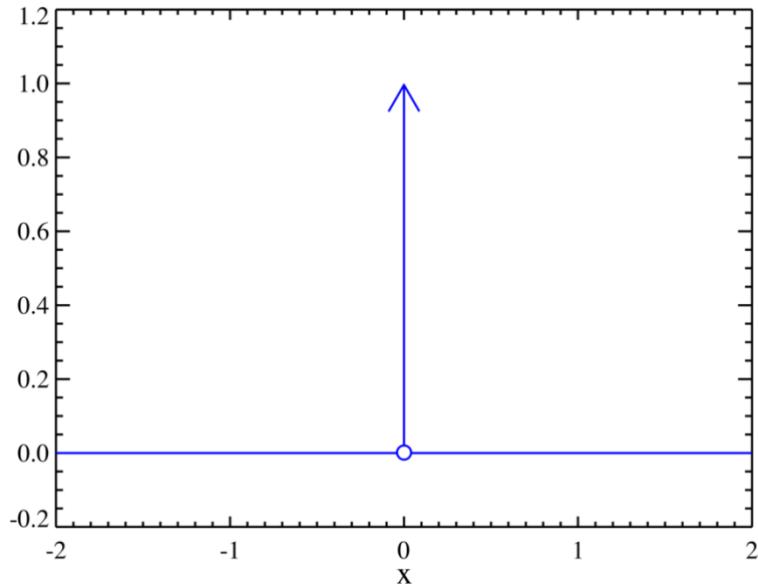


Figure. Fonction de Dirac δ .

Les propriétés de $\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

Le peigne de Dirac ou train d'impulsions (sera utile après l'intra):

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

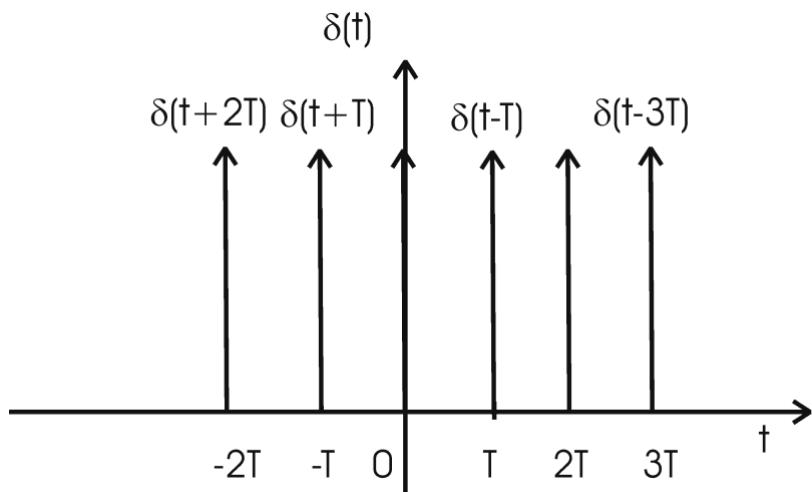


Figure. Peigne de Dirac ou train d'impulsions.

Transformées de Fourier généralisées (Optionnel – pas dans les TPs ni examens)

Certaines fonctions ne sont pas de carrés intégrables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \infty$$

c'est le cas des fonctions périodiques comme le sinus et le cosinus, la fonction de Heaviside, une constante etc....

Fonction de Heaviside: $H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Par définition, une fonction généralisée à progrès lent $g(t)$ est une fonction associée à une fonction symbolique $\phi(t)$ qui décroît rapidement:

$$\langle g(t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi(t) dt$$

Pour calculer les transformées de Fourier de fonctions généralisées, on utilise la formule de Parseval.

La formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx$$

Celle-ci peut être démontrée de la façon suivante, en utilisant les transformées de Fourier:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iyx} dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iyx} dy \right] dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right] dy.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(y) dy$$

et en changeant la variable y en x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(x)dx$$

Cette équation peut se rapporter aux transformées de Fourier comme suit, en intégrant sur ω :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)TF[g(t)]d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} TF[f(t)]g(\omega)d\omega$$

ou bien, en intégrant sur t:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF[F(\omega)\Phi(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)TF[G(\omega)]d\omega$$

Dans les deux cas, nous avons conservé la même variable ω ou t pour f et F et pour g et G.

Exemple 1:

Trouver la TF d'une constante, soit $g(t) = 1$.

$g(t) = 1$ est à progrès lent.

En utilisant la formule de Parseval avec la fonction rapidement décroissante $\phi(t)$:

Soit la formule de Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\Phi(x)dx$

qui devient:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t} dt \right]_{\omega=0} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t} dt \right]_{\omega=0} = TF[\Phi(t)]_{\omega=0} \end{aligned}$$

et par la propriété de la symétrie:

$$TF[\Phi(t)]_{\omega=0} = [2\pi\phi(-\omega)]_{\omega=0} = 2\pi\phi(0)$$

Par la propriété de $\delta(x)$: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

$$2\pi\phi(0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

Finalement, en reprenant l'équation de départ $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$ et en

remplaçant le second membre par le résultat précédent qui est $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

et en identifiant le contenu des intégrales des deux membres de l'équation:

$$TF[g(t)] = G(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Noter que dans cet exemple nous avons conservé ω pour simplifier les écritures au lieu de travailler avec $2\pi f$.

Exemple 2:

Calculer la TF de $\delta(t)$.

$\delta(t)$ est une fonction généralisée à progrès lent.

Par définition: $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$

soit $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\Phi(t)dt = \Phi(0)$

aussi $\Phi(0) = TF[\phi(t)]_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-i\omega t} dt \right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)d\omega$ par changement de

variable $t \rightarrow \omega$.

ainsi $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\phi(\omega)d\omega$

et par identification:

$$FT[\delta(t)] = G(\omega) = 1$$

On aurait pu faire le calcul directement : $FT[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1$

En conclusion, la TF d'une constante est une fonction δ , et la TF d'une fonction δ est une constante.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t)=\exp(i\omega_0 t)$

$g(t)$ peut être réécrite sous la forme $g(t)=f(t)\exp(i\omega_0 t)$. Par la propriété du décalage de la fréquence: $\text{TF}[f(t)\exp(i\omega_0 t)] = F(\omega-\omega_0)$. Et comme $f(t) = 1$, et de l'exemple 1 ci-dessus:

$\text{TF}[1] = 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow \text{TF}[\exp(i\omega_0 t)] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0) = \delta(\omega-\omega_0)$. C'est un décalage de fréquence ω_0 de la fonction δ .

Exemple 4:

Calculer la TF de $\cos(\omega_0 t)$ et $\sin(\omega_0 t)$.

$$\cos(\omega_0 t) = (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2$$

$$\text{TF}[\cos(\omega_0 t)] = \text{TF}[(\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2]$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0) = \delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)$$

Pour le sinus : $\text{TF}[\sin(\omega_0 t)] = -i\pi\delta(\omega-\omega_0) + i\pi\delta(\omega+\omega_0) = -i\delta(\omega-\omega_0) + i\delta(\omega+\omega_0)$

Quelques fonctions courantes et leur transformée de Fourier

	$g(t)$	$G(w)$
Fonction de Dirac	$\delta(t)$	1 (la constante)
Fonction porte	$\Pi(t)$	$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (le sinus cardinal)
La Gaussienne de largeur proportionnelle (\propto) à a	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \omega^2}{4a}}$ (une Gaussienne $\propto \frac{1}{a}$)
L'exponentiel complexe de fréquence a	e^{iat}	$2\pi\delta(\omega - a) = \delta(\omega - a)$ (un Dirac décalé de a fréquences)
Le cosinus de fréquence a	$\cos(at)$	$\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)$ (deux Dirac, aux fréquences a et $-a$)
Le sinus de fréquence a	$\sin(at)$	$-i\delta(\omega - a) + i\delta(\omega + a)$ (deux Dirac imaginaires, un à la fréquence a vers $-\infty$ et l'autre à $-a$)

TABLE 2 – Table des couples de fonctions $g(t)$ et Transformée de Fourier $G(\omega)$. La $\text{TF}[g(t)] = G(\omega)$ peut s'exprimer en fréquences f ou en fréquences angulaires $\omega = 2\pi f$. Dans la table, a représente un scalaire réel.

Transformée de Fourier à deux dimensions

Si l'on remplace $2\pi f$ par ω , la paire de Fourier s'écrit:

$$G(\omega) = FT(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = FT^{-1}(G(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Par analogie, on détermine les paires en 2 dimensions (2D):

$$G(u, v) = TF(g(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

$$g(x, y) = TF^{-1}(G(u, v)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv$$

Exercices :

1. Calculer la TF de $\delta(t-t_0)$.
2. Calculer la TF de $\delta(t+t_0)$.
3. Montrer que $TF[\delta(t+t_0) + 2\delta(t) + \delta(t-t_0)] = 4\cos^2(\omega t_0/2)$.

IV. Transformée de Fourier discrète.

La transformée de Fourier discrète (TFD) est l'équivalent de la transformée de Fourier d'une fonction $g(t)$, mais avec $g(t)$ échantillonnée à des intervalles réguliers pour un nombre N déterminé de valeurs. $g(t)$ peut être une distribution ou un vecteur de valeurs expérimentales.

Puisque la fonction $g(t)$ est échantillonnée à N valeurs, elle peut s'écrire $g(n)$ ou g_n , avec $0 \leq n \leq N-1$.

La transformée de Fourier discrète inverse est $G(k)$ ou G_k , avec $0 \leq k \leq N-1$.

(Certains auteurs utilisent les paires de variables (n,k) , (u,v) , (x,k) etc... qui ne réfèrent pas à la fréquence, il est suggéré de garder les variables t ou x versus f tout en leur supposant des valeurs discrètes à intervalles réguliers.)

Transformée de Fourier discrète (TFD):

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-i2\pi kn/N}$$

Transformée de Fourier discrète inverse (TFDI):

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{i2\pi kn/N}$$

Analogie entre la série de Fourier exponentielle et à la transformée de Fourier:

Série de Fourier exponentielle:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Transformée de Fourier:

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df \quad G(f) = TF(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Différentes formes de représentation de $G(k)$:

$$G(k) = r(k)[\cos(\theta(k)) + i \sin(\theta(k))] = r(k) \exp(i\theta(k))$$

$$G(k) = |G(k)| \exp(i\theta(k))$$

$$G(k) = A(k) + iB(k)$$

Spectre d'amplitude:

$$|G(k)| = \sqrt{A(k)^2 + B(k)^2}$$

Spectre de phase:

$$\theta(k) = \arctan\left(\frac{B(k)}{A(k)}\right)$$

Parité:

$$G(k) = A(k) + iB(k)$$

Si $g(n)$ paire $\Rightarrow \text{TFD}[g(n)] = A(k)$ c'est à dire partie réelle.

Si $g(n)$ impaire $\Rightarrow \text{TFD}[g(n)] = iB(k)$ c'est à dire partie imaginaire.

Si $g(n)$ paire $\Rightarrow \text{TFD}[g(n)] = G(k)$ est réelle et paire.

Si $g(n)$ impaire $\Rightarrow \text{TFD}[g(n)] = G(k)$ est imaginaire et impaire.

Exemple 1:

Calculer $G(k) = \text{TFD}[g(n)]$ avec $g(n) = \begin{cases} n & \text{pour } 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp(-i2\pi kn/N) \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \exp(i2\pi kn/N)$$

$$g(n) = [0 \ 1 \ 2 \ 3].$$

$$G(0) = 0 \exp(-i2\pi \cdot 0.0/4) + 1 \exp(-i2\pi \cdot 0.1/4) + 2 \exp(-i2\pi \cdot 0.2/4) + 3 \exp(-i2\pi \cdot 0.3/4)$$

$$G(1) = 0 \exp(-i2\pi \cdot 1.0/4) + 1 \exp(-i2\pi \cdot 1.1/4) + 2 \exp(-i2\pi \cdot 1.2/4) + 3 \exp(-i2\pi \cdot 1.3/4)$$

$$G(2) = 0 \exp(-i2\pi \cdot 2.0/4) + 1 \exp(-i2\pi \cdot 2.1/4) + 2 \exp(-i2\pi \cdot 2.2/4) + 3 \exp(-i2\pi \cdot 2.3/4)$$

$$G(3) = 0 \exp(-i2\pi \cdot 3.0/4) + 1 \exp(-i2\pi \cdot 3.1/4) + 2 \exp(-i2\pi \cdot 3.2/4) + 3 \exp(-i2\pi \cdot 3.3/4)$$

$$G(0) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$G(1) = 0 - i - 2 + 3i = -2 + 2i$$

$$G(2) = 0 - 1 + 2 - 3 = -2$$

$$G(3) = 0 + i - 2 - 3i = -2 - 2i$$

Alternativement: utiliser la forme de l'exponentielle $e^{ab} = (e^a)^b$ pour le calcul de

$$e^{-i2\pi kn/N} = (e^{-i2\pi k/N})^n = E(k)^n \text{ pour chacune des valeurs de } k:$$

$$k = 0: E(0) = \exp(-i2\pi \cdot 0/4) = \cos(0) - i\sin(0) = 1$$

$$k = 1: E(1) = \exp(-i2\pi \cdot 1/4) = \cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2) = -i$$

$$k = 2: E(2) = \exp(-i2\pi \cdot 2/4) = \cos(\pi) - i\sin(\pi) = -1$$

$$k = 3: E(3) = \exp(-i2\pi \cdot 3/4) = \cos(3\pi/2) - i\sin(3\pi/2) = i$$

$$\text{Calculer } G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp(-i2\pi kn/N) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) [E(k)]^n$$

$$k = 0: G(0) = 0[E(0)]^0 + 1[E(0)]^1 + 2[E(0)]^2 + 3[E(0)]^3$$

$$G(0) = 0[1]^0 + 1[1]^1 + 2[1]^2 + 3[1]^3 = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$k = 1: G(1) = 0[E(1)]^0 + 1[E(1)]^1 + 2[E(1)]^2 + 3[E(1)]^3$$

$$G(1) = 0[-i]^0 + 1[-i]^1 + 2[-i]^2 + 3[-i]^3 = 0 - i - 2 + 3i = -2 + 2i$$

$$k = 2: G(2) = 0[E(2)]^0 + 1[E(2)]^1 + 2[E(2)]^2 + 3[E(2)]^3$$

$$G(2) = 0[-1]^0 + 1[-1]^1 + 2[-1]^2 + 3[-1]^3 = 0 - 1 + 2 - 3 = -2$$

$$k = 3: G(3) = 0[E(3)]^0 + 1[E(3)]^1 + 2[E(3)]^2 + 3[E(3)]^3$$

$$G(3) = 0[i]^0 + 1[i]^1 + 2[i]^2 + 3[i]^3 = 0 + i - 2 - 3i = -2 - 2i$$

Réécrire $G(k)$ avec $k = 0$ à 3 sous forme matricielle:

$$[G(0) \quad G(1) \quad G(2) \quad G(3)] = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} E(0)^0 & E(1)^0 & E(2)^0 & E(3)^0 \\ E(0)^1 & E(1)^1 & E(2)^1 & E(3)^1 \\ E(0)^2 & E(1)^2 & E(2)^2 & E(3)^2 \\ E(0)^3 & E(1)^3 & E(2)^3 & E(3)^3 \end{bmatrix}$$

$$[G(0) \quad G(1) \quad G(2) \quad G(3)] = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 1^0 & (-i^0) & (-i^1) & i^0 \\ 1^1 & (-i^1) & (-i^2) & i^1 \\ 1^2 & (-i^2) & (-i^3) & i^2 \\ 1^3 & (-i^3) & (-i^0) & i^3 \end{bmatrix}$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^0 & i^1 & i^2 & i^3 \\ (-i)^0 & (-i)^1 & (-i)^2 & (-i)^3 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ i^0 & i^1 & i^2 & i^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcul de la transformée de Fourier discrète inverse

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{j2\pi kn/N}$$

Les exponentielles ont les mêmes valeurs, sauf le signe \Rightarrow les valeurs imaginaires de $E(k)$ ont un signe inversé.

Aussi, pour la TFDI, ce sont $E(n)$ au lieu de $E(k)$:

$$\begin{aligned} E(0) &= 1 & E(1) &= i & E(2) &= -1 & E(3) &= -i \\ [g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)] &\stackrel{?}{=} [6 \ -2+2i \ -2 \ -2-2i] \begin{bmatrix} (1)^0 & (i^0) & (-1^0) & (-i^0) \\ (1)^1 & (i^1) & (-1^1) & (-i^1) \\ (1)^2 & (i^2) & (-1^2) & (-i^2) \\ (1)^3 & (i^3) & (-1^3) & (-i^3) \end{bmatrix} / 4 \\ [g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)] &\stackrel{?}{=} [6 \ -2+2i \ -2 \ -2-2i] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} / 4 \text{ ou bien:} \\ [g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$g(0) = (6 - 2 + 2i - 2 - 2 - 2i) / 4 = 0$$

$$g(1) = (6 - 2i - 2 + 2 + 2i - 2) / 4 = 1$$

$$g(2) = (6 + 2 - 2i - 2 + 2 + 2i) / 4 = 2$$

$$g(3) = (6 + 2i + 2 + 2 - 2i + 2) / 4 = 3$$

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp(i2\pi kn/N) \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \exp(-i2\pi kn/N)$$

Exemple 2:

1. $g_1(n) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$
2. $g_2(n) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$
3. $g_3(n) = [1 \ -1 \ 1 \ -1]$
4. $g_4(n) = [1 \ i \ 1 \ i]$

a) Représenter graphiquement les fonctions $g_i(n)$.

Réponses: $G_1(k) = [4 \ 0 \ 0 \ 0]$; $G_2(k) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$;

$G_3(k) = [0 \ 0 \ 4 \ 0]$; $G_4(k) = [2+2i \ 0 \ 2-2i \ 0]$;

b) Calculer les TFD $G_i(k) = \text{TFD}[g_i(n)]$ des fonctions.

c) Calculer les TFDI $g_i(n) = \text{TFDI}[G_i(k)]$ des fonctions.

Transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform: FFT)

[Algorithme de James W. Cooley et John W Tukey, 1965]

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-i2\pi kn/N} \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{i2\pi kn/N}$$

Écrire $e^{-i2\pi kn/N} = (e^{-i2\pi/N})^{kn} = E^{kn}$

Pour $N = 2$, nous avons

$$G(0) = g(0)E^{k=0, n=0} + g(1)E^{k=0, n=1}$$

$$G(1) = g(0)E^{k=1, n=0} + g(1)E^{k=1, n=1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{0,0} & E^{0,1} \\ E^{1,0} & E^{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

Donc pour $N = 2$:

$$\begin{bmatrix} E^{0,0} & E^{0,1} \\ E^{1,0} & E^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{-i2\pi/2})^{0,0} & (e^{-i2\pi/2})^{0,1} \\ (e^{-i2\pi/2})^{1,0} & (e^{-i2\pi/2})^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{0,0} & (-1)^{0,1} \\ (-1)^{1,0} & (-1)^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \end{bmatrix} \Rightarrow E^0 = 1 \text{ et } E^1 = -1.$$

Donc, pour $N = 2$, $G(0) = g(0) + g(1)$, et $G(1) = g(0) - g(1)$.

Pour $N = 4$. Dans la matrice E , n varie horizontalement, et k varie verticalement:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{k=0, n=0} & E^{k=0, n=1} & E^{k=0, n=2} & E^{k=0, n=3} \\ E^{k=1, n=0} & E^{k=1, n=1} & E^{k=1, n=2} & E^{k=1, n=3} \\ E^{k=2, n=0} & E^{k=2, n=1} & E^{k=2, n=2} & E^{k=2, n=3} \\ E^{k=3, n=0} & E^{k=3, n=1} & E^{k=3, n=2} & E^{k=3, n=3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

et en multipliant k et n des éléments de E .

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^0 & E^0 & E^0 & E^0 \\ E^0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^0 & E^2 & E^4 & E^6 \\ E^0 & E^3 & E^6 & E^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

Calculons les éléments de la matrice E toujours pour N = 4:

$$E = \exp(-i2\pi/4) = \cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2) = -i$$

$$\begin{bmatrix} E^0 & E^0 & E^0 & E^0 \\ E^0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^0 & E^2 & E^4 & E^6 \\ E^0 & E^3 & E^6 & E^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-i)^0 & (-i)^0 & (-i)^0 & (-i)^0 \\ (-i)^0 & (-i)^1 & (-i)^2 & (-i)^3 \\ (-i)^0 & (-i)^2 & (-i)^4 & (-i)^6 \\ (-i)^0 & (-i)^3 & (-i)^6 & (-i)^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

en remplaçant 1 par E^0 et $-i$ par E^1 (ceci provient de la périodicité de $\exp(-i2\pi/4)^{kn} = \exp(-i\pi/2)^{kn}$):

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^0 & E^0 & E^0 & E^0 \\ E^0 & E^1 & -E^0 & -E^1 \\ E^0 & -E^0 & E^0 & -E^0 \\ E^0 & -E^1 & -E^0 & E^1 \end{bmatrix}$$

En factorisant la matrice E et en réajustant l'ordre des G(k):

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(2) \\ G(1) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & E^0 & 0 & 0 \\ 1 & -E^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E^1 \\ 0 & 0 & 1 & -E^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E^0 \\ 1 & 0 & -E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -E^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

En dissociant les calculs selon des niveaux (ou étages):

Niveau 1:

$$\begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ g_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E^0 \\ 1 & 0 & -E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -E^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

Niveau 2:

$$\begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(1) \\ g_2(2) \\ g_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & E^0 & 0 & 0 \\ 1 & -E^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E^1 \\ 0 & 0 & 1 & -E^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ g_1(3) \end{bmatrix}$$

On opère un inversement de bit:

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(2) \\ g_2(1) \\ g_2(3) \end{bmatrix}$$

La séquence de calcul de l'algorithme se fait par paires d'équations et par niveau:

Niveau 1:

$$g_1(0) = g(0) + E^0 g(2)$$

$$g_1(2) = g(0) - E^0 g(2)$$

$$g_1(1) = g(1) + E^0 g(3)$$

$$g_1(3) = g(1) - E^0 g(3)$$

Niveau 2:

$$g_2(0) = g_1(0) + E^0 g_1(1)$$

$$g_2(1) = g_1(0) - E^0 g_1(1)$$

$$g_2(2) = g_1(2) + E^1 g_1(3)$$

$$g_2(3) = g_1(2) - E^1 g_1(3)$$

En réécrivant l'inversement de bit en binaire plutôt qu'en décimal:

$$\begin{bmatrix} G(00) \\ G(01) \\ G(10) \\ G(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2(00) \\ g_2(10) \\ g_2(01) \\ g_2(11) \end{bmatrix}$$

On note que les indices entre parenthèses dans G et g_2 sont miroirs: "bit reversal".

La différence de calcul en nombre de multiplications entre TFD et FFT, avec N une puissance de 2: $N = 2^v \Rightarrow v = \log_2(N)$:

N	TFD	FFT
4	16	4
64	4096	192
1024	1048675	5120
32768	1073741824	245760

La transformée de Fourier discrète en 2D:

La transformée de Fourier discrète en 2D est équivalente à la TFD à 1D appliquée sur les colonnes, puis la TFD est appliquée une seconde fois sur les lignes de la matrice résultante.

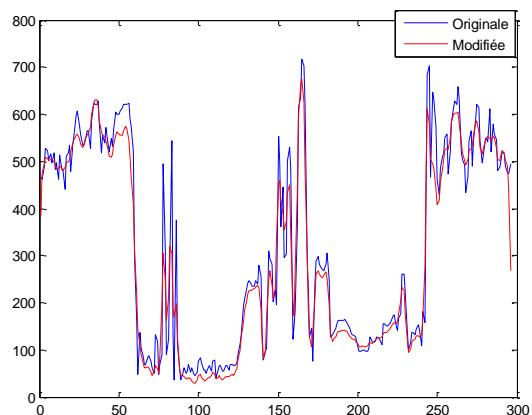
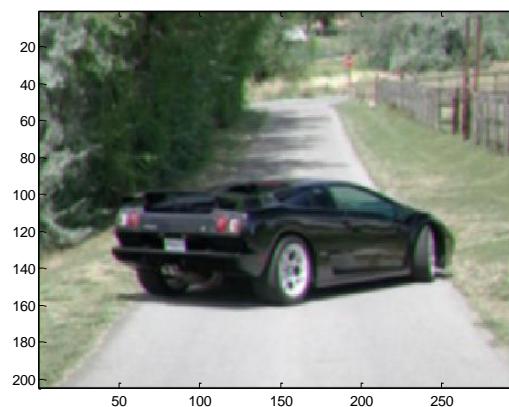
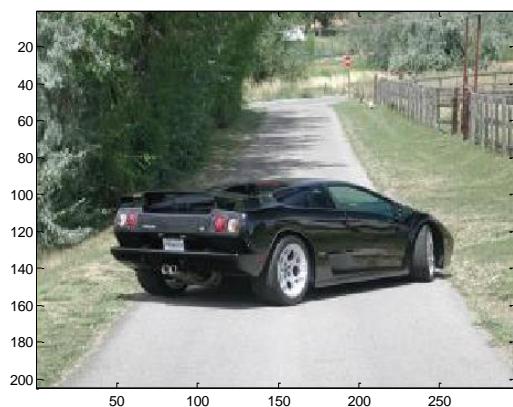
V. La convolution

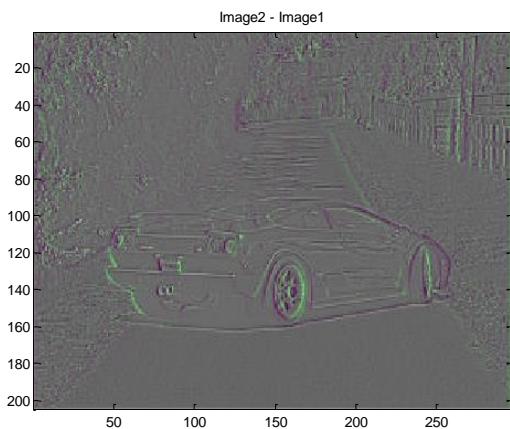
Exemple 1.

Un système de mesure introduit inéluctablement une déformation de l'objet mesuré. Cette déformation est appelée réponse du système.

Un système de mesure numérique est encore plus drastique où une portion de l'objet à mesurer doit être représentée par un point de mesure statistiquement défini (pixel, voxel, intervalle de temps etc...).

L'exemple ci-dessous représente des portions de l'objet par des pixels. Plus la taille des pixels est grosse, plus l'image perd les détails. L'objet est convolué par la fonction de réponse du système de mesure (*point spread function* en anglais).





Exemple 2. Faire la moyenne entre 3 nombres successifs du vecteur $a = [0 \ 4 \ 1 \ 3 \ 6 \ 5 \ 2 \ 0]$ en faisant la moyenne de chaque valeur avec ses deux voisines. (Par exemple dans un but de réduire les écarts entre les valeurs expérimentales a):

$$(0+0+4)/3 = 1.33; (0+4+1)/3=1.67; (4+1+3)/3=2.67.....$$

On trouve: $b = [1.33 \ 1.67 \ 2.67 \ 3.33 \ 4.67 \ 4.33 \ 2.33 \ 0.67]$.

Exemple 3. La moyenne entre les 3 nombres successifs du vecteur précédent peut se faire avec l'opération de convolution:

L'opération de convolution: $b = a \otimes h = h \otimes a$.
$$b(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)h(k-n)$$
 et $0 \leq k \leq N+M-1$ avec N et M sont les longueurs de a et de h respectivement.

et M sont les longueurs de a et de h respectivement.

Exemple d'application de cette formule:

$a=[1 \ 2 \ 3]$, $h=[1 \ 3]$. Calculer $b=a \otimes h$. Nous pouvons utiliser les indices $n=0:N-1$. n est l'indice du vecteur a. Dans cet exemple, les indices de a sont 0, 1 et 2, et les indices de h sont 0 et 1. Les valeurs de a et de h ailleurs qu'à ces indices valent 0. Comme le vecteur a possède 3 valeurs et h possède 2 valeurs, le produit de la convolution b aura $3+2-1=4$ valeurs ce qui implique que b a pour indices k variant de 0 à 3:

n=0	n=1	n=2
$k=0: b(0)=a(0).h(0-0) + a(1).h(0-1) + a(2).h(0-2) = 1.1 + 2.0 + 3.0 = 1$		
$k=1: b(1)=a(0).h(1-0) + a(1).h(1-1) + a(2).h(1-2) = 1.3 + 2.1 + 3.0 = 5$		
$k=2: b(2)=a(0).h(2-0) + a(1).h(2-1) + a(2).h(2-2) = 1.0 + 2.3 + 3.1 = 9$		
$k=3: b(3)=a(0).h(3-0) + a(1).h(3-1) + a(2).h(3-2) = 1.0 + 2.0 + 3.3 = 9$		

L'opération peut-être faite en intervertissant les arguments de a et de h comme suit:

$$b(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k-n)h(n) \text{ et } 0 \leq k \leq N+M-1.$$

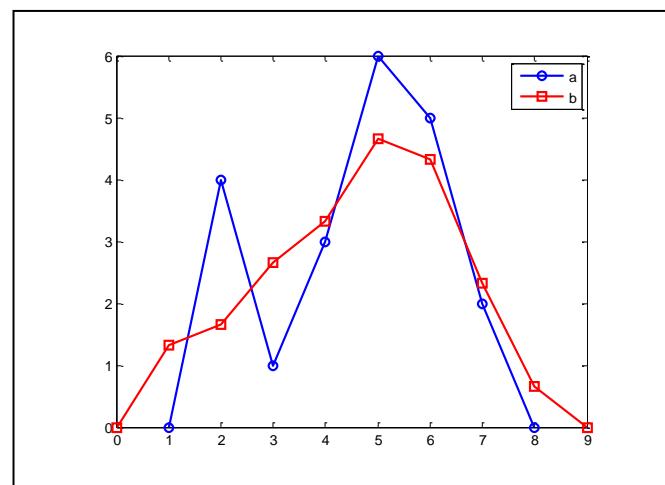
	n=0	n=1	n=2
k=0:	$b(0) = a(0-0).h(0)$	$+ a(0-1).h(1)$	$+ a(0-2).h(2) = 1.1 + 0.3 + 0.0 = 1$
k=1:	$b(1) = a(1-0).h(0)$	$+ a(1-1).h(1)$	$+ a(1-2).h(2) = 2.1 + 1.3 + 0.0 = 5$
k=2:	$b(2) = a(2-0).h(0)$	$+ a(2-1).h(1)$	$+ a(2-2).h(2) = 3.1 + 2.3 + 3.0 = 9$
k=3:	$b(3) = a(3-0).h(0)$	$+ a(3-1).h(1)$	$+ a(3-2).h(2) = 0.1 + 3.3 + 2.0 = 9$

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'évaluer pour $n=2$ car $h(2)=0$, et le calcul se réduit à 2 colonnes correspondant aux valeurs de h .

	0	4	1	3	6	5	2	0	0
0.33	0.33		0.33						1.33
	0.33	0.33	0.33						1.67
		0.33	0.33	0.33					2.67
			0.33	0.33	0.33				3.33
				0.33	0.33	0.33			4.67
					0.33	0.33	0.33		4.33
						0.33	0.33	0.33	2.33
							0.33	0.33	0.67
								0.33	0

Avec $n=3$ valeurs pour h , il faut $m+n-1=10$ opérations de multiplications-additions pour couvrir les $m=8$ valeurs de a .

```
a = [0 4 1 3 6 5 2 0]; h=[1 1 1]; h = h / sum(h);
b = conv(a,h); figure;plot(1:length(a),a,'bo-',
'(1:length(b))-1,b,'rs-','LineWidth',2);
set(gca,'xcolor',[0 0 0], 'ycolor',[0 0
0], 'FontSize',16);
set(gcf,'Color',[1 1 1], 'Position',[280
200 680 500], 'InvertHardCopy','off');
legend('a','b'); print -dmeta convol_ab
```



Exemple 4.

Faire le produit de deux polynômes a et b:

$$a = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x$$

$$b = 2x^2 + x + 3$$

$$\begin{aligned}c = a * b &= (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x)(2x^2 + x + 3) \\&= 2x^6 + 5x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 3x.\end{aligned}$$

Faire la convolution de a et b:

$$a = [1 \ 2 \ 3 \ 1]$$

$$b = [2 \ 1 \ 3]$$

$$c = a \otimes b = [2 \ 5 \ 11 \ 11 \ 10 \ 3]$$

La convolution est une multiplication polynomiale.

Connaissant c et b , on peut retrouver a par une division polynomiale: $a = c/b$.

La déconvolution est une division polynomiale. [La division ne donne pas toujours un quotient sans reste, si bien que le quotient pourrait être très approximatif.]

Exemple 5. L'opération de la convolution vue comme un produit matriciel. Cette approche est utilisée lors des convolutions non-stationnaires.

$$a = [1 \ 2 \ 3 \ 1]$$

$$b = [2 \ 1 \ 3]$$

$$c = a \otimes b = [2 \ 5 \ 11 \ 11 \ 10 \ 3]$$

qui peut s'écrire sous la forme:

$$c = [\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}] \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Exemple 6:

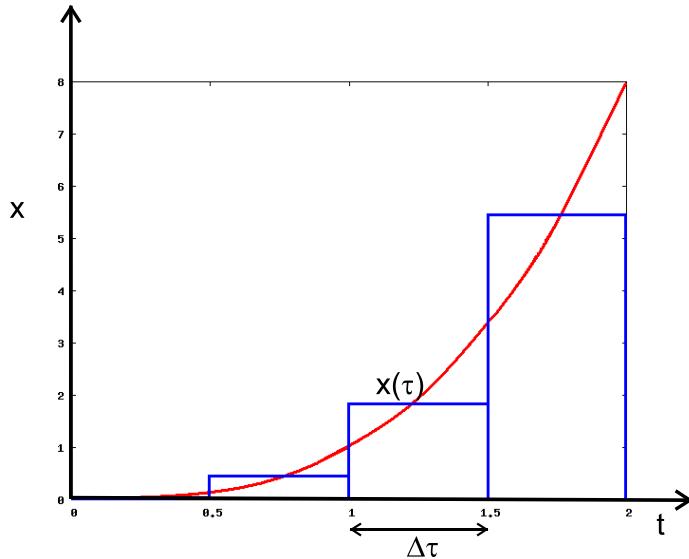


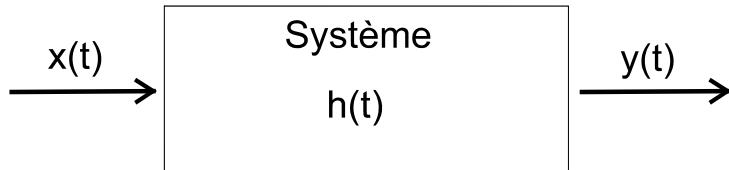
Figure. La courbe $x(t)$ a été mesurée à $t=\tau$ sur un intervalle $\Delta\tau$.

Supposons que les signaux $x(t)$ sont des signaux instantanés delta mesurés pendant $\Delta\tau$.

Ceci équivaut à un signal δ de Dirac pondéré par la surface du rectangle $x(\tau)\Delta\tau : x(\tau)\Delta\tau\delta(\tau)$.

Pour une position quelconque τ_k , ceci devient: $x_k(t)=x(\tau_k)\Delta\tau\delta(t-\tau_k)$.

Ce signal $x_k(t)$ est transformé par un système de fonction de réponse h pour devenir:
 $y_k(t)=x(\tau_k)\Delta\tau h(t-\tau_k)$.



En considérant tous les points de $x(t)$, on trouve:

$$y(t)=\sum_{k=0}^n x(\tau_k)h(t-\tau_k)\Delta\tau$$

et lorsque $\Delta\tau$ tend vers 0: $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Définition de la convolution

La convolution de deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} est donnée par:

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

Ici t est une variable quelconque et ne représente pas uniquement le temps.

La convolution existe et est définie si:

1- $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions de carré intégrable:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} < \infty \text{ et } \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right]^{1/2} < \infty$$

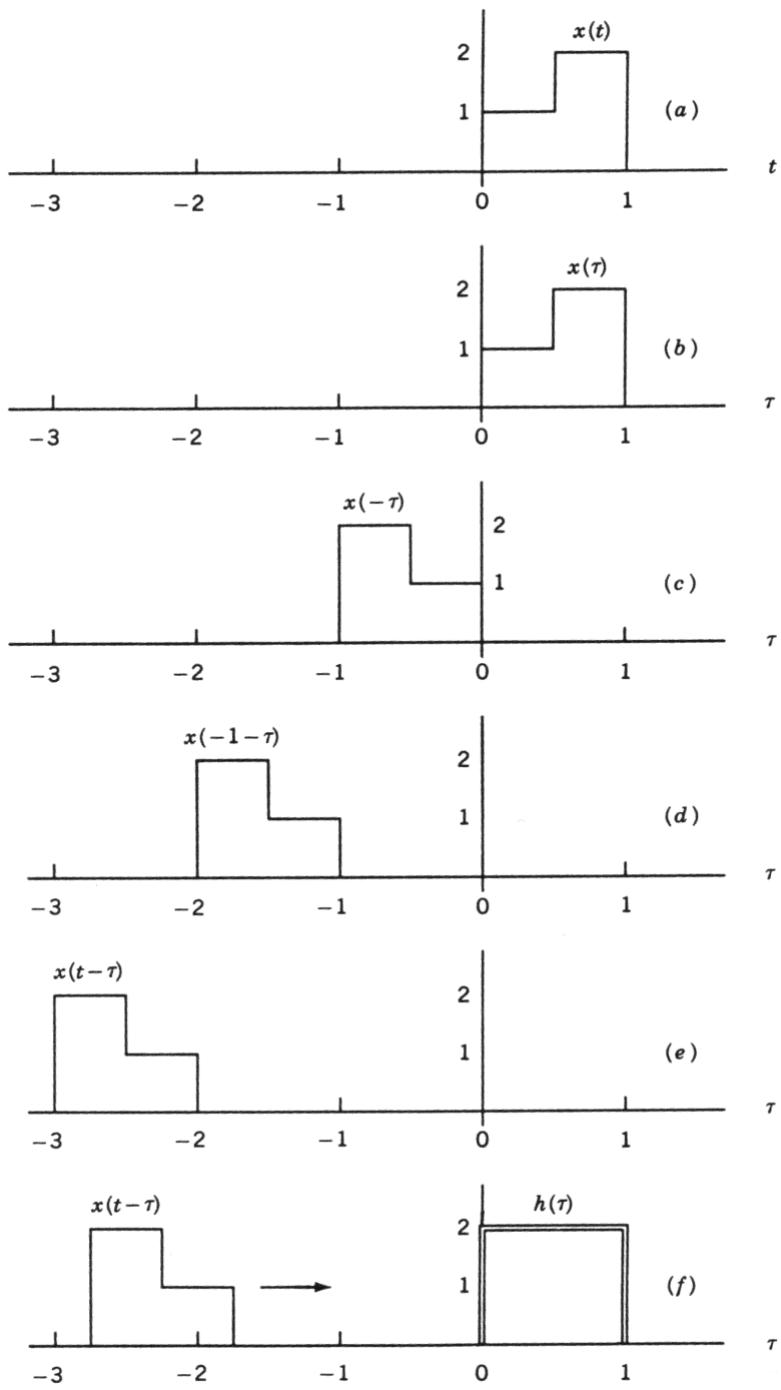
ou bien:

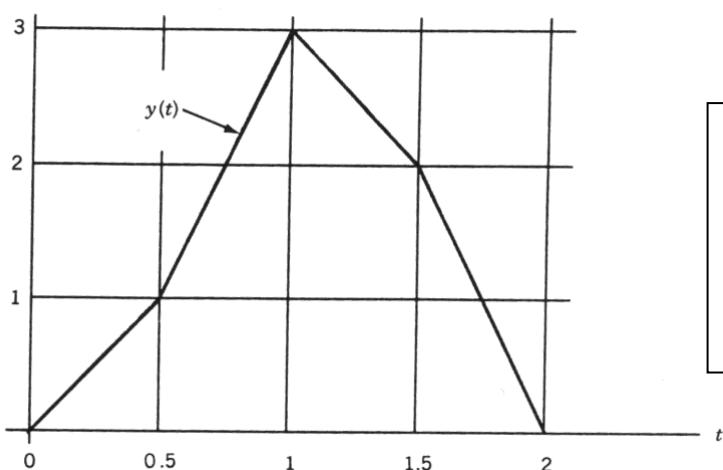
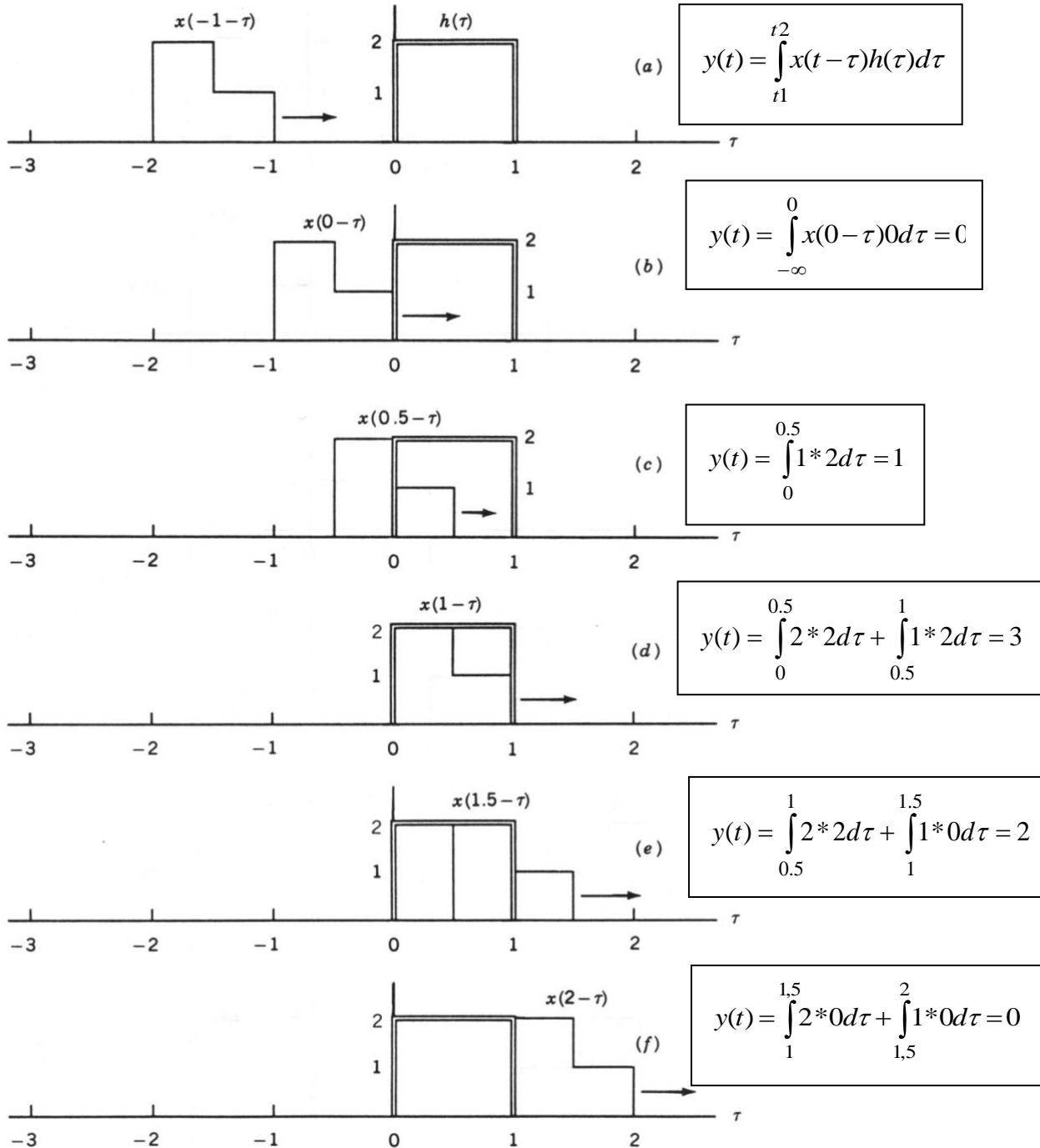
$$|f(t) \otimes g(t)| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(t - \tau)|^2 d\tau \right]^{1/2} < \infty$$

2- $f(t)$ est intégrable et $g(t)$ est bornée.

Exemple 1:

Calcul **graphique** de la convolution.





Par calcul numérique:

```

x = [0 1 2 0];
h = [1 1];
y = conv(x,h)
y = [0 1 3 2 0];

```

Exemple 2.

Calcul **analytique** de la convolution.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = e^{-t} u(t) \quad u(t) = \text{fonction de Heaviside.}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \Leftrightarrow g(t) = t[u(t) - u(t-T)]$$

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau)(t-\tau)[u(\tau)-u(t-\tau)] d\tau$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} t < 0 & f(t) \otimes g(t) = 0 \\ 0 \leq t \leq T & f(t) \otimes g(t) = \int_0^t e^{-\tau}(t-\tau) d\tau = t \int_0^t e^{-\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = [-t e^{-t} + t] + [e^{-t}(t+1) - 1] = e^{-t} + t - 1 \\ t \geq T & f(t) \otimes g(t) = \int_{t-T}^t e^{-\tau}(t-\tau) d\tau = e^{-(t-T)}(T-1) + e^{-t} \end{array} \right.$$

$$\text{Soit } h = f \otimes g. \quad h(t < 0) = 0; \quad h(0 \leq t \leq T) = e^{-t} + t - 1;$$

$$h(t \geq T) = e^{-(t-T)}(T-1) + e^{-t}.$$

```
T=2;ts=0.1;t1=-T:ts:0;h1=0*t1; t2=0: ts:T;h2= exp(-t2) + t2 - 1; t3=T: ts:2*T;h3= exp(-(t3-T))*(T-1) + exp(-t3); t=[t1 t2 t3]; h=[h1 h2 h3]; figure;plot(t,h,'bo-', 'LineWidth',2);
set(gca, 'xcolor', [0 0 0], 'ycolor', [0 0 0], 'FontSize', 16);
set(gcf, 'Color', [1 1 1], 'Position', [280 200 680 500], 'InvertHardCopy', 'off');
xlabel('t');ylabel('Amplitude'); print -dmeta convol_exp1
```

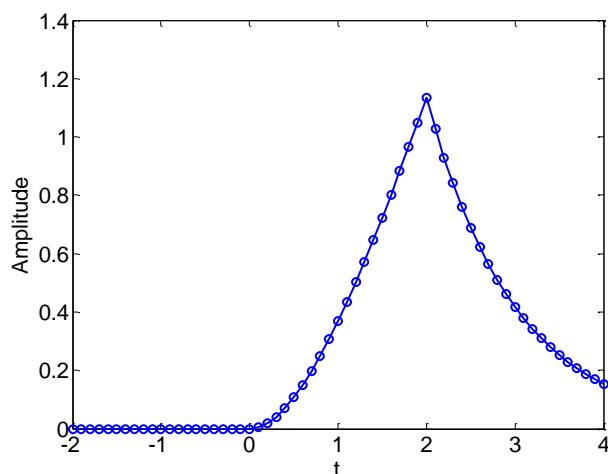


Figure. Graphique de $h = f \otimes g$ calculée analytiquement.

Prenons le même exemple et retrouvons les résultats par la convolution de $f(t)$ et $g(t)$ numériquement:

```
T=2; ts=0.1; t1=-T:ts:0; f1=0*t1; g1=0*t1;
t2=0:ts:T; f2=exp(-t2); g2=t2;
t3=T:ts:2*T; f3=exp(-t3);g3=0*t3;
t=[t1 t2 t3];f=[f1 f2 f3]; g=[g1 g2 g3];
figure;plot(t,f,'bo-',t,g,'rs-','linewidth',2); set(gca, 'xcolor', [0 0 0], 'ycolor', [0 0 0], 'FontSize',16);
set(gcf, 'Color',[1 1 1], 'Position', [280 200 680 500], 'InvertHardCopy', 'off');
xlabel('t');ylabel('Amplitude');legend('f(t)', 'g(t)'); print -dmeta convol_exp2;

h=conv(f,g); imax=find(h==max(h)); t1=(-imax+1)*ts+2:ts:2; t2=2+ts:0.1:(length(h)-imax-1)*ts+2+ts; t=[t1 t2];figure;plot(t,h,'bo-','linewidth',2); set(gca, 'xcolor', [0 0 0], 'ycolor', [0 0 0], 'FontSize',16);
set(gcf, 'Color',[1 1 1], 'Position', [280 200 680 500], 'InvertHardCopy', 'off');
xlabel('t');ylabel('Amplitude');legend('f(t)*g(t)');axis([-4.2 8.1 0 13]); print -dmeta convol_exp3;
```

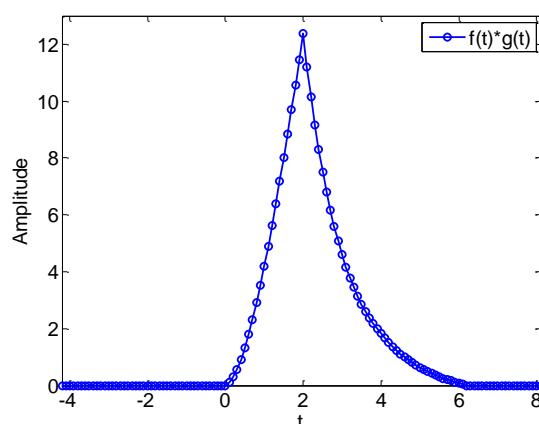
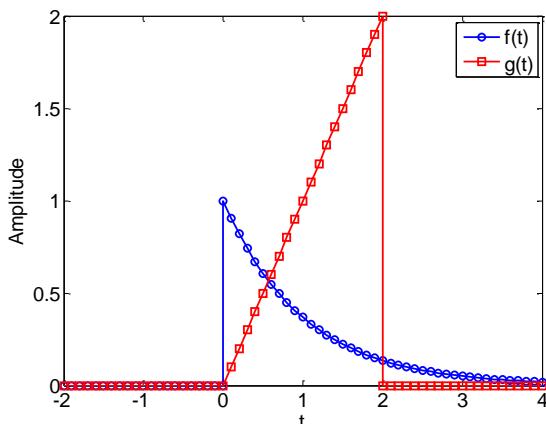


Figure. Graphiques de $f(t)$ et $g(t)$. Figure. Graphique de $h = f \otimes g$.

% t de la dernière figure est utilisé ici, et en normalisant h par rapport à ha :

```
T=2;ts=0.1;t1=min(t):ts:0;h1=0*t1; t2=ts:ts:T;h2= exp(-t2) + t2 - 1; t3=T+ts: ts:max(t);h3= exp(-(t3-T))*(T-1) + exp(-t3); ta=[t1 t2 t3]; ha=[h1 h2 h3]; figure;plot(ta,ha,'bo-',ta,h*tot1(ha)/tot1(h),'r*-','linewidth',2); set(gca,'xcolor',[0 0 0],'ycolor',[0 0 0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 200 680 500],'InvertHardCopy','off'); xlabel('t');ylabel('Amplitude'); legend('f(t)*g(t) analytique', 'f(t)*g(t) numérique');axis([-4.2 8.1 0 1.5]); print -dmeta convol_exp4;
```

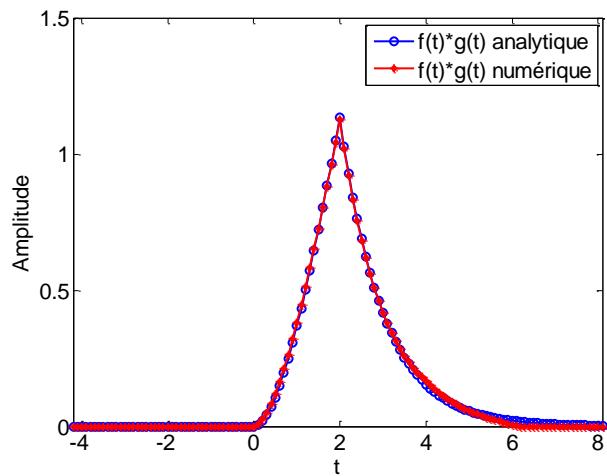


Figure. $h(t)$ analytique et numérique.

Exemple 3:

Calcul analytique de la convolution.

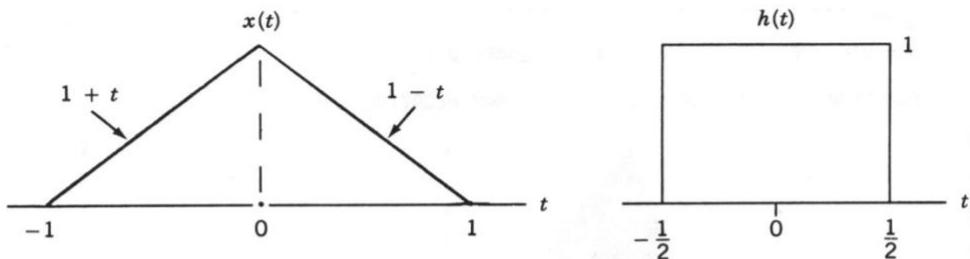


Figure 7.15. $x(t)$ and $h(t)$.

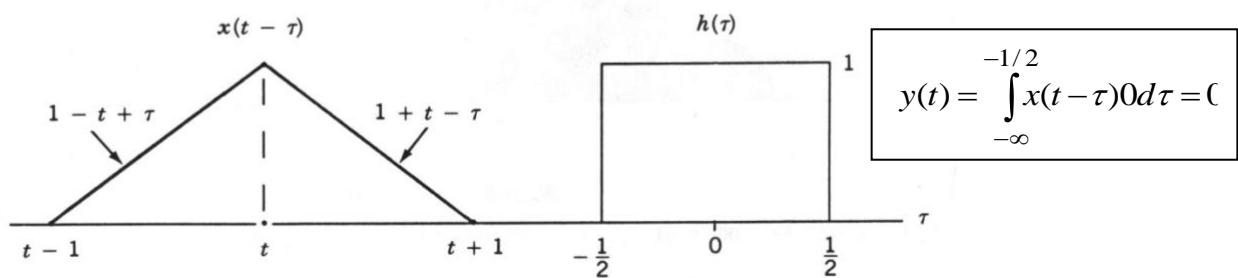


Figure 7.16. Case 1, $t < -\frac{3}{2}$.

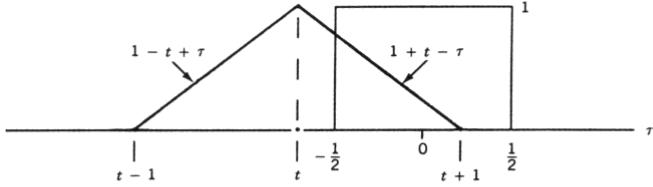


Figure 7.17. Case 2, $-\frac{1}{2} < t < -\frac{1}{2}$.

$$y(t) = \int_{-1/2}^{t+1} (1+t-\tau) * 1 d\tau = \frac{4t^2 + 12t + 9}{8}$$

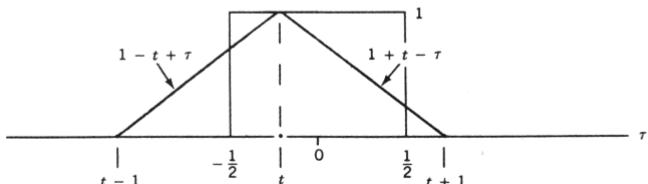


Figure 7.18. Case 3, $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.

$$y(t) = \int_{-1/2}^{t/2} (1-t+\tau) * 1 d\tau + \int_t^{1/2} (1+t-\tau) * 1 d\tau = \frac{-4t^2 + 3}{4}$$

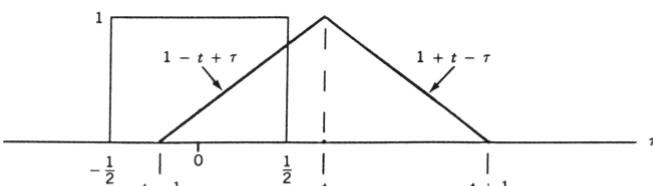


Figure 7.19. Case 4, $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}$.

$$y(t) = \int_{t-1}^{1/2} (1-t+\tau) * 1 d\tau = \frac{4t^2 - 12t + 9}{8}$$

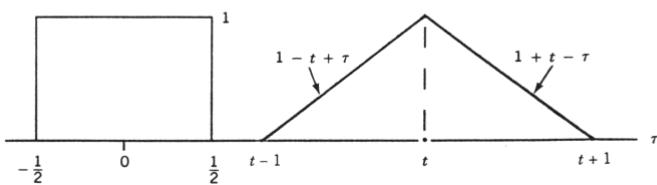
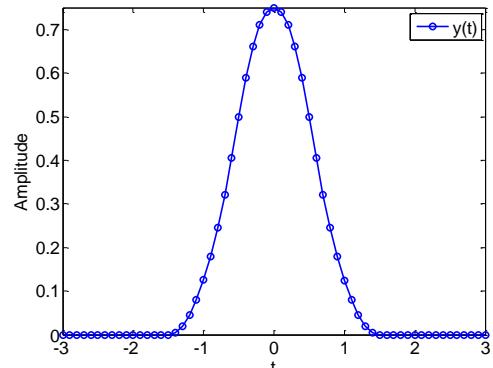


Figure 7.20. Case 5, $\frac{3}{2} < t$.

$$y(t) = \int_{t-1}^{1/2} (1-t+\tau) * 0 d\tau = 0$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < -\frac{3}{2} \right) \\ \frac{9 + 12t + 4t^2}{8} & \left(-\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2} \right) \\ \frac{3 - 4t^2}{4} & \left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \right) \\ \frac{9 - 12t + 4t^2}{8} & \left(\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \right) \\ 0 & \left(\frac{3}{2} < t \right) \end{cases}$$



% Tracer y(t) analytique comme définie ci-dessus:

```
ts=0.1; t1=-3:ts:-3/2; y1=0*t1; t2=-3/2+ts:ts:-1/2; y2=(9+12*t2+4*t2.^2)/8; t3=-1/2+ts:ts:1/2;
y3=(3-4*t3.^2)/4; t4=1/2+ts:ts:3/2; y4=(9-12*t4+4*t4.^2)/8; t5=3/2+ts:ts:3; y5=0*t5; t=[t1 t2
t3 t4 t5]; y=[y1 y2 y3 y4 y5]; figure;plot(t,y,'bo-', 'LineWidth', 2); set(gca, 'Color', [0 0 0], 'FontSize', 16);
set(gcf, 'Color', [1 1 1], 'Position', [280 200 680 500], 'InvertHardCopy', 'off'); xlabel('t'); ylabel('Amplitude');
legend('y(t)'); axis([-4.2 8.1 0 1.5]); print -dmeta convol_triang1;
```

Les propriétés de la convolution:

La commutativité: $g_1(t) \otimes g_2(t) = g_2(t) \otimes g_1(t)$.

$$g_1(t) \otimes g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t - \tau) d\tau$$

En faisant le changement de la variable de $t - \tau = x$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t - x) g_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) g_1(t - x) dx = g_2(t) \otimes g_1(t)$$

L'associativité: $[g_1(t) \otimes g_2(t)] \otimes g_3(t) = g_1(t) \otimes [g_2(t) \otimes g_3(t)]$.

$$f(t) = g_1(t) \otimes g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) g_2(t - y) dy$$

$$f(t) \otimes g_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_3(t - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) g_2(x - y) dy \right] g_3(t - x) dx$$

En substituant $z = x - y$:

$$f(t) \otimes g_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(z) g_3(t - y - z) dz \right] dy$$

$$\text{Soit: } h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(z) g_3(t - z) dz$$

qui donne avec $t = t - y$:

$$h(t - y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(z) g_3(t - y - z) dz$$

$$\begin{aligned} f(t) \otimes g_3(t) &= [g_1(t) \otimes g_2(t)] \otimes g_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y) h(t - y) dy = g_1(t) \otimes h(t) \\ &= g_1(t) \otimes [g_2(t) \otimes g_3(t)] \end{aligned}$$

La distributivité: $g_1(t) \otimes [g_2(t) + g_3(t)] = g_1(t) \otimes g_2(t) + g_1(t) \otimes g_3(t)$.

La convolution et les transformées de Fourier:

$$\omega = 2\pi f.$$

$$\text{TF}[g_1(t) \otimes g_2(t)] = G_1(\omega) G_2(\omega) \text{ et } \text{TFI}[G_1(\omega) G_2(\omega)] = g_1(t) \otimes g_2(t).$$

$$\text{TF}[g_1(t) \otimes g_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(t - x) dx \right] e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t - x) e^{-i\omega t} dt \right] dx$$

à l'aide de la propriété du décalage dans le temps (Time shifting):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) e^{-i \omega t} dt = G_2(\omega) e^{-i \omega}$$

qui est substituée dans l'équation précédente:

$$\begin{aligned} TF[g_1(t)g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)G_2(\omega)e^{-i \omega x} dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)e^{-i \omega x} dx \right] G_2(\omega) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)e^{-i \omega t} dt \right] G_2(\omega) = G_1(\omega)G_2(\omega) \end{aligned}$$

La convolution et les transformées de Fourier inverses:

$$TF[G_1(\omega) * G_2(\omega)] = 2\pi g_1(t)g_2(t)$$

$$\text{et } TF[g_1(t)g_2(t)] = [G_1(\omega) * G_2(\omega)]/2\pi.$$

Le théorème de Parseval:

Soit $TF[g(t)] = G(\omega)$ et $g^*(t)$ est le conjugué de $g(t)$ ==>

$$TF[g^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)e^{i\omega t}]^* dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} [g(t)e^{-i(-\omega)t}] dt \right]^* = G^*(-\omega)$$

De la propriété de la convolution dans l'espace des fréquences qui s'écrit:

$$TF[g_1(t)g_2(t)] = [G_1(\omega) * G_2(\omega)]/2\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(y)G_2(\omega - y) dy$$

qui s'écrit à son tour:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g_1(t)g_2(t)]e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(y)G_2(\omega - y) dy$$

en faisant $\omega = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(y)G_2(-y) dy$$

puis en changeant y en ω dans le membre de droite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2(-\omega) d\omega$$

En prenant le conjugué $g_2^*(t)$ de $g_2(t)$, nous obtenons selon ce qui a été démontré ci-haut

$$TF[g_2^*(t)] = G_2^*(-\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2^*(-\omega)d\omega$$

qui devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega)G_2^*(\omega)d\omega$$

Qui est l'identité de Parseval.

Si on considère $g(t)=g_1(t)$ et $g^*(t)=g_2^*(t)$, l'équation précédente devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G^*(\omega)d\omega$$

qui peut s'écrire:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

Qui est l'identité de Plancherel.

Dans le monde discrèt, la normalisation par (2π) est remplacé par la taille du signal de période N; c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{N-1} |g[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |G[k]|^2$$

1- La corrélation

Définition: La corrélation croisée entre $g_1(t)$ et $g_2(t)$ permet de mesurer le degré de similitude entre les deux fonctions. Si la corrélation croisée vaut 0, les fonctions sont dites non-correlées.

La corrélation croisée est donnée par:

$$r_{12}(s) = g_1 \circ g_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t+s) dt \quad \text{et} \quad r_{21}(s) = g_2 \circ g_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) g_1(t+s) dt$$

L'autocorrelation de la fonction $g_1(t)$ est donnée par:

$$r_{11}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_1(t+s) dt$$

L'autocorrelation peut être normalisée comme suit:

$$\gamma(s) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_1(t+s) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [g_1(t)]^2 dt} \quad \text{et dans ce cas } \gamma(0) = 1.$$

Les définitions ne changent pas en changeant t en $t-s$ dans les corrélations croisées et les autocorrélations.

$$r_{12}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t+s) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-s) g_2(t) dt$$

$$r_{21}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) g_1(t+s) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t-s) g_1(t) dt$$

$$r_{11}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_1(t+s) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-s) g_1(t) dt$$

Propriétés des corrélations:

$$r_{12}(s) = r_{21}(-s)$$

$$r_{11}(s) = r_{11}(-s)$$

Fonctions discrètes:

De façon similaire à la convolution, on utilise un filtre de corrélation h , de préférence avec un nombre impair d'éléments, soit $2N+1$. La corrélation s'écrit:

$$(h \circ g)(n) = \sum_{i=-N}^{N} h(i) g(n+i)$$

Exemple 1.

$g1=[5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 5 \ 3 \ 6]$.

On désire faire la moyenne de 3 éléments consécutifs de $g1$ et obtenir un nouveau vecteur $g2$.

Le noyau serait alors $h=[1/3 \ 1/3 \ 1/3]$, et l'opération de corrélation est similaire à celle de la convolution, mais sans inversion du noyau. Aussi on doit centrer le noyau sur chaque élément de $g1$:

$$g2(1)=h(1)*g1(0)+ h(2)*g1(1)+ h(3)*g1(2) = [0*1/3 + 5*1/3 + 4*1/3]$$

..

..

$$g2(4)= h(1)*g1(3)+ h(2)*g1(4)+ h(3)*g1(5) = [2*1/3 + 3*1/3 + 7*1/3]$$

..

..

Puisque la moyenne sur le 1er élément de $g1$ se fait seulement sur 2 éléments, on doit soit ajouter un 0 à gauche du 1er élément et à droite du dernier élément de $g1$ (zero padding); ou bien répéter une fois le 1er élément de $g1$ à gauche et le dernier élément de $g1$ à droite. Ces arrangements dépendent de l'application sous étude.

Exemple 2.

Calcul des dérivées dans un vecteur: $h=[-1/2 \ 0 \ 1/2]$ qui permet de calculer $[g1(i+1) - g1(i-1)]/2$.

Exemple 3.

Retrouver un signal dans un vecteur (ou dans une image). Soit un modèle h du signal recherché. On le fait parcourir sur le vecteur $g1$ pour localiser la partie de $g1$ qui ressemble (qui est corrélée) à h . Pour quantifier la ressemblance, on calcule la somme des carrés des différences entre h et la partie correspondante de $g1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=-N}^N [h(i) - g1(n+i)]^2 &= \sum_{i=-N}^N [h(i)^2 + g1(n+i)^2 - 2h(i)g1(n+i)] \\ &= \sum_{i=-N}^N h(i)^2 + \sum_{i=-N}^N g1(n+i)^2 - 2 \sum_{i=-N}^N h(i)g1(n+i) \end{aligned}$$

Cela revient à calculer la somme du carré du noyau, la somme du carré de la partie de g1 correspondante et 2 fois la corrélation. Plus ce nombre calculé est faible, plus h est corrélé avec cette partie de g1.

$$g1=[5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6 \ 5 \ 3 \ 6]; h=[3 \ 7 \ 4];$$

$$\sum_{i=-N}^N h(i)^2 = 3^2 + 7^2 + 4^2 = 74$$

$$\sum_{i=-N}^N g1(n+i)^2 = [.....]$$

$$2 \sum_{i=-N}^N h(i)g1(n+i) = [.....]$$

Quelle est la partie de g1 la plus corrélée à h?

Le théorème d'échantillonnage.

Une fonction analytique et continue peut être représentée par des échantillons en vue d'un traitement numérique: les échantillons devraient représenter la fonction analytique de départ, c'est à dire, à partir des échantillons, on est en mesure de reproduire la fonction.

Nous avons d'abord besoin des résultats de convolution impliquant la fonction Dirac.

La convolution avec la fonction δ de Dirac

$$g(t) \otimes \delta(t) = g(t)$$

$$g(t) \otimes \delta(t) = \delta(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) g(t-s) ds = g(t)$$

$$g(t) \otimes \delta(t-T) = g(t-T)$$

$$g(t) \otimes \delta(t-T) = \delta(t-T) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-T) g(t-s) ds = g(t-T)$$

$$G(w) \otimes \delta(w-w_0) = G(w-w_0)$$

Nous avons donc déjà vu les propriétés de la fonction δ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

et le peigne de Dirac ou train d'impulsions:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s) \quad \text{avec } T \text{ la période et } t_s \text{ le temps d'échantillonnage.}$$

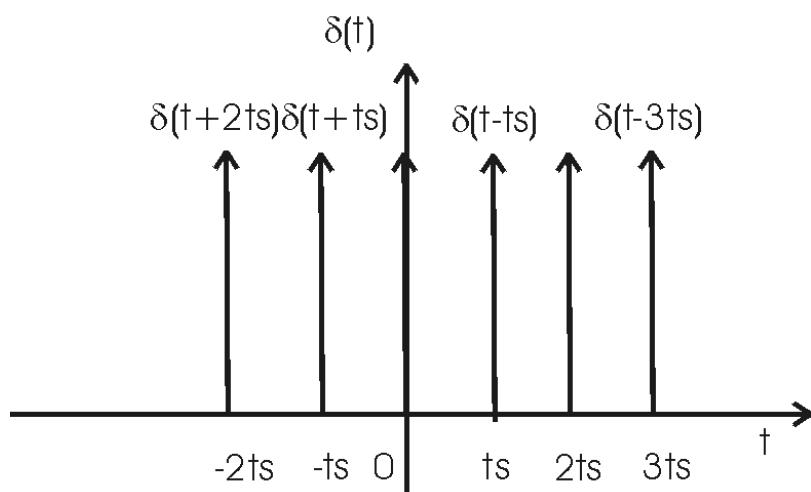


Figure. Peigne de Dirac ou train d'impulsions.

L'échantillonnage d'une fonction $x(t)$ est une procédure mathématique où cette fonction est multipliée par un train d'impulsions.

$$x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_s) \delta(t - nt_s)$$

où $x_s(t)$ est la fonction échantillonnée.

Exemple 1.

D'abord, on ne peut tracer une fonction numériquement (par ordinateur) si elle n'est pas échantillonnée. L'échantillonnage sert donc à cette fin, c'est à dire pour le traitement numérique de fonctions ou d'images.

Nous traçons ici une fonction sinus échantillonnée finement pour être représentée comme fonction analytique, ensuite nous l'échantillonons avec un train d'impulsions.

```
t=-2*pi:0.01:2*pi; f0=0.5; y=2*sin(2*pi*f0*t);ts=20;ii=1:ts:length(t);t0=t(ii);[t,d]=delta(t,t0);
figure;plot(t,y,'b-',t,d,'r-','LineWidth',2); set(gca,'xcolor',[0 0 0],'ycolor',[0 0 0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 200 680 500],'InvertHardCopy','off'); xlabel('t'); ylabel('Amplitude'); legend('y(t)', '\delta(t-nt_s)'); axis([-2*pi 2*pi -2.2 2.2]);
print -dmeta convol_echant1;
ys=y.*d;t2=t;t2(find(ys==0))=[];ys(find(ys==0))=[];figure;plot(t2,ys,'bo-','LineWidth',2);
set(gca,'xcolor',[0 0 0],'ycolor',[0 0 0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 200 680 500],'InvertHardCopy','off'); xlabel('t'); ylabel('Amplitude'); legend('y_s(t)');
axis([-2*pi 2*pi -2.2 2.2]);
print -dmeta convol_echant2;
```

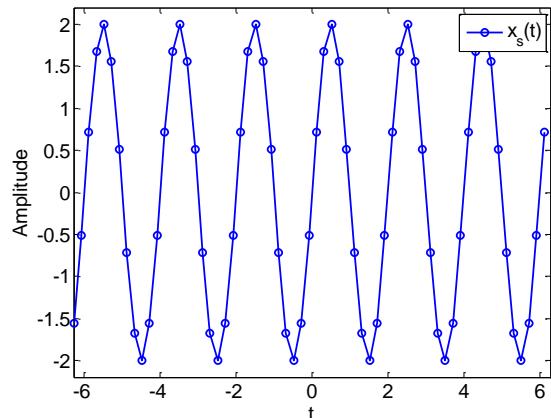
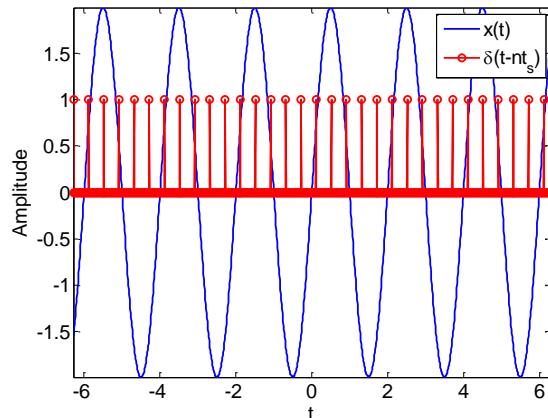


Figure. Échantillonnage de la fonction $y=2\sin(2\pi f_0 t)$.

Les effets de l'échantillonnage sont mieux étudiés dans l'espace de Fourier.

Nous avons vu que la transformée de Fourier de δ s'exprime:

$$TF[\delta(t - t_0)] = \exp(-i\omega_0 t_0)$$

La transformée de Fourier d'un train d'impulsions espacées d'une période t_s est un train d'impulsions espacées d'une période $\omega_s = 2\pi/t_s$:

$$TF\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s)\right] = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

Utilisons aussi la propriété de la convolution de deux fonctions:

$$TF[g_1(t)g_2(t)] = \frac{1}{2\pi} [G_1(\omega) * G_2(\omega)]$$

et assimilons g_1 à la fonction x et g_2 à au train d'impulsions $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s)$:

$$\begin{aligned} TF\left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s)\right] &= \frac{1}{2\pi} \left[X(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] \\ \Rightarrow TF[x_s(t)] &= X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[X(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] \\ \Rightarrow X_s(\omega) &= \frac{1}{t_s} \left[X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] && \text{avec } 1/t_s = \omega_s/2\pi \\ \Rightarrow X_s(\omega) &= \frac{1}{t_s} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \right] \\ \Rightarrow X_s(\omega) &= \frac{1}{t_s} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \right] \end{aligned}$$

- La bande f_b des fréquences délimitant le signal dépend du temps d'échantillonnage: $f_b = 1/t_s$.
- Le signal devrait donc être contenu entre $-f_b/2$ et $f_b/2$.
- Le spectre $X_s(f)$ est une succession de copies du spectre original $X(f)$. $X_s(f)$ est une fonction périodique de période f_b .
- La transformée de Fourier $X(f)$ de la fonction $x(t)$ se répète sans recouvrement tant que $f_0 \leq f_b/2$. Habituellement on exprime la bande de $-B$ à B , ou de $-f_{\max}$ à f_{\max} , et dans ce cas, il n'y a pas recouvrement des fonctions périodiques $X(f)$ si $f_0 \leq 2B$ ou $f_0 \leq 2f_{\max}$.
- Soit $x(t)$ un signal de spectre $X(f)$ à bande limitée contenu entre $-f_b/2$ et $f_b/2$. La fonction $x(t)$ peut être reconstruite à partir de ses échantillons à intervalles réguliers ssi la fréquence d'échantillonnage f_b est supérieure au double de la fréquence maximale du

signal. La fréquence d'échantillonnage critique est appelée la fréquence de Nyquist: $f_{\text{Nyquist}} = f_b/2$.

► Si la fréquence d'échantillonnage n'est pas assez élevée, les composantes du signal ayant des fréquences plus grandes peuvent apparaître à d'autres endroits, corrompant ainsi le signal: repliement (folding) ou recouvrement (aliasing).

► Une fonction périodique doit être échantillonnée au moins 2 fois par période pour éviter le recouvrement (l'aliasing).

Exemple 2.

Le repliement (folding):

Lorsqu'une fréquence d'une fonction périodique se trouve à l'extérieur de la bande des fréquences, cette fréquence se replie à l'intérieur de la bande des fréquences.

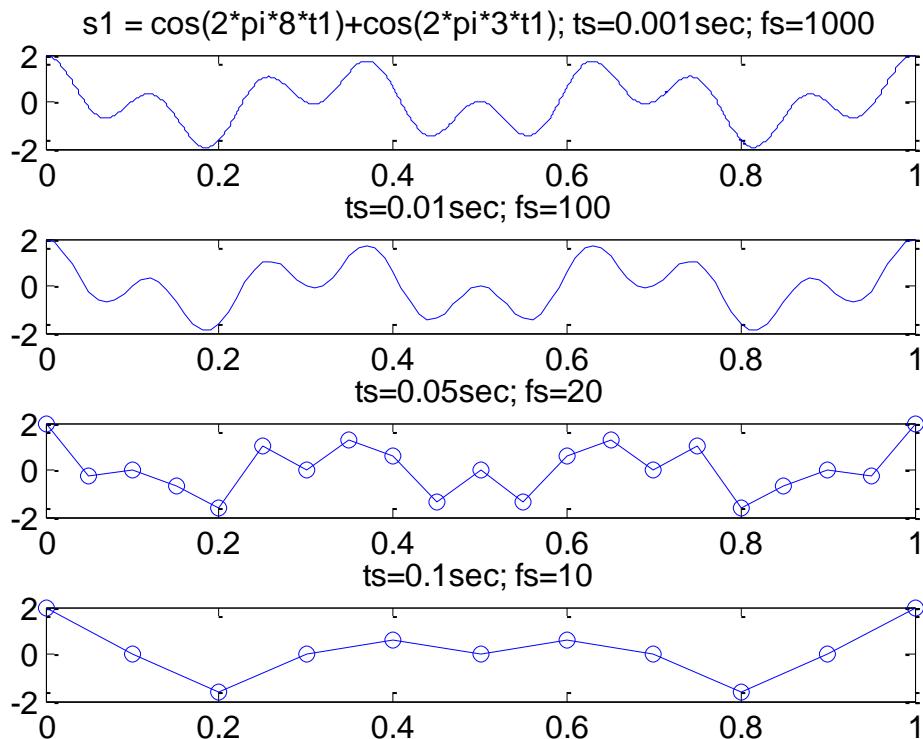


Figure. Un signal s fait de $\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1=8$ Hz ($T_1=0.125$ sec) et $f_2=3$ Hz ($T_2=0.333$ sec) pour une période globale $T=1$ sec et échantillonné aux 4 ts comme indiqués sur les figures. Avec ts 0.1 sec, le graphique du bas montre que l'on ne peut avoir le minimum de 2 échantillons par période pour la fréquence f_1 , et donc les fréquences de 8 Hz seront mal positionnées sur le graphique des fréquences ci-dessous. En fait, $f_1 = -8$ et 8 Hz se replient autour de la bande limite $-fs/2 = -5$ et $fs/2 = 5$ et se retrouvent à -2 et à 2 Hz, respectivement. L'autre fréquence $f_2=3$ Hz est correctement échantillonnée et elle est donc correctement reproduite sur le graphique du bas de la figure des fréquences ci-dessous. Résultat, par cet échantillonnage incorrect, les fréquences de 8 Hz et 3 Hz se recouvrent et ne permettent donc pas une étude correcte du signal.

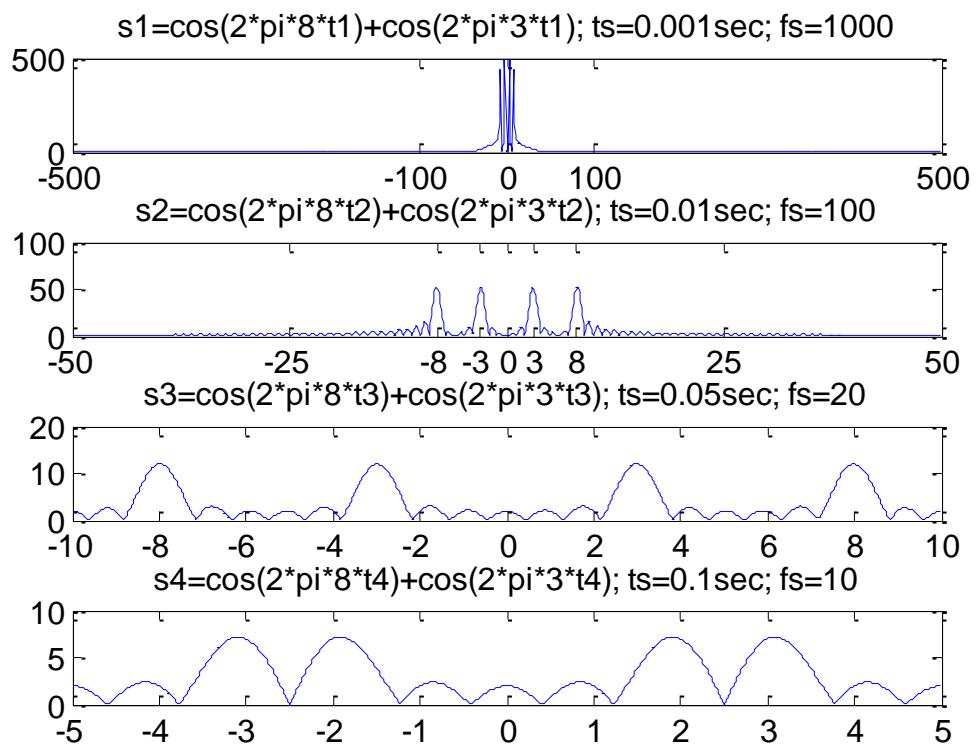


Figure. Graphiques des 4 signaux précédents et localisation des deux fréquences d'intérêt $f_1=8$ Hz et $f_2=3$ Hz. Sur le graphique du bas, la bande se limite à 5 Hz, et ne peut contenir la fréquence $f_1=8$ Hz, qui se replie et se retrouve à -2 et 2 Hz.

Exemple 3.

Le recouvrement (empilement, aliasing):

Une gaussienne et sa transformée de Fourier.

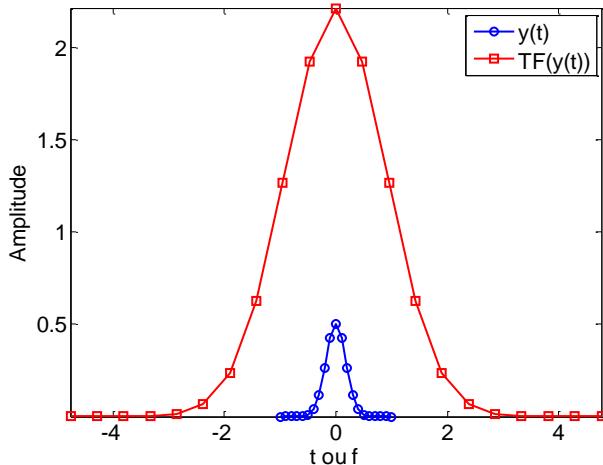


Figure. $t=-1:0.1:1$; $a=[0.5 \ 4]$; $y=a(1)*\exp(-a(2)^2*t.^2)$. Bande = -5 à 5 Hz.

La gaussienne et sa transformée de Fourier répétée sur 6 bandes de fréquences avec un échantillonnage adéquat.

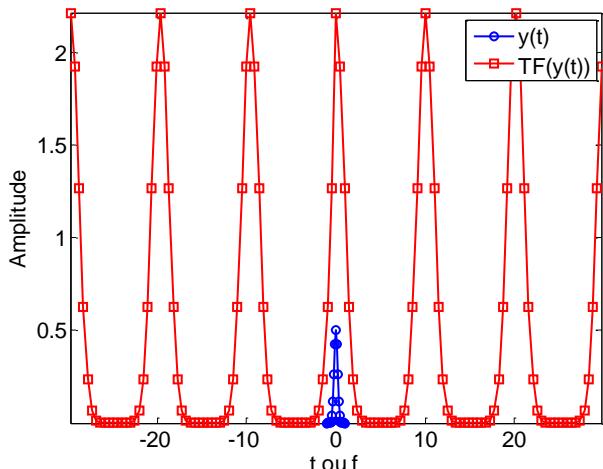


Figure. $t=-1:0.1:1$; $a=[0.5 \ 4]$; $y=a(1)*\exp(-a(2)^2*t.^2)$. Les signaux sont reproduits sur 6 bandes de 6^*-5 à 6^*5 Hz. Les signaux sont contenus chacun dans sa bande et ils sont donc séparés les uns des autres avec un échantillonnage de $ts=0.1$ sec.

La gaussienne et sa transformée de Fourier répétée sur 6 bandes de fréquences avec un échantillonnage inadéquat, où les signaux se recouvrent.

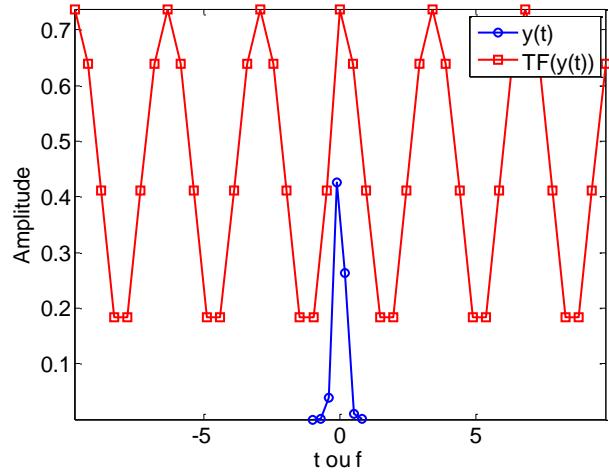


Figure. $t=-1:0.3:1$; $a=[0.5 \ 4]$; $y=a(1)*\exp(-a(2)^2*t.^2)$. Les signaux sont reproduits sur 6 Bandes de $6*-1.66$ à $6*1.66$. Les signaux sont contenus chacun dans sa bande, mais l'échantillonnage de $ts=0.3$ sec ne permet pas de les séparer correctement et on note le recouvrement des signaux.

Le théorème de l'échantillonnage dans le domaine temporel:

Puisque le $X_s(\omega)$ est une fonction périodique: $X_s(\omega) = \frac{1}{t_s} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0) \right]$

elle peut être développée en séries de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n/tT} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi n/tT} dt \quad \text{avec}$$

$$\omega = 2\pi/T.$$

dans le cas de $X_s(\omega)$, la variable est ω et la période est ω_0 :

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n\omega/\omega_0} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} X_s(\omega) e^{-i2\pi n\omega/\omega_0} d\omega$$

Puisque $X_s(\omega)$ est constitué des fonctions $X(\omega)$ comprises entre $-\omega_M$ et ω_M et que $\omega_0 \geq 2\omega_M$, où $\omega_M = 2\pi B$.

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{-i2\pi n\omega/\omega_0} d\omega$$

$$\text{En faisant la transformée de Fourier inverse avec } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

et en considérant que $x(t)$ est à bande limitée, c'est-à-dire: $X(\omega) = 0$ pour $|\omega| > \omega_M$, la transformée de Fourier inverse devient:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Remplaçant dans l'expression de $x(t)$, t par $-nt_s = -n2\pi/\omega_0$:

$$x\left(-\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{-i2\pi n\omega/\omega_0} d\omega$$

En comparant cette dernière expression avec celle de c_n :

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} x\left(-\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = t_s x(-nt_s)$$

À la limite $t_s = 1/f_s = \pi/\omega_M = 1/2f_0 = 1/2f_{Nyquist} = 1/2B$, c_n devient:

$$c_n = t_s x(-nt_s) = \frac{\pi}{\omega_M} f(-nt_s)$$

qui est substituée dans l'expression de $X_s(\omega)$:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i 2\pi n \omega / \omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nt_s) e^{i \omega t_s}$$

Puisque $X_s(\omega) = X(\omega)$ pour $\omega < \omega_M$, $X_s(\omega)$ peut substituer $X(\omega)$ dans l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nt_s) e^{i \omega t_s} \right] e^{i\omega t} d\omega$$

En interchangeant l'ordre de la sommation et de l'intégration:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(-nt_s) \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \frac{1}{2\omega_M} e^{i(t+nt_s)\omega} d\omega \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nt_s) \sin c[\omega_M(t+nt_s)]$$

en changeant n en $-n$ car autant les n positifs que négatifs sont inclus dans la sommation:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n t_s) \sin c[\omega_M(t-n t_s)] \quad \text{avec } \omega_M = \pi/t_s.$$

Conclusion: avec au moins 2 échantillons par période, une fonction peut être reproduite avec précision.

Le théorème de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel:

Le théorème de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences établit que si une fonction $x(t)$ est à bande limitée et échantillonnée à des intervalles réguliers t_s , soit $\text{FT}[x(t)](f)=0$ pour $|f|>f_s/2$ avec $f_s=1/t_s$, alors sa transformée de Fourier $X(f)$ peut être déterminée à partir d'échantillons $X(n\pi/t_s)$:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n\pi}{t_s}\right) e^{i\omega t_s - n\pi}$$

Exemple 1.

$t1=-30; t2=30; ts=0.01; t=t1:ts:t2; f0=0.04; g=4*\cos(2\pi f0 t);$ %échantillonée à W.

L'échantillonnage W affecte la position de la fréquence f_0 sur le graphique de la TF (graphique en mauve), et aussi le nombre d'échantillons par période (points en bleus sur courbes en rouges).

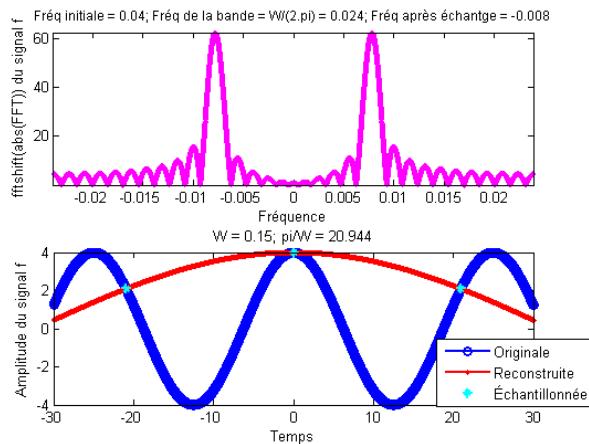


Figure. $W=0.15$.

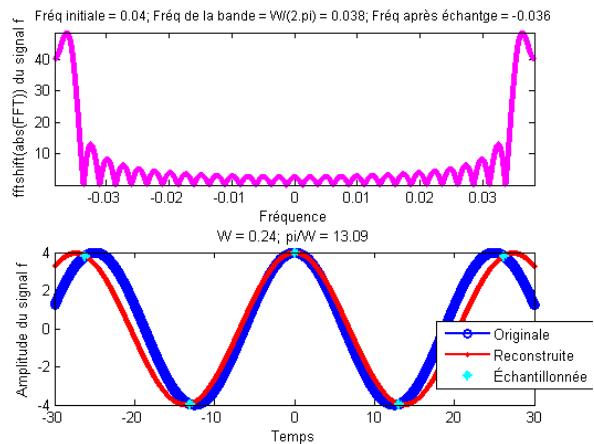


Figure. $W=0.24$.

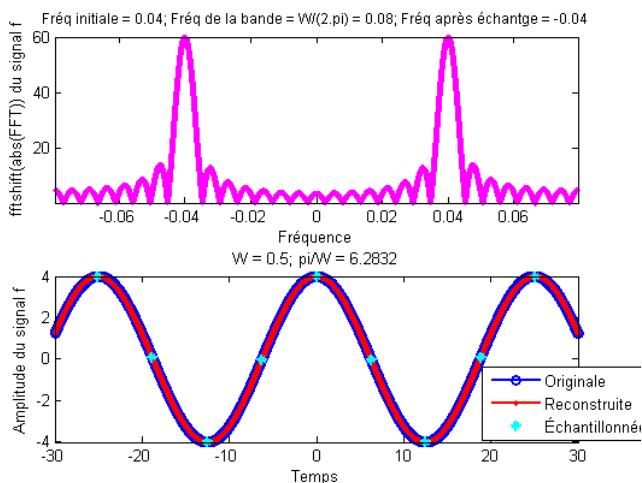


Figure. $W=0.5$.

Exercices:

Exercice 1.

Soit la matrice a:

$$a = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

- 1- Trouver un noyau de convolution $h=[h_1 \ h_2]$ qui permet de faire la moyenne de deux éléments consécutifs.
- 2- Calculer la matrice ac , obtenue de la convolution de a par h sur les colonnes.
- 3- Calculer la matrice acl , obtenue de la convolution de ac par h sur les lignes.
- 4- Trouver un noyau de convolution $h4=[h_{11} \ h_{12} ; h_{21} \ h_{22}]$ qui permet de faire la moyenne sur 4 éléments voisins dans a , i.e. 2 sur une ligne et 2 sur une colonne.
- 5- Appliquer $h4$ à la matrice a .

Exercice 2.

- 1- échantillonner et reconstruire la fonction f avec $t1=-30$; $t2=30$; $ts=0.01$; $t=t1:ts:t2$; $f_0=0.04$; $f=4*\sin(2*pi*f_0*t)$.
- 2- Changer des paramètres comme l'échantillonnage et la fréquence et observer les effets.

Exercice 3.

- a) À partir de l'image 3D du cerveau de chat remise dans le TP3.
- b) Fabriquer une image faite d'un bruit aléatoire ayant la même dimension que $d1$, puis l'ajouter à $d1$, ensuite afficher le résultat:
- c) Prendre le n -ième profil de $d1$ et de $d1n$ et calculer leur transformée de Fourier (FFT), puis les afficher:
- d) Le bruit est localisé à haute fréquence dans la transformée de Fourier d'un signal bruité. Quelle serait la fréquence de coupure fc dans la fft du profil qui permettrait de retrouver le profil de départ?
- d1) Par mise à zéro des valeurs de la TF au-delà de fc .
- d2) Par filtrage "doux" en utilisant le filtre de butterworth.

Autres bases orthogonales

- Transformée en cosinus discrète (TCD, en anglais discrete cosine transform: DCT)
- TCD locale
- Transformée à fenêtre coulissante (Gabor et autres)
- Analyse en composante principal

Transformée de Fourier en cosinus

La transformée de Fourier en cosinus d'une fonction $g(t)$ est la transformée de Fourier de la partie paire de $g(t)$. Si $g_{\text{pair}}(t) = g_p(t)$:

$$g_p(t) = g(t) \text{ si } t > 0; \text{ et } g_p(t) = g(-t) \text{ si } t < 0.$$

Par définition $TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$

$$TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_p(t) [\cos(2\pi ft) - i \sin(2\pi ft)] dt$$

$$G_{\cos}(f) = G_c(f) = 2 \int_0^{\infty} g(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Ex. Trouver la transformée de Fourier en cosinus de $g(t) = \exp(-a|t|)$ avec $a > 0$ pour $|t| < \infty$.

Réponse : $G(f) = 2a/(a^2 + 4\pi^2 f^2)$

Transformée de Fourier en sinus

La transformée de Fourier en sinus d'une fonction $g(t)$ est la transformée de Fourier de la partie impaire de $g(t)$. Si $g_{\text{impair}}(t) = g_i(t)$:

$$g_i(t) = g(t) \text{ si } t > 0; \text{ et } g_i(t) = -g(-t) \text{ si } t < 0.$$

Par définition $TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$

$$TF[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) [\cos(2\pi ft) - i \sin(2\pi ft)] dt$$

$$G_{\sin}(f) = G_s(f) = -2i \int_0^{\infty} g(t) \sin(2\pi ft) dt$$

La transformée de Fourier en cosinus discrets (DCT dans la Toolbox image processing de Matlab)

- Extrêmement important pour les signaux **réels** (sons, images, vidéos)
- Possibilité d'exploiter la propriété de symétrie (TF d'une fonction réelle et symétrique est réelle et symétrique)
- Toute l'information du signal est concentrée dans les basses fréquences. C'est la propriété de "strong energy compaction". C'est pourquoi la DCT est à la base de JPEG, MPEG. Très bon pour la compression.
- Moyen de faire mieux en faisant de la DCT locale. C'est-à-dire faire N approximations locales en faisant N DCT indépendante dans des fenêtres locales. (*locDCT*)

Voir diapositives, notes, TP 4 et démonstrations faites en classe.

Les limites de la Transformée de Fourier

Défauts majeurs de la TF

- 1- Une information sur un moment du signal est répandue parmi toutes fréquences de sa transformée (pensez à la $\text{TF}[\text{Dirac}] = 1$).
- 2- Pas d'information sur le temps ou espace. La TF donne le contenu fréquentiel d'un signal sans donner la localisation. Il est possible de savoir quand ou où une certaine a eu lieu dans le signal original. Ce manque d'information sur le temps (espace) rend une TF terriblement sensible aux erreurs.

Exemples :

- Si nous enregistrons un signal d'une heure et que les 5 dernières minutes sont corrompues, alors cette erreur corrompt TOUTE la TF.
- Les erreurs de phases sont désastreuses. Elles risquent d'engendrer un signal totalement différent du signal original

Transformée de Karhunen-Loeve (TKL)

La TKL ou APC (PCA en anglais et dans la Image Processing Toolbox de Matlab) est une représentation extrêmement utilisé en analyse de données et d'images. Elle est aussi appelée Transformée de Hotelling, Transformée en composantes principales, Transformée en vecteurs propres.

Cette section est pour votre culture personnelle et pour vos connaissances en tant qu'expert en imagerie. Vous ne serez pas questionné sur cette partie dans l'examen final.

La transformation des coordonnées: rotation

La rotation d'un repère d'un angle θ est équivalente à une transformation des coordonnées par une matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Ainsi le point P de coordonnées (x,y) dans le repère (x,y) a pour coordonnées (X,Y) dans le nouveau repère (X,Y) obtenu par rotation de (x,y) par un angle θ (Figure ci-dessous).

Ceci peut être démontré comme suit et selon la figure ci-dessous:

$$X = r \cos(\phi)$$

$$Y = r \sin(\phi)$$

et

$$x = r \cos(\phi + \theta) = r(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)) = [r \cos(\phi)]\cos(\theta) - [r \sin(\phi)]\sin(\theta) = [X]\cos(\theta) - [Y]\sin(\theta)$$

$$y = r \sin(\phi + \theta) = r(\sin(\phi)\cos(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)) = [r \sin(\phi)]\cos(\theta) + [r \cos(\phi)]\sin(\theta) = [Y]\cos(\theta) + [X]\sin(\theta)$$

qui s'écrit comme suit:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = X \cos(\theta) - Y \sin(\theta) \\ y = X \sin(\theta) + Y \cos(\theta) \end{cases}$$

Pour chercher l'expression de (X,Y) en fonction de (x,y) , prendre le système d'équations précédent et le résoudre pour (X,Y) :

$$x = X \cos(\theta) - Y \sin(\theta)$$

$$y = X \sin(\theta) + Y \cos(\theta)$$

De la 1ère équation: $X = \frac{x + Y \sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ à substituer dans la 2ème équation:

$$y = \frac{x + Y \sin(\theta)}{\cos(\theta)} \sin(\theta) + Y \cos(\theta) = \frac{x \sin(\theta) + Y \sin^2(\theta) + Y \cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{x \sin(\theta) + Y}{\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow Y = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x + Y \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{x + (-x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{x(1 - \sin^2(\theta)) + y \cos(\theta) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \\
 &\frac{x \cos^2(\theta) + y \cos(\theta) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\
 \Rightarrow \quad \begin{cases} X = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ Y = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{cases}
 \end{aligned}$$

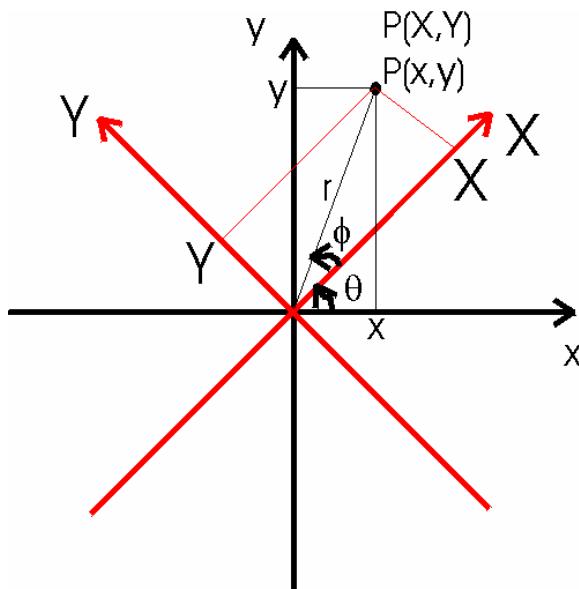


Figure. Rotation du repère xy vers le repère XY par un angle de rotation θ .

Compression de données

TKL permet de décorrélérer un signal et de compacter les informations contenues dans un signal.

Dans une image, il y a une grande corrélation entre les pixels voisins. C'est à dire, en connaissant l'intensité d'un pixel, on peut savoir l'intensité de son voisin.

Exemple 1.

Le poids est corrélé à la taille (ici les taille 0 cm et poids 0 kg sont mis pour forcer le passage de la régression linéaire par 0 pour faciliter le calcul de la rotation).

Taille (cm)	Poids (kg)
a=[0	0
162.5	76.5
187.5	84.6
150	67.5
175	76.5
140	58.5
200	91.35

```

170      72
125      49.5
100      36];

```

Mettre $a(:,1) = \text{taille}$; $a(:,2) = \text{poids}$. Ajuster les données par une droite et l'afficher:
 $p=\text{polyfit}(a(:,1),a(:,2),1); y=\text{polyval}(p,a(:,1));$
 $\text{figure}; \text{plot}(a(:,1),a(:,2),'bo',a(:,1),y,'r-','LineWidth',2);$
 $\text{set(gca,'xcolor',[0 0 0],'FontSize',16); set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 100 800 600]},$
 $\text{'InvertHardCopy','off'}); \text{xlabel('Taille (cm)'})$; $\text{ylabel('Poids (kg)'})$; $\text{print -dtiff tkl-poids-taille1}$

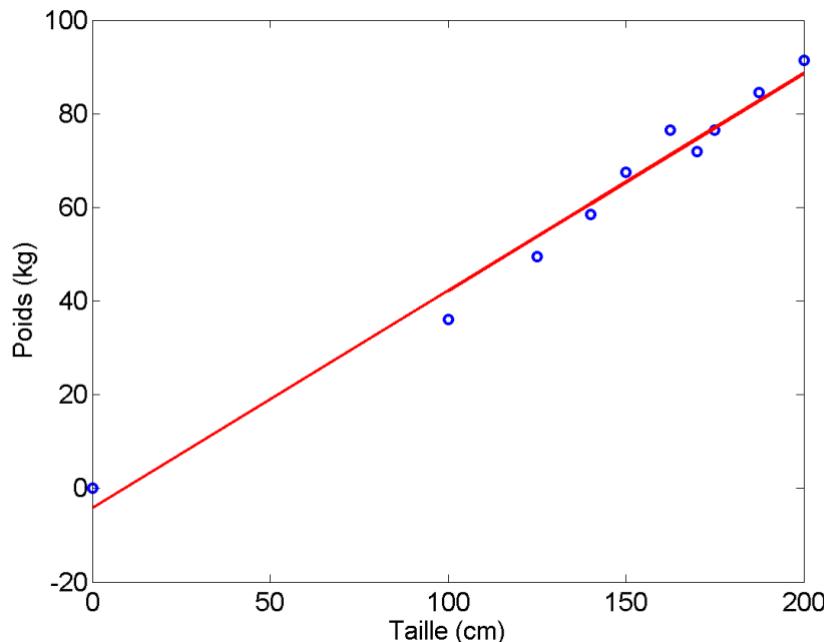


Figure. TKL-poids=f(taille).

Trouver l'angle que fait la droite avec l'axe des x. La pente étant la tangente de l'angle cherché:

$$\theta = \text{atan}(p(1)) = 24.918^\circ; \quad \% \text{ } p(2) \text{ étant le coefficient de } x^0 \text{ selon } y = p(1)x^1 + p(2)x^0 \text{ ou bien } y = ax+b.$$

En appliquant la rotation avec un angle 24.918° à la matrice a:

$$ar = (R * a')'; \quad \% \text{ l'apostrophe indique la transposée.}$$

$$\text{et } R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = [\cosd(\theta) \ sind(\theta); -\sind(\theta) \ \cosd(\theta)];$$

```

ar =[          0          0
179.604191721671  0.91340900220375
205.689669545723 -2.27372869342308
164.475897252689 -1.9822267586915
190.940566996188 -4.35314543455311
151.614877838611 -5.93117340693813
219.869984216088 -1.41864048194086
184.510057289148 -6.32761875867642
134.219308314726 -7.773498280482
105.858678973994 -9.48367470344645];

```

```

figure;plot(ar(:,1),ar(:,2),'bo','LineWidth',2);set(gca,'xcolor',[0 0
0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 100 800 600],'InvertHardCopy','off');
xlabel('Taille (cm)');ylabel('Poids (kg)');print -dtiff tkl-poids-taille2

```

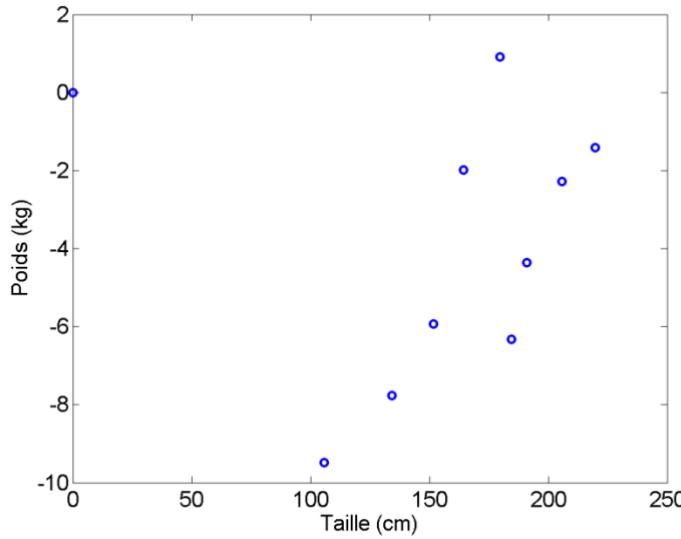


Figure. Affichage de ar.

En mettant tous les poids à la moyenne de -4 kg ce qui permet de compresser les données puisqu'on ne garde que les valeurs de la taille et une seule valeur pour le poids.

Pour retrouver les valeurs réelles des tailles et des poids, faire la transformée inverse:

```

ar =[ 0           -4
      179.604191721671   -4
      205.689669545723   -4
      164.475897252689   -4
      190.940566996188   -4
      151.614877838611   -4
      219.869984216088   -4
      184.510057289148   -4
      134.219308314726   -4
      105.858678973994   -4];

```

$$Rr = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = [\cosd(\theta) \ -\sind(\theta); \ \sind(\theta) \ \cosd(\theta)]$$

```
arr=(Rr*ar)'; % Alternativement on utilise l'inverse de R au lieu de Rr: arr=(inv(R)*ar)';
```

```

arr =[ 1.6852974197622    -3.62764008784539
      164.570138878413     72.0439801339063
      188.227320144696     83.0344272514411
      150.850137009311     65.6700612254119
      174.851211227587     76.8202711338061
      139.186349610043     60.2514005168974
      201.087589633816     89.0089391827868

```

```

169.019317527953    74.1109407795489
123.410133271107    52.922223408423
97.6895942928666   40.9731995457315];

```

Afficher a et arr pour comparaison:

```

figure;plot(a(:,1),a(:,2),'bo',
arr(:,1),arr(:,2),'ro','LineWidth',2);legend({'a','arr'});set(gca,'xcolor',[0 0
0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 100 800 600],'InvertHardCopy','off');
xlabel('Taille (cm)');ylabel('Poids (kg)');print -dtiff tkl-poids-taille3

```

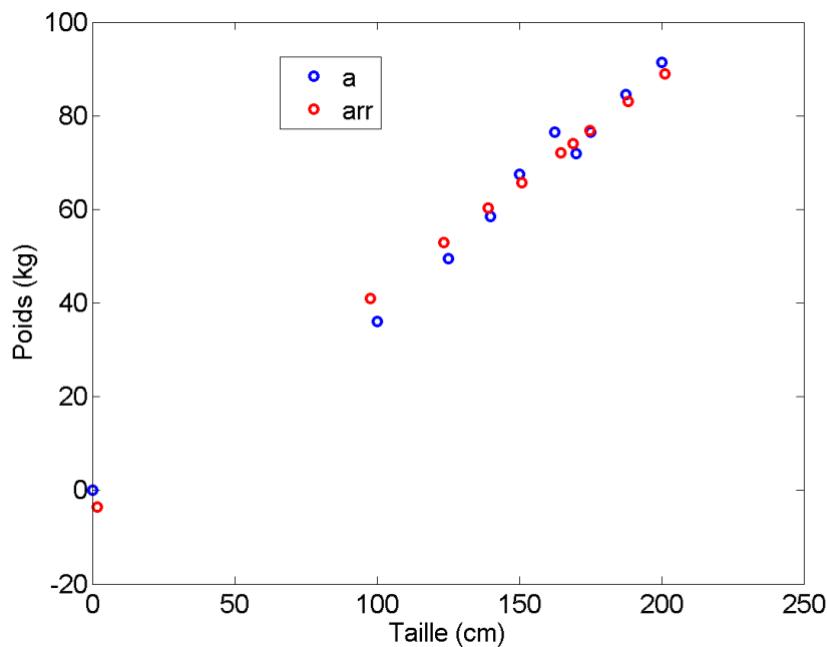


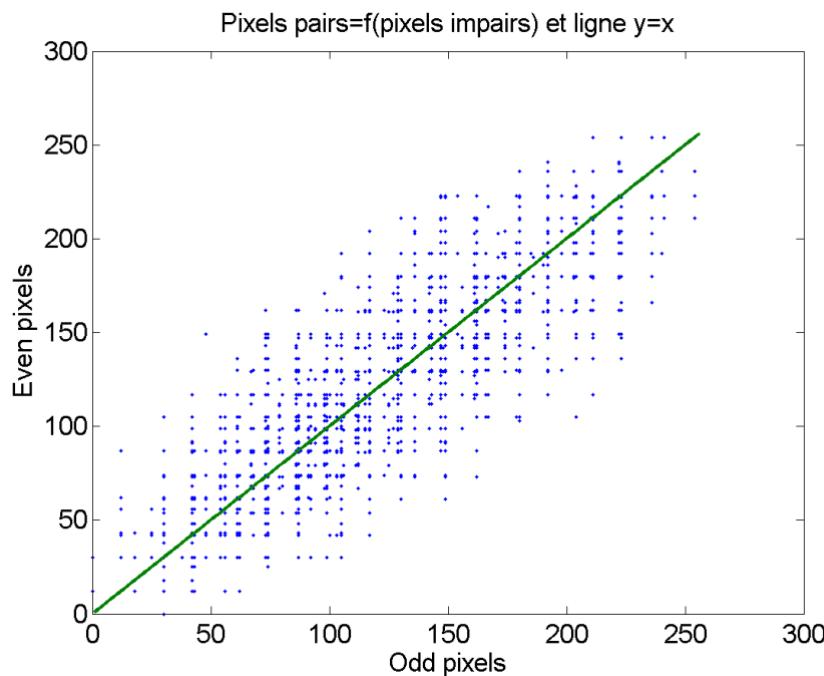
Figure. Matrice de départ a et matrice compressée puis reconstruite arr.

Exemple 2.

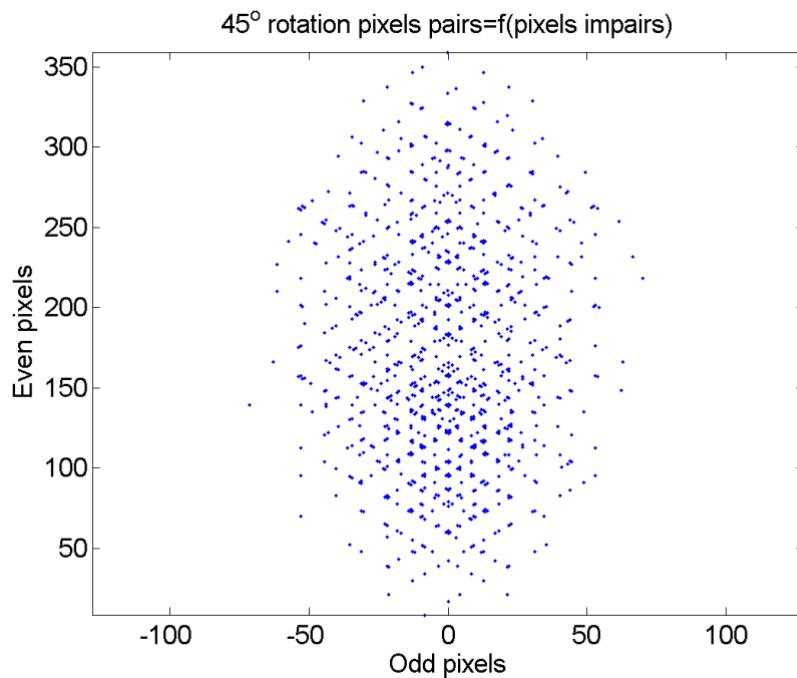
Prendre l'image de la figure suivante:



Sélectionner les indices pairs des pixels sur les colonnes et les afficher en fonction des indices impairs à partir de l'image précédente, tracer une ligne de régression $y=x$.



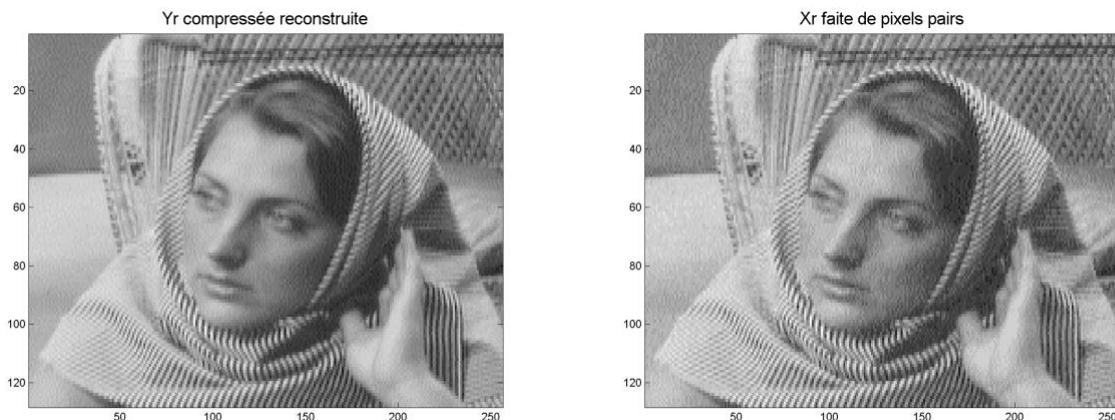
Faire une rotation de 45° :



Procédure de calculs de la transformation:

- 1- Centrer les valeurs des pixels pairs = $f(\text{impairs})$ formant la matrice X, c'est-à-dire mettre leur moyenne 0 en retranchant la moyenne de leur intensité: $n = \text{size}(X,1); X_0 = X - \text{ones}(n,1) * \text{mean}(X);$
- 2- Calculer la covariance: $c = X_0^T * X_0 / (n-1);$
- 3- Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice de covariance. Les vecteurs propres forment une base orthogonale: $[v,d] = \text{eig}(c);$
- 4- Prendre la diagonale des valeurs propres et les normaliser de façon à obtenir leur total égal à 1: $dd = \text{diag}(d); dd = dd / \sum(dd);$

- 5- Choisir les valeurs les plus importantes des valeurs propres normalisées. Ces valeurs choisies indiquent le nombre de composantes à retenir ainsi que leur position.
- 6- On peut vérifier l'orthonormalité des vecteurs propres en observant que la diagonale de la matrice suivante vaut 1: $w=v^*v'$;
- 7- Sélectionner les np vecteurs propres correspondants aux valeurs propres les plus importantes: $vs=v(:,end-np+1:end)$;
- 8- Calculer les composantes: $Y=(vs'*X0')$;
- 9- Finalement, reconstruire l'image:
 $yr=reshape(Y,128,256);figure(db);colormap(map);imagesc(yr);$



Figures. Différence entre Yr l'image compressée en éliminant la corrélation entre 2 pixels voisins, et l'image Xr où les pixels voisins ont été directement éliminés.

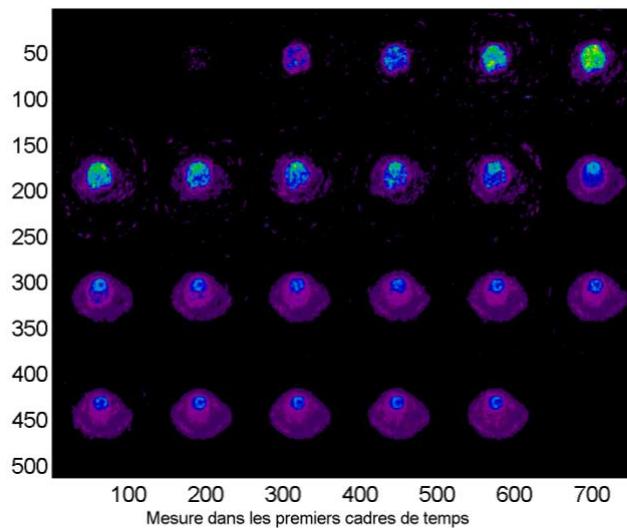
Exemple 3.

Dans cet exemple, il ne s'agit pas de compresser des images, mais de mettre en évidence des structures qui ne sont pas apparentes sur les images de départ. L'algorithme décompose la séquence dynamique en plusieurs composantes ayant des comportements dans le temps différents, c'est-à-dire en composantes orthogonales. Ici la série d'images a été décomposée en 2 composantes: sang et tissue.

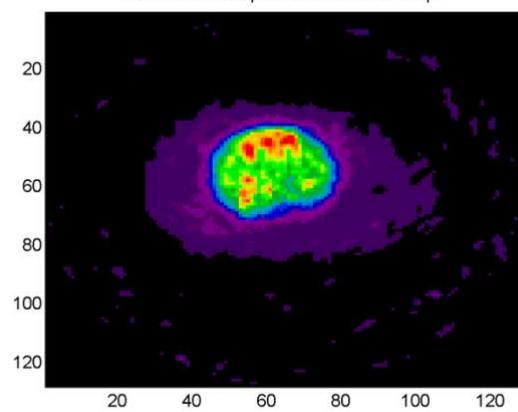
Les images sont obtenues avec l'imagerie par la tomographie d'émission par positrons (TEP). Le but est de mesurer le métabolisme du glucose dans le cœur d'un rat. Le glucose marqué par un émetteur de radioactivité (radiotraceur) est injecté dans le rat. La mesure de la concentration du radiotraceur dans le cœur du rat se fait en fonction du temps: 12 x 5 sec; 8 x 30 sec et 3 x 300 sec.

- L'image de tous les cadres montre l'ensemble des images où l'on constate l'accumulation du radiotraceur dans le cœur à mesure que le temps passe.
- La décomposition permet de ressortir des structures, qui, autrement, n'étaient pas apparentes.
- Observer comment la décomposition a permis de faire apparaître les poumons (Composante image # 1) comme dans l'image anatomique à travers le thorax.

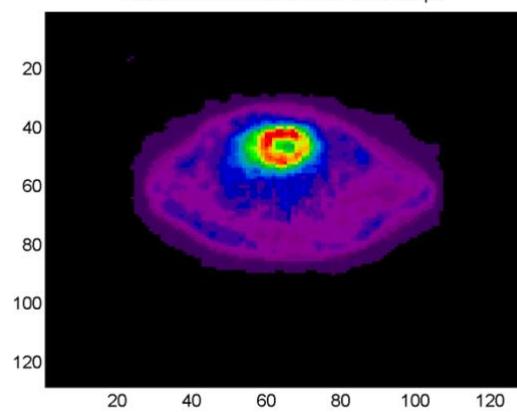
Mesure de tous les cadres de temps



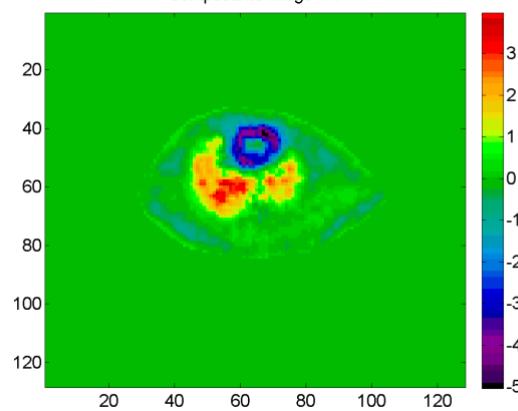
Mesure dans les premiers cadres de temps



Mesure dans les derniers cadres de temps



Composante image # 1



Composante image # 2

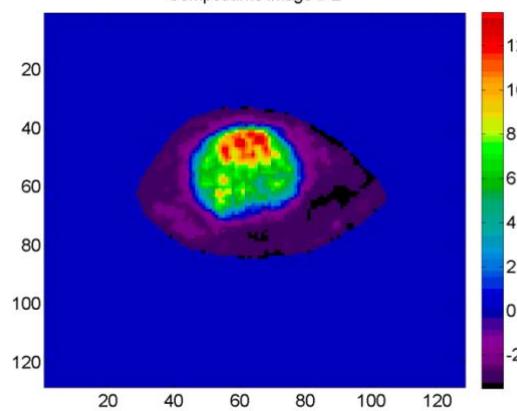
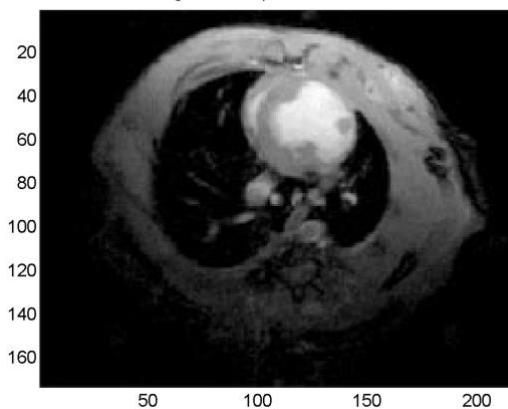


Image anatomique du thorax du rat



Les ondelettes.

Soit un phénomène physique représenté par la fonction $f(x)$ suivante :

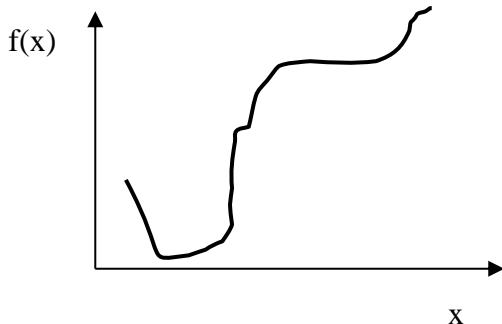


Figure. Signal réel.

Ce phénomène ne peut être mesuré ni représenté qu'à certains points spécifiques. Ces points pourraient être des valeurs ponctuelles ou des moyennes de valeurs sur un intervalle de temps, d'espace, d'énergie etc.... comme représenté à la figure suivante :

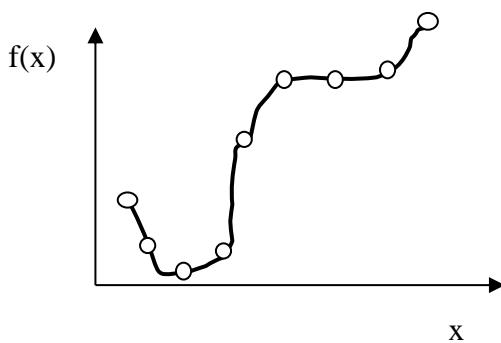


Figure. Signal mesuré à certains échantillonnages réguliers ou irréguliers.

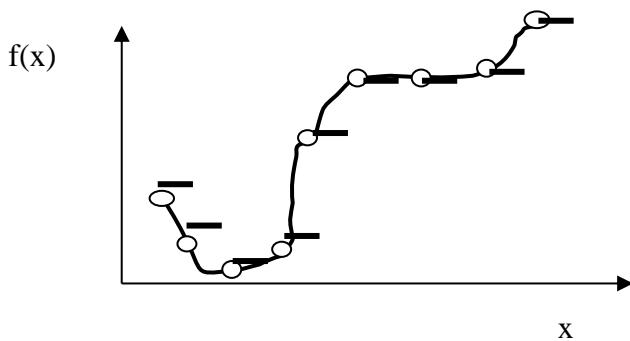
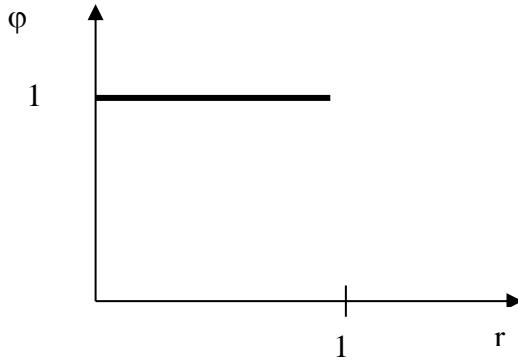


Figure. Au lieu de représenter un signal par des points échantillonnés, on peut le représenter par des barres horizontales, ou fonction en escalier. Ces barres devraient être de même longueur.

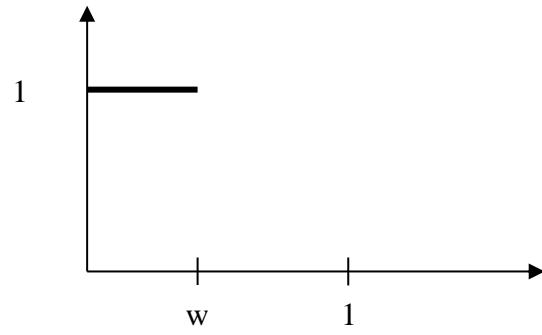
Le pas de chaque fonction en escalier (ou fonction à pas, step function) est défini sur un intervalle spécifique. La fonction à pas unitaire s'exprime par :

$$\varphi_{[0,1]}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



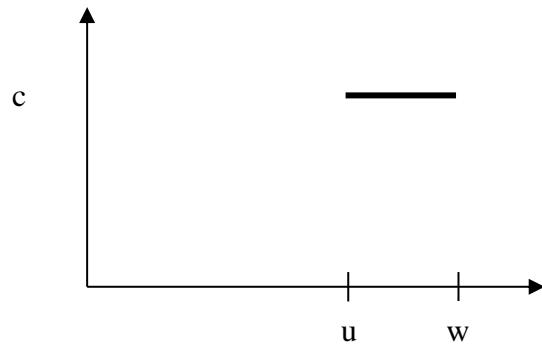
La fonction échantillonnée peut être représentée par des déplacements (shift) et des dilatations (dilation) des pas de la fonction à pas. Exemple rétrécissement du pas de 1 à w:

$$\varphi_{[0,w]}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < w \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Déplacement de 0 vers u :

$$c\varphi_{[u,w]}(r) = \begin{cases} c & \text{si } u \leq r < w \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Forme générale pour un point quelconque j:

$$(s_j, r_j) = s_j \cdot \varphi_{[r_j, r_{j+1}]}(r) = \begin{cases} s_j & \text{si } r_j \leq r < r_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

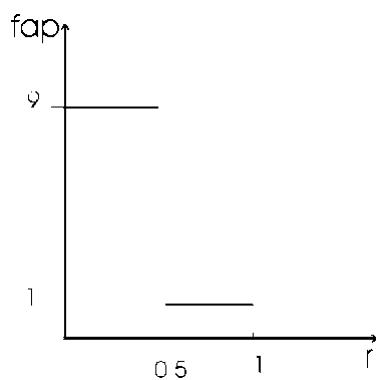
En considérant tous les pas approximant une fonction f par f_{ap} :

$$f_{ap} = s_0 \cdot \varphi_{[r_0, r_1]} + s_1 \cdot \varphi_{[r_1, r_2]} + \dots + s_{n-1} \cdot \varphi_{[r_{n-1}, r_n]} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j, r_{j+1}]} = \sum_{j=0}^{n-1} (s_j, r_j)$$

Exemple 1.

j	0	1
r _j	0	1/2
s _j	9	1

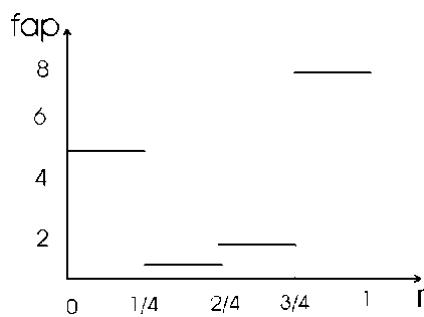
$$f_{ap} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j, r_{j+1}]} = 9\varphi_{[0, 1/2]} + 1\varphi_{[1/2, 1]}$$



Exemple 2.

j	0	1	2	3
r _j	0	1/4	1/2	3/4
s _j	5	1	2	8

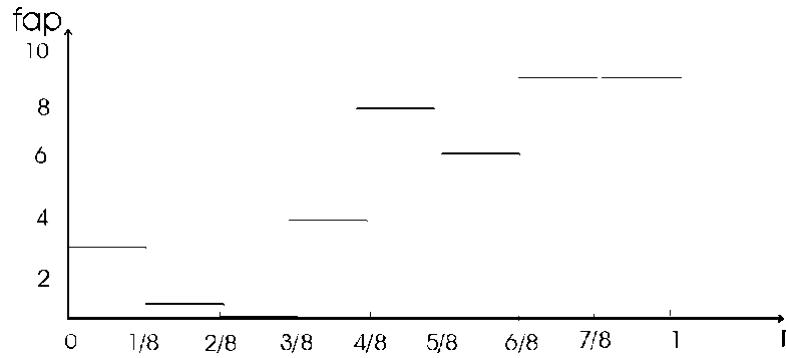
$$f_{ap} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j, r_{j+1}]} = 5\varphi_{[0, 1/4]} + 1\varphi_{[1/4, 1/2]} + 2\varphi_{[1/2, 3/4]} + 8\varphi_{[3/4, 1]}$$



Exemple 3.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	3	1	0	4	8	6	9	9

$$f_{ap} = 3\varphi_{[0,1/8[} + 1\varphi_{[1/8,2/8[} + 0\varphi_{[2/8,3/8[} + 4\varphi_{[3/8,4/8[} + 8\varphi_{[4/8,5/8[} + 6\varphi_{[5/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,7/8[} + 9\varphi_{[7/8,1[}$$



Exercice 1.

Écrire la somme et dessiner le graphique de:

rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	8	6	7	3	1	1	2	4

rj	0	1/4	2/4	3/4
sj	3	1	9	7

Exercice 2.

Montrer que $\varphi_{[0,w[}(r) = \varphi_{[0,1[}(r/w)$ $w > 0$

Montrer que $\varphi_{[u,w[}(r) = \varphi_{[0,1[}\left(\frac{r-u}{w-u}\right)$ $u, w > 0$

L'ondelette de Haar :



11 Octobre 1885, Budapest - 16 mars 1933, Szeged, Hongrie.
En étudiant la divergence des fonctions continues, il a proposé une base orthonormale : l'ondelette de Haar (1909).

$$\psi_{[0,1]} = \varphi_{[0,1/2]} - \varphi_{[1/2,1]}$$

$$\psi_{[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq r < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

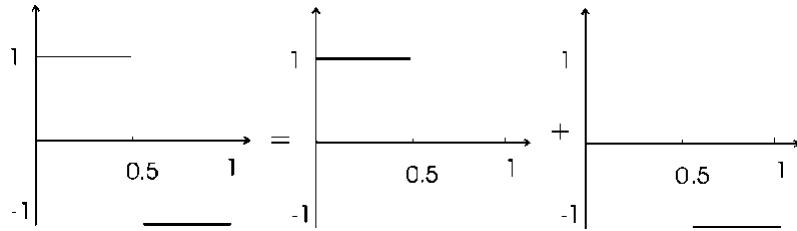


Figure. $\psi_{[0,1]} = \varphi_{[0,1/2]} - \varphi_{[1/2,1]}$

$$\varphi_{[0,1]} = \varphi_{[0,1/2]} + \varphi_{[1/2,1]}$$

$$\psi_{[0,1]} = \varphi_{[0,1/2]} - \varphi_{[1/2,1]}$$

En sommant, puis en soustrayant ces deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} [\varphi_{[0,1]} + \psi_{[0,1]}]/2 &= \varphi_{[0,1/2]} \\ [\varphi_{[0,1]} - \psi_{[0,1]}]/2 &= \varphi_{[1/2,1]} \end{aligned}$$

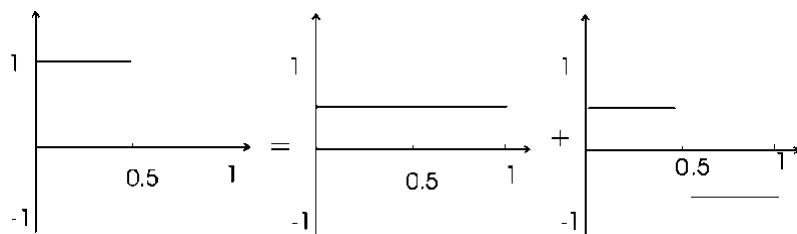


Figure. $\varphi_{[0,1/2]} = [\varphi_{[0,1]} + \psi_{[0,1]}]/2$

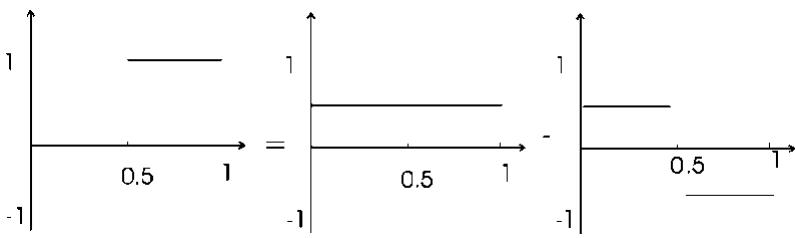


Figure. $\varphi_{[1/2,1]} = [\varphi_{[0,1]} - \psi_{[0,1]}]/2$

Dans une expression générale :

$$\begin{aligned} f_{ap} &= s_0 \varphi_{[0,1/2]} + s_1 \varphi_{[1/2,1]} \\ &= s_0 [\varphi_{[0,1]} + \psi_{[0,1]}]/2 + s_1 [\varphi_{[0,1]} - \psi_{[0,1]}]/2 \\ &= \frac{s_0 + s_1}{2} \varphi_{[0,1]} + \frac{s_0 - s_1}{2} \psi_{[0,1]} \end{aligned}$$

$\frac{s_0 + s_1}{2}$ exprime la moyenne dans les amplitudes du signal.

$\frac{s_0 - s_1}{2}$ exprime la variation dans les amplitudes du signal.

Exemple 1.

j	0	1
rj	0	1/2
sj	9	1

$$f_{ap} = 9\varphi_{[0,1/2]} + 1\varphi_{[1/2,1]} = \frac{9+1}{2} \varphi_{[0,1]} + \frac{9-1}{2} \psi_{[0,1]} = 5\varphi_{[0,1]} + 4\psi_{[0,1]}$$

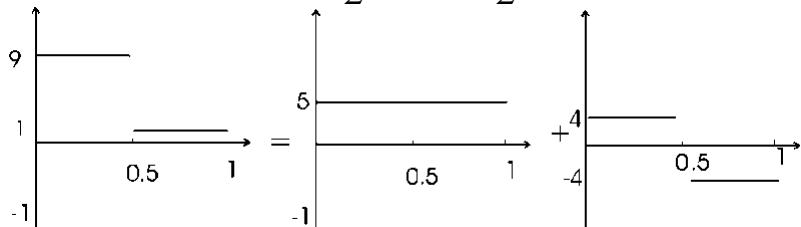


Figure. Exemple d'une transformation en ondelette de base. Ces deux échantillons ont une moyenne de 5 et un saut de -8, soit de 9 à 1.

Déplacement et dilatation de l'ondelette de Haar :

L'ondelette peut débuter à une position u autre que 0, et peut s'étendre sur un intervalle w au lieu de 1 :

$$\psi_{[u,w]}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq r < v \\ -1 & \text{si } v \leq r < w \end{cases} \quad \text{avec } v=u+w/2$$

Simplifications des écritures :

Par définition : $\Rightarrow \begin{cases} \varphi_{[u,w]} = \varphi_{[u,v]} + \psi_{[v,w]} \\ \psi_{[u,w]} = \varphi_{[u,v]} - \varphi_{[v,w]} \end{cases}$

En additionnant et en soustrayant on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{[u,v]} = [\varphi_{[u,w]} + \psi_{[u,w]}]/2 \\ \varphi_{[v,w]} = [\varphi_{[u,w]} - \psi_{[u,w]}]/2 \end{cases}$$

Cette dernière forme est appliquée à un vecteur.

Exemple 2.

j	0	1	2	3
rj	0	1/4	2/4	3/4
sj	5	1	2	8

$$\begin{aligned} f_{ap} &= 5\varphi_{[0,1/4]} + 1\varphi_{[1/4,2/4]} + 2\varphi_{[2/4,3/4]} + 8\varphi_{[3/4,4/4]} \\ &= \frac{5+1}{2}\varphi_{[0,2/4]} + \frac{5-1}{2}\psi_{[0,2/4]} + \frac{2+8}{2}\varphi_{[2/4,4/4]} + \frac{2-8}{2}\psi_{[2/4,4/4]} \\ &= \frac{5+1}{2}\varphi_{[0,1/2]} + \frac{5-1}{2}\psi_{[0,1/2]} + \frac{2+8}{2}\varphi_{[1/2,1]} + \frac{2-8}{2}\psi_{[1/2,1]} \\ &= \underbrace{3\varphi_{[0,1/2]} + 2\psi_{[0,1/2]}}_{1\text{ère paire}} + \underbrace{5\varphi_{[1/2,1]} - 3\psi_{[1/2,1]}}_{2\text{ème paire}} \end{aligned}$$

Exemple 3.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	3	1	0	4	8	6	9	9

$$\begin{aligned} f_{ap} &= 3\varphi_{[0,1/8]} + 1\varphi_{[1/8,2/8]} + 0\varphi_{[2/8,3/8]} + 4\varphi_{[3/8,4/8]} + 8\varphi_{[4/8,5/8]} + 6\varphi_{[5/8,6/8]} + 9\varphi_{[6/8,7/8]} + 9\varphi_{[7/8,8/8]} \\ &= \frac{3+1}{2}\varphi_{[0,2/8]} + \frac{3-1}{2}\psi_{[0,2/8]} + \\ &\quad \frac{0+4}{2}\varphi_{[2/8,4/8]} + \frac{0-4}{2}\psi_{[2/8,4/8]} + \\ &\quad \frac{8+6}{2}\varphi_{[4/8,6/8]} + \frac{8-6}{2}\psi_{[4/8,6/8]} + \\ &\quad \frac{9+9}{2}\varphi_{[6/8,8/8]} + \frac{9-9}{2}\psi_{[6/8,8/8]} \\ &= 2\varphi_{[0,2/8]} + 1\psi_{[0,2/8]} + 2\varphi_{[2/8,4/8]} - 2\psi_{[2/8,4/8]} + 7\varphi_{[4/8,6/8]} + 1\psi_{[4/8,6/8]} + 9\varphi_{[6/8,8/8]} + 0\psi_{[6/8,8/8]} \end{aligned}$$

Puisque j et rj n'apparaissent pas dans l'expression de la fonction approximée, alors les données de la transformée de Haar peuvent être écrites sous forme de s_j seulement.

L'exemple ci-dessus peut alors s'écrire :

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	$1/8$	$2/8$	$3/8$	$4/8$	$5/8$	$6/8$	$7/8$
s_j	3	1	0	4	8	6	9	9

$$\vec{S} = (3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$$

Exercices :

- 1- Calculer la transformée par l'ondelette de Haar des vecteurs $\vec{S}_1 = (2, 8)$, $\vec{S}_2 = (2, 4, 8, 6)$ et $\vec{S}_3 = (8, 6, 7, 3, 1, 1, 2, 4)$
- 2- Montrer que pour une fonction de 4 échantillons (s_0, s_1, s_2, s_3), la moyenne des moyennes des deux paires consécutives est la moyenne des quatre échantillons.

La transformée de Haar rapide et ordonnée

Le calcul de la transformée se fait par étape, et le résultat est classé dans l'ordre selon les étapes.

Exemple : $\vec{S} = (3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$

Étape 1.

On fait les paires des sommes :

$$a_1 = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{9+9}{2} \right) = (2, 2, 7, 9)$$

Puis on fait les paires des différences :

$$d_1 = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9-9}{2} \right) = (1, -2, 1, 0)$$

Étape 2 :

On garde d_1 et on fait la transformation de a_1 :

On fait les paires des sommes :

$$a_2 = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{7+9}{2} \right) = (2, 8)$$

Puis on fait les paires des différences :

$$d_2 = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{7-9}{2} \right) = (0, -1)$$

Étape 3 :

On garde d_2 et on fait la transformation de a_2 :

On fait la paire de sommation :

$$a_3 = \left(\frac{2+8}{2} \right) = (5)$$

Puis on fait la paire de différence :

$$d_3 = \left(\frac{2-8}{2} \right) = (-3)$$

Résultat de la transformation : $f_{ap} = (a_3, d_3, d_2, d_1) = (5, -30, -1, 1, -2, 10)$

Qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} f_{ap} &= 1\psi_{[0,2/8]} - 2\psi_{[2/8,4/8]} + 1\psi_{[4/8,6/8]} + 0\psi_{[6/8,8/8]} && \text{Étape 1} \\ &+ 0\psi_{[0,4/8]} - 1\psi_{[4/8,8/8]} && \text{Étape 2} \\ &- 3\psi_{[0,8/8]} + 5\psi_{[0,8/8]} && \text{Étape 3} \end{aligned}$$

Qui est une représentation de f_{ap} :

$$f_{ap} = 3\varphi_{[0,1/8]} + 1\varphi_{[1/8,2/8]} + 0\varphi_{[2/8,3/8]} + 4\varphi_{[3/8,4/8]} + 8\varphi_{[4/8,5/8]} + 6\varphi_{[5/8,6/8]} + 9\varphi_{[6/8,7/8]} + 9\varphi_{[7/8,8/8]}$$

La transformée de Haar rapide et sur place (In-place fast Haar wavelet transform)

La transformée de Haar rapide et ordonnée nécessite la connaissance de toutes les données avant de procéder la transformation, car tous les éléments sont utilisés dans le calcul 2 par 2.

Mais il est possible de faire le calcul avec les éléments déjà disponibles, soient les additions et les soustractions des paires successives : il faut alors identifier les éléments provenant des additions (a) et des soustractions (d).

Exemple 1:

$$\vec{S} = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_{2k}, s_{2k+1}, \dots)$$

Étape 1 :

$$\begin{aligned} f_{ap}^1 &= \left(\frac{s_0 + s_1}{2}, \frac{s_0 - s_1}{2}, \frac{s_2 + s_3}{2}, \frac{s_2 - s_3}{2}, \dots \right) \\ &= (a_1^1, d_1^1, a_1^2, d_1^2, \dots) \end{aligned}$$

Étape 2 :

$$\begin{aligned} f_a^2 &= \left(\frac{a_1^1 + a_1^2}{2}, d_1^1, \frac{a_1^1 - a_1^2}{2}, d_1^2, \dots \right) \\ &= (a_2^1, d_1^1, d_2^1, d_1^2, \dots) \dots \end{aligned}$$

Par définition :

- Les étapes de la décomposition ou de la transformation sont appelés niveaux de décomposition ou de transformation.
- Les éléments a de la décomposition forment les coefficients des approximations.
- Les éléments d de la décomposition forment les coefficients des détails.
- Des coefficients des approximations et des détails on peut retrouver le signal de départ : c'est l'opération de la reconstruction du signal ou la transformée inverse.
- Les éléments de la décomposition sont appelés C, pour coefficients.

Exemple 2:

Faire la décomposition avec la méthode rapide et sur place :

$$\vec{S} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$$

$$C^1 = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9+9}{2}, \frac{9-9}{2} \right) = (2,1,2,-2,7,1,9,0)$$

$$C^2 = \left(\frac{2+2}{2}, 1, \frac{2-2}{2}, -2, \frac{7+9}{2}, 1, \frac{7-9}{2}, 0 \right) = (2,1,0,-2,8,1,-1,0)$$

$$C^3 = \left(\frac{2+8}{2}, 1, 0, -2, \frac{2-8}{2}, 1, -1, 0 \right) = (5,1,0,-2-3,1,-1,0)$$

Peu importe la procédure, on doit reconnaître les sommes (φ) et les différences (ψ) pour pouvoir reconstruire le signal.

Exercice 1.

Calculer la transformée ordonnée de $S=(8,6,7,3,1,1,2,4)$.

Exercice 2.

Calculer la transformée sur place de $S=(8,6,7,3,1,1,2,4)$.

La transformée inverse de l'ondelette de Haar, ou reconstruction du signal

Que ce soit avec la transformation de l'ondelette de Haar ordonnée ou sur place, l'essentiel est de pouvoir classer les coefficients des approximations et des détails selon la position des paires et selon les niveaux de décomposition pour un éventuel filtrage et pour la reconstruction.

Exemple.

Reconstruction d'une transformation ordonnée.

$$S=(3,1,0,4,8,6,9,9)$$

$$C^3=(5;-3;0,-1;1,-2,1,0) = (a3;d3;d2;d1)$$

À partir des coefficients d'approximation et de détail, il est possible de retrouver le signal de départ en reconstituant le signal étape par étape et en se basant sur les sommes et les différences.

Exemple déduit du niveau 3 :

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = a3 \\ \frac{x-y}{2} = d3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2a3 \\ x-y = 2d3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2(a3+d3) \\ 2y = 2(a3-d3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a3 + d3 \\ y = a3 - d3 \end{cases}$$

On retrouve C^2 :

$$C^2 = (a3+d3, a3-d3; d2; d1) = (5-3; 5+3; 0, -1; 1, -2, 1, 0) = (2, 8; 0, -1; 1, -2, 1, 0) = (a2; d2; d1)$$

On remonte à C^1 , toujours en calculant les éléments x et y à partir des coefficients d'approximation et de détail du niveau concerné tout en respectant l'ordre des paires d'éléments :

$$C^1 = (a2+d2, a2-d2; d1) = (2+0, 2-0, 8-1, 8+1; 1, -2, 1, 0) = (2, 2, 7, 9; 1, -2, 1, 0) = (a1; d1)$$

Finalement on reconstruit C^1 pour arriver au vecteur de départ S :

$$C^1 = (a1+d1, a1-d1; d1) = (2+1, 2-1, 2-2, 2+2, 7+1, 7-1, 9+0, 9-0) = (3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$$

Décomposition et reconstruction, ou transformation et transformation inverse, à l'aide de filtres

Il est possible de développer ses propres programmes de calculs de décomposition et de reconstruction en ondelettes, comme il est possible d'utiliser des outils déjà existants.

Filtres de décomposition

Nous avons jusqu'à présent utilisé des calculs algébriques dans la décomposition et la reconstruction des signaux. Nous pouvons cependant procéder les mêmes calculs avec des filtres, des opérations matricielles et des opérations de convolution. Les calculs par convolution sont les plus utilisés.

Exemple :

Trouves les coefficients d'approximation et de détail du vecteur $S = (s_1, s_2)$.

Méthode usuelle :

$$a_1 = \frac{s_1 + s_2}{2} \quad \text{et} \quad d_1 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

Méthode par filtres :

Le filtre de la sommation est $LD = [1 \ 1]/2$. LD est le filtre basse fréquence de décomposition (LD = Low Decomposition).

Le filtre de la différence est $HD = [1 \ -1]/2$. HD est le filtre haute fréquence de décomposition (HD = High Decomposition).

La régularité du signal s'observe à basse fréquence.

Les fluctuations du signal (bruit) s'observe à haute fréquence.

$$a_1 = S \cdot LD^T = (s_1 \ s_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / 2 = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

$$d_1 = S \cdot HD^T = (s_1 \ s_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / 2 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

LD^T et HD^T sont les transposées de LD et HD .

On peut comme précédemment décomposer un signal en ses coefficients d'approximation et de détail avec les sommes et les différences, on peut le faire aussi matriciellement avec les filtres LD et HD , en produisant une matrice filtre H :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} / 2$$

Ainsi les coefficients C^1 sont obtenus:

$$C^1 = S \cdot H = (s_1 \ s_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} / 2 = \left(\frac{s_1 + s_2}{2} \quad \frac{s_1 - s_2}{2} \right)$$

Exemple:

a- Décomposer par la méthode algébrique (somme et différence) au niveau 1 le vecteur $S = (0 \ 3 \ 1 \ 5)$. Noter que nous avons omis d'insérer les virgules entre les éléments de S . À partir de maintenant, nous allons toujours faire toutes les sommes d'abord, suivies de toutes les différences pour obtenir en première moitié du vecteur les coefficients d'approximation, et en deuxième moitié les coefficients de détail.

$$C = (0 + 3 \ 1 + 5 \ 0 - 3 \ 1 - 5) / 2 = (3 \ 6 \ -3 \ -4) / 2$$

b- Décomposer par la méthode des filtres avec calcul matriciel et au niveau 1 le vecteur $S = (0 \ 3 \ 1 \ 5)$.

Puisque nous avons 4 éléments dans le vecteur à décomposer, il nous faut une matrice filtre H de 4 x 4 qui agit sur les éléments de S par paire pour les sommations et pour les différences.

$$C = (0 \ 3 \ 1 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} / 2 = (0+3 \ 1+5 \ 0-3 \ 1-5) / 2 = (3 \ 6 \ -3 \ -4) / 2$$

c- Décomposer par la méthode de la convolution au niveau 1 le vecteur $S = (0 \ 3 \ 1 \ 5)$. Les filtres de convolution sont $LD = [1 \ 1]/2$ et $HD = [1 \ -1]/2$. Faisant d'abord la convolution de S avec LD suivie de la convolution de S avec HD, on obtient : $C = ([0 \ 0+3 \ 3+1 \ 1+5] \ [-0 \ 0-3 \ 3-1 \ 1-5])/2$. Les valeurs dans le premier crochet correspondent aux coefficients d'approximation, et celles du second crochet correspondent aux coefficients de détail. Une seconde opération est nécessaire dans cette procédure: c'est la décimation. Il s'agit de ne retenir que les éléments de rang pair et d'ignorer les autres:
 $C = ([0+3 \ 1+5] \ [0-3 \ 1-5])/2 = ([3 \ 6] \ [-3 \ -4])/2 = (3 \ 6 \ -3 \ -4)/2$.

Remarque: Même si la procédure par la convolution nécessite 2 opérations, convolution-décimation, elle est la plus rapide et la plus utilisée. La méthode algébrique nécessite des boucles et un tri des éléments. La méthode matriciel nécessite la création et le maintien en mémoire de la matrice des filtres.

Exercice 1.

- a- Écrire le filtre H pour décomposer un vecteur de 8 éléments.
- b- Décomposer aux niveaux 1, 2 et 3 le vecteur $S = (3,1,0,4,8,6,9,9)$.

Filtres de reconstruction

Nous avons démontré ci-haut la reconstruction par l'approche algébrique:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = a \\ \frac{x-y}{2} = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2a \\ x-y = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2(a+d) \\ 2y = 2(a-d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a+d \\ y = a-d \end{cases}$$

il apparaît donc que:

$$(a \ d) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (a+d \ a-d) = (x \ y)$$

soit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et les filtres de reconstruction basse fréquence LR et de haute fréquence HR sont donnés par: $LR = [1 \ 1]$; $HR = [1 \ -1]$;

Exercice 2:

- a- Établir les filtres de reconstruction aux niveaux 3, 2 et 1.

b- Retrouver, à partir du vecteur décomposé de S de l'exercice 1 ci-dessus, les coefficients C², C¹ puis le signal S.

La transformée de Haar en 2D

La transformée de Haar en 2D s'obtient en transformant selon les lignes, puis le résultat est transformé selon les colonnes.

Exemple:

$$S = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{pmatrix}$$

Algébriquement:

$$C_l^1 = \begin{pmatrix} \frac{s_{00} + s_{01}}{2} & \frac{s_{00} - s_{01}}{2} \\ \frac{s_{10} + s_{11}}{2} & \frac{s_{10} - s_{11}}{2} \end{pmatrix} \text{ calculs selon les lignes.}$$

$$\begin{aligned} C^1 &= \left(\begin{array}{cc} \frac{s_{00} + s_{01}}{2} + \frac{s_{10} + s_{11}}{2} & \frac{s_{00} - s_{01}}{2} + \frac{s_{10} - s_{11}}{2} \\ \frac{s_{00} + s_{01}}{2} - \frac{s_{10} + s_{11}}{2} & \frac{s_{00} - s_{01}}{2} - \frac{s_{10} - s_{11}}{2} \end{array} \right) / 2 \\ &= \left(\begin{array}{cc} (s_{00} + s_{01}) + (s_{10} + s_{11}) & (s_{00} - s_{01}) + (s_{10} - s_{11}) \\ (s_{00} + s_{01}) - (s_{10} + s_{11}) & (s_{00} - s_{01}) - (s_{10} - s_{11}) \end{array} \right) / 4 \end{aligned} \quad \text{Calculs selon les colonnes.}$$

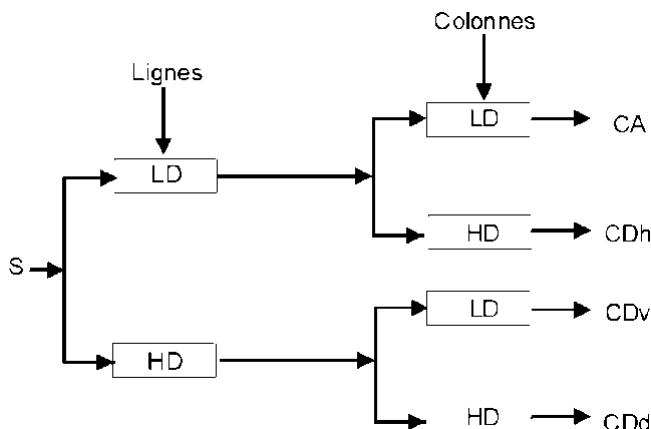


Figure. Diagramme représentant la décomposition d'une matrice S selon les lignes, puis selon les colonnes, en appliquant les filtres de décomposition de basse fréquence LD et de haute fréquence HD, pour obtenir les coefficients des approximations CA, les coefficients des détails horizontaux CDh, verticaux CDv, et diagonaux CDd, et ce pour un niveau 1 de décomposition.

La décomposition de S ci-dessus s'exprime:

$$\begin{aligned}
C^1 &= \begin{pmatrix} (s_{00} + s_{01}) + (s_{10} + s_{11}) & (s_{00} - s_{01}) + (s_{10} - s_{11}) \\ (s_{00} + s_{01}) - (s_{10} + s_{11}) & (s_{00} - s_{01}) - (s_{10} - s_{11}) \end{pmatrix} / 4 \\
&= \begin{pmatrix} s_{00} + s_{01} + s_{10} + s_{11} & s_{00} - s_{01} + s_{10} - s_{11} \\ s_{00} + s_{01} - s_{10} - s_{11} & s_{00} - s_{01} - s_{10} + s_{11} \end{pmatrix} / 4 \\
&= \begin{pmatrix} s_{00} + s_{01} + s_{10} + s_{11} & s_{00} + s_{10} - s_{01} - s_{11} \\ s_{00} + s_{01} - s_{10} - s_{11} & s_{00} + s_{11} - s_{01} - s_{10} \end{pmatrix} / 4 \\
&= \begin{pmatrix} CA & CD \\ CDh & CDd \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Habituellement, les coefficients s'écrivent selon : $\begin{pmatrix} CA & CD \\ CDv & CDd \end{pmatrix}$, et donc selon les calculs précédents on doit permute CDh et CDv.

Exemple:

Voici un exemple de décomposition au niveau 1 de l'image suivante :

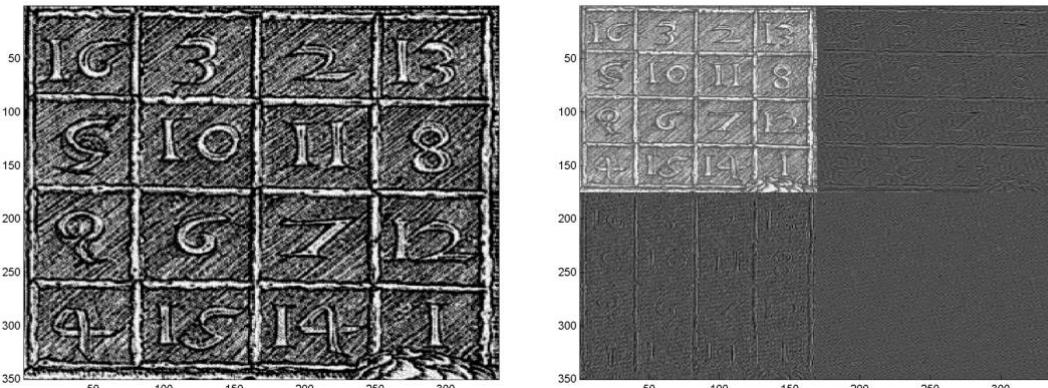


Figure. Image décomposée au niveau 1 par l'ondelette de Haar montrant les coefficients des approximations, des détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

Exemple 2 :

Voici maintenant un exemple de la décomposition au niveau 3 de l'image de woman.

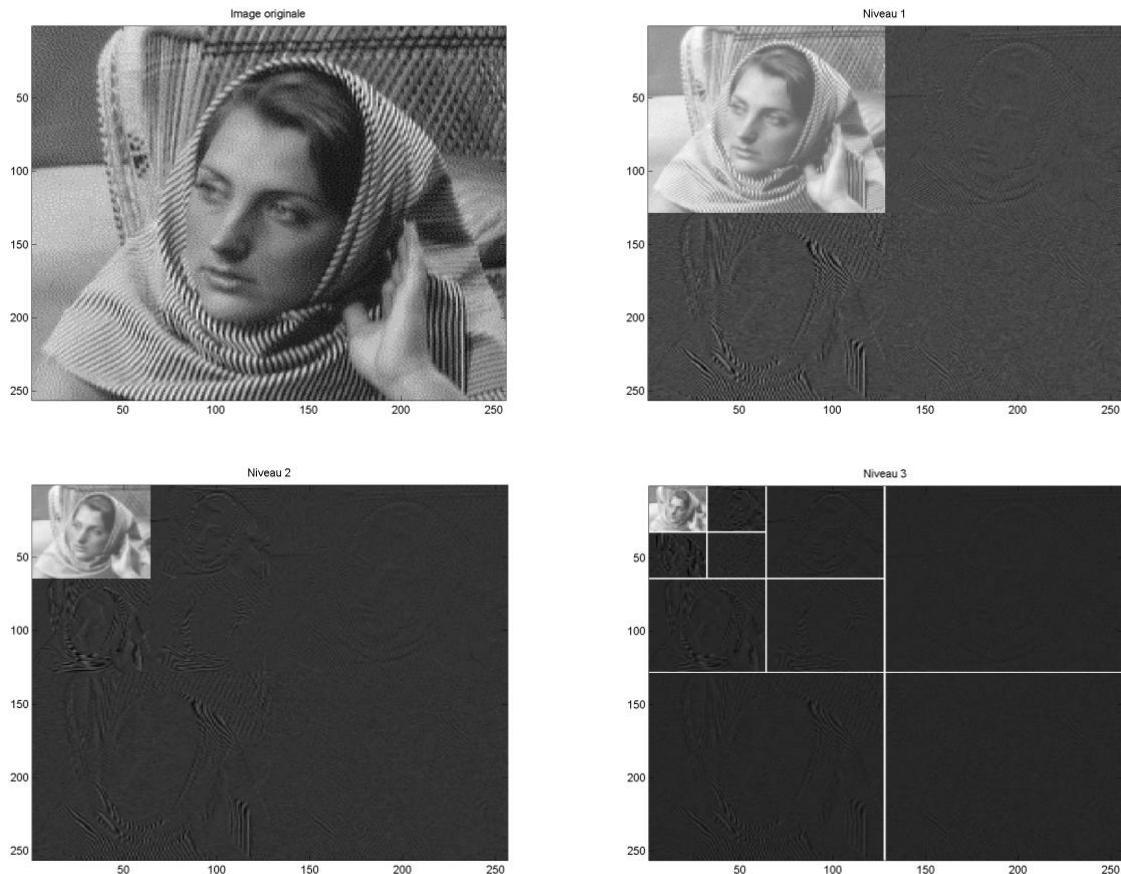


Figure. Image de woman décomposée aux niveaux 1, 2 et 3 avec dwt2. L'image peut aussi être directement décomposée avec wavedec1:

Exercice 1.

Décomposer $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les lignes-colonnes puis selon les colonnes-lignes et comparer les résultats. Reconstruire S à partir des coefficients.

Exercice 2.

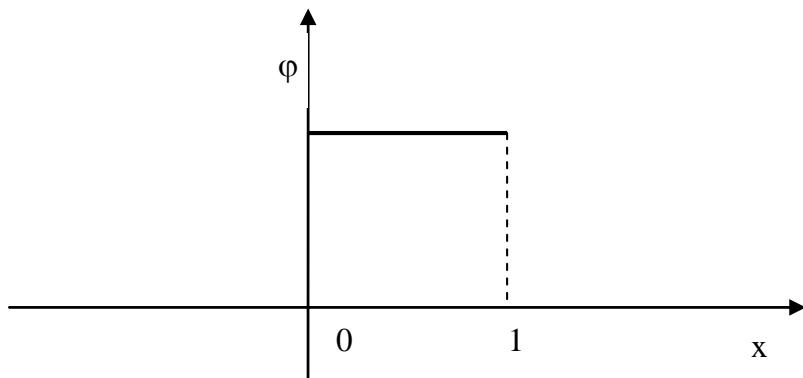
Décomposer $S = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$ au niveau 1 selon les lignes-colonnes puis selon les colonnes-lignes et comparer les résultats.

Théorie des ondelettes.

Les ondelettes de Haar

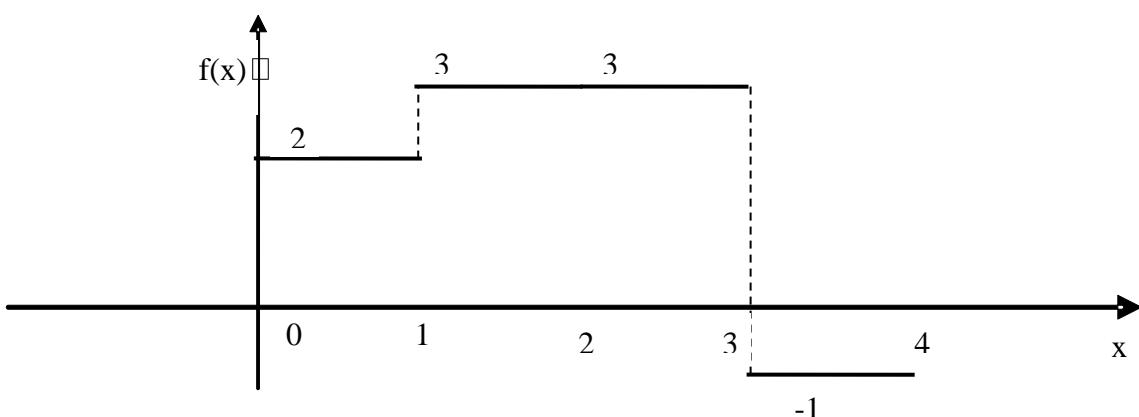
Nous avons vu la définition de la fonction suivante:

$$\varphi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Pour une fonction $f(x)$ contenant plusieurs blocs, on l'exprime comme suit:

$$f(x) = 2\varphi(x) + 3\varphi(x-1) + 3\varphi(x-2) - \varphi(x-3)$$



D'une forme générale, $f(x)$ s'exprime comme suit:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x-k) \quad a_k \in \mathbb{R}$$

Les ondelettes permettent de traiter des signaux de haute résolution ou haute fréquence. Les blocs devraient alors être raccourcis.

$\varphi(2x)$ raccourt le bloc de moitié par rapport à $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = 1 \text{ si } 0 \leq x < 1$$

$$\varphi(2x) = 1 \text{ si } 0 \leq 2x < 1 \text{ ou } 0 \leq x < 1/2$$

et la forme générale devient:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2x - k) \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$\varphi(4x)$ raccourcit le bloc de 4 fois par rapport à $\varphi(x)$:

$\varphi(x)=1$ si $0 \leq x < 1$

$\varphi(4x)=1$ si $0 \leq 4x < 1$ ou $0 \leq x < 1/4$

et la forme générale devient:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(4x - k) \quad a_k \in \mathbb{R}$$

En généralisant, on obtient la forme suivante:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2^j x - k) \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ et } j \in \mathbb{N}$$

ici le paramètre j réfère à la dilatation et le paramètre k réfère à la translation.

Nous avons vu au début du chapitre précédent la définition de \square :

$$\psi_{[0,1]} = \varphi_{[0,1/2]} - \varphi_{[1/2,1]}$$

Celle-ci peut prendre la forme:

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2(x-1/2)) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$$

qui peut s'exprimer sous la forme générale:

$$\psi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \varphi(2x - l)$$

L'ondelette ψ et la fonction d'échelle φ sont orthonormales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x - k) dx = 0 \text{ qui peut être démontrée comme suit:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x - k) dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(x) dx = 0 \text{ avec } k=0 \Rightarrow \int_0^{1/2} 1 dx - \int_{1/2}^1 1 dx = 1/2 - 1/2 = 0$$

Il arrive dans certains ouvrages d'exprimer autant φ que ψ sous une forme paramétrique normalisée:

$$\varphi_k^j(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - k) \quad j = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$

$$\psi_k^j(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k)$$

Ces expressions sont identiques à celles précédemment annoncées, sauf le coefficient $2^{j/2}$ qui est un facteur de normalisation de façon à obtenir:

$$\langle \varphi_k^j, \varphi_k^j \rangle = \int_0^1 [\varphi_k^j(x)]^2 dx = 1$$

$$\langle \psi_k^j, \psi_k^j \rangle = \int_0^1 [\psi_k^j(x)]^2 dx = 1$$

Par le fait de la normalisation, les filtres de décomposition de Haar s'écrivent:

$$LD = [1 \ 1]/2^{1/2}$$

$$HD = [1 \ -1]/2^{1/2}$$

En 2D, on obtient le filtre de décomposition suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}/2^{1/2}$$

Ce filtre est développé pour une matrice de 4 x 4 utilisé dans une multiplication matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}/2^{1/2}$$

Le filtre de reconstruction est déduit par transposition du filtre de décomposition.

NOTE: ces filtres génèrent une matrice des coefficients comme suit:

$$\begin{bmatrix} ca & cv \\ ch & cd \end{bmatrix}$$

Les ondelettes continues.

Soit ψ une fonction continue et intégrable.

Pour être une ondelette, la fonction ψ doit vérifier les 2 conditions d'admissibilité suivantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \|\psi(t)\| = 1$$

(Rappel: norme de f : $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t) \bar{f}(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$)

À partir de la fonction ψ , on construit une famille de fonctions $\psi_{a,b}(t)$ telles que:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^+ \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

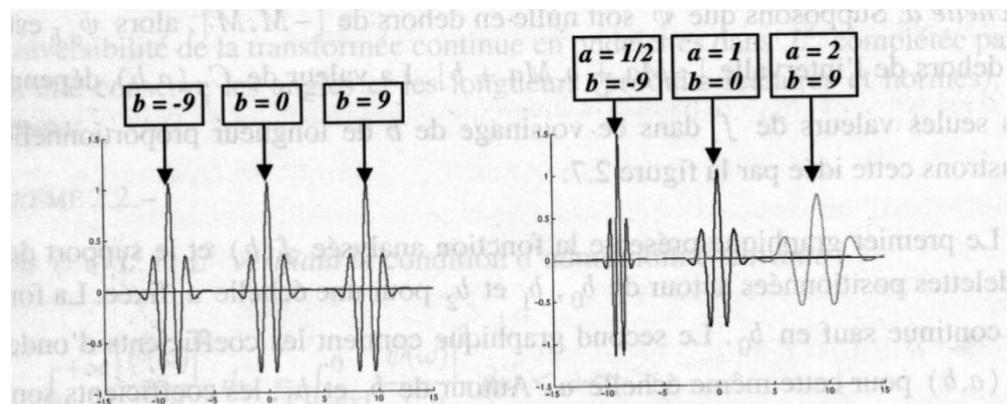


Figure 2.6. Translation et translation-dilatation d'une ondelette

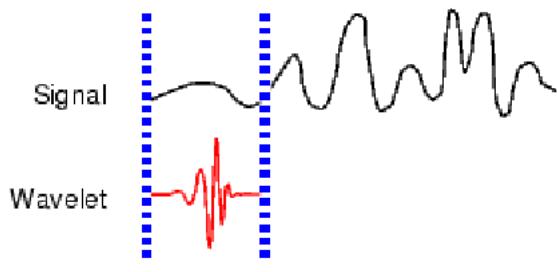
Les coefficients d'une fonction $f(t)$ décomposée par l'ondelette $\psi_{a,b}(t)$ sont donnés par:

$$C_f(a,b) = \int_R f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$$

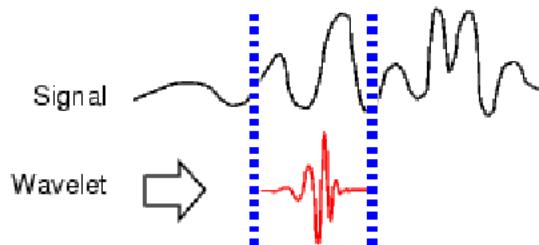
où $\langle f, \psi_{a,b} \rangle$ est le produit scalaire.

Exemple:

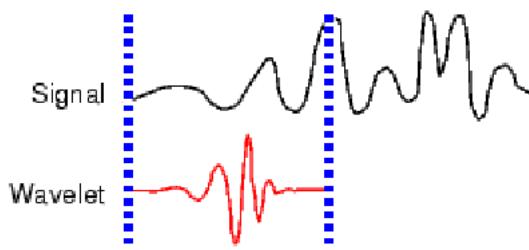
Ajuster l'ondelette sur la gauche de la fonction et calculer le coefficient:



Avancer l'ondelette d'une position à la fois sur la fonction et calculer le coefficient:

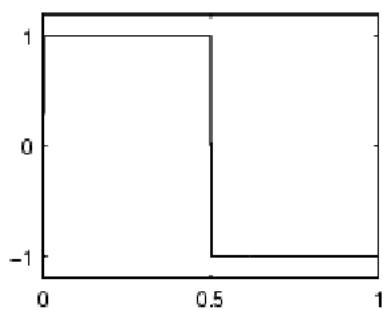


Quand toutes les positions de la fonction sont parcourues, dilater l'ondelette et parcourir les positions de la fonction de nouveau:

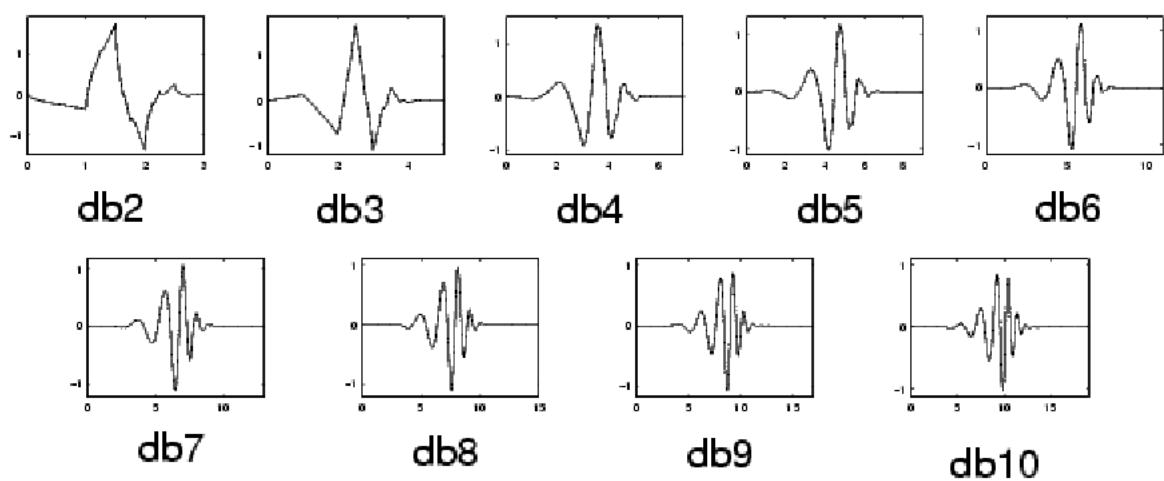


Exemple d'ondelettes:

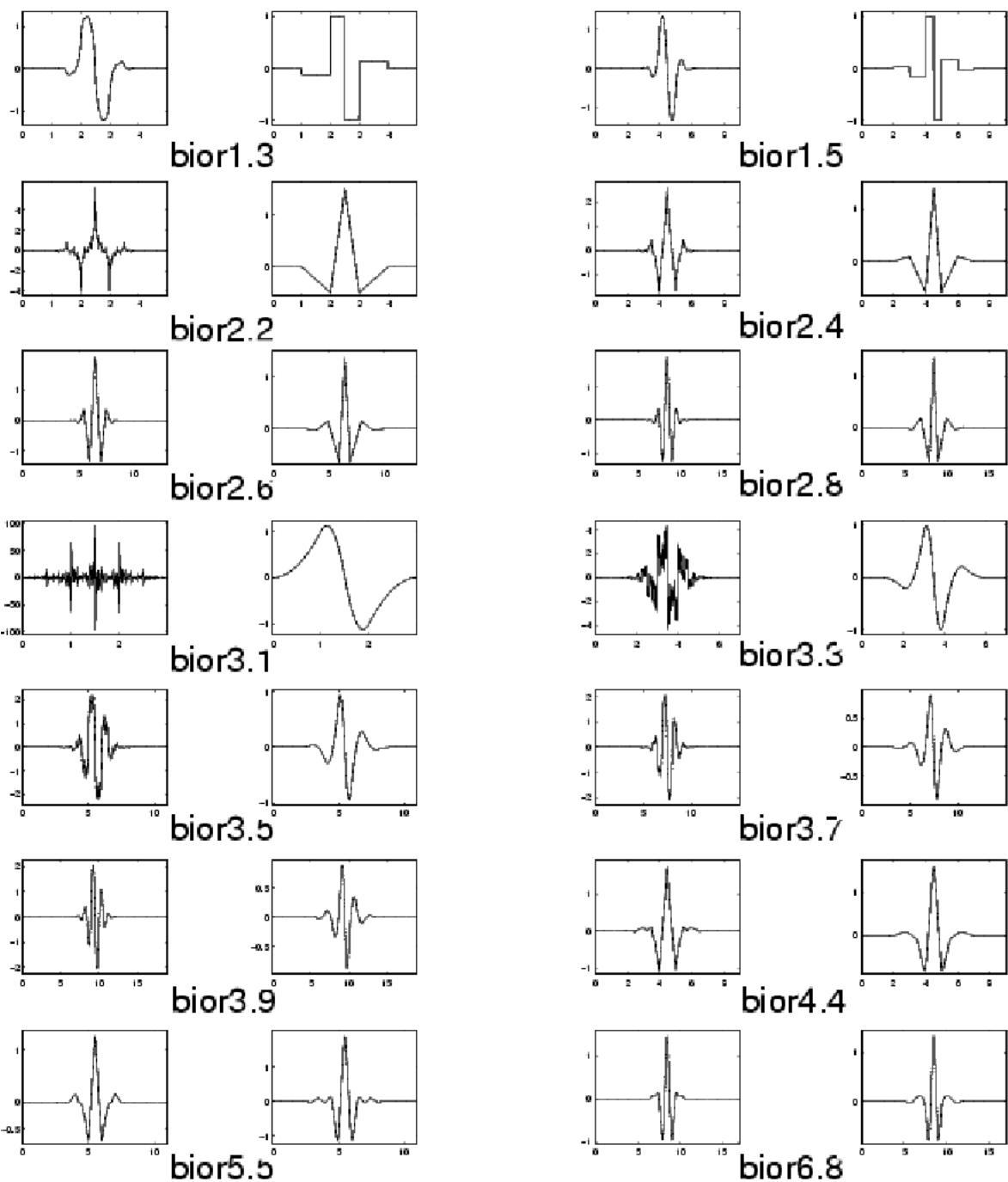
Ondelette de Daubechies d'ordre 1 ou de Haar



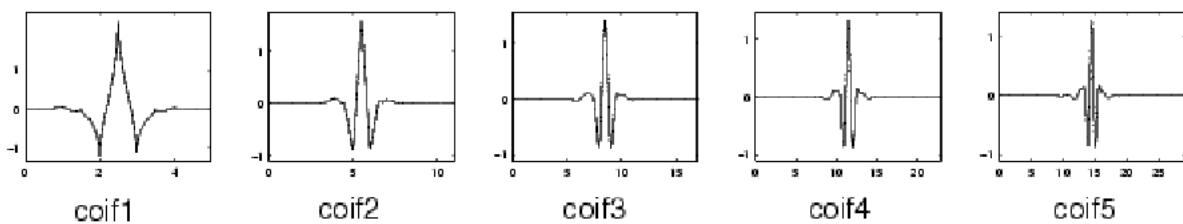
Ondelettes de Daubechies d'ordre 2 à 10:



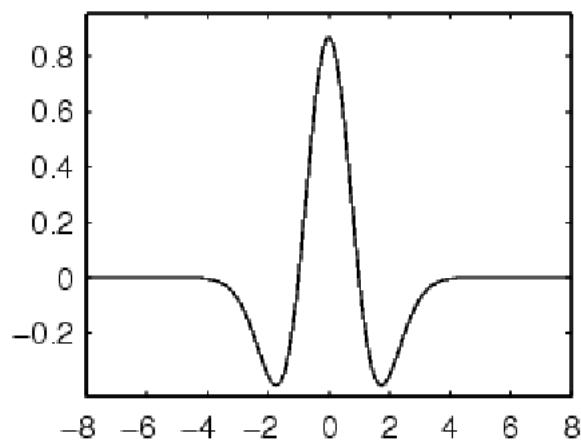
Ondelettes biorthogonales:



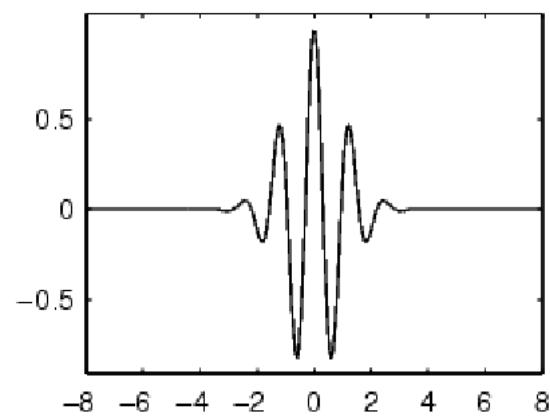
Ondelettes coiflet



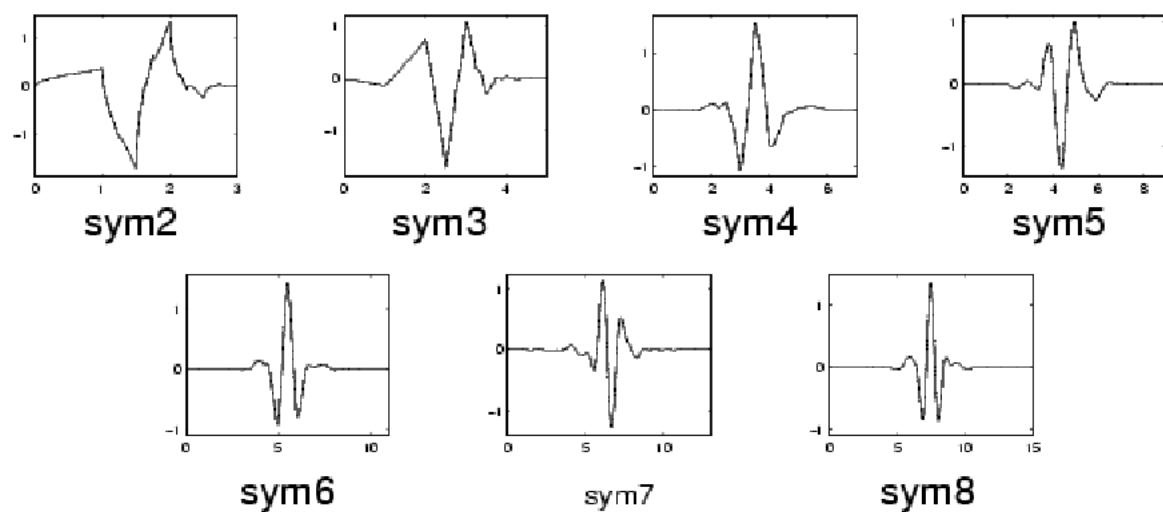
Ondelette mexican hat



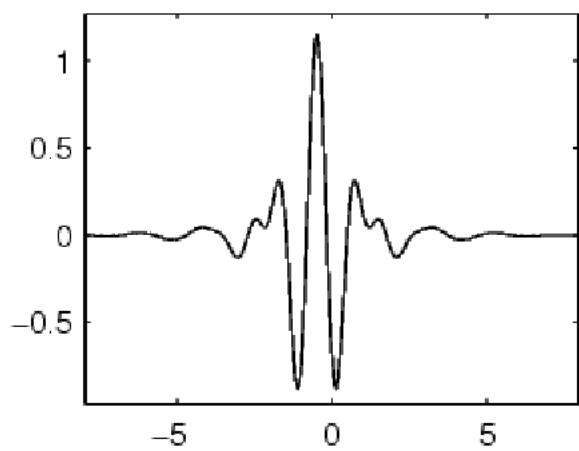
Ondelette morlet



Ondelettes symlets

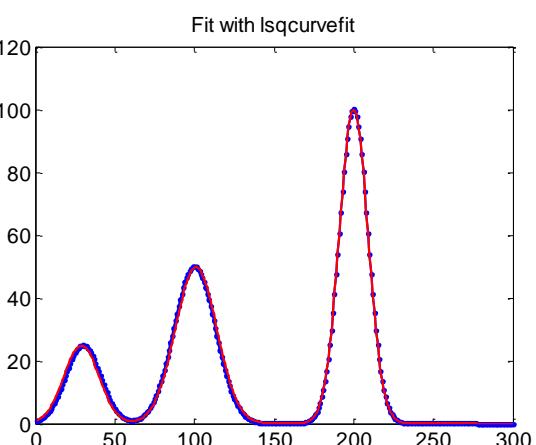
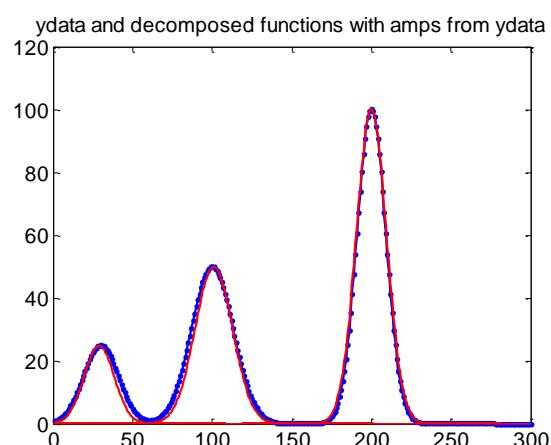
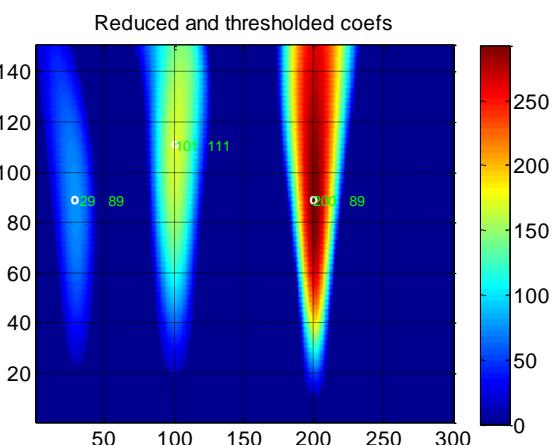
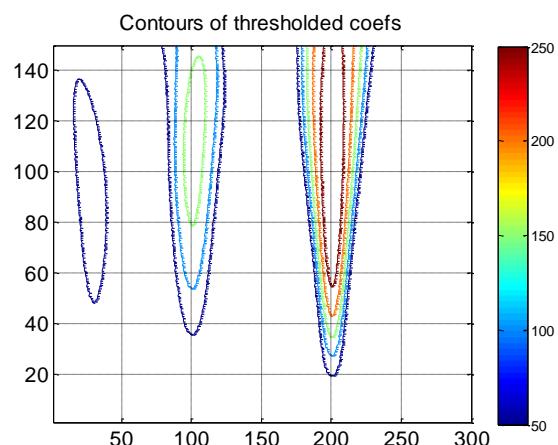
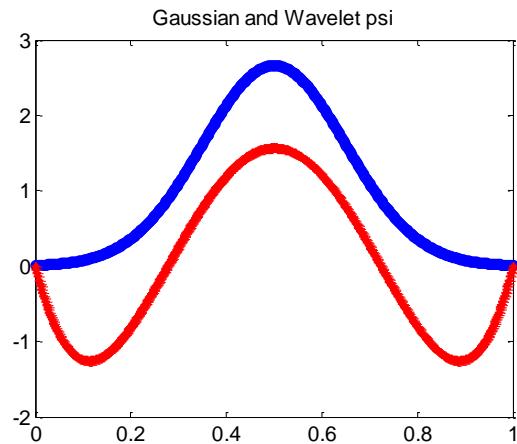
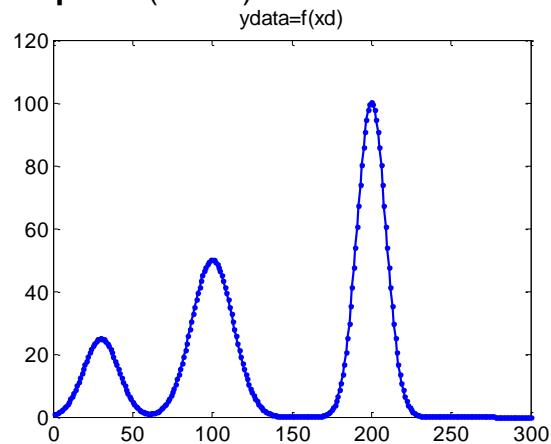


Ondelette meyer



Exercices et applications des ondelettes.

Exemple 1: (cwtb2)



Exemple 2:

```
y = [ 2   2   6   3   2];
```

Avec Matlab:

```
echelle=2;c=cwt(y, echelle,'db1');c, % db1 ondelette 1D de Daubechies <==> Haar.
```

Par la convolution:

```
for i=1:length(y);y1=[0 y 0];cy(i)=sum(y1(i:i+1).*[1 -1]/2^(1/2));end;cy
```

```
c = cy = -1.4142      0   -2.8284   2.1213   0.7071
```

```
y = [ 2   2   6   3   2];
```

```
echelle=4;
```

```
c=cwt(y, echelle,'db1');c, % db1 ondelette 1D de Daubechies <==> Haar.
```

```
for i=1:7;y1=[0 0 0 y 0 0 0];cy(i)=sum(y1(i:i+3).*[1 1 -1 -1]/2^(2/2));end;cy
```

```
c =      -2   -3   -2.5   1.5   3.5
```

```
cy = -1   -2   -3   -2.5   1.5   3.5   2.5
```

Dans cy, les multiplications doivent être appliquées symétriquement sur les valeurs de f, puis retenir la partie centrale de même longueur que f.

```
y = [ 2   2   6   3   2];
```

```
c=cwt(y, 2^3,'db1');c,
```

```
y1=[0 0 0 0 0 0 0 y 0 0 0 0 0 0 0 0];for i=1:length(y1)-7;cy(i)=sum(y1(i:i+7).*[1 1 1 1 -1 -1 -1]/2^(3/2));end;[c'-cy(5:9)']
```

Programme non-généralisé et non-validé:

```
n=4;y = [ 2   2   6   3   2];
```

```
c=cwt(y, 2^n,'db1');y1=[zeros(1,2^n) y zeros(1,2^n)];
```

```
for i=1:length(y1)-2^n+1;cy(i)=sum(y1(i:i+2^n-1).*[ones(1,2^n/2) -
```

```
ones(1,2^n/2)]/2^(n/2));end;
```

```
cy(1:2^n/2)=[];cy(end-2^n/2:end)=[];[c'-cy']
```

Exemple 3:

```
load woman; figure;imagesc(X);colormap(map);title('X');colorbar;
n=1;[LD,HD,LR,HR] = wfilters('haar');
dd=wavedec1(X,n,LD,HD);figure;imagesc(dd);colormap(map);title('Niveau 1');
ca0=dd(1:128,1:128);figure;imagesc(ca0);colormap(map);title('ca0'); colorbar;
ch0=dd(1:128,129:256);figure;imagesc(ch0);colormap(map);title('ch0'); colorbar;
cv0= dd(129:256,1:128);figure;imagesc(cv0);colormap(map);title('cv0'); colorbar;
cd0= dd(129:256,129:256);figure;imagesc(cd0);colormap(map);title('cd0'); colorbar;

dr=waverec1(dd,n,LR,HR);figure;imagesc(dr);colormap(map);colorbar;title('dr');
figure;imagesc(X-dr);colormap(map);colorbar;title('X-dr');

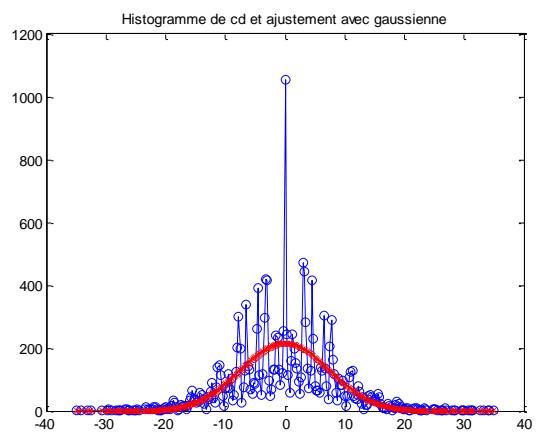
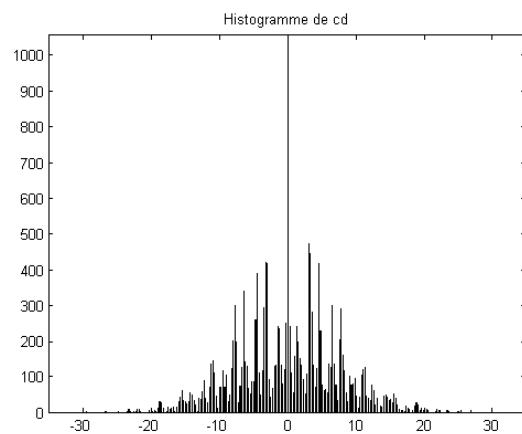
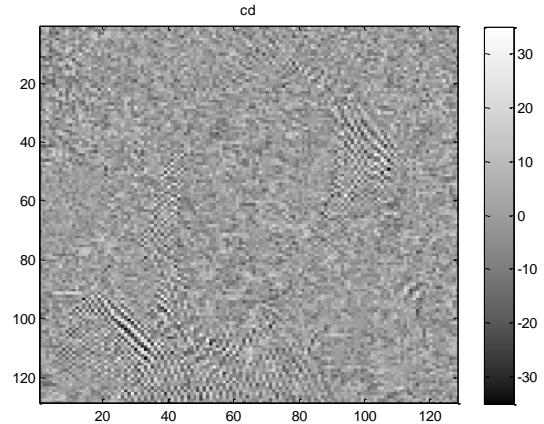
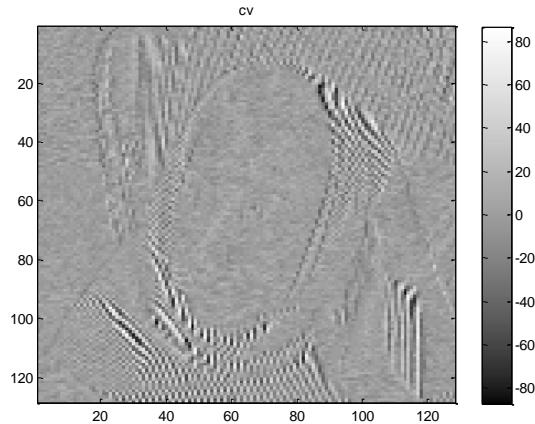
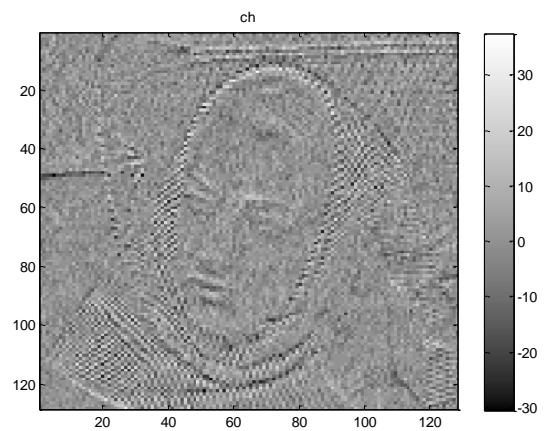
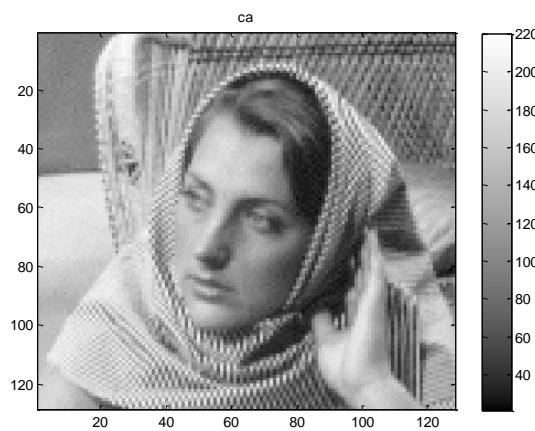
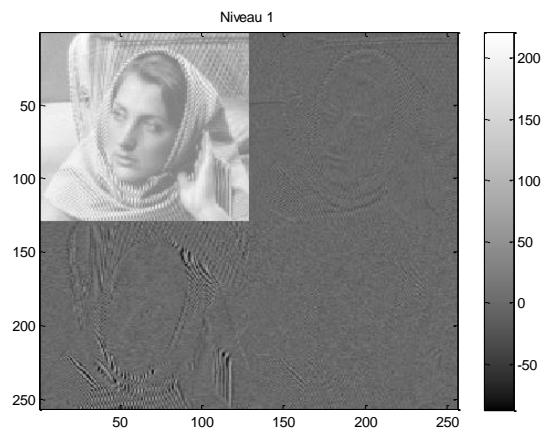
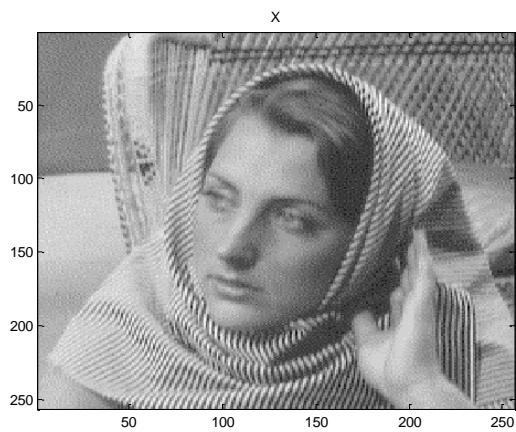
a=cd0; x=min(min(a)):0.01:max(max(a));nd=hist(a(:,x));
figure;bar(x,nd,'r');axis([min(min(a)) max(max(a)) -inf
inf]);title('cd');nd0=nd;in=find(nd==0);nd(in)=[];
x0=x;x(in)=[];parm,yfit]=lsqcurvefit_gauss1(
400,20,0,x,nd);

ch0(find(abs(ch0)>10))=0;
cv0(find(abs(cv0)>20))=0;
cd0(find(abs(cd0)>0))=0;

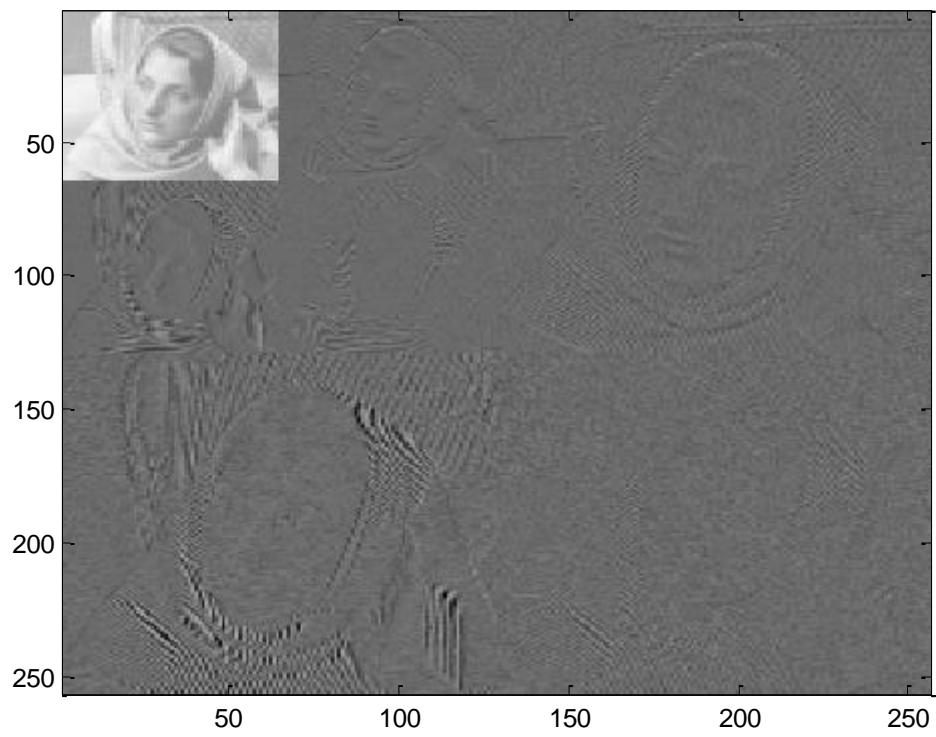
ddm=[ca0 ch0;cv0 cd0];

dr=waverec1(ddm,n,LR,HR);figure;imagesc(dr);colormap(map);colorbar;title('dr');
figure;imagesc(X);colormap(map);colorbar;title('X'); figure;imagesc(X-
dr);colormap(map);colorbar;title('X-dr');

figure;plot(1:256,X(88,:),'b-',1:256,dr(88,:),'r-');legend('Profile 88 de X','Profile 88 de dr');
```



Niveau 2



Exercice 1. Écrire la somme des fonctions ϕ sur $r_j = 0 \ 1/8 \ 2/8 \ 3/8 \ 4/8 \ 5/8 \ 6/8 \ 7/8$ et dessiner le graphique de $s = (8 \ 6 \ 7 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4)$.

Exercice 2. Décomposer au niveau 3 le signal $s = (2 \ 5 \ 7 \ 4 \ 0 \ 1 \ 8 \ 2)$, puis reconstruire le résultat pour retrouver s .

Exercice 3. Décomposer au niveau 2 l'image s , puis reconstruire le résultat pour retrouver s :

$$s = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Résultat Matlab:	4.5	0	2	2
	-0.5	1	-2	2
	0	1	1	0
	-1	1	0	0

Exercice 4.

- a) Lire l'image woman et la décomposer par l'ondelette de Haar au niveau 1.
- b) Pour la reconnaissance qualitative du visage, peut-on perdre de l'information en compressant l'image de 256×256 à 128×128 ?
- c) En mettant les détails diagonaux à zéro, reconstruire l'image X pour obtenir dr. Tracer le profil 88 à travers X et dr sur la même figure. Quel est l'effet de mettre les détails à 0?
- d) Calculer l'histogramme des coefficients d'approximation, et des 3 détails. Quelle est la forme de chacun des 4 histogrammes?
- e) Sur les histogrammes des coefficients de détails, choisir un seuil pour mettre à zéro certaines valeurs, puis reconstruire l'image dr et la comparer à l'image X.