

I. Nombres complexes.

I.1. Définition

Problème posé aux algébristes du 16e siècle: Résoudre des équations du 2^e et 3^e degré:

Équations du 2^e degré:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Discriminant D: } D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1,2}$ racines réelles et distinctes si $D > 0$

$x_1 = x_2$ réelles si $D = 0$

$x_{1,2}$ racines complexes conjuguées si $D < 0$

La racine carrée d'un nombre réel a : $\sqrt{a^2} = \pm a$

Exemple: $\sqrt{2^2} = \pm 2$

Si le nombre est négatif: $\sqrt{-2^2} = \sqrt{i^2 2^2} = \pm 2i$

soit :

$$-1 = i^2$$

Exemples: $-2 \times -2 = (-2)^2 = 2^2 = 4$

$$-2i \times -2i = (-2i)^2 = 2^2 i^2 = -4$$

Confusions:

- Dans certains ouvrages, j représente la valeur complexe au lieu de i , comme en électricité, où la lettre i désigne l'intensité du courant.
- Les lettres i et j pourraient être utilisées comme les vecteurs unitaires d'un repère en 2D, dans ce cas là, choisir u et v comme vecteurs unitaires (ou e_1 et e_2 etc...).
- Dans certains logiciels, la lettre i est réservée à la valeur unitaire complexe (Matlab, ...), la distinguer de la variable utilisée dans les boucles.

Exemple 1:

Trouver les racines de $x^2 - 3x - 4 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

$D > 0 \implies$ Les racines sont réelles: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2}$

$\implies x_1 = 4$ et $x_2 = -1$

Exemple 2:

Trouver les racines de $x^2 - 3x + 3 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$.

$D < 0 \implies$ Les racines sont imaginaires conjuguées: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \implies$

$$x_1 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Équations du 3^e degré:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

$$\implies x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \quad R = \frac{9a_1a_2 - 2a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$x_1 = S + T - \frac{a_1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

Exemple 1:

$$4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0;$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \text{ ou } x^3 + 0.75x^2 + 0.5x + 0.25a_3 = 0$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} = \frac{3 \times 0.5 - 0.75^2}{9} = 0.104$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} = \frac{9 \times 0.75 \times 0.5 - 27 \times 0.25 - 2 \times 0.75^3}{54} = -0.078$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} = \sqrt[3]{-0.078 + \sqrt{0.104^3 + (-0.078)^2}} = 0.190$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} = \sqrt[3]{-0.078 - \sqrt{0.104^3 + (-0.078)^2}} = -0.546$$

$$x_1 = S + T - \frac{a_1}{3} = 0.19 - 0.546 - \frac{0.75}{3} = -0.606$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) = -\frac{0.19-0.546}{2} - \frac{0.75}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19+0.546) = -0.072 + 0.637i$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) = -\frac{0.19-0.546}{2} - \frac{0.75}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19+0.546) = -0.072 - 0.637i$$

Nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels ou $z = (a, b)$

a est la partie réelle de z : $a = \text{Re}(z)$. b est la partie imaginaire de z : $b = \text{Im}(z)$.

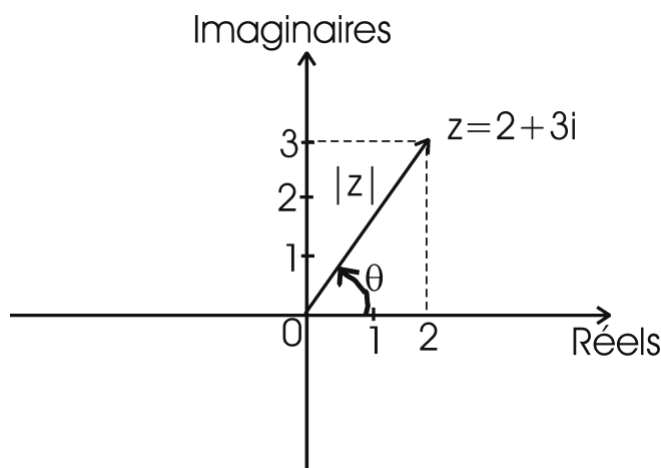


Figure 1. Représentation graphique d'un nombre complexe. La partie réelle est portée par l'axe des **abscisses**, et la partie imaginaire est portée par l'axe des **ordonnées**.

I.2. Opérations sur les nombres complexes (représentation algébrique ou cartésienne)

Addition:

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2:$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Exemple: $z_1 = 3 + 2i; z_2 = 6 + 5i; z_1 + z_2 = 9 + 7i$

$$z_1 = -3 + 2i; z_2 = 6 - 5i; z_1 + z_2 = 3 - 3i$$

Multiplication:

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2:$$

$$z_1 \times z_2 = a_1 \times (a_2 + ib_2) + ib_1 \times (a_2 + ib_2)$$

$$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$$

$$= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

Exemple 1: $z_1 = 2 + 3i; z_2 = 4 + 5i;$

$$z_1 \times z_2 = (2 \times 4 - 3 \times 5, 2 \times 5 + 4 \times 3) = (-7, 22) = -7 + 22i$$

$$z_1 = 2 - 3i; z_2 = 4 + 5i;$$

$$z_1 \times z_2 = (2 \times 4 - (-3) \times 5, 2 \times 5 + 4 \times (-3)) = (23, -2) = 23 - 2i$$

Conjugué:

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{est le conjugué de} \quad z = a + i$$

Module:

Le module (ou la valeur absolue ou la longueur du vecteur \vec{z}) de $z = a + ib$ s'écrit comme $|z|$:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sous forme vectorielle de $z = (a,b)$: $z^2 = a^2 + b^2$ (théorème de Pythagore).

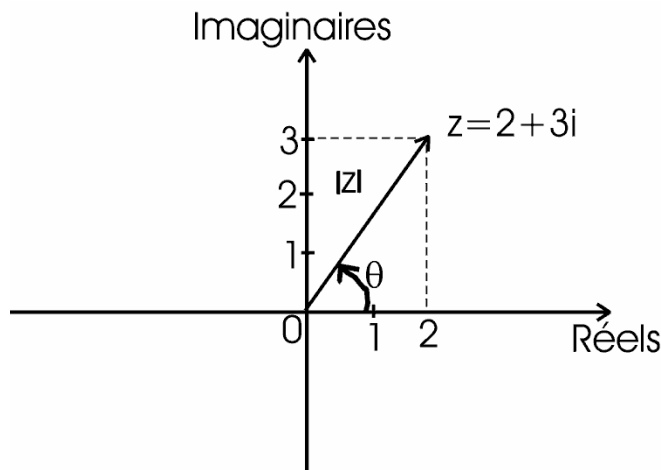


Figure 2. Module d'un nombre complexe

Division:

$$z = a + ib$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\text{ainsi } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \text{ avec } z \neq 0$$

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Exemple:

Résoudre le système d'équation (par substitution, addition, déterminant etc...):

$$(3 + 2i)x_1 + (1 + 3i)x_2 = 3$$

$$2x_1 + (2 + i)x_2 = 5$$

Le déterminant est donné par

$$D = \begin{vmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{vmatrix} = (3+2i)(2+i) - 2(1+3i) = 6 - 2 + i(3+4) - 2 - 6i = 2 + i$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+3i \\ 5 & 2+i \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{3(2+i) - 5(1+3i)}{2+i} = \frac{6+3i-5-15i}{2+i} = \frac{1-12i}{2+i} = \frac{(1-12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-10-25i}{5}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+2i & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{5(3+2i) - 2 \times 3}{2+i} = \frac{15+10i-6}{2+i} = \frac{9+10i}{2+i} = \frac{(9+10i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{28+11i}{5}$$

Matriciellement: $\begin{bmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
de la forme $Ax = B$ d'où $x = A \backslash B$ en Matlab.

Interprétation géométrique

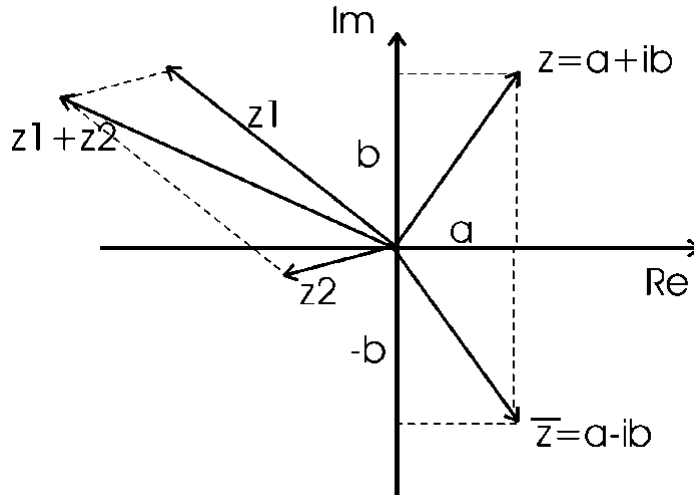


Figure 3. Représentation géométrique des vecteurs.

I.3. Forme polaire d'un nombre complexe (représentation trigonométrique)

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

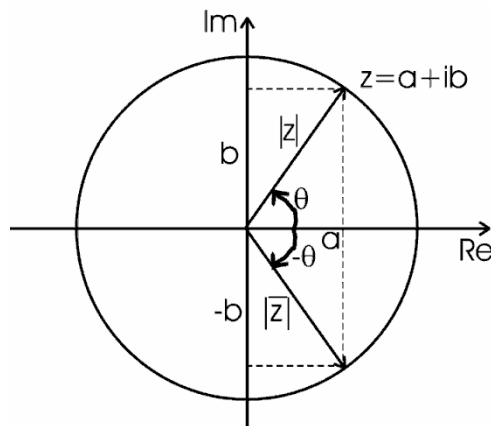


Figure 4. Représentation polaire d'un nombre complexe. θ est l'angle formé par z et l'axe des réels.

Si on appelle $r = |z|$, alors $a = r \cos(\theta)$ et $b = r \sin(\theta) \Rightarrow$

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

L'angle θ est appelé l'argument du nombre complexe z : $\theta = \arg(z)$.

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$\arg(z) = \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \Rightarrow \bar{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$$

$$\Rightarrow \bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \Rightarrow \arg(z) = -\arg(\bar{z})$$

$$\text{Si } z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \text{ et } z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

alors:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

et

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

I.4. La notation d'Euler (représentation exponentielle)

Le développement en série de Taylor (MacLaurin à $x - a = x$) de $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{avec } i^2 = -1; \quad i^4 = 1; \quad i^6 = -1$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^4 x^4}{4!} - \frac{i^6 x^6}{6!} + \dots$$

$$i\sin(x) = ix + i\frac{i^2 x^3}{3!} + i\frac{i^4 x^5}{5!} + i\frac{i^6 x^7}{7!} + \dots = ix - \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^5 x^5}{5!} - \frac{i^7 x^7}{7!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \frac{i^6 x^6}{6!} + \frac{i^7 x^7}{7!} + \dots = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta} : \text{c'est la notation d'Euler.}$$

Conjugué:

$$\bar{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = re^{-i\theta}$$

Expressions du Cosinus et du sinus:

$$z = \cos(\theta) + i \sin(\theta); \quad \bar{z} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

$$z + \bar{z} = 2 \cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\text{et } z - \bar{z} = 2i \sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Multiplication:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Division:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Les dérivées:

$$\frac{d(e^{i\theta})}{d\theta} = i e^{i\theta} = -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$$

Les intégrales:

$$\int e^{i\theta} d\theta = \frac{e^{i\theta}}{i} + cte = -i e^{i\theta} + cte = \sin(\theta) - i \cos(\theta) + cte$$

I.5. Racines n^{ième} d'un nombre complexe. (Optionnel – pas dans les TP ni examens)

$$z = re^{i\theta}$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Formule de De Moivre:

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Si $m = 1/n$, avec $n, m \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow w = z^{1/m} = (re^{i(\theta+2k\pi)})^{1/m} = r^{1/m} e^{i(\theta+2k\pi)/m}$ avec $k=0,1,2,3,\dots,m-1$.

Exemple:

$z = \sqrt{3} + 3i$. Trouver les racines 6^{ième} de z .

Réécrire z avec la notation d'Euler: $z = re^{i\theta}$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = 3.4641$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = 60^\circ = \frac{2\pi}{6}$$

La solution sous la forme $w = z^{1/m} = r^{1/m} e^{i(\theta+2k\pi)/m}$ avec $m = 6$ est:

$$w = z^{1/6} = r^{1/6} e^{i(\theta+2k\pi)/6} = 3.4641^{1/6} e^{i(\frac{2\pi}{6}+2k\pi)/6}$$

$$w = 1.23 e^{i(\frac{2\pi}{6}+2k\pi)/6}$$

Les 6 arguments de w selon $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 avec $\theta = (\frac{2\pi}{6} + 2k\pi)/6 = \frac{2\pi + 12k\pi}{36}$ sont:

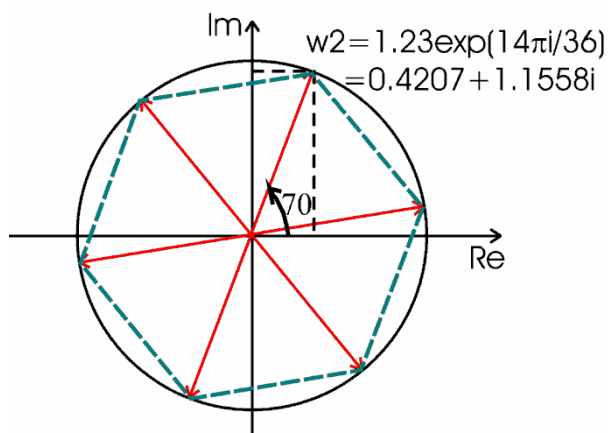
$$\theta_1 = \frac{2\pi}{36}; \quad \theta_2 = \frac{14\pi}{36}; \quad \theta_3 = \frac{26\pi}{36}; \quad \theta_4 = \frac{38\pi}{36}; \quad \theta_5 = \frac{50\pi}{36}; \quad \theta_6 = \frac{62\pi}{36}$$

Cela correspond aux angles : $10^\circ \quad 70^\circ \quad 130^\circ \quad 190^\circ \quad 250^\circ \quad 310^\circ$

Si l'on continue avec d'autres valeurs de k , soient $k = 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$

on retrouve cycliquement (période de 2π) les mêmes valeurs de θ .

Sur une représentation graphique:



I.6. C^n et produit hermitien

L'espace vectoriel C^n sur C est défini par:

$$C^n = \{\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid \forall i = 1, \dots, n, z_i \in C\}$$

avec l'opération d'addition:

$$\vec{z}^1 + \vec{z}^2 = (z_1^1, \dots, z_n^1) + (z_1^2, \dots, z_n^2) = (z_1^1 + z_1^2, \dots, z_n^1 + z_n^2)$$

et l'opération de multiplication:

$$\lambda \vec{z} = \lambda(z_1, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$$

Le produit hermitien (ou hermitique ou scalaire) sur C^n est défini par:

$$\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = \sum_{i=1}^n z_i^1 \bar{z}_i^2 \in C$$

Le produit hermitien possède les propriétés suivantes:

1. $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0 \iff \vec{z} = 0$
2. $\langle \lambda \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = \lambda \langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle$ et $\langle \vec{z}^1, \lambda \vec{z}^2 \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle$
3. $\langle \vec{z}, \vec{z}^1 + \vec{z}^2 \rangle = \langle \vec{z}, \vec{z}^1 \rangle + \langle \vec{z}, \vec{z}^2 \rangle$
4. $\langle \vec{z}^2, \vec{z}^1 \rangle = \overline{\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle}$

Orthogonalité: \vec{z}^1 et \vec{z}^2 , deux éléments de C^n , sont orthogonaux si:

$$\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = 0$$

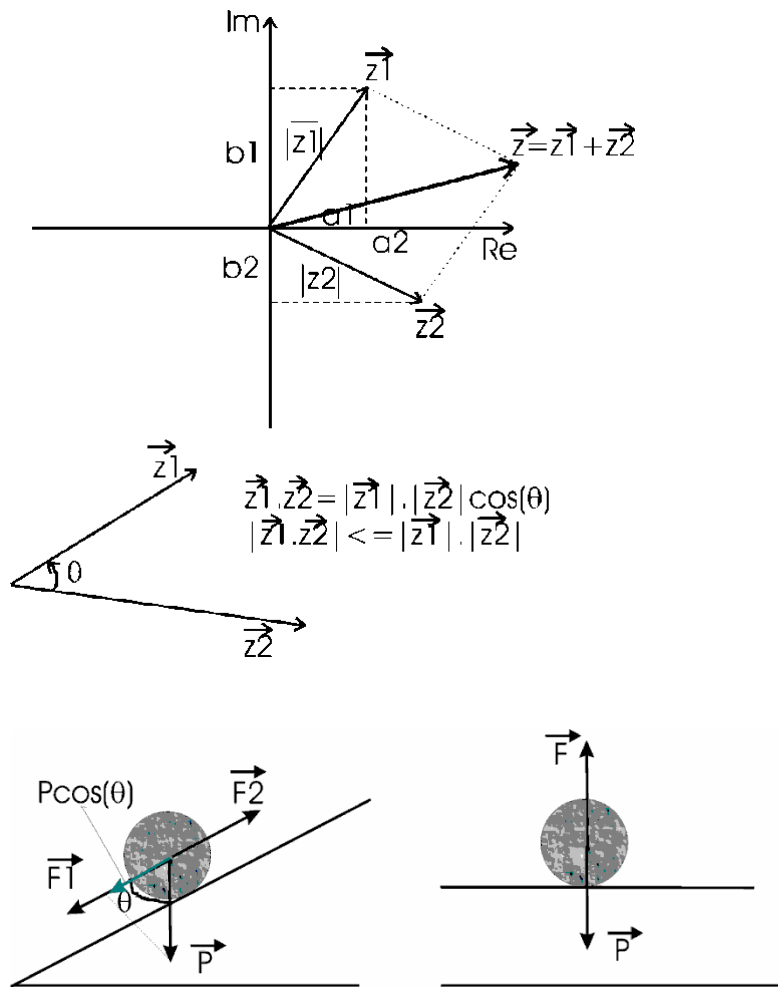
La norme (ou longueur) d'un élément de C^n est définie par:

$$\|\vec{z}\| = \sqrt{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle} \text{ avec } \|\vec{z}\| \geq 0 \text{ et } \|\vec{z}\| = 0 \iff \vec{z} = 0; \|\lambda \vec{z}\| = |\lambda| \|\vec{z}\|$$

$$|\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle| \leq \|\vec{z}^1\| \|\vec{z}^2\| \text{ (égalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\|\vec{z}^1 + \vec{z}^2\| \leq \|\vec{z}^1\| + \|\vec{z}^2\|$$

$$\|\vec{z}^1 + \vec{z}^2\|^2 = \|\vec{z}^1\|^2 + \|\vec{z}^2\|^2 \iff \langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = 0 \text{ (Théorème de Pythagore)}$$



Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{F} et \vec{P} s'écrit: $\vec{F} \cdot \vec{P} = |\vec{F}| |\vec{P}| \cos(\theta)$

Si $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3$ et $\vec{P} = P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 + P_3 \vec{e}_3$: \vec{F} et \vec{P} orthogonaux si $F_1 P_1 + F_2 P_2 + F_3 P_3 = 0$.

Exercices:

Trouver les racines suivantes et les représenter graphiquement.

- 1- Trouver la racine 3^{ième} de $z = \exp(-i\pi/6)$
- 2- Trouver la racine 4^{ième} de $z = 2.5 - 2.5 \cdot \sqrt{3}i$

II. Série de Fourier.



Jean Baptiste Joseph Fourier, France, 1768-1830.

Fourier travaillait sur la diffusion de la chaleur dans les matériaux et a proposé de représenter une fonction, continue ou discontinue, par une série de cosinus et de sinus.

II.1. Développement orthogonal

Soit la fonction f définie sur $[0, T]$ et à valeurs complexes:

$$f(t) \in \mathbb{C} \quad \forall t \in [0, T]$$

$f(t)$ est de carré intégrable si:

$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$. On dit alors que $f(t)$ est dans l'ensemble $L^2(0, T)$ des fonctions carrés intégrables définies sur l'intervalle $[0, T]$.

Le produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt \quad (\text{Par analogie à } z : \langle \bar{z}^1, \bar{z}^2 \rangle = \sum_{i=1}^n z_i^1 \bar{z}_i^2)$$

La norme de f (l'intervalle de l'intégration peut être de $-t_1$ à t_2):

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t) \bar{f}(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(Rappel des z : $z = a + ib \rightarrow$ module de z : $|z|^2 = (a^2 + b^2)$. Ce même résultat peut s'obtenir avec le produit: $|z|^2 = z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2)$).

Rappel des vecteurs : la norme d'un vecteur \mathbf{v} : $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$.

Deux fonctions f et g sont orthogonales ssi:

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Deux fonctions f et g sont orthonormées ssi:

$$\langle f, g \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \|f\| = 1 \quad \text{et} \quad \|g\| = 1$$

La valeur absolue et la norme: la valeur absolue d'un nombre est la valeur de ce nombre sans son signe. Exemple: $|-5| = |5| = 5$.

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est $|z| = (z\bar{z})^{1/2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

La norme d'un vecteur est la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes dans un repère orthonormé. Ceci concerne aussi les nombres complexes qui ont deux composantes. Ex.: $z = a + ib$ et $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \Rightarrow v_x^2 = 3^2 + 5^2 \text{ et } v^2 = v_x^2 + 2^2 \Rightarrow v = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2}$$

La norme est un scalaire souvent appelé module, longueur, distance,....

Par contre la norme d'une fonction complexe ne se résume pas à sa valeur absolue. Ex.:

$f(t) = 6t + 3i$ définie sur $[0,1]$. Sa norme est:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 f(t) \bar{f}(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (6t + 3i)(6t - 3i) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (36t^2 + 9) dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\left[\frac{36t^3}{3} + 9t \right]_0^1 \right)^{1/2} = \sqrt{21} \end{aligned}$$

et sa valeur absolue, tout comme un nombre complexe, est: $|f| = \sqrt{36t^2 + 9}$

Exemple 1:

Calculer le produit hermitien de $f(t) = 3t$ et $g(t) = \sin(2\pi t)$ sur $[0,1]$.

Le produit hermitien s'écrit: $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt$, soit $\langle f, g \rangle = \int_0^1 3t \cdot i \sin(2\pi t) dt$

Intégration par partie: $\int u dv = [uv] - \int v du$

$u = 3t$; $du = 3dt$; $dv = \sin(2\pi t)dt$, soit $v = -\cos(2\pi t)/2\pi$.

$$\int_0^1 3t \cdot \sin(2\pi t) dt = \left[-3t \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{3}{2\pi} \cos(2\pi t) dt = -\frac{3}{2\pi}$$

Exemple 2:

Calculer le produit hermitien de $f(t) = t^2$ et $g(t) = 9 + 8it$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt = \int_0^1 t^2 (9 - 8i) dt = \int_0^1 (9t^2 - 8i t) dt \\ &= \left[\frac{9t^3}{3} - \frac{8i t^2}{2} \right]_0^1 = 3 - 2i\end{aligned}$$

Exemple 3:

Calculer la norme de $f(t) = 3t + i$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\|f\| &= \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 f(t) \bar{f}(t) dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_0^1 (3t + i) (3t - i) dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (9t^2 + 1) dt \right)^{1/2} = \left(3t^3 + t \Big|_0^1 \right)^{1/2} = 2\end{aligned}$$

Exemple 4:

Les fonctions $f(t) = t$ et $g(t) = 3t - 2$ sont-elles orthogonales sur $[0,1]$?

f et g sont orthogonales si $\langle f, g \rangle = 0$.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \bar{g}(t) dt = \int_0^1 t(3t - 2) dt = \left[t^3 - t^2 \right]_0^1 = 0$$

Exemple 5:

Vérifier que l'ensemble $\{e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i n t/T}\}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, est orthonormé dans $L^2(0, T)$.

Vérifier l'orthogonalité:

Soit deux éléments $e_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i m t/T}$ et $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i n t/T}$, avec $m \neq n$. Ils sont orthogonaux si

le produit hermitien est nul: $\langle e_m(t), e_n(t) \rangle = 0 \implies$

$$\begin{aligned}\langle e_m(t), e_n(t) \rangle &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i m t/T} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2\pi i n t/T} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i (m-n)t/T} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2\pi i (m-n)} e^{2\pi i (m-n)t/T} \right]_0^T = \left[\frac{\cos(2\pi (m-n)t/T) - i \sin(2\pi (m-n)t/T)}{2\pi i (m-n)} \right]_0^T = \\ &= \frac{\cos(2\pi (m-n)T/T) - i \sin(2\pi (m-n)T/T)}{2\pi i (m-n)} - \frac{\cos(0) - i \sin(0)}{2\pi i (m-n)} = 0 \quad \forall m, n \quad (m \neq n)\end{aligned}$$

Vérifier l'orthonormalité:

$$\|e_n\| = \left[\int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i n t / T} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2\pi i n t / T} dt \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T e^0 dt \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T} [t]_0^T \right]^{1/2} = 1$$

Exemple 6:

Vérifier l'orthogonalité sur $[0, T]$ de $\cos(2\pi n t / T)$ et $\sin(2\pi n t / T)$.

$$\langle \cos(2\pi m t / T), \cos(2\pi n t / T) \rangle = 0 \implies$$

$$\int_0^T \cos(2\pi m t / T) \cos(2\pi n t / T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}(m-n)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T}(m+n)\right) \right] dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{T}{2\pi(m-n)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(m-n)\right) + \frac{T}{2\pi(m+n)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(m+n)\right) \right]_0^T = 0$$

$$\int_0^T \sin(2\pi m t / T) \sin(2\pi n t / T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}(m-n)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T}(m+n)\right) \right] dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{T}{2\pi(m-n)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(m-n)\right) - \frac{T}{2\pi(m+n)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(m+n)\right) \right]_0^T = 0, \quad m \neq n$$

$$\text{if } m = n \implies \int_0^T \cos(2\pi m t / T) \cos(2\pi m t / T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi m t}{T}\right) \right] dt$$

$$\left[\frac{1}{2} \left[t + \frac{T}{4\pi m} \sin\left(\frac{4\pi m t}{T}\right) \right]_0^T \right] = \frac{T}{2}$$

$$\text{if } m = n \implies \int_0^T \sin(2\pi m t / T) \sin(2\pi m t / T) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi m t}{T}\right) \right] dt$$

$$\left[\frac{1}{2} \left[t - \frac{T}{4\pi m} \sin\left(\frac{4\pi m t}{T}\right) \right]_0^T \right] = \frac{T}{2}$$

On démontre (faites-le comme exercice) de la même façon que pour $m = n$ ou $m \neq n$:

$$\langle \cos(2\pi m t / T), \sin(2\pi n t / T) \rangle = \langle \sin(2\pi m t / T), \cos(2\pi n t / T) \rangle = 0$$

II.2. Les fonctions périodiques

Par définition, une fonction $f(t)$ est périodique de période T si $f(t) = f(t+T)$, ou, d'une façon générale: $f(t) = f(t+nT)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

T est la plus petite période de $f(t)$: c'est la période fondamentale.

Exemple 1:

Trouver la période de $f(t) = \cos(t/3) + \cos(t/4)$.

$$\cos(t/3) + \cos(t/4) = \cos((t+T)/3) + \cos((t+T)/4)$$

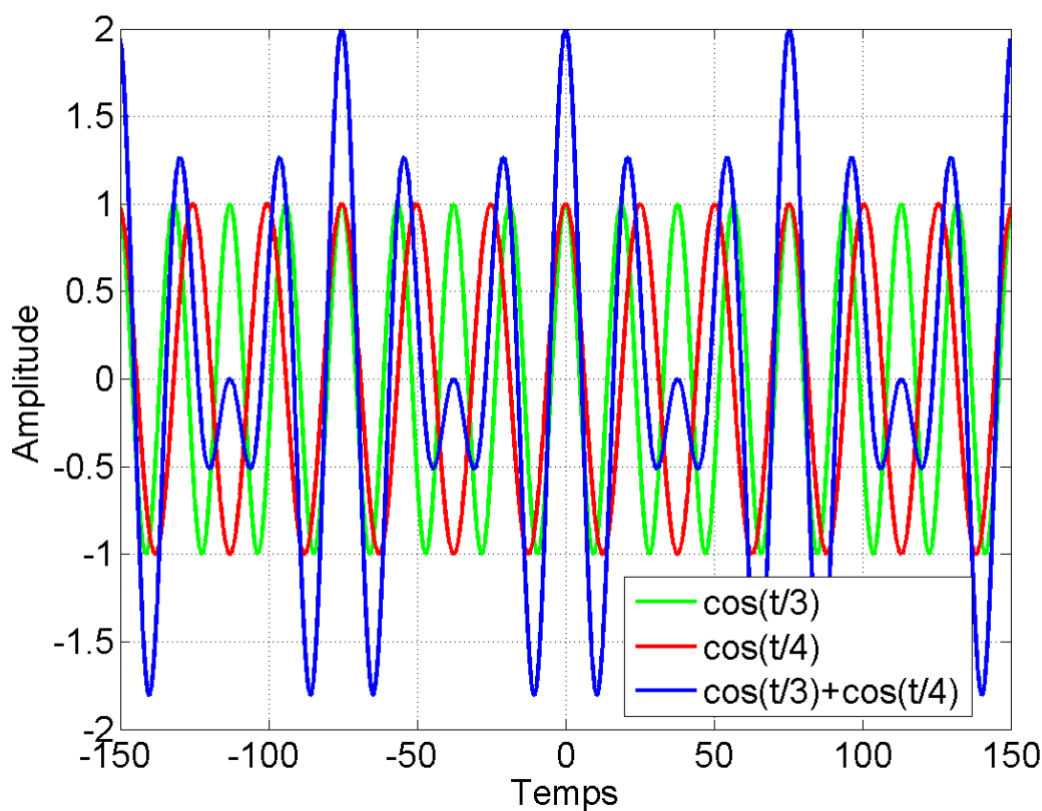
Sachant que la période de $\cos(t)$ est 2π , soit $\cos(t) = \cos(t + 2\pi m)$, alors

avec un changement de variable $x = t/3$ et $T_1 = T/3$, $\cos(x + T_1)$ a une période de $T_1 = 2\pi m$, soit $T/3 = 2\pi m \Rightarrow T = 6\pi m$.

Une autre méthode: le cosinus a une période de 2π et s'exprime comme $\cos(2\pi t/T_1)$. En identifiant les coefficients du temps t dans $\cos(t/3)$ et dans $\cos(2\pi t/T_1)$, on obtient: $2\pi/T_1 = 1/3 \Rightarrow T_1 = 6\pi$.

Idem pour $\cos(t/4 + T/4) \Rightarrow T = 8\pi n$.

La période fondamentale est la plus petite période, soit le plus petit commun multiple de 6 et 8, i.e. $m = 4$ et $n = 3 \Rightarrow T = 24\pi$.



Voir code python dans démo pour la génération de ce graphique.

Exemple 2:

Trouver la période de $f(t) = \cos^2(t)$.

$$\cos^2(t) = (1 + \cos(2t))/2$$

$$\cos^2(t) = (1 + \cos(2(t+T)))/2$$

$$= (1 + \cos(x+T_1))/2 \text{ avec } x = 2t \text{ et } T_1 = 2T.$$

Puisque la période de $\cos(x)$ est $2\pi \Rightarrow T_1 = 2\pi m$, ou bien $2T = 2\pi m$

$\Rightarrow T = m\pi$. La période fondamentale de $f(t)$ est donc π .

Exemple 3:

Trouver la période de $f(t) = \sin(t) + \sin(t/3) + \sin(t/5)$. $2\pi/T_1=1 \Rightarrow T_1 = 2\pi$; $2\pi/T_2=1/3 \Rightarrow T_2 = 6\pi$;

$2\pi/T_3=1/5 \Rightarrow T_3 = 10\pi$. Le PPCM de T_1 , T_2 et T_3 est $30\pi \Rightarrow T = 30\pi$.

Exercice:

Trouver la période de $f(t) = \sin(\pi t) + \sin(\pi t/3) + \sin(\pi t/5)$.

II.3. Les Séries de Fourier

$$\text{Supposons que } f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (1)$$

autrement dit la somme de sinus/cosinus converge vers $f(x)$ sur $[-L, L]$. On peut alors que pour $n=1, 2, 3, \dots$:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad A = \frac{a_0}{2} \quad (2)$$

Noter que généralement on utilise la lettre T pour les périodes en temps et la lettre L (ou D ...) pour les périodes en longueur (distance).

Notons aussi que si l'identité (1) a lieu, comme les sinus et cosinus sont des fonctions périodiques, la fonction $f(x)$ de gauche, même si elle n'est définie que sur $[0, T]$ à priori peut être considérée définie sur \mathbb{R} avec la propriété dite de périodicité $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

En multipliant (1) par $\cos(n\pi x/L)$ et en intégrant entre $-L$ et L (ce qui revient à faire le produit Hermitien entre $f(x)$ et $\cos(n\pi x/L)$, $\langle f(x), \cos(n\pi x/L) \rangle$):

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= A \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Prenons le premier terme:

$$\begin{aligned} A \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= A \left[\frac{L}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = \frac{AL}{m\pi} \left[\sin\left(\frac{m\pi L}{L}\right) - \sin\left(-\frac{m\pi L}{L}\right) \right] = \\ &\frac{AL}{m\pi} [\sin(m\pi) - \sin(-m\pi)] = 0 \end{aligned}$$

Prenons le deuxième terme:

$$\begin{aligned} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_n}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx = \\ &\frac{a_n}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right] dx = \quad \text{avec } m \neq n. \\ &\frac{a_n}{2} \left[\frac{L}{(m+n)\pi} \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \frac{L}{(m-n)\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = 0 \end{aligned}$$

Si $m = n$:

$$a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$a_n \left[\frac{x}{2} + \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = a_n \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi L}{L}\right) - \left(-\frac{L}{2} + \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{-2n\pi L}{L}\right) \right) \right] = a_n L$$

Prenons le troisième terme:

$$b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right] dx =$$

$$\frac{b_n}{2} \left[-\frac{L}{(m+n)\pi} \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) - \frac{L}{(m-n)\pi} \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L =$$

avec $m \neq n$.

$$\frac{b_n}{2} \left[-\frac{L \cos((m+n)\pi)}{(m+n)\pi} - \frac{L \cos((m-n)\pi)}{(m-n)\pi} - \left(-\frac{L \cos((m+n)\pi)}{(m+n)\pi} - \frac{L \cos((m-n)\pi)}{(m-n)\pi} \right) \right] = 0$$

Si $m = n$:

$$b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(n+n)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(n-n)\pi x}{L}\right) \right] dx =$$

$$\frac{b_n}{2} \left[-\frac{L}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = \frac{b_n}{2} \left[-\frac{L}{2n\pi} \cos(2n\pi) - \left(-\frac{L}{2n\pi} \cos(2n\pi) \right) \right] = 0$$

Si $m = n = 0$:

$$b_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Finalement, l'équation (3) se résume à :

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n L \Rightarrow a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Refaisons la même procédure en prenant le produit Hermitien entre $f(x)$ et $\sin(n\pi x/L)$

$(\langle f(x), \sin(m\pi x/L) \rangle)$:

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = A \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\}$$

$$= b_m L \quad \text{avec } m = n \text{ et } m \neq 0$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalement, prenons le produit Hermitien entre $f(x)$ et 1, $\langle f(x), 1 \rangle$:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L A dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\}$$

Le premier terme donne :

$$\int_{-L}^L A dx = 2AL$$

Le second terme donne :

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = 0$$

Le 3^e terme donne :

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = -\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi) - \left(-\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi)\right) = 0$$

Finalement :

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2AL \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$\text{et posons } n = 0 \text{ dans } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ nous obtenons: } a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow A = \frac{a_0}{2}$$

Conclusion:

La série de Fourier de $f(x)$ s'exprime, avec L la demi-période:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Des fois on écrit la série de Fourier de $f(t)$ comme $SF(f(t))$, $SF_t(t)$ ou $S_f(t)$

Lorsqu'on utilise la période T , on préfère écrire T au lieu de $T/2$. De même que les bornes de l'intégrale peuvent être indiquées par t_1 et t_2 avec $t_2 - t_1 = T$. Habituellement, mais pas obligatoirement, $t_1 = -T/2$ et $t_2 = T/2$.

Par analogie entre la période spatiale $2L$ et la période temporelle T , les équations des séries de Fourier s'écrivent:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{T/2} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

En se servant de la forme $\omega = \frac{2\pi}{T}$, les équations se simplifient davantage en écriture:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(\omega n t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(\omega n t) dt \end{aligned}$$

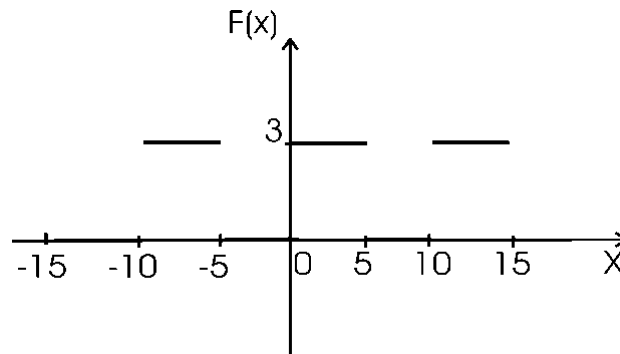
Noter que l'on peut écrire $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et alors $\omega n = \frac{2\pi n}{T}$, ou bien en définissant ω_0 comme la vitesse angulaire (ou pulsation) fondamentale, alors $\omega n = n\omega_0$. Il est possible aussi que n soit écrit en indice comme $\omega_n = n\omega_0$ et $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Exemple 1:

a) Trouver les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ de période 10:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 \leq x < 0 \\ 3 & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

b) Tracer $f(x)$ pour $x=-20$ à 20 avec des pas de 0.1 et pour $n=1$; $n=1$ à 3 ; $n=1$ à 10 et pour $n=1$ à 100 .



La période vaut 10, donc de $-L$ à L vaut 10 $\Rightarrow 2L = 10$ ou $L = 5$.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx, \quad a_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 dx + \int_0^5 3 dx \right\} = \frac{1}{5} [3x]_0^5 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx + \int_0^5 3 \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx \right\} = \frac{3}{5} \frac{5}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \right]_0^5 = 0 \quad \text{avec } n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx + \int_0^5 3 \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right) dx \right\} = \frac{3}{5} \frac{5}{n\pi} \left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \right]_0^5 = \frac{3}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$$

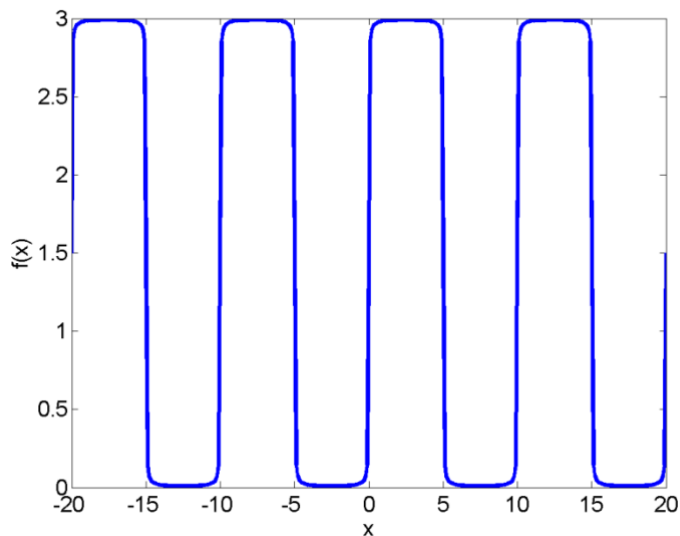
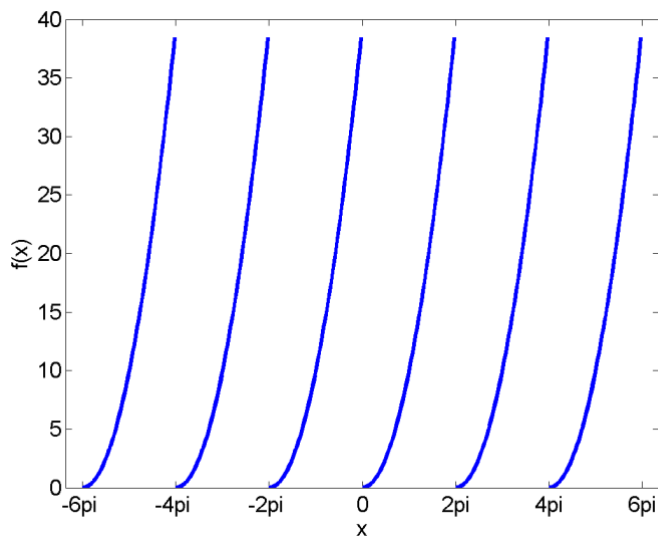


Figure. Série de Fourier de $f(x)$ tracée avec Matlab pour $x = -20:0.1:20$ et $n = 1$ à 100.

Exemple 2:

Trouver la série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ pour $0 < x < 2\pi$, si la période est 2π .



Graphique de $f(x) = x^2$ répétée à chaque 2π .

La période vaut 2π , donc de $-L$ à L vaut 2π : $2L = 2\pi$ ou $L = \pi$.

Au lieu de considérer l'intégrale de $-L$ à L , on la considère de 0 à $2L$ selon l'énoncé de $f(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \left\{ \int_0^{2L} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx \right\}$$

$$= \frac{4}{n^2}$$

avec $\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \sin(ax)$ ou par integration par partie 2 fois : $u_1=x^2$ et

$du_1=2x dx$; ensuite $u_2=2x$ et $du_2=2 dx$.

$$b_n = \frac{1}{L} \left\{ \int_0^{2L} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx) dx \right\}$$

$$= -\frac{4\pi}{n}$$

avec $\int x^2 \sin(ax) dx = \frac{2x}{a^2} \sin(ax) + \left(-\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right) \cos(ax)$ ou par integration par partie 2 fois : $u_1=x^2$ et

$du_1=2x dx$; ensuite $u_2=2x$ et $du_2=2 dx$.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right] \quad \text{avec } 0 < x < 2\pi$$

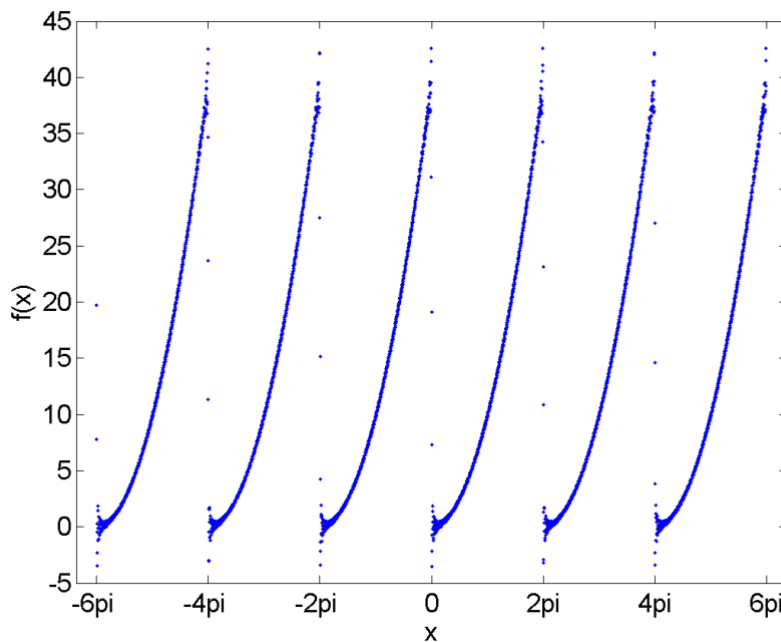


Figure. Série de Fourier de $f(x)$ tracée avec Matlab pour $x = -6\pi:0.01:6\pi-0.01$ et $n = 1$ à 100.

Exercices:

Trouver la série de Fourier de

1- $f(t) = 1$ pour $-\pi < t < 0$, $f(t) = 0$ pour $0 < t < \pi$ et $f(t+2\pi) = f(t)$.

Réponse: $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$

2- $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$ et $f(t+2\pi) = f(t)$.

Réponse: $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nt}{n}$

II.4. Les harmoniques (Optionnel – pas à l'examen)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\} \quad (1)$$

peut s'écrire sous la forme:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_0 n t - \theta_n) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n\omega_0$$

Identifiant $c_0 = \frac{a_0}{2}$

Prenant les 2 termes entre accolades de (1), remplacer $2\pi n/T$ par $n\omega_0$, et multipliant et divisant par

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} :$$

$$a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n \cos(\omega_0 n t)}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} + \frac{b_n \sin(\omega_0 n t)}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)$$

En appelant $\cos(\theta_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $\sin(\theta_n) = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

on obtient:

$$\begin{aligned} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) &= c_n [\cos(\theta_n) \cos(\omega_0 n t) + \sin(\theta_n) \sin(\omega_0 n t)] \\ &= c_n [\cos(\omega_0 n t - \theta_n)] \end{aligned}$$

Ainsi:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_0 n t - \theta_n)$$

- ❖ La $n^{\text{ième}}$ composante de $f(t)$ de pulsation $\omega_n = n\omega_0$ est appelée le $n^{\text{ième}}$ harmonique de la fonction périodique. C'est le coefficient c_n .
- ❖ La 1^{er} harmonique est appelé la composante fondamentale, et elle a la même période que la fonction $f(t)$.
- ❖ $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ est la pulsation fondamentale ou fréquence angulaire fondamentale en radian/seconde (rad/sec).
- ❖ f_0 est la fréquence fondamentale en cycle/sec ou Hertz (Hz) ou sec^{-1} .
- ❖ T est la période fondamentale en seconde.
- ❖ c_n et θ_n sont les harmoniques des amplitudes et des phases.

II.5. La forme complexe de la SF.

La forme complexe de la SF: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)\}$

$$\cos(\omega n t) = \frac{e^{i\omega n t} + e^{-i\omega n t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\omega n t) = \frac{e^{i\omega n t} - e^{-i\omega n t}}{2i}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{i\omega n t} + e^{-i\omega n t}}{2} + b_n \frac{e^{i\omega n t} - e^{-i\omega n t}}{2i} \right\}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{i\omega n t} + e^{-i\omega n t}}{2} - i b_n \frac{e^{i\omega n t} - e^{-i\omega n t}}{2} \right\}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n - i b_n) e^{i\omega n t} + (a_n + i b_n) e^{-i\omega n t} \}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i\omega n t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{-i\omega n t}$$

Sachant que $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega n t) dt$; $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega n t) dt$

alors $a_{-n} = a_n$ et $b_{-n} = -b_n$. Ceci nous permet de changer n en $-n$ dans le 3e terme de $f(t)$ et en même temps parcourir n de $-\infty$ à -1 (ce qui est sans effet) et $f(t)$ devient:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i\omega n t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} (a_n - i b_n) e^{i\omega n t}$$

qui donne $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}$ avec $c_0 = a_0/2$; $c_n = (a_n - i b_n)/2$; $c_{-n} = (a_n + i b_n)/2$

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega n t) dt - i \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega n t) dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(\omega n t) - i \sin(\omega n t)] dt$$

$$\cos(\omega n t) - i \sin(\omega n t) = \frac{e^{i\omega n t} + e^{-i\omega n t}}{2} - i \frac{e^{i\omega n t} - e^{-i\omega n t}}{2i} = e^{-i\omega n t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega n t} dt \quad \text{si } f(t) \text{ réelle : } c_{-n} = c_n^*$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt \quad \text{pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

ou bien puisque $f(t)e^{-i\omega n t}$ est périodique de période T : $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega n t} dt$

$c_n = (a_n - ib_n)/2 \rightarrow$ spectre d'amplitude en fonction de ω de la fonction périodique $f(t)$:

$$|c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

\rightarrow spectre de phase en fonction de ω de la fonction périodique $f(t)$:

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

\rightarrow On trace habituellement le spectre de phase et le spectre d'amplitude en fonction de la fréquence angulaire $n\omega$.

\rightarrow Puisque les spectres d'amplitude et de phase sont évalués à des points discrets selon les valeurs de n (non continus), ces spectres sont appelés spectres discrets.

\rightarrow La représentation de c_n en fonction de $n\omega$ montre la périodicité de c_n dans le domaine des fréquences, tout comme $f(t)$ (ou $f(x)$) est représentée en fonction de t (ou x) dans le domaine temporel (ou spatial).

Exemple 1:

Trouver la série de Fourier de $f(t) = A \sin(\pi t)$ pour $0 < t < 1$ et $T = 1$.

Les formules sont: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}$ et $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt$

Puisque $\omega = 2\pi/T = 2\pi$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n t}$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi nt} dt = \int_0^1 A \sin(\pi t) e^{-i2\pi nt} dt = \frac{A}{2i} \int_0^1 (e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}) e^{-i2\pi nt} dt \\
&= \frac{A}{2i} \int_0^1 (e^{-i\pi(2n-1)t} - e^{-i\pi(2n+1)t}) dt = \frac{A}{2i} \left[\frac{e^{-i\pi(2n-1)t}}{-i\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)t}}{-i\pi(2n+1)} \right]_0^1 \\
&= \frac{A}{2} \left[\frac{e^{-i\pi(2n-1)}}{\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)}}{\pi(2n+1)} \right]_0^1 = \frac{A}{2} \left[\frac{e^{-i\pi(2n-1)} - 1}{\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)} - 1}{\pi(2n+1)} \right] \\
&\quad \text{Sachant que } e^{\pm i\pi(2n-1)} = -1 \\
c_n &= \frac{A}{2} \left[\frac{-2}{\pi(2n-1)} - \frac{-2}{\pi(2n+1)} \right] = A \left[\frac{-2n-1 - (-2n+1)}{\pi(4n^2-1)} \right] = \frac{-2A}{\pi(4n^2-1)} \\
\Rightarrow f(t) &= \frac{-2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} e^{i2\pi nt}
\end{aligned}$$

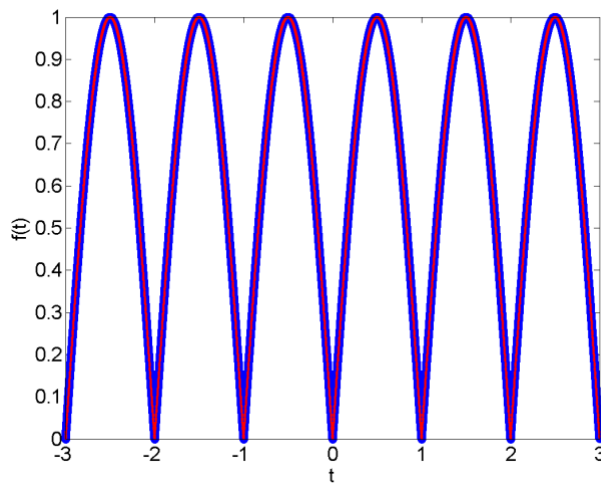


Figure. Reproduction de $f(t) = A \sin(\pi t)$ avec $A = 1$ dans $[0, 1]$ (en bleu), pour chacun des intervalles indiqués. La fonction en rouge découle de la série de Fourier correspondante à $f(t)$.

Exemple 2:

Trouver la série de Fourier complexe de la fonction porte $f(t)$ de période T et définie par:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| < d/2 \\ \frac{A}{2} & \text{si } |t| = d/2 \\ 0 & \text{si } d/2 < |t| < T/2 \end{cases},$$

c.à.d $f(t) = A \times \text{rect}_{d/2}(t)$ pour $|t| \leq T/2$, est une fonction porte de largeur d et d'amplitude A .

Par définition $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}$ avec $\omega = 2\pi/T$, et $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt$

$$c_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-d/2}^{d/2} \frac{A}{2} e^{-i\omega n t} dt + \int_{-d/2}^{d/2} A e^{-i\omega n t} dt + \int_{d/2}^{d/2} \frac{A}{2} e^{-i\omega n t} dt \right] = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} A e^{-i\omega n t} dt$$

$$c_n = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n t}}{-i\omega n} \right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n d/2}}{-i\omega n} - \frac{e^{+i\omega n d/2}}{-i\omega n} \right]$$

$$c_n = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{i\omega n} \right] = \frac{Ad}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{2i\omega n d/2} \right] = \frac{Ad}{T} \left[\frac{\sin(\omega n d/2)}{\omega n d/2} \right]$$

$$c_n = \frac{Ad}{T} \text{sinc}(\omega n d/2) \quad (\text{sinc}(x) \neq 1 \text{ si } x = 0 \text{ et } \text{sinc}(x) \neq \sin(x)/x \text{ si } x \neq 0)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} = \frac{Ad}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\omega n d/2) * e^{i\omega n t}$$

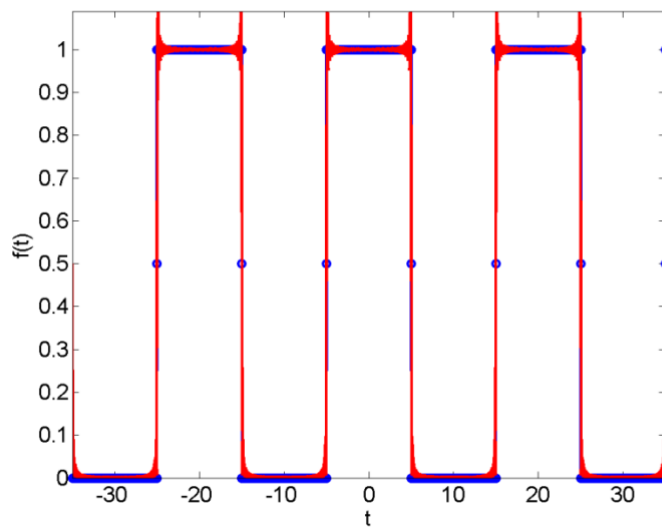


Figure. rect (bleu), sa SF complexe (rouge). $T=2d=20$.

$$c_n = \frac{Ad}{T} \text{sinc}(\omega n d/2) = (a_n - ib_n)/2 \Rightarrow a_n = 2\text{Re}[c_n] \text{ et } b_n = -2\text{Im}[c_n].$$

c_n est réel \Rightarrow les $b_n = 0 \Rightarrow$ le spectre de phase $\phi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n) = 0$.

Tracer le spectre d'amplitude $|c_n| = f(\omega)$ pour n valeurs de $\omega = 2\pi/T$.

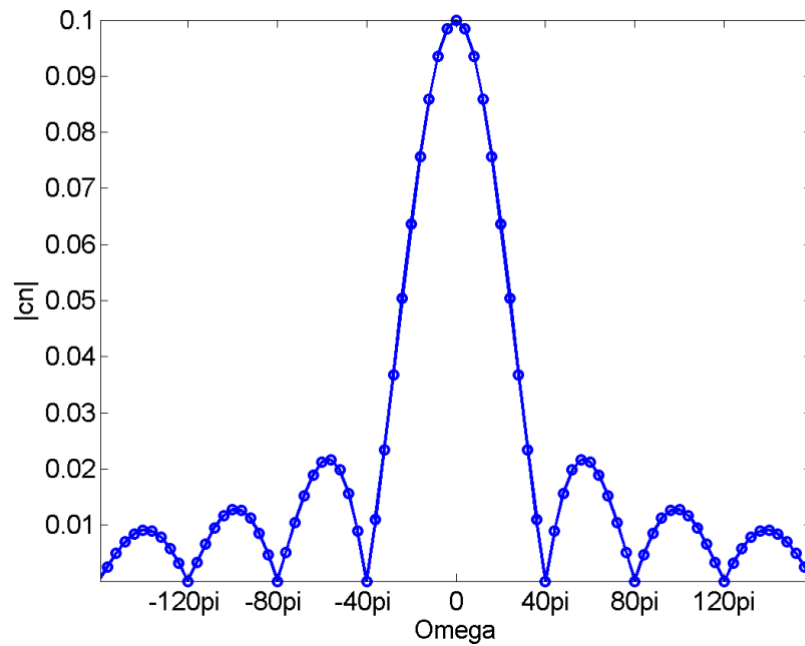


Figure. Spectre d'amplitude $|c_n|$ pour $A=1$, $T=1/2$ et $d=1/20$.

Exemple 3: Trouver les spectres d'amplitude et de phase de la fonction $f(t)$ de période T :

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq id \\ 0 & d < t \leq T \end{cases} \quad d < T; \quad \omega = 2\pi/T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega n t} dt = \frac{A}{T} \int_0^d e^{-i\omega n t} dt = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n t}}{-i\omega n} \right]_0^d = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\omega n d}}{-i\omega n} - \frac{1}{-i\omega n} \right]$$

$$c_n = \frac{A}{T} \left[\frac{1}{i\omega n} - \frac{e^{-i\omega n d}}{i\omega n} \right] = \frac{Ae^{-i\omega n d/2}}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{i\omega n} \right]$$

$$c_n = \frac{Ade^{-i\omega n d/2}}{T} \left[\frac{e^{i\omega n d/2} - e^{-i\omega n d/2}}{2i\omega n d/2} \right] = \frac{Ade^{-i\omega n d/2}}{T} \left[\frac{\sin(\omega n d/2)}{\omega n d/2} \right]$$

$$c_n = \frac{Ad}{T} \text{sinc}(\omega n d/2) e^{-i\omega n d/2} \quad \text{de la forme } c_n e^{i\phi_n}$$

$$\text{avec } |c_n| = \left| \frac{Ad}{T} \text{sinc}(\omega n d/2) \right| \quad \text{et} \quad \phi_n = -\frac{\omega n d}{2} = -\frac{2\pi}{T} \frac{nd}{2} = -\frac{\pi nd}{T}$$

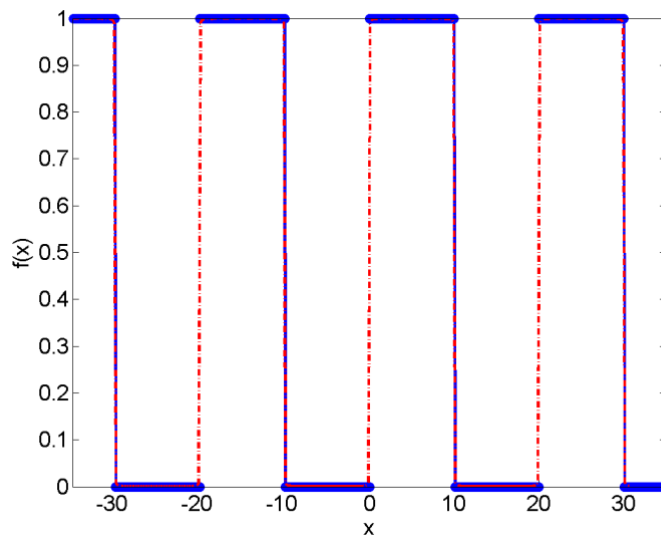


Figure. rect (bleu), sa SF complexe (rouge). $A=1$, $T=2d=20$. Donne même spectre d'amplitude que précédemment.

II.6. Propriétés d'approximation en moindres carrés. L'erreur de la Série de Fourier. (Optionnel – pas dans les TPs ni dans l'examen).

La série de Fourier trigonométrique définie sur $-T/2 < t < T/2$,

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)\}$ peut être approximée par les k premiers termes:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \{a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)\}$$

L'erreur alors introduite est $e_k(t) = f(t) - s(t)$

L'erreur quadratique moyenne (ou erreur moyenne quadratique) est donnée par:

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [e_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - s(t)]^2 dt$$

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

Théorème de Parseval: si a_n et b_n sont les coefficients de la SF de $f(t)$ de période T , alors:

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Exemple:

Trouver la série de Fourier de $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$ et $f(t+2\pi) = f(t)$. Calculer l'erreur quadratique

moyenne, E_k , pour les 5 premiers harmoniques non nuls. Résultat SF: $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$

Réponse:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt$$

$$u=t \rightarrow du=dt; dv=\cos(nt)dt \rightarrow v=\sin(nt)/n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left\{ [t \sin(nt)/n]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ [0-0] - \left[-\frac{1}{n^2} \cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{n^2} [\cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

$$u = t; du = dt; dv = \sin(nt)dt; v = (-1/n)\cos(nt).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[t(-1/n)\cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (1/n)\cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[(-1/n)\pi\cos(n\pi) - (-1/n)(-\pi)\cos(-n\pi) \right]_{-\pi}^{\pi} - 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) - \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi) \sin(nt)$$

$$\text{avec } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ et } (-1) * \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} : f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

Pour le calcul de l'erreur quadratique moyenne E_k :

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2 \cos(n\pi)}{n} \right)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2 \cos(n\pi)}{n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^k \left(\frac{\cos(n\pi)}{n} \right)^2$$

Nous avons proposé de tracer $f(t)$ et sa série de Fourier pour certaines harmoniques et d'observer les variations de E_k et de l'ajustement de $f(t)$ par sa SF:

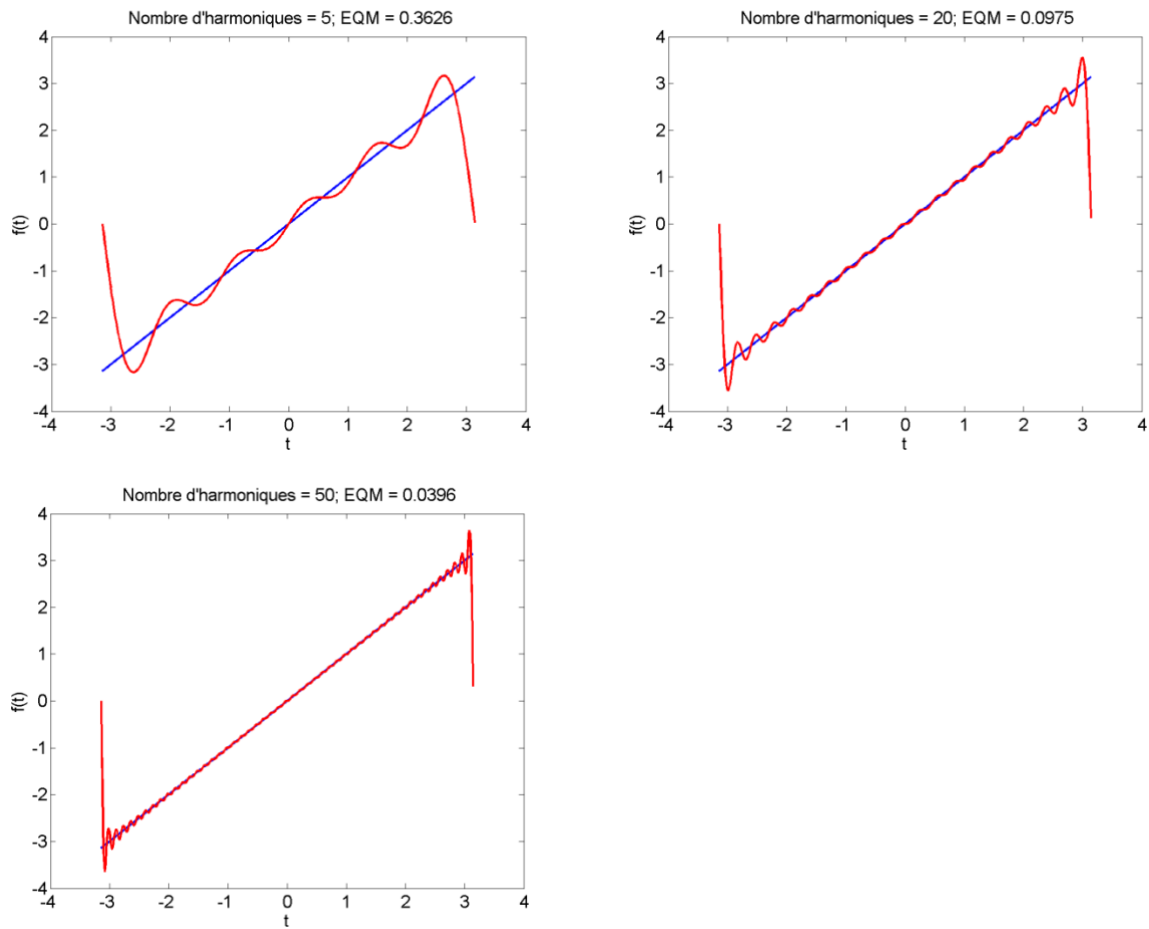


Figure. Étude de E_k et SF pour $f(t)=t$ sur $[-\pi, \pi]$. $ts=0.01$. EQM=erreur quadratique moyenne.

II.7. Symétries et séries de Fourier.

II.7.1. Différentes symétries

Une fonction est **paire** si $f(t) = f(-t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Si une fonction est paire:
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

Le graphe de $f(t)$ est symétrique par rapport à l'axe des y.

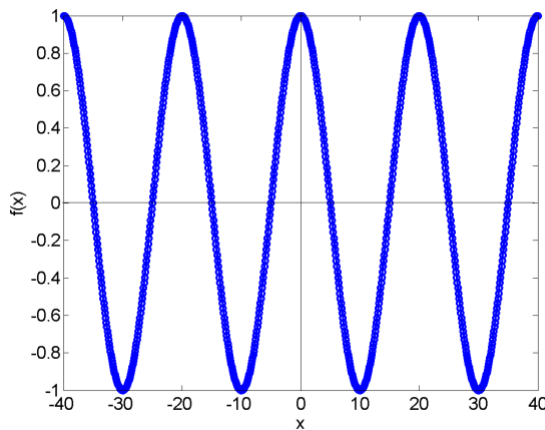


Figure. Fonction cosinus: paire. (Ex.: x^2 ; gaussienne,).

Une fonction est **impaire** si $f(t) = -f(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si une fonction est impaire:
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Le graphique de $f(t)$ est alors symétrique par rapport à l'origine.

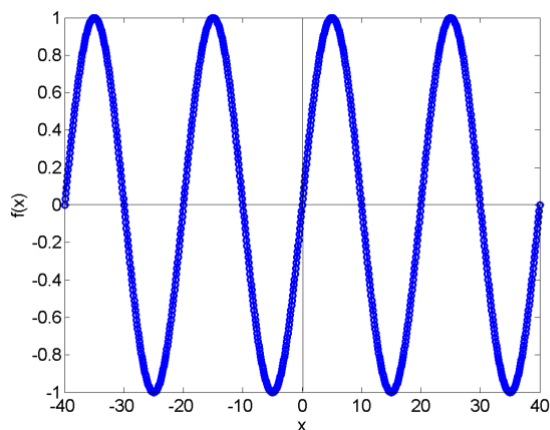


Figure. Fonction sinus: impaire. (Ex.: x^3 , tangente,).

Composantes paire et impaire:

Une fonction peut s'écrire comme la somme de deux composantes paire et impaire.

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t)/2 + f(t)/2 + f(-t)/2 - f(-t)/2 = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \\ &= \frac{1}{2}f_{\text{pair}}(t) + \frac{1}{2}f_{\text{impair}}(t) \end{aligned}$$

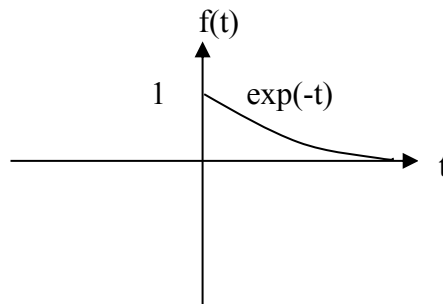
Exemple 1:

Trouver les composantes paire et impaire de

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

De $f(t)$ on déduit $f(-t)$:

$$f(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases}$$



$$f_{\text{paire}}(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \\ \frac{1}{2}e^t & t < 0 \end{cases}$$

$$f_{\text{impaire}}(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \\ -\frac{1}{2}e^t & t < 0 \end{cases}$$

Symétrie de demi-période:

Une fonction périodique de période T est dite symétrique de semi-période si $f(t) = -f(t + T/2)$.

Symétrie d'un quart de période:

Si une fonction périodique $f(t)$ a une symétrie de demi-période, et si elle est de plus paire ou impaire, alors $f(t)$ est symétrique d'un quart de période paire ou impaire.

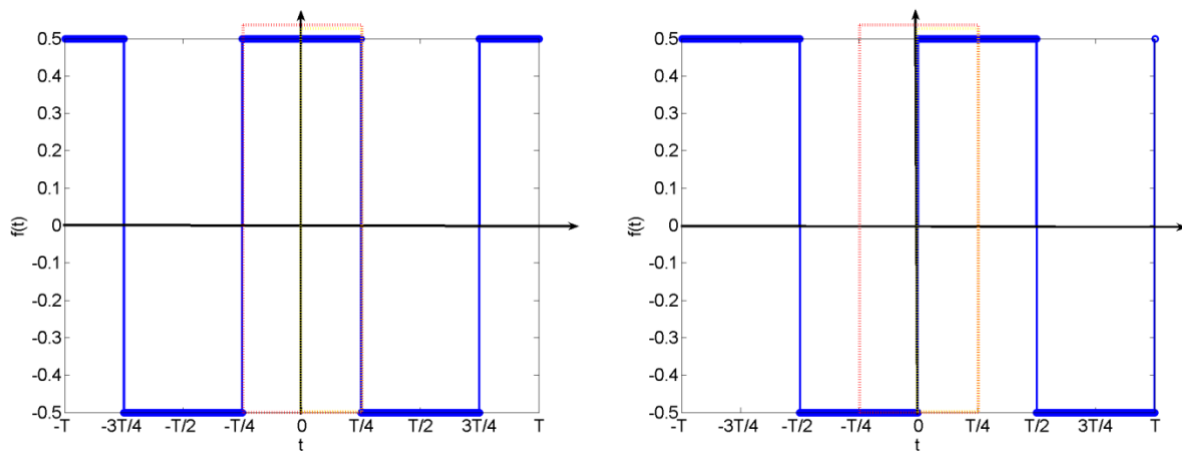


Figure. Exemple de fonctions paire et impaire et toutes deux symétriques de demi-période, elles sont alors symétriques d'un quart de période paire ou impaire.

II.7.2. Séries de Fourier de fonctions symétriques

L'utilisation de la symétrie des fonctions simplifie le calcul des séries de Fourier.

Fonction paire:

Rappel des formules:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\}$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Si $f(t)$, de période T , est **paire**, sa transformée de Fourier se réduit à:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

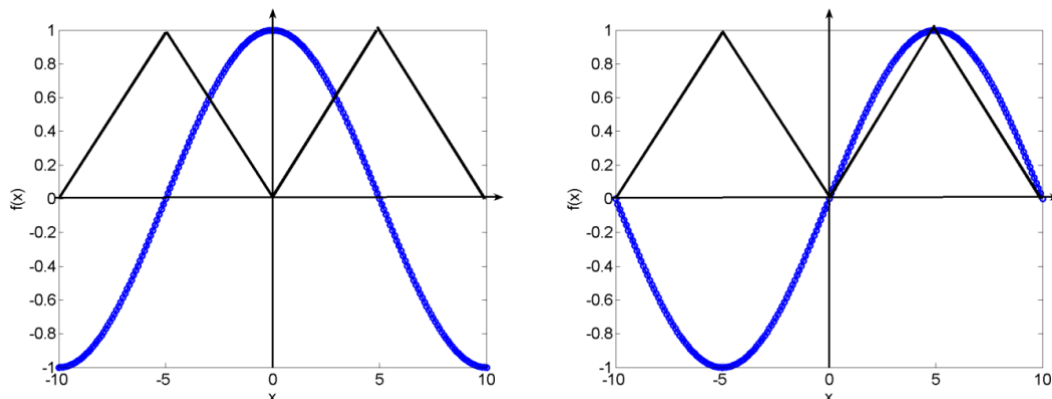


Figure. La fonction $f(t)$ en noir est paire. Lorsqu'elle multiplie un cosinus (en bleu, figure de gauche), comme dans le cas des a_n , l'intégrale du produit $f(t)\cos(n\omega t)$ ne s'annule pas. Tandis que lorsqu'elle

multiplie un sinus (en bleu, figure de droite), comme dans le cas des b_n , l'intégrale du produit $f(t)\sin(n\omega t)=0 \Rightarrow b_n = 0$.

Fonction impaire:

Si $f(t)$, de période T , est **impair**, sa transformée de Fourier se réduit à:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

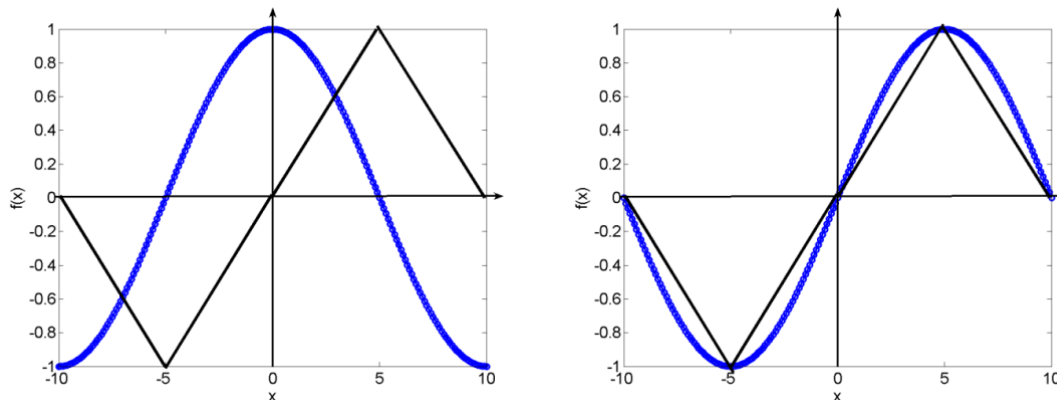


Figure. La fonction $f(t)$ en noir est impaire. Lorsqu'elle multiplie un cosinus (en bleu, figure de gauche), comme dans le cas des a_n , l'intégrale du produit $f(t)\cos(n\omega t)$ s'annule $\Rightarrow a_n = 0$. Tandis que lorsqu'elle multiplie un sinus (en bleu, figure de droite), comme dans le cas des b_n , l'intégrale du produit $f(t)\sin(n\omega t)$ ne s'annule pas.

Fonction symétrique de demi-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique et symétrique de demi-période contient seulement les harmoniques impaires:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt \quad n=1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt \quad n=1,2,3,\dots$$

Fonction paire et symétrique de quart-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique paire et symétrique de quart-période contient seulement les harmoniques impaires en cosinus:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega t]$$

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt$$

Fonction impaire et symétrique de quart-période:

La série de Fourier de $f(t)$ périodique impaire et symétrique de quart-période contient seulement les harmoniques impaires en sinus:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin[(2n-1)\omega t]$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt$$

II.8. Conditions de Dirichlet:

- 1- Si $f(x)$ est définie sur $[-L, L]$, sauf à un nombre déterminé de points,
 - 2- $f(x)$ est périodique de période $2L$,
 - 3- $f(x)$ et $df(x)/dx$ sont continues par morceaux sur $[-L, L]$,
- alors la série de Fourier de $f(x)$ converge:

- a) vers $f(x)$ au point x si $f(x)$ est continue en ce point,
- b) vers $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ si $f(x)$ est discontinue au point x .

Exemple 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \text{avec la période } L = 10$$

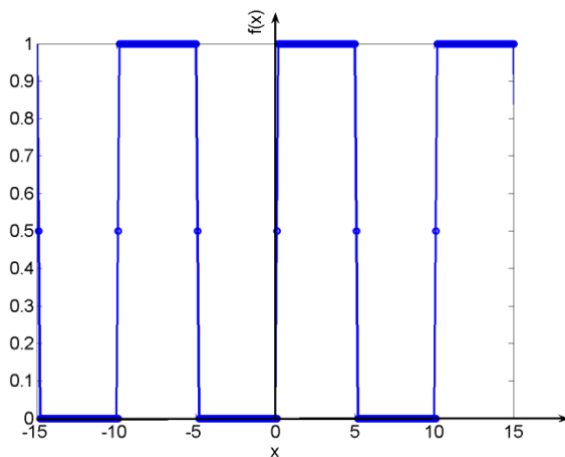


Figure. $f(x)$.

Quelles sont les valeurs de $f(x)$ à -5, -3, 0, 2 et 5?

$$f(-5) = \frac{f(-5-0) + f(-5+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(-3) = 0$$

$$f(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 1$$

$$f(5) = \frac{f(5-0) + f(5+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

II.9. Phénomène de Gibbs

Lors des discontinuités d'une fonction, les sommes partielles de la série de Fourier de $f(t)$ sont affectées par des oscillations autour des points de discontinuités. Ces oscillations sont appelées le phénomène de Gibbs.

Exemple 1.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases} \quad \text{Période } T = 2\pi$$

La série de Fourier de $f(t)$ est:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)t]$$

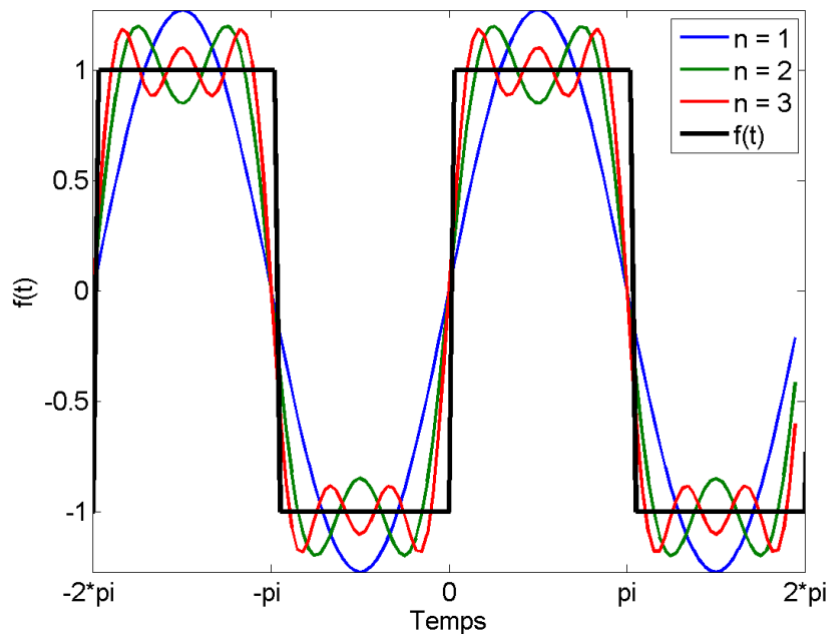


Figure. Phénomène de Gibbs (overshoot, ou ringing).

III. Transformée de Fourier.

Soit la série de Fourier complexe

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Nous appelons la fonction g au lieu de f pour ne pas confondre avec la fréquence f .

$$\text{avec } \omega_n = n\omega = 2\pi n/T \Rightarrow \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = 2\pi n/T - 2\pi(n-1)/T = 2\pi/T$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = 2\pi/T \Rightarrow 1/T = \Delta\omega/2\pi$$

Remplaçons c_n dans $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t}$$

Remplaçant $1/T$ par $\Delta\omega/2\pi$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega$$

En se servant de la somme de Riemann qui s'énonce comme suit:

soit un intervalle $[a,b]$ partitionné en plusieurs points tel que

$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < b$, et les intervalles entre ces points sont:

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \dots$ et Δx_n . Soit y , un point d'un sous-intervalle Δx_k , alors la somme d'une

fonction g des points y correspondants dans chaque sous-intervalle Δx_k est donnée par: $\sum_{k=1}^n g(y) \Delta x_k$

et cette fonction devient une intégrale lorsque les sous-intervalles Δx tendent vers 0.

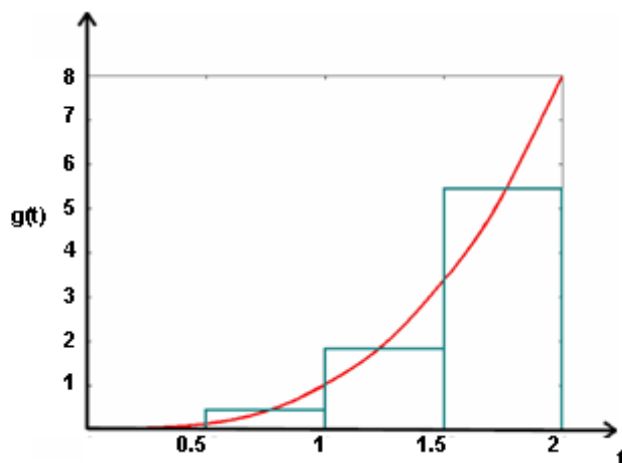


Figure. Somme de Riemann.

Dans la fonction $g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega$ et $\Delta\omega = 2\pi/T$

lorsque $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$, ce qui justifie l'utilisation de l'intégrale de Riemann:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega$$

Puisque $\omega_n = n\omega$ avec $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1}$, l'indice n est omis et l'intégration se fait sur ω .

Définissons:

$$G(\omega) = TF(g(t)) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right] \quad TF = \text{transformée de Fourier}$$

$$\text{et} \quad g(t) = TF^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad TF^{-1} = \text{Transformée de Fourier inverse.}$$

La variable dans le domaine de Fourier, correspondant à la variable spatiale x (cm) ou à la variable temporelle t (sec), est la fréquence f . f a l'unité de cm^{-1} ou s^{-1} (Hertz, Hz).

En posant $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$, soit $f = 1/T$ et les transformées de Fourier deviennent:

$$G(f) = TF(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df$$

Pour que TF existe, il faut que $g(t)$ soit de carré intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$. D'autres définitions:

$g(t)$ définie sur $[0, T]$ et à valeurs complexes. Elle est de carré intégrable si $\int_0^T |g(t)|^2 dt < \infty$. Aussi,

la condition pour que $G(f)$ existe est que $g(t)$ soit absolument intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$.

Exemple 1:

Calculer la TF de $g(t) = \exp(-\alpha t)$ pour $t > 0$; et $g(t) = 0$ pour $t < 0$; $\alpha > 0$.

$$\text{Par définition: } G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^0 0 e^{-i2\pi f t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} dt$$

$$G(f) = \left| \frac{1}{-(\alpha + i2\pi f)} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} = \frac{\alpha - i2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Le module est : $|G(f)| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2} + \frac{4\pi^2 f^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$

L'argument est : $\arg(G) = \arctan\left(\frac{-2\pi f}{\alpha}\right)$

G(f) peut s'écrire sous la forme $G(f) = |G(f)| \cdot \exp(i \cdot \arg(G))$:

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \exp\left[i \cdot \arctan\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]$$

$\alpha=0.05$; $ts=1$; $t=0:ts:100$; $N=length(t)$;

Pour retrouver avec plus de précision les fréquences sur le graphique des transformées de Fourier, on doit augmenter le nombre N de points dans la transformée de Fourier en allongeant avec des zéros la fonction de départ.

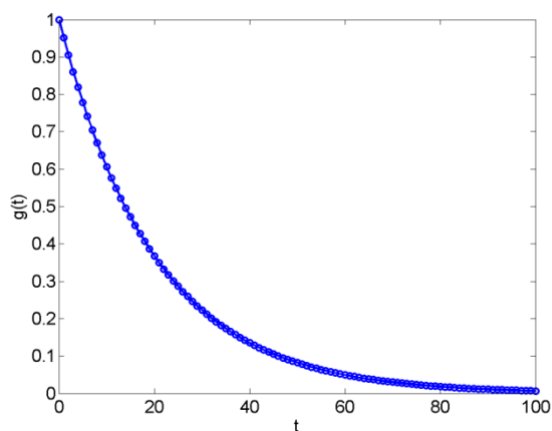


Figure. $g(t) = \exp(-0.05t)$ avec $t = 0:1:100$.

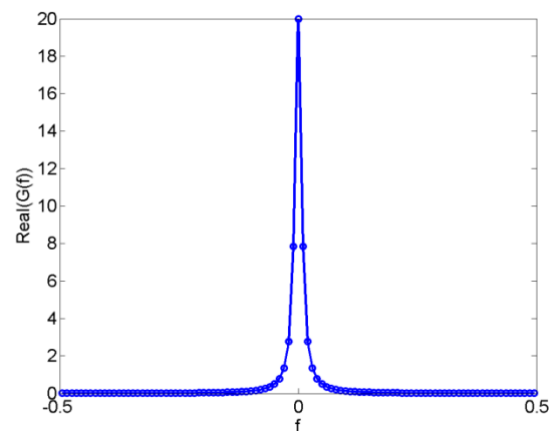


Figure. $\text{Re}(G(f))$.

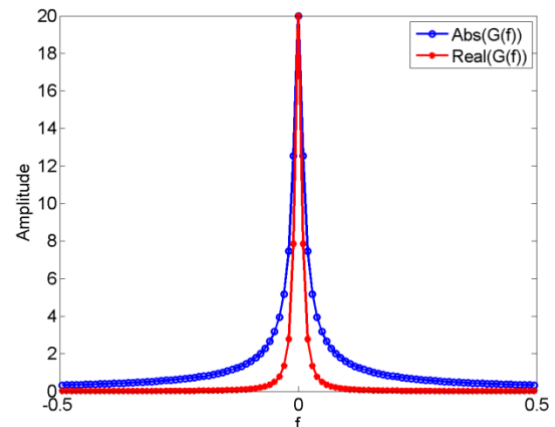
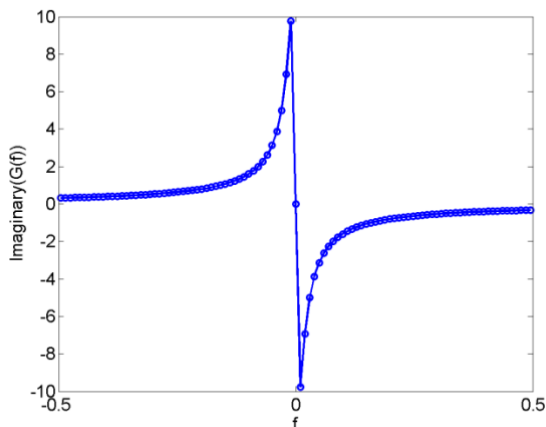


Figure. Im(G(f)).

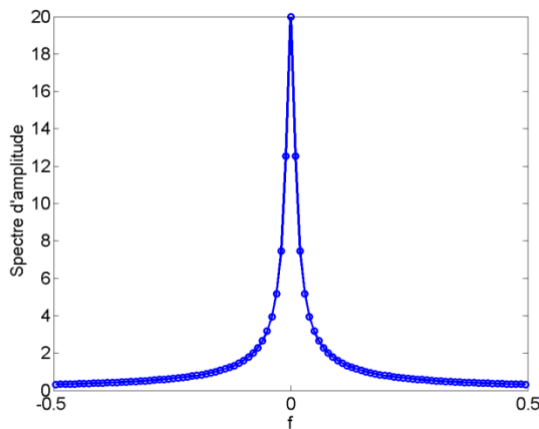


Figure. Spectre d'amplitude.

Figure. Abs(G(f)). ($z = a + ib$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

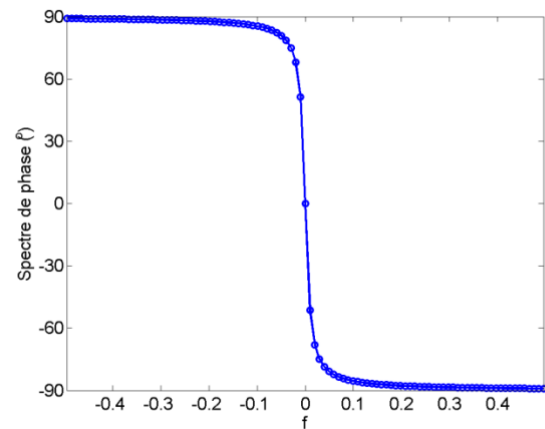


Figure. Spectre de phase.

Calcul de la transformée inverse de $G(f) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \exp\left[i * \arctg\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]$

La formule s'écrit : $g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i * \arctg\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right)\right]} e^{i2\pi ft} df$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} e^{\left[i * (2\pi ft - \arctg\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right))\right]} df \dots\dots\dots \text{approche compliquée}$$

Si l'on garde $G(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{i2\pi ft} df$

on multiplie et on divise par $e^{\alpha t}$: $g(t) = \frac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{\alpha t} e^{i2\pi ft} df$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{e^{\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} e^{(\alpha + i2\pi f)t} df$$

soit $u = \alpha + i2\pi f \Rightarrow du = i2\pi df \Rightarrow df = du/i2\pi$.

$$\Rightarrow g(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} e^{u t} du \dots\dots\dots \text{On doit recourir aux tables d'intégration.}$$

Exemple 2:

Calculer la TF de $g(t) = 1$ si $|t| < d$ et $g(t) = 0$ si $|t| > d$, et $d > 0$.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt$

$$G(f) = \int_{-d}^d e^{-i2\pi ft} dt = \left[\frac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right]_{-d}^d = \frac{1}{-i2\pi f} (e^{-i2\pi fd} - e^{i2\pi fd})$$

$$G(f) = \frac{1}{i2\pi f} (e^{i2\pi fd} - e^{-i2\pi fd}) = d \left(\frac{e^{i2\pi fd} - e^{-i2\pi fd}}{i2\pi fd} \right) = 2d \frac{\sin(2\pi fd)}{2\pi fd}$$

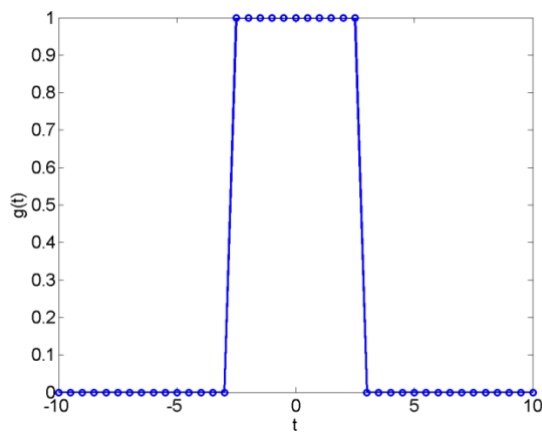
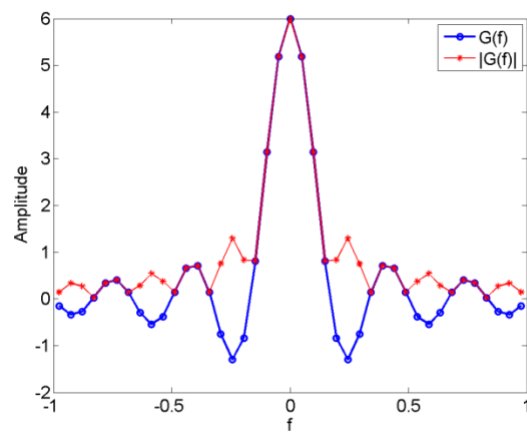


Figure. $g(t)$ avec $T=20$, $d=3$, $ts=0.5$.



$G(f)$ et spectre d'amplitude.

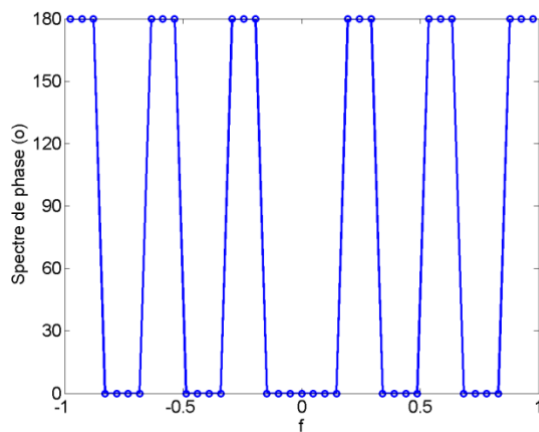


Figure. Spectre de phase.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t) = \cos(\omega_0 t)$ pour $|t| < d/2$, $d > 0$ et $g(t)=0$ ailleurs.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-i2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} + e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2} [\sin c((\omega_0 - 2\pi f)d/2) + \sin c((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

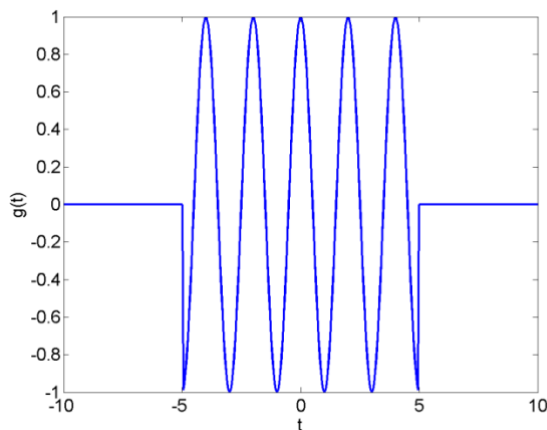


Figure. $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. $f_0 = 0.5$ et $T = 2$.

$t_s = 0.5$; $t = -10 : t_s : 10$; $d = 10$.

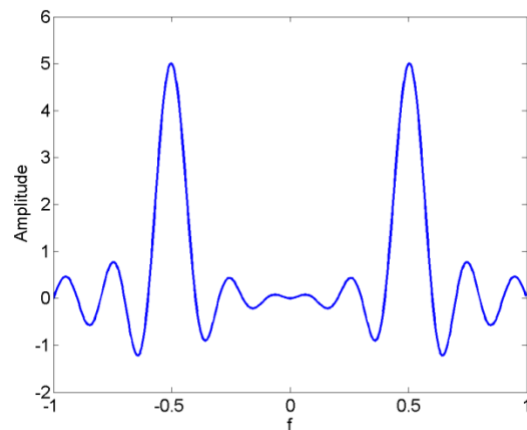


Figure. $G(f)$.

Exemple 4 :

Calculer la TF de $g(t) = \sin(\omega_0 t)$ pour $|t| < d/2$, $d > 0$ $g(t)=0$ ailleurs.

Par définition: $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-i2\pi f t} dt = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$G(f) = \frac{1}{2i} \int_{-d/2}^{d/2} (e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}) dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)t}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)t}}{-i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 - 2\pi f)} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{i(\omega_0 + 2\pi f)} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} + \frac{e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 - 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 - 2\pi f)d/2} - \frac{e^{i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} - e^{-i(\omega_0 + 2\pi f)d/2}}{2i(\omega_0 + 2\pi f)d/2} \right]$$

$$G(f) = \frac{d}{2i} [\text{sinc}((\omega_0 - 2\pi f)d/2) - \text{sinc}((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

$$G(f) = -\frac{id}{2} [\text{sinc}((\omega_0 - 2\pi f)d/2) - \text{sinc}((\omega_0 + 2\pi f)d/2)]$$

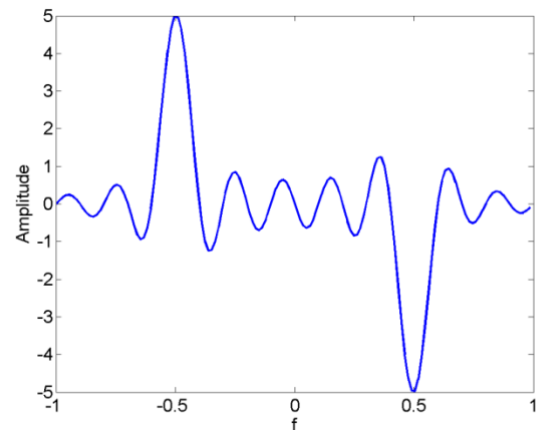
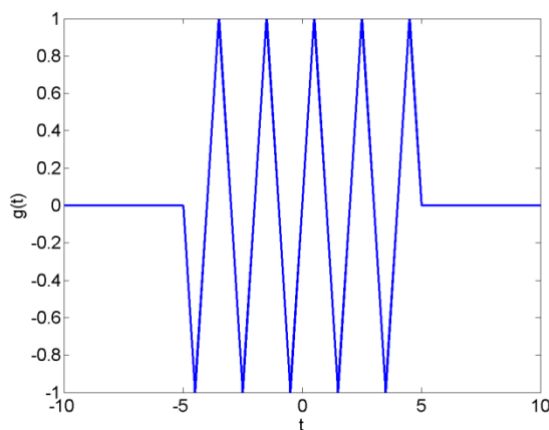


Figure. $g(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. $f_0 = 0.5$ et $T = 2$. Figure. $G(f)$.

$t_s = 0.5$; $t = -10:t_s:10$; $d = 10$.

Autre exemple: La TF de $g(t) = \exp(-t^2)$.

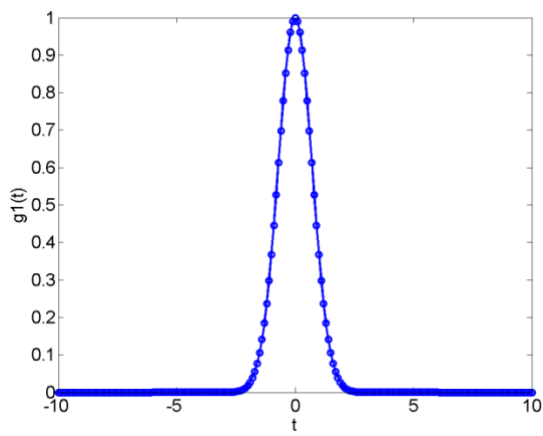


Figure. $g_1(t) = \exp(-t^2)$; $\text{sum}(g_1) = 17.72$,

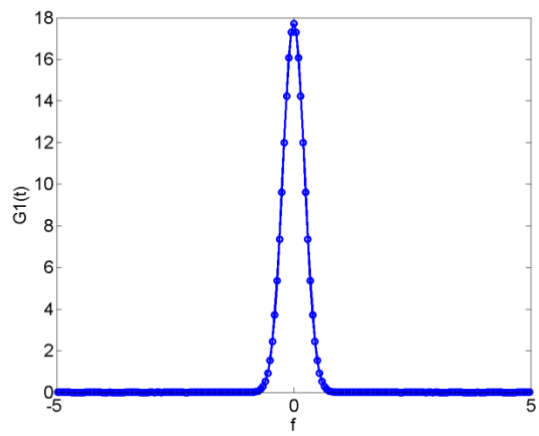


Figure. $\text{FT}[g_1(t)]$.

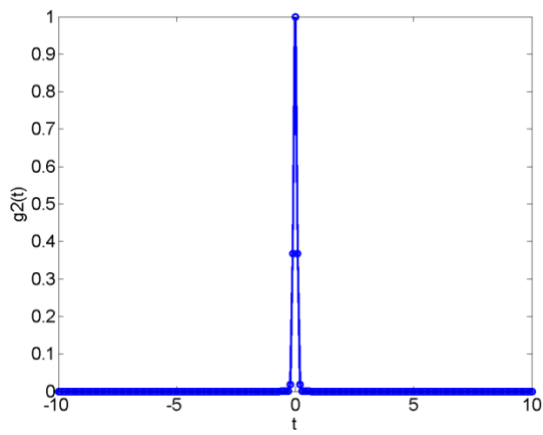


Figure. $g_2(t) = \exp(-(10t)^2)$. $\text{sum}(g_2) = 1.77$.

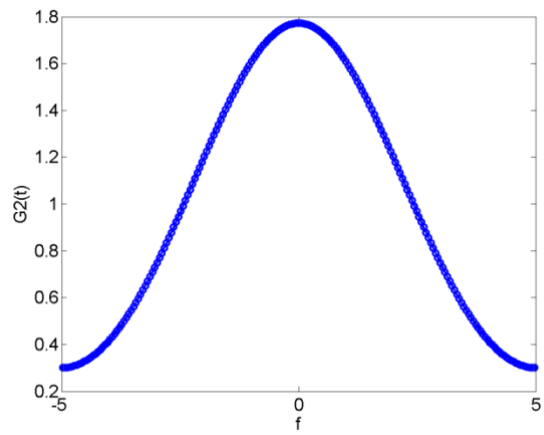


Figure. $\text{FT}[g_2(t)]$. g dense $\Rightarrow G$ large:

Propriétés de la transformée de Fourier (TF)

Les propriétés de la TF sont résumées dans la Table. Ici, nous voyons quelques démonstrations.

Autres notations dans les transformées de Fourier:

En posant $\omega = 2\pi f$:

$$TF[g(t)] = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt \rightarrow G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\omega = 2\pi f$, $d\omega = 2\pi df \Rightarrow df = d\omega/2\pi$:

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df \rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Linéarité:

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

$$\begin{aligned} TF[a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)] e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 g_1(t) e^{-i2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 g_2(t) e^{-i2\pi f t} dt = a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f) \end{aligned}$$

Symétrie:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df. \quad \text{Changer } t \leftrightarrow -t \Rightarrow g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{-i2\pi f t} df$$

$$\text{En interchangeant } t \text{ et } f: g(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i2\pi f t} dt = TF(G(t))$$

Échelle du temps (*time scaling*):

$$g(at) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right), \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

$$TF[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) e^{-i2\pi f t} dt \quad x = at \Rightarrow dx = a dt \Rightarrow dt = dx/a$$

$$\text{Si } a > 0: FT[g(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x/a} dx = \frac{1}{a} G(f/a)$$

C'est l'argument de l'exponentiel qui donne l'argument de G.

Si $a < 0$: $FT[g(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x / a} dx = \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x / a} dx = \frac{1}{|a|} G(f/a)$

$$FT[g(at)] = \frac{1}{|a|} G(f/a)$$

Décalage temporel d'un scalaire réel $a = t_0$:

$$TF[g(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} G(\omega).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} TF[g(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega(u+t_0)} du, \quad \text{avec le changement de variable } u = t - t_0, du = dt \\ &= e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \\ &= e^{-i\omega t_0} G(\omega) \end{aligned}$$

Décalage fréquentiel d'une fréquence $\omega = \omega_0$:

$$TF^{-1}[G(\omega - \omega_0)] = e^{it\omega_0} g(t) \text{ et donc, } TF[e^{it\omega_0} g(t)] = G(\omega - \omega_0).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} TF[e^{it\omega_0} g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega_0} g(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-it(\omega - \omega_0)} dt \\ &= G(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Parité:

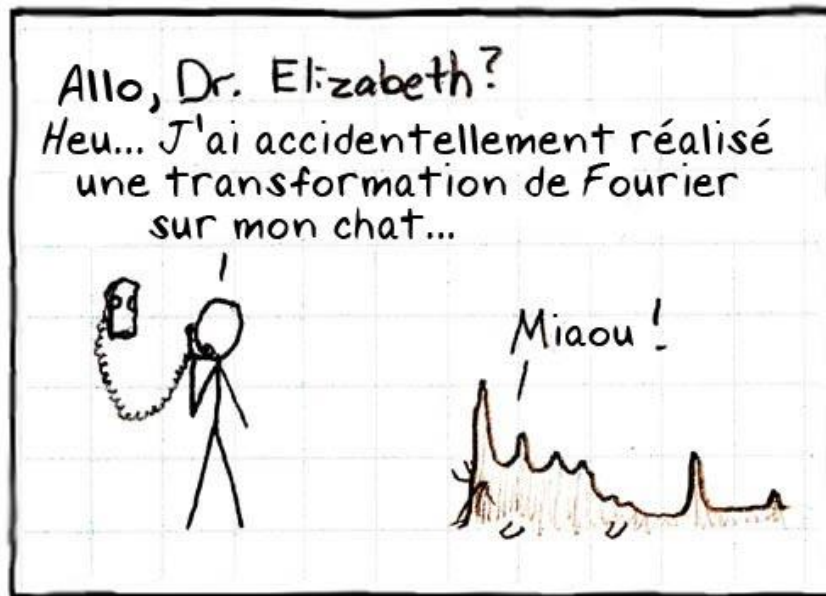
$G(\omega)$ est la transformée de Fourier de $g(t)$

Si $g(t)$ est réelle et paire $\Rightarrow G(\omega)$ est réelle et paire

Si $g(t)$ est réelle et impaire $\Rightarrow G(\omega)$ est imaginaire et impaire

Si $G(\omega)$ est réelle et positive \Rightarrow elle fait un angle 0 avec l'axe des réels \Rightarrow la phase vaut zéro ($\phi(\omega) = 0$).

Si $G(\omega)$ est réelle et négative \Rightarrow elle fait un angle de $\pm \pi$ avec l'axe des réels \Rightarrow la phase vaut $\pm \pi$ ($\phi(\omega) = \pm \pi$).



Propriété	$g(t)$	$G(\omega)$
Linéarité	$a \cdot g(t) + b \cdot h(t)$	$a \cdot G(\omega) + b \cdot H(\omega)$
Symétrie	$G(t)$	$2\pi g(-\omega)$
Échelle du temps (<i>time scaling</i>)	$g(at)$	$\frac{1}{ a } G\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Décalage temporel (<i>time shifting</i>)	$g(t - a)$	$e^{-i\omega a} G(\omega)$
Décalage fréquentiel (<i>frequency shifting</i>)	$e^{itb} g(t)$	$G(\omega - b)$

TABLE 1 – Table des propriétés de la transformée de Fourier (TF) de la fonction $g(t)$. La $\text{TF}[g(t)] = G(\omega)$ peut s'exprimer en fréquences f ou en fréquences angulaires $\omega = 2\pi f$. Dans la table, a et b représentent des scalaires réels et $\text{TF}[h(t)] = H(\omega)$.

La fonction de Dirac δ

La fonction de Dirac δ peut être définie comme la dérivée de la fonction de Heaviside qui est définie comme:

$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et $\delta(x)$ et le δ de Kronecker (la version discrète et numérique du Dirac) sont définies comme:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \left(\delta \text{ de Kronecker} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \right)$$

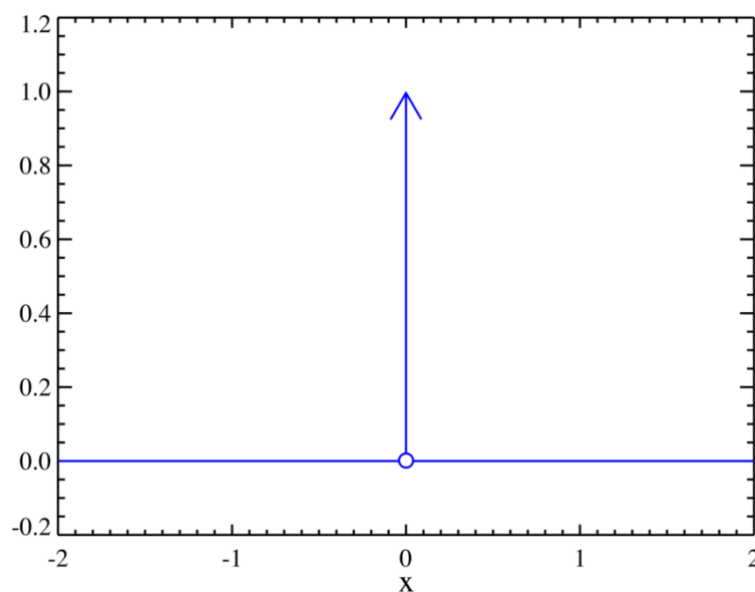


Figure. Fonction de Dirac δ .

Les propriétés de $\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

Le peigne de Dirac ou train d'impulsions (sera utile après l'intra):

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

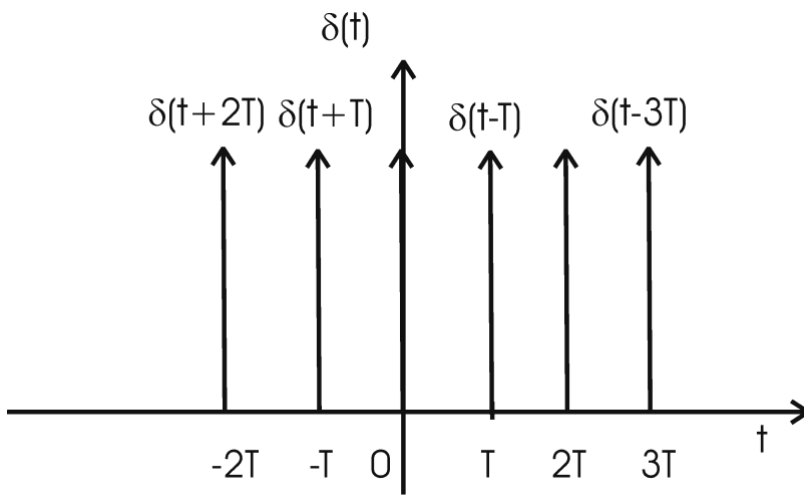


Figure. Peigne de Dirac ou train d'impulsions.

Transformées de Fourier généralisées (Optionnel – pas dans les TP ni examens)

Certaines fonctions ne sont pas de carrés intégrables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \infty$$

c'est le cas des fonctions périodiques comme le sinus et le cosinus, la fonction de Heaviside, une constante etc....

$$\text{Fonction de Heaviside: } H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Par définition, une fonction généralisée à progrès lent $g(t)$ est une fonction associée à une fonction symbolique $\phi(t)$ qui décroît rapidement:

$$\langle g(t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi(t) dt$$

Pour calculer les transformées de Fourier de fonctions généralisées, on utilise la formule de Parseval.

La formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx$$

Celle-ci peut être démontrée de la façon suivante, en utilisant les transformées de Fourier:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i xy} dx$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i xy} dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i xy} dy \right] dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i xy} dx \right] dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(y) dy$$

et en changeant la variable y en x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(x)dx$$

Cette équation peut se rapporter aux transformées de Fourier comme suit, en intégrant sur ω :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)TF[g(t)]d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} TF[f(t)]g(\omega)d\omega$$

ou bien, en intégrant sur t:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF^1[F(\omega)]\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)TF^1[G(\omega)]d\omega$$

Dans les deux cas, nous avons conservé la même variable ω ou t pour f et F et pour g et G.

Exemple 1:

Trouver la TF d'une constante, soit $g(t) = 1$.

$g(t) = 1$ est à progrès lent.

En utilisant la formule de Parseval avec la fonction rapidement décroissante $\phi(t)$:

Soit la formule de Parseval:
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\Phi(x)dx$$

qui devient:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt \right]_{\omega=0} \\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt \right]_{\omega=0} &= TF[\Phi(t)]_{\omega=0} \end{aligned}$$

et par la propriété de la symétrie:

$$TF[\Phi(t)]_{\omega=0} = [2\pi\phi(-\omega)]_{\omega=0} = 2\pi\phi(0)$$

Par la propriété de $\delta(x)$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

$$2\pi\phi(0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

Finalement, en reprenant l'équation de départ $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$ et en

remplaçant le second membre par le résultat précédent qui est $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

et en identifiant le contenu des intégrales des deux membres de l'équation:

$$TF[g(t)] = G(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Noter que dans cet exemple nous avons conservé ω pour simplifier les écritures au lieu de travailler avec $2\pi f$.

Exemple 2:

Calculer la TF de $\delta(t)$.

$\delta(t)$ est une fonction généralisée à progrès lent.

$$\text{Par définition: } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$$

$$\text{soit } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\Phi(t)dt = \Phi(0)$$

$$\text{aussi } \Phi(0) = TF[\phi(t)]_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-i\omega t} dt \right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)d\omega \text{ par changement de}$$

variable $t \rightarrow \omega$.

$$\text{ainsi } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\phi(\omega)d\omega$$

et par identification:

$$FT[\delta(t)] = G(\omega) = 1$$

$$\text{On aurait pu faire le calcul directement : } FT[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

En conclusion, la TF d'une constante est une fonction δ , et la TF d'une fonction δ est une constante.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t)=\exp(i\omega_0 t)$

$g(t)$ peut être réécrite sous la forme $g(t)=f(t)\exp(i\omega_0 t)$. Par la propriété du décalage de la fréquence: $TF[f(t)\exp(i\omega_0 t)] = F(\omega-\omega_0)$. Et comme $f(t) = 1$, et de l'exemple 1 ci-dessus:

$TF[1] = 2\pi\delta(\omega) \rightarrow TF[\exp(i\omega_0 t)] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0) = \delta(\omega-\omega_0)$. C'est un décalage de fréquence ω_0 de la fonction δ .

Exemple 4:

Calculer la TF de $\cos(\omega_0 t)$ et $\sin(\omega_0 t)$.

$$\cos(\omega_0 t) = (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2$$

$$TF[\cos(\omega_0 t)] = TF[(\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2]$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0) = \delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)$$

$$\text{Pour le sinus : } TF[\sin(\omega_0 t)] = -i\pi\delta(\omega-\omega_0) + i\pi\delta(\omega+\omega_0) = -i\delta(\omega-\omega_0) + i\delta(\omega+\omega_0)$$

Quelques fonctions courantes et leur transformée de Fourier

	$g(t)$	$G(\omega)$
Fonction de Dirac	$\delta(t)$	1 (la constante)
Fonction porte	$\Pi(t)$	$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (le sinus cardinal)
La Gaussienne de largeur proportionnelle (\propto) à a	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \omega^2}{4a}}$ (une Gaussienne $\propto \frac{1}{a}$)
L'exponentiel complexe de fréquence a	e^{iat}	$2\pi\delta(\omega - a) = \delta(\omega - a)$ (un Dirac décalé de a fréquences)
Le cosinus de fréquence a	$\cos(at)$	$\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)$ (deux Dirac, aux fréquences a et $-a$)
Le sinus de fréquence a	$\sin(at)$	$-i\delta(\omega - a) + i\delta(\omega + a)$ (deux Dirac imaginaires, un à la fréquence a vers $-\infty$ et l'autre à $-a$)

TABLE 2 – Table des couples de fonctions $g(t)$ et Transformée de Fourier $G(\omega)$. La $\text{TF}[g(t)] = G(\omega)$ peut s'exprimer en fréquences f ou en fréquences angulaires $\omega = 2\pi f$. Dans la table, a représente un scalaire réel.

Transformée de Fourier à deux dimensions

Si l'on remplace $2\pi f$ par ω , la paire de Fourier s'écrit:

$$G(\omega) = FT(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = FT^{-1}(G(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Par analogie, on détermine les paires en 2 dimensions (2D):

$$G(u, v) = TF(g(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

$$g(x, y) = TF^{-1}(G(u, v)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv$$

Exercices :

1. Calculer la TF de $\delta(t-t_0)$.
2. Calculer la TF de $\delta(t+t_0)$.
3. Montrer que $TF[\delta(t+t_0) + 2\delta(t) + \delta(t-t_0)] = 4\cos^2(\omega t_0/2)$.