IMN-359

Méthodes mathématiques du traitement d'images

-

Conclusion

IMN-359

- Cours de math (théorèmes, preuves, questions théoriques sur le TPs et les examens)
- Cours d'informatique (programmation Python, algorithmique, analyse de complexité)
- Cours d'imagerie (applications sur des signaux réels)
  - signal 1D
  - images 2D

IMN-359

- Si vous faites vos TPs, les comprenez, vous aurez un A et plus assuré
- Retour sur TP3 et TP4 crucial pour l’examen final

Temps vs Fréquences

- Si n points de temps, d la distance entre les points, d et n doivent apparaitre dans la définition des fréquences [-t/N, t/N]

- La fonction fftfreq fait ça pour vous (fftshift centre)

numpy.fft.fftfreq

fft.fftfreq(*n*, *d=1.0*, *device=None*) [source]

Return the Discrete Fourier Transform sample frequencies.

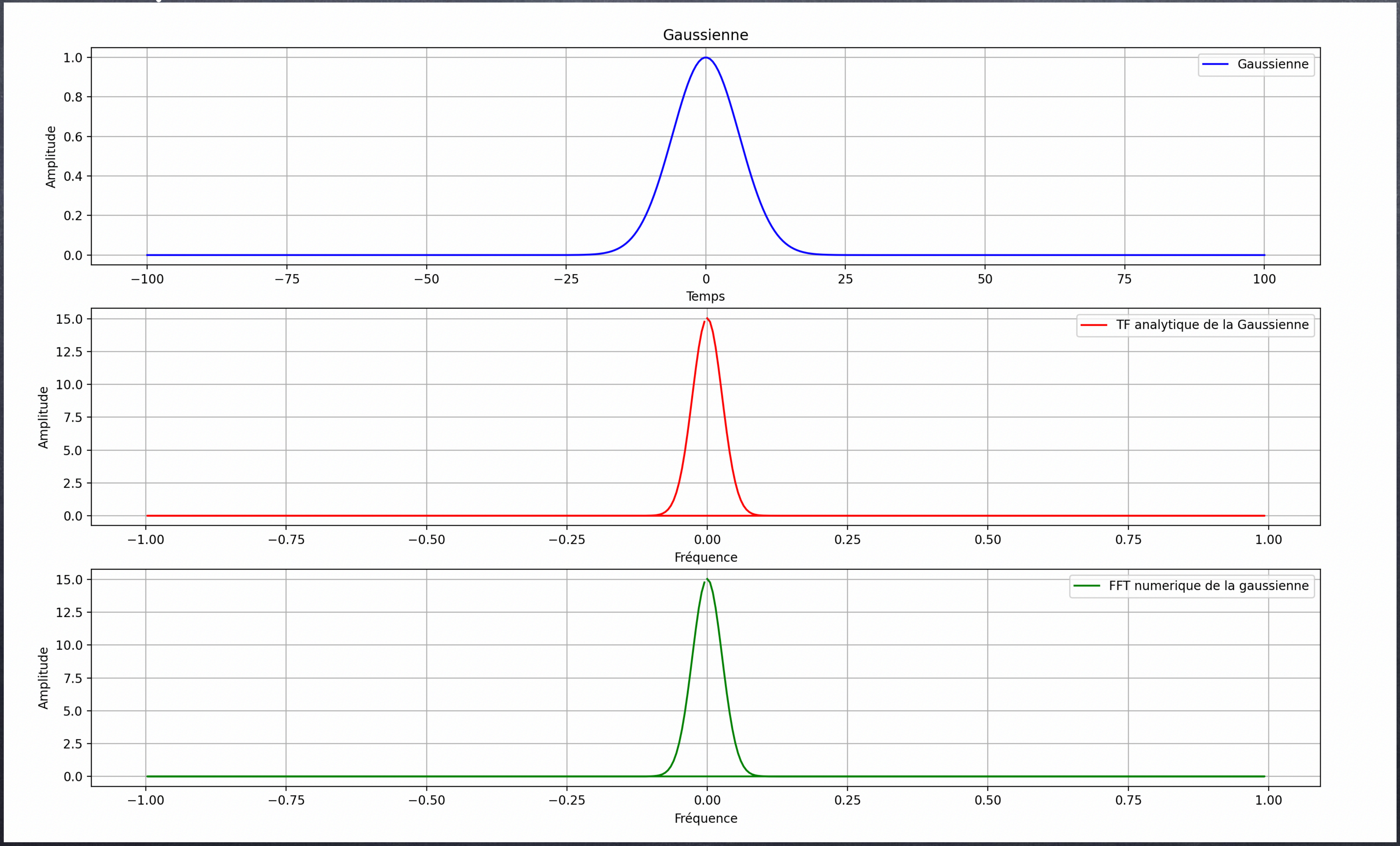
The returned float array *f* contains the frequency bin centers in cycles per unit of the sample spacing (with zero at the start). For instance, if the sample spacing is in seconds, then the frequency unit is cycles/second.

Given a window length *n* and a sample spacing *d*:

```
f = [0, 1, ...,   n/2-1,     -n/2, ..., -1] / (d*n)   if n is even
f = [0, 1, ..., (n-1)/2, -(n-1)/2, ..., -1] / (d*n)   if n is odd
```

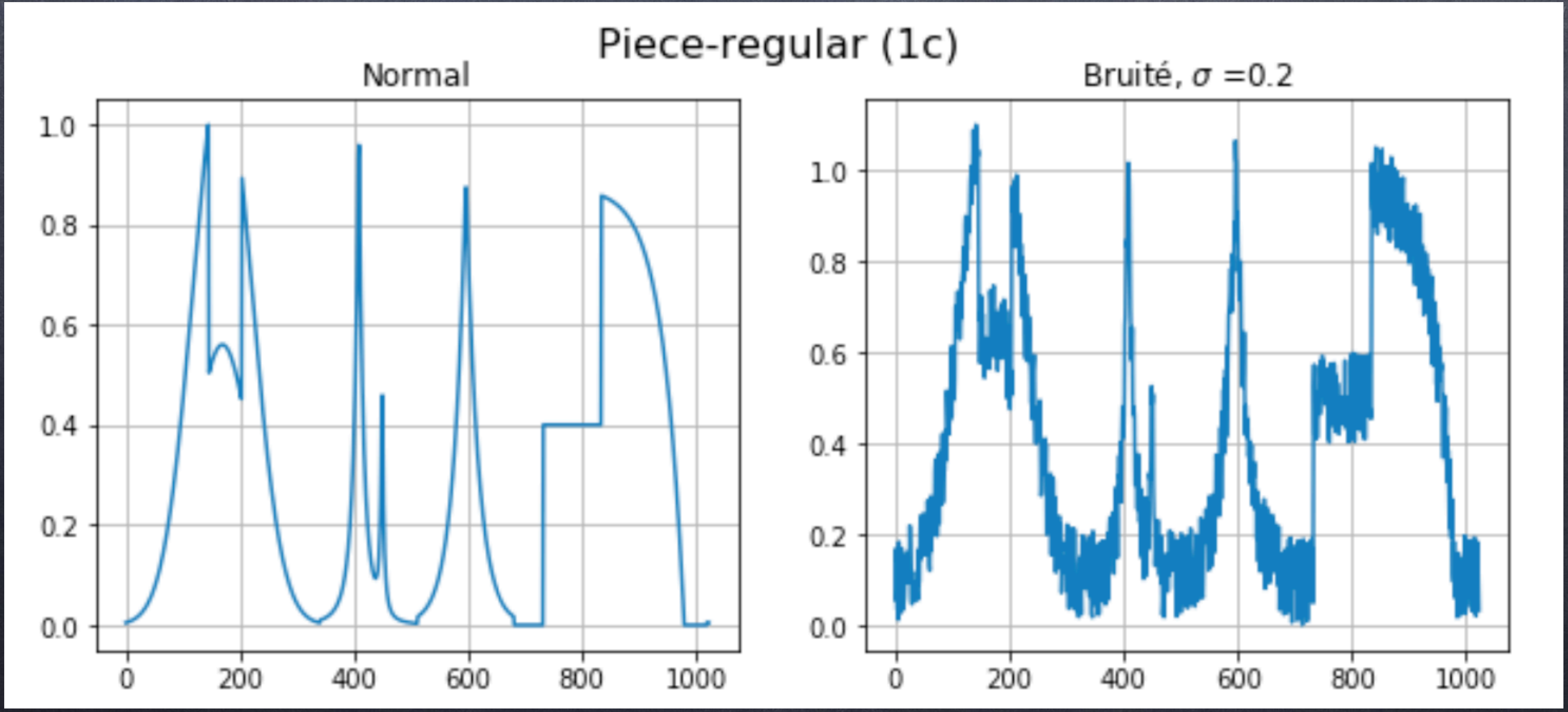
Temps vs Fréquences

- Le centre de la transformée de Fourier est la somme de tous le signal. Voir les solutions et bien les comprendre.



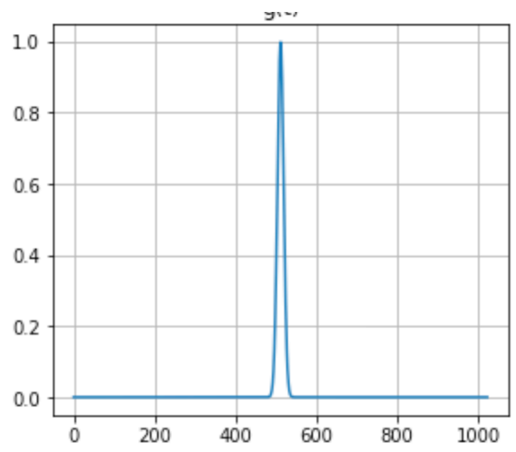
Retour sur le TP3

- On peut bruité un signal en ajoutant un petit random sur le signal



- En convoluant avec une Gaussienne on peut débruité le signal.

convolve(Gaussienne, piece-regular)



*

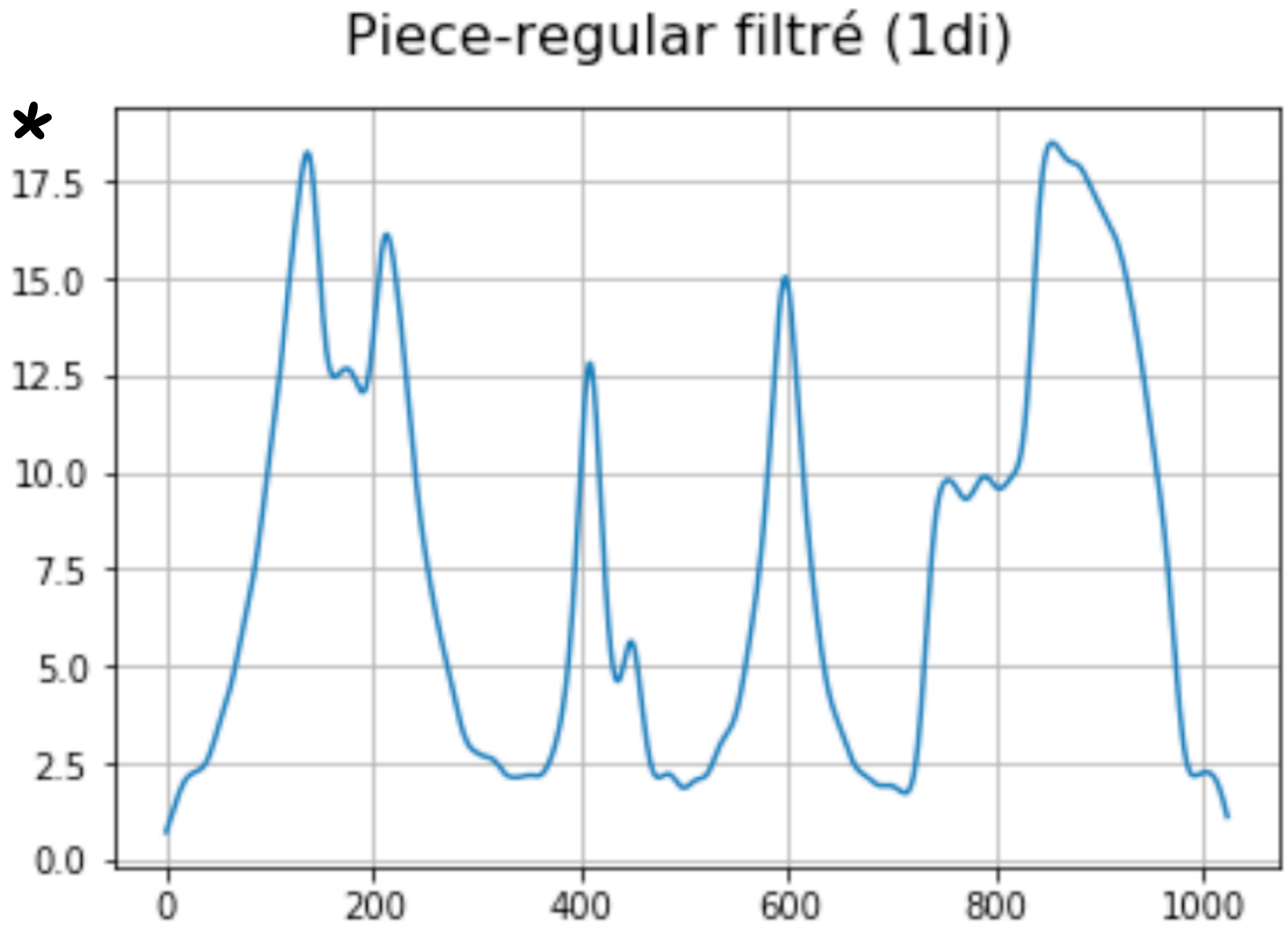
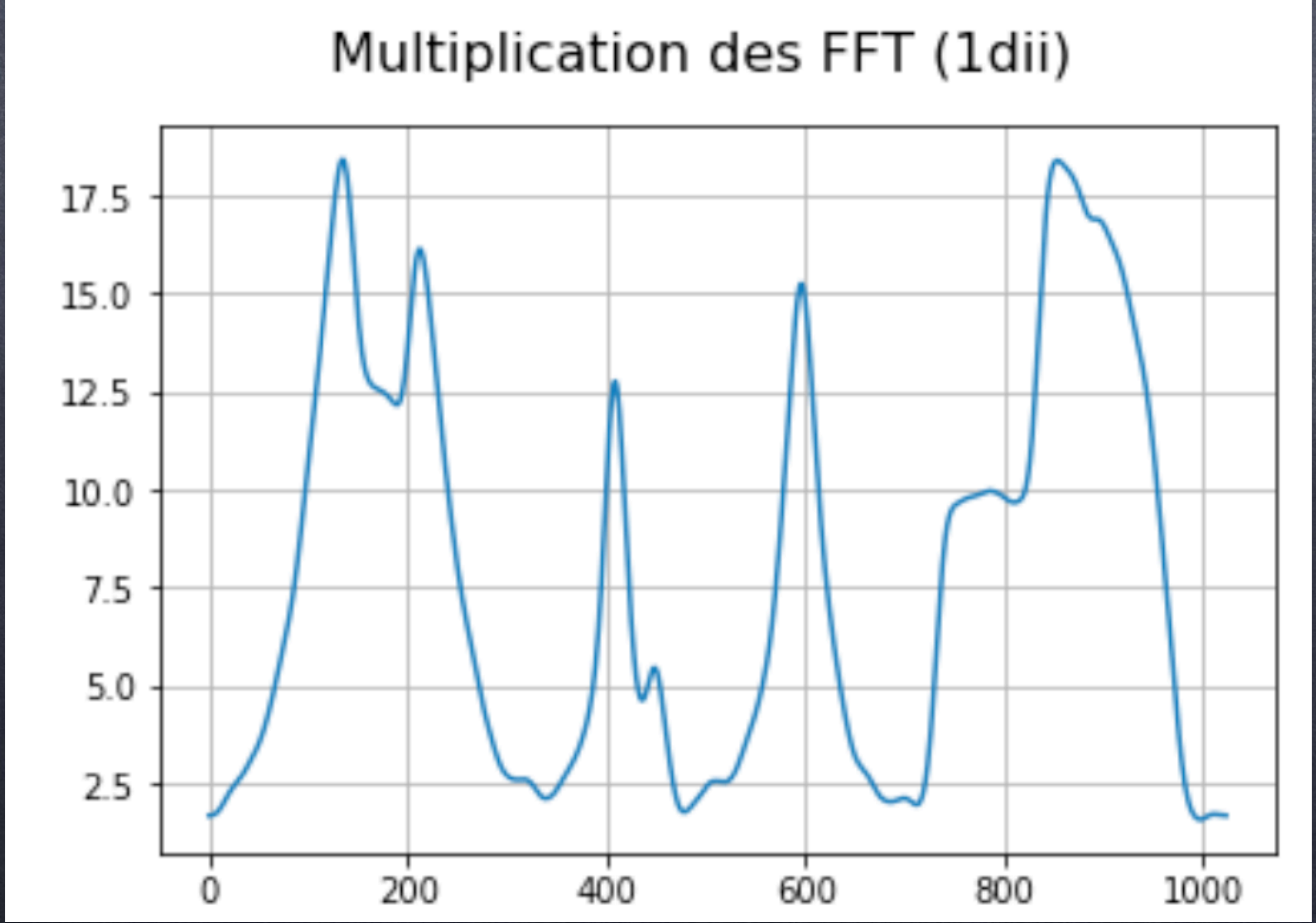


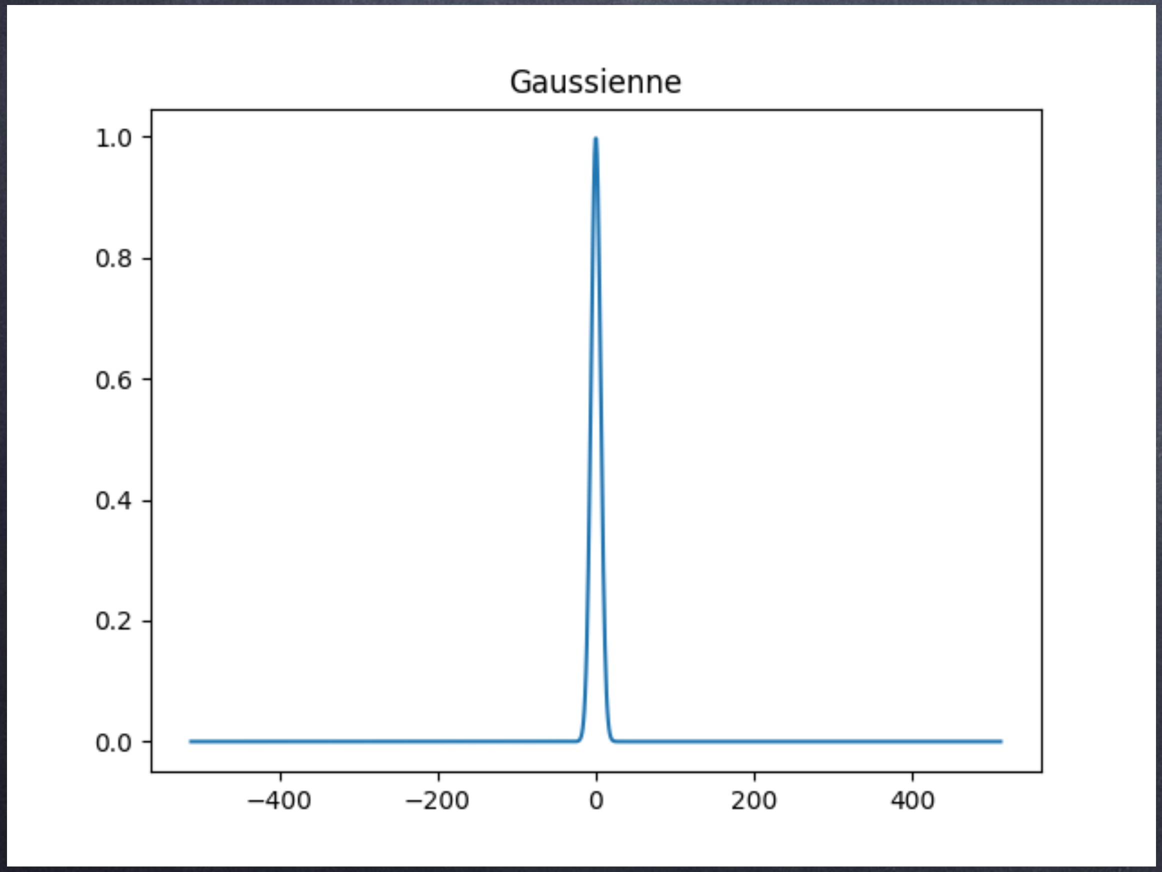
FIGURE 4 – Convolution du signal 'piece-regular' bruité et du filtre Gaussien

Retour sur le TP3

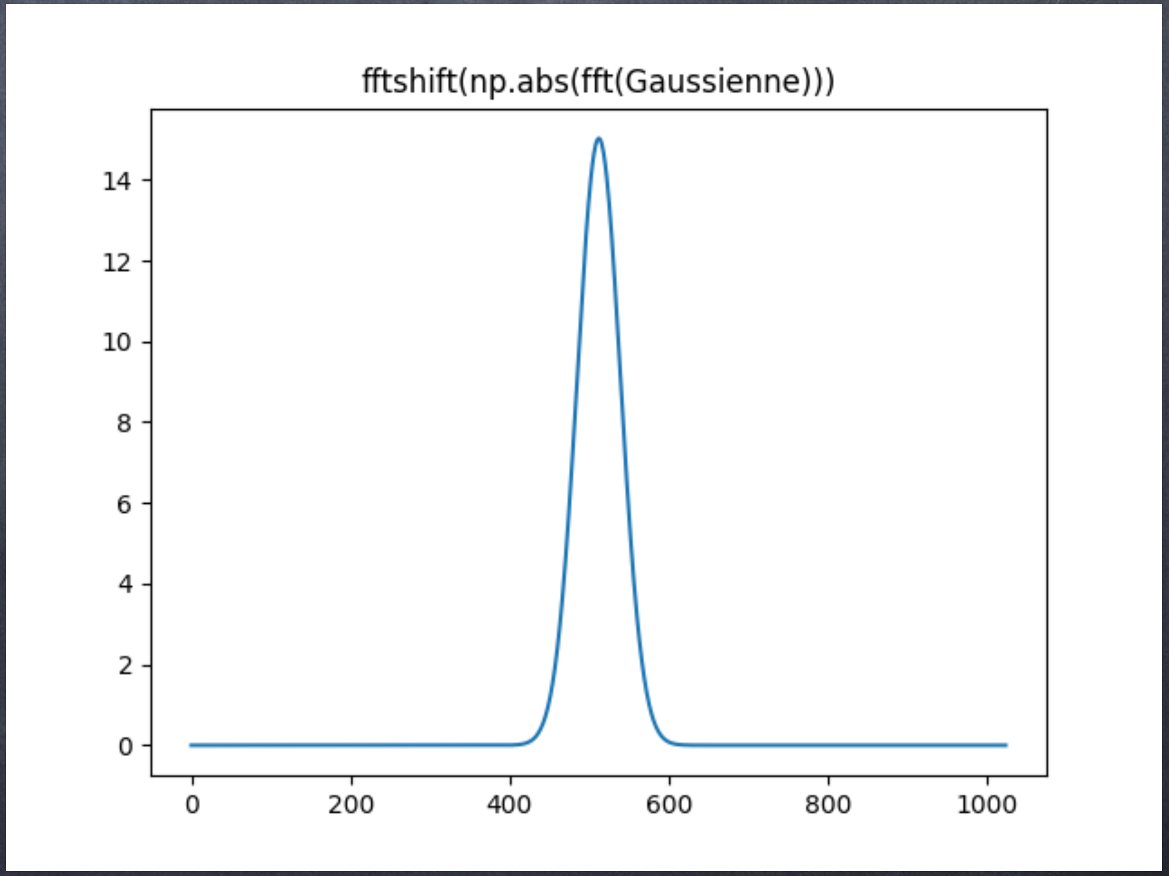
- Le théorème de la convolution dit qu'une convolution dans le monde temporel est équivalent à une multiplication dans le monde de Fourier.
  - ifft(fft(Gaussienne) . fft(piece-regular)) = convolve(Gaussienne, piece-regular)



- Donc, notre convolution qui débruite le piece-regular est, en fait, un filtrage passe-bas dans le monde des fréquences
  - La TF de la Gaussienne est une Gaussienne qui multiplie les fréquences de la TF du piece-regular et qui laisse passer que les basses fréquences

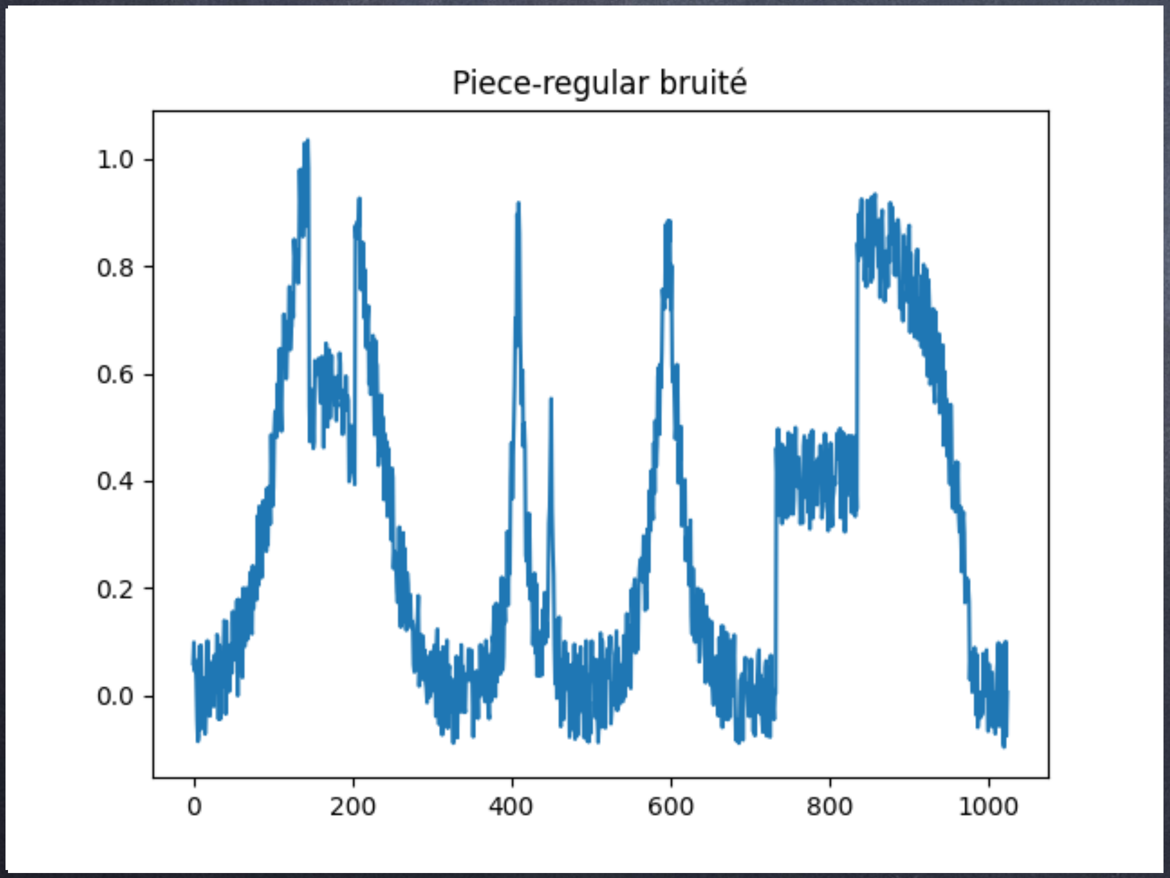


Temps

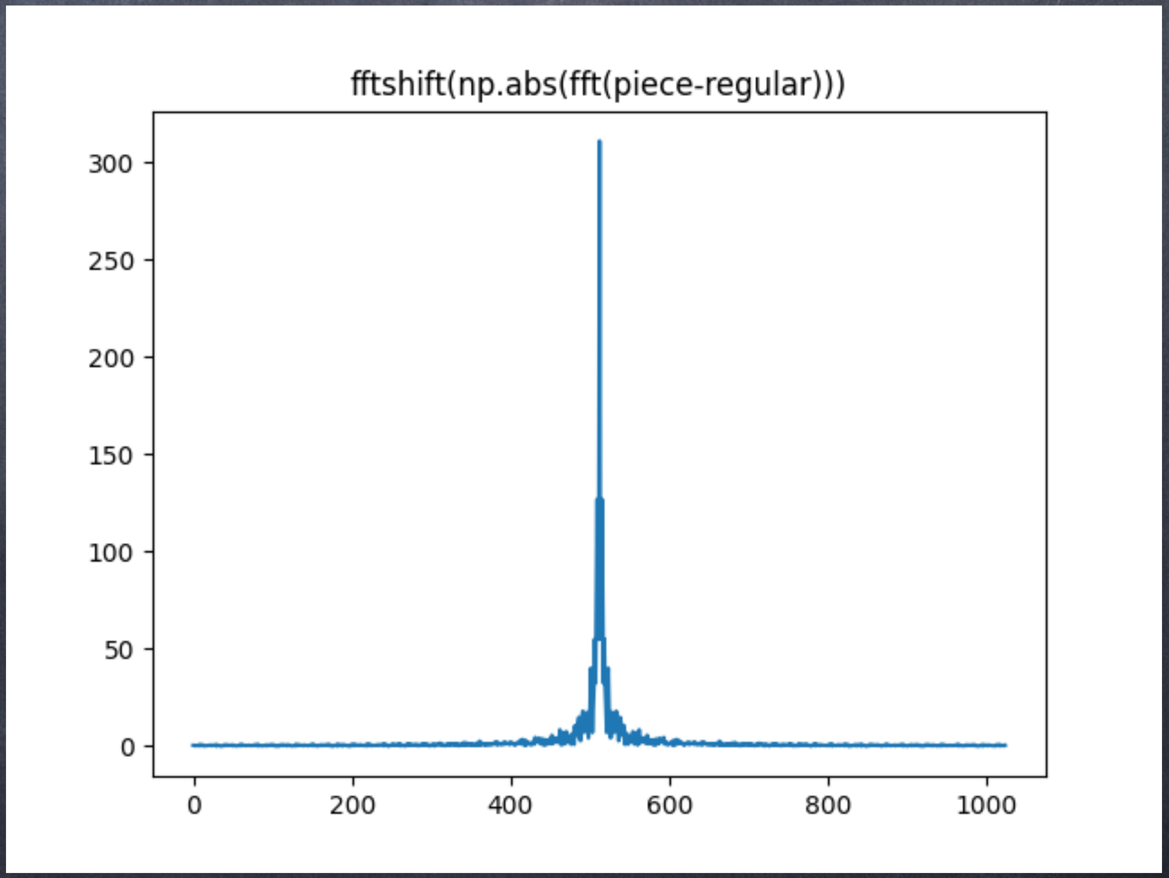


Fréquences

- Donc, notre convolution qui débruite le piece-regular est, en fait, un filtrage passe-bas dans le monde des fréquences
  - La TF de la Gaussienne est une Gaussienne qui multiplie les fréquences de la TF du piece-regular et qui laisse passer que les basses fréquences



Temps



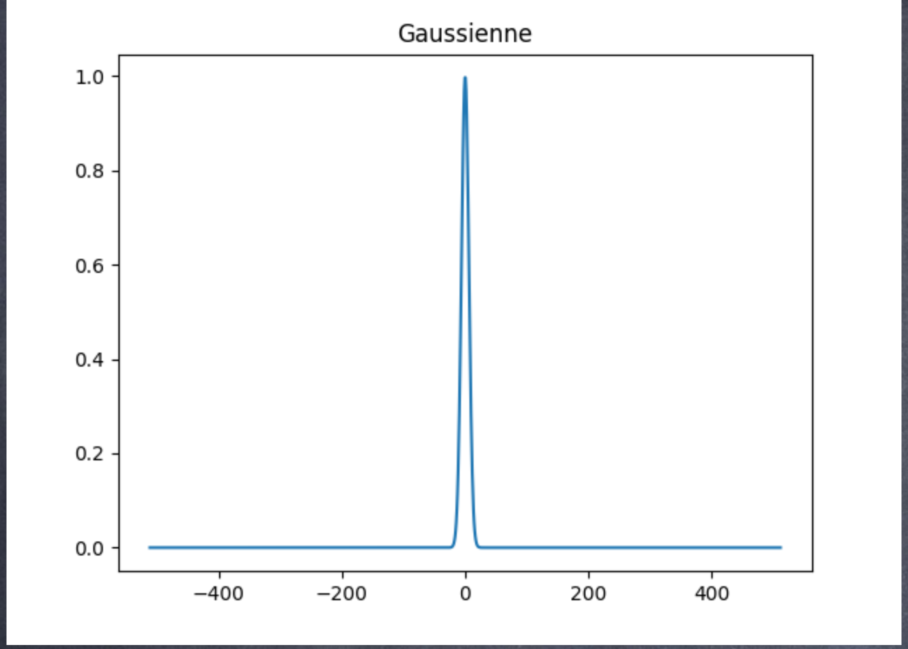
Fréquences

Thm de la convolution

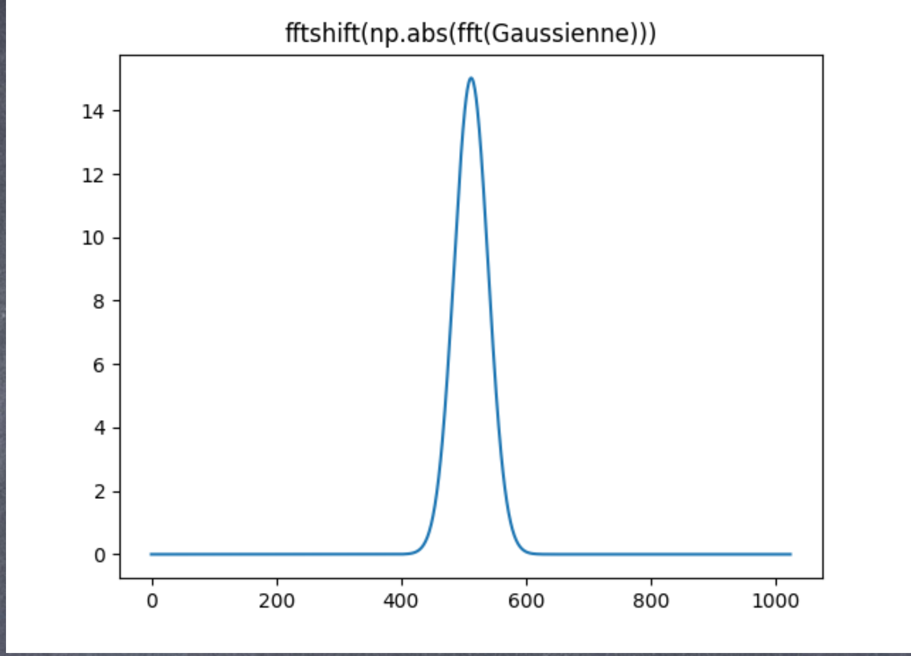
Thm de la convolution

Temps

Fréquences

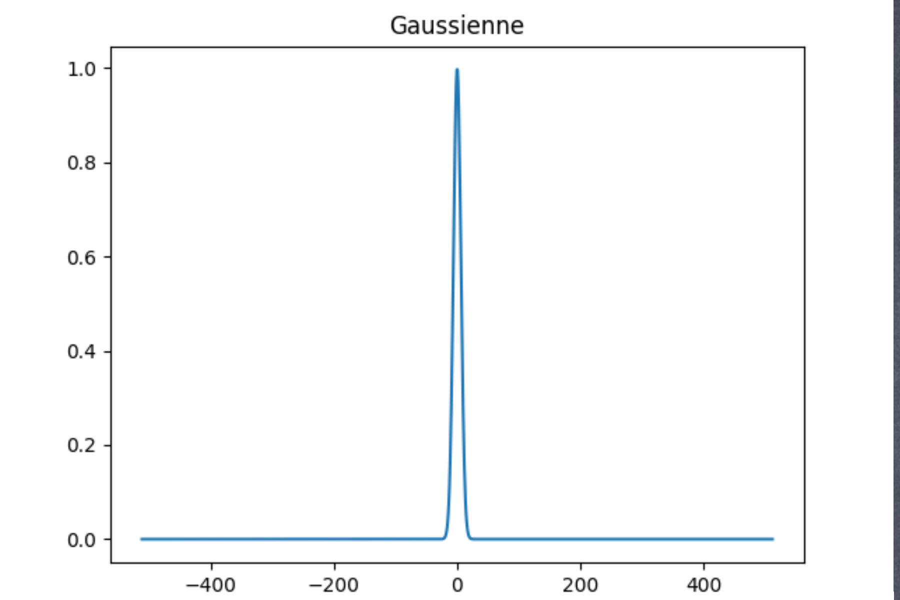


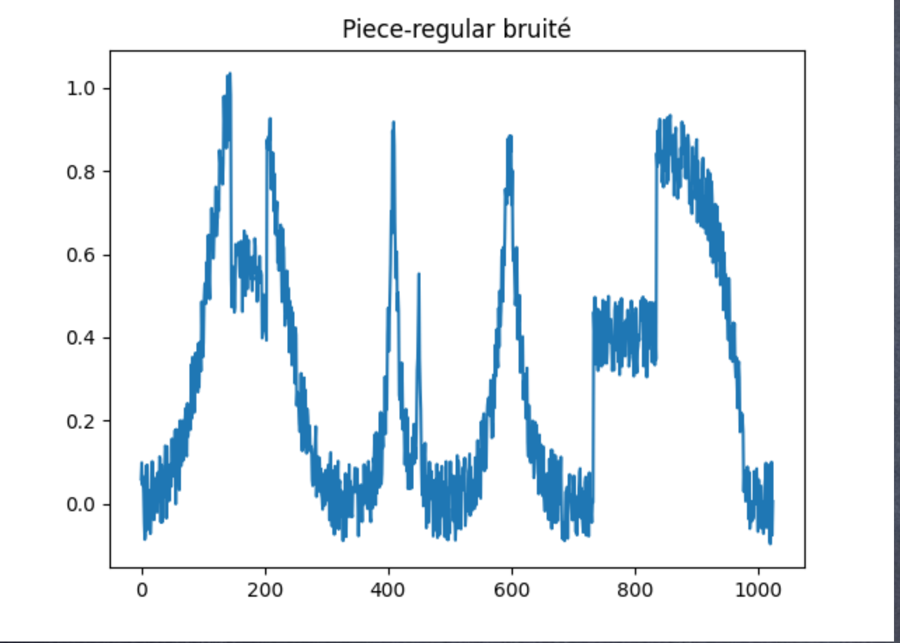
Thm de la convolution



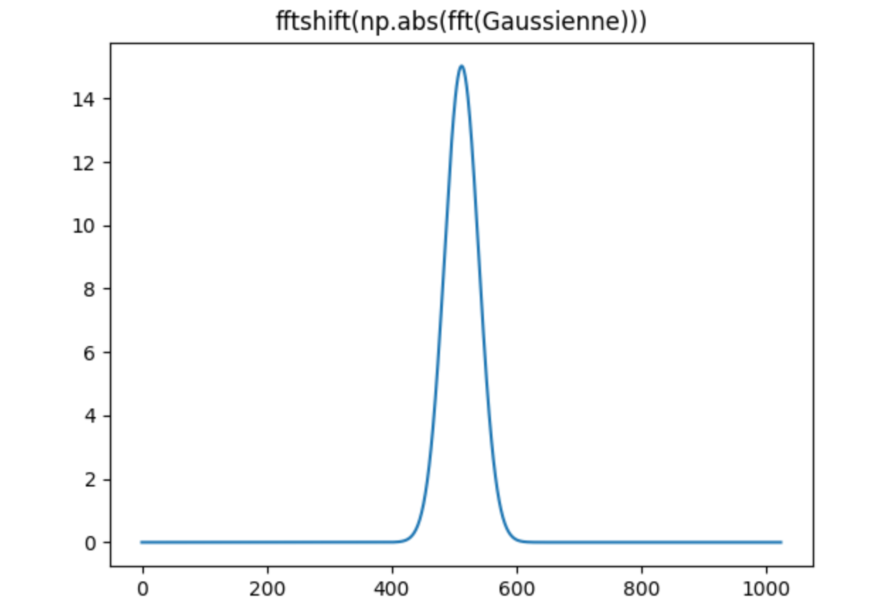
Temps

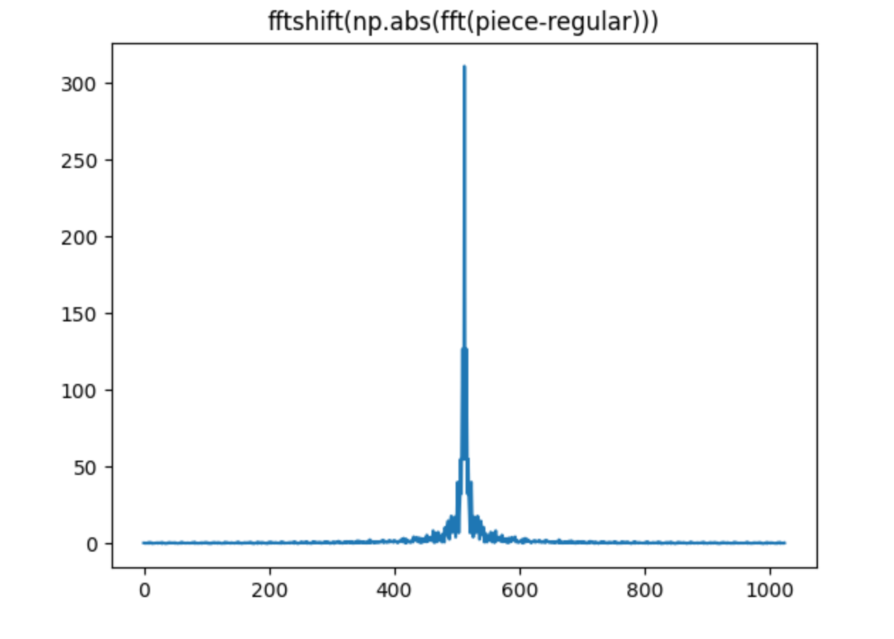
Fréquences





Thm de la convolution

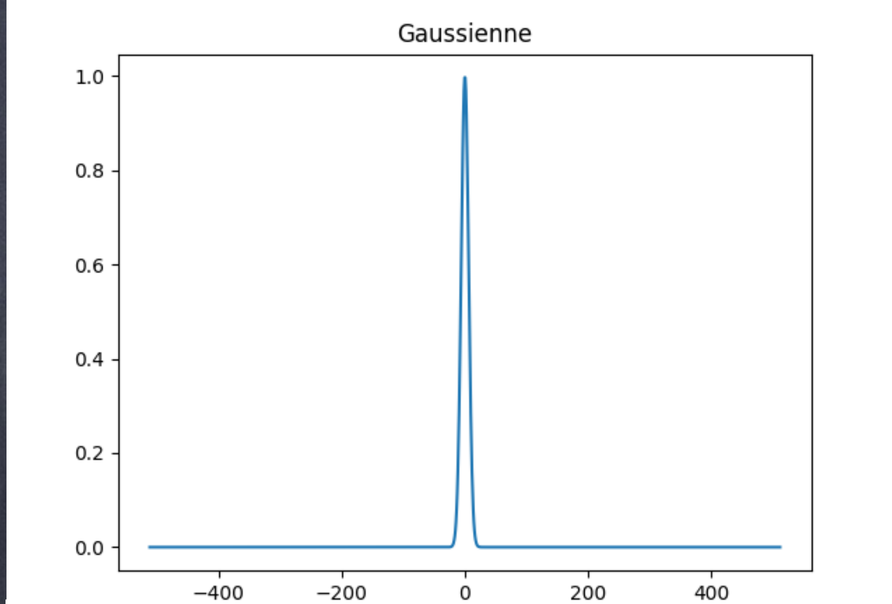


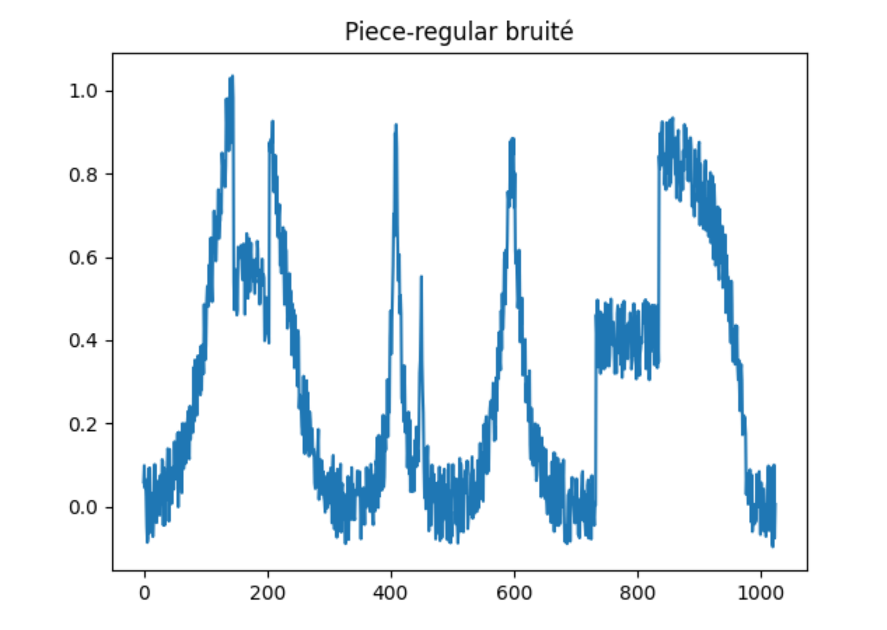


Temps

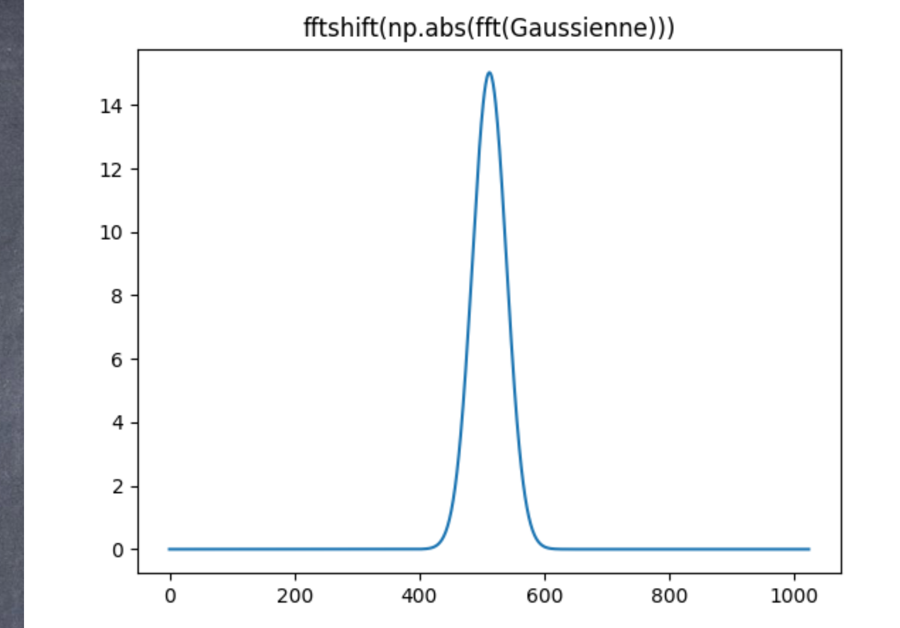
Fréquences

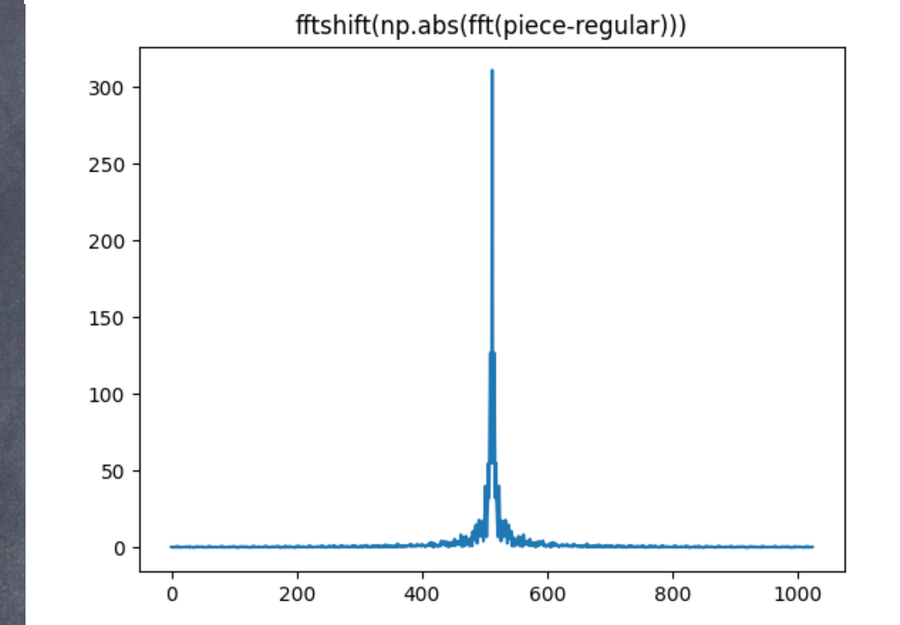
Thm de la convolution

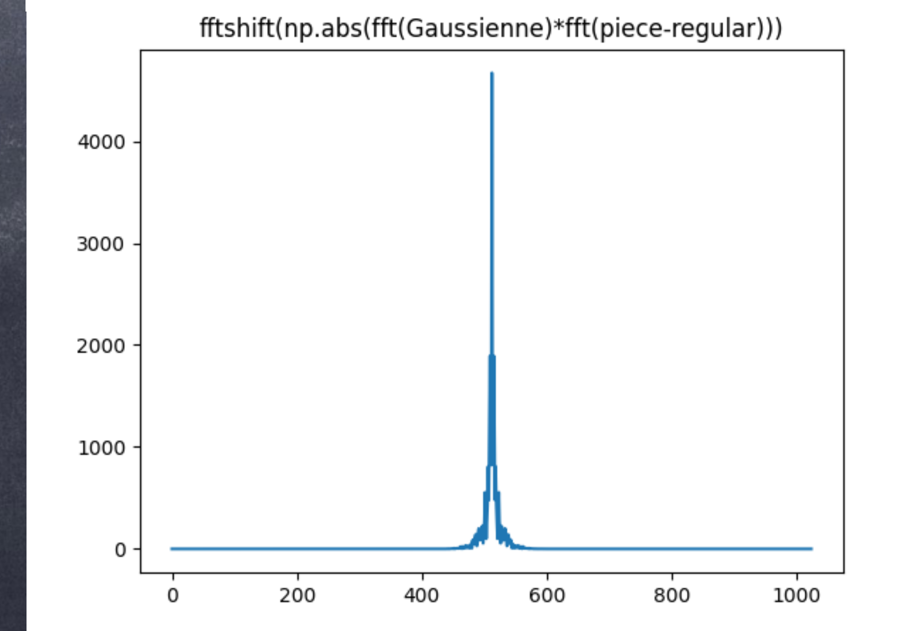




Temps

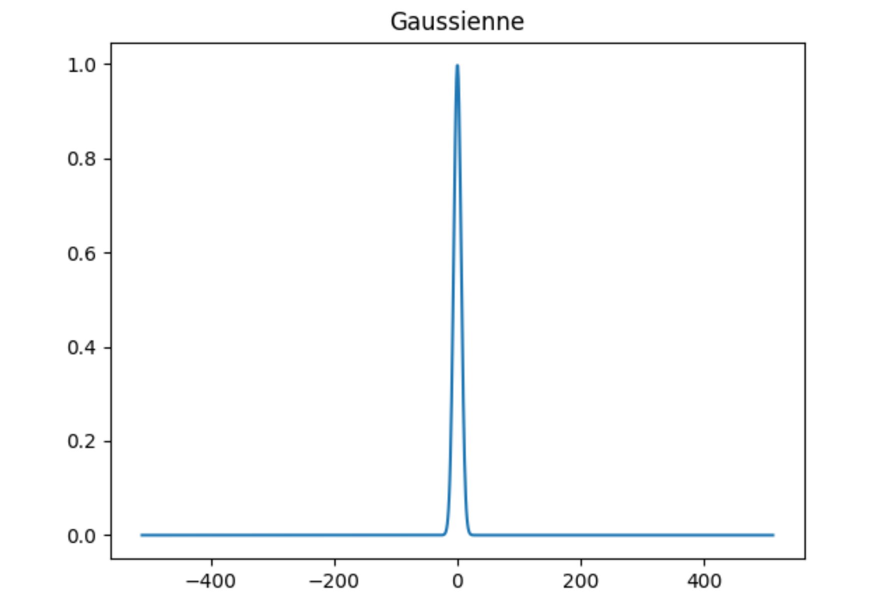


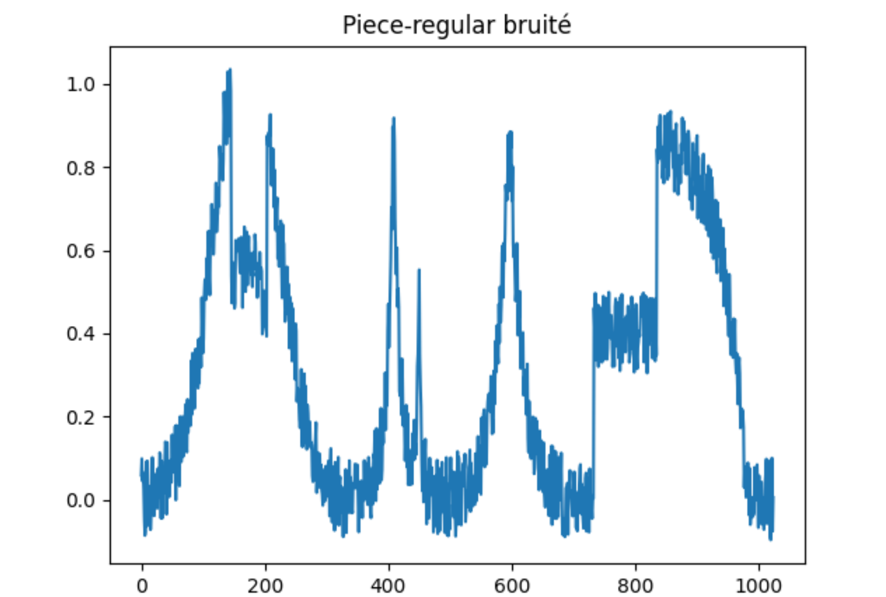


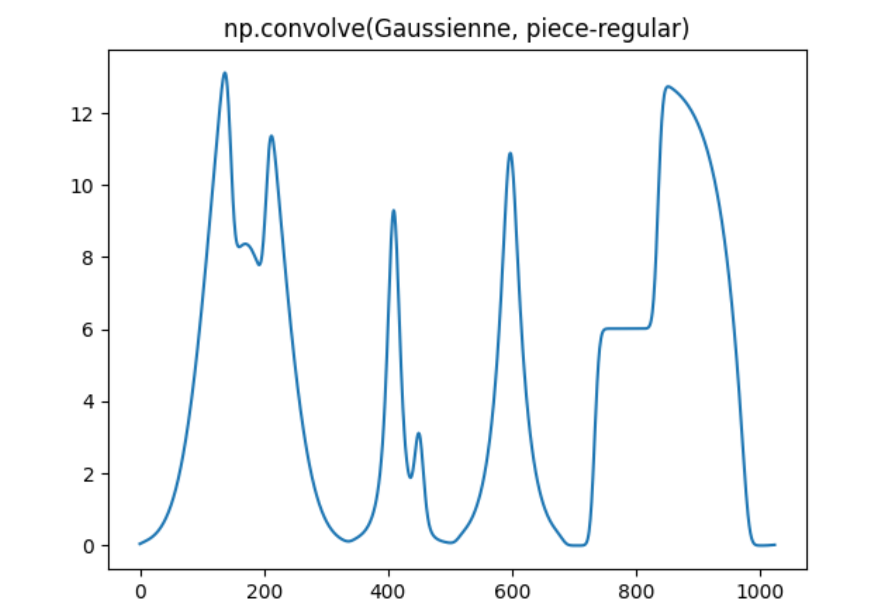


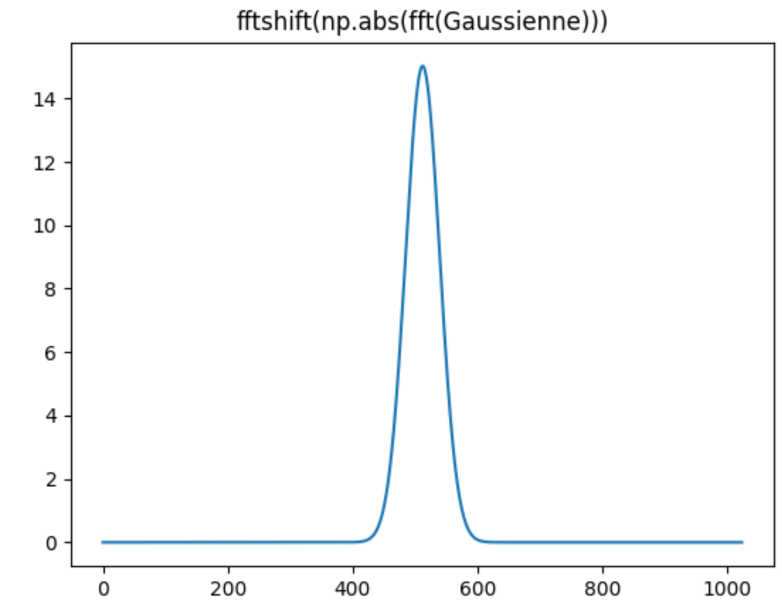
Fréquences

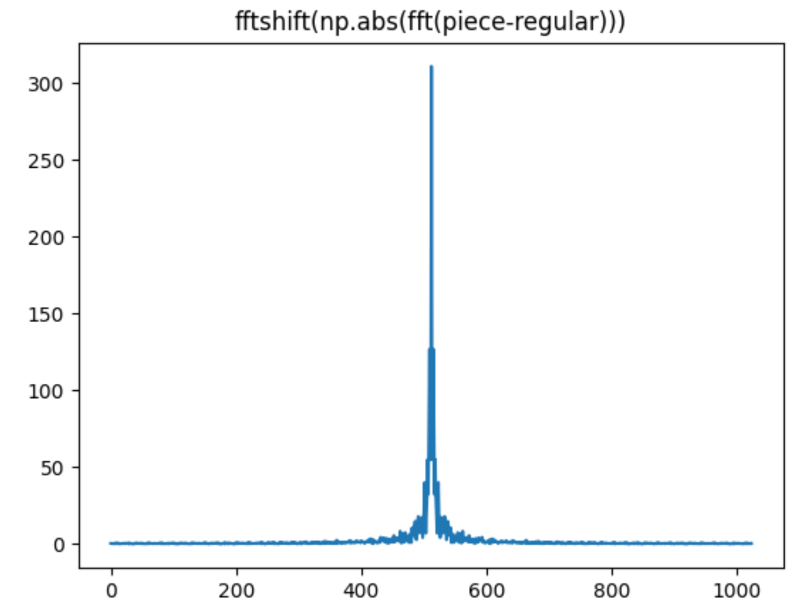
Thm de la convolution

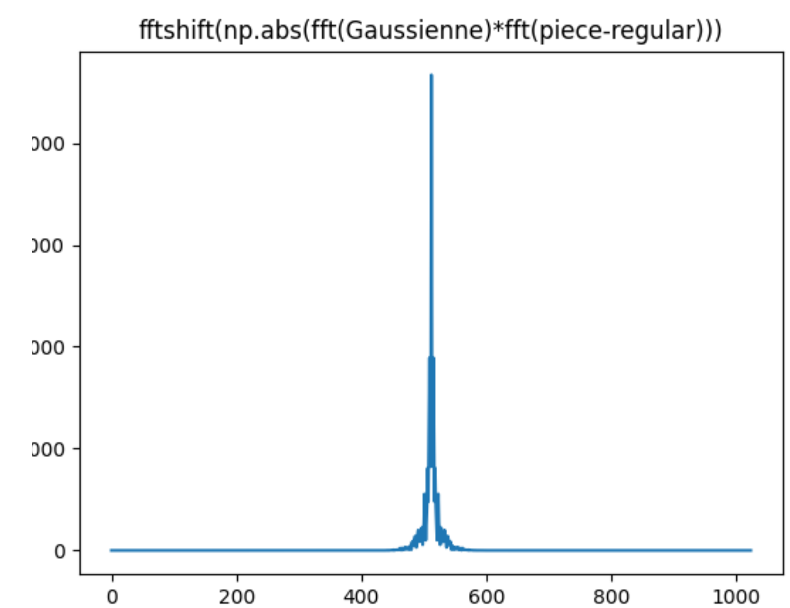


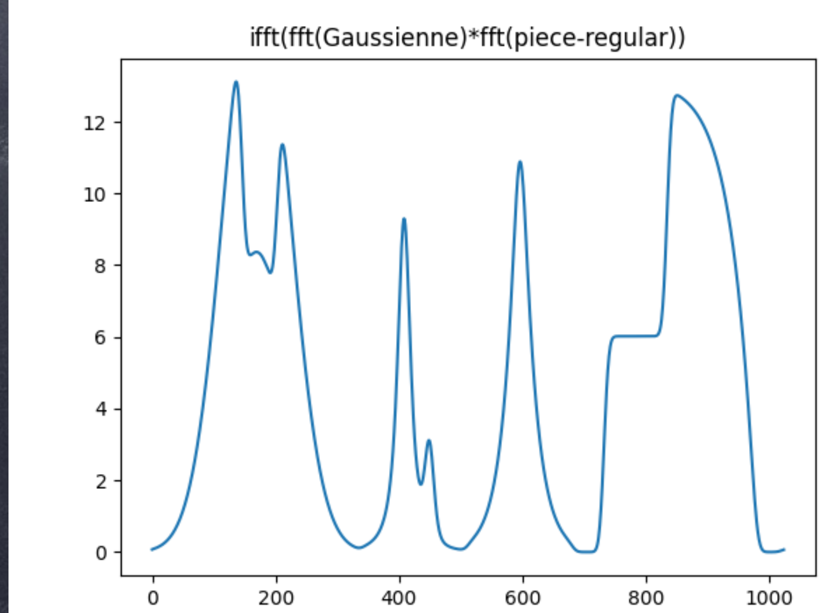












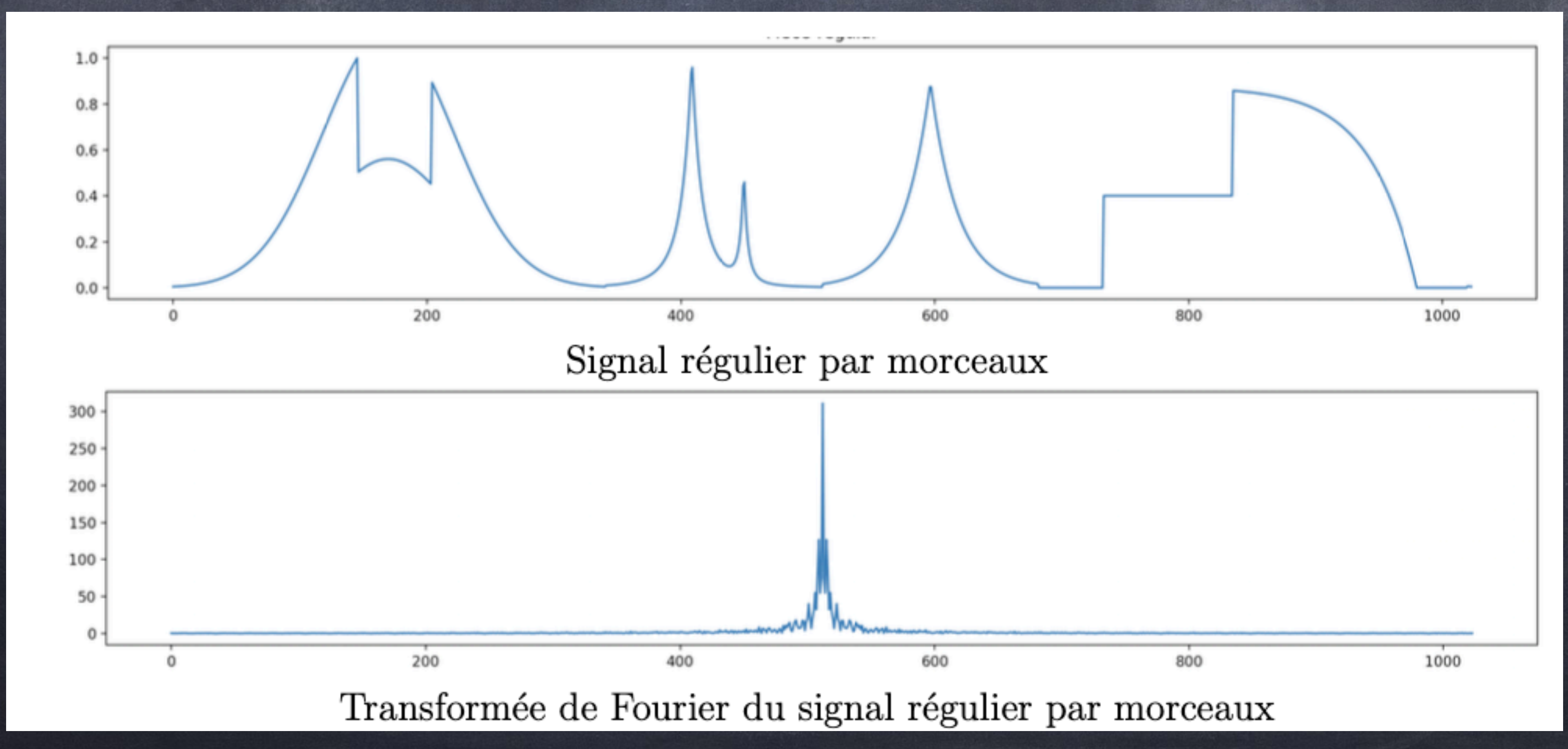
Temps

<= ifft

Fréquences

Retour sur le TP3

- L'énergie est conservée entre le monde temporel et les fréquences. La somme des intensités au carré du piece-regular sont égales à la somme des fréquences au carré divisé pour N (nombre de pts dans le piece-regular)
  - np.sum(piece-regular**2) =
    1/N * np.sum(np.abs(fft(piece-regular))**2)



Signal régulier par morceaux

Transformée de Fourier du signal régulier par morceaux

IMN-359

- Comprenez le théorème d'échantillonnage!
  - Diapos, demo07
  - TP3_1a
  - TP3 question 3

- <u>C’est quoi échantillonné?</u>

  - Multiplié par un peigne de Dirac dans l’espace à chaque temps t_s et de largeur X. La TF de se peigne de Dirac est un peigne de Dirac de largeur 2/t_s avec X fréquences espacées à chaque 1/X (fftfreq)

    - Donc, dans Fourier prendre des copies de la TF du signal à chaque bande de fréquences

    - Ensuite, multiplié par une fonction porte sur la bande de fréquences
(ce qui équivaut une convolution dans l’espace par un sinus cardinal - sinc)

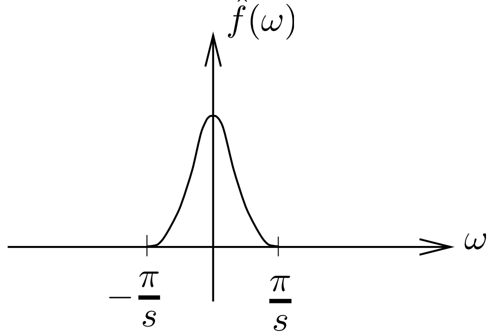
- C’est quoi échantillonné?

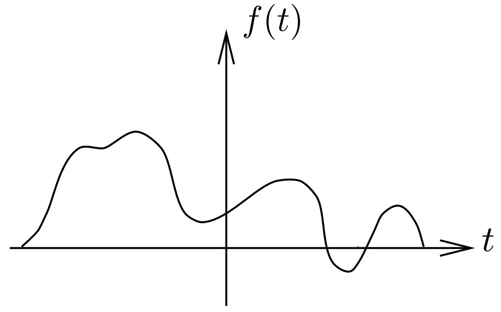
  - Il faut donc que toutes les vraies fréquences du signal soit contenue dans la bande de fréquences prescrites par la TF du peigne de Dirac (fftfreq)

    - => il faut au moins 2*(fréquence max du signal)

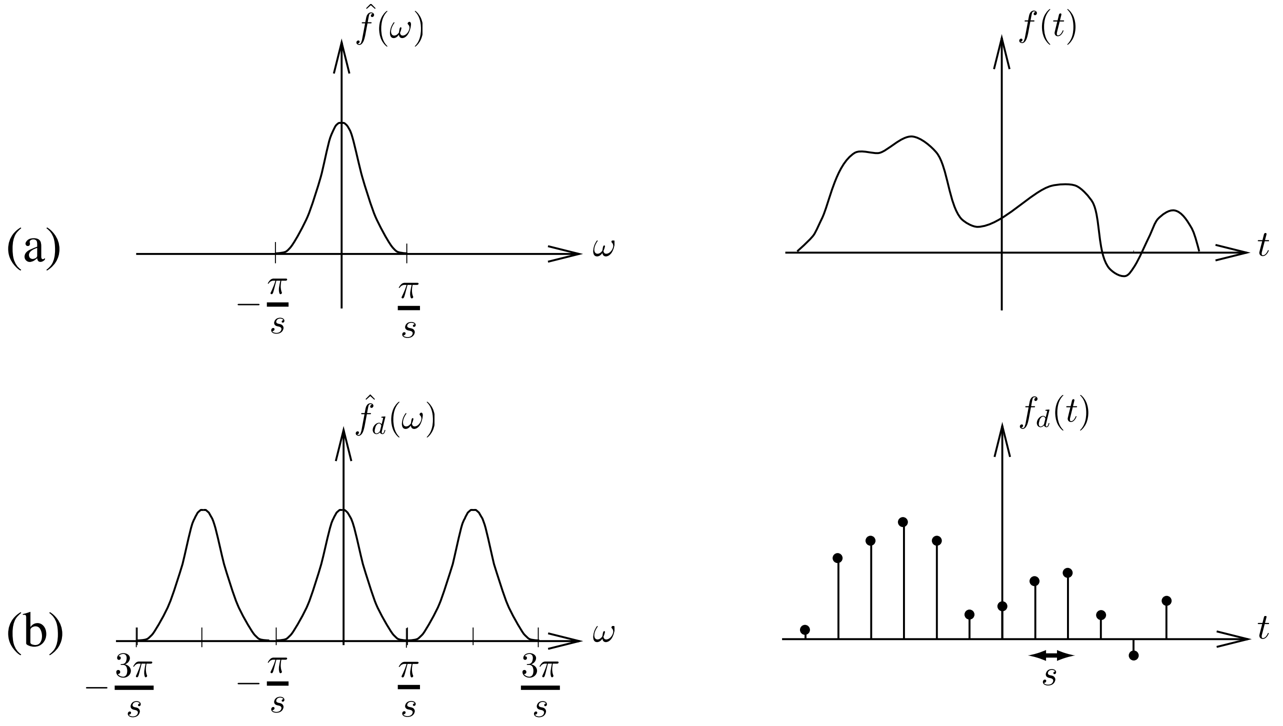
Échantillonnage

(a)

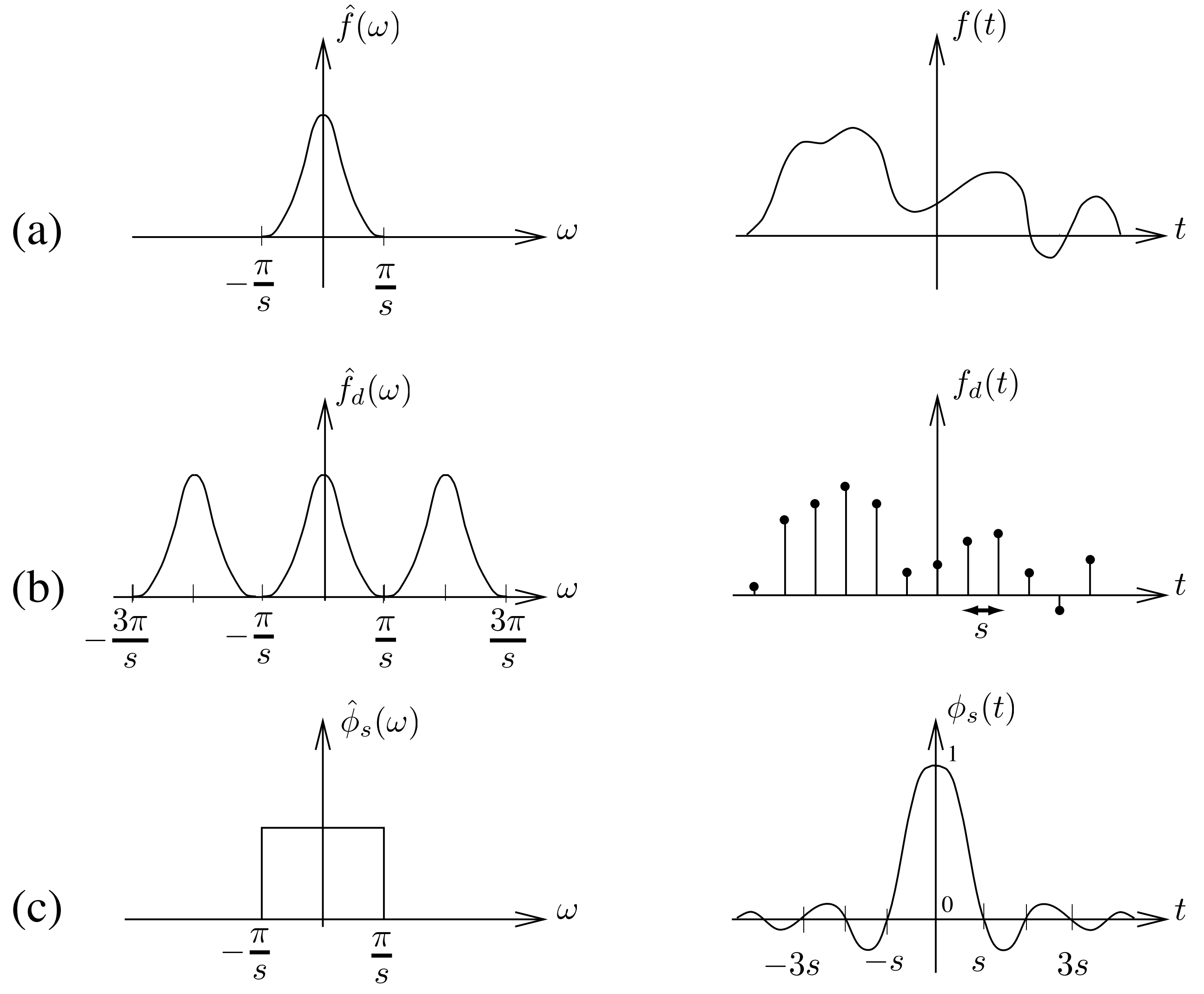




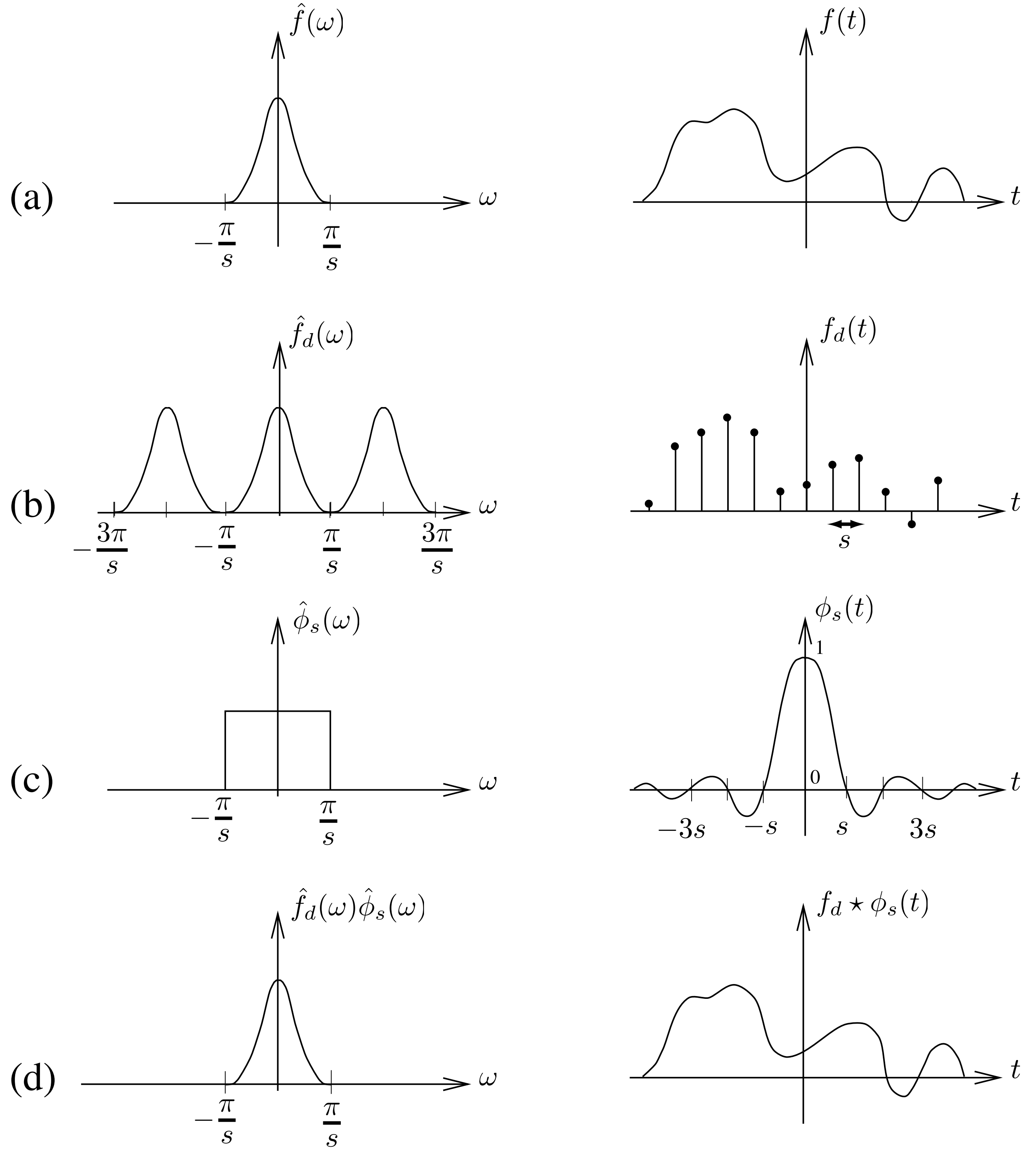
Échantillonnage



Échantillonnage

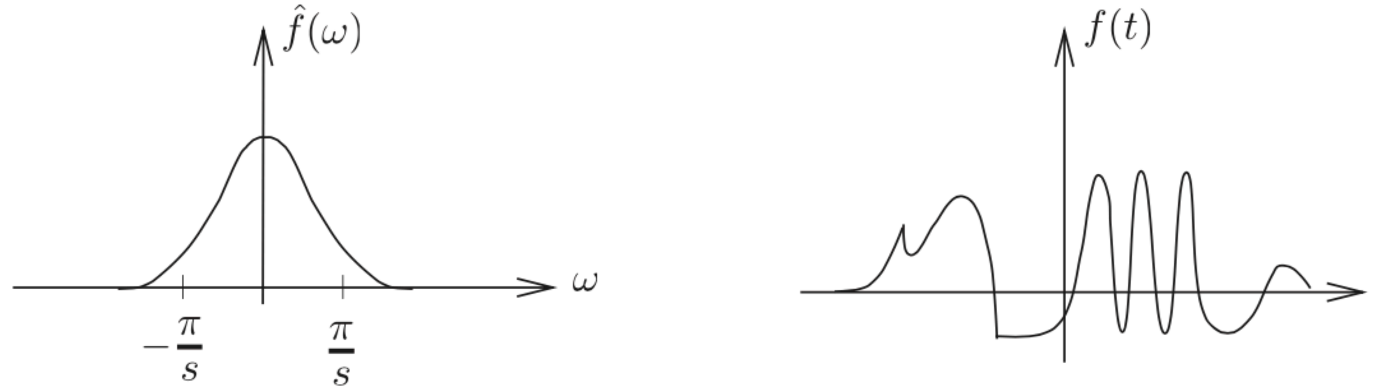


Échantillonnage

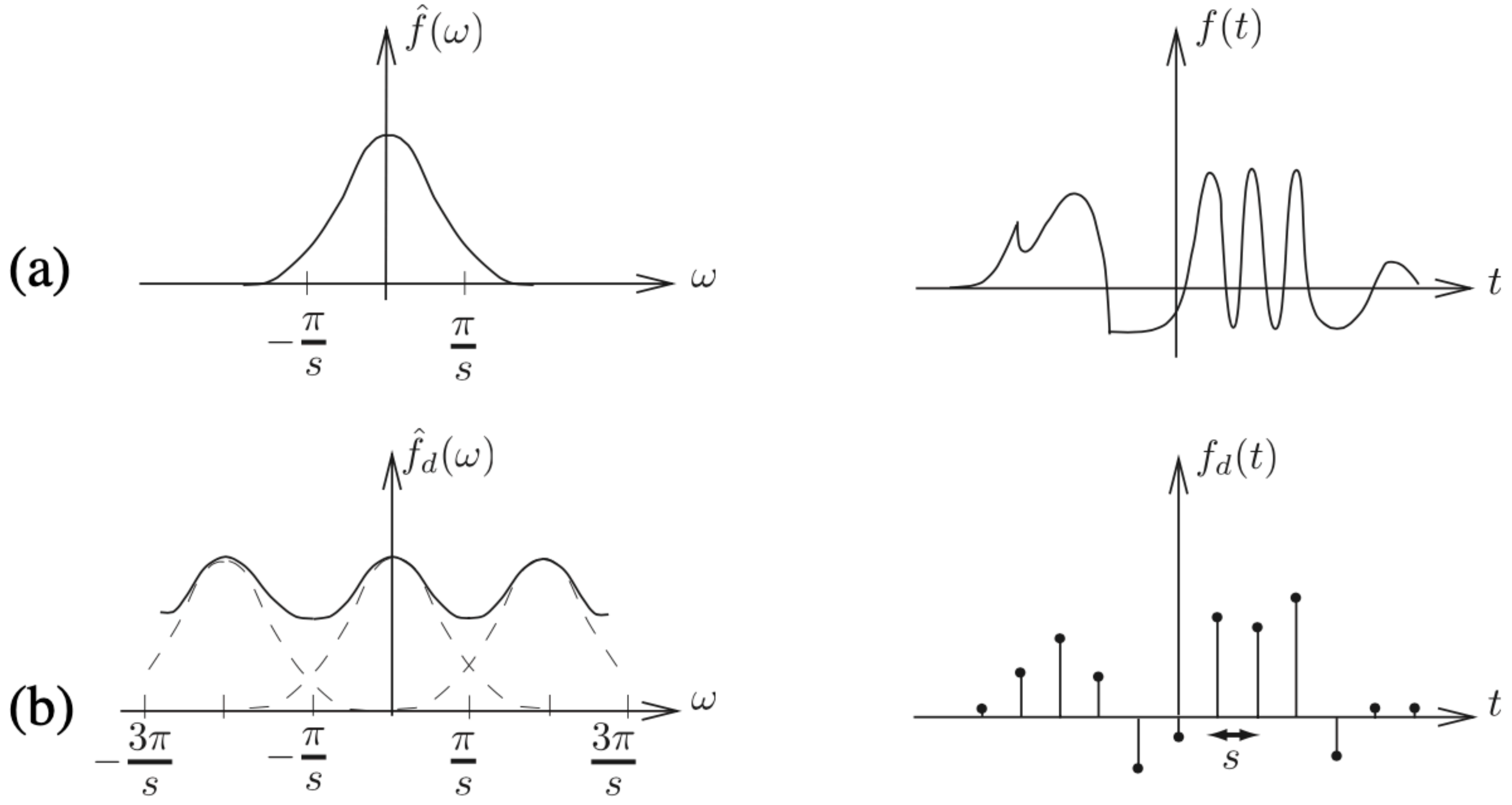


Échantillonnage

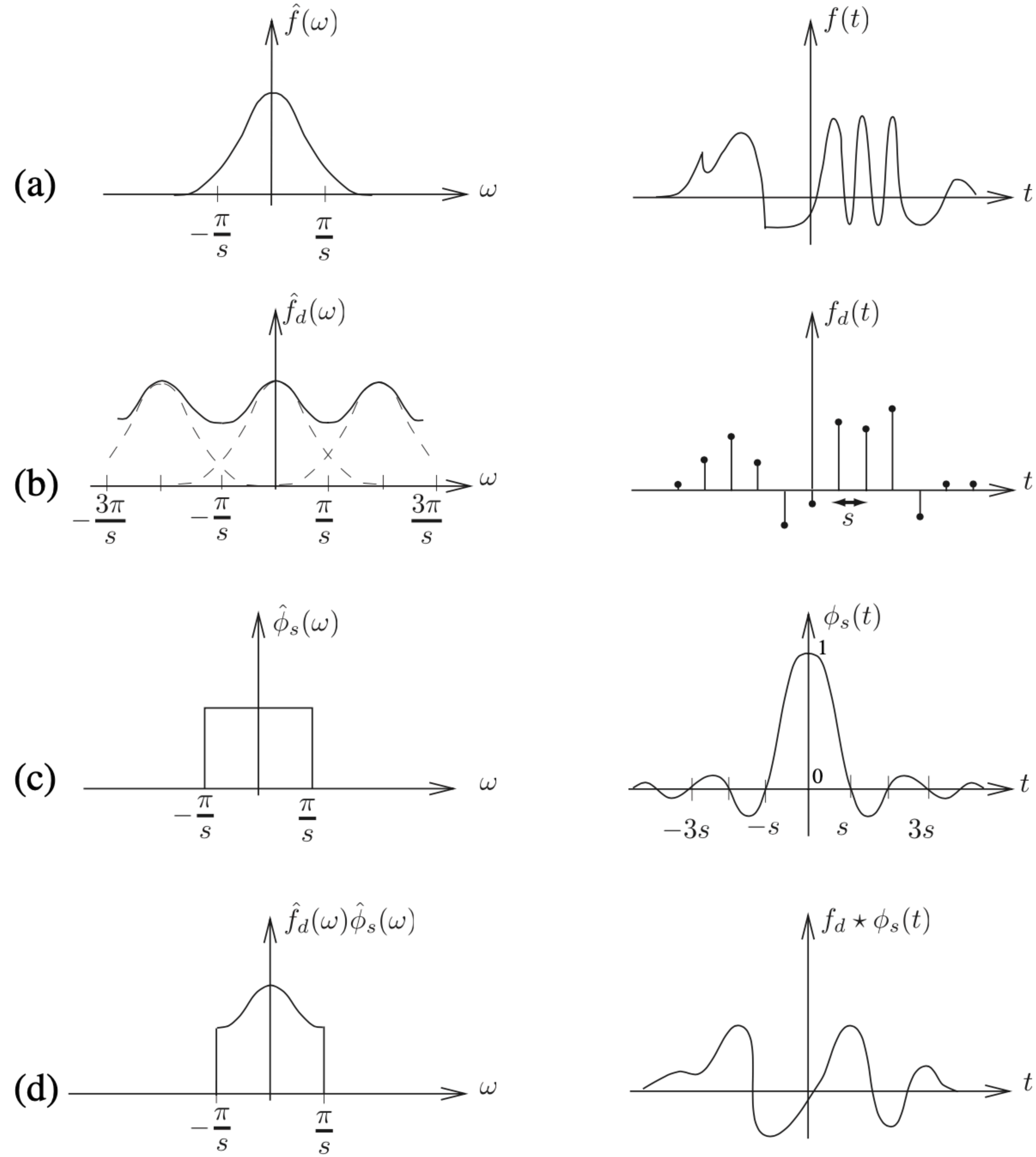
(a)



Échantillonnage



Échantillonnage



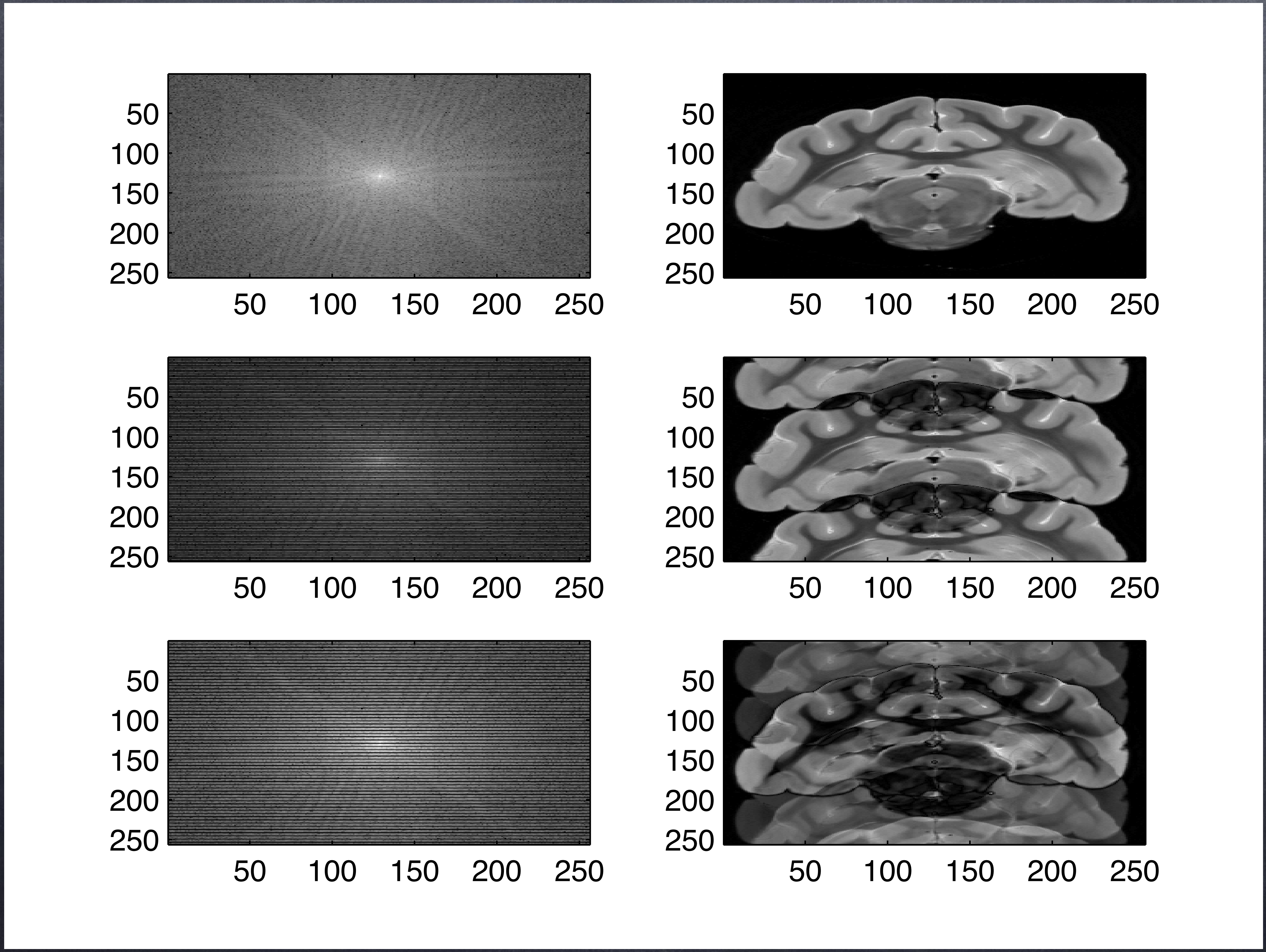
Problème d'échantillonnage

- Repliement
- Artéfactes de géométriques
- Bruit
- Interférences

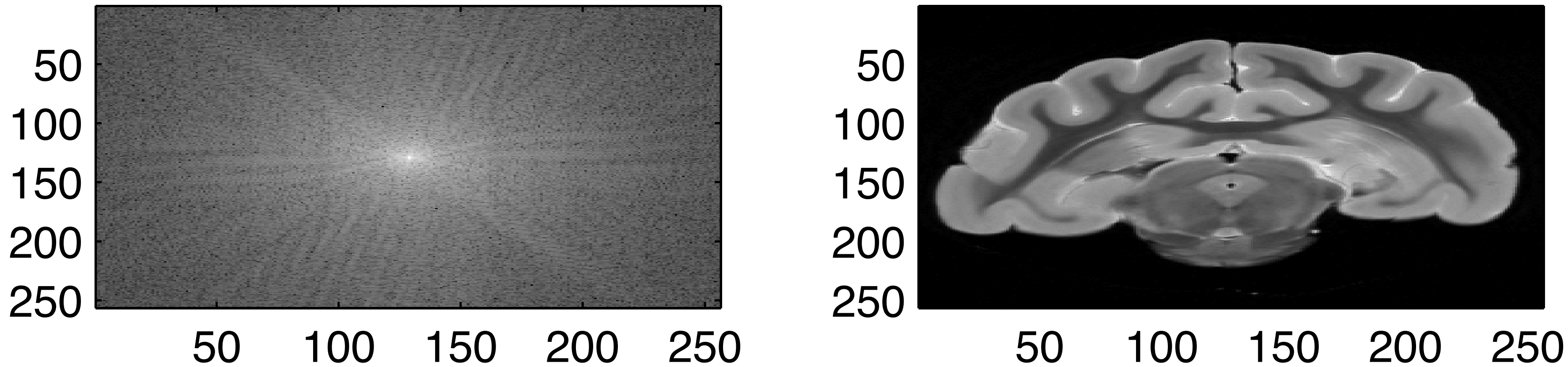
Repliements horizontaux

50%

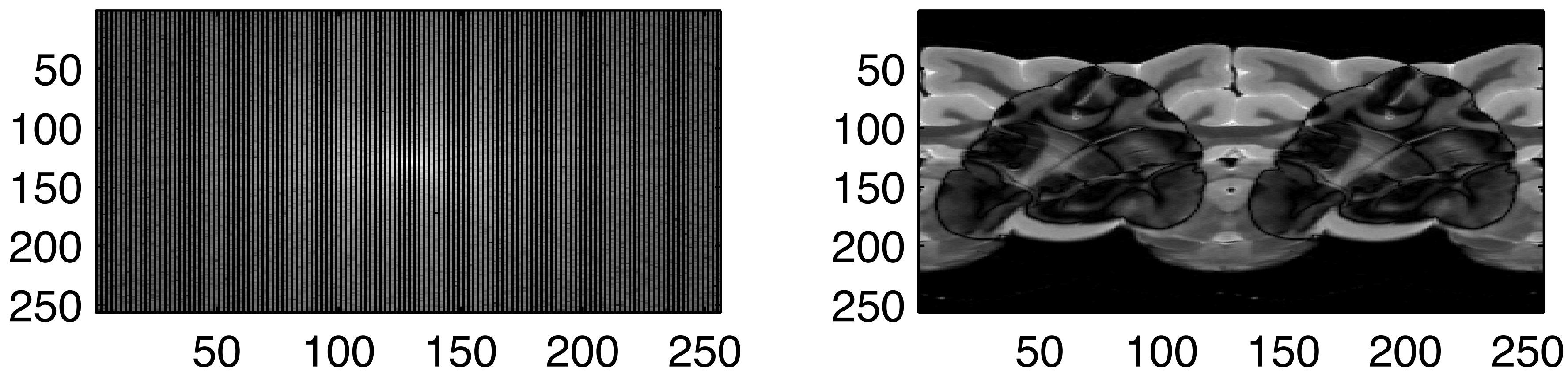
25%



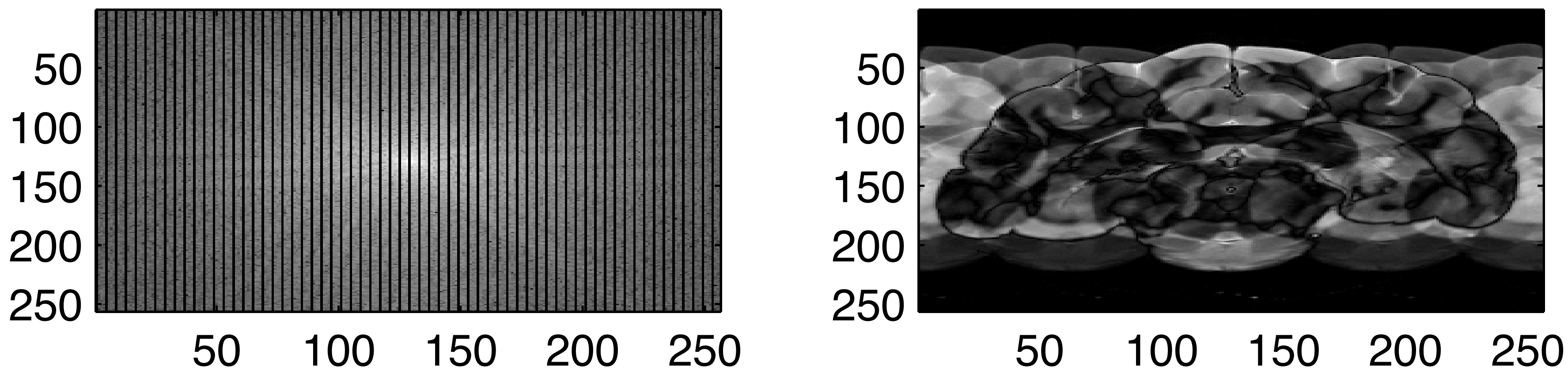
Repliements verticaux



50%



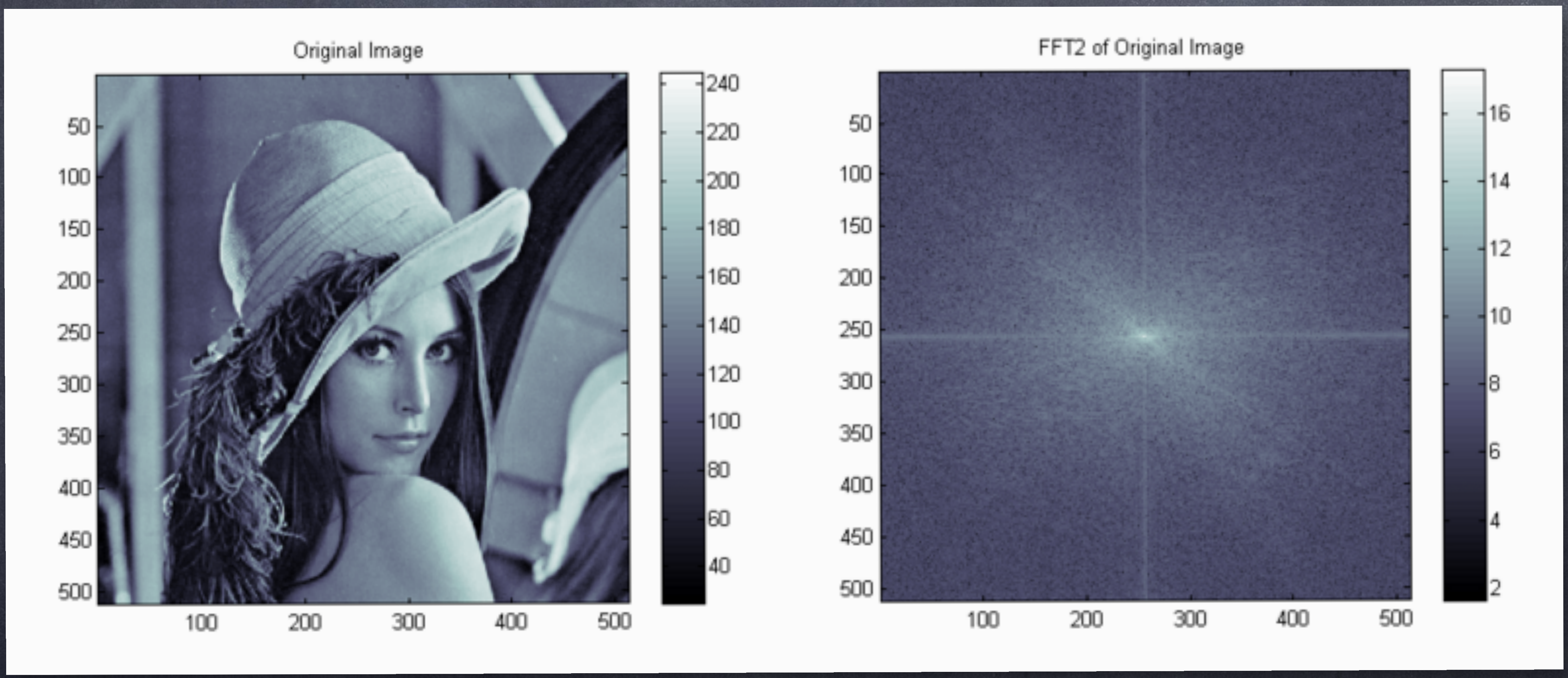
25%



Problème d'échantillonnage

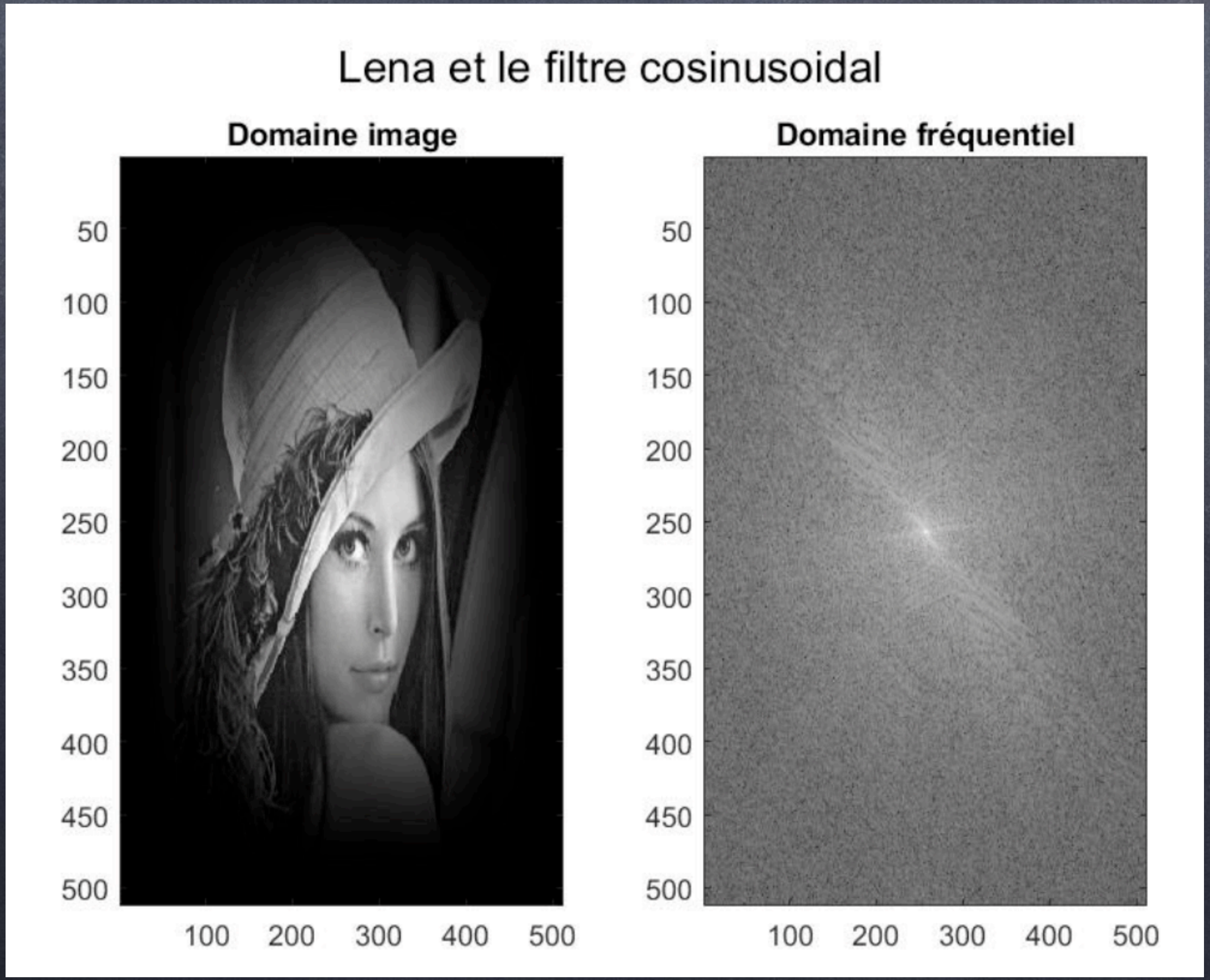
- Pourquoi des repliements?
  - Sauter une rangée ou une colonne sur N équivaut à multiplier par un peigne de Dirac les fréquences (un peigne serré, avec peu d'espace entre les brins)
  - C'est donc comme convoluer par un peigne de Dirac dans l'espace très espacé et prendre N copies de l'image originale
  - C'est un peu comme le théorème d'échantillonnage à l'envers

Fourier

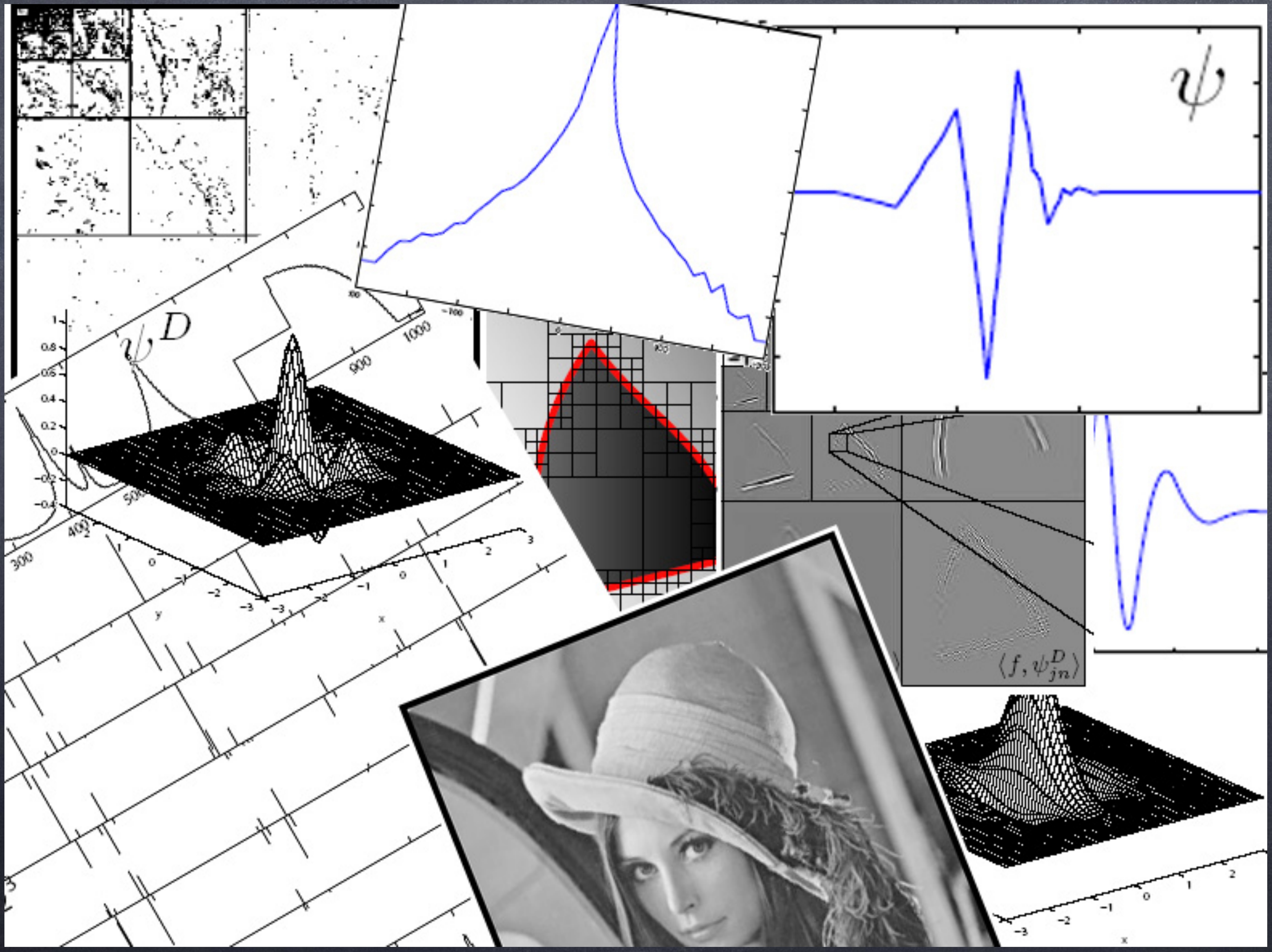

Original Image
FFT2 of Original Image
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
100
200
300
400
500
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
16
14
12
10
8
6
4
2

Fourier

- On multipliant par un filtre (e.g. cos) l'image de Lena est atténuée au bords de l'image. Cela enlève les transitions brutes entre l'image et le fond, ce qui demande une infinité de cos et sin pour attraper ces changements
- La fft2 de l'image masquée enlève donc la croix blanche



Au delà de Fourier: Ondelettes



Les transformées

- FFT - Fourier
- DCT - Cosinus Discrets
- DCT locale - Cosinus Discrets Locaux
- FWT - Ondelettes
  - Haar
  - Daubechies

Rapidité

- O(N log(N))
  - FFT, DCT, DCT locale
- O(N)
  - FWT

Mémoire

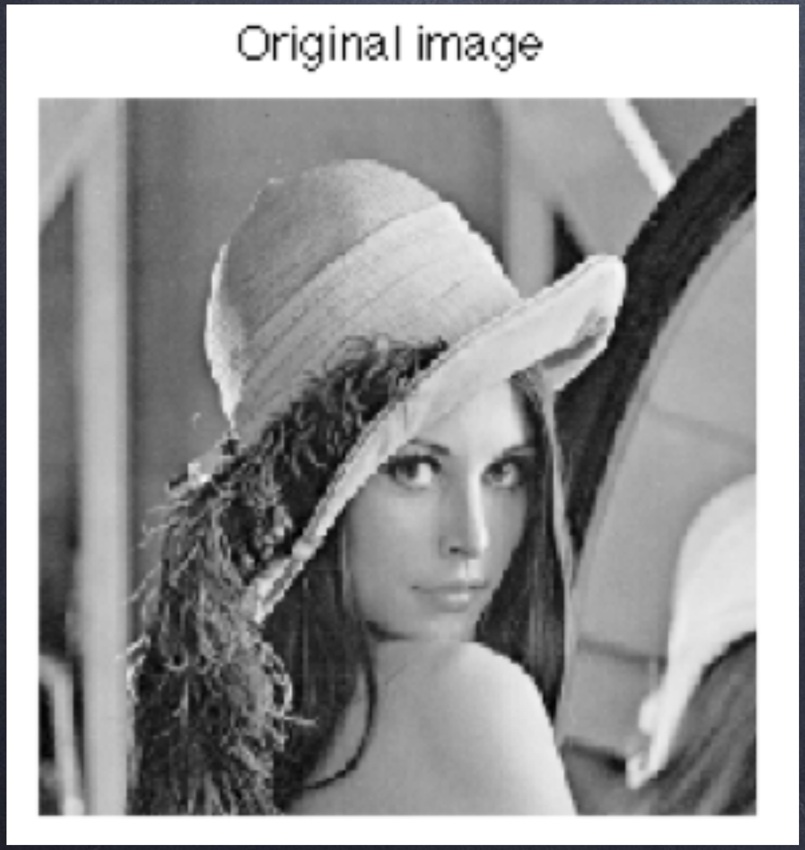
- Toutes O(N) en mémoire
  - FFT est complexe => 2N
  - DCT, DCT locale, FWT => N

Approximations/Compression

- On garde que les m premières fréquences (linéaire) ou les m plus grandes fréquences (non-linéaires)

Approximations/Compression

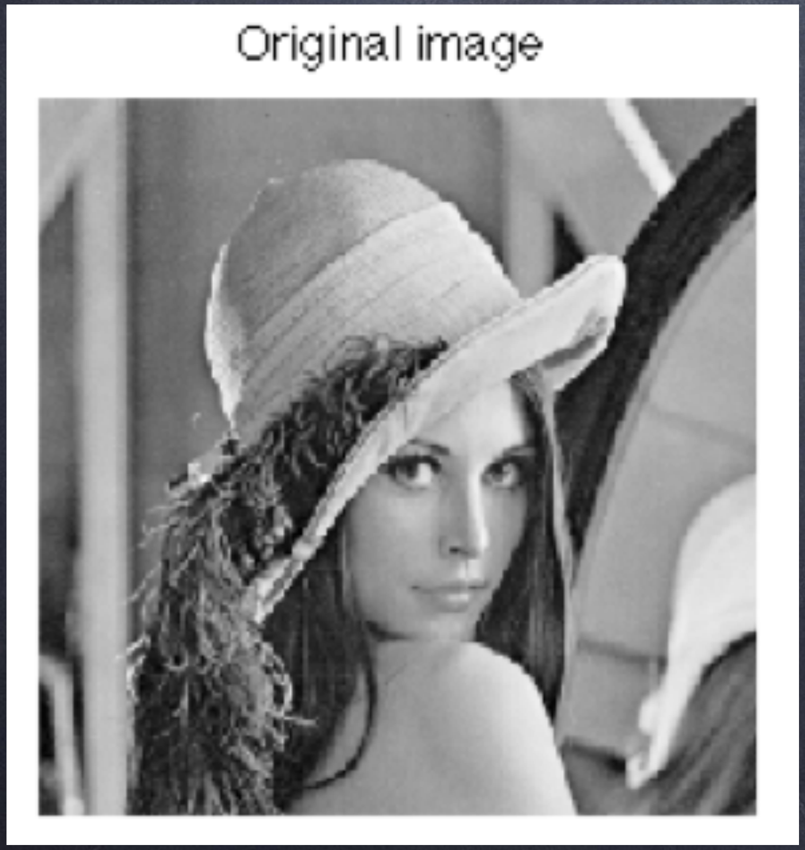
- On garde que les m premières fréquences (linéaire) ou les m plus grandes fréquences (non-linéaires)



2%

Approximations/Compression

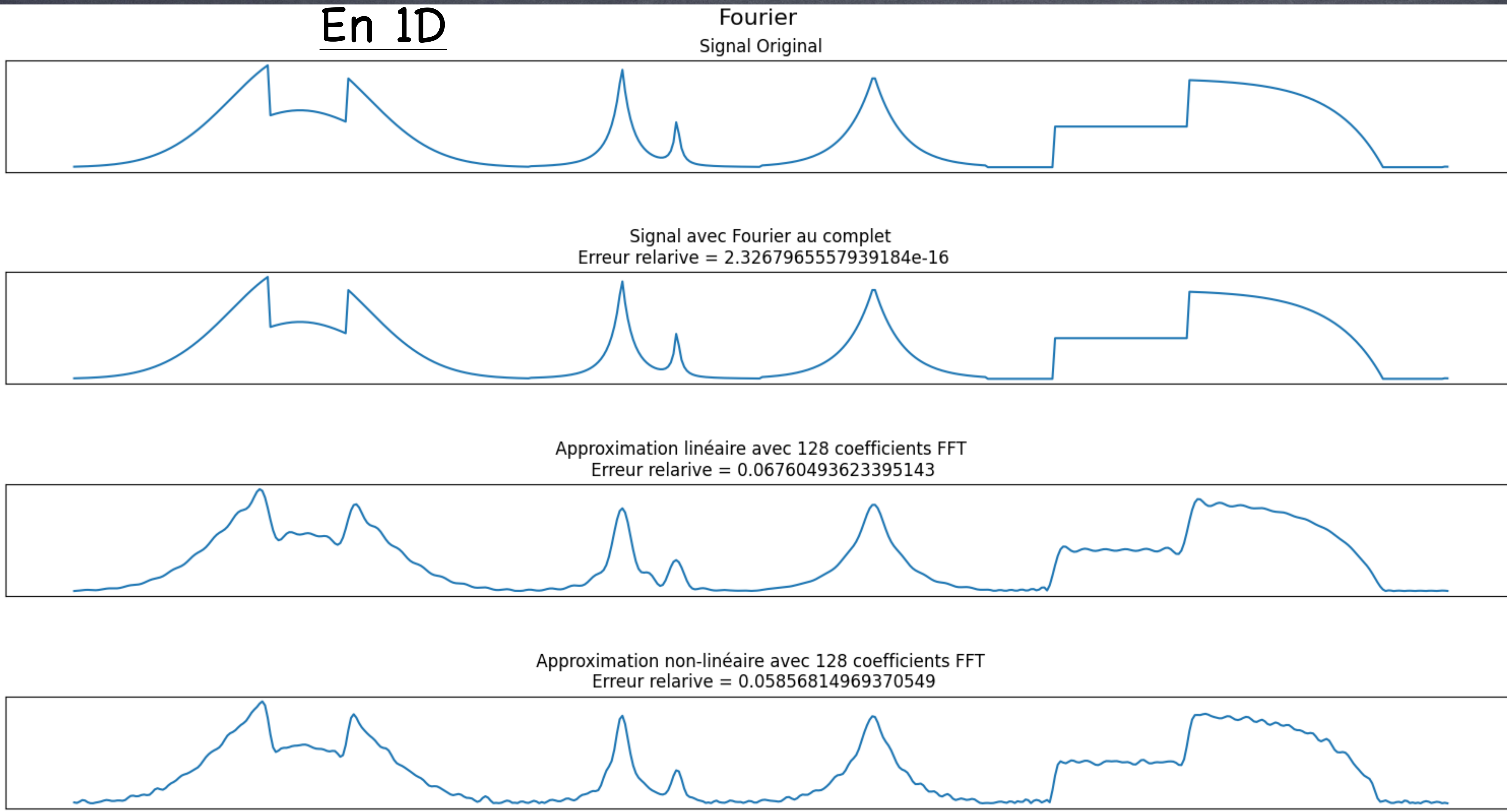
- On garde que les m premières fréquences (linéaire) ou les m plus grandes fréquences (non-linéaires)



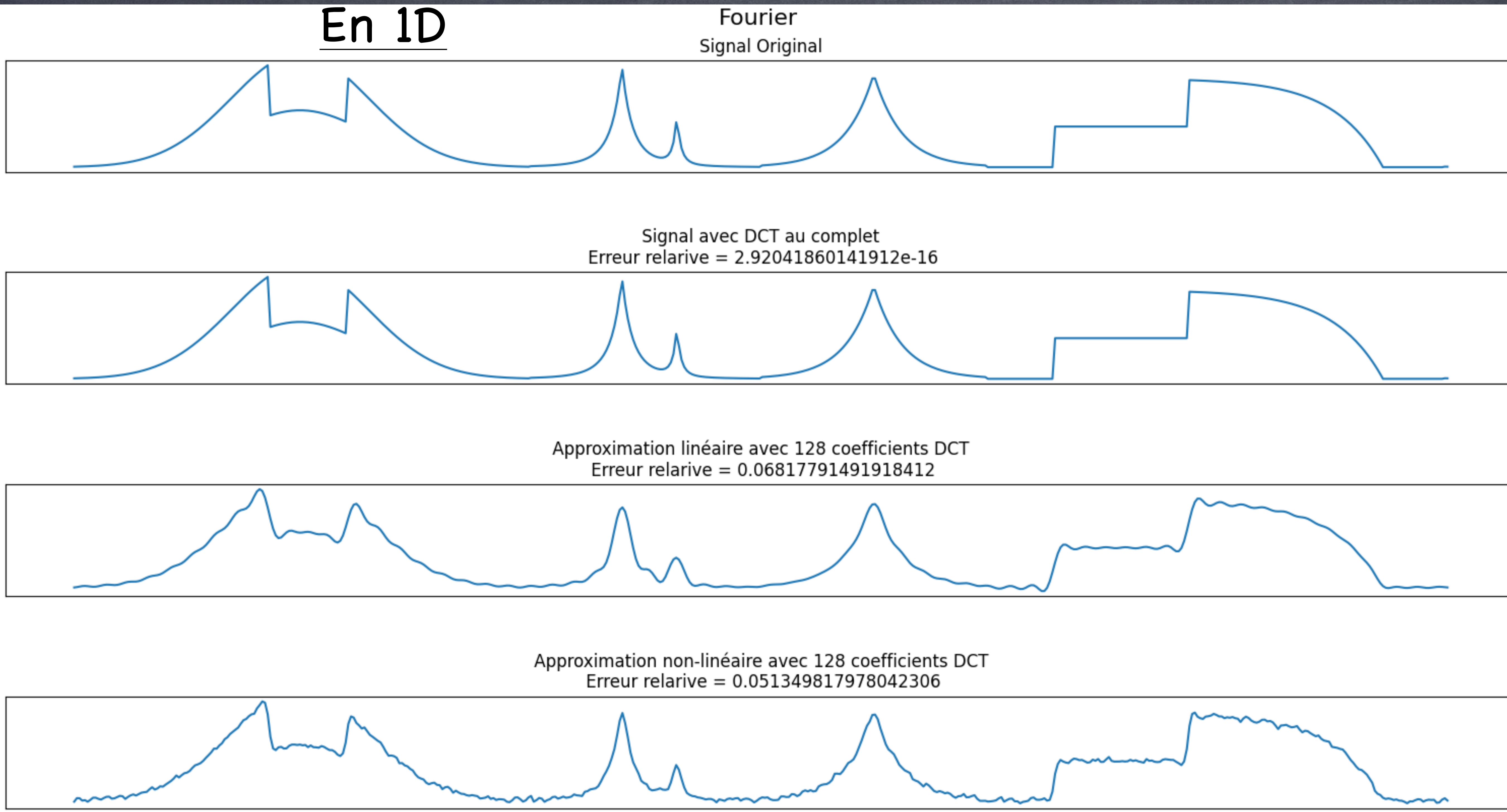
2%

10%

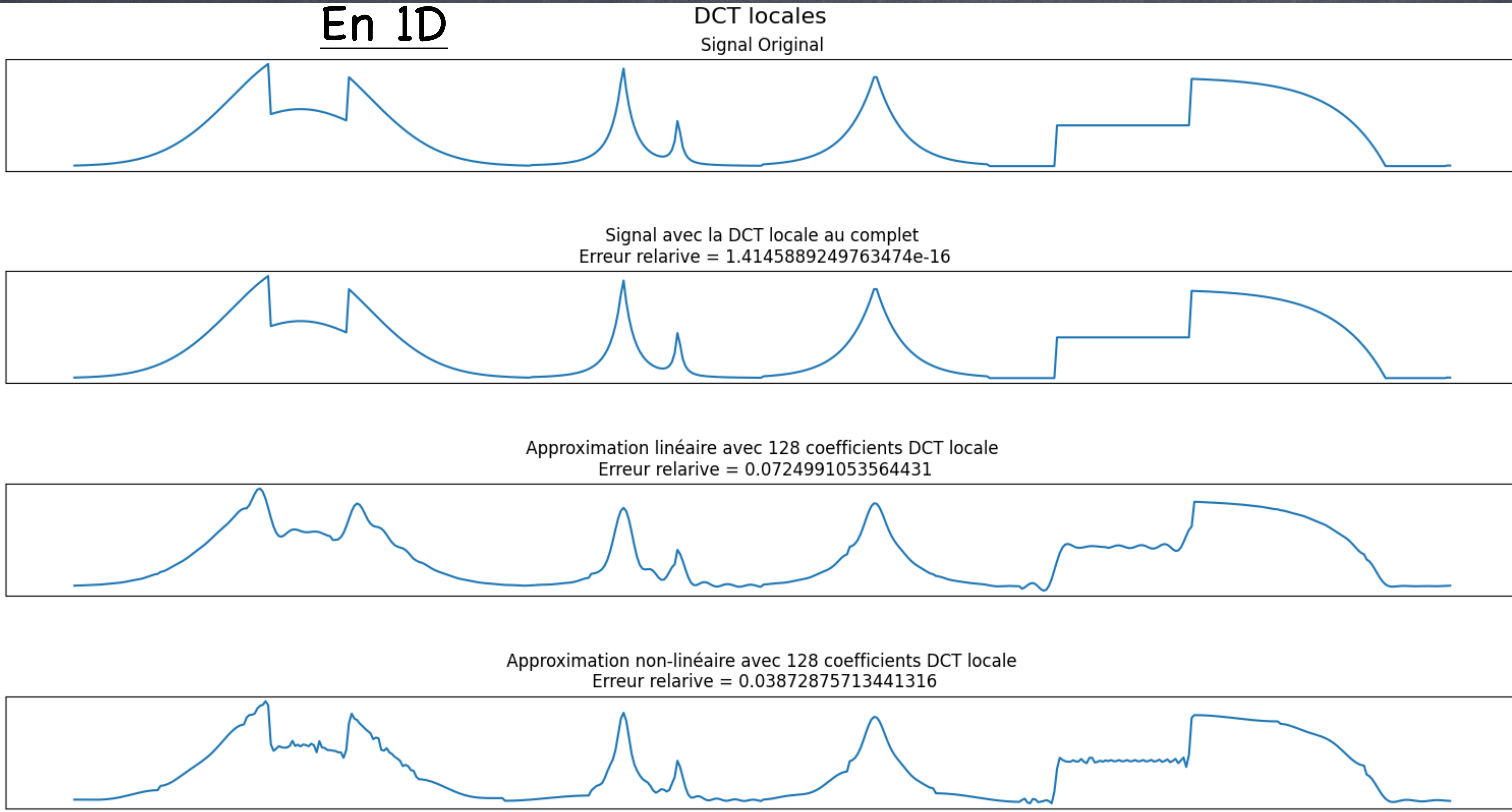
En 1D


Fourier
Signal Original
Signal avec Fourier au complet
Erreur relarive = 2.3267965557939184e-16
Approximation linéaire avec 128 coefficients FFT
Erreur relarive = 0.06760493623395143
Approximation non-linéaire avec 128 coefficients FFT
Erreur relarive = 0.05856814969370549

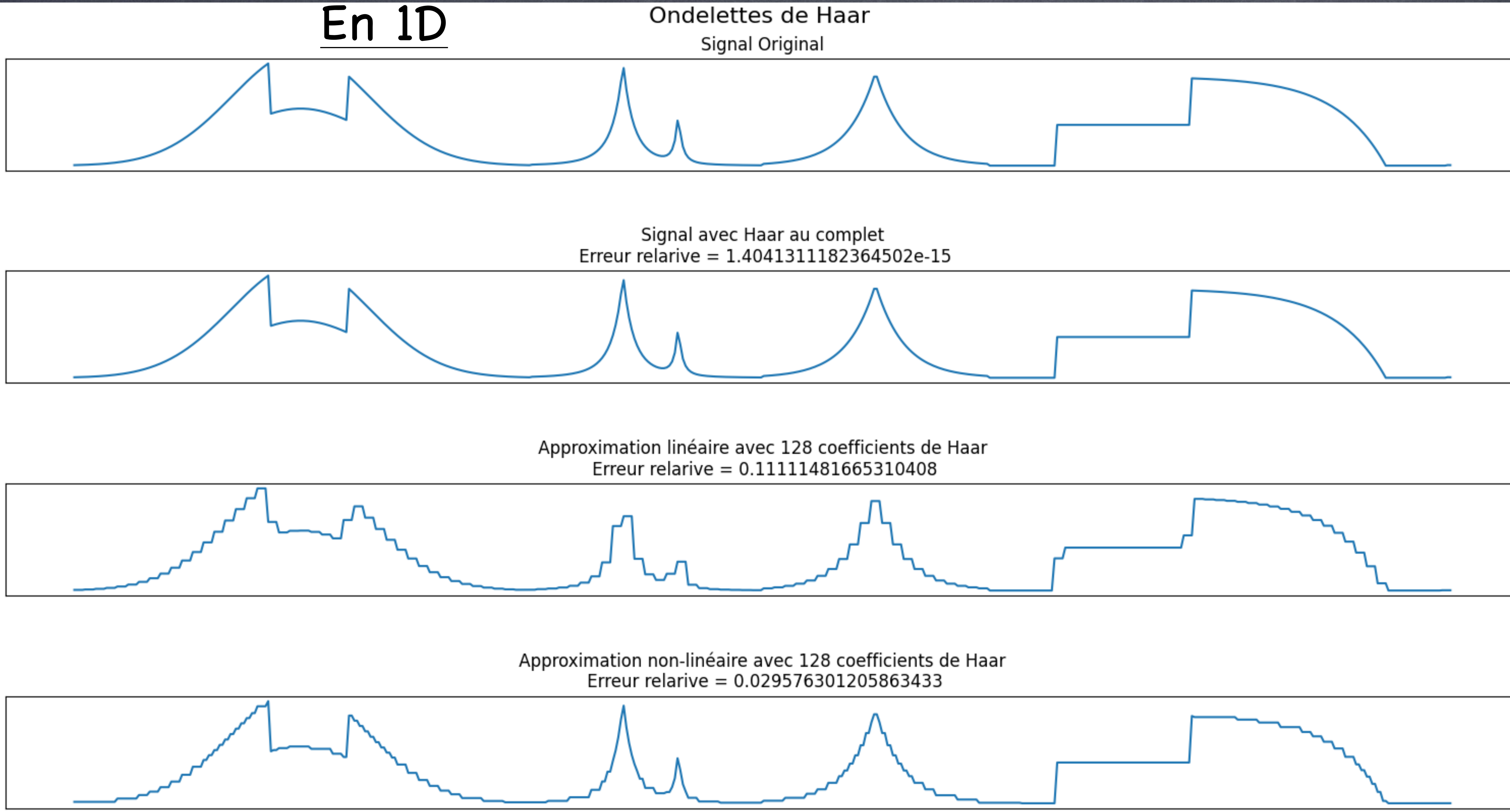
En 1D


Fourier
Signal Original
Signal avec DCT au complet
Erreur relarive = 2.92041860141912e-16
Approximation linéaire avec 128 coefficients DCT
Erreur relarive = 0.06817791491918412
Approximation non-linéaire avec 128 coefficients DCT
Erreur relarive = 0.051349817978042306

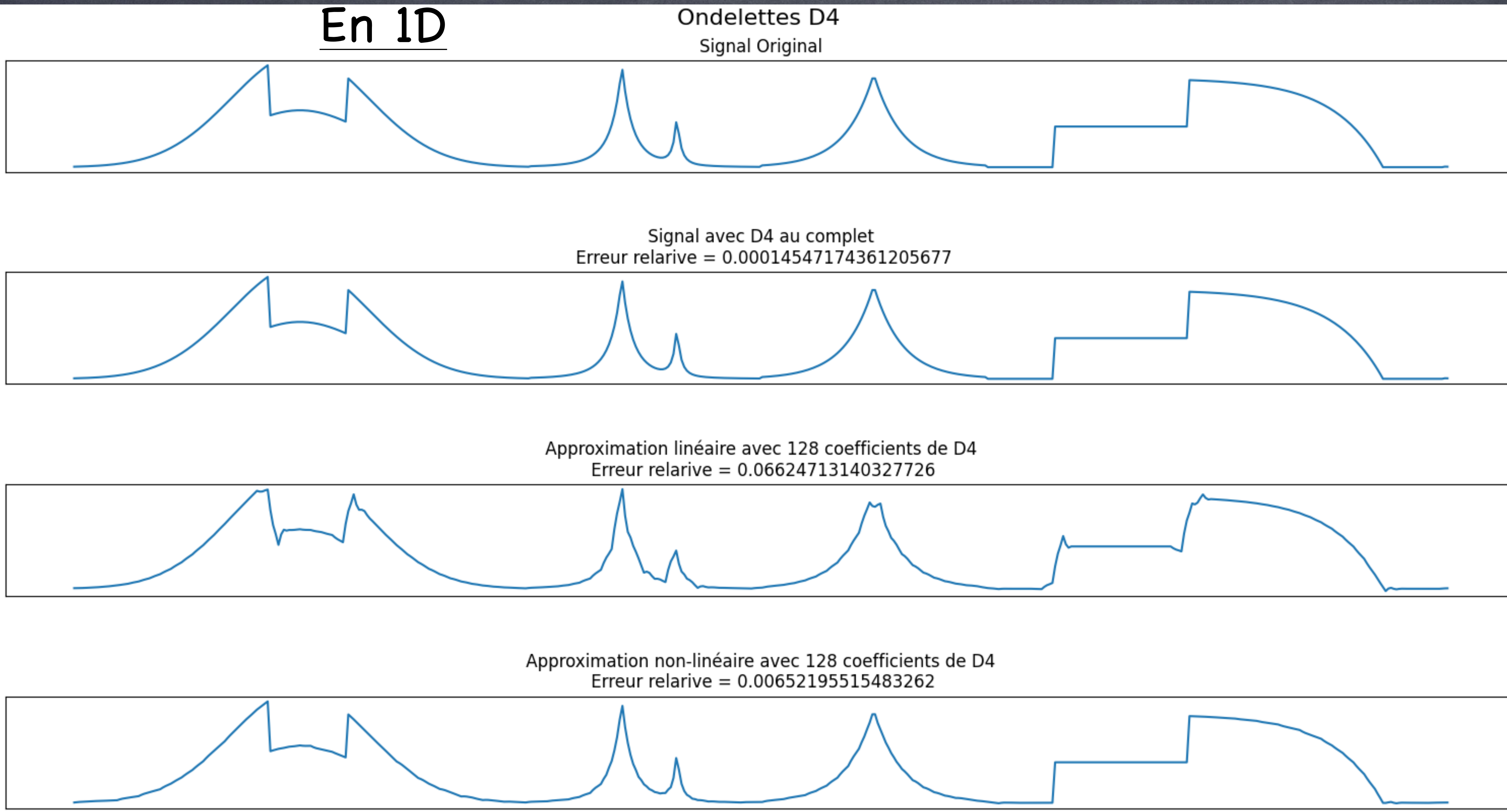
En 1D


DCT locales
Signal Original
Signal avec la DCT locale au complet
Erreur relarive = 1.4145889249763474e-16
Approximation linéaire avec 128 coefficients DCT locale
Erreur relarive = 0.0724991053564431
Approximation non-linéaire avec 128 coefficients DCT locale
Erreur relarive = 0.03872875713441316

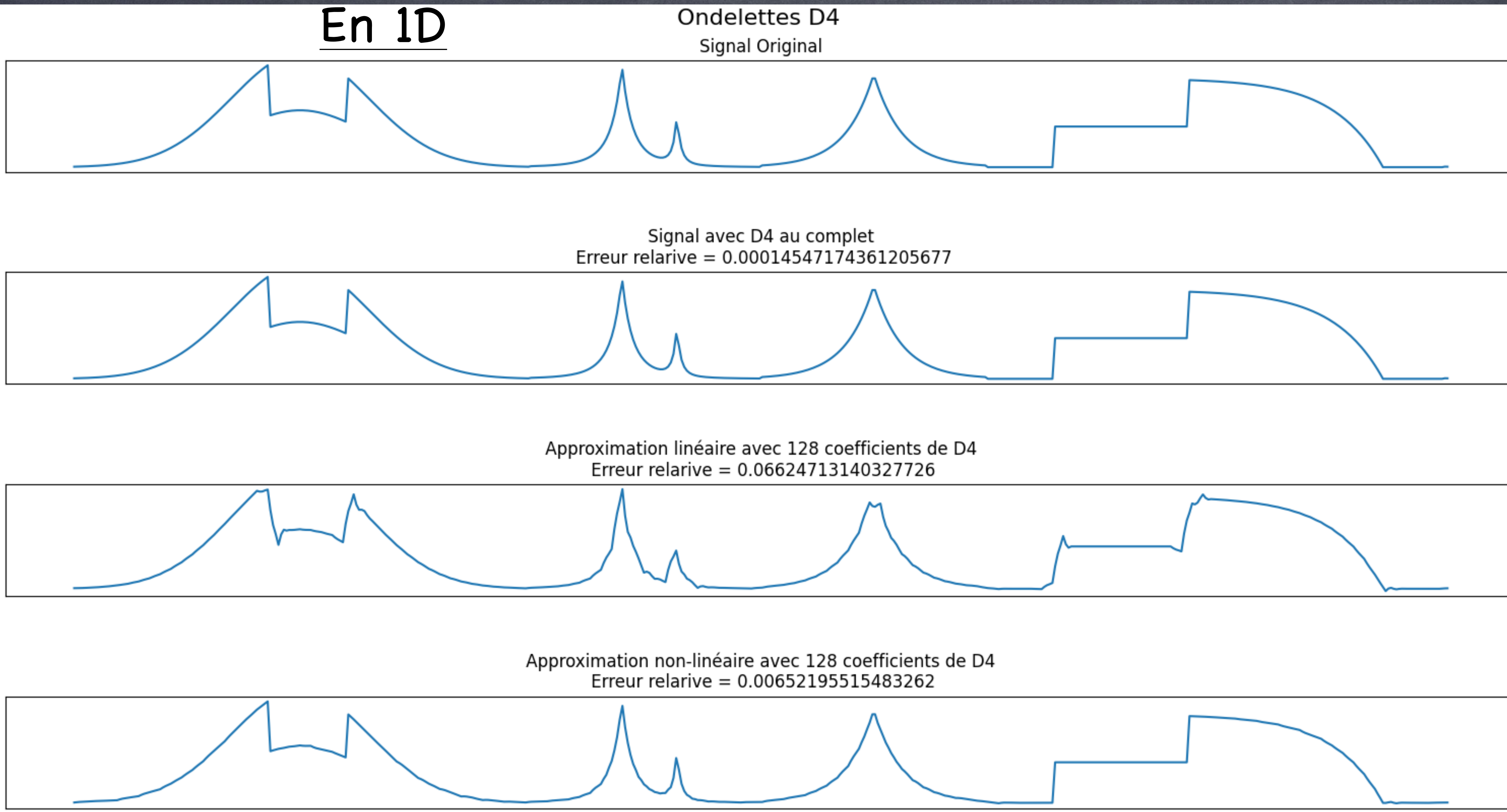
En 1D


Ondelettes de Haar
Signal Original
Signal avec Haar au complet
Erreur relarive = 1.4041311182364502e-15
Approximation linéaire avec 128 coefficients de Haar
Erreur relarive = 0.11111481665310408
Approximation non-linéaire avec 128 coefficients de Haar
Erreur relarive = 0.029576301205863433

En 1D

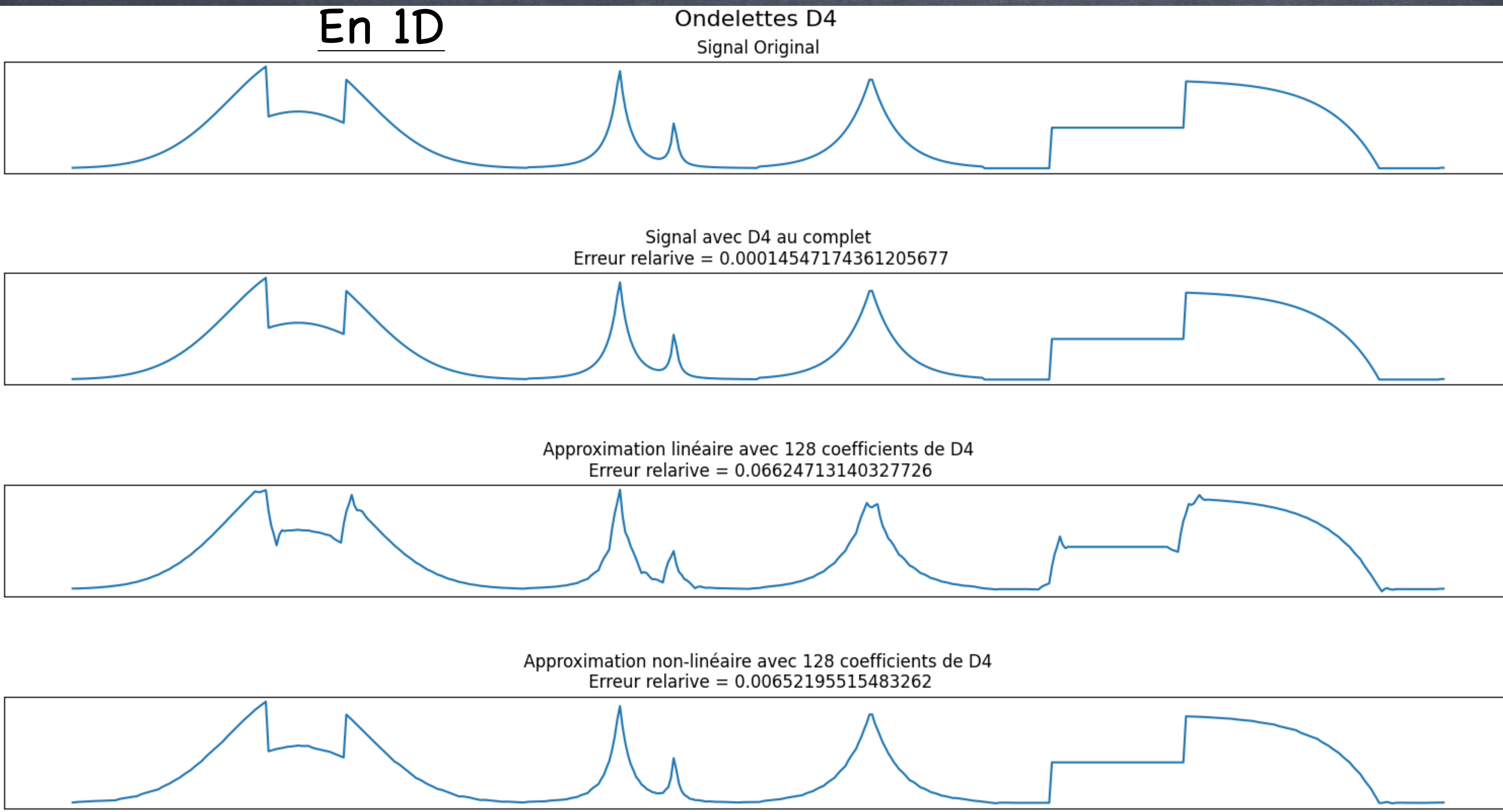

Ondelettes D4
Signal Original
Signal avec D4 au complet
Erreur relarive = 0.00014547174361205677
Approximation linéaire avec 128 coefficients de D4
Erreur relarive = 0.06624713140327726
Approximation non-linéaire avec 128 coefficients de D4
Erreur relarive = 0.00652195515483262

En 1D



Erreurs de toutes les transformées linéaires ~0.07

En 1D



Erreurs de toutes les transformées linéaires ~0.07

Erreurs non-linéaires:

FFT ~= DCT > DCT locale ~= Haar > D4

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Ça dépend du signal et de l'image!
- Mais, règle générale ...

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?

Équivalentes

=

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?

Équivalentes
=

- Fourier vs DCT non-linéaires?

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

Équivalentes

- Fourier vs DCT vs DCT locale vs ondelettes linéaires? =
- Fourier vs DCT non-linéaires? =

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

Équivalentes

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires? =
- Fourier vs DCT non-linéaires? =
- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires?

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?

  Équivalentes
  =

- Fourier vs DCT non-linéaires? =

- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires? DCT locale

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?
- Fourier vs DCT non-linéaires? =
- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires? DCT locale
- Fourier/DCT vs FWT non-linéaires?

Équivalentes

=

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?
  Équivalentes
  =
- Fourier vs DCT non-linéaires? =
- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires? DCT locale
- Fourier/DCT vs FWT non-linéaires? FWT

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?

Équivalentes

=

- Fourier vs DCT non-linéaires? =
- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires? DCT locale
- Fourier/DCT vs FWT non-linéaires? FWT
- DCT locale vs FWT Haar non-linéaires?

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs
  DCT locale vs ondelettes linéaires?
  Équivalentes
  =
- Fourier vs DCT non-linéaires? =
- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires? DCT locale
- Fourier/DCT vs FWT non-linéaires? FWT
- DCT locale vs FWT Haar non-linéaires? DCT locale

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

- Fourier vs DCT vs DCT locale vs ondelettes linéaires? Équivalentes =
- Fourier vs DCT non-linéaires? =
- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires? DCT locale
- Fourier/DCT vs FWT non-linéaires? FWT
- DCT locale vs FWT Haar non-linéaires? DCT locale
- DCT locale vs FWT Daubechies non-linéaires?

Quelles approximations meilleures?

(demo12 en 1D ou TP4 en 2D)

Équivalentes

- Fourier vs DCT vs DCT locale vs ondelettes linéaires? =
- Fourier vs DCT non-linéaires? =
- Fourier/DCT vs DCT locale non-linéaires? DCT locale
- Fourier/DCT vs FWT non-linéaires? FWT
- DCT locale vs FWT Haar non-linéaires? DCT locale
- DCT locale vs FWT Daubechies non-linéaires? FWT

En 2D, exactement comme en 1D?

- Non!
- Les images ont de la textures, des formes, du contenu plus géométrique qu'en 1D
- Ça dépend encore plus de l'image!

Non-linéaire FFT

m/n^2=0.0039, SNR=16.3dB

m/n^2=0.016, SNR=19.5dB

m/n^2=0.098, SNR=25.6dB

Non-linéaire DCT

$m/n^2=0.0039$, SNR=17.1dB

$m/n^2=0.016$, SNR=20.5dB

$m/n^2=0.098$, SNR=27dB

Non-linéaire FWT Haar

m/n^2=0.0039, SNR=16.4dB

m/n^2=0.016, SNR=20.3dB

m/n^2=0.098, SNR=27.9dB

Non-linéaire FWT D4

m/n^2=0.0039, SNR=17.2dB

m/n^2=0.016, SNR=21.6dB

m/n^2=0.098, SNR=29.7dB

Non-linéaire DCT locale

m/n^2=0.0039, SNR=14.2dB

m/n^2=0.016, SNR=21.9dB

m/n^2=0.098, SNR=30.5dB

Non-linéaire FWT Bi-Orthogonal 7-9

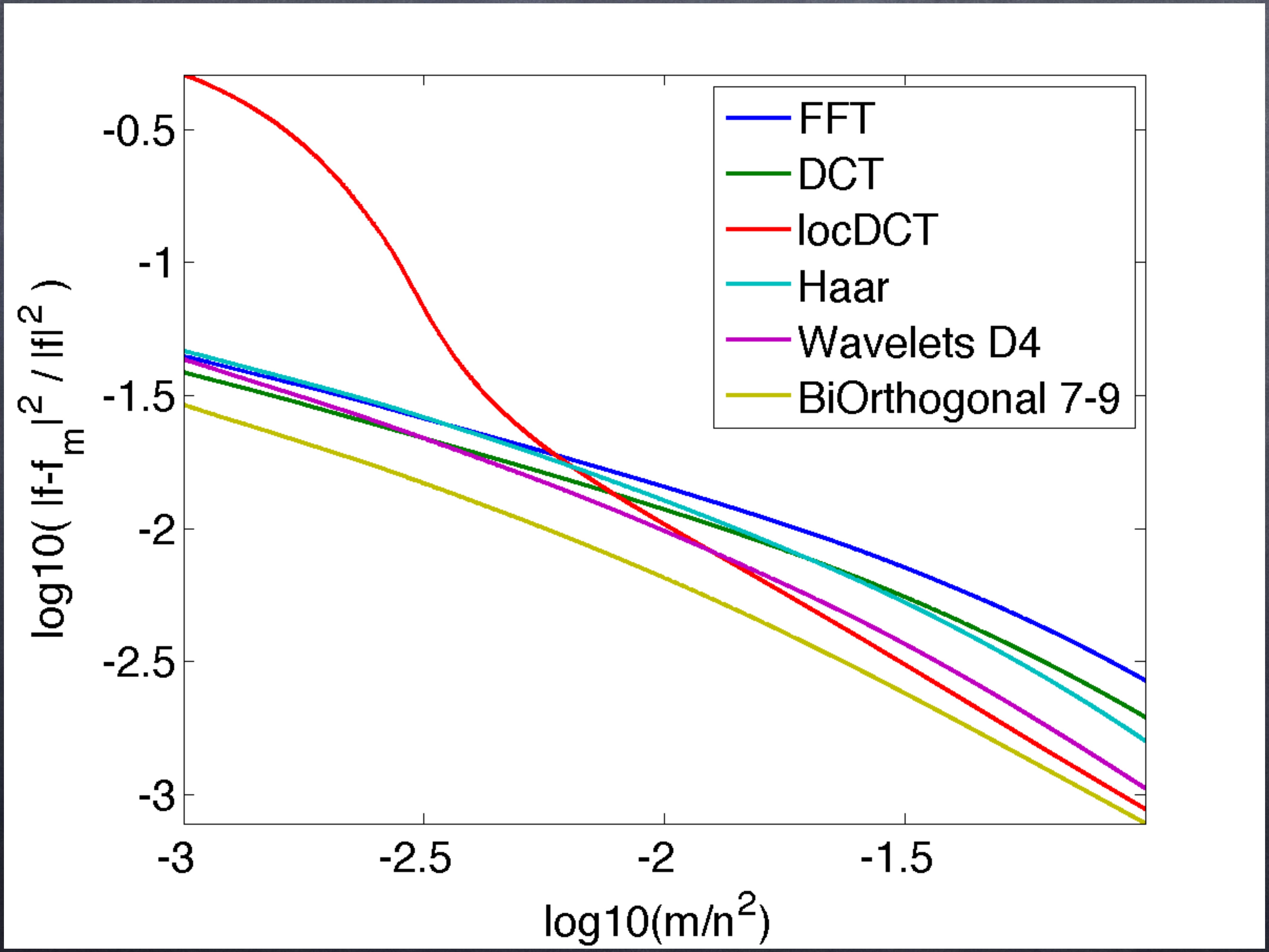
$m/n^2=0.0039$, SNR=18.2dB

$m/n^2=0.016$, SNR=23dB

$m/n^2=0.098$, SNR=30.9dB

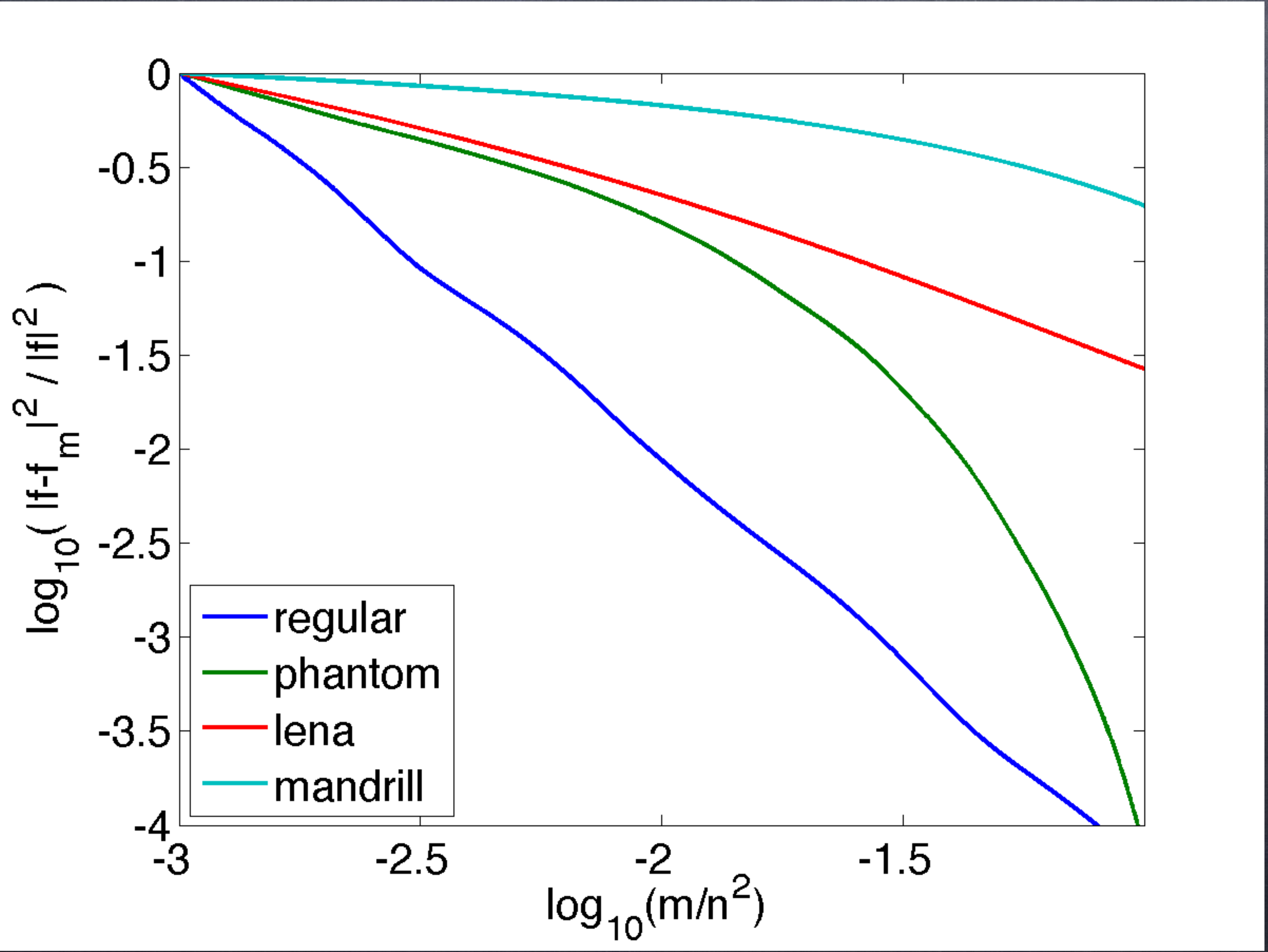
Compression 2D

(plus la courbe est basse, le mieux ça compresse)



Compression 2D

(plus la courbe est basse, le mieux ça compresse)



Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques. Kenneth Wilson

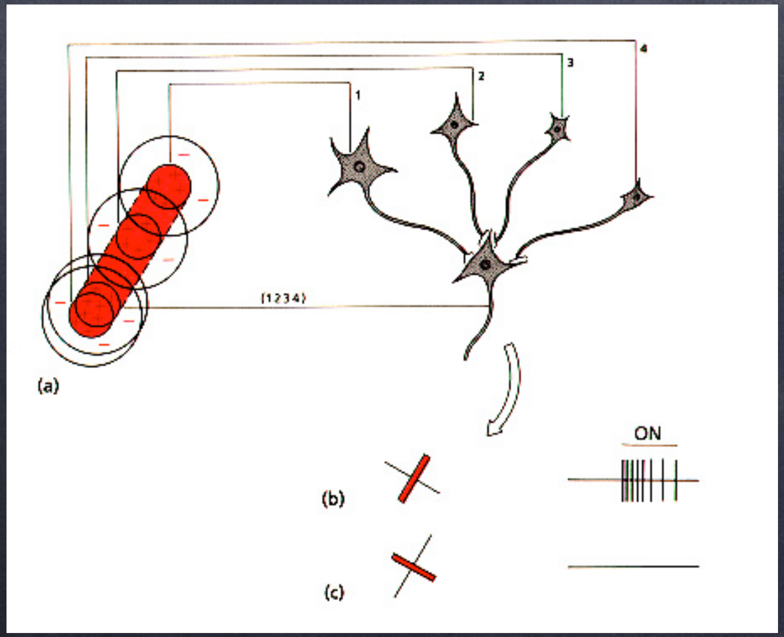
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques. Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) : fonctions autosimilaires de Gabor (inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques. Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) : fonctions autosimilaires de Gabor (inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

Cellules simples

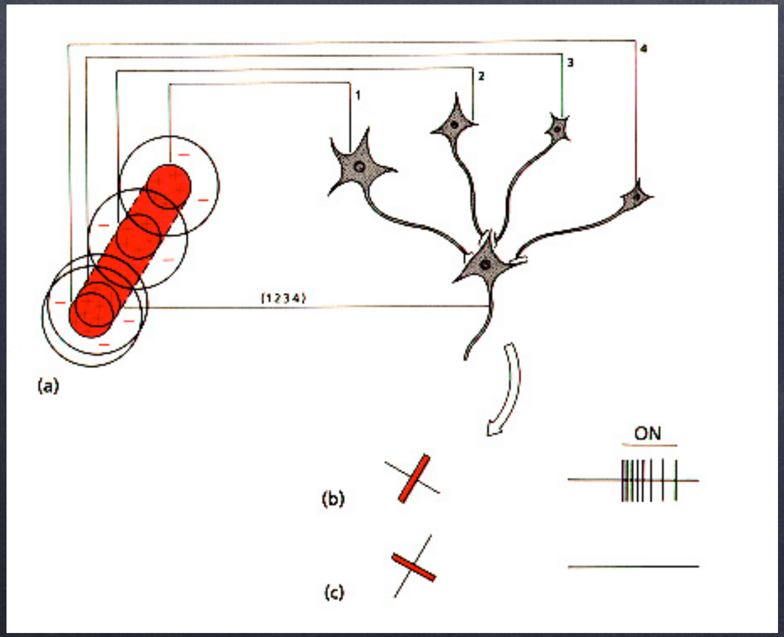


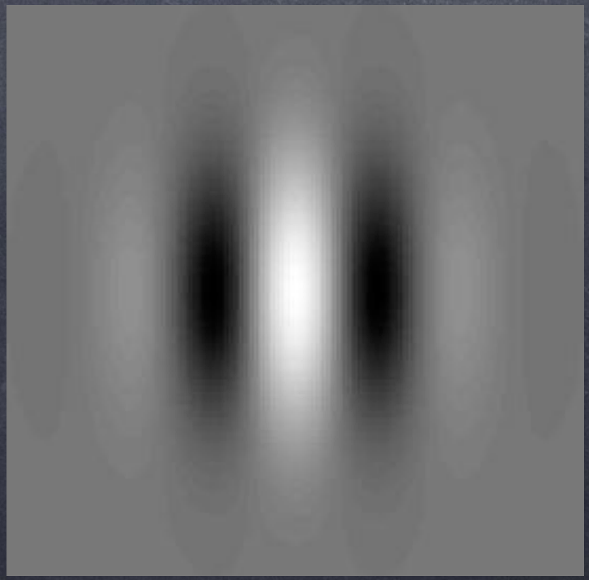
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques.
  Kenneth Wilson

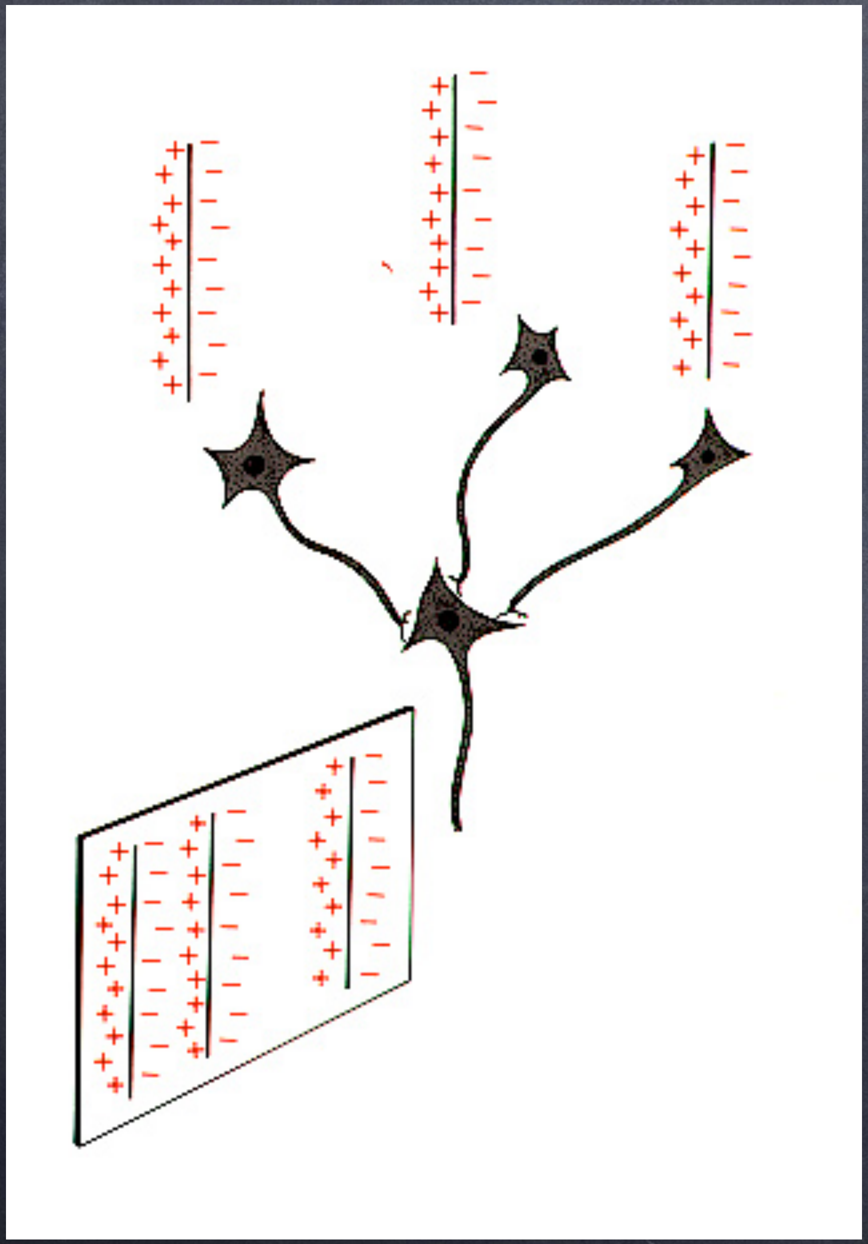
- Physiologie (système visuel) :
  fonctions autosimilaires de Gabor
  (inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

Cellules simples

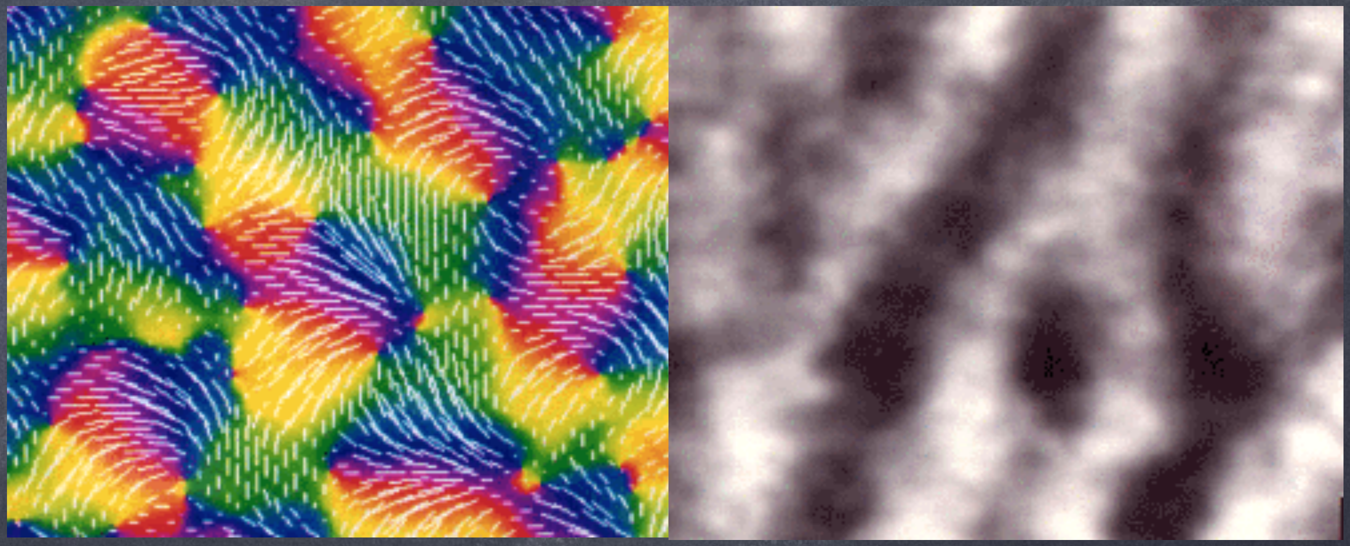




Hubel & Wiesel



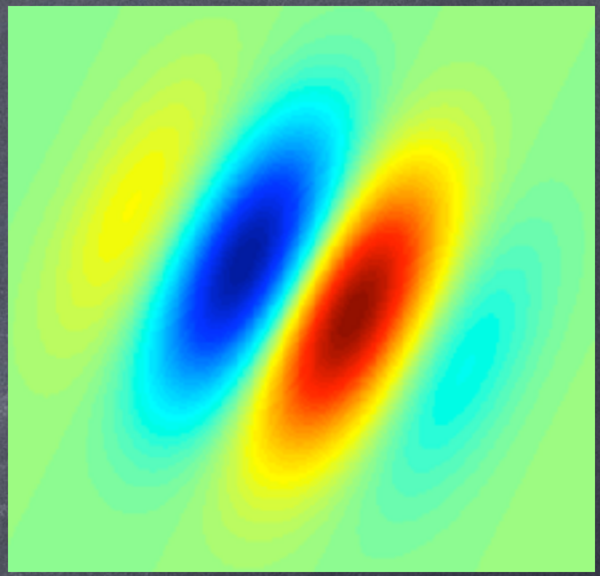
Cellules complexes



Organisation orientationelles
du système visuel

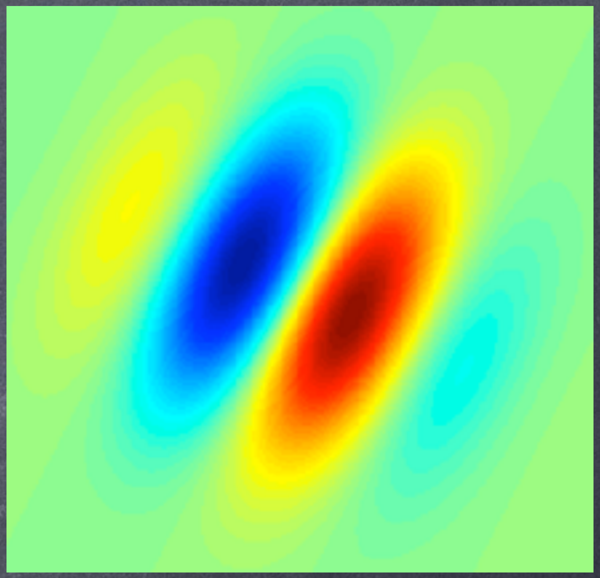
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques. Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) : fonctions autosimilaires de Gabor



Histoire des ondelettes et de la multirésolution

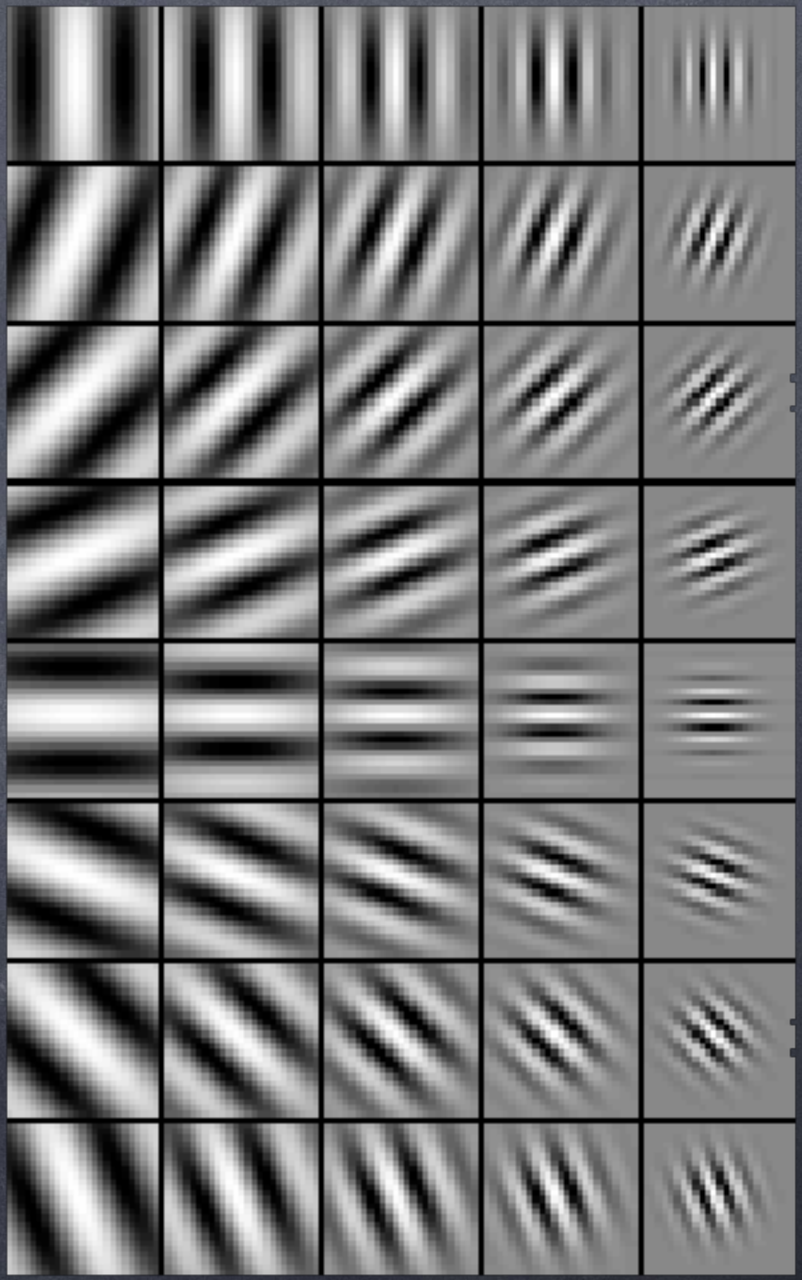
- Physique 1971 : décompositions atomiques. Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) : fonctions autosimilaires de Gabor



- Géophysique : chercher du pétrole sous la terre avec des ondelettes (Jean Morlet) 1975. Fenêtre glissante de Gabor.

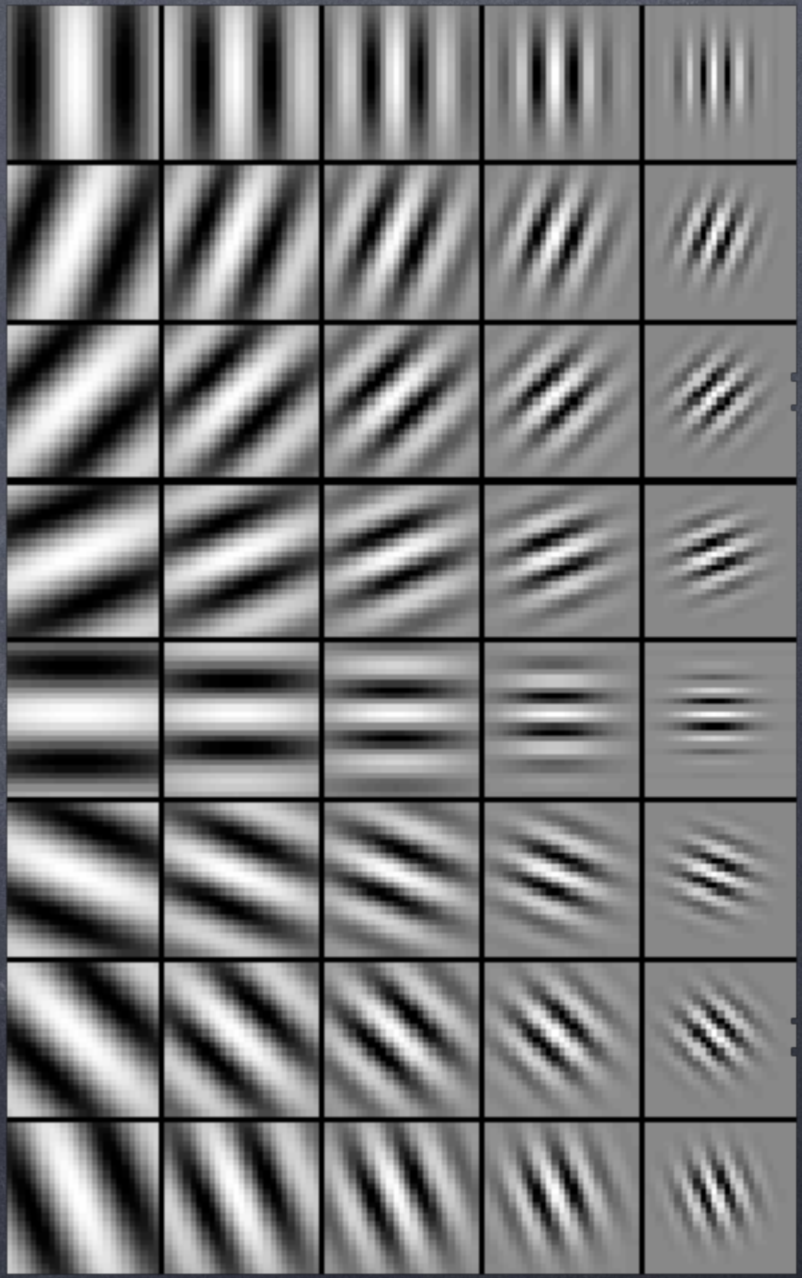
Ondelettes de Morlet

- Laisser le nombre d'oscillations constant



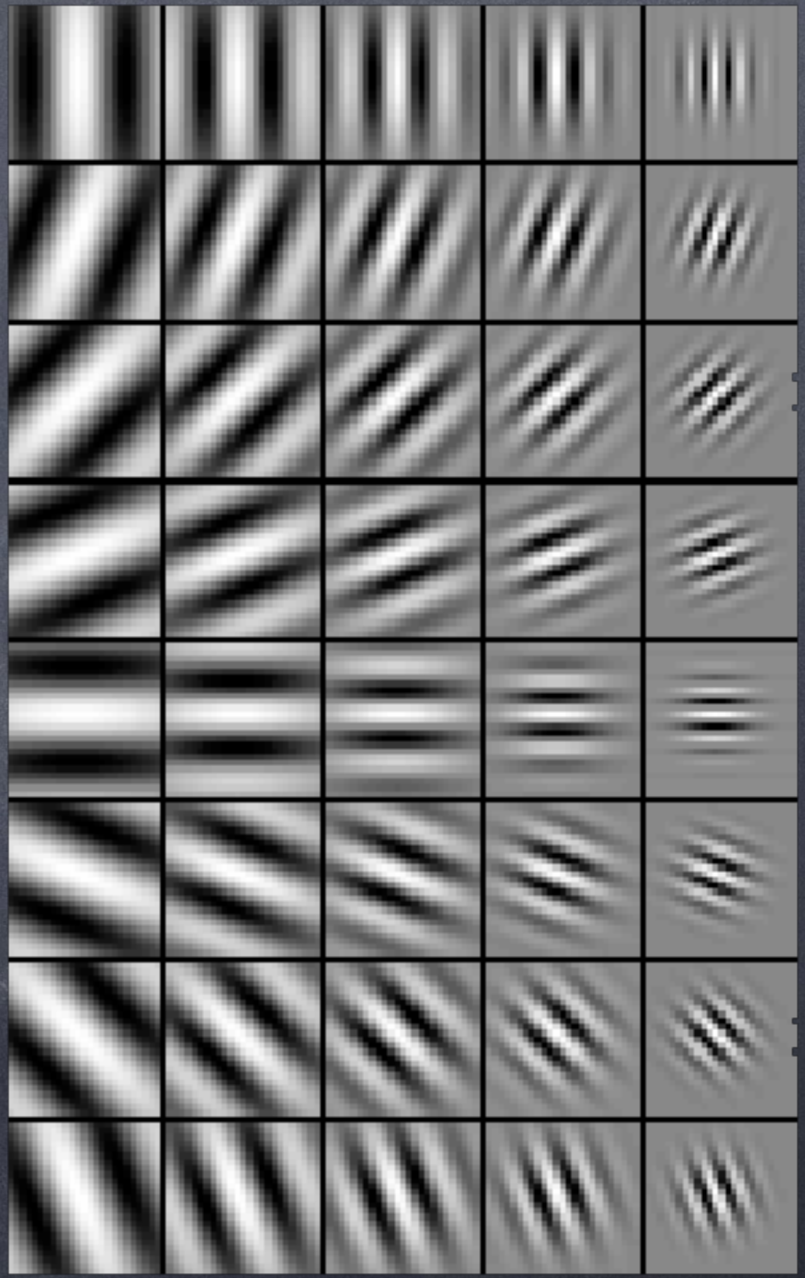
Ondelettes de Morlet

- Laisser le nombre d'oscillations constant
- Changer la taille des fenêtres (étirer et comprimer comme un accordéon)



Ondelettes de Morlet

- Laisser le nombre d'oscillations constant
- Changer la taille des fenêtres (étirer et comprimer comme un accordéon)
- Nom: ondelettes de Gabor ou ondelettes de forme constante



Les ondelettes – une drôle de famille

- Mère : fonction d'échelle

Les ondelettes – une drôle de famille

- Mère : fonction d'échelle
- Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)

Les ondelettes – une drôle de famille

- Mère : fonction d'échelle
- Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)
- Conclusion : Le père sert à rien dans la reproduction familiale!

Les ondelettes - une drôle de famille

- Mère : fonction d'échelle
- Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)
- Conclusion : Le père sert à rien dans la reproduction familiale!
- Reproduction amibes:
  "Les amibes sont des protozoaires de l'environnement ; leur reproduction est asexuée par fission binaire."

Ondelettes
"sans ondelettes"

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!

Ondelettes
“sans ondelettes”

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h

Ondelettes "sans ondelettes"

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h
- À chaque échelle,

Ondelettes
“sans ondelettes”

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h
- À chaque échelle,
  - filtre passe-bas forme une représentation grossière du signal

Ondelettes “sans ondelettes”

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h
- À chaque échelle,
  - filtre passe-bas forme une représentation grossière du signal
  - filtre passe-haut forme une représentation détaillée du signal

Ondelettes

- La fonction d’échelle sert quand même à quelque chose

Ondelettes

- La fonction d’échelle sert quand même à quelque chose
  - Déterminez les propriétés de la transformation

Ondelettes

- La fonction d'échelle sert quand même à quelque chose
  - Déterminez les propriétés de la transformation
  - Accélérez les calculs

Ondelettes

- La fonction d'échelle sert quand même à quelque chose
    - Déterminez les propriétés de la transformation
    - Accélérez les calculs
- La transformée en ondelettes d'un signal de taille N demande le calcule de O(N) coefficients

Corrigé

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique (fft, ifft, fftshift)

Corrigé

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique (fft, ifft, fftshift)

Fourier 2D (fft2, ifft2)

Corrigé

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique (fft, ifft, fftshift)

Fourier 2D (fft2, ifft2)

Convolution

CORRIGÉ

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique
(fft, ifft, fftshift)

Fourier 2D
(fft2, ifft2)

Convolution

Échantiollonnage

CORRIGÉ

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique
(fft, ifft, fftshift)

Fourier 2D
(fft2, ifft2)

Convolution

Limites de Fourier

Échantiollonnage

CORRIGÉ

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique (fft, ifft, fftshift)

Fourier 2D (fft2, ifft2)

Convolution

Limites de Fourier

Multi-résolution

Échantiollonnage

IGÉ

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique
(fft, ifft, fftshift)

Fourier 2D
(fft2, ifft2)

Ondelettes

Convolution

Limites de Fourier

Multi-résolution

Échantiollonnage

IGÉ

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique
(fft, ifft, fftshift)

Approximations
(compression)

Fourier 2D
(fft2, ifft2)

Ondelettes

Convolution

Limites de Fourier

Multi-résolution

Échantiollonnage

CORRIGÉ

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										

Fourier 1D en pratique
(fft, ifft, fftshift)

Approximations
(compression)

Fourier 2D
(fft2, ifft2)

Ondelettes

Convolution

Limites de Fourier

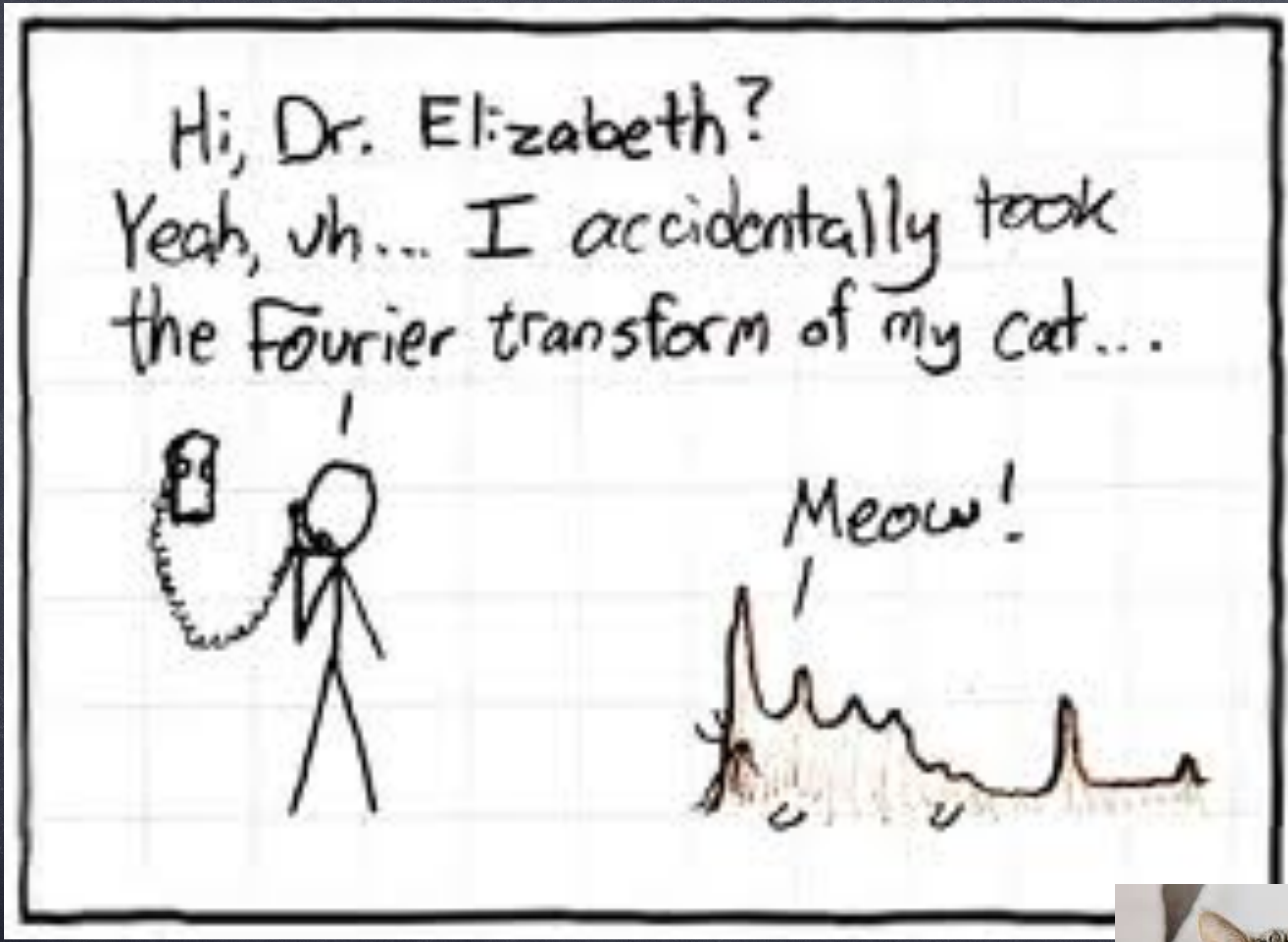
Multi-résolution

Échantiollonnage

Vrai/Faux

CORRIGÉ

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	10	17	8	10	10	5	12	16	12	100
Score:										


Hi, Dr. Elizabeth?
Yeah, uh... I accidentally took the Fourier transform of my cat...
Meow!