IMN 359 - Outils mathématiques du traitement d'images
Contenu du cours donné par le Pr. Maxime Descoteaux

Ces notes de cours complémentent les démonstrations et les cours donnés au tableau en classe. Ces notes sont adaptées du contenu de cours des Prs M'hamed Bentourkia et François Dubeau.

I. Nombres complexes.

I.1. Définition

Problème posé aux algébristes du 16e siècle: Résoudre des équations du 2^e et 3^e degré:

Équations du 2^e degré:

$ax^2 + bx + c = 0$ Discriminant D: $D = b^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1,2}$ racines réelles et distinctes si D>0

$x_1=x_2$ réelles si D=0

$x_{1,2}$ racines complexes conjuguées si D<0

La racine carrée d'un nombre réel a: $\sqrt{a^2} = \pm a$

Exemple: $\sqrt{2^2} = \pm 2$

Si le nombre est négatif: $\sqrt{-2^2} = \sqrt{i^2 2^2} = \pm 2i$

soit :

$$-1 = i^2$$

Exemples: $-2 \times -2 = (-2)^2 = 2^2 = 4$

$-2i \times -2i = (-2i)^2 = 2^2 i^2 = -4$

Confusions:

- Dans certains ouvrages, j représente la valeur complexe au lieu de i, comme en électricité, où la lettre i désigne l'intensité du courant.
- Les lettres i et j pourraient être utilisées comme les vecteurs unitaires d'un repère en 2D, dans ce cas là, choisir u et v comme vecteurs unitaires (ou e1 et e2 etc...).

- Dans certains logiciels, la lettre i est réservée à la valeur unitaire complexe (Matlab, ...), la distinguer de la variable utilisée dans les boucles.

Exemple 1:

Trouver les racines de $x^2 - 3x - 4 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

D > 0 ==> Les racines sont réelles: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2}$

==> $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$

Exemple 2:

Trouver les racines de $x^2 - 3x + 3 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$.

D < 0 ==> Les racines sont imaginaires conjuguées: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ==>

$$x_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ x_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>Équations du 3^e^ degré</u>:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,;$$

$$\Rightarrow\ x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0\ \text{ ou }\ x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}\quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}\quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$x_1 = S + T - \frac{a_1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

Exemple 1:

$4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$;

$\Rightarrow x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ ou $x^3 + 0.75x^2 + 0.5x + 0.25a_3 = 0$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} = \frac{3 \times 0.5 - 0.75^2}{9} = 0.104$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} = \frac{9 \times 0.75 \times 0.5 - 27 \times 0.25 - 2 \times 0.75^3}{54} = -0.078$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} = \sqrt[3]{-0.078 + \sqrt{0.104^3 + (-0.078)^2}} = 0.190$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} = \sqrt[3]{-0.078 - \sqrt{0.104^3 + (-0.078)^2}} = \text{-}0.546$$

$$x_1 = S + T - \frac{a_1}{3} = 0.19 - 0.546 - \frac{0.75}{3} = -0.606$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T) = -\frac{0.19 - 0.546}{2} - \frac{0.75}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19 + 0.546) = -0.072 + 0.637i$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T) = -\frac{0.19 - 0.546}{2} - \frac{0.75}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19 + 0.546) = -0.072 - 0.637i$$

Nombre complexe z = a + ib avec a et b réels ou z = (a,b)

a est la partie réelle de z: a = *Re*(z). b est la partie imaginaire de z: b = *Im*(z).

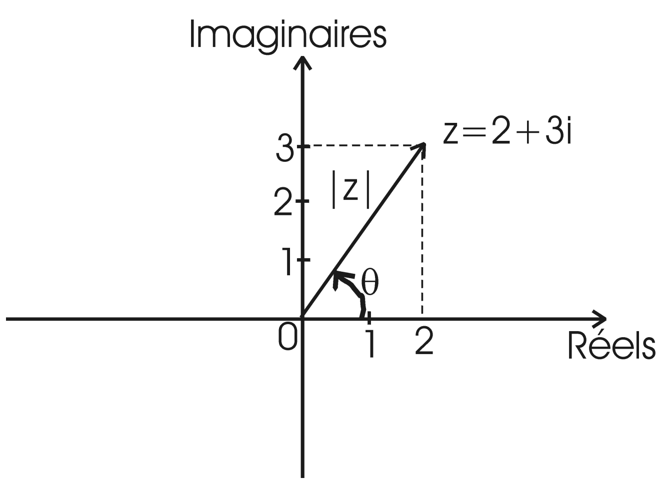

Figure 1. Représentation graphique d'un nombre complexe. La partie réelle est portée par l'axe des **abscisses**, et la partie imaginaire est portée par l'axe des **ordonnées**.

I.2. Opérations sur les nombres complexes (représentation algébrique ou cartésienne)

Addition:

$z1 = a1 + ib1; z2 = a2 + ib2$:

$$z1 + z2 = (a1 + a2) + i(b1 + b2) = (a1 + a2, b1 + b2)$$

Exemple: $z1 = 3 + 2i; z2 = 6 + 5i; z1 + z2 = 9 + 7i$

$z1 = -3 + 2i; z2 = 6 - 5i; z1 + z2 = 3 - 3i$

Multiplication:

$z1 = a1 + ib1; z2 = a2 + ib2$:

$$z1 \times z2 = a1 \times (a2 + ib2) + ib1 \times (a2 + ib2)$$

$= a1a2 + ia1b2 + ib1a2 + i^2 b1b2$

$= a1a2 - b1b2 + i(a1b2 + a2b1) = (a1a2 - b1b2, a1b2 + a2b1)$

Exemple 1: $z1 = 2 + 3i; z2 = 4 + 5i$;

$z1\times z2 = (2 \times 4 - 3 \times 5, 2 \times 5 + 4 \times 3) = (-7, 22) = -7 + 22i$

$z1 = 2 - 3i; z2 = 4 + 5i$;

$z1\times z2 = (2 \times 4 - (-3) \times 5, 2 \times 5 + 4 \times (-3)) = (23, -2) = 23 - 2i$

Conjugué:

$\bar{z} = a - ib$ est le conjugué de $z = a + ib$

Module:

Le module (ou la valeur absolue ou la longueur du vecteur $\vec{z}$) de $z = a + ib$ s'écrit comme $|z|$:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sous forme vectorielle de $z = (a,b)$: $z^2 = a^2 + b^2$ (théorème de Pythagore).

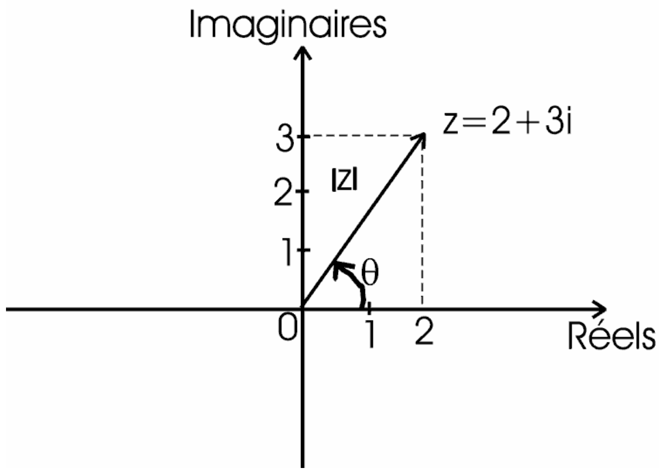

Figure 2. Module d'un nombre complexe

Division:

$z = a + ib$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

ainsi $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ avec $z \neq 0$

z1 = a1 + ib1; z2= a2 + ib2

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

Exemple:

Résoudre le système d'équation (par substitution, addition, déterminant etc...):

$(3 + 2i)x_1 + (1 + 3i)x_2 = 3$

$2x_1 + (2 + i)\, x_2 = 5$

Le déterminant est donné par

$$D = \begin{vmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{vmatrix} = (3+2i)(2+i) - 2(1+3i) = 6 - 2 + i(3+4) - 2 - 6i = 2 + i$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+3i \\ 5 & 2+i \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{3(2+i)-5(1+3i)}{2+i} = \frac{6+3i-5-15i}{2+i} = \frac{1-12i}{2+i} = \frac{(1-12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-10-25i}{5}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+2i & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{5(3+2i)-2\times 3}{2+i} = \frac{15+10i-6}{2+i} = \frac{9+10i}{2+i} = \frac{(9+10i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{28+11i}{5}$$

Matriciellement: $\begin{vmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$

de la forme Ax = B d'où x = A\B en Matlab.

Interprétation géométrique

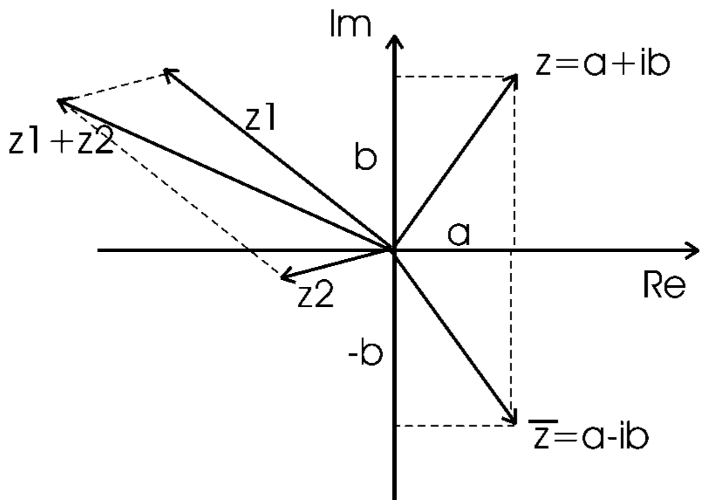

Figure 3. Représentation géométrique des vecteurs.

I.3. Forme polaire d'un nombre complexe (représentation trigonométrique)

z = a + ib et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

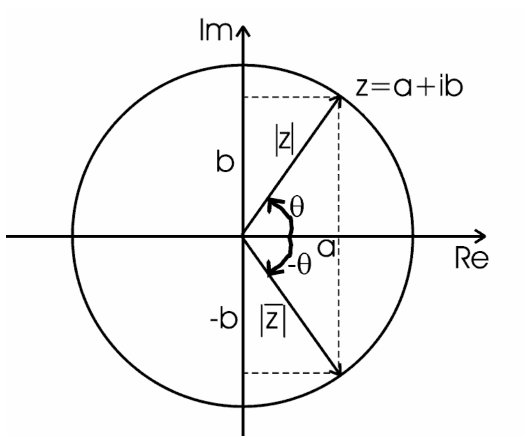

Figure 4. Représentation polaire d'un nombre complexe. θ est l'angle formé par z et l'axe des réels.

Si on appelle r = |z|, alors a = rcos(θ) et b = rsin(θ) ⇒

z = r(cos(θ) + isin(θ))

L'angle θ est appelé l'argument du nombre complexe z: θ = arg(z).

$$arg(z) = acos(\frac{a}{r}) = \cos^{-1}(\frac{a}{r})$$

$$\arg(z) = a\sin(\frac{b}{r}) = \sin^{-1}(\frac{b}{r})$$

$$arg(z) = atan(\frac{b}{a}) = tan^{-1}(\frac{b}{a})$$

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad \bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \Rightarrow \quad \arg(z) = -\arg(\bar{z})$$

Si $z_1 = r_1(\cos(\theta_1 + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2 + i\sin(\theta_2))$

alors:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

et

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

I.4. La notation d'Euler (représentation exponentielle)

Le développement en série de Taylor (MacLaurin à x - a = x) de f(x):

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + ...$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x6}{6!} + \frac{x^7}{7!}......$$

$\Rightarrow$ avec $i^2 = -1$; $i^4 = 1$; $i^6 = -1$

$$\cos(x) = 1 + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^6x^6}{6!} + ...$$

$$i\sin(x) = ix + i\frac{i^2x^3}{3!} + i\frac{i^4x^5}{5!} + i\frac{i^6x^7}{7!} + ... = ix + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^7x^7}{7!} + ...$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!}.... = \cos(x) + i\sin(x)$$

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$: c'est la notation d'Euler.

Conjugué:

$$\bar{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = re^{-i\theta}$$

Expressions du Cosinus et du sinus:

$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\ ;\quad \bar{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

$$z + \bar{z} = 2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

et $$z - \bar{z} = 2i\sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Multiplication:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Division:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Les dérivées:

$$\frac{d(e^{i\theta})}{d\theta} = ie^{i\theta} = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$$

Les intégrales:

$$\int e^{i\theta} d\theta = \frac{e^{i\theta}}{i} + cte = -ie^{i\theta} + cte = \sin(\theta) - i\cos(\theta) + cte$$