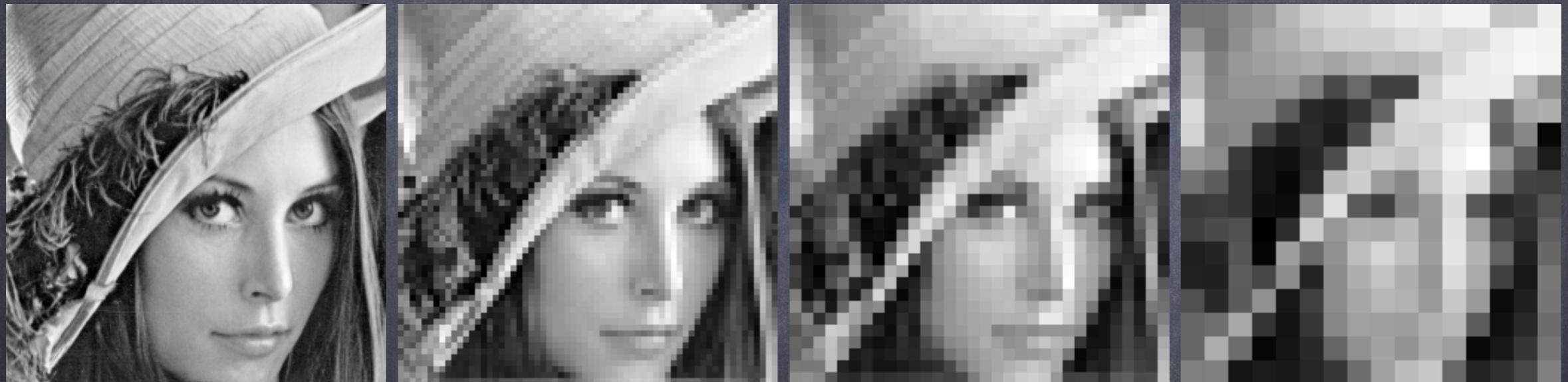


IMN-359

Décomposition/Reconstruction
en ondelettes 2D

Approximation 2D de Haar



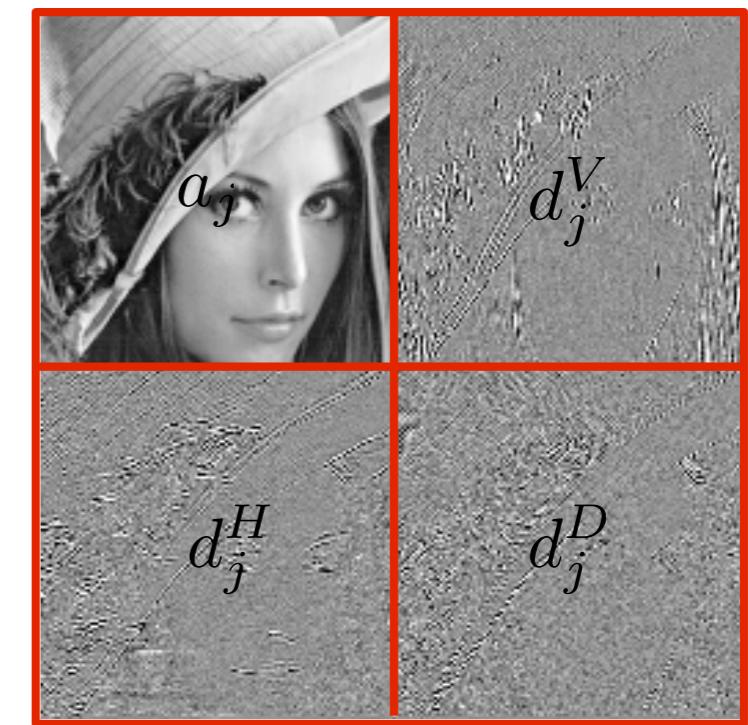
Multirésolution
échelle 2^j entre $j = 8$ et 5



Coefficients a_j



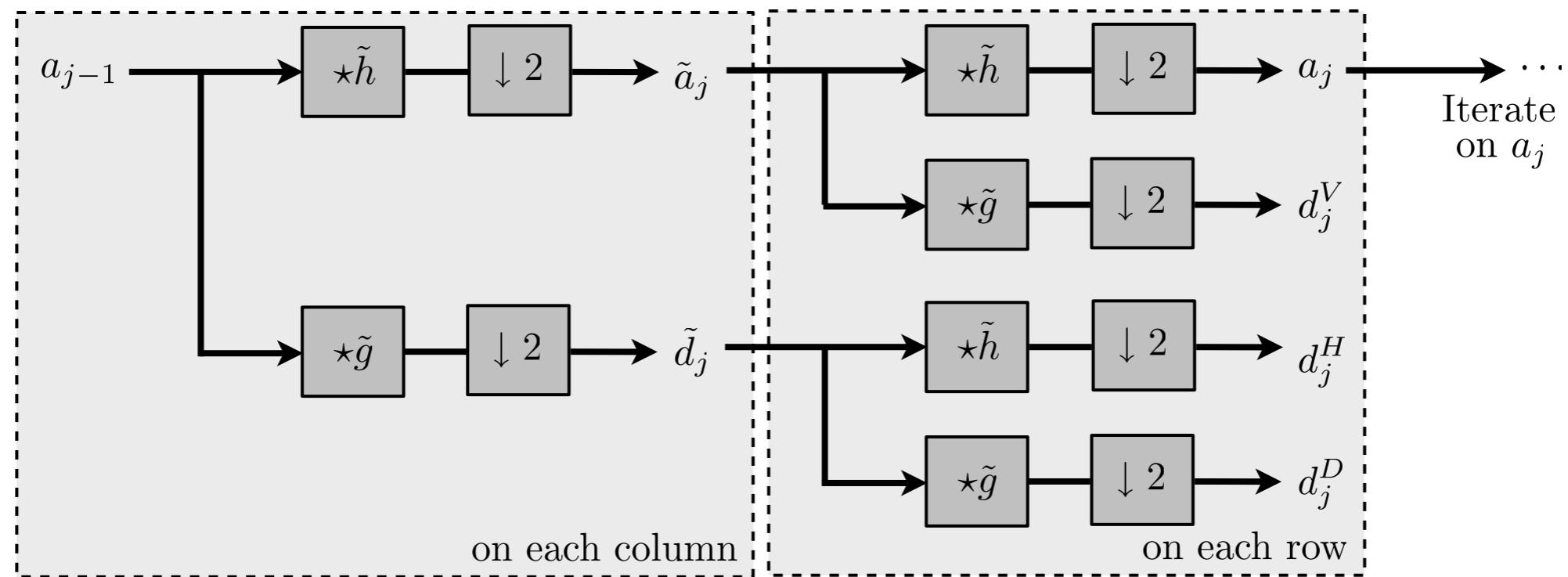
Transform on rows



Transform on columns

$$\text{sum}(\mathbf{a}_{j-1}^{\wedge 2}) = \text{sum}(\mathbf{a}_j^{\wedge 2} + \mathbf{d}_j^H{}^{\wedge 2} + \mathbf{d}_j^V{}^{\wedge 2} + \mathbf{d}_j^D{}^{\wedge 2})$$

Décomposition



Aujourd’hui

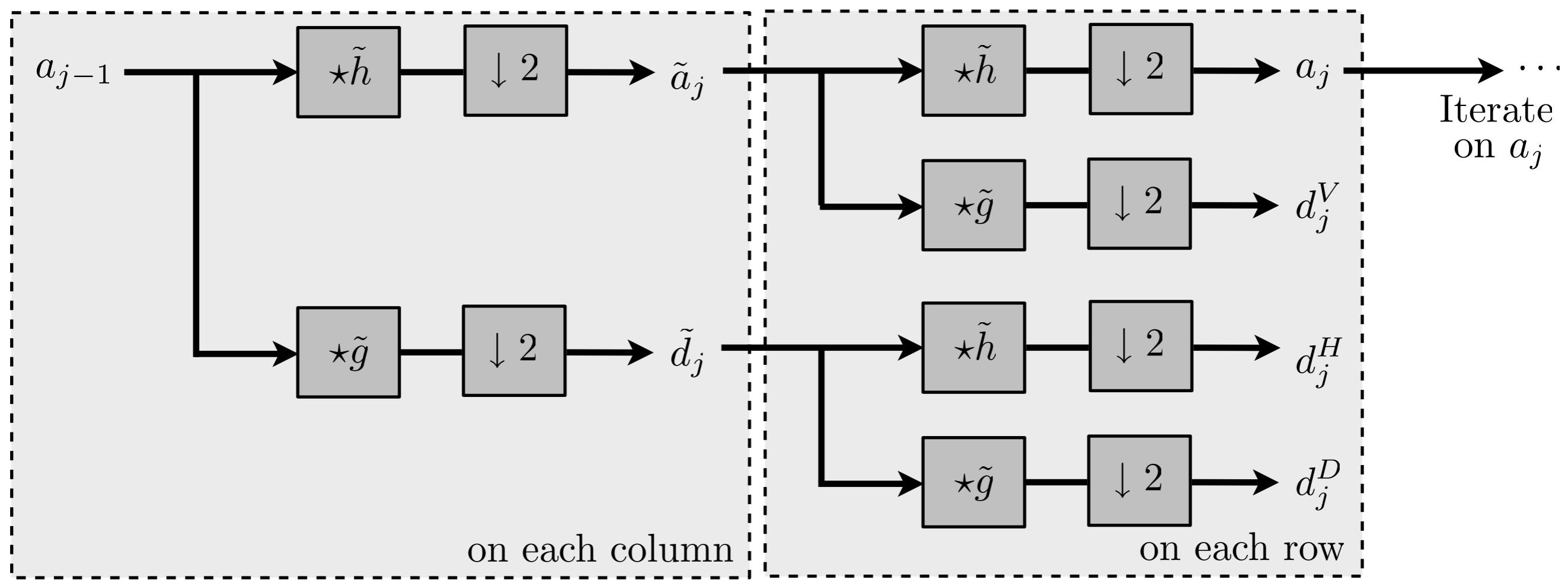
1. Décomposition - fwt2
(check conservation d'énergie)
2. Reconstruction - ifwt2
(check erreur nulle)
3. Approximation linéaire - linapprox
(MxM premiers coefficients)
4. Approximation nonlinéaire - nonlinapprox
(M^2 plus gros coefficients)



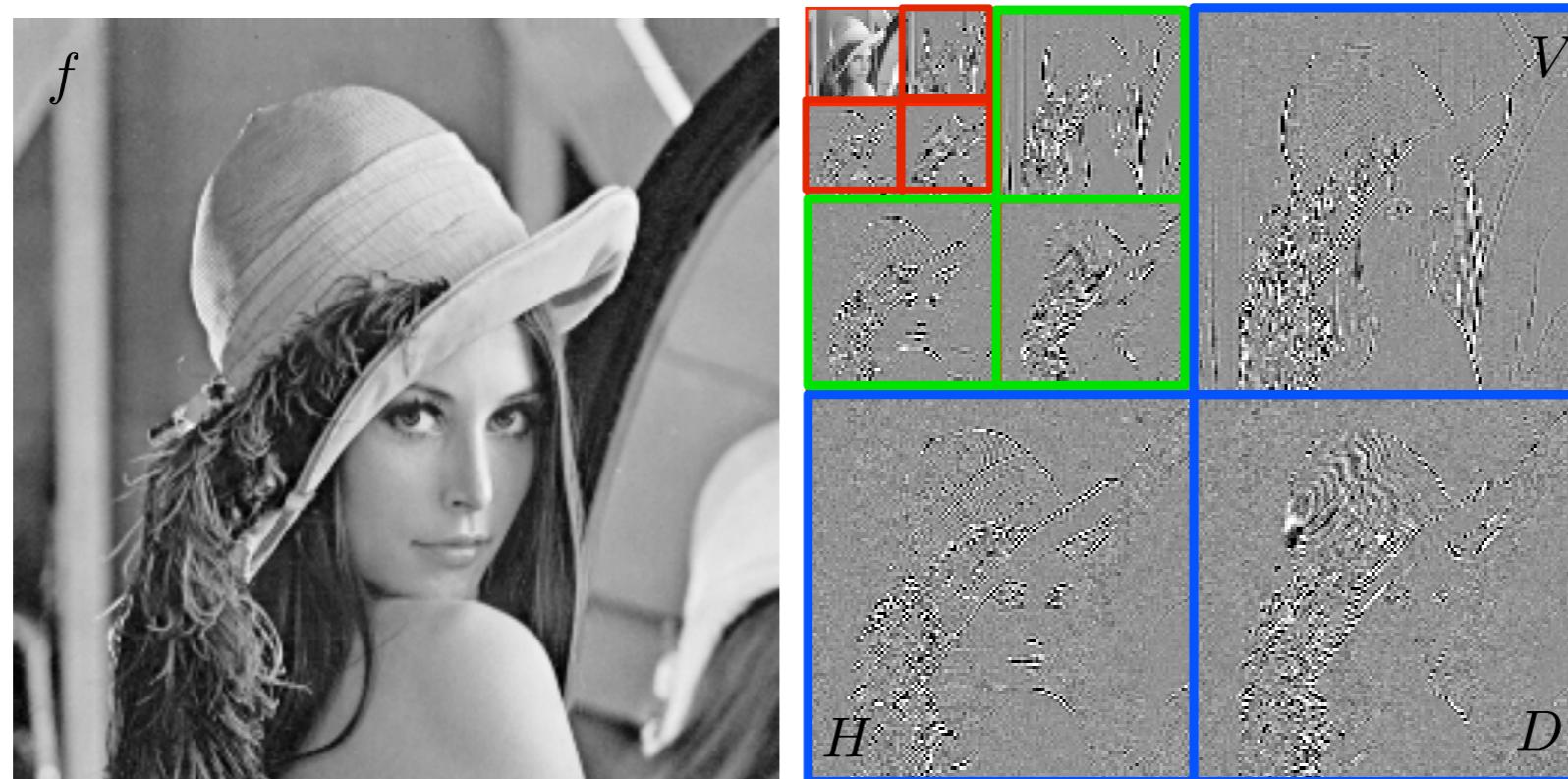
Coefficients a_j

Transform on rows

Transform on columns



Décomposition ondelettes 2D

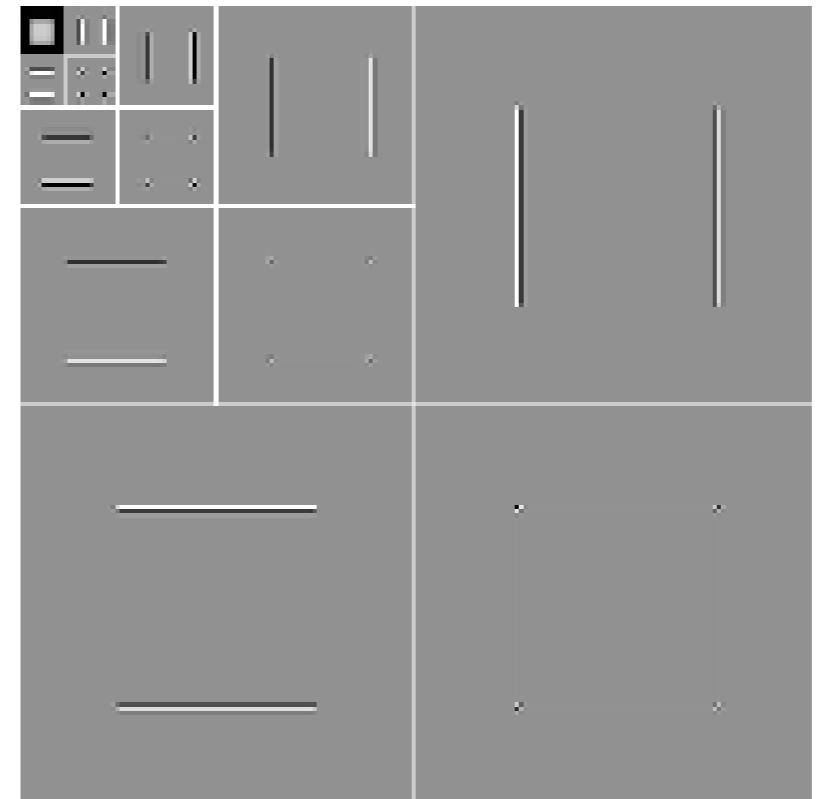
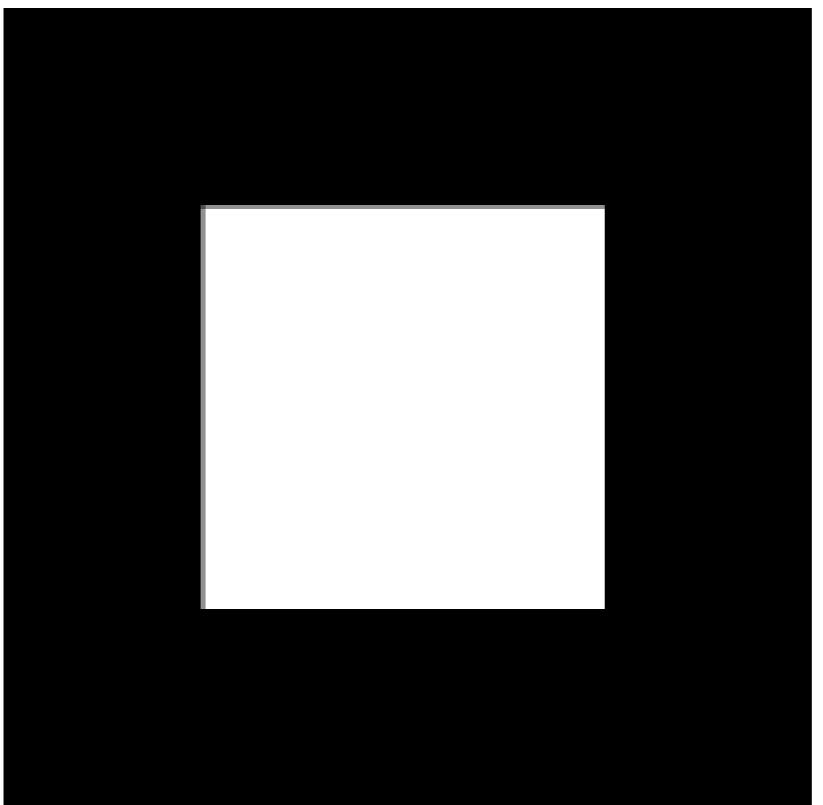
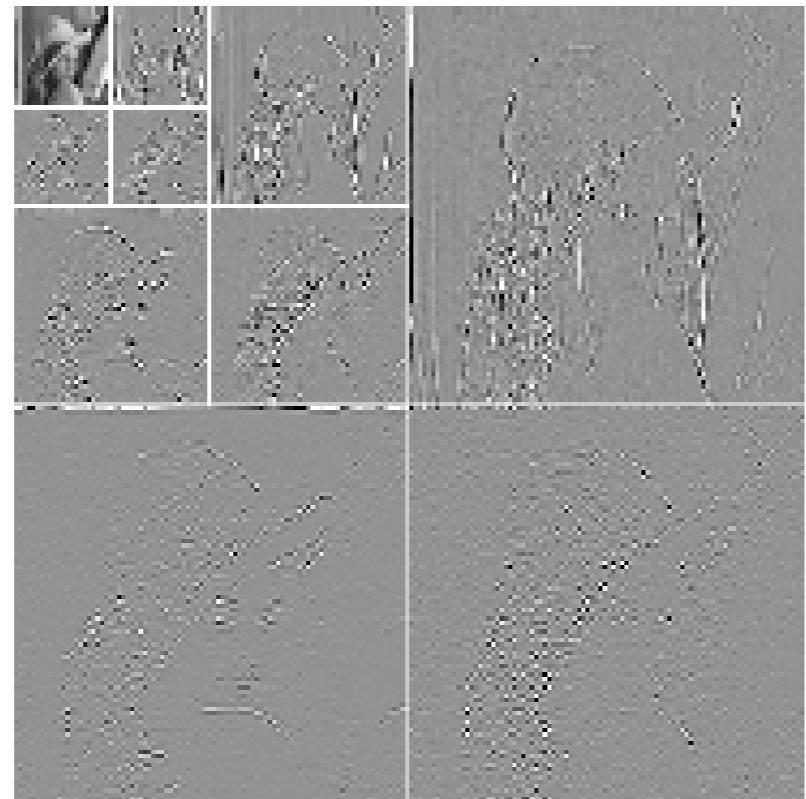


$j = -8$

$j = -7$

$j = -6$

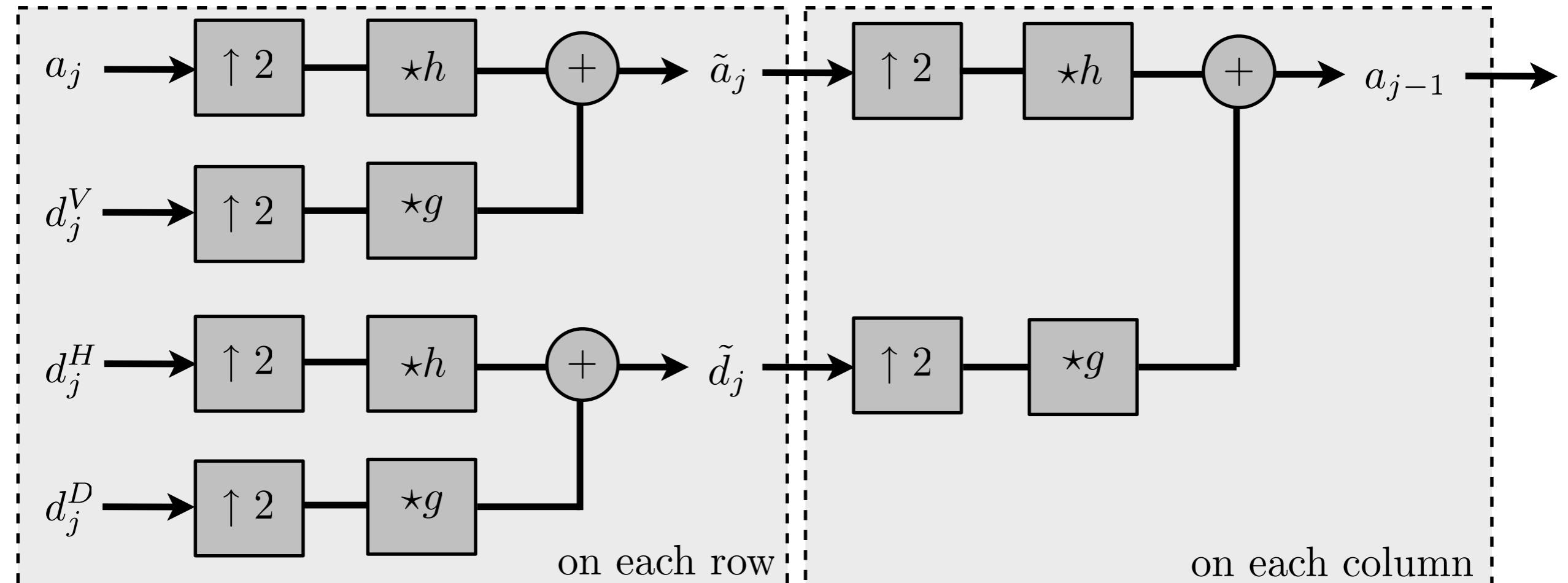
a_{L+3}	d_{L+3}^2		
d_{L+3}^1	d_{L+3}^3	d_{L+2}^2	
			d_{L+1}^2
d_{L+2}^1	d_{L+2}^3		
		d_{L+1}^1	d_{L+1}^3



Aujourd’hui

1. Décomposition - fwt2
(check conservation d'énergie)
2. Reconstruction - ifwt2
(check erreur nulle)
3. Approximation linéaire - linapprox
(MxM premiers coefficients)
4. Approximation nonlinéaire - nonlinapprox
(M^2 plus gros coefficients)

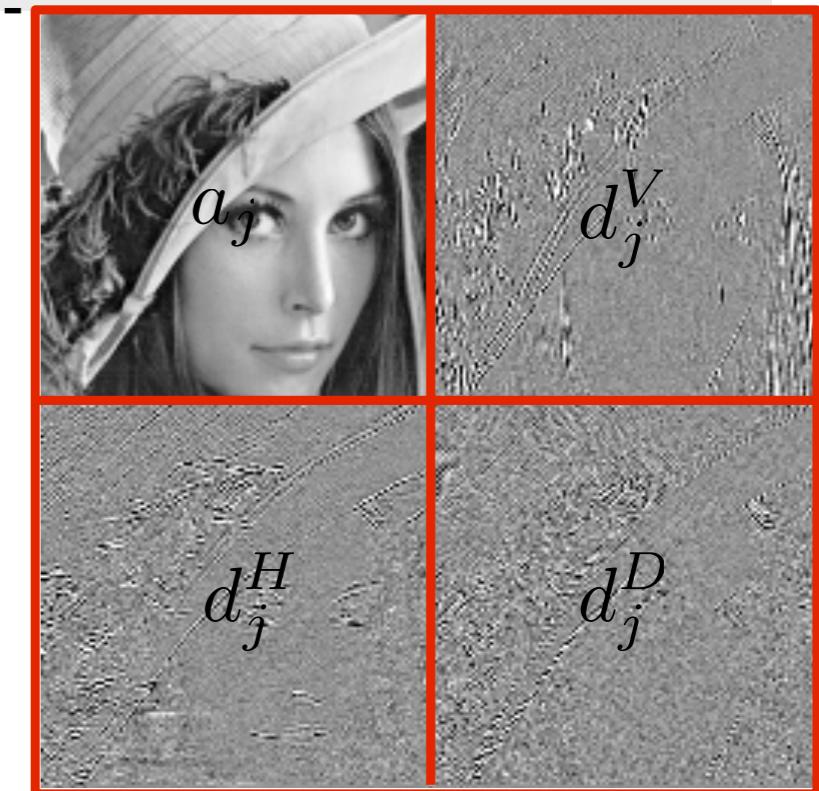
Reconstruction ondelettes 2D



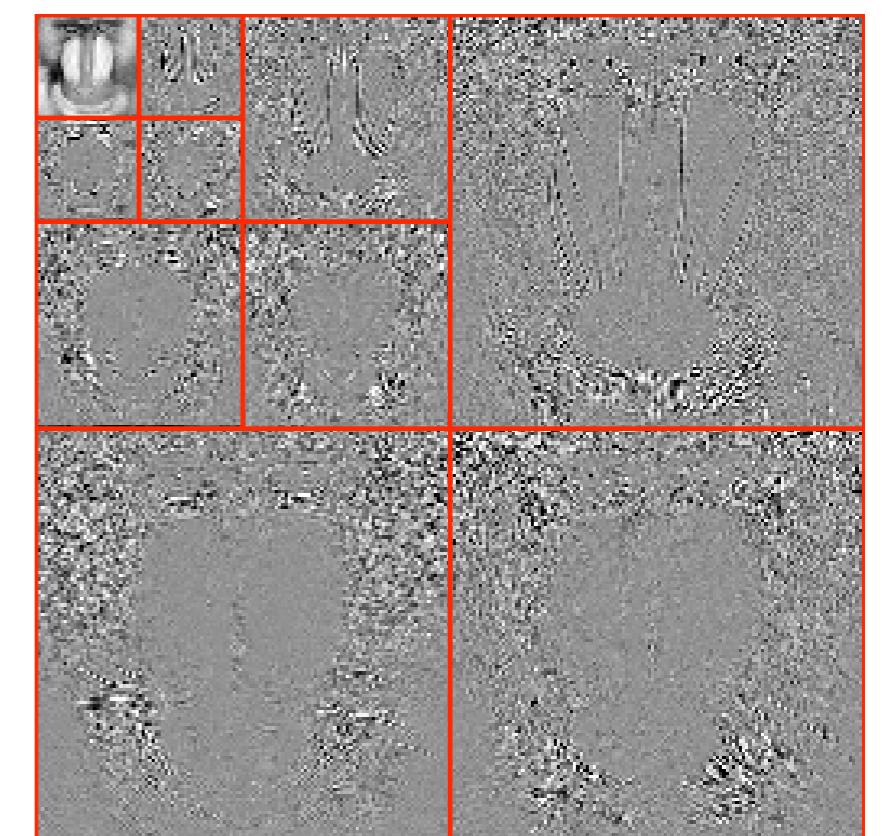
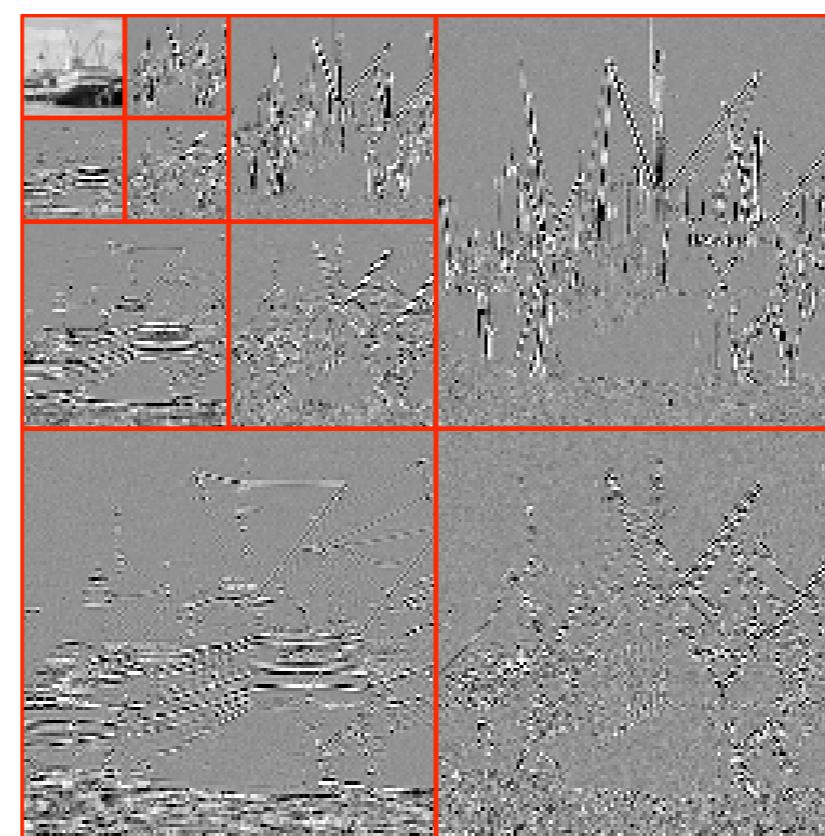
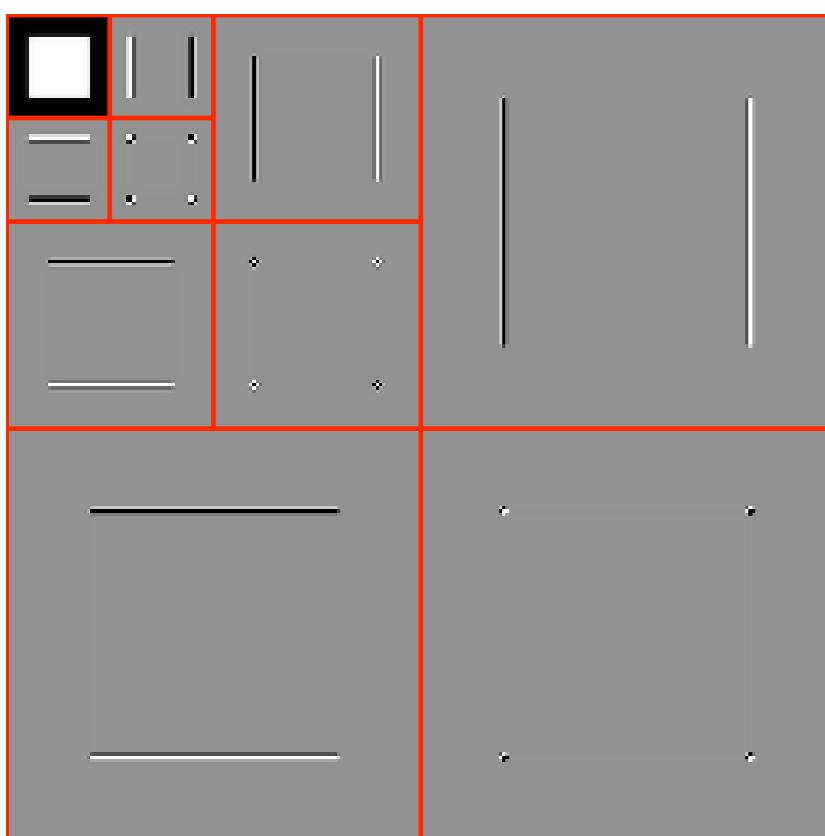
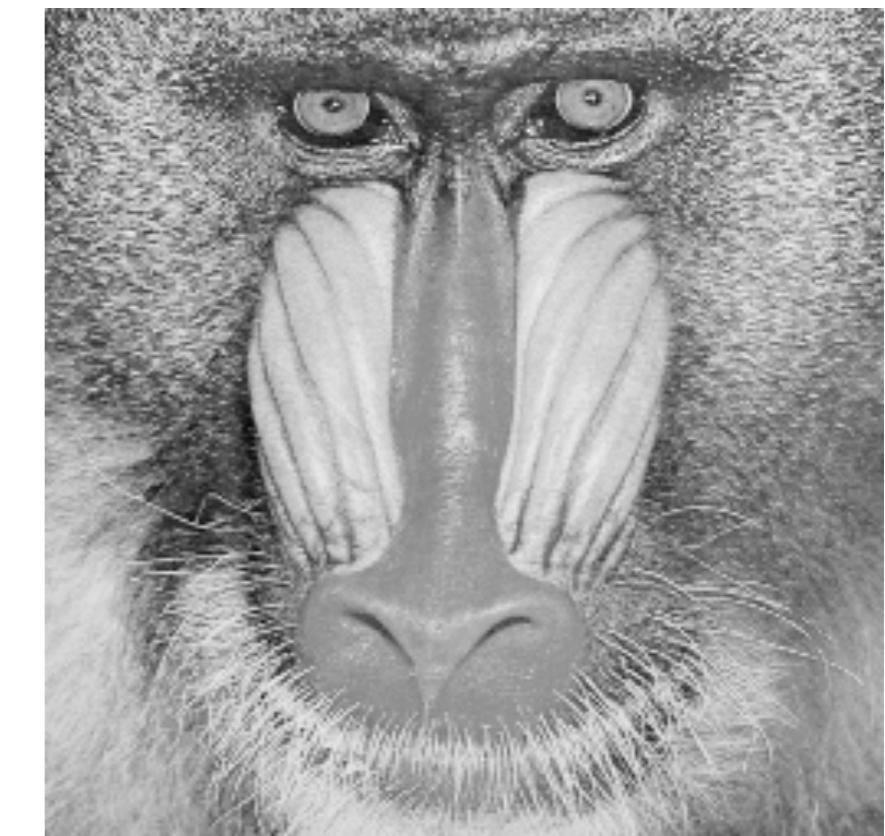
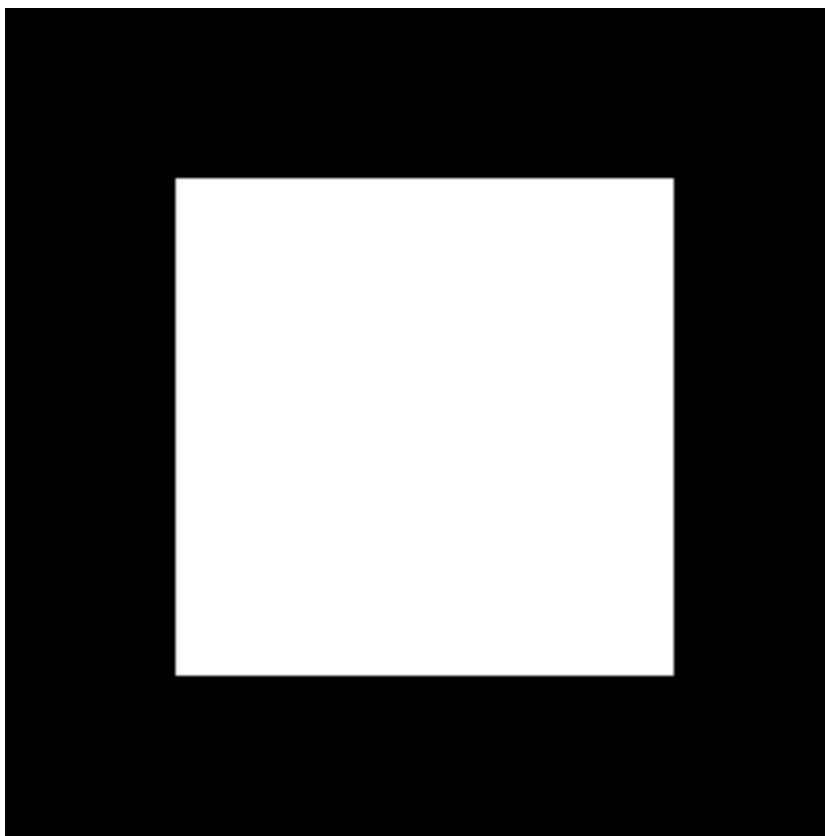
Coefficients a_j



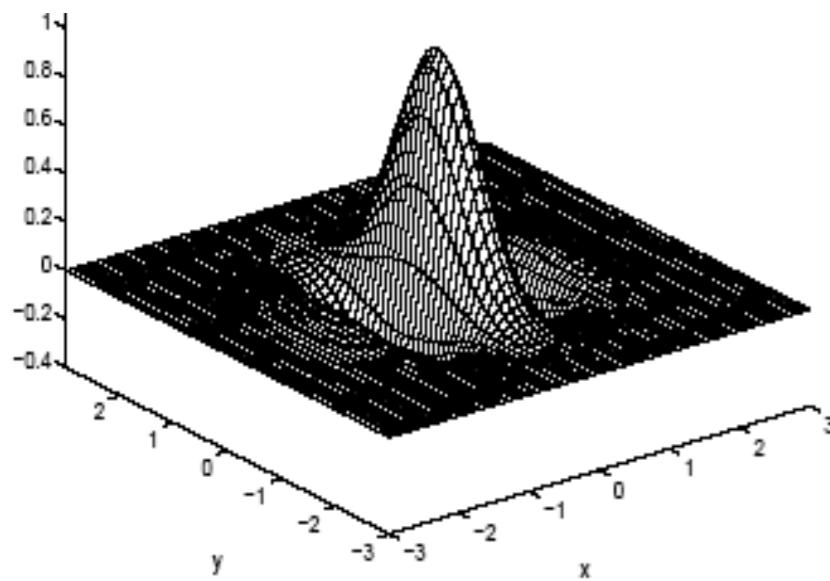
Transform on rows



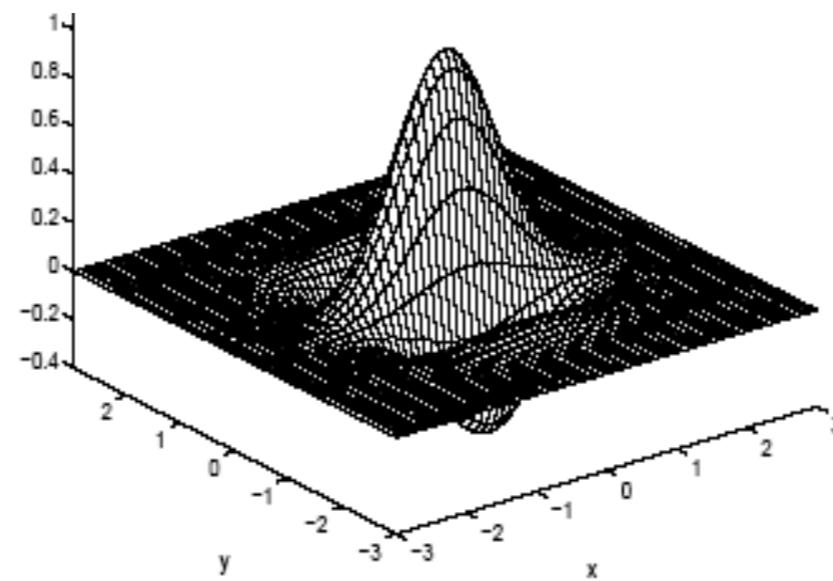
Transform on columns



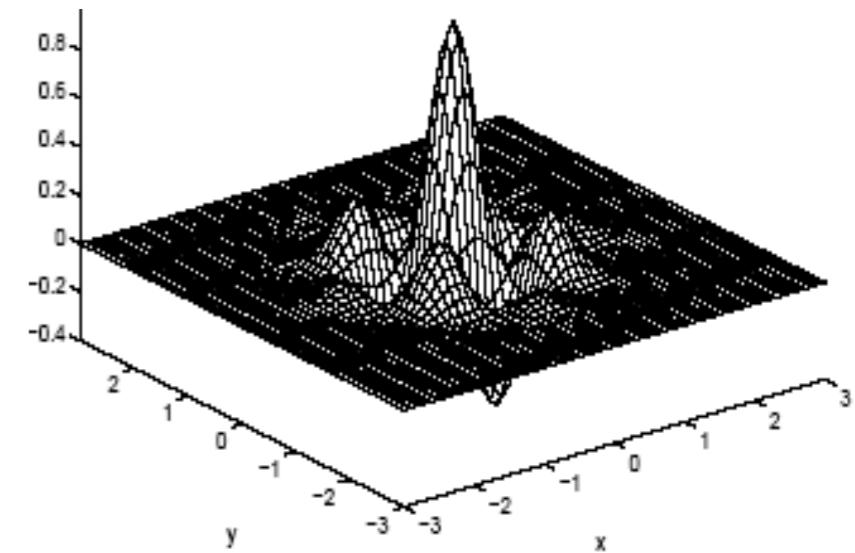
Ondelettes Daubechies 2D horizontal, vertical, diagonal



$$\psi^H$$



$$\psi^V$$

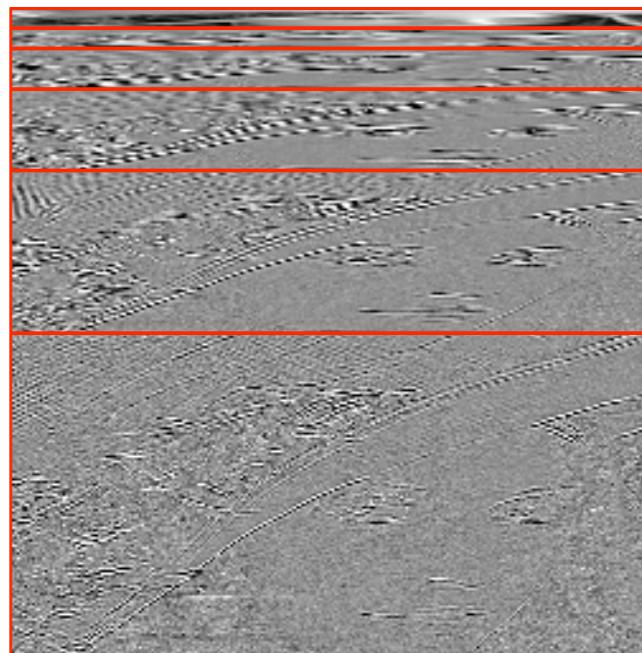


$$\psi^D$$

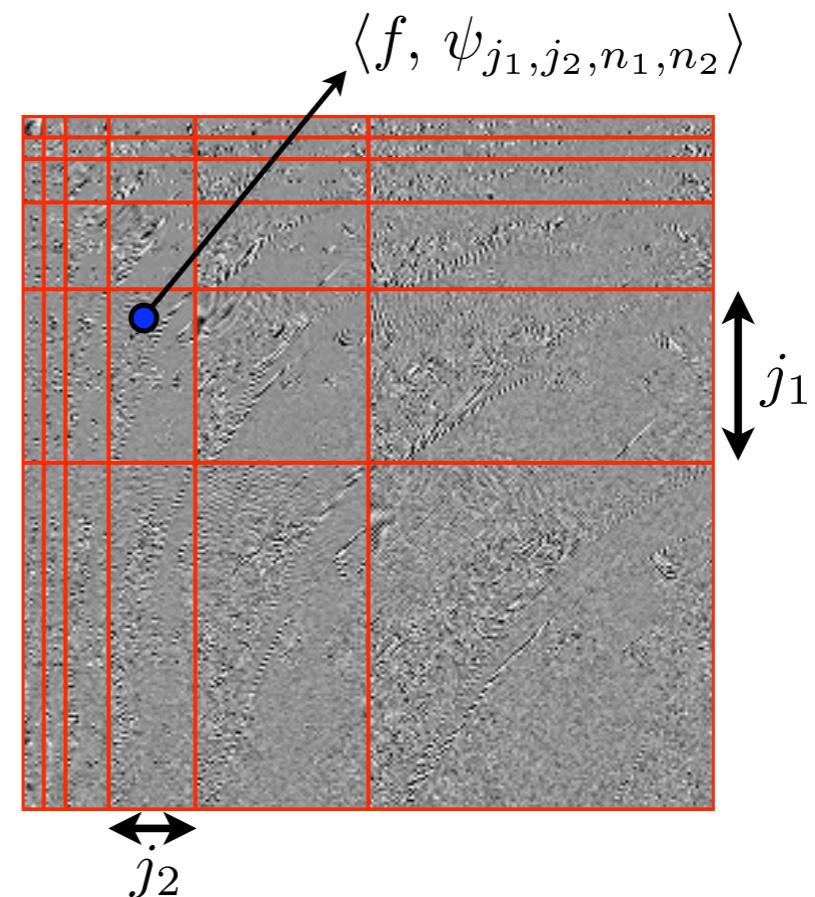
Transformée en ondelette anisotrope



Image f

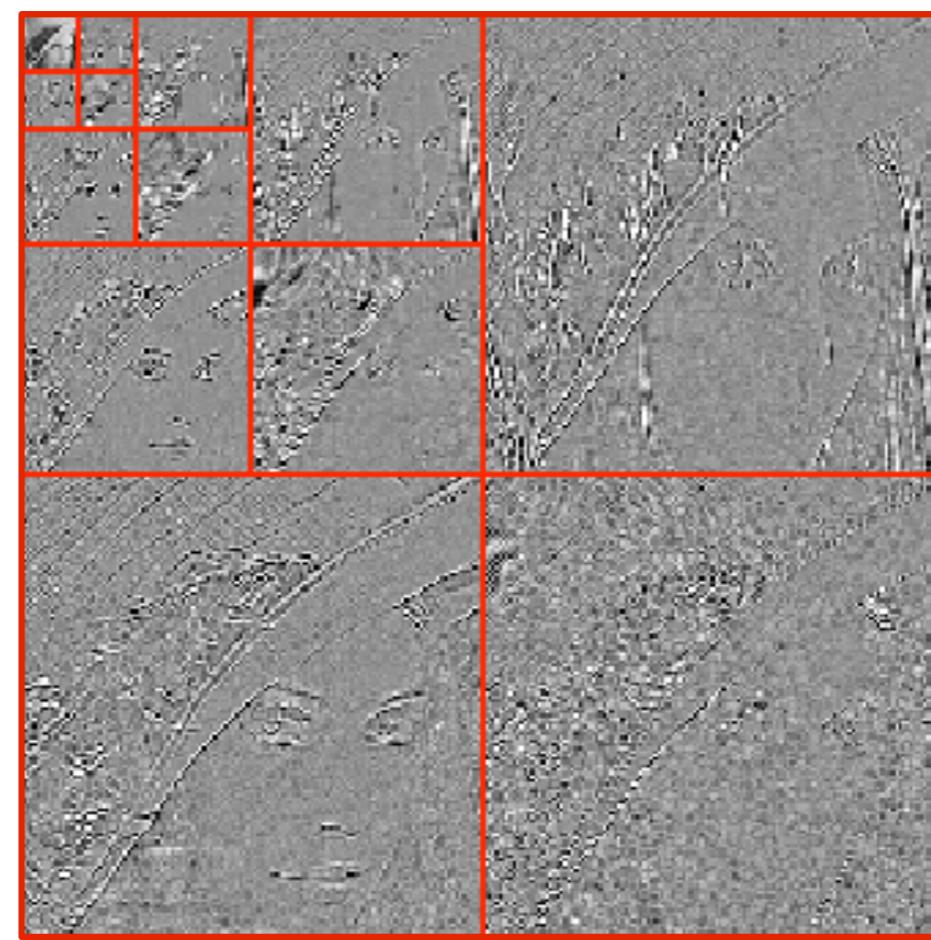
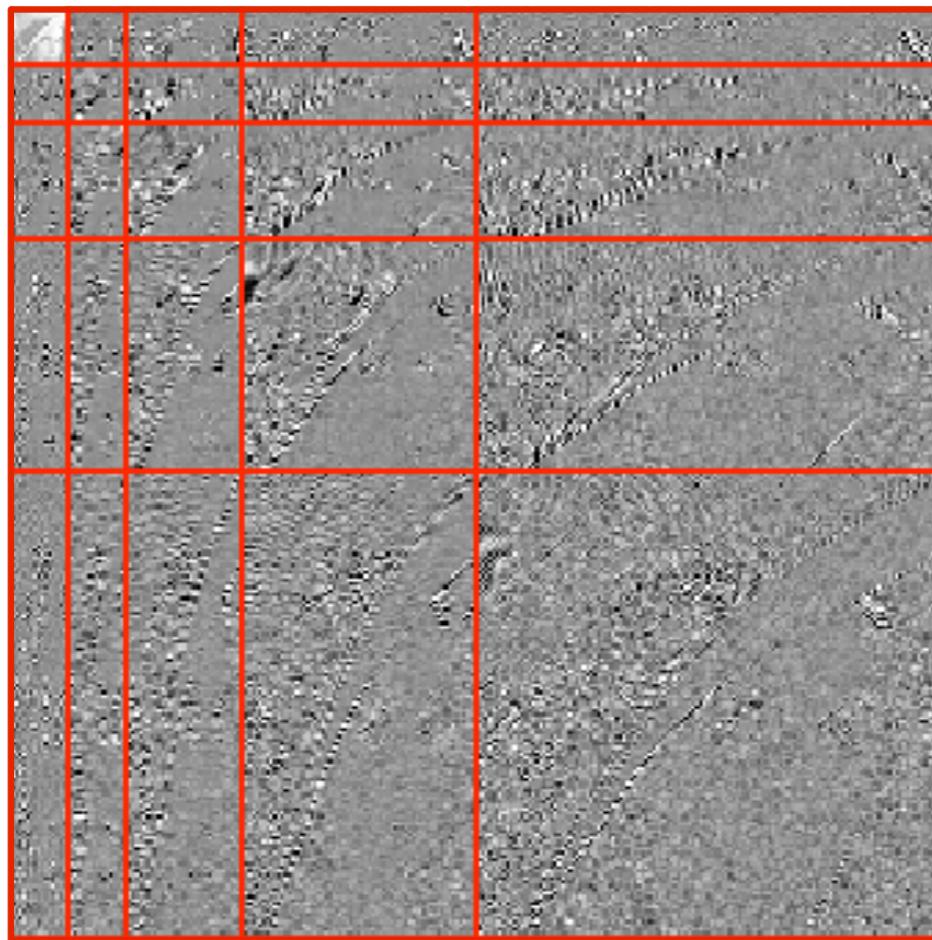


Row transform



Column transform.

Anisotropy versus isotropy



Histoire des ondelettes et de la multirésolution

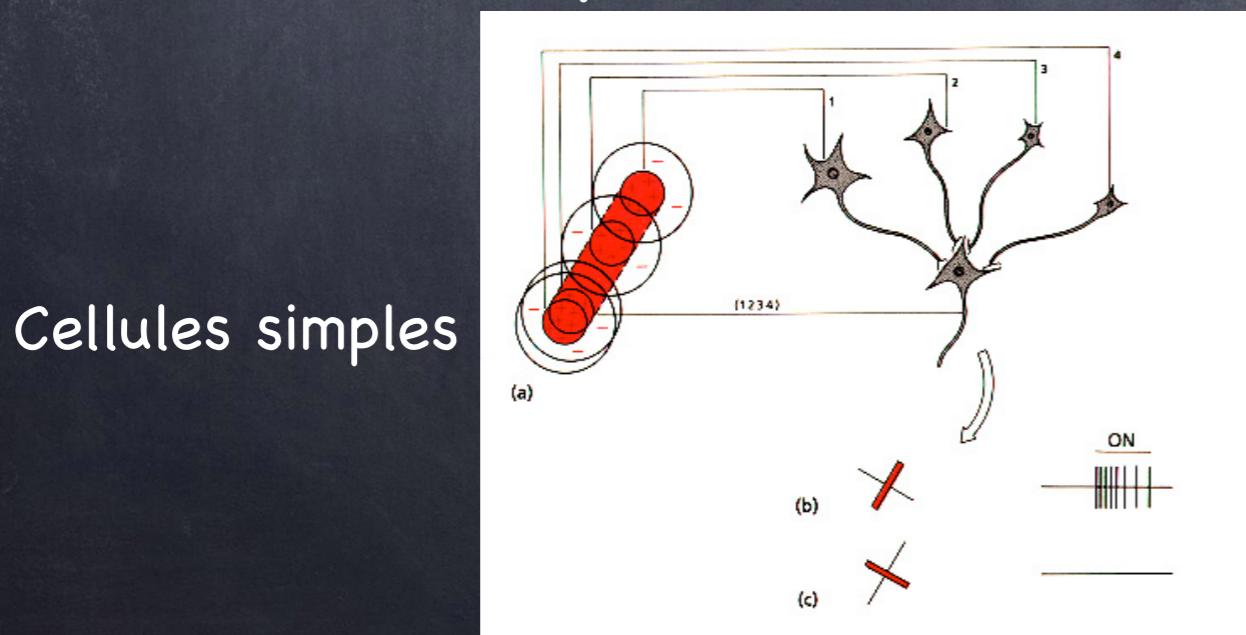
☞ Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson

Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- ⦿ Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- ⦿ Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor
(inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

Histoire des ondelettes et de la multirésolution

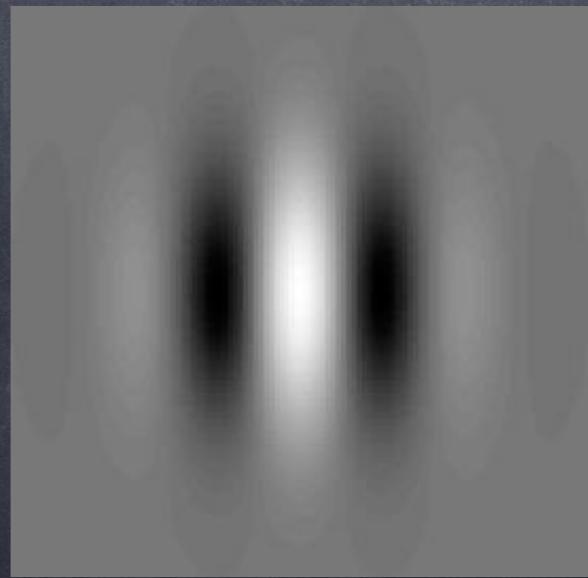
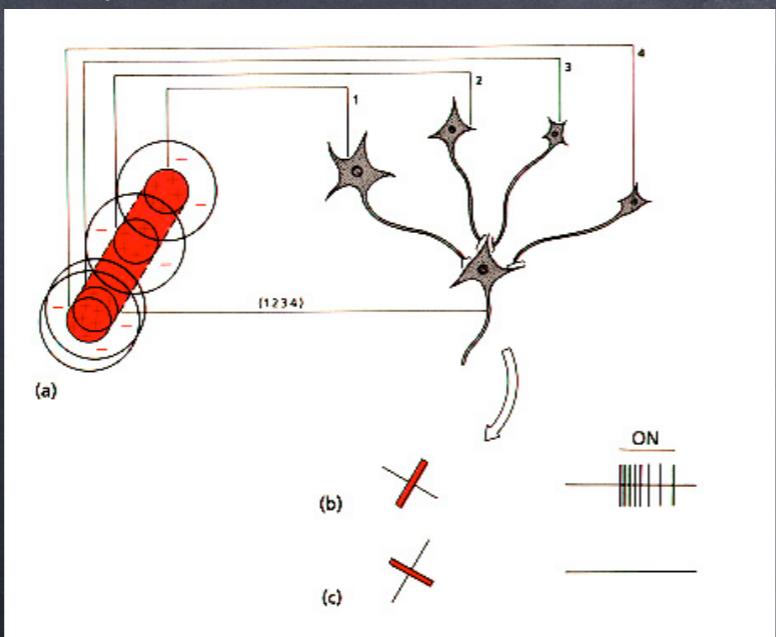
- Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) : fonctions autosimilaires de Gabor (inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)



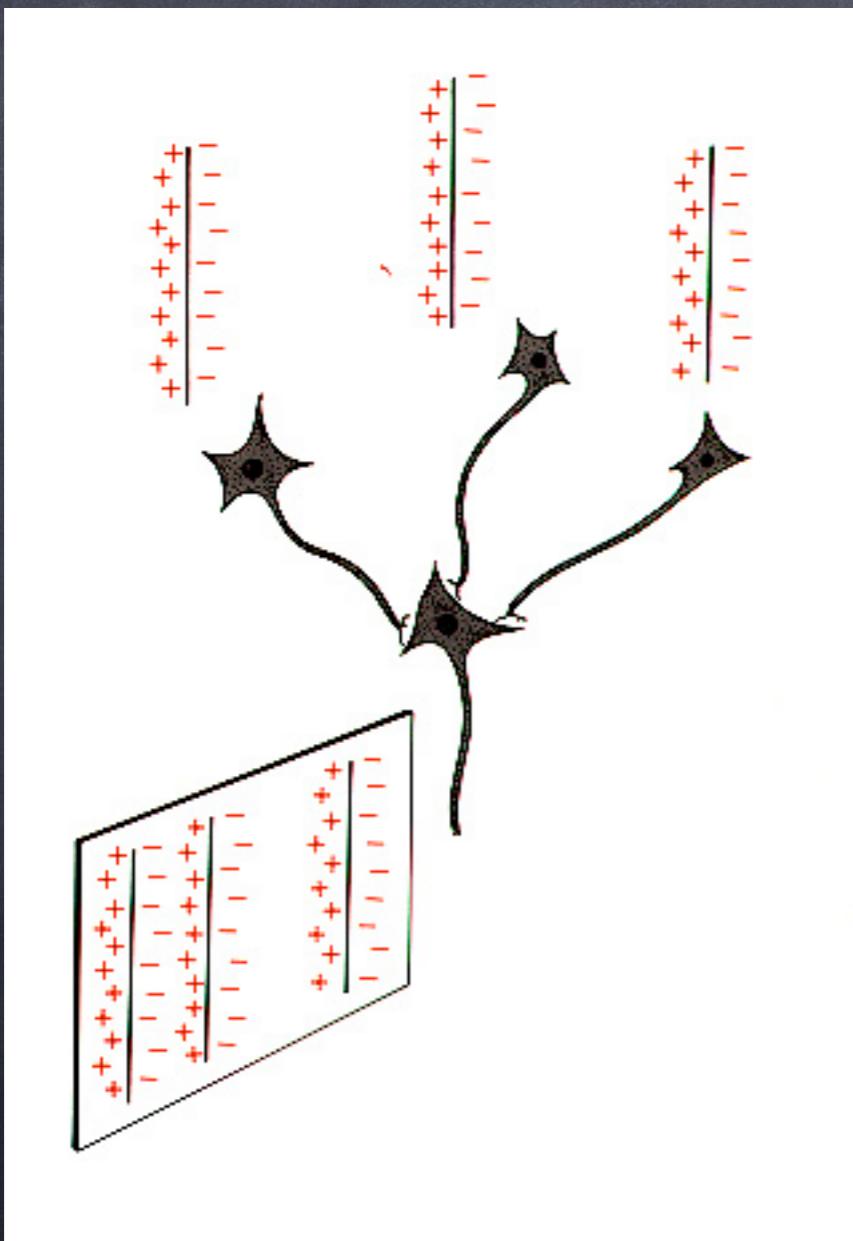
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- ⦿ Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- ⦿ Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor
(inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

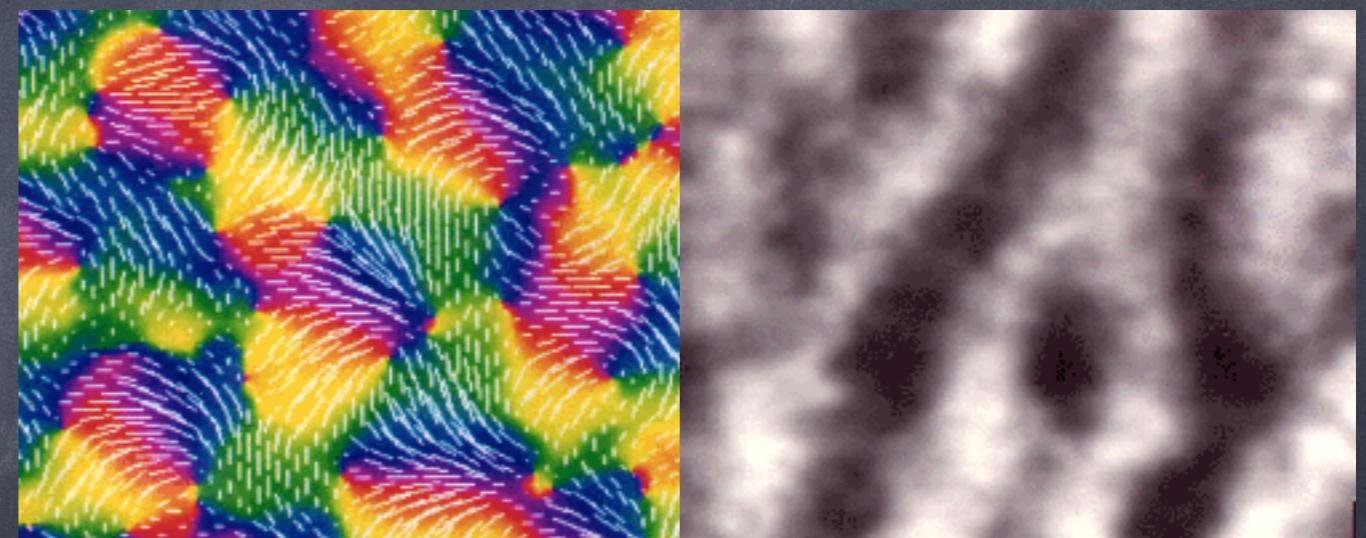
Cellules simples



Hubel & Wiesel



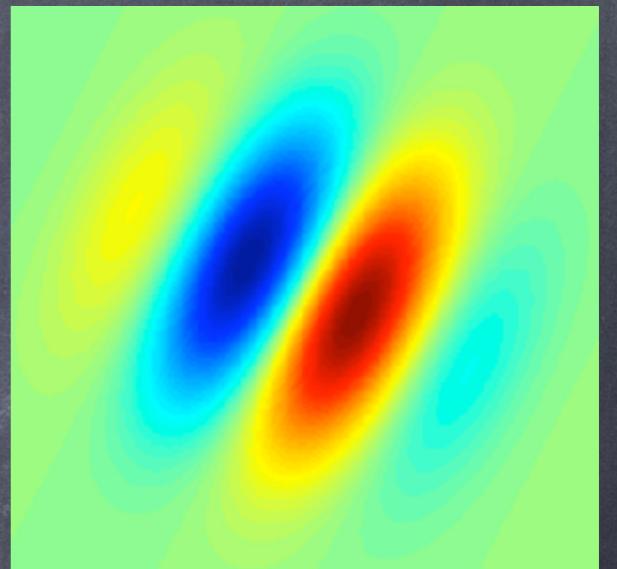
Cellules complexes



Organisation orientationnelles
du système visuel

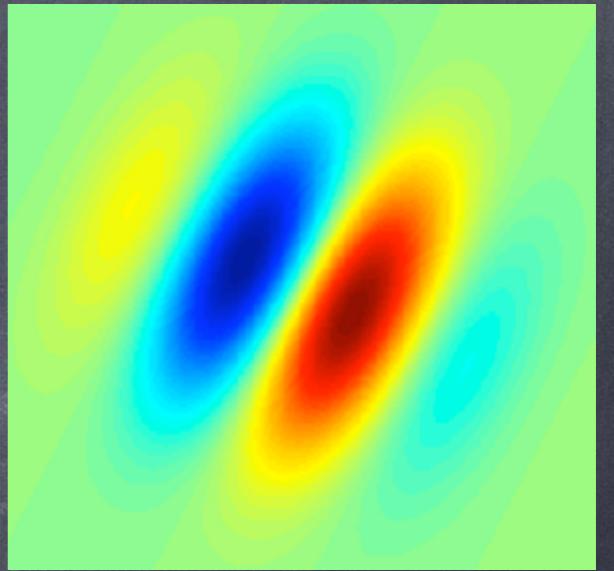
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- ⦿ Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- ⦿ Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor



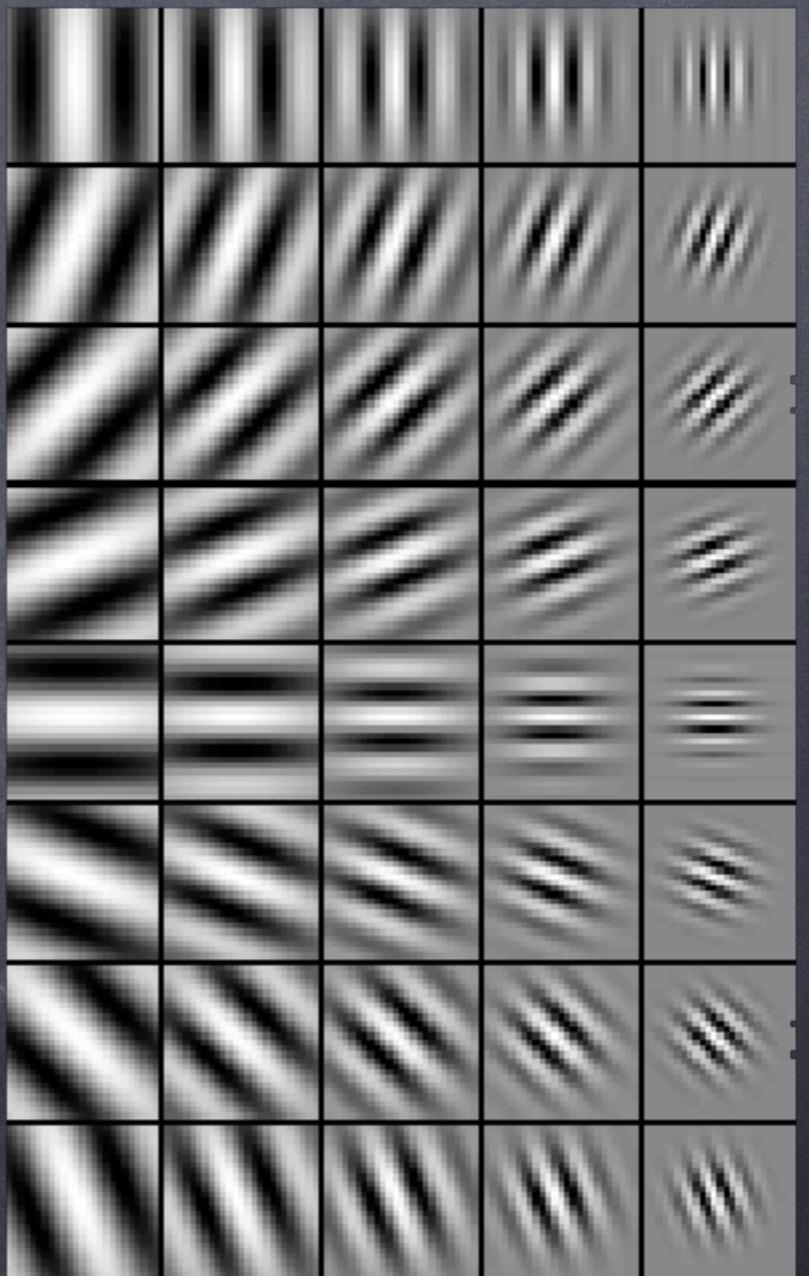
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- ⦿ Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- ⦿ Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor
- ⦿ Géophysique : chercher du pétrole sous la terre avec des ondelettes (Jean Morlet)
1975. Fenêtre glissante de Gabor.



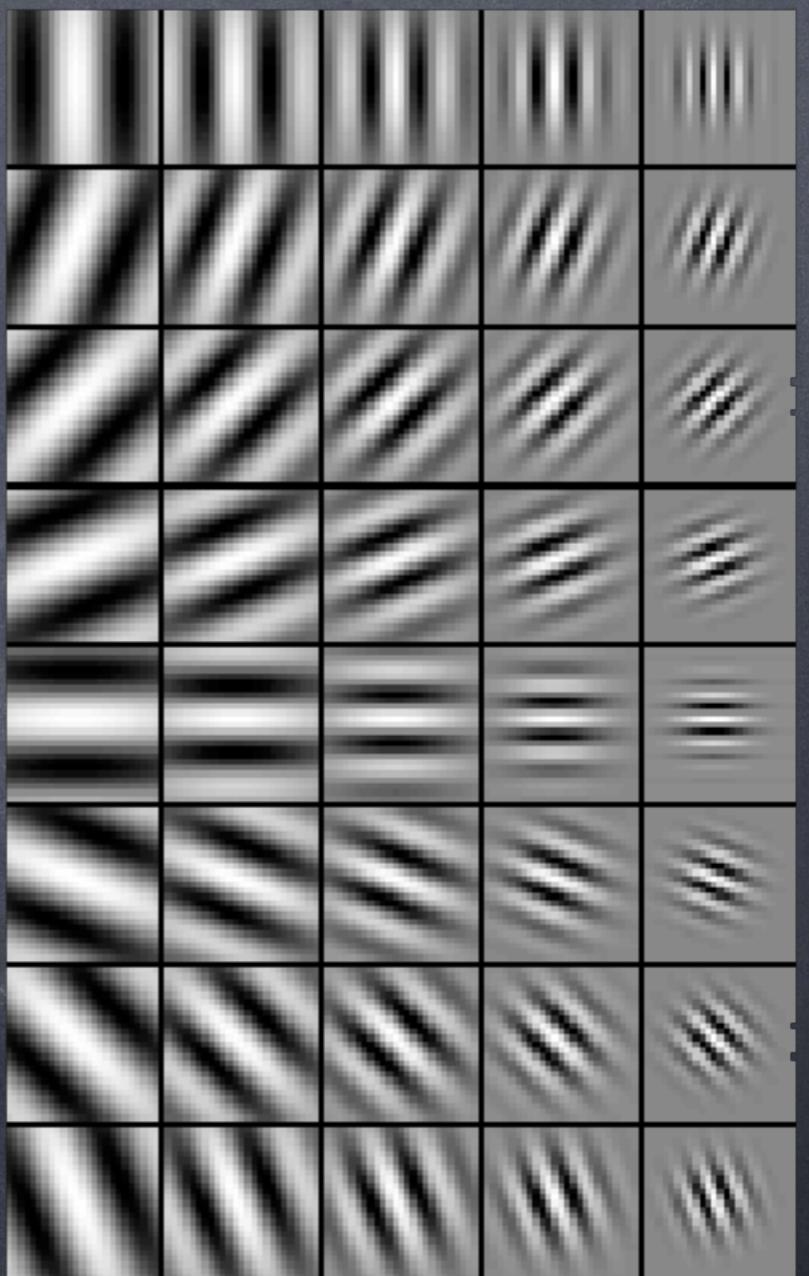
Ondelettes de Morlet

- ☛ Laisser le nombre d'oscillations constant



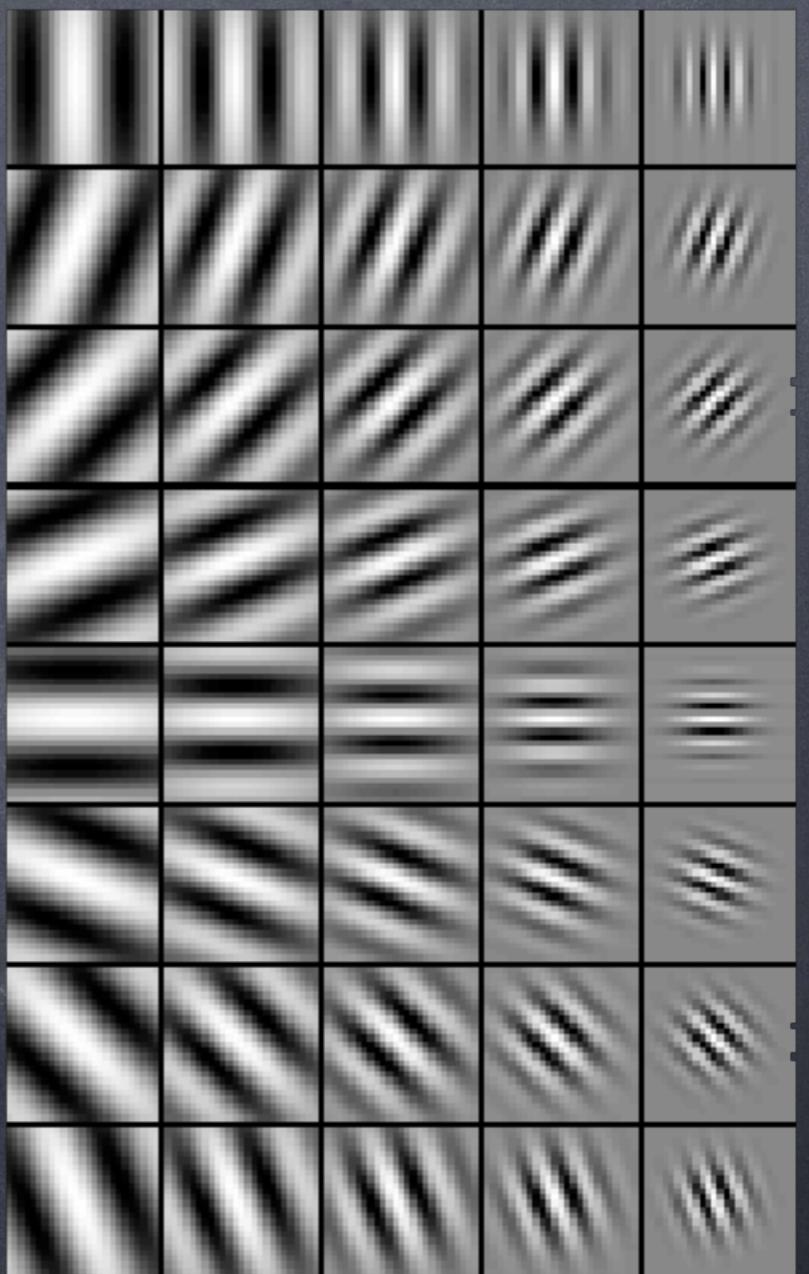
Ondelettes de Morlet

- Laisser le nombre d'oscillations constant
- Changer la taille des fenêtres (étirer et comprimer comme un accordéon)



Ondelettes de Morlet

- ☛ Laisser le nombre d'oscillations constant
- ☛ Changer la taille des fenêtres (étirer et comprimer comme un accordéon)
- ☛ Nom: ondelettes de Gabor ou ondelettes de forme constante



Le microscope mathématique

⌚ Les ondelettes

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- Par construction:

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- Par construction:
 - Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux -> rapide)

Ondelettes 1D

- ⦿ On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- ⦿ Par construction:
 - ⦿ Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux -> rapide)
 - ⦿ Fonctions généralisables à plusieurs échelles/résolutions pour pouvoir gérer les zones homogènes et les changements abrutes

Ondelettes 1D

- ⦿ On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- ⦿ Par construction:
 - ⦿ Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux -> rapide)
 - ⦿ Fonctions généralisables à plusieurs échelles/résolutions pour pouvoir gérer les zones homogènes et les changements abrutes
 - ⦿ Fonctions normalisées, intégrale sous la courbe 1 (conservation d'énergie)

Ondelettes 1D

- ⦿ On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- ⦿ Par construction:
 - ⦿ Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux -> rapide)
 - ⦿ Fonctions généralisables à plusieurs échelles/résolutions pour pouvoir gérer les zones homogènes et les changements abrutes
 - ⦿ Fonctions normalisées, intégrale sous la courbe 1 (conservation d'énergie)
 - ⦿ Orthogonales par rapport à leurs versions translatées

Les ondelettes – microscope mathématique

- ⦿ Avant Mallat, il n'y avait pas de concept. Tout était construit *et* fait à la main
(Haar, Sinus cardinal, Spline cubique, etc.)

Les ondelettes – microscope mathématique

- ⦿ Avant Mallat, il n'y avait pas de concept. Tout était construit et fait à la main (Haar, Sinus cardinal, Spline cubique, etc.)
- ⦿ Les ondelettes analyse le signal en augmentant progressivement l'échelle d'un facteur 2 -> 2 fois plus d'ondelettes à chaque échelle -> double la fréquence. Donc, le théorème d'échantillonnage est respecté

Les ondelettes – une drôle de famille

☛ Père : fonction d'échelle

Les ondelettes – une drôle de famille

- ➊ Père : fonction d'échelle
- ➋ Mère : Ondelette mère

Les ondelettes – une drôle de famille

- ⦿ Père : fonction d'échelle
- ⦿ Mère : Ondelette mère
- ⦿ Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)

Les ondelettes – une drôle de famille

- ⦿ Père : fonction d'échelle
- ⦿ Mère : Ondelette mère
- ⦿ Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)
- ⦿ Conclusion : Le père sert à rien dans la reproduction familiale!

Les ondelettes – une drôle de famille

- ⦿ Père : fonction d'échelle
- ⦿ Mère : Ondelette mère
- ⦿ Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)
- ⦿ Conclusion : Le père sert à rien dans la reproduction familiale!
- ⦿ Reproduction amibes:
“Les amibes sont des protozoaires de l'environnement ; leur reproduction est asexuée par fission binaire.”



Ondelettes “sans ondelettes”

- ➊ En pratique, pas besoin de père ou de mère!

Ondelettes “sans ondelettes”

- ⦿ En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- ⦿ Besoin que du filtre passe-bas h

Ondelettes “sans ondelettes”

- ⦿ En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- ⦿ Besoin que du filtre passe-bas h
- ⦿ À chaque échelle,

Ondelettes “sans ondelettes”

- ⦿ En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- ⦿ Besoin que du filtre passe-bas h
- ⦿ À chaque échelle,
 - ⦿ filtre passe-bas forme une représentation grossière du signal

Ondelettes “sans ondelettes”

- ⦿ En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- ⦿ Besoin que du filtre passe-bas h
- ⦿ À chaque échelle,
 - ⦿ filtre passe-bas forme une représentation grossière du signal
 - ⦿ filtre passe-haut forme une représentation détaillée du signal

Ondelettes

- Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose

Ondelettes

- ➊ Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose
- ➋ Déterminez les propriétés de la transformation

Ondelettes

- ⦿ Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose
- ⦿ Déterminez les propriétés de la transformation
- ⦿ Accélérez les calculs

Ondelettes

- ⦿ Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose
- ⦿ Déterminez les propriétés de la transformation
- ⦿ Accélérez les calculs
- ⦿ La transformée en ondelettes d'un signal de taille N demande le calcul de $O(N)$ coefficients