

一 填空题(每小题4分, 共32分)

1. 设有 n 个球,每个球都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 $N(N \geq n)$ 个格子的每一个格子中,则至少有2个球落到同一个格子的概率是_____.

2. 已知离散型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 0.7, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$,
则随机变量 X 的分布律为_____.

3. 有朋自远方来访,他乘火车、轮船、飞机来的概率分别是0.3,0.2,0.5,如果他乘火车、轮船来的话,迟到的概率分别是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$,而乘飞机不会迟到,则他迟到的概率是_____.

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,则 $EX =$ _____.

5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 \leq x \leq 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \theta > 0, X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的简单随机样本,则参数 θ 的极大似然估计为_____.

6. 对圆的直径 d 进行近似测量,设其值在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布,则其面积 $V = \pi(\frac{d}{2})^2$ 的均值为_____.

7. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$,则随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 为_____.

8. 设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 为来自于正态总体 $N(0, 25)$ 的简单随机样本,则当 $c =$ _____时,随机变量 $Y = c[(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2]$ 服从 χ^2 分布.

二 选择题(每小题4分, 共32分)

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,则 $P\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\} =$ _____.

(A) 0 (B) 0.25 (C) 0.5 (D) 1

2. 对事件 A, B ,下列命题正确的是_____.

(A) 如果 $P(A + B) = 1$, 则 $P(A) + P(B) = 1$
(B) 如果 $P(AB) = 0$, 则 $P(A)P(B) = 0$
(C) 如果 A, B 相容, 则 \bar{A}, \bar{B} 也相容
(D) 如果 A, B 互逆, 则 \bar{A}, \bar{B} 也互逆

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_{10} 为总体 $X \sim N(-1, 2^2)$ 的一个样本, \bar{X} 为样本均值, 则 \bar{X} 的均值和方差分别为_____.

- (A) $E\bar{X} = -1, D\bar{X} = 4$ (B) $E\bar{X} = 1, D\bar{X} = 4$
(C) $E\bar{X} = -1, D\bar{X} = 0.4$ (D) $E\bar{X} = 1, D\bar{X} = 0.4$

4. 从区间 $(0, 1)$ 中随机取出两个数, 则这两个数的和小于 $\frac{3}{5}$ 的概率是_____.

- (A) $\frac{9}{25}$ (B) $\frac{16}{25}$ (C) $\frac{9}{50}$ (D) $\frac{41}{50}$

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0^2 已知, 在显著性水平 α 下检验假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则下列说法正确的是_____.

- (A) 犯第一类错误的概率为 α (B) 犯第一类错误的概率为 $1 - \alpha$
(C) 犯第二类错误的概率为 α (D) 犯第二类错误的概率为 $1 - \alpha$

6. 设 X 是一个标准正态随机变量, 其 α 分位点记为 Z_α , 即

$$\Phi(Z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha,$$

则下列结论中:

$$(1) \Phi(Z_\alpha) + \Phi(Z_{1-\alpha}) = 0; (2) Z_\alpha + Z_{1-\alpha} = 0; (3) P(|X| < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha,$$

正确结论的个数是_____.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量序列, 且均服从参数为 p 的两点分布, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则有_____.

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x); (B) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - p}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x); (D) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

8. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, \bar{X} 为样本均值, μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $[a(X_1, X_2, \dots, X_n), b(X_1, X_2, \dots, X_n)]$, 则该区间的含义是_____.

- (A) $P\{a(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \bar{X} \leq b(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$
(B) $P\left\{a(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq b(X_1, X_2, \dots, X_n)\right\} = 1 - \alpha$
(C) $P\{a(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \mu \leq b(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = \alpha$
(D) $P\{a(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \mu \leq b(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$

三 (本题12分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(1)求 (X, Y) 分别关于 X, Y 的边沿密度函数;

(2)求 $P(X + Y \leq 2)$.

[四] (本题学《概率统计A》的学生做, 学《概率统计B》的学生不做, 本题12分)

设随机过程 $X(t) = V \cos(\omega t)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 ω 是常数, V 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布,

(1)当 V 取值 $v = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ 时相应的样本函数是什么?

(2)求 $X(t)$ 在 $t = \frac{\pi}{3\omega}$ 时的一维概率分布函数和一维概率密度函数.

四 (本题学《概率统计B》的学生做, 学《概率统计A》的学生不做, 本题12分)

设随机变量 X 服从 $(0, 3)$ 上的均匀分布, 求随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度.

[五] (本题学《概率统计A》的学生做, 学《概率统计B》的学生不做, 本题12分)

设随机过程 $Z(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$, 其中 ω 是常数, X 和 Y 是相互独立的标准正态随机变量, 求:

(1) 求 $Z(t)$ 的均值函数

(2) 求 $Z(t)$ 的自相关函数

(3) 判断 $Z(t)$ 是否为广义平稳过程并说明理由;

五 (本题学《概率统计B》的学生做, 学《概率统计A》的学生不做, 本题12分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本.

(1)求总体均值 EX 和总体方差 DX ;

(2)求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(3)判断 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计;