

第十一章：随机过程基本概念

描述随机现象

1、随机变量

定义：

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{e\}$

若对每一个试验结果 e ，都有一个确定的数 $X(e)$ 与之对应，

则称 $X = X(e)$ 是此样本空间上的一个随机变量

2、二维随机变量 (X, Y)

3、n维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n)

4、随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

随机过程定义:

给定参数集 $T \subset (-\infty, +\infty)$ 如果对于每个 $t \in T$

都对应随机变量 $X(t) = X(e, t)$

则称随机变量族 $\{X(t), t \in T\}$ 为随机过程.

例1 以 $N(t)$ 表示某电话交换台在时段 $[0,t)$ 内接到的呼叫次数,

那么,对于固定的 t , $N(t)$ 是一个随机变量.

对于一切 $t \in [0,+\infty)$

$\{N(t), t \in [0,+\infty)\}$ 是一个随机过程

由定义得

(1)对任意给定的 $t_1 \in T$,

$X(t_1) = X(e, t_1)$ 是一个随机变量,

称为随机过程在 $t = t_1$ 时的状态变量,
简称状态.

(2)对于 Ω 中的每一 e_0 ,

$X(e_0, t) = x(t)$ 是仅依赖于 t 的函数,

称为随机过程的样本函数,它是随机过程的一次物理实现,或对应于 e_0 的轨道.

函数值集合 $\{X(e, t) \mid e \in \Omega, t \in T\}$

称为随机过程的状态空间. 记为 S .

它是二元函数 $X(e, t)$ 的值域,

参数 t 的取值范围 T 称为参数空间

如例1中:

以 $N(t)$ 表示某电话交换台在时段 $[0, t)$ 内接到的呼叫次数,

$$S = \{1, 2, \dots, \} \quad T = \{t \mid t \geq 0\}$$

再看几个例子:

例2

在一条自动生产线上检验产品质量,每次检验一个,区分正品或次品.那么,整个检验的样本空间 $\Omega=\{e\}=\{e_1,e_2\}$, e_1 =正品, e_2 =次品,

为了描述检验的全过程,引入二元函数

$$X(e,t)=\begin{cases} 0, & \text{第}t\text{次查出正品,} \\ t, & \text{第}t\text{次查出次品.} \end{cases} \quad t \in T \equiv \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

则二元函数 $X(e,t)$ 就是一个随机过程.

$$S = \{0, 1, 2, \dots\} \quad T = \{1, 2, \dots\}$$

例3 设 $X(e)$ 与 $Y(e)$ 是相互独立的标准正态变量.

$$Z(e, t) = [X^2(e) + Y^2(e)]t \quad t > 0$$

则二元函数 $Z(e, t)$ 就是一个随机过程.

简记为 $Z(t) = (X^2 + Y^2)t$

$$S = (0, +\infty) \quad T = (0, +\infty)$$

例4 设 $X(t)$ 表示一年内第 t 天的降雨量.

则 $X(t)$, $t=1, 2, \dots, 365$ 即为一随机过程。

$$S = (0, +\infty) \quad T = \{1, 2, \dots, 365\}$$

随机过程分类:

通常有两种分类法.

一种是按随机过程的参数集和状态空间来分类

- (1) 参数 T 离散, 状态 Ω 离散;
- (2) 参数 T 离散, 状态 Ω 连续;
- (3) 参数 T 连续, 状态 Ω 离散;
- (4) 参数 T 连续, 状态 Ω 连续.

离散参数随机过程就是随机变量序列, 简称随机序列.

一般地记 $X_n = X(t_n)$ 于是 $\{X(t), t = t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\} = \{X_n\}$

例5(股指波动)记录证券交易所的股指，用 $X(n)$ 表示第 n 天上证综合指数的开盘指数，则 $\{X(n), n=1, 2, \dots\}$ 是一随机序列。

$$S = (0, +\infty) \quad T = \{1, 2, 3, \dots\}$$

实时记录证券交易所的股指，用 $X(t)$ 表示一天中 t 时刻上证综合指数，则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 表示一随机过程。

$$S = (0, +\infty) \quad T = (0, +\infty)$$

例6 设随机相位正弦波

$$X(t) = a \cos(\omega t + \Theta) \quad -\infty < t < +\infty$$

式中 a, ω 是常数, Θ 是在区间 $(0, 2\pi)$

上服从均匀分布的随机变量.

$$S = [-a, a]$$

$$T = [-\infty, +\infty]$$

另一种是按随机过程的概率结构来分类.

按随机过程的概率结构来分, 随机过程的种类很多.

如:

二阶矩过程.包括正态过程,平稳过程等;
马尔可夫过程,包括马尔可夫链,泊松
(Poisson)过程;

维纳(Wiener)过程,扩散过程等;
更新过程;
鞅.