3.3 可测函数列的收敛

设 $\{f_k\}$ 为 E 上的可测函数列．依照定义 3.1.2, f_k 几乎处处收敛到 f, 如果存在零测集 Z 外, f_k 在 $E\setminus Z$ 上点点收敛到 f, 记为 $f_k \to f, a.e.$ 容易看出 f 也是可测函数.

下面指出可测函数列的收敛点集是可测集.

引理 3.3.1 设 f 和 $\{f_k\}$ 为几乎处处有限可测函数．那么

(1)

$$\{f_k \to f\} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} \left\{ |f_j - f| < \frac{1}{l} \right\},$$

(2)

$$\{f_k \nrightarrow f\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \left\{ |f_j - f| \geqslant \frac{1}{l} \right\},$$

定义 3.3.1 设 f 和 $\{f_k\}$ 都是 E 上的几乎处处有限可测函数，称 f_k 在 E 上依测度收敛到 f, 如果 $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} m\left(|f_k - f| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

这里 $m\left(|f_k - f| \geqslant \varepsilon\right)$ 是 $m\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right)$ 的简写.

依测度收敛不能推出几乎处处收敛.

例 3.3.1 在 $[0, 1]$ 上作函数列如下. $\forall k, f_k(x) = \chi_{E_k}(x)$, 其中 $\{E_k\}$ 依次为

$$E_1 = [0, 1],\ E_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right],\ E_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ E_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right],$$

$$E_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],\ E_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right],\ E_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right],\ \ldots$$

一般地

$$E_k = \left[\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i}\right], \ k = 2^i + j, \ 0 \leqslant j < 2^i.$$

那么 f_k 在 $[0,1]$ 上依测度收敛到 $f = 0$, 但处处不收敛.

定理 3.3.1 设 $\{f_k\}$ 为 E 上的几乎处处有限可测函数列 . 若 f_k 依测度收敛到 f 和 g, 那么 $f = g$, $a.e.$ 即依测度收敛的极限在几乎处处的意义下唯一.

- $\forall \varepsilon > 0$,

$$m(|f-g| \geqslant \varepsilon) \leqslant m\left(|f_k - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + m\left(|f_k - g| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

因此

$$m\left(|f-g| \geqslant \varepsilon\right)=0.$$

从而

$$m\left(|f-g|>0\right)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{|f-g|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0.$$

定理 3.3.2 设 f 和 $\{f_k\}$ 为 E 上的几乎处处有限可测函数，$m(E)<\infty$. 若 $f_k \to f$, $a.e.$ 那么 f_k 依测度收敛到 f.

- 由引理 3.3.1, $\forall \varepsilon > 0$,

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}\{|f_j - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0.$$

又 $m(E) < \infty$, $E_k = \bigcup_{j=k}^{\infty}\{|f_j - f| \geqslant \varepsilon\}$ 为递减可测集列, 因此上式变为

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{|f_j - f| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0.$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} m\left(|f_k - f| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

注 3.3.1 若 $m(E)=\infty$, 以上结论不一定成立. 例如 $E=\mathbb{R}^n$, $f_k=\chi_{\{|x|<k\}}, f=1$.

引理 3.3.2 **(Borel-Cantelli)** 设 $\{E_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的可测集列. 若

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty,$$

那么几乎所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 仅能包含在有限个 E_k 中.

- $\forall l$, 由次可加性

$$m\left(\bigcup_{k=l}^{\infty} E_k\right)\leqslant\sum_{k=l}^{\infty} m(E_k)<\infty.$$

因此

$$m\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=l}^{\infty}E_k\right)=\lim_{l\to\infty}m\left(\bigcup_{k=l}^{\infty}E_k\right)=0,$$

即几乎所有 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$x\in\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=l}^{\infty}E_k\right)^c=\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=l}^{\infty}E_k^c.$$

因此几乎所有 x 仅能包含在有限个 E_k 中. ///

定理 3.3.3 **(Riesz)** 若 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛到 f, 那么存在子列 $f_{k_j}\to f$, $a.e.$

- 由假设, $\forall j \geqslant 1$, 存在 k_j 使得

$$m\left(|f_k - f| > \frac{1}{j}\right) < \frac{1}{2^j},\ \forall k \geqslant k_j.$$

令

$$E_j = \left\{|f_{k_j} - f| > \frac{1}{j}\right\},$$

那么

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty.$$

因此根据 Borel-Cantelli 引理, 几乎所有的 x 至多属于有限个 E_j, 即对几乎所有 x, 存在 k_x 使得 $x \notin E_j$, $\forall j \geqslant k_x$. 换言之

$$\left|f_{k_j}(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{j},\ \forall j \geqslant k_x,$$

即 f_{k_j} 几乎处处收敛.

类似于实数列的收敛, 对依测度收敛我们也有 Cauchy 准则.

定理 3.3.4 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛当且仅当依测度 Cauchy 准则成立: $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{k,l\to\infty} m\left(|f_k - f_l| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

- 必要性. 若 f_k 依测度收敛于 f, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 由

$$\{|f_k - f_l| \geqslant \varepsilon\} \subset \left(\left\{|f_k - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|f_l - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

就得到

$$\lim_{k,l\to\infty} m\left(|f_k - f_l| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

充分性. 假设依测度 Cauchy 准则成立, 为证明 f_k 依测度收敛, 只要证明存在子列 f_{k_l} 依测度收敛即可. 事实上, 若 f_{k_l} 依测度收敛于 f, 那么 $\forall\varepsilon > 0$, 由

$$\{|f_k - f| \geqslant \varepsilon\} \subset \left(\left\{|f_k - f_{k_l}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|f_{k_l} - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

就得到 f_k 也同样依测度收敛于 f. 下面来证明存在依测度收敛的子列.

由依测度 Cauchy 准则, 存在递增子列 $\{N_j\}$ 使得:

$$m\left(\left|f_{N_{j+1}} - f_{N_j}\right| > \frac{1}{2^j}\right) < \frac{1}{2^j}.$$

为简化记号, 不妨认为序列 $\{f_j\}$ 本身满足上式子, 即

$$m\left(|f_{j+1}-f_j|>\frac{1}{2^j}\right)<\frac{1}{2^j},\ \forall j.$$

令

$$E_j=\left\{|f_{j+1}-f_j|>\frac{1}{2^j}\right\}.$$

那么

$$\sum_{j=1}^{\infty}m\left(E_j\right)<\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}<\infty.$$

因此根据 Borel-Cantelli 引理, 几乎所有的 x 至多属于有限个 E_j, 即对几乎所有 x, 存在 k_x 使得 $x\notin E_j,\ \forall j\geqslant k_x$. 换言之

$$|f_{j+1}(x)-f_j(x)|\leqslant\frac{1}{2^j},\ \forall j\geqslant k_x,$$

即 $\sum_j (f_{j+1}(x) - f_j(x))$ 收敛, 从而对几乎所有的 x, $f_j(x)$ 收敛. 设 $f_j \to f$, $a.e.$, 那么我们也有 f_j 依测度收敛于 f. 事实上, 令 $H_i = \bigcup_{j=i} E_j$. $\forall \varepsilon > 0$, 任取 i 满足 $1/2^{i-1} < \varepsilon$. $\forall x \in E \backslash H_i$,

$$|f_{j+s} - f_j| \leqslant \sum_{t=j}^{j+s-1} |f_{t+1} - f_t| \leqslant \frac{1}{2^{j-1}},\ \forall s \geqslant 1,\ j \geqslant i.$$

因此令 $s \to \infty$ 便有

$$|f_j - f| \leqslant \frac{1}{2^{j-1}} \leqslant \frac{1}{2^{i-1}},\ \forall j \geqslant i.$$

从而

$$\{|f_j - f| \geqslant \varepsilon\} \subset H_i,\ \forall j \geqslant i.$$

那么 $\forall j \geqslant i$,

$$m(|f_j - f| \geqslant \varepsilon) \leqslant m(H_i).$$

又 $\lim_{i\to\infty} m(H_i) = 0$, 因而 f_j 依测度收敛于 f.

仔细检查上述证明便得到以下结论

推论 3.3.1 若 $\{f_k\}$ 满足依测度 Cauchy 准则成立: $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{k,l\to\infty} m\left(|f_k - f_l| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

那么存在子列 $\{f_{k_j}\}$ 以及可测函数 f 使得 $f_{k_j} \to f$, $a.e.$ 且 f_{k_j} 依测度收敛于 f.