4.3 有界可测函数的积分

下面我们考虑支集测度有限 (i.e. $m(supp(f)) < \infty$) 的有界可测函数 f 的积分. 前面已经证明, 对有界可测函数 f, 存在简单函数 $\{\phi_k\}$ 使得 $\forall k, |\phi_k| \leqslant |\phi_{k+1}|, 0 \leqslant |\phi_k| \leqslant |f|$,

$$\phi_k \to f, \ \forall x.$$

注意 $0 \leqslant |\phi_k| \leqslant |f|$ 蕴含 $supp(\phi_k) \subset supp(f)$.

定义 4.3.1 若存在极限

$$\lim_{k\to\infty} \int \phi_k(x)\, dx,$$

那么称 f 是 Lebesgue 可积的, 简称可积, 其 Lebesgue 积分定义

为

$$\int f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \phi_k(x)\,dx.$$

定义 4.3.2 若 E 为有限测度集, f 是 E 上的有界可测函数. 那么 f 在 E 上的积分定义为,

$$\int_E f(x)\,dx = \int f(x)\,\chi_E(x)\,dx.$$

显然, 若 f 是简单函数, 那么上述定义与简单函数的积分定义一致.

下面说明上述定义是合理的, 即积分与简单函数的选取无关.

引理 4.3.1 设 $m(E) < \infty$, f 为支集在 E 内的有界可测函数, $\{\phi_k\}$ 为支集在 E 内的简单函数, 存在 $M > 0$, $|\phi_k| \leqslant M$, $\forall k$. 若 $\phi_k \to f$, $a.e.\ x$. 那么

(1) 存在极限

$$\lim_{k\to\infty}\int \phi_k.$$

(2) 若 $f=0$, $a.e.\ x$, 那么

$$\lim_{k\to\infty}\int \phi_k = 0.$$

■ 如果 ϕ_k 能一致收敛到 f, 那么结论显然是成立的. 在这里, 虽然不能直接得到一致收敛, 然而根据前面一章的结果, 在挖去一些“坏的部分”后, 我们仍然能有一致收敛. 具体而言, 由于 $m(E)<\infty$, 利用 Egorov 定理, $\forall \varepsilon>0$, 存在闭集 $A_\varepsilon\subset E$ 使得 $m(E\backslash A_\varepsilon)<\varepsilon$, ϕ_k 在 A_ε 上一致收敛到 f. 令

$$I_k=\int \phi_k.$$

(1) 为证 I_k 收敛, 只要说明 I_k 是 Cauchy 列.

$$\begin{aligned}|I_k - I_l| &= \left|\int \phi_k - \int \phi_l\right| \\ &\leqslant \int |\phi_k - \phi_l| \\ &= \int_{A_\varepsilon} |\phi_k - \phi_l| + \int_{E\setminus A_\varepsilon} |\phi_k - \phi_l| \\ &\leqslant \int_{A_\varepsilon} |\phi_k - \phi_l| + 2Mm\left(E\setminus A_\varepsilon\right) \\ &\leqslant \int_{A_\varepsilon} |\phi_k - \phi_l| + 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

又 ϕ_k 在 A_ε 上一致收敛, 当 k, l 充分大,

$$|I_k - I_l| \leqslant m\left(E\right)\varepsilon + 2M\varepsilon.$$

因此 I_k 是 Cauchy 列.

(2) 若 $f=0$, $a.e.\ x$, 那么类似前面的推到

$$
\begin{aligned}
|I_k| &\leqslant \int |\phi_k| \\
&\leqslant \int_{A_\varepsilon} |\phi_k| + M\varepsilon \\
&\leqslant m(E)\,\varepsilon + M\varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此 $I_k \to 0$.

引理 4.3.2 设 $m(E)<\infty$, f 为支集在 E 内的有界可测函数. 若 $\{\phi_k\}$, $\{\psi_k\}$ 为支集在 E 内的简单函数满足

$$
\phi_k \to f,\ a.e.x.,\ \psi_k \to f,\ a.e.x,
$$

且存在 $M>0$, $|\phi_k|$, $|\psi_k| \leqslant M$, $\forall k$. 那么

$$\lim_{k\to\infty}\int \phi_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int \psi_k(x)\,dx.$$

■ 由引理 4.3.1(1), 上述极限都存在. 令 $\omega_k = \phi_k - \psi_k$. 那么 $\{\omega_k\}$ 是一列支集在 E 内的一致有界简单函数, 且 $\omega_k \to 0$, $a.e.$ x. 因此根据引理 4.3.1(2),

$$\lim_{k\to\infty}\int \omega_k = 0,$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\int \phi_k = \lim_{k\to\infty}\int \psi_k.$$

至此已经指出任何有界可测函数 f 都是简单函数 ϕ_k 的点点极限, 而这些简单函数积分的极限总是存在, 因此对支集测度有限的有界函数的积分定义是合理的, 并且引理 4.3.1可以重新表述为

定理 4.3.1 若 f 是支集测度有限的有界可测函数, 那么 f 是 Lebesgue 可积的. 若 $f = 0$, $a.e.\ x$. 那么

$$\int f = 0.$$

利用简单函数积分的性质容易得到

定理 4.3.2 设 f, g 是支集测度有限的有界可测函数.

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int (af + bg) = a\int f + b\int g.$$

(2) 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 为不相交可测集, 那么

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

(3) 若 $f \leqslant g$, 那么

$$\int f \leqslant \int g.$$

(4) $|f|$ 是支集测度有限的有界可测函数，且

$$\left|\int f\right| \leqslant \int |f|.$$

设 $\{\phi_k\}$，$\{\psi_k\}$ 为支集分别在 $supp\,(f)$，$supp\,(g)$ 内的一致有界简单函数列满足

$$\phi_k \to f,\ a.e.x.,\ \psi_k \to g,\ a.e.x.$$

那么 $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$a\phi_k \to af,\ a.e.x.,\ b\psi_k \to bg,\ a.e.x.$$

(1) 利用简单函数积分性质

$$\int a\phi_k + b\psi_k = a\int \phi_k + b\int \psi_k.$$

令 $k \to \infty$ 并根据 $af+bf, f$ 及 g 的积分定义,

$$\int (af+bg) = a\int f + b\int g.$$

(2) 由于

$$\int \phi_k \chi_{E\cup F} = \int \phi_k \chi_E + \int \phi_k \chi_F.$$

令 $k \to \infty$,

$$\int f\chi_{E\cup F} = \int f\chi_E + \int f\chi_F,$$

即

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

(3) 若 $\eta \geqslant 0$ 为支集测度有限的有界可测函数, 那么存在非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 满足,

$$0 \leqslant \varphi_1 \cdots \leqslant \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \eta,\ \varphi_k \to \eta,\ a.e.x.$$

因此

$$\int \varphi_k \geqslant 0.$$

从而

$$\int \eta \geqslant 0.$$

取 $\eta = g - f \geqslant 0$, 那么 η 为支集测度有限的有界可测函数. 对 η 上述不等式以及性质 (1),

$$\int g - \int f = \int \eta \geqslant 0.$$

(4) 显然 $|f|$ 是有界可测函数, $m(supp(|f|)) = m(supp(f)) < \infty$. 最后对

$$\left| \int \phi_k \right| \leqslant \int |\phi_k|,$$

取极限即可. ///

例 4.3.1 若 $f \geqslant 0$ 是支集测度有限的有界可测函数. 那么 $\int f = 0$ 当且仅当 $f = 0$, $a.e.x$.

- 充分性已经包含于引理 4.3.1. 证明必要性. 设

$$\int f = 0.$$

令 $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$. 那么

$$\frac{1}{k} m(E_k) \leqslant \int f\chi_{E_k} \leqslant \int f = 0.$$

从而 $\forall k,\ m(E_k) = 0$. 又

$$\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

因此

$$m(f > 0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = 0.$$

数学分析已经熟知, 若 $f_n(x)$ Riemann 可积, 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ Riemann 可积, 且极限与积分可交换,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

对 Lebesgue 积分可以证明类似结论.

例 4.3.2 设 E 为有限测度集, $f_k(x)$ 为 E 上的有界可测函数且一致收敛于 $f(x)$. 那么 $f(x)$ 在 E 上可积, 且极限与积分可交换,

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx=\int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

■ 显然 $f(x)$ 为可测函数. 由于 $\forall k, f_k(x)$ 有界, 且 $\{f_k(x)\}$ 一致

收敛, 因此 $f(x)$ 有界, 从而可积. 不妨设 $m(E) > 0$, 否则所有积分为零, 结论自然成立 . $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $k_0 > 0$,

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{m(E)}, \ \forall k \geqslant k_0.$$

因此

$$\begin{aligned}
\left| \int_E f_k(x)\, dx - \int_E f(x)\, dx \right| &= \left| \int_E (f_k(x) - f(x))\, dx \right| \\
&\leqslant \int_E |f_k(x) - f(x)|\, dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{m(E)} \cdot m(E) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

下列说明仅有点点收敛不能保证极限与积分可交换.

例 4.3.3 考察 $[0, 1]$ 上的连续函数

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ or } x \geqslant 2/k \\ k, & x = 1/k, \\ linear, & x \in [0, 1/k] \cup [1/k, 2/k]. \end{cases}$$

显然 $f_k(x) \to 0, \forall x$. 但

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(x)\, dx = 1 \neq 0 = \int 0.$$

定理 4.3.3 (有界收敛定理) 设 $m(E) < \infty$, $\{f_k\}$ 为支集在 E 内的有界可测函数列, 且存在 $M > 0$, $|f_k| \leqslant M, \forall k$. 若 $f_k \to f, a.e.$

x., 那么 f 为支集在 E 内的有界可测函数列 , 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int|f_k - f| = 0,$$

从而极限与积分可交换,

$$\lim_{k\to\infty}\int f_k = \int \lim_{k\to\infty} f_k = \int f.$$

■ 容易看出 f 支集在 E 内, $|f(x)| \leqslant M$, $a.e.\ x$. 积分极限的证明与引理 4.3.1 相似. 由于 $m(E) < \infty$, 利用 Egorov 定理, $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$, f_k 在 A_ε 上一致收敛到 f.

那么

$$\int |f_k - f| = \int_{A_\varepsilon} |f_k - f| + \int_{E\backslash A_\varepsilon} |f_k - f|$$
$$\leqslant \int_{A_\varepsilon} |f_k - f| + 2Mm\left(E\backslash A_\varepsilon\right).$$

当 k 充分大,

$$\int |f_k - f| \leqslant m\left(E\right)\varepsilon + 2M\varepsilon.$$

由 ε 任意便有

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| = 0.$$