

§9.2 正态总体的参数检验

● 关于 μ 的检验(σ^2 已知)

(1.1) μ 的双边检验(σ^2 已知)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知 , 需检验 :

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

给定显著性水平 α 与样本值 (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析:

若 $\mu = \mu_0$ 成立, 则样本均值 \bar{X} 不能偏离 μ_0 太多
即 $\bar{X} - \mu_0$ 不能非常大或者非常小

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大时, 说明样本数据不支持原假设
 $\mu = \mu_0$, 而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小时, 说明样本数据不支持原假设
 $\mu = \mu_0$, 而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

形式为:

$$\bar{X} - \mu_0 > ? \quad \text{或} \quad \bar{X} - \mu_0 < ?$$

显著性水平为 α , 即 $\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小的标准为 : $\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小到其发生的概率只有 α (0.05或0.01)

因为统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$P_{H_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \alpha$$

故拒绝域 $\left\{ \bar{X} \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right. \right\}$

即 $\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{或} \quad |U| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(1.2) μ 的右边检验 (σ^2 已知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析:

若 $\mu = \mu_0$ 成立, 则样本均值 \bar{X} 不能大于 μ_0 太多
即 $\bar{X} - \mu_0$ 不能非常大

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大时, 说明样本数据不支持原假设
 $\mu = \mu_0$, 而是支持被择假设 $\mu > \mu_0$

注:

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小时, 说明样本数据相对支持原假设
设 $\mu = \mu_0$, 此时不能拒绝原假设, 不属于拒绝域

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

形式为：

$$\bar{X} - \mu_0 \geq ?$$

显著性水平为 α , 即 $\bar{X} - \mu_0$ 非常大的标准为：
 $\bar{X} - \mu_0$ 非常大到其发生的概率只有 α

因为统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$P_{H_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq Z_{1-\alpha} \right) = \alpha$$

故拒绝域 $\left\{ \bar{X} \mid \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq Z_{1-\alpha} \right\}$

即 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq Z_{1-\alpha}$ 或 $U \geq Z_{1-\alpha}$

(1.3) μ 的左边检验 (σ^2 已知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析:

若 $\mu = \mu_0$ 成立, 则样本均值 \bar{X} 不能小于 μ_0 太多
即 $\bar{X} - \mu_0$ 不能非常小

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小时, 说明样本数据不支持原假设
 $\mu = \mu_0$, 而是支持被择假设 $\mu < \mu_0$

注:

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大时, 说明样本数据相对支持原假设
 $\mu = \mu_0$, 此时不能拒绝原假设, 不属于拒绝域

形式为: $H_0 : \mu = \mu_0 ; H_1 : \mu < \mu_0$

$$\bar{X} - \mu_0 \leq ?$$

显著性水平为 α , 即 $\bar{X} - \mu_0$ 非常小的标准为 :
 $\bar{X} - \mu_0$ 非常小到其发生的概率只有 α

因为统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$P_{H_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_\alpha \right) = \alpha$$

故拒绝域 $\left\{ \bar{X} \mid \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -Z_{1-\alpha} \right\}$ 或 $-Z_{1-\alpha}$

即 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -Z_{1-\alpha}$ 或 $U \leq -Z_{1-\alpha}$

U 检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $\sim N(0,1)$	$ U \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U \geq z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U \leq -z_{1-\alpha}$

● 关于 μ 的检验(σ^2 未知)

(2.1) μ 的双边检验(σ^2 未知)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知, 需检验:

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

给定显著性水平 α 与样本值 (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析:

若 $\mu = \mu_0$ 成立, 则样本均值 \bar{X} 不能偏离 μ_0 太多
即 $\bar{X} - \mu_0$ 不能非常大或者非常小

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大时, 说明样本数据不支持原假设
 $\mu = \mu_0$, 而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小时, 说明样本数据不支持原假设
 $\mu = \mu_0$, 而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

形式为:

$$\bar{X} - \mu_0 > ? \quad \text{或} \quad \bar{X} - \mu_0 < ?$$

显著性水平为 α , 即 $\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小的标准为 : $\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小到其发生的概率只有 α (0.05 或 0.01)

因为统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$ $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$P_{H_0} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ 或 } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right) = \alpha$$


故拒绝域

$$\left\{ \bar{X} \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ 或 } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right. \right\}$$

$$\text{即 } \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \text{或} \quad |T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

(2.2) μ 的右边检验 (σ^2 未知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}(n-1)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha}$$

(2.3) μ 的左边检验 (σ^2 未知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \leq -t_{1-\alpha}(n-1) \quad \text{.....} \quad \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -Z_{1-\alpha}$$

T 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ $\sim t(n-1)$	$ T \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T \geq t_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T \leq -t_{1-\alpha}$

例1 某糖厂有一台自动打包机打包，额定标准是每包质量为100kg。设包质量服从正态分布，且根据以往经验，其方差为 $\sigma^2 = (0.4)^2$ 。某天开工后，为检查打包机工作情况，随机的抽取9包，称得质量（单位：kg）如下：

99	98.5	102.5	101	98
99	102	102.1	100.5	

问 这天打包机工作是否正常($\alpha=0.05$) ?

解 μ 的双边检验 (σ^2 已知)

$$H_0 : \mu = 100 ; \quad H_1 : \mu \neq 100$$

$$\text{拒绝域} \quad \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{即} : \quad \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq 1.96$$

$$\text{而由样本值} : \quad \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{100.29 - 100}{0.4 / \sqrt{9}} \right| = 2.175$$

故拒绝 $H_0 : \mu = 100$

例2 某厂生产小型马达，其说明书上写着：这种小型马达在正常负载下平均消耗电流不会超过0.8 安培.

现随机抽取16台马达试验，求得平均消耗电流为0.92安培，消耗电流的标准差为0.32安培.

假设马达所消耗的电流服从正态分布，取显著性水平为 $\alpha = 0.05$ ，问根据这个样本，能否否定厂方的断言？

解 根据题意待检假设可设为

$$H_0: \mu \leq 0.8 ; \quad H_1: \mu > 0.8$$

σ 未知, 拒绝域为 :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1)$$

查表得 $t_{1-0.05}(16-1) = 1.753$, 故拒绝域为

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} > 1.753$$

$$\begin{array}{ll} \text{由 } \bar{x} = 0.92 & \mu = 0.8 \\ s = 0.32 & n = 16 \end{array} \quad \text{得 } \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = 1.452$$

故接受原假设, 得到结论 : 不能否定厂方断言.

$$H_0: \mu \geq 0.8 ; \quad H_1: \mu < 0.8$$

σ 未知, 拒绝域为 :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}(n-1)$$

查表得 $-t_{1-0.05}(16-1) = -1.753$, 故拒绝域为

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < -1.753$$

$$\begin{array}{ll} \text{由 } \bar{x} = 0.92 & \mu = 0.8 \\ s = 0.32 & n = 16 \end{array} \quad \text{得 } \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = 1.452$$

故接受原假设 , 得到结论 : 不能相信厂方断言.

由例2可见：对问题的提法不同(把哪个假设作为原假设), 统计检验的结果也会不同.

由于假设检验是控制犯第一类错误的概率, 使得拒绝原假设 H_0 的决策变得比较慎重, 也就是 H_0 得到特别的保护. 因而, 通常把有把握的, 经验的结论作为原假设, 或者尽量使后果严重的错误成为第一类错误.

上述两种解法的立场不同, 因此得到不同的结论. 第一种假设是不轻易否定厂方的结论; 第二种假设是不轻易相信厂方的结论.