第十一章：随机过程基本概念

描述随机现象

1、随机变量

定义：

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{e\}$

若对每一个试验结果e，都有一个确定的数$X(e)$与之对应，

则称 $X=X(e)$ 是此样本空间上的一个随机变量

2、二维随机变量 (X,Y)

3、n维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

4、随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$

随机过程定义：

给定参数集 $T \subset (-\infty, +\infty)$ 如果对于每个 $t \in T$

都对应有随机变量 $X(t) = X(e, t)$

则称随机变量族 $\{X(t), t \in T\}$ 为随机过程.

例1　以N(t)表示某电话交换台在时段 $[0,t)$ 内接到的呼叫次数,

那么,对于固定的 t ，$N(t)$ 是一个随机变量.

对于一切 $t \in [0,+\infty)$

$\{N(t), t \in [0,+\infty)\}$ 是一个随机过程

由定义得

(1)对任意给定的 $t_1 \in T$，

$X(t_1)=X(e,t_1)$ 是一个随机变量,

称为随机过程在$\mathrm{t}=\mathrm{t}_1$时的状态变量,
简称状态.

(2)对于 Ω 中的每一 e_0，

$X(e_0,t)=x(t)$是仅依赖于 t 的函数,

称为随机过程的样本函数,它是随机过程的一次物理实现，或对应于 e_0 的轨道.

函数值集合 $\{X(e,t) \mid e \in \Omega, t \in T\}$

称为随机过程的状态空间. 记为 S.

它是二元函数 $X(e,t)$ 的值域,

参数t的取值范围T称为参数空间

如例1中：

以N(t)表示某电话交换台在时段 [0,t)
内接到的呼叫次数,

$S = \{1, 2, \cdots, \}$　　　　$T = \{t \mid t \geq 0\}$

再看几个例子：

例2

在一条自动生产线上检验产品质量,每次检验一个,区分正品或次品.那么,整个检验的样本空间$\Omega=\{e\}=\{e_1,e_2\}$，e_1=正品，e_2=次品,

为了描述检验的全过程,引入二元函数

$$X(e,t)=\begin{cases}0, & 第t次查出正品,\\ t, & 第t次查出次品.\end{cases} \quad t\in T\equiv\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$$

则二元函数 $X(e,t)$ 就是一个随机过程.

$$S=\{0,1,2,\cdots,\} \qquad T=\{1,2,\cdots\}$$

例3 设X(e)与Y(e)是相互独立的标准正态变量.

$$Z(e,t)=\left[X^2(e)+Y^2(e)\right]t \qquad t>0$$

则二元函数 $Z(e,t)$ 就是一个随机过程.

简记为 $Z(t)=(X^2+Y^2)t$

$$S=(0\,,\;+\infty) \qquad T=(0\,,\;+\infty)$$

例4　设$X(t)$表示一年内第t天的降雨量.

则$X(t)$ ，t=1、2、……365即为一随机过程。

$$S=(0\ ,\ +\infty) \qquad T=\{1, 2, \cdots, 365\}$$

随机过程分类：

通常有两种分类法.

一种是按随机过程的参数集和状态空间来分类

(1)参数T离散,状态Ω离散;
(2)参数T离散,状态Ω连续;
(3)参数T连续,状态Ω离散;
(4)参数T连续,状态Ω连续.

离散参数随机过程就是随机变量序列，简称随机序列.

一般地记 $X_n = X(t_n)$ 于是 $\{X(t), t = t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\} = \{X_n\}$

例5(股指波动)记录证券交易所的股指，用X(n)表示第n天上证综合指数的开盘指数，则{X(n),n=1,2,…}是一随机序列。

$$S=(0,+\infty) \qquad T=\{1,2,3,\cdots\}$$

实时记录证券交易所的股指，用X(t)表示一天中t时刻上证综合指数，则{X(t),t≥0}表示一随机过程。

$$S=(0,+\infty) \qquad T=(0\,,\ +\infty)$$

例6 设随机相位正弦波

$$X(t) = a\cos(\omega t + \Theta) \quad -\infty < t < +\infty$$

式中 a, ω 是常数, Θ 是在区间 $(0, 2\pi)$

上服从均匀分布的随机变量.

$$S = [-a, a] \qquad T = [-\infty, +\infty]$$

另一种是按随机过程的概率结构来分类.

按随机过程的概率结构来分, 随机过程的种类很多.

如：

二阶矩过程.包括正态过程,平稳过程等;
马尔可夫过程,包括马尔可夫链,泊松(Poisson)过程；
维纳(Wiener)过程,扩散过程等;
更新过程;
鞅.

第二节：随机过程的概率分布

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程,

对于参数集T中的任意n个元素：t_1、t_2、…… t_n，所对应的n个随机变量

$$X(t_1) = X(e, t_1)\,,\quad X(t_2) = X(e, t_2)\,,\quad \cdots \quad X(t_n) = X(e, t_n)$$

的联合分布

$$F(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

称为随机过程$X(t)$的n维分布函数

如：

n=1时　一维分布函数

$$F(x_1;t_1)=P\{X(t_1)\le x_1\}$$

n=2时　二维分布函数

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2\}$$

n维密度函数

$$f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$$

n维联合分布律

$$P(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$$

随机过程的任意n维分布函数或概率密度(联合分布律)，其中n=1,2…，可以完全地确定了随机过程的统计特征.

特别地，如果对于任何正整数n，随机过程的任意n个状态都是相互独立的，则称此过程为独立过程.

此时，

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i; t_i)$$

例1 在一条自动生产线上检验产品质量，每次检验一个,区分正品或次品。那么，整个检验的样本空间S=$\{e\}=\{e_1,e_2\}$，e_1=正品，e_2=次品,

为了描述检验的全过程,引入二元函数

$$X(e,t)=\begin{cases}0, \text{第}t\text{次查出正品}, \\ t, \text{第}t\text{次查出次品}.\end{cases} \qquad t \in T \equiv \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

则二元函数 $X(e,t)$ 就是一个随机过程.

设各次检验相互独立地进行,每次检验的次品率为P(0<p<1).

求随机过程$X(t)$在$t_1=1$和$t_2=2$时的二维分布函数.

解 $$X(t)=X(e,t)=\begin{cases}0, & \text{第}t\text{次查出正品}\\ t, & \text{第}t\text{次查出次品}\end{cases}$$

在t_1=1时,过程的状态$X(1)$ 的分布律为:

$$X(1)=X(e,1)=\begin{cases}0, & \text{第1次查出正品}\\ 1, & \text{第1次查出次品}\end{cases}$$

$X(1)$	0	1
P	1-p	p

一维分布函数为

$$F(x;1)=P\{X(1)\le x\}=\begin{cases}0, x<0\\ 1-p, 0\le x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$$

在t_2=2时,过程的状态$X(2)$的分布律为:

$$X(2)=X(e,2)=\begin{cases}0, & \text{第2次查出正品}\\ 2, & \text{第2次查出次品}\end{cases}$$

$X(2)$	0	2
P	1-p	p

一维分布函数为

$$F(x;2)=P\{X(2)\le x\}=\begin{cases}0, x<0\\ 1-p, 0\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$$

即：一维分布函数分别为

$$F(x;1) = P\{X(1) \le x\} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - p, 0 \le x < 1 \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$$

$$F(x;2) = P\{X(2) \le x\} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - p, 0 \le x < 2 \\ 1, x \ge 2 \end{cases}$$

由$X(1)$和$X(2)$相互独立，知，二维分布函数

$$F(x_1, x_2; 1, 2) = F(x_1; 1) \cdot F(x_2; 2)$$

$$= \begin{cases} 0, x_1 < 0 \text{或} x_2 < 0 \\ (1-p)^2, 0 \le x_1 < 1, 0 \le x_2 < 2 \\ 1-p, \begin{cases} 0 \le x_1 < 1 \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1 \ge 1 \\ 0 \le x_2 < 2 \end{cases} \\ 1, x_1 \ge 1, x_2 \ge 2 \end{cases}$$

例2　设随机过程 $Z(t)=(X^2+Y^2)t, t>0$

式中X与Y是相互独立的标准正态随机变量.试求此过程的一维概率密度.

解　$X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$　X与Y是相互独立

故X与Y的联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{y^2}{2}\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2}\}\quad -\infty<x,y<+\infty$$

当z>0时,

$$F(z;t)=P\{Z(t)\le z\}=P\{(X^2+Y^2)t\le z\}$$

$$=P\{X^2+Y^2\le \frac{z}{t}\} \quad = \iint\limits_{x^2+y^2\le \frac{z}{t}} \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2}\}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}} \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{r^2}{2}\}rdrd\theta$$

$$=[-\exp\{-\frac{r^2}{2}\}]\Big|_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}$$

$$=1-\exp\{-\frac{z}{2t}\}$$

当z≤0时,

$$F(z;t)=P\{Z(t)\le z\}=P\{(X^2+Y^2)t\le z\}$$

$$=P\{X^2+Y^2\le \frac{z}{t}\}=0$$

故 $$F(z;t)=\begin{cases}1-\exp\{-\dfrac{z}{2t}\}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$$

于是, Z(t)的一维概率密度为

$$f(z;t)=\frac{d}{dz}F(z;t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2t}\exp\{-\dfrac{z}{2t}\}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$$

两个随机过程有限维联合分布及独立性：

设 $\{X(t), t \in T_1\}$ 和$\{Y(t), t \in T_2\}$是两个随机过程

由$\{X(t), t \in T_1\}$的任意m个状态: $\{X(t_1)\}$,…… $\{X(t_m)\}$
和$\{Y(t), t \in T_2\}$的任意n个状态:$\{Y(t'_1)\}$,…… $\{Y(t'_n)\}$

组成m+n维随机向量.其分布函数

$$F_{XY}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;t_1,\cdots,t_m,t_1^{'},\cdots,t_n^{'})$$

称为随机过程X(t)和Y(t)的m+n维联合分布函数.

如果对于任何正整数m和n,对于T_1中的任意数组以及T_2中的任意数组,关系式

$$F_{XY}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;t_1,\cdots,t_m,t_1',\cdots,t_n')$$

$$=F_X(x_1,\cdots,x_m;t_1,\cdots,t_m)\cdot F_Y(y_1,\cdots,y_n;t_1',\cdots,t_n')$$

都成立,则称两个随机过程相互独立.

第三节 随机过程的数字特征

随机变量数字特征复习:

X,Y为随机变量，联合概率密度 $f(x,y)$,

边沿概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$

数学期望(均值)

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \quad =\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

二阶原点矩

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx \quad =\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy$$

方差 $$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f_X(x)dx$$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

二阶原点混合矩 $$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

协方差

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

$$= E(XY) - EX \cdot EY$$

相关系数

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$$

如果 $\rho = \rho_{XY} = 0$ 则称 X与Y不相关;

随机过程的数字特征

T是参数集, $T \subset (-\infty,+\infty)$ 随机变量族 $\{X(t), t \in T\}$

是一个随机过程, 对于任意给定 $t \in T$

过程在 t 时刻的 状态 $X(t)$是一个随机变量,

一维概率密度 $f_1(x;t)$

（1）过程在 t 的状态 X(t) 的数学期望

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x;t) dx$$

对于一切 $t \in T$, $\mu_X(t)$ 是t 的函数,

称为随机过程X(t)的均值函数, 简称均值;

（2）过程在 t的状态 X(t) 的二阶原点矩

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x;t)dx$$

称为随机过程X(t)的均方值函数,简称均方值;

（3）二阶中心矩

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[X(t) - EX(t)]^2$$

$$= E[X(t) - \mu_X(t)]^2$$

$$= E[X^2(t)] - \mu_X^2(t)$$

称为随机过程X(t)的方差函数,简称方差,

均方差 $\sigma_X(t)$

任选$t_1, t_2 \in T$，状态$X(t_1), X(t_2)$是两个随机变量,

二维概率密度 $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$

（4）随机过程X(t)的自相关函数,简称相关函数,

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

（5）随机过程 X(t)的自协方差函数,简称协方差,

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - EX(t_1)] \cdot [X(t_2) - EX(t_2)]\}$$

$$= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)] \cdot [X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}$$

均值、均方值、方差和均方差是刻划随机过程在各个状态的统计特性的；

而自相关函数和自协方差函数是刻划随机过程的任何两个不同状态的统计特性的。

这五个数字特征之间，具有如下关系：

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = E[X(t)\cdot X(t)] = R_X(t,t)$$

$$C_X(t_1,t_2) = E\{[X(t_1) - EX(t_1)]\cdot[X(t_2) - EX(t_2)]\}$$

$$= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)]\cdot[X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}$$

$$= \mathrm{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$

$$= E[X(t_1)\cdot X(t_2)] - EX(t_1)\cdot EX(t_2)$$

$$= R_X(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\cdot\mu_X(t_2)$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2(t) &= D[X(t)] = E[X(t) - EX(t)]^2 \\
&= E[X(t) - \mu_X(t)]^2 \\
&= C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) \\
&= E[X^2(t)] - \mu_X^2(t) \\
&= \Psi_X^2(t) - \mu_X^2(t)
\end{aligned}
$$

例1 设随机相位正弦波

$$X(t) = a\cos(\omega t + \Theta) \quad -\infty < t < +\infty$$

式中 a,ω 是常数， Θ 是在区间 $(0,2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量.

求：X(t)的均值函数、方差函数、自相关函数和自协方差函数.

解：依题意 Θ 的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, 0 < \theta < 2\pi \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

(1)均值函数

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[a\cos(\omega t + \Theta)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(\omega t + \theta) \cdot f(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

(2)自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$= E[a\cos(\omega t_1 + \Theta) \cdot a\cos(\omega t_2 + \Theta)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t_1 + \theta) \cdot a\cos(\omega t_2 + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\omega t_2 - \omega t_1) + \cos(\omega t_2 + \theta + \omega t_1 + \theta)}{2} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos\omega(t_2 - t_1)$$

(3)自协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\cdot\mu_X(t_2)$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1)$$

(4)方差函数

$$\sigma_X^2(t)=C_X(t,t)=\frac{a^2}{2}$$

例2: 设随机过程 $Z(t) = X + Yt \quad -\infty < t < +\infty$

式中X 服从 $N(a,\sigma_1^2)$ Y服从 $N(b,\sigma_2^2)$

且X与Y的相关系数 $\rho_{XY} = \rho$

求: Z(t)的自相关函数.

解 Z(t)的自相关函数

$$\begin{aligned} R_Z(t_1,t_2) &= E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)] \\ &= E[(X+Yt_1)\cdot(X+Yt_2)] \\ &= E[X^2 + t_1t_2Y^2 + (t_1+t_2)XY] \\ &= EX^2 + t_1t_2EY^2 + (t_1+t_2)E(XY) \end{aligned}$$

因为 $X \sim N(a, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(b, \sigma_2^2)$

所以 $EX = a$ $DX = \sigma_1^2$

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = \sigma_1^2 + a^2$$

$$EY = b \qquad DY = \sigma_2^2$$

$$EY^2 = DY + (EY)^2 = \sigma_2^2 + b^2$$

由 $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY$

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$$

得

$$E(XY) = \operatorname{cov}(X, Y) + EX \cdot EY$$

$$= \rho\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} + EX \cdot EY$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2 + ab$$

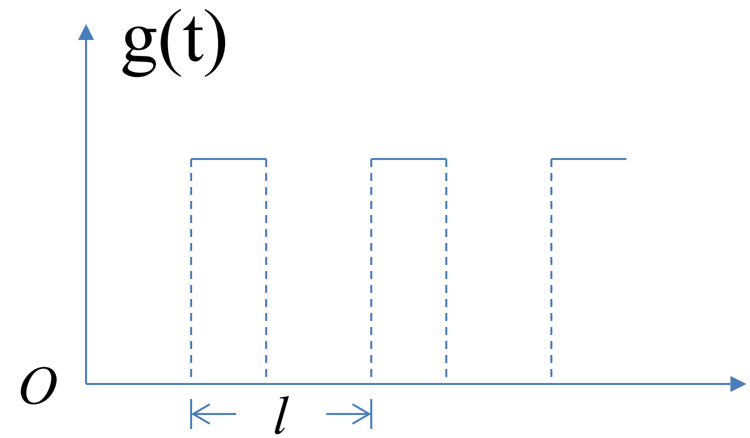
于是 $$R_Z(t_1,t_2)=(a^2+\sigma_1^2)+t_1t_2(b^2+\sigma_2^2)$$
$$+(t_1+t_2)(\rho\sigma_1\sigma_2+ab)$$

例3　设随机振幅矩形波$Y(t) = Xg(t), t > 0$

式中X服从参数p=0.5的(0-1)分布,

g(t)是所示的周期为 l 的矩形波（如图）

X	0	1
P	0.5	0.5



求Y(t)的均值、方差.

解　随机变量X的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

故有 $EX=\frac{1}{2}$　　$DX=\frac{1}{4}$

$$\mu_Y(t)=E[X(g(t)]=g(t)EX=\frac{1}{2}g(t)$$

$$\sigma_Y^2(t)=D[Xg(t)]=g^2(t)DX=\frac{1}{4}g^2(t)$$

对于两个随机过程 $\{X(t), t \in T_1\}$ 和 $\{Y(t), t \in T_2\}$

任选 $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$

对应有过程 X(t)在 t_1 的状态$X(t_1)$

和过程Y(t)在 t_2 的状态 $Y(t_2)$

$X(t_1)$ 和$Y(t_2)$的二阶原点混合矩

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$$

称为随机过程X(t)和 Y(t)的互相关函数;

X(t_1) 和Y(t_2)的二阶中心混合矩

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\}$$

称为随机过程 X(t)和 Y(t)的互协方差函数;

且 $C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$

定义:

如果对任意 $t_1\in T_1,t_2\in T_2$都有 $C_{XY}(t_1,t_2)=0$

即 $E[X(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)]\cdot E[Y(t_2)]$

则称随机过程 X(t)和 Y(t)是不相关的.

显然,相互独立的两个随机过程必不相关.

例4 设某接收机收到周期信号输入电压S(t)和噪声电压N(t)且设E[N(t)]=0, S(t)与N(t)互不相关。试导出输出电压V(t)=S(t)+N(t)的均值、自相关函数与输入电压的数字特征的关系.

解 V(t)的均值函数

$$\mu_V(t) = E[V(t)]$$

$$= E[S(t) + N(t)]$$

$$= E[S(t)] + E[N(t)]$$

$$= \mu_S(t)$$

V(t)的自相关函数

$$R_V(t_1,t_2) = E[V(t_1)\cdot V(t_2)]$$

$$= E\{[S(t_1)+N(t_1)]\cdot[S(t_2)+N(t_2)]\}$$

$$= E[S(t_1)\cdot S(t_2)] + E[S(t_1)N(t_2)]$$

$$+ E[S(t_2)N(t_1)] + E[N(t_1)N(t_2)]$$

由于S(t)与N(t)互不相关

有 $E[S(t_1)N(t_2)] = E[S(t_1)]\cdot E[N(t_2)] = 0$

$$E[S(t_2)N(t_1)] = E[S(t_2)]\cdot E[N(t_1)] = 0$$

于是得到

$$R_V(t_1,t_2) = R_S(t_1,t_2) + R_N(t_1,t_2)$$

例5　给定随机过程X(t)，和常数a，设

$$Y(t) = X(t+a) - X(t)$$

试以X(t)的相关函数表示Y(t)的自相关函数。

解　Y(t)的自相关函数

$$R_Y(t_1,t_2) = E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$$

$$= E[(X(t_1+a)-X(t_1))\cdot(X(t_2+a)-X(t_2))]$$

$$= E[X(t_1+a)\cdot X(t_2+a)] - E[X(t_1+a)\cdot X(t_2)]$$

$$- E[X(t_1)\cdot X(t_2+a)] + E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$$

$$= R_X(t_1+a,t_2+a) - R_X(t_1+a,t_2)$$

$$- R_X(t_1,t_2+a) + R_X(t_1,t_2)$$