第七章 数理统计的基本概念

数理统计的分类

描述统计学

　　对随机现象进行观测、试验，以取得有代表性的观测值

推断统计学

　　对已取得的观测值进行整理、分析,作出推断、决策,从而找出所研究的对象的规律性

§ 7.1 基本概念

总体和样本

总体 —— 研究对象的全体组成的集合

一般地，研究对象全体的某个(或某些)数量指标,是一个随机变量(或多维随机变量).

若为一个随机变量,可记为X. 例如, 某钢铁厂生产的钢锭的强度.

X 的分布函数和数字特征称为总体的分布函数和数字特征.

个体 —— 组成总体的每一个元素(单元)

总体中每个元素的数量指标,可以看作随机变量 X 的某个取值.用x_i表示.

抽样 —— 从总体中抽取个体，做随机试验并记录其结果

样本 ——从总体中抽取的部分个体.

假设抽取n个个体，则每一个体的数量指标分别为一个随机变量，记为：$X_1, X_2, \ldots, X_n$，则$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为样本变量，简称样本.

n 称为样本容量.

样本值 ——
从总体中抽取的部分个体.其数量指标的观察值$(x_1, x_2,\dots ,x_n)$，称为总体 X 的一个容量为n的样本值.

或称为样本$(X_1, X_2,\dots ,X_n)$的一个实现.

样本空间 —— 样本$(X_1, X_2,\dots ,X_n)$所有可能取值的集合.

简单随机样本

设$(X_1, X_2,\ldots ,X_n)$是来自总体 X 的一个样本,它满足:

(1) 同分布：$X_1, X_2,\ldots ,X_n$都与X 有相同的分布

(2) 独立性: $X_1, X_2,\ldots ,X_n$相互独立

则称$(X_1, X_2,\ldots ,X_n)$为简单随机样本.

一般地,对有限总体,采用放回抽样所得到的样本为简单随机样本,但使用不方便,常用不放回抽样代替.当总体中个体的数目N 与样本容量 n 之比$N/n \geq 10$时,可将不放回抽样近似地看作放回抽样.

设总体 X 的分布函数为$F(x)$, $(X_1, X_2,\dots ,X_n)$为总体 X 的简单随机样本,

则$(X_1, X_2,\dots ,X_n)$的联合分布函数为

$$F_{总}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

若总体X的概率密度函数为$f(x)$,

则$(X_1, X_2,\dots ,X_n)$的联合概率密度函数为

$$f_{总}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

统计量

定义

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是取自总体X的一个样本,

$$g(r_1, r_2, \cdots, r_n)$$

为一实值连续函数,且不含有未知参数,

则称随机变量$g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为**统计量**.

若$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是一个样本值,

则称 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

为统计量$g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的一个样本值

例 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 是未知参数,

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一样本,则

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

是统计量, 其中 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$

但 $\displaystyle \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2$ 不是统计量.

若 μ ,σ 已知,则为统计量

常用的统计量

设$(X_1, X_2, \dots, X_n)$是来自总体 X 的容量为 n 的样本,

称统计量

(1) $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ 为**样本均值**

(2) $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$ 为**样本方差**

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$ 为**样本标准差**

(3) $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 为样本的 k 阶**原点矩**

(4) $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k$ 为样本的 k 阶**中心矩**

例如

$$A_1 = \overline{X}$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{n-1}{n} S^2 \equiv S_n^2$$

而样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

注 样本方差 S^2 与样本二阶中心矩 S_n^2 不同:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

而 $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

1） **关系式** $S^2 = \dfrac{n}{n-1}S_n^2$

2） 设 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$ 则

$$E(S_n^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \quad E(S^2)=\sigma^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$$

推导如下：

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$$

则

$$E\left(\overline{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\mu \qquad D\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n}\sigma^2$$

$$E(S_n^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-E\left(\overline{X}^2\right)$$

$$=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\left[D\left(\overline{X}\right)+E^2\left(\overline{X}\right)\right]$$

$$EX_i^2$$
$$=E^2(X_i)+DX_i$$
$$=\sigma^2+\mu^2$$

$$=\sigma^2+\mu^2-\left(\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$E(S^2)=E\left[\frac{n}{n-1}S_n^2\right]=\frac{n}{n-1}ES_n^2=\sigma^2$$

(5) **顺序统计量与极差**

设$(X_1, X_2,\dots ,X_n)$为样本,

$(x_1, x_2,\dots ,x_n)$为样本值,且 $x_1^* \le x_2^* \le \cdots \le x_n^*$

当$(X_1, X_2,\dots ,X_n)$取值为$(x_1, x_2,\dots ,x_n)$时

定义随机变量 $X_{(k)} = x_k^*, k = 1, 2, \cdots, n$

则称统计量$(X_{(1)}, X_{(2)},\dots ,X_{(n)})$为**顺序统计量**.

其中, $X_{(1)} = \min\limits_{1\le k\le n}\{X_k\}$, $X_{(n)} = \max\limits_{1\le k\le n}\{X_k\}$

称$D_n=X_{(n)}-X_{(1)}$为**极差**

§ 7.3 统计量的分布

确定统计量的分布—— 抽样分布, 是数理统计的基本问题之一. 采用求随机向量的函数的分布的方法可得到抽样分布. 由于样本容量一般不止 2 或 3 (甚至还可能是随机的), 故计算往往很复杂, 有时还需要特殊技巧或特殊工具.

由于正态总体是最常见的总体, 故本节介绍的几个抽样分布均对正态总体而言.

统计中常用分布

(1) 正态分布

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

则 $$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

independent and identically distributed

特别地,

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

则 $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(2) $\chi^2(n)$ 分布(n为自由度)

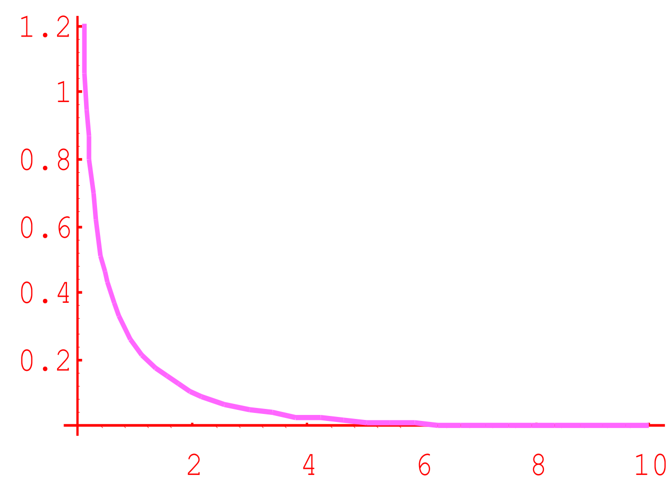
定义　设$(X_1, X_2,\ldots ,X_n)$相互独立,

且都服从标准正态分布$N(0,1)$,则称

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

$n = 1$ 时,其密度函数为

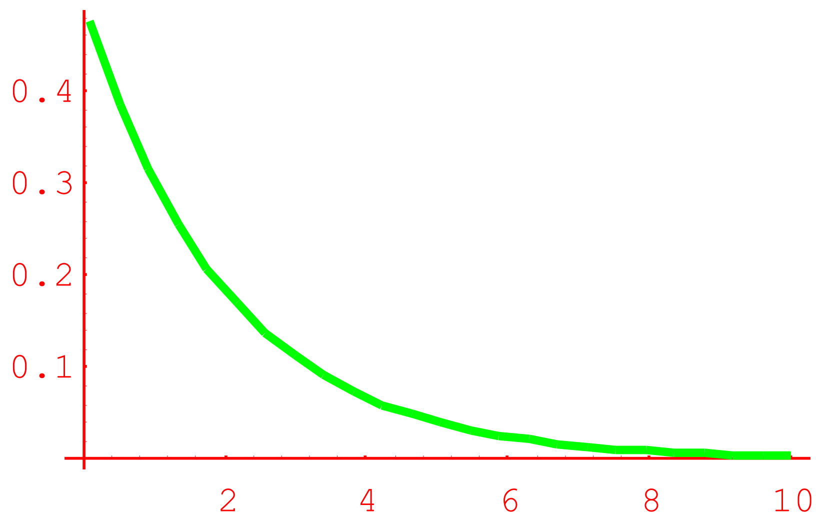
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$



$n = 2$ 时,其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

为参数为1/2的指数分布.

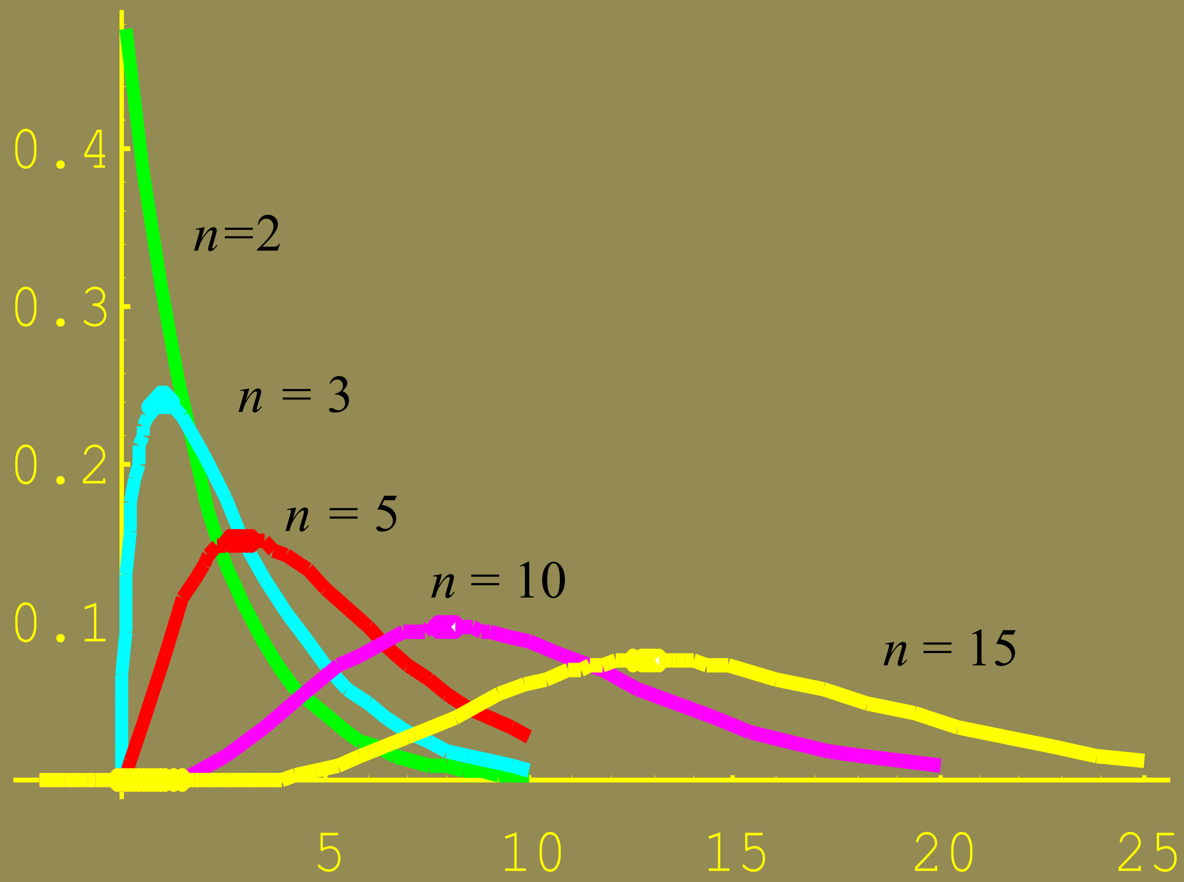


一般地, 自由度为 n 的$\chi^2(n)$的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}, & x>0\\[2ex] 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中，$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$

在$x > 0$时收敛，称为Γ函数.



0.4
0.3
0.2
0.1
n=2
n = 3
n = 5
n = 10
n = 15
5
10
15
20
25

$\chi^2(n)$ 分布的性质

1、$E\left(\chi^2(n)\right)=n, D\left(\chi^2(n)\right)=2n$

2、若 $X_1=\chi^2(n_1), X_2=\chi^2(n_2)$,

X_1, X_2相互独立，则

$X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

3、 $\chi^2(n)$的α分位数有表可查。

n>45时 $\chi_\alpha^2(n)\approx\frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$

证 1° 设 $\chi^2(n)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \quad X_i \sim N(0,1) \;\; i=1,2,\cdots,n$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,

则 $E(X_i)=0,\; D(X_i)=1,\; E(X_i^2)=1$

$$E\left(\chi^2(n)\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=n$$

$$E(X_i^4)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=3$$

$$D(X_i^2)=E(X_i^4)-E^2(X_i^2)=2$$

$$D\left(\chi^2(n)\right)=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=2n$$

(3) t 分布 (Student 分布)

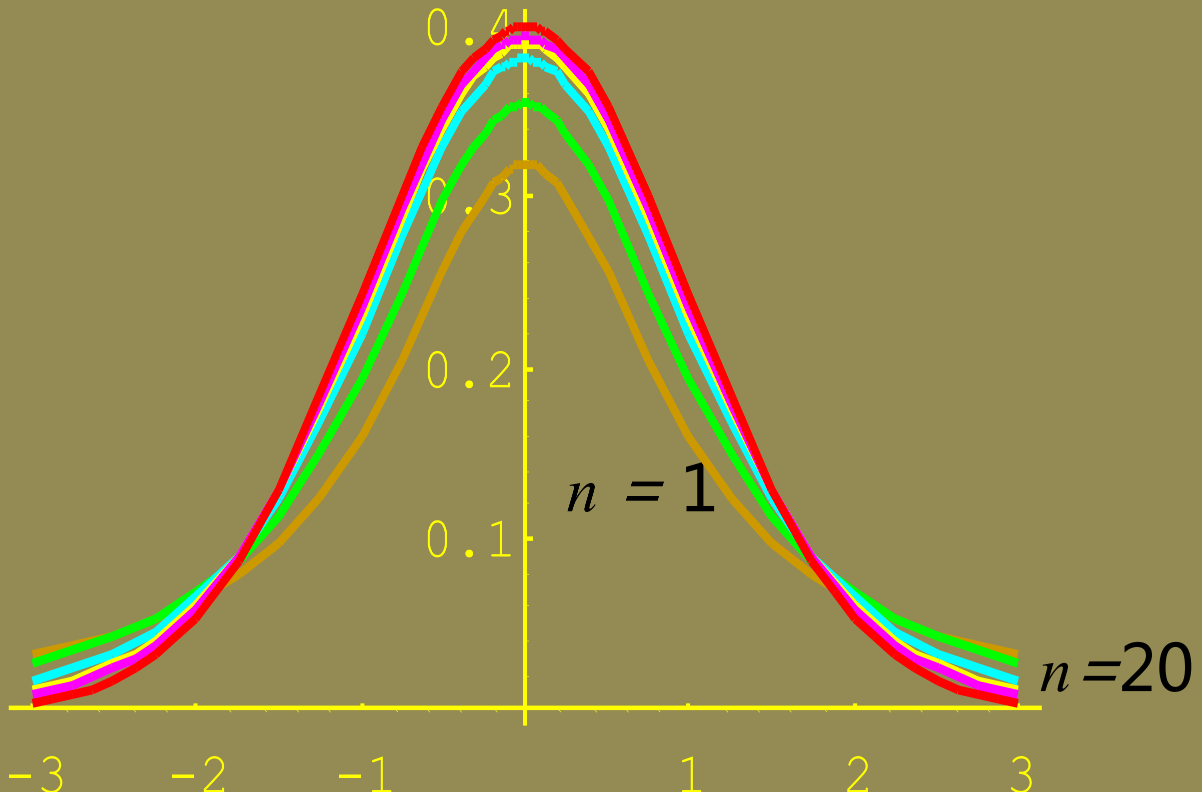
定义 设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$, X, Y 相互独立,

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

则T所服从的分布称为自由度为 n 的T分布

其密度函数为

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty$$



t 分布的图形(红色的是标准正态分布)

t 分布的性质

$1°\ f_n(t)$是偶函数,

$$n \to \infty, f_n(t) \to \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$2°\ T$分布的α分位数 t_α有表可查

(4) F 分布

定义 设 $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$, X ，Y 相互独立，

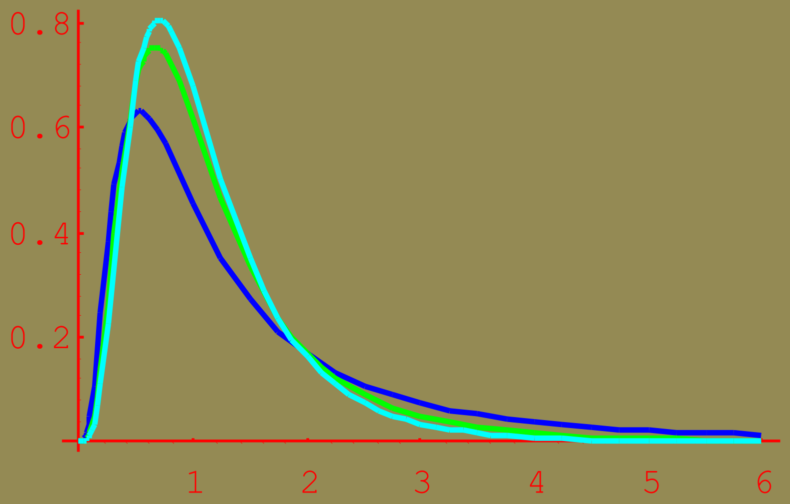
令 $$F = \frac{X/n}{Y/m}$$

则F 所服从的分布称为**第一自由度为n ，第二自由度为 m 的F 分布**

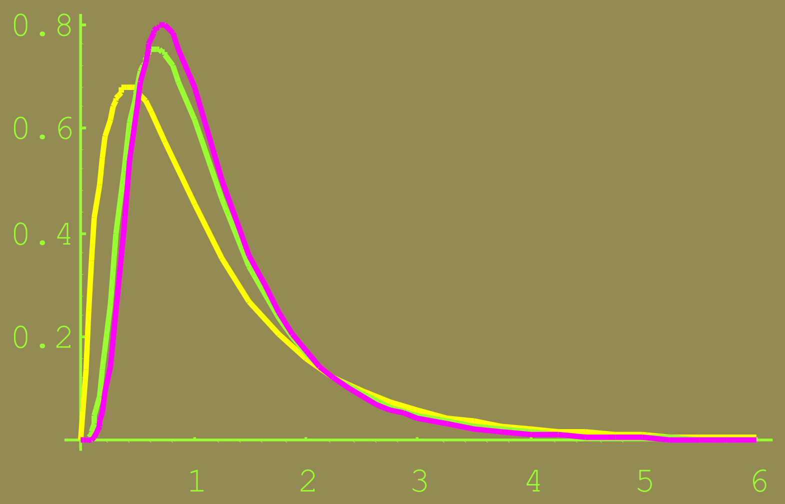
记为 $F \sim F(n,m)$

其密度函数为

$$f(t,n,m)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\dfrac{n}{m}t\right)^{-\frac{n+m}{2}} & t>0\\[2ex] 0, & t\le 0\end{cases}$$



$m = 10, n = 4$
$m = 10, n = 10$
$m = 10, n = 15$

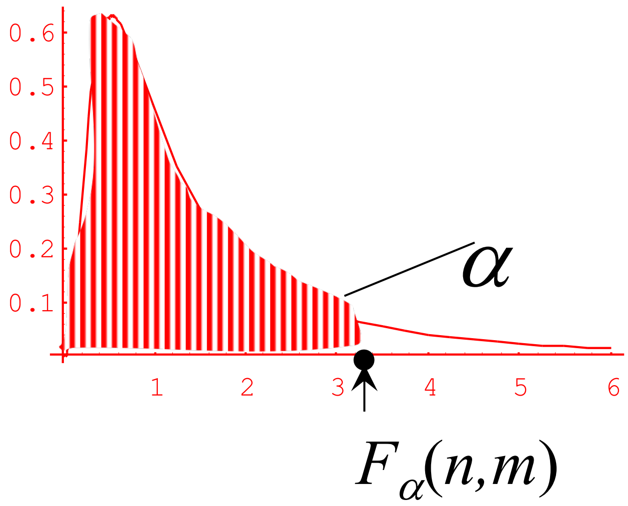


$m = 4, n =10$
$m = 10, n = 10$
$m = 15, n = 10$

F 分布的性质

1、$F(n,m)$的α分位数$F_\alpha(n,m)$有表可查:

$$P(F \le F_\alpha(n,m)) = \alpha$$



2、若$F \sim F(n, m)$,则 $\frac{1}{F} \sim F(m,n)$

事实上，若 $F \sim F(n,m)$

则可设 $F = \frac{X/n}{Y/m}$

故有 $\frac{1}{F} = \frac{Y/m}{X/n} \sim F(m,n)$

从而，在查表时可能用到结论：$F_{1-\alpha}(n,m)=\dfrac{1}{F_{\alpha}(m,n)}$

$$1-\alpha=P(F\le F_{1-\alpha}(n,m)) \;=P\left(\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\right)$$

$$=1-P\left(\frac{1}{F}\le\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\right)$$

即 $P\left(\dfrac{1}{F}\le\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\right)=\alpha$ 　　而 $\dfrac{1}{F}\sim F(m,n)$

即 $F_{\alpha}(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$ 　　$F_{1-\alpha}(n,m)=\dfrac{1}{F_{\alpha}(m,n)}$

例如 $F_{0.95}(5,4)=6.26$

故 $F_{0.05}(4,5)=\dfrac{1}{F_{0.95}(5,4)}=0.159$

抽样分布的某些结论

（I）一个正态总体

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $E(X) = \mu,$ $D(X) = \sigma^2$

总体的样本为$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，则

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)}$$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 与 $\overline{X}$ 相互独立

(1)

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \div \frac{S}{\sigma} = \boxed{\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim T(n-1)}$$

(2)

（II）两个正态总体

设$(X_1, X_2, \dots, X_n)$是来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的一个简单随机样本

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$是来自正态总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一个简单随机样本

它们相互独立.

令 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\qquad$ $\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y})^2$$

则

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\boxed{\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ n-1}{\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ m-1} \sim F(n-1, m-1)} \quad \text{- - - - (3)}$$

若 $\sigma_1 = \sigma_2$ 则 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \boxed{\sigma^2})$

的一个简单随机样本

$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$是来自正态总体 $Y \sim N(\mu_2, \boxed{\sigma^2})$

的一个简单随机样本，它们相互独立.

则 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu_1, \dfrac{\sigma^2}{n})$ $\overline{Y} = \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j \sim N(\mu_2, \dfrac{\sigma^2}{m})$

$$\Longrightarrow \quad \overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m})$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n} + \dfrac{\sigma^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\Longrightarrow \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

$\overline{X} - \overline{Y}$ 与 $\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} + \dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}$ 相互独立

$$\Longrightarrow \frac{\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^2}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}+\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}}{n+m-2}}}$$

$$\boxed{=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2)}$$

$$\text{-·-·-·-·-} \quad \textbf{(4)}$$

例3 设总体X~N(72, 100),为使样本均值大于70的概率不小于90%，则样本容量至少应为多少?

解 设样本容量为 n，则 $\overline{X} \sim N(72, \frac{100}{n})$

故 $P(\overline{X} > 70) = 1 - P(\overline{X} \le 70)$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{70-72}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \Phi\left(-0.2\sqrt{n}\right) = \Phi\left(0.2\sqrt{n}\right)$$

令 $\Phi\left(0.2\sqrt{n}\right) \ge 0.9$ 得 $0.2\sqrt{n} \ge 1.29$

即$n \ge 41.6025$ 所以取$n=42$

例4 从正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 中，抽取了 $n = 20$ 的样本 $(X_1, X_2, \ldots, X_{20})$

(1) 求 $P\left(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \le 1.76\sigma^2\right)$

$X_1, X_2, \cdots, X_{20}$

(2) 求 $P\left(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i - \mu\right)^2 \le 1.76\sigma^2\right)$

解 (1) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$即\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{19S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(19)$$

$$故\quad P\left(0.37\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\le1.76\sigma^2\right)$$

$$=P\left(7.4\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\le35.2\right)$$

$$=P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\ge7.4\right)-P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\ge35.2\right)$$

$$\overset{查表}{=}0.99-0.01=0.98$$

(2) $$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(20)$$

X_i与X同分布，即

$$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(20)$$

故 $$P\left(0.37\sigma^2 \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\mu\right)^2 \le 1.76\sigma^2\right)$$

$$= P\left(7.4 \le \sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \le 35.2\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \ge 7.4\right) - P\left(\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \ge 35.2\right)$$

$$= 0.995 - 0.025 = 0.97$$

例5 设随机变量X与Y相互独立，$X \sim N(0,16)$, $Y \sim N(0,9)$, $X_1, X_2, \ldots, X_9$ 与$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{16}$ 分别是取自X与Y的简单随机样本, 求统计量

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{16}^2}}$$

所服从的分布

解 $X \sim N(0,16)$, $X_i \sim N(0,16)$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_9 \sim N(0, 9 \times 16)$$

$$\frac{1}{3 \times 4}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9) \sim N(0,1)$$

$$Y \sim N(0,9), \qquad Y_i \sim N(0,9)$$

$$\frac{1}{3}Y_i \sim N(0,1) \quad ,i = 1,2,\cdots,16$$

$$\left(\frac{1}{3}Y_i\right)^2 \sim \chi^2(1) \qquad \sum_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{3}Y_i\right)^2 \sim \chi^2(16)$$

从而 $$\frac{\frac{1}{3\times 4}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_9\right)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{3}Y_i\right)^2}{16}}} \sim t(16)$$

即 $$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{16}^2}} \sim t(16)$$

例6 设总体$X \sim N(0,1)$， $X_1, X_2, \ldots, X_6$为总体 X 的样本， $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$ 试确定常数c 使cY服从 χ^2 分布.

解 $X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3)$， $X_4+X_5+X_6 \sim N(0,3)$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X_1+X_2+X_3\right) \sim N(0,1),$$

$X \sim N(0,1)$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X_4+X_5+X_6\right) \sim N(0,1)$$

故 $$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X_1+X_2+X_3\right)\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X_4+X_5+X_6\right)\right]^2$$

$$=\frac{1}{3}Y \sim \chi^2(2)$$

因此 $c=\dfrac{1}{3}$

例7 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本， $\bar{X}$是样本均值，

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \quad S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量为:

(A) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_1}\sqrt{n-1}$ (B) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_2}\sqrt{n-1}$

(C) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_3}\sqrt{n}$ (D) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_4}\sqrt{n}$

解 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ $\qquad \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n(n-1)}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}} \sim t(n-1)$$

故应选(B)