Lecture 2

Lebesgue 测度

Y. Ruan
Department of Mathematics

Real Analysis

2.1 外测度

回顾 $\mathbb{R}^2$ 中在求有界区域 E 的面积时的做法, 首先在全空间建立网格, 然后用含于 E 的格子的面积和作为 E 的“内面积”, 与 E 相交的格子的面积和作为 E 的“外面积”. 若格子不断加细时, “内面积”与“外面积”能趋近于同一数值, 那么称之为 E 的面积.

若令 $\mu^*(E)$ 表示任意集合 E 的“外面积”, 容易看出, “外面积”有如下**基本性质**:

- $\mu^*(\varnothing) = 0$
- (次可加性) 若 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 那么

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

外测度是"外面积"的抽象推广. 集合 X 的全体子集记为 2^X.

定义 2.1.1 设 X 为非空集合. 满足上述"外面积"性质的映射: $\mu^*: 2^X \mapsto [0,\infty]$ 称为 X 上的外测度.

下面我们主要考察 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度.

可测集

定义 2.1.2 设 μ^* 为 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度. 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为 μ^*-可测, 如果 Carathéodory 条件成立: $\forall T \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^c).$$

这里 T 称为检验集. 本节可测性均指 μ^*-可测.

注 2.1.1 由于有次可加性, 为证集合 E 为可测集, 只需证明

$$\mu^*(T) \geqslant \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^c),$$

且可同时假设 $\mu^*(T) < \infty$.

定理 2.1.1 下述性质成立.

(1) $A \subset B$, 那么 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. 若 A 可测且 $\mu^*(A) < \infty$, 那么

$$\mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B) - \mu^*(A).$$

(2) 若 S 可测, $A \subset S, B \subset S^c$, 那么

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

(3) A 为可测集当且仅当 A^c 为可测集.

(4) 空集 $\varnothing$ 和全集 $\mathbb{R}^n$ 均为可测集. 一般地, 若 $\mu^*(A) = 0$, 那么 A 为可测集.

■ (1) (2) 由定义得出.
(3) 若 A 是-可测集, $\forall T$,

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c)\\ &= \mu^*(T\cap (A^c)^c)+\mu^*(T\cap A^c),\end{aligned}$$

可见 A^c 为可测集.
(4) 若 $\mu^*(A)=0$, 那么 $\forall T$,

$$\mu^*(T)\geqslant \mu^*(T\cap A^c)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c),$$

再根据注 2.1.1即得证.

习题 2.1.1 设 μ^* 为 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度, $A\subset\mathbb{R}^n$. 定义

$$\mu_A^*(E)=\mu^*(E\cap A), \ \forall E\subset\mathbb{R}^n.$$

那么 μ_A^* 是外测度, 且任何 μ^*-可测集也是 μ_A^*-可测的. 称 μ_A^* 为 μ^* 在 A 上的**限制**.

定理 2.1.2 设 $\{E_k\}$ 为可测集列, 那么
(1) 可数交集与可数并集都是可测集:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, \ \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

(2) 若 $\{E_k\}$ 互不相交, 那么可数可加性成立,

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

(3) 若 $\{E_k\}$ 为递增集列, 那么

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(E_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

(4) 若 $\{E_k\}$ 为递减集列, $\mu^*(E_1) < \infty$, 那么

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*(E_k) = \mu^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

- 分几个步骤证明.
  1. 两个可测集的并集是可测集. 事实上, $\forall T$,

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap E_1) + \mu^*(T \cap E_1^c)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu^*(T \cap E_1) + \mu^*(T \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(T \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&\geqslant \mu^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c).
\end{aligned}
$$

在最后一个不等号中, 我们用到集合运算分配律

$$
\begin{aligned}
&(T \cap E_1) \cup (T \cap E_1^c \cap E_2) \\
&= T \cap (E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)) \\
&= T \cap (E_1 \cup E_2).
\end{aligned}
$$

进一步可知, 有限个可测集的并集是可测集.

2. 两个可测集的交集是可测集. 事实上,

$$E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$$

是可测集, 从而有限个可测集的交集是可测集.

3. 设 $\{E_k\}$ 互不相交. $\forall k \geqslant 1$, 记

$$F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j.$$

那么 F_k 是可测集, 且有

$$\begin{aligned}\mu^*\left(F_{k+1}\right) &= \mu^*\left(F_{k+1} \cap F_k\right) + \mu^*\left(F_{k+1} \cap F_k^c\right) \\ &= \mu^*\left(F_k\right) + \mu^*\left(E_{k+1}\right).\end{aligned}$$

从而, $\forall k \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{j} \mu^*\left(E_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{j} E_k\right),$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(E_k\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

由于相反的不等式自然成立, 故 (2) 成立.

4. (3) 可由 (2) 推出: 首先利用假设, $\forall s \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(E_{k+1}\right) &= \mu^*\left(E_k\right) + \mu^*\left(E_{k+1} \cap E_k^c\right) \\
&= \ldots \\
&= \mu^*\left(E_1\right) + \sum_{s=1}^{k} \mu^*\left(E_{s+1} \cap E_s^c\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*\left(E_k\right) = \mu^*\left(E_1\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(E_{k+1} \cap E_k^c\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

5. (4) 可由 (3) 推出: 由假设

$$\mu^*(E_k) \searrow, \ 0 \leqslant \mu^*(E_k) \leqslant \mu^*(E_1) < \infty,$$

故 $\mu^*(E_k)$ 的极限存在. 利用 (3), 次可加性得

$$\begin{aligned}
\mu^*(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mu^*(E_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu^*(E_1 \cap E_k^c) \\
&= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \cap E_k^c)\right) \\
&= \mu^*\left(E_1 \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c\right)\right) \\
&\geqslant \mu^*(E_1) - \mu^*\left(E_1 \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \mu^* (E_1) - \mu^* \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right).$$

因此

$$\lim_{k \to \infty} \mu^* (E_k) \leqslant \mu^* \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right).$$

上述减法运算的可行性由 $\mu^* (E_1) < \infty$ 保证. 同时,

$$\mu^* \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leqslant \mu^* (E_k), \ \forall k.$$

由此

$$\mu^* \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leqslant \lim_{k \to \infty} \mu^* (E_k).$$

从而 (4) 得证.

6. 为证 (1) , 令

$$F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j,\ \forall k \geqslant 1.$$

那么 $\{F_k\}$ 为递增可测集列, 且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

$\forall T$, 假设 $\mu^*(T) < \infty$, 利用习题 2.1.1, (3) , (4) 得到

$$\mu^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right) + \mu^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_T^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \mu_T^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^c\right) \\
&= \mu_T^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) + \mu_T^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^c\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu_T^*\left(F_k\right) + \lim_{k\to\infty} \mu_T^*\left(F_k^c\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\mu^*\left(T \cap F_k\right) + \mu^*\left(T \cap F_k^c\right)\right) \\
&= \mu^*\left(T\right),
\end{aligned}
$$

因此 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 是可测集, 从而 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c\right)^c$ 是可测集. ///

σ-代数, Borel σ-代数

定义 2.1.3 X 为任意集合. 集合族 $\mathcal{A} \subset 2^X$ 称为 σ-代数, 如果

(1) 空集 $\varnothing$, 全集 $X \in \mathcal{A}$,
(2) $A \in \mathcal{A}$ 那么 $X \cap A^c \in \mathcal{A}$,
(3) $A_k \in \mathcal{A}\ (k = 1, \ldots)$, 那么

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A},$$

(4) $A_k \in \mathcal{A}\ (k = 1, \ldots)$, 那么

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

注 2.1.2 (2) 中 $X \cap A^c$ 即是相对于全集 X 的 A 的余集. 另外 (3) 和 (4) 只需有一条成立即可, 因为有 (2) (3) $\Rightarrow$ (4), (2) (4) $\Rightarrow$ (3).

定义 2.1.4 令 $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ 为一集合族, 且是一个非空族. 包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ-代数称为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ-代数, 记为 $\sigma(\mathcal{C})$.

定义 2.1.5 令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上所有开集构成的集族. 称 $\sigma(\mathcal{O})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ-代数. $\sigma(\mathcal{O})$ 中的集合称为 Borel 集, 今后把这一 Borel σ-代数记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

例 2.1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, 闭集, G_δ 集, F_σ 集是 Borel 集.

Borel 集可测性的判别

为判断 Borel 集是否可测, 我们引入

定理 2.1.3 (**Carathéodory 准则**) 若以下成立: $\forall A, B \subset \mathbb{R}^n$, 只要 $d(A, B) > 0$, 就有

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

那么 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 集是可测集.

- 只需证明闭集是可测集. 事实上, 由可测集的余集仍是可测集得知开集是可测集, 从而开集全体 $\mathcal{O}$ 包含于 $\mathcal{L}^n$, 而 Borel σ-代数是包含 $\mathcal{O}$ 的最小 σ-代数, 因此 $\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{L}^n$.

  1. 设 F 为闭集, 要证, $\forall T$, $\mu^*(T) < \infty$, 都有

$$\mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \cap F^c) \leqslant \mu^*(T).$$

令

$$F_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) \leqslant \frac{1}{k} \right\}, \ k = 1, 2, \ldots$$

那么

$$d(T \cap F, T \cap F_k^c) > 0.$$

由假设

$$\mu^*(T\cap F)+\mu^*(T\cap F_k^c)=\mu^*((T\cap F)\cup(T\cap F_k^c))$$
$$\leqslant\mu^*(T).$$

如果能证明

$$\lim_{k\to\infty}\mu^*(T\cap F_k^c)=\mu^*(T\cap F^c). \tag{2.1}$$

那么就能得出 F 可测.

2. 下证 (*Eq.* 2.1). 令

$$R_j=\left\{x\in T:\frac{1}{j+1}<d(x,F)\leqslant\frac{1}{j}\right\},\ j=1,2,\ldots$$

由于 F 闭, $\forall k$,

$$T \cap F^c = (T \cap F_k^c) \cup \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} R_j \right).$$

因此

$$\mu^*(T \cap F_k^c) \leqslant \mu^*(T \cap F^c) \leqslant \mu^*(T \cap F_k^c) + \sum_{j=k}^{\infty} \mu^*(R_j). \quad (2.2)$$

注意到

$$d(R_i, R_j) > 0, \ \forall j \geqslant i+2,$$

再利用假设得到, $\forall s \geqslant 1$,

$$\sum_{j=1}^{s} \mu^*(R_{2j+1}) = \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{s} R_{2j+1} \right) \leqslant \mu^*(T) < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{s} \mu^*\left(R_{2j}\right) = \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{s} R_{2j}\right) \leqslant \mu^*(T) < \infty.$$

从而

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left(R_j\right) \leqslant 2\mu^*(T) < \infty.$$

在 (*Eq.* 2.2) 令 $k \to \infty$ 即得 (*Eq.* 2.1) .

2.2 Lebesgue 外测度

外测度的一个重要例子就是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度.

定理 2.2.1 **(Lebesgue 外测度)** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 那么

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{为}\mathbb{R}^n\text{的开矩体}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度. 这里对 $\mathbb{R}^n$ 的开矩体 $I = [a, b]$, $|I| = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ 是它的体积.

- 显然 $m^*(\varnothing) = 0$. 只要证次可加性. 若 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 那么

$\forall \varepsilon > 0$, 存在开矩体 $I_{k,j}$ 使

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_{k,j}| \leqslant m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k},\ \forall k \geqslant 1.$$

由于 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{k,j}$,

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_{k,j}| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Lebesgue 外测度的定义中“开矩体”并非本质, 用闭矩体也得到同样的结论. 然而用无穷可数个矩体作为覆盖是本质的.

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 由 Lebesgue 外测度的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 G, $E \subset G$,

$$m^*(G) \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

因此

$$m^*(E) = \inf\{m^*(G) : G\text{开}, E \subset G\}.$$

例 2.2.1 若 I 为开 (闭) 矩体, 那么 $m^*(I) = |I|$. 进而知可数集的外测度为零.

例 2.2.2 Cantor 集 $\mathfrak{C}$ 的外测度为零.

- 记 C_k 为第 k 次移除操作之后剩余的集合, 它由 2^k 个长为

3^{-k} 的闭区间组成, 那么

$$m^*(\mathfrak{C}) \leqslant 2^k \frac{1}{3^k} \to 0.$$

定义 2.2.1 按照定义 2.1.2, 若集合 E 满足对应于 Lebesgue 外测度的 Carathéodory 条件, 那么称之为 m^*-可测或 Lebesgue 可测, **今后说到可测性时均指 Lebesgue 可测**.

定理 2.2.2 (**平移不变性**) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $\forall h \in \mathbb{R}^n$, 记

$$E + h = \{x + h : x \in E\}.$$

那么 $m^*(E + x_0) = m^*(E)$, 且 $E + x_0$ 可测当且仅当 E 可测.

■ $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 E 的开矩体覆盖当且仅当 $\{I_k+x_0\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $E+x_0$ 的开矩体覆盖, 而 $\forall k$, $|I_k|=|I_k+x_0|$, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k+x_0|.$$

由此可知 $m^*(E+x_0)=m^*(E)$. 另外, 若 E 可测, 那么 $\forall T$,

$$\begin{aligned}
m^*(T) &= m^*(T-x_0) \\
&= m^*((T-x_0)\cap E)+m^*((T-x_0)\cap E^c) \\
&= m^*(T\cap(E+x_0))+m^*(T\cap(E+x_0)^c),
\end{aligned}$$

最后一个等式用到 $E^c+x_0=(E+x_0)^c$. 因此 $E+x_0$ 可测. ///

由定理 2.1.1, 定理 2.1.2可得

定理 2.2.3 全体可测集构成 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数，称为 Lebesgue σ-代数，记为 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Lebesgue 外测度在 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 上的限制称为 **Lebesgue 测度** (简称**测度**). $\forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, 即 E 为可测集时，其 (外) 测度记为 $m(E)$.

Lebesgue 外测度满足 Carathéodory 准则的条件.

定理 2.2.4 $\forall A, B \subset \mathbb{R}^n$, 若 $d(A, B) > 0$, 那么

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).$$

从而 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 集都是可测集，即 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

■ 由于有次可加性, 只需要证明

$$m^*(A \cup B) \geqslant m^*(A) + m^*(B).$$

根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的开矩体 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

并且可以假设 (为什么) 开矩体的最大直径不超过 $d(A, B)$. 那么 $\{I_k\}$ 可划分为两个子族 $\{I'_k\}, \{I''_k\} \subset \{I_k\}$ 满足

$$A \subset \bigcup I'_k, \ B \subset \bigcup I''_k.$$

因此

$$m^*(A) + m^*(B) \leqslant \sum |I'_k| + \sum |I''_k|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \\
&\leqslant m^* (A \cup B) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$