例6 设

$$X \sim U\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), Y = g(X) = \begin{cases} \ln X, & X > 0, \\ 0, & X \le 0 \end{cases}$$

求 $E(Y), D(Y)$.

解 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} g(x) \cdot 1 dx \quad = \int_{0}^{+\frac{1}{2}} \ln x \cdot 1 dx$$

$$= (x \ln x - x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \qquad = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) f_X(x)dx$$

$$=\int_0^{+\frac{1}{2}} \ln^2 x \cdot 1dx =[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x]\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2}+1-\ln\frac{1}{2} \quad =\frac{1}{2}\ln^2 2+1+\ln 2$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln^2 2+1+\ln 2\right) -\left(-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\ln^2 2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}$$

例7 在 [0, 1] 中随机地取两个数 X, Y, 求 $D(\min\{X, Y\})$

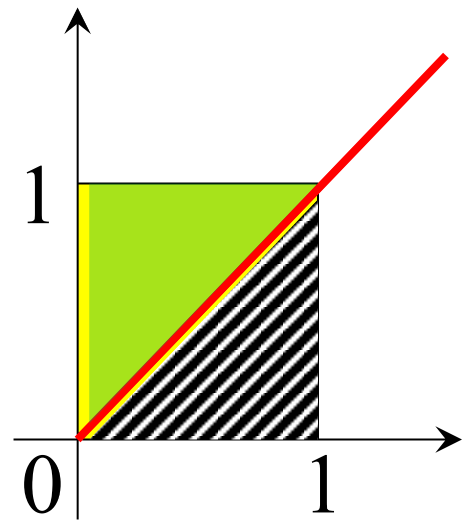
解 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$E(\min\{X,Y\})$

$= \iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<1}} \min\{x,y\}dxdy$

$= \int_0^1\left(\int_x^1 xdy\right)dx + \int_0^1\left(\int_y^1 ydx\right)dy$

$= \frac{1}{3}$



$$E(\min^2\{X,Y\})$$

$$=\int_0^1\left(\int_x^1 x^2dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_y^1 y^2dx\right)dy$$

$$=\frac{1}{6}$$

$$D(\min\{X,Y\})$$

$$=E\left(\min^2\{X,Y\}\right)-E^2\left(\min\{X,Y\}\right)$$

$$=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad =\frac{1}{18}$$

例8 将编号分别为 $1 \sim n$ 的n 个球随机地放入编号分别为 $1 \sim n$ 的n 只盒子中，每盒一球. 若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对. 求配对个数 X 的期望与方差.

解

$$X_i = \begin{cases} 1, & i\text{ 号球放入 } i \text{ 号盒} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

则 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

但 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 不相互独立，

X_i	1	0
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$i = 1, 2, \cdots, n$

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \quad = \frac{1}{n}$$

$$E(X) \quad = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad = n \cdot \frac{1}{n} \quad = 1$$

$$E(X^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} X_i X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} E(X_i X_j)$$

X_i^2	1	0
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$$E(X_i^2)=\frac{1}{n} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

X_iX_j	1	0
P	$\frac{1}{n(n-1)}$	$1-\frac{1}{n(n-1)}$

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}E(X_iX_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\quad+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=n\cdot\frac{1}{n}\quad+2\cdot C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1+1=2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)\quad=2-1^2\quad=1$$

标准化随机变量

设随机变量 X 的期望$E(X)$、方差$D(X)$都存在，且$D(X) \neq 0$, 则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量. 显然，

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1$$

仅知随机变量的期望与方差并不能确定其分布，例如：

X	-1	0	1
P	0.1	0.8	0.1

$E(X)=0,\quad D(X)=0.2$

与

Y	-2	0	2
P	0.025	0.95	0.025

$E(Y)=0,\quad D(Y)=0.2$

它们有相同的期望、方差
但是分布却不同

但若已知分布的类型，及期望和方差，常能确定分布.

例9 已知 X 服从正态分布, $E(X) = 1.7$, $D(X) = 3$, $Y = 1 - 2X$, 求 Y 的密度函数.

解 $E(Y) = 1 - 2 \times 1.7 \quad = -2.4$,

$D(Y) = 2^2 \times 3 \quad = 12$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(y+2.4)^2}{24}},$$

$$-\infty < y < +\infty$$

例10 已知 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2+Bx, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 A,B 是常数，且 $E(X)=0.5.$

(1)求 $A,B.$

(2)设 $Y=X^2$, 求 $E(Y),D(Y)$

解 (1)

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (Ax^2 + Bx)dx &= \frac{A}{3} + \frac{B}{2} = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(Ax^2 + Bx)dx &= \frac{A}{4} + \frac{B}{3} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$A = -6,$$

$$B = 6$$

$$f(x) = \begin{cases} -6x^2 + 6x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) $$E(Y)=E(X^2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 x^2(-6x^2+6x)dx \quad =\frac{3}{10}$$

$$E(Y^2)=E(X^4)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 x^4(-6x^2+6x)dx \quad =\frac{1}{7}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y) \quad =\frac{1}{7}-\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{37}{700}$$

作业 P122 (12)

设随机变量X在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}]$ 上服从均匀分布，试求Y=cosX的概率密度

解 ：X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

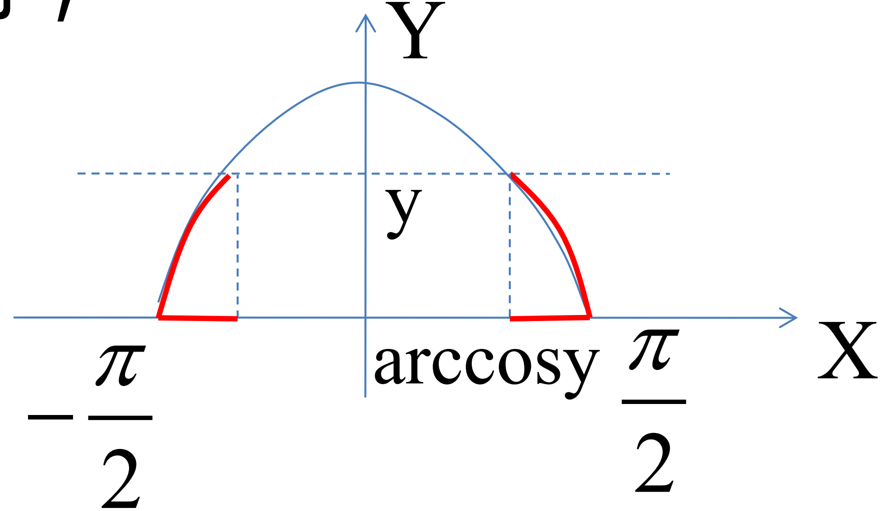
$$Y=\cos X\in[0, \quad 1]$$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\cos X \le y)$

(1) $y<0$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\cos X \le y) = 0$

(2) $y>1$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\cos X \le y) = 1$

(3)0≤y≤1时，



$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\cos X \le y)$

$$= P\left(-\frac{\pi}{2} \le X \le -\arccos y\right) + P\left(\arccos y \le X \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2P\left(\arccos y \le X \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos y\right) \quad = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos y\right)$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arccos y\right), & x\in[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}]\\[2ex] 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & x\in[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}]\\[2ex] 0, & \text{其他}\end{cases}$$