Lecture 4

Lebesgue 积分

Y. Ruan
Department of Mathematics

Real Analysis

4.1 Lebesgue 积分

下面建立可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上可测函数 f 的 Lebesgue 积分:

$$\int_E f(x)\,dx.$$

分以下几个步骤.

- 简单函数的积分
- 有限测度集上有界可测函数的积分
- 非负可测函数的积分
- 可测函数的积分

4.2 简单函数的积分

定义 4.2.1 设简单函数 ϕ 的标准表示为

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x),$$

即 $a_1, \ldots, a_N$ 为互异非零常数, $E_1, \ldots, E_N$ 为互不相交的有限测度可测集. ϕ 的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测, 那么 $\phi(x)\chi_E(x)$ 仍是简单函数, ϕ 在 E 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E \phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\chi_E(x)\,dx.$$

为简化记号, $\int_{\mathbb{R}^n}$ 简写为 $\int$, $\int_E \phi(x)\,dx$ 简写为 $\int_E \phi$

例 4.2.1 (Dirichlet 函数的积分) 设 $[0,1]$ 上的有理数全体为 Q. Dirichlet 函数

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x\in Q, \\ 0, & x\in[0,1]\setminus Q, \end{cases}$$

是简单函数, 其 Lebesgue 积分为

$$\int_{[0,1]} \mathcal{D}(x)\,dx = \int 1\cdot\chi_Q(x)\,dx = 1\cdot m(Q) = 0.$$

而我们知道 Dirichlet 函数不是 Riemann 可积的.

定理 4.2.1 设 ϕ 与 ψ 为简单函数.
(1) 简单函数 ϕ 的积分不依赖于其表示形式, 即, 若简单函数 ϕ 的任意表示为

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x),$$

那么

$$\int \phi = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int (a\phi + b\psi) = a\int \phi + b\int \psi.$$

(3) 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 为不相交可测集, 那么

$$\int_{E\cup F} \phi = \int_E \phi + \int_F \phi.$$

(4) 若 $\phi \leqslant \psi$, 那么

$$\int \phi \leqslant \int \psi.$$

(5) $|\phi|$ 为简单函数, 且

$$\left|\int \phi\right| \leqslant \int |\phi| .$$

■ (1) **1**. $E_1, \ldots, E_N$ 互不相交. 任取 a 为 $\{a_k\}$ 中互异非零值中的一个, 令

$$E_a' = \bigcup_{k\in I_a} E_k,$$

这里 I_a 是满足 $a = a_k$ 的指标 k 全体. 那么

$$m\left(E_a'\right) = \sum_{k\in I_a} m\left(E_k\right) .$$

显然 ϕ 也能表示为

$$\phi(x) = \sum_{a} a\chi_{E'_a}(x),$$

这里求和对所有 $\{a_k\}$ 中互异的非零值 a 进行. 因此

$$\int \phi = \sum_{a} am(E'_a) = \sum_{a} \sum_{k \in I_a} am(E_k) = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

2. $E_1, ..., E_N$ 不一定互不相交. 类似于加细, 存在互不相交的可测集列 $\{E'_j\}_{j=1}^{N'}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k = \bigcup_{j=1}^{N'} E'_j,$$

且 E_k 是包含在其中的所有 E_j' 的并集. $\forall j$, 令

$$a_j' = \sum_{k:E_k \supset E_j'} a_k.$$

那么 ϕ 能表示为

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{N'} a_j' \chi_{E_j'}(x).$$

因此利用前一情形得到

$$\int \phi = \sum_{j=1}^{N'} a_j' m\left(E_j'\right) = \sum_{j=1}^{N'} \sum_{k:E_k \supset E_j'} a_k m\left(E_j'\right) = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

(2) 首先由定义容易看出

$$a\int\phi=\int a\phi,\ b\int\psi=\int b\psi.$$

要证明的线性性质变为

$$\int(a\phi+b\psi)=\int a\phi+\int b\psi.$$

因此, 为证明线性性质只需考虑 $a=b=1$ 的情形. 设 ϕ,ψ 的标准表示为,

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\chi_{E_i}(x),\ \psi(x)=\sum_{j=1}^{N}\beta_j\chi_{F_j}(x).$$

令

$$\alpha_0 = 0,\ E_0 = \left(\bigcup_{i=1}^{M} E_i\right)^c,$$

$$\beta_0 = 0,\ F_0 = \left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right)^c.$$

那么

$$\phi + \psi = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} \left(\alpha_i + \beta_j\right) \chi_{E_i \cap F_j}(x).$$

根据定义和测度的可加性,

$$\int (\phi + \psi) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} \left(\alpha_i + \beta_j\right) m\left(E_i \cap F_j\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\alpha_i m\left(E_i\cap F_j\right)+\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{M}\beta_j m\left(E_i\cap F_j\right)\\
&= \sum_{i=0}^{M}\alpha_i m\left(E_i\right)+\sum_{j=0}^{N}\beta_j m\left(F_j\right)\\
&= \int\phi+\int\psi.
\end{aligned}
$$

(3) 由于

$$\chi_{E\cup F}=\chi_E+\chi_F.$$

因此

$$\int_{E\cup F}\phi=\int\phi\chi_{E\cup F}=\int\phi\left(\chi_E+\chi_F\right)=\int_E\phi+\int_F\phi.$$

(4) 若简单函数 $\eta \geqslant 0$, 那么容易看出 $\int \eta \geqslant 0$. 对 $\eta = \psi - \phi$ 应用此结论及性质 (2),

$$\int \psi - \int \phi = \int \eta \geqslant 0.$$

(5) 设简单函数 ϕ 的任意表示为

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x),$$

那么

$$\left|\int \phi\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |a_k| m(E_k) = \int |\phi|.$$