4.5 一般可测函数的积分

对可测函数 $f(x)$, 考察其正部与负部

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \ f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

容易看出, f 可测当且仅当 f^+, f^- 可测. 并且非负可测函数 $|f|$ 可积当且仅当 f^+, f^- 可积. 事实上, 由于 $0 \leqslant f^+, f^- \leqslant |f|$, $|f|$ 可积蕴含了 f^+, f^- 可积, 反过来 f^+, f^- 可积, 也能得出 $|f|$ 可积, 因为 $|f| = f^+ + f^-$. 由此我们定义

定义 4.5.1 设 f 为广义实值可测函数, 若 $\int |f| < \infty$, 则称 f 是 Lebesgue 可积的, 其 Lebesgue 积分定义为

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

设 E 是可测集, 若 $\int_E |f| < \infty$, 则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积, 其 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)\,dx = \int f(x)\,\chi_E(x)\,dx.$$

Lebesgue 可积简称可积.

记号: $E \subset \mathbb{R}^n$ 上可积函数全体记为 $L^1(E)$.
注意定义蕴含: f 可积与 $|f|$ 可积等价.

定理 4.5.1 若 $f \in L^1(E)$, 那么 f 几乎处处有限, 且 $\forall E_0 \subset E$, $m(E_0) = 0$,

$$\int_E f = \int_{E \backslash E_0} f.$$

■ 由 f 可积及定理 4.4.1(5), $|f|$ 几乎处处有限, 因此 f 几乎处处有限. 由积分的定义,

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

运用推论 4.4.1得

$$\int_E f^+ = \int_{E\setminus E_0} f^+, \quad \int_E f^- = \int_{E\setminus E_0} f^-.$$

因此

$$\int_E f = \int_{E\setminus E_0} f^+ - \int_{E\setminus E_0} f^- = \int_{E\setminus E_0} f.$$

///

注 4.5.1 定理 4.5.1表明, 修改可积函数在零测集上的值不会改变其积分.

定理 4.5.2 (比较判别法) 设 f 可测. g 非负可积满足

$$|f(x)| \leqslant g(x).$$

那么 f 可积, 且

$$\left|\int f\right| \leqslant \int |f|.$$

■ 由非负函数积分性质定理 4.4.1(4), $|f|$ 可积, 因而 f 可积. 另外

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^{+} - \int f^{-}\right| \leqslant \int f^{+} + \int f^{-} = \int |f|.$$

定理 4.5.3 设 f, g 为可积函数.

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

(2) 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 为不相交可测集, 那么

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

- (1) **1.** 若 $a > 0$, 利用非负可测函数积分性质,

$$a \int f = a \int f^+ - a \int f^- \text{ (积分定义)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int af^+ - \int af^- \text{ (非负函数积分性质)} \\
&= \int (af)^+ - \int (af)^- \\
&= \int af \text{ (积分定义)}
\end{aligned}
$$

若 $a < 0$,

$$
\begin{aligned}
a \int f &= a \int f^+ - a \int f^- \text{ (积分定义)} \\
&= -\int (-a) f^+ + \int (-a) f^- \text{ (非负函数积分性质)} \\
&= -\int (af)^- + \int (af)^+
\end{aligned}
$$

$$= \int af \text{(积分定义)}$$

综合起来, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$a \int f = \int af.$$

同理 $\forall b \in \mathbb{R}$,

$$b \int f = \int bf.$$

2. 为证明 (2) , 不妨设 $a = b = 1$. 注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-.$$

从而

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^- .$$

由非负函数积分的线性性质,

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int (f+g)^-,$$

由于 $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, f, g 可积, 根据比较判别法, $f+g$ 可积, 因此上述等式中各项积分都有限, 移项整理后得到

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

(2) 证明与非负函数情形类似.

定理 4.5.4 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么以下等价

(1) $\forall$ 可测集 E,

$$\int_E f = \int_E g.$$

(2)

$$\int |f-g| = 0.$$

(3) $f = g$, $a.e.\ x$.

- (2) 与 (3) 由定理 4.4.3给出.

  (2) $\Rightarrow$ (1) $\forall$ 可测集 E,

$$\left|\int_E f - \int_E g\right| \leqslant \int |f-g|\chi_E \leqslant \int |f-g| = 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (3) 令 $u = f - g$. 若 $f = g, a.e.\ x$. 不成立, 那么 u^+ 或 u^- 在某正测度集上非零, 不妨设 $E^+ = \{x : u^+ > 0\}$ 测度为正. 那么

$$\int_{E^+} (f - g) = \int_{E^+} u^+ > 0.$$

例 4.5.1 (推广的 Fatou 引理) 教材第二版 p173 例题 4

例 4.5.2 (**Jensen** 不等式) 教材第二版 p173 例题 5

例 4.5.3 (积分区域可数可加) 教材第二版 p175 定理 4.11

下面证明比有界收敛定理更一般的结论, 它是本章的核心, 至此解决了本课一开始所提出的问题.

定理 4.5.5 **(控制收敛定理-DCT)** 设 $\{f_k\}$ 为 E 上的可测函数,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),\ a.e.x.$$

若存在可积函数 g 使得 $\forall k$, $|f_k(x)| \leqslant g(x)$, $a.e.x.$, 那么

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k - f| = 0,$$

从而极限与积分可交换,

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \int_E f.$$

■ 由于 $|f_k(x)| \leqslant g(x)$, $|f(x)| \leqslant g(x)$, $a.e.x.$, 因此 f_k, f 可积. 不妨设 f_k, f 均有限, 因此可以考察非负实值可测函数,

$$h_k(x) = |f_k(x) - f(x)|.$$

显然

$$h_k(x) \to 0,\ a.e.x,$$

$|h_k(x)| \leqslant 2g(x)$, $a.e.x.$ 根据比较判别法, h_k 可积. 由 Fatou 引理,

$$\int_E \lim_{k\to\infty} (2g - h_k) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E (2g - h_k).$$

从而

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| = \limsup_{k\to\infty} \int_E h_k \leqslant 0.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k - f| = 0.$$

定理 4.5.6 (依测度 DCT) 教材第二版 p183 定理 4.15

积分的进一步性质

定理 4.5.7 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积. 那么 $\forall\varepsilon > 0$,
(1) 存在有限测度集 B(可取为球体) 使得

$$\int_{B^c} |f| \leqslant \varepsilon.$$