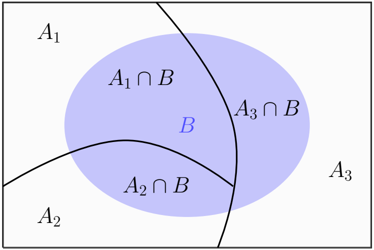
由于 $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}|B) > 0$, 上式所有分母为正.

全概率公式

定义 1.6.2 令 S 为一个集合. 如果 $A_n, n = 1, \ldots, N$ 互不相交并且 $\bigcup_{n=1}^{N} A_n = S$, 那么 $\{A_n\}$ 称为集合 S 的**一个划分**.

例如, 在如下图示中 $B \cap A_1, B \cap A_2, B \cap A_3$ 是集合 B 的一个划分，并且容易看到

$$P(B) = \sum_{n=1}^{3} P(B \cap A_n).$$



一般地, 下面的定理告诉我们, 为了求出集合的概率, 可以首先确定一个样本空间的划分, 再尝试求出在每一个划分集合上的条件概率.

定理 1.6.5 如果 $\{A_n\}$ 是样本空间 S 的划分，$P(A_n) > 0, n =$

$1, \ldots, N$ 那么

$$P(B)=\sum_{n=1}^{N} P(B\cap A_n)=\sum_{n=1}^{N} P(A_n)\,P(B|A_n)\,.$$

- 直接运用划分以及条件概率的定义得出.

例题 1.6.4 投掷一个均匀的骰子. 假设第一次投掷中出现的点数为 X, 继续投掷直到出现点数 $Y \geqslant X$. 令 A 表示 $Y=6$ 这一事件，试求出其概率

- 如果 $X=i$, 那么 Y 可能是 $i, i+1, \ldots, 6$, 并且它们是等可能

的. 因此（参见本例附注）

$$P\left(A|X=i\right)=\frac{1}{7-i},$$

从而

$$\begin{aligned}P\left(A\right)&=\sum_{i=1}^{6}P\left(A|X=i\right)P\left(X=i\right)\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right).\end{aligned}$$

注意本例的样本空间是 $\{Y\geqslant X\}$, $P\left(A\right)$ 的概率也可以通过细分样本空间来完成，令 N_k 表示至停止投掷时所用去的投

掷次数为 k, 根据题意投掷次数至少为 2. 如果已知 $X = i$ 并且投掷次数为 k, 那么 A 发生时最后一次点数始终是 6, 而其前面的点数只能出现在 $\{1, ..., i-1\}$ 这 $i-1$ 个数中, 特别地 $X = 1$ 时投掷次数只有一种可能，即 2 次. 因此

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{6} P(A|X=i) \cdot P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=2}^{\infty} P(A \cap N_k | X=i) \cdot P(X=i) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \sum_{i=2}^{6} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{i-1}{6}\right)^{k-2} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \quad （i=1\text{单算}）
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\frac{6}{7-i} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{7-i}.$$

例题 1.6.5 投掷一个均匀四面体骰子. 如果出现 1 或者 2, 那么你可以继续投掷一次, 否则停止投掷. 投掷总点数至少为 4 的概率是多少?

■ 令 $E_j = \{第一次点数为j\}$, $E = \{总点数至少为4\}$. 如果第一次点数为 1, 那么第二次投掷必须是 3 或者 4. 因此 $P(E|E_1) = 2/4 = 1/2$. 类似地 $P(E|E_2) = 3/4$. 如果第一次点数为 3, 那么停止投掷, 总点数只能是 3, 因此 $P(E|E_3) = 0$. 如果第一次点数为 4, 那么停止投掷, 总点数为 4, 因此

$P(E|E_4)=1$. 运用全概率公式得到

$$\begin{aligned}P(E)&=\sum_{n=1}^{4}P(E_n)P(E|E_n)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1\\&=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

例题 1.6.6 昆虫产生 k 个卵的概率为

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,\ldots,$$

其中 $\lambda>0$ 为已知参数. 每个卵以概率 $0\leqslant p\leqslant 1$ 孵化成昆虫, 孵化过程是相互独立的. 求昆虫有后代的概率.

令 $A=\{$昆虫有后代$\}, B_k=\{$产生k个卵$\}$. 那么

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1-P\left(A^c\right) \\
&= 1-\sum_{k=0}^{\infty} P\left(B_k\right) P\left(A^c \mid B_k\right) \\
&= 1-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}(1-p)^k \\
&= 1-e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\
&= 1-e^{-\lambda p}.
\end{aligned}
$$

Bayes's 法则

定理 1.6.6 假设 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是样本空间的一个划分. 并假设 $P(A_i) > 0, \forall i$. 对于任意具有正概率的事件 B, 都成立

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}.$$

- 由条件概率与全概率公式得到

例题 1.6.7 当飞机出现时, 雷达探测到飞机并发出警报的概率为 0.99. 如果飞机没有出现，那么雷达对以 0.1 的概率发出错误的警报. 假设飞机出现的概率为 0.05. 那么当雷达发出警报时飞机确实出现了的概率有多大?

- 令 $A=\{\text{飞机出现}\}, B=\{\text{警报响起}\}$. 根据题设

$$P(B|A)=0.99, P(B|A^c)=0.1, P(A)=0.05.$$

需要计算 $P(A|B)$. 由 Bayes's 法则

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} \\
&= \frac{0.99\cdot 0.05}{0.99\cdot 0.05+0.1\cdot 0.95} \\
&\approx 0.34.
\end{aligned}$$

例题 1.6.8 在回答多项选择的问题时，学生要么知道如何解答要么用猜的办法来解答. 假设 p 是学生知道如何解答的概率，而 $1-p$ 是学生通过猜来解答的概率. 同时假设不知道如何解答的学生会以 $1/4$ 的概率来选择 4 个选项中的任何一个. 已知一个学生选对了正确答案，那么有多大的概率是这个学生真正知道正确的解题方法?

- 令 $A=\{$学生知道解答方法$\}$,
  $B=\{$学生回答正确$\}$.
  根据题设已知 $P(B|A)=1$，$P(B|A^c)=1/4$ 以及 $P(A)=p$.
要计算 $P(A|B)$ 由 Bayes's 法则

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{4}\cdot(1-p)}$$

$$= \frac{4p}{1+3p}$$

例题 1.6.9 在一次电视节目中, 主持人 Monty 提出这样一个问题: 现有三扇门, 其中一扇门后有一俩车, 其余门后各为一头羊, 假设车的价值高于羊. 现有一名参赛的观众选中一扇门, 这时主持人让参赛人记住自己的选择, 随后以等概率打开其余两扇门中的一扇 (除非不得已) 出现一头羊, 主持人给参赛人一次重新选择的机会, 参赛人是否应该坚持之前的选择?

- 通过编号, 不妨假设参赛者总是选中第一扇门. 令

  $C_i = \{$车在第i扇门后$\}$

  $M_i = \{$Monty 打开第i扇门出现一头羊$\}$

那么根据题意

$$P(C_i)=\frac{1}{3},\ i=1,2,3.$$

$$P(M_2|C_1)=\frac{1}{2},\ P(M_2|C_2)=0,\ P(M_2|C_3)=1.$$

根据 Bayes 公式,

$$\begin{aligned}
&P(C_1|M_2)\\
&=\frac{P(M_2|C_1)P(C_1)}{P(M_2|C_1)P(C_1)+P(M_2|C_2)P(C_2)+P(M_2|C_3)P(C_3)}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

因此

$$P\left(C_3|M_2\right) = \frac{2}{3}.$$

可见当第二扇们打开时, 参赛人重新选择获得车的概率更大. 同理考虑第三扇门打开的情形.

1.7 独立性

定义 1.7.1 事件 A 和 B 称为相互**独立**的, 如果

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

定理 1.7.1 如果 $P(A) = 0$, 那么 A 与任何事件相互**独立**.

- 由于 $A \cap B \subset A$, 因此 $P(A \cap B) = 0 = P(A) P(B)$ ///

定理 1.7.2 如果事件 A 和 B 独立, 那么事件 A^c 和 B 独立, 事件 A^c 和 B^c 独立.

■ 我们证明 A^c 和 B 独立. 事实上

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= (1 - P(A))\, P(B) \\ &= P(A^c)\, P(B) \end{aligned}$$

例题 1.7.1 如果 $P(A) = 1$, 那么 A 与任何事件相互**独立.**

■ 由于 $P(A) = 1$, $P(A^c) = 0$, 因此 A^c 与任何事件相互独立, 从而 A 与任何事件相互独立

定理 1.7.3 如果 A 与任何事件相互**独立, 那么** $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$.