$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\geqslant 1}\inf_{j\geqslant k} f_j,$$

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\geqslant 1}\sup_{j\geqslant k} f_j,$$

可测.

例 3.1.4 若 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的实值函数, $\forall x$, $y\mapsto f(x,y)$ 左连续或 $\forall x$, $y\mapsto f(x,y)$ 右连续, $\forall y$, $x\mapsto f(x,y)$ 可测. 那么 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数.

- 考虑右连续情形. $\forall k$,

$$f_k(x,y) = f\left(x, \frac{i+1}{k}\right),\ \forall \frac{i}{k} < y \leqslant \frac{i+1}{k}, k = 0, \pm 1, \ldots$$

那么 $\forall a$,

$$\{f_k < a\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{x : f\left(x, \frac{i+1}{k}\right) < a\right\} \times \left\{\frac{i}{k} < y \leqslant \frac{i+1}{k}\right\},$$

可测 (参见上一章习题, 可测集乘积可测), 因此 f_k 可测, 又 $\forall x$, $y \mapsto f(x, y)$ 右连续,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x, y) = f(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

从而 f 可测.

3.2 可测函数的逼近

定义 3.2.1 函数 f 称为简单函数, 如果 $f(x)$ 能写成有限个指示函数的线性组合

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}(x),$$

其中 $a_1,\dots,a_N$ 为常数, $E_1,\dots,E_N$ 为**有限测度可测集**. 若还满足 $a_1,\dots,a_N$ 为互异非零常数, $E_1,\dots,E_N$ 互不相交, 那么称 f 为具有**标准表示**的简单函数. 简单函数的标准表示是唯一的. 若 $E_1,\dots,E_N$ 都是矩体, 则称 f 为阶梯函数.

引理 3.2.1 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为满足以下条件的所有开集全体做成的集合族 (指标集 A 不一定可数): $\forall\alpha\in A$,

$f(x) = 0$, $a.e.$ $x \in \mathcal{O}_\alpha$. 令 $\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$. 那么 $f(x) = 0$, $a.e.$ $x \in \mathcal{O}$.

■ **1**. 若 A 可数, 那么结论显然成立. 事实上, 令 $Z_\alpha \subset \mathcal{O}_\alpha$ 为零测集满足: $f(x) = 0, \forall x \in \mathcal{O}_\alpha \backslash Z_\alpha$. 令 $Z = \bigcup_{\alpha\in A} Z_\alpha$, 由于 A 是可数集, 因此 Z 也是零测集, 且

$$\mathcal{O}\backslash Z \subset \bigcup_{\alpha\in A} \left(\mathcal{O}_\alpha \backslash Z_\alpha\right),$$

从而 $f(x) = 0, \forall x \in \mathcal{O}\backslash Z$, 即 $f(x) = 0$, $a.e.$ $x \in \mathcal{O}$.

2. 若 A 不一定为可数集时, 需要进一步说明. 事实上, 存在可数多个开集 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得, $\mathbb{R}^n$ 上任意开集能写成某些 B_k 的并集, 从而 $\mathcal{O}$ 能写成可数多个 B_k 的并集, 即存在 $I \subset \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{O} = \bigcup_{\in A} \mathcal{O}_\alpha = \bigcup_{k\in I} B_k$. 显然 $\forall k \in I, f = 0$, $a.e.$ $x \in B_k$. 因此 $f = 0$, $a.e.$ $x \in \mathcal{O}$. ///

定义 3.2.2 引理 3.2.1中的 $\mathcal{O}^c$ 称为 f 的支集. 如果 f 的支集是紧集, 那么称 f 是紧支函数. 函数 f 的支集通常记为 $supp\,(f)$.

- 若 $f = g$, $a.e.$, 那么 f 与 g 有相同的支集
- 若 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 , 那么 f 的支集是

$$\{x \in E : f(x) \neq 0\}$$

的闭包.

定理 3.2.1 以下成立.
(1) 若 f 非负可测, 那么存在非负简单函数列 $\{\phi_k\}$ 使得

$$\forall k,\ \phi_k \leqslant \phi_{k+1},\ 0 \leqslant \phi_k \leqslant f,\ f(x) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(x)\,,\ \forall x.$$

(2) 若 f 可测, 那么存在简单函数列 $\{\phi_k\}$ 使得

$$\forall k,\ \ |\phi_k| \leqslant |\phi_{k+1}|,\ 0 \leqslant |\phi_k| \leqslant |f|,\ f(x) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(x),\ \forall x.$$

- (1) $\forall N \geqslant 1$, 记 Q_N 为中心在原点边长为 N 的方体. 令

$$F_N(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q_N,\ f(x) \leqslant N, \\ N, & x \in Q_N,\ f(x) > N, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

那么

$$\lim_{N\to\infty} F_N(x) = f(x),\ \forall x.$$

现对 F_N 的值域进行划分. $\forall M \geqslant 1$, 令

$$E_{l,M} = \left\{ x \in E : \frac{l}{M} \leqslant F_N(x) < \frac{l+1}{M} \right\},\ \forall l,\ 0 \leqslant l < NM,$$

以及

$$F_{N,M}(x) = \sum_l \frac{l}{M} \chi_{E_{l,M}}(x),\ \forall x.$$

那么

$$0 \leqslant F_N(x) - F_{N,M}(x) \leqslant \frac{1}{M},\ \forall x.$$

取 $N = M = 2^k$, $\phi_k(x) = F_{2^k,2^k}(x)$, $\forall k \geqslant 1$, 则 $\{\phi_k\}$ 是非负递增简单函数列, 且逐点收敛到 f.

(2) 利用分解

$$f = f^+ - f^-.$$

分别取非负递增简单函数列 $\{\phi_k^+\}$, $\{\phi_k^-\}$ 满足

$$f^+ = \lim_{k\to\infty} \phi_k^+(x), f^- = \lim_{k\to\infty} \phi_k^-(x), \forall x.$$

令

$$\phi_k = \phi_k^+ - \phi_k^-.$$

那么

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(x), \forall x.$$

由于 $0 \leqslant \phi_k^+ \leqslant f^+, 0 \leqslant \phi_k^- \leqslant f^-$, 因此 $supp\left(\phi_k^+\right) \subset supp\left(f^+\right)$, $supp\left(\phi_k^-\right) \subset supp\left(f^-\right)$. 从而有

$$|\phi_k| = \phi_k^+ + \phi_k^-,$$

且 $\{|\phi_k|\}$ 为非负递增简单函数列.

注 3.2.1 从证明中看出, 若 f 有界, 那么定理 3.2.1(1)(2) 中的收敛都是是一致的. 此外，每一个 ϕ_k 都是有界, 紧支的.