1、 设随机变量X的分布函数为F(x)

随机变量Y服从两点分布：

$$P\{Y=a\}=p,\ P\{Y=b\}=1-p,\quad (0<p<1)$$

并且X与Y相互独立，则随机变量Z=X+Y的分布函数$F_Z(z)$=________

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$$

$$=P\{Y=a,X\le z-a\}+P\{Y=b,X\le z-b\}$$

$$=P\{Y=a\}\cdot P\{X\le z-a\}+P\{Y=b\}\cdot P\{X\le z-b\}$$

$$=pF(z-a)+(1-p)F(z-b)$$

2、

一盒内装有5个红球和15个白球,从中不放回取10次,每次取一个球,则第5次取球时得到的是红球的概率是（　B　）。

（A）1/5　　（B）1/4

（C）1/3　　（D）1/2

3、设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为两个随机变量的分布函数，$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$

则下列各组数中能使$F(x)$为某随机变量的分布函数的有____(B)____

(A) $a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{2}{3}$　　(B) $a=\frac{3}{5},\quad b=\frac{2}{5}$

(C) $a=\frac{3}{2},\quad b=\frac{1}{2}$　　(D) $a=\frac{3}{4},\quad b=\frac{2}{5}$

4、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(x+y)}, 0<2x<y<+\infty \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

(1)确定常数a

(2)求(X,Y)关于X的边沿概率密度；

(3)求(X,Y)关于Y的边沿概率密度；

(4)求P(X≥1,Y≥2)

解　(1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy \quad =\int_{0}^{+\infty}dx\int_{2x}^{+\infty}ae^{-(x+y)}dy$

$$=a\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx \quad =a(-\frac{1}{3}e^{-3x})\big|_{0}^{+\infty} \quad =a\frac{1}{3}$$

得　$a=3$

(2)求(X,Y)关于X的边沿概率密度；

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{2x}^{+\infty}3e^{-(x+y)}dy=3e^{-3x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

(3)求(X,Y)关于Y的边沿概率密度；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{y}{2}} 3e^{-(x+y)}dx = 3e^{-y}(1-e^{-\frac{y}{2}}), y>0 \\ 0, y\le 0\end{cases}$$

(4) $$P\{X\ge 1, Y\ge 2\} = \iint\limits_{x\ge 1, y\ge 2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_2^{+\infty} dy \int_1^{\frac{y}{2}} 3e^{-(x+y)}dx \quad = \int_2^{+\infty} 3e^{-y}(e^{-1}-e^{-\frac{y}{2}})dy$$

$$=3(-e^{-1}e^{-y}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}y})\Big|_2^{+\infty} \quad = e^{-3}$$

5、已知二维随机变量 (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy,0<x<1,0<y<2x\\0,\text{其它}\end{cases}$$

试求：（1）Z=max(X,Y)的分布函数$F_Z(z)$；（2）Z=max(X,Y)的概率密度$F_Z(z)$.

解（1） Z=max(X,Y)的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max(X,Y)\le z\}$$

$$=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{\substack{x\le z\\y\le z}} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\substack{x \le z \\ y \le z}} f(x, y)dxdy$$

当z<0时, $F_Z(z)=0$

当$0 \le z<1$时， $F_Z(z) = \int_0^z dy \int_{\frac{y}{2}}^z 2xydx = \int_0^z y(z^2 - \frac{y^2}{4})dy$

$$= (z^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16})\Big|_0^z = \frac{7}{16} z^4$$

当$1 \le z<2$时， $F_Z(z) = \int_0^z dy \int_{\frac{y}{2}}^1 2xydx = \int_0^z y(1 - \frac{y^2}{4})dy$

$$= (\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16})\Big|_0^z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{16}$$

当z>2时， $F_Z(z) = 1$

于是

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \dfrac{7}{16}z^4, 0\le z\le 1\\ \dfrac{z^2}{2}-\dfrac{z^4}{16}, 1<z\le 2\\ 1, z>2\end{cases}$$

Z=max(X,Y)的概率密度为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}\dfrac{7}{4}z^3, 0\le z\le 1\\ z-\dfrac{z^3}{4}, 1<z\le 2\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

6、设总体X和Y相互独立且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 而 $X_1\ X_2\ \ldots\ldots X_9$ 和 $Y_1\ Y_2\ \ldots\ldots Y_9$ 分别是来自总体X和Y的简单随机样本,试求：

（1）$\sum_{i=1}^{9} X_i$ 服从的分布；

（2）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9} Y_i^2$ 服从的分布；

（3）统计量 $U=\frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9} Y_i^2}}$ 服从的分布；

（4）U^2 服从的分布；

解 （1）根据题设条件知

$$\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0, 9\sigma^2)$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{9}}\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0,1)$$

（2） $\frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{9}\left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(9)$$

（3）由t分布的构造方式,得到

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}}=\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{9}}\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9}Y_i^2\Big/9}}\sim t(9)$$

即统计量U服从自由度为9的t分布；

（4） $$U^2=\frac{(\sum_{i=1}^{9}X_i)^2}{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}=\frac{(\frac{1}{\sigma\sqrt{9}}\sum_{i=1}^{9}X_i)^2\Big/1}{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9}Y_i^2\Big/9}\sim F(1,9)$$

7、设总体$X \sim N(0,3^2)$, X_1 X_2 ……X_n为来自X的一个样本，

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$ 为样本均值。

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

则DS^2=____

$$DS^2=\frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

解： $$\frac{(n-1)}{\sigma^2}Z_n = \frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$DZ_n = D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n-1}\right] \quad = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

另外， $$EZ_n = E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n-1}\right] \quad = \frac{\sigma^2}{n-1}\cdot E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}\cdot(n-1) \qquad = \sigma^2$$

8、

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体$N(\mu, 4^2)$的样本.

试求:(1) $U=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)$ 服从的分布；

$N(0,1)$

(2) $V=\frac{1}{16}\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2$ 服从的分布；

$\chi^2(16)$

（3）令 $Y=\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)}{\sqrt{\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2}}$ 求Y服从的分布

$t(16)$

解 由条件知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，同服从分布 $N(\mu, 4^2)$

$$\frac{X_i-\mu}{4} \sim N(0,1) \qquad (\frac{X_i-\mu}{4})^2 \sim \chi^2(1)$$

（1） $$U=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)= \frac{1}{\sqrt{16}}\sum_{i=1}^{16}(\frac{X_i-\mu}{4}) \sim N(0,1)$$

（2） $$(\frac{X_i-\mu}{4})^2 \sim \chi^2(1)$$

$$V=\sum_{j=17}^{32}(\frac{X_j-\mu}{4})^2 \sim \chi^2(16)$$

（3） 因为U与V相互独立，由t分布的定义知，

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)}{\sqrt{\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2}}=\frac{U}{\sqrt{V/16}}\sim t(16)$$

9、设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}\exp\{-\dfrac{x^2}{\theta}\}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}, \quad (\theta>0)$$

$x_1\ x_2\ \ldots\ldots x_n$为一组样本值($x_i>0$, i=1,2, …n).
$X_1\ X_2\ \ldots\ldots X_n$是来自总体X的样本。求参数θ的极大似然估计值和极大似然估计量。

解：似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}\exp\{-\frac{x_i^2}{\theta}\} =\prod_{i=1}^{n}2x_i\cdot\frac{1}{\theta^n}\exp\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}\}$$

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} 2x_i - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

令 $-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$

得解 $n\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

得参数θ的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

得参数θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

10、设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本.

$$\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2$$

试求：

(1)求 $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从的分布； $\overline{X_n}\sim N(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2)$

(2)求 $X_{n+1}-\overline{X_n}$ 服从的分布； $X_{n+1}-\overline{X_n}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

(3)写出 $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ 服从的分布； $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

(4)求统计量 $Y=\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 服从的分布；

$$Y\sim t(n-1)$$

11、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本. μ已知,下列几个作为σ^2的估计量中,较优的是(C)

(A) $\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

(B) $\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

(C) $\hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

(D) $\hat{\sigma}_4^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\mu)^2$

12、设$X_1,X_2, \dots,X_n$是总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本.

令 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad Z_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_n)^2 \qquad n=2,3,\cdots$

试作：（1）求EZ_n

（2）求DZ_n

（3）证明：对任何$\varepsilon>0$,成立

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|Z_n-\sigma^2|<\varepsilon\}=1$$

解

（1） $Z_n = S^2 \quad EZ_n = ES^2 = \sigma^2$

（2）由条件知，

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} Z_n = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$DZ_n = D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n-1}\right] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

（3）由切比雪夫不等式有

$$P\{|Z_n - \sigma^2| < \varepsilon\} = P\{|Z_n - EZ_n| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DZ_n}{\varepsilon^2}$$

所以 $$1 \geq P\{|Z_n - \sigma^2| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2 (n-1)}$$

上式两边取极限，即得

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|Z_n - \sigma^2| < \varepsilon\} = 1$$

证毕

14、设随机变量X存在数学期望EX和方差DX≠0,则对任意正数ε,

下列不等式恒成立的是（ D ）

（A） $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}>\frac{DX}{\varepsilon^2}$

（B） $P\{|X-EX|<\varepsilon\}<1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

（C） $P\{|X|\geq\varepsilon\sqrt{DX}\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}$

（D） $P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X|^k}{\varepsilon^k},\qquad (k>0)$

证明：

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} = \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)dx$$

$$\leq \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{|x|^k}{\varepsilon^k} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^k \, f(x)dx$$

$$= \frac{E|X|^k}{\varepsilon^k}$$

15、

四个位置：1,2,3,4，在圆周上逆时针排列.粒子在这四个位置上随机游动.粒子从任何一个位置,以2/3概率逆时针游动到相邻位置;以1/3概率顺时针游动到相邻位置；以X(n)=j表示时刻n粒子处在位置j(j=1,2,3,4)

(1)写出齐次马尔可夫链$\{X(n),n=1,2,\cdots\}$的状态空间；

(2)求齐次马尔可夫链$\{X(n),n=1,2,\cdots\}$的一步状态转移矩阵

(3)求条件概率$P\{X(n+3)=3, X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$

解.

(1)依题意 ,状态空间 S={1,2,3,4}

(2)转移概率矩阵

$$P=(p_{ij})_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$P\{X(n+3)=3, X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$$

$$= P\{X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$$

$$\cdot P\{X(n+3)=3 \mid X(n+1)=1, X(n)=2\}$$

$$= P\{X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$$

$$\cdot P\{X(n+3)=3 \mid X(n+1)=1\}$$

$$= p_{21} p_{13}^{(2)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{4} p_{1k} p_{k3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(0 \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$$

16、设随机过程$Y(t)=e^{-tX}$, $-\infty< t<+\infty$,其中X是在(0,1)上服从均匀分布的随机变量。

试求:（1）X的概率密度$f_X(x)$

（2）$E[Y(t)]$, $E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$, $E[(Y(t))^2]$,

（3）Y(t)是否为广义平稳过程？

解（1）由题设条件，知X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（2）Y(t)的均值函数

$$\mu_Y(t)=E[Y(t)]=E[e^{-tX}]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tx}f(x)dx \quad =\int_0^1 e^{-tx}dx=\frac{1-e^{-t}}{t}$$

Y(t)的自相关函数

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$$

$$=E[e^{-t_1X}\cdot e^{-t_2X}]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t_1+t_2)x}f(x)dx$$

$$=\int_0^1 e^{-(t_1+t_2)x}dx=\frac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}$$

$$E[(Y(t))^2]=\frac{1-e^{-2t}}{2t}$$

（3）由（2）知Y(t)不是广义平稳过程