§9.1 假设检验的基本概念

△ **何为假设检验?**

假设是指施加于一个或多个总体的概率分布或参数的判断. 所作的假设可以是正确的, 也可以是错误的.

为判断所作的假设是否正确, 从总体中抽取样本, 根据样本的取值, 按一定的原则进行检验, 然后, 作出接受或拒绝所作假设的决定.

△ 假设检验的内容

- 参数检验
  - 总体均值、均值差的检验
  - 总体方差、方差比的检验
- 非参数检验
  - 分布拟合检验
  - 秩和检验

△ 假设检验的理论依据

假设检验所以可行，其理论背景为实际推断原理，即“小概率原理”

引　例

某厂生产的螺钉,按标准强度为68克/mm^2,而实际生产的螺钉强度 X 服从 $N(\mu, 3.6^2)$. 若 $E(X)=\mu=68$, 则认为这批螺钉符合要求,否则认为不符合要求.为此提出如下假设:

$H_0: \mu = 68$ ———— 称为**原假设**或**零假设**

原假设的对立面:

$H_1: \mu \neq 68$ ———— 称为**备择假设**

现从该厂生产的螺钉中抽取容量为 36 的样本,其样本均值为 $\bar{x} = 68.5$, 问原假设是否正确?

若原假设正确, 则

$$\overline{X} \sim N(68,\frac{3.6^2}{36})$$

因而 $E(\overline{X})=68$, 即 $\overline{X}$ 偏离68不应该太远,

偏离较远是小概率事件, 由于

$$\frac{\overline{X}-68}{\frac{3.6}{6}} \sim N(0,1)$$

故 $\left|\frac{\overline{X}-68}{\frac{3.6}{6}}\right|$ 取较大值是小概率事件

对于较小的正数α（通常取$\alpha = 0.05,\ 0.01, \ldots$）

$$有\ P\left(\left| \frac{\bar{X}-68}{\frac{3.6}{6}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \alpha$$

即事件$\left| \frac{\bar{X}-68}{\frac{3.6}{6}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$发生的概率很小（为α）

例如,取$\alpha = 0.05$，则

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-0.025} = 1.96$$

则 $\left|\dfrac{\bar{X}-68}{\dfrac{3.6}{6}}\right| > 1.96$ 的概率很小

即 $\bar{X} > 69.18$ 或 $\bar{X} < 66.824$ 的概率很小

称 $\bar{X}$ 的取值区间 $(69.18, +\infty)$ 与 $(-\infty, 66.824)$

为检验的**拒绝域**

称 $\bar{X}$ 的取值区间 $(66.824, 69.18)$

为检验的**接受域** (实际上没理由拒绝),

现 $\bar{x} = 68.5$ 落入接受域,

故接受原假设 H_0: $\mu = 68$

由引例可见,在给定 α 的前提下,接受还是拒绝原假设完全取决于样本值, 因此所作检验可能导致以下两类错误的产生：

第一类错误 ———— 弃真错误

第二类错误 ———— 取伪错误

假设检验的两类错误

所作判断 / 真实情况	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	第一类错误 (弃真)
H_0 为假	第二类错误 (取伪)	正确

犯第一类错误的概率通常记为 α

犯第二类错误的概率通常记为 β

希望所用的检验方法尽量少犯错误,但不能完全排除犯错误的可能性.理想的检验方法应使犯两类错误的概率都很小,但在样本的容量给定的情形下, 不可能使两者都很小,降低一个,往往使另一个增大.

假设检验的指导思想是控制犯第一类错误的概率不超过 α,然后, 若有必要,通过增大样本容量的方法,减少 β.

本引例中

犯第一类错误的概率

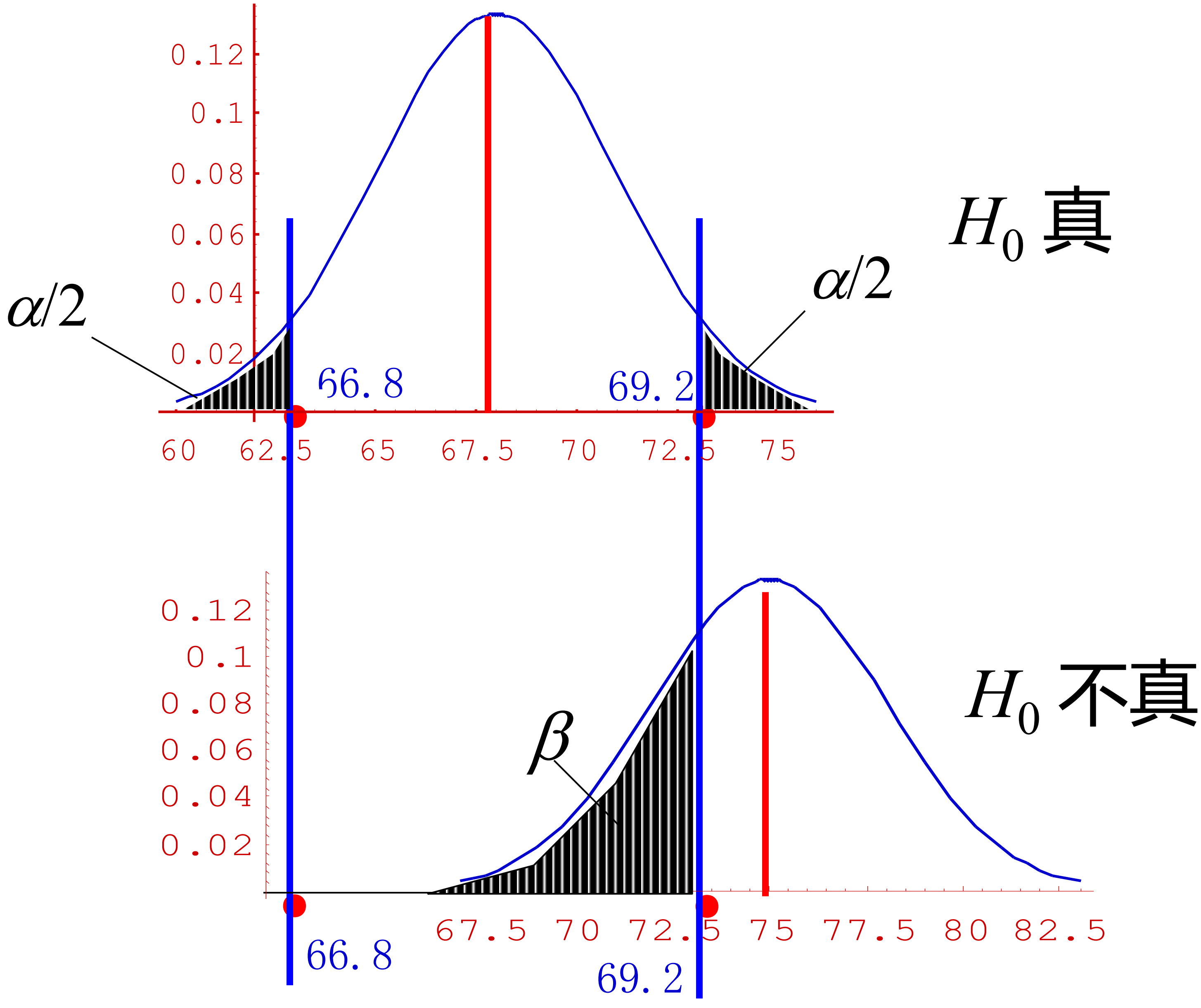
$=P(\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真})=P(\bar{X}<66.824\cup\bar{X}>69.18)$

$=0.05=\alpha$

若H_0为真, 则

$$\bar{X}\sim N(68,\frac{3.6^2}{36})$$

所以,拒绝 H_0 的概率为 α, α又称为**显著性水平**, α 越小,犯第一类错误的概率越小.



H_0 真
$\alpha/2$
$\alpha/2$
66.8
69.2
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
60
62.5
65
67.5
70
72.5
75
H_0 不真
β
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
67.5
70
72.5
75
77.5
80
82.5
66.8
69.2

注 1° 一般,作假设检验时,先控制犯第一类错误的概率 α, 在保证 α 的条件下使 β 尽量地小.要降低 β 一般要增大样本容量.

注 2° 备择假设可以是单侧的,也可以是双侧的.引例中的备择假设是双侧的.如果根据以往的生产情况, $\mu_0 = 68$.现采用了新工艺,关心的是新工艺能否提高螺钉强度, μ 越大越好.此时, 可作如下的假设检验:

原假设 $H_0: \mu = 68$；备择假设 $H_1: \mu > 68$

当原假设$H_0: \mu = \mu_0 = 68$ 为真时，

$\bar{X} - \mu_0$ 取较大值的概率较小

当备择假设$H_1: \mu > 68$ 为真时，

$\bar{X} - \mu_0$ 取较大值的概率较大

给定显著性水平α，根据 $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\right) = \alpha$

可确定拒绝域

$$\bar{x} \in \left(\mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad +\infty\right)$$

因而, 接受域

$$\bar{x} \in (-\infty, \quad \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

称这种检验为右边检验.

另外，可设

原假设 H_0: $\mu \le 68$

备择假设 $H1$: $\mu > 68$

注 3° 关于零假设与备择假设的选取

H_0与H_1地位应平等,但在控制犯第一类错误的概率 α 的原则下,使得采取拒绝H_0的决策变得较慎重,即H_0得到特别的保护.

因而,通常把有把握的、有经验的结论作为原假设,或者尽可能使后果严重的错误成为第一类错误.

如：某厂生产一种铜丝，其折断力(大了质量好)服从正态分布$N(570,8^2)$.现改进了工艺，抽取10个样品，测得其平均值为575.2。

问：改进工艺是否提高了产品质量。

则可设：

原假设 $H_0: \mu = 570$

备择假设 $H_1: \mu > 575.2$

假设检验的步骤

- ❑ 根据实际问题所关心的内容，建立原假设 H_0与备择假设H_1
- ❑ 在 H_0为真时,选择一个合适的检验统计量V,它的分布是已知的,由H_1确定拒绝域的形式
- ❑ 给定显著性水平α，对应的拒绝域

  双侧检验 $(V < V_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (V > V_{1-\frac{\alpha}{2}})$

  右边检验 $(V > V_{1-\alpha})$

  左边检验 $(V < V_{\alpha})$
- ❑ 根据样本值计算出统计量的值,若在拒绝域内则拒绝原假设，否则接受原假设