5.5 微积分基本定理

教材第二版 p263-273 微积分基本定理.

定理 5.5.1 设 $F \in AC([a,b])$, 那么 F 在 (a,b) 上的几乎处处可微, $F'(x) \in L^1([a,b])$, 且成立

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt,\ \forall x \in [a,b].$$

反之, 若 $f \in L^1([a,b])$, 那么存在 $F \in AC([a,b])$ 使得

$$F'(x) = f(x),\ a.e.\ x.$$

特别地, 可以取

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

例 5.5.1 $F \in AC([a,b])$ 当且仅当存在 $f \in L^1([a,b])$ 使得

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt,\ \forall x \in [a,b].$$

- 若 $F \in AC([a,b])$, 那么根据微积分基本定理, 可取 $f = F'$. 反过来有

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt,\ \forall x,\ y \in [a,b].$$

由可积函数的绝对连续性知 $F \in AC([a,b])$.

例 5.5.2 F 在 $[a,b]$ 上单调. $F \in AC([a,b])$ 当且仅当

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

■ 必要性由微积分基本定理给出. 只证充分性, 令

$$G(x) = \int_a^x F'(t)\,dt - (F(x) - F(a)).$$

那么 $G(b) = G(a) = 0$. $\forall y > x$, 由 Lebesgue 定理,

$$G(y) - G(x) = \int_x^y F'(t)\,dt - (F(y) - F(x)) \leqslant 0.$$

从而

$$G(x) = 0,\ \forall x \in [a, b],$$

即

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt,\ \forall x \in [a, b].$$

因此 $F \in AC([a, b])$.