5.4　绝对连续函数

定义 5.4.1 $f(x)$ 为定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数, 称 f 为绝对连续函数, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 满足: 对任意互不相交的子区间 $(a_k,b_k)\subset(a,b)$, $k=1,\ldots,N$, 只要

$$\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta,$$

就有

$$\sum_{k=1}^{N}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

记为 $f\in AC([a,b])$.

由定义容易看出

- $f\in AC([a,b])$, 那么 f 一致连续 .
- 有限个绝对连续函数的线性组合仍然绝对连续.
- Lipschitz 函数是绝对连续的.
- 若 $f\in L^1([a,b])$, 那么

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\in AC([a,b])\,.$$

例 5.4.1 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数不是绝对连续函数.

绝对连续函数的复合函数不一定绝对连续 (参见习题).

定理 5.4.1 设 $f\in AC([a,b])$, 那么

$(1)\ f\in BV([a,b])$,

(2) 以下函数绝连续:

$$x \mapsto V_f([a,x]),\ x \mapsto P_f([a,x]),\ x \mapsto N_f([a,x]),$$

(3) f 是单调增加的绝对连续函数之差.

■ (1) 由定义, 存在 $\delta > 0$ 满足: 对任意互不相交的子区间 $(a_k, b_k) \subset (a,b)$, $k = 1, ..., N$, 只要

$$\sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta,$$

就有

$$\sum_{k=1}^{N}|f(b_k)-f(a_k)|<1.$$

现取 $[a,b]$ 的划分: $a=t_0<t_1,...,t_K=b$ 使得每个划分区间长度不超过 δ. 由变差的可加性

$$V_f([a,b])=\sum_{k=0}^{K-1}V_f([t_k,t_{k+1}])\leqslant K.$$

(2) 先证明 $V(x)=V_f([a,x])\in AC([a,b])$. 由绝对连续的定义容易看出, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 满足: 对任意互不相交的子区间 $(a_k,b_k)\subset(a,b)$, $k=1,...,N$, 只要

$$\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta,$$

就有

$$\sum_{k=1}^{N} V_f([a_k, b_k]) < \varepsilon.$$

由于 $V(x)$ 单调增加, 借助上述观察得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |V(b_k) - V(a_k)| &= \sum_{k=1}^{N} (V(b_k) - V(a_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{N} V_f([a_k, b_k]) < \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $V(x) \in AC([a, b])$. 根据习题 5.3.2,

$$P_f([a, x]) = \frac{1}{2}(V_f([a, x]) + f(x) - f(a)),$$

$$N_f([a,x]) = \frac{1}{2}\left(V_f([a,x]) - f(x) + f(a)\right).$$

由于绝对连续函数的线性组合是绝对连续的, 因此 $P_f([a,x])$, $N_f([a,x]) \in AC([a,b])$.

(3) 由 (1) (2) 以及 Jordan 分解得到. //

定理 5.4.2 设 $f \in AC([a,b])$, 那么 f' 几乎处处存在. 此外若 $f'(x) = 0$, $a.e.\ x$, 那么 f 为常数.

■ 只需证明后一部分. 为证 f 为常数, 要证明 $f(b) = f(a)$ (然后运用到任意子区间). 令

$$E = \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 记 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 为满足下述条件的闭区间 $[c,d]$ 全集,

$$[c,d] \subset (a,b)\,,\, f(d) - f(c) < \varepsilon\,(d-c)\,.$$

那么 $\mathcal{F}_\varepsilon$ 是 E 的 Vitali 覆盖. 根据 Vitali 定理, $\forall \delta > 0$, 存在有限个互不相交的闭区间 $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^N \subset \mathcal{F}_\varepsilon$ 使得

$$m^* \left(E \backslash \left(\bigcup_{k=1}^N [a_k,b_k] \right) \right) < \delta.$$

显然 $[a,b] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^N (a_k,b_k) \right)$ 由有限个区间组成, 记为 (α_k,β_k), $k = 1,...,K$. 那么

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k=1}^K |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (d_k - c_k) + \sum_{k=1}^{K} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|$$

$$\leqslant \varepsilon (b - a) + \sum_{k=1}^{K} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| .$$

由于 $f \in AC([a, b])$，取 $\delta > 0$ 满足

$$\sum_{k=1}^{K} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon.$$

从而

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \varepsilon (b - a) + \varepsilon.$$

可见 $f(b) = f(a)$.