Lecture 5

微分与积分

Y. Ruan
Department of Mathematics

Real Analysis

5.1 单调函数的性质

前面已经证明单调函数的间断点是可数的, 反过来有

定理 5.1.1 设 A 是开区间 (a,b) 内的可数集，那么存在 (a,b) 上的单调增函数仅在 $(a,b)\cap A^c$ 上连续.

- 记 $A=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$，考察函数

$$f(x)=\sum_{a_k\leqslant x}\frac{1}{2^k},\ \forall x\in(a,b).$$

显然 f 点点存在, 且 $\forall a<x<y<b$,

$$f(y)-f(x)=\sum_{x<a_k\leqslant y}\frac{1}{2^k}.$$

因此 f 单调增加. 同时上式表明 $\forall x_0 = a_k$,

$$f(x_0) - f(x) \geqslant \frac{1}{2^k},\ \forall x < x_0.$$

因此 f 在 A 上不连续. 任取 $x_1 \in (a,b) \cap A^c$, $\forall j$, 总存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ 与 $a_1, \ldots, a_j$ 不相交, 从而 $\forall x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$,

$$|f(x) - f(x_1)| \leqslant \sum_{k \geqslant j+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^j},$$

即在 $(a,b) \cap A^c$ 上连续.

5.2 单调函数的可微性

定义 5.2.1 有界非退化闭区间族 $\mathcal{F}$ 称为集合 E 的 Vitali 覆盖, 如果 $\forall x \in E$, $\varepsilon > 0$, 存在 $I \in \mathcal{F}$ 使得 $x \in I$ 且 $|I| < \varepsilon$.

引理 5.2.1 **(Vitali 覆盖引理)** 设 $m^*(E) < \infty$, $\mathcal{F}$ 为 E 的 Vitali 覆盖. 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的闭区间 $I_1, I_2, \ldots, I_N \in \mathcal{F}$ 使得

$$m^*\left(E \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right)\right) < \varepsilon.$$

■ **1**. 由于 $m^*(E) < \infty$, 存在开集 $G \supset E$ 满足 $m(G) < \infty$. 又因 $\mathcal{F}$ 为 E 的 Vitali 覆盖, 故可假设 $\mathcal{F}$ 中的所有闭区间都包含于 G.

任取 $I_1 \in \mathcal{F}$, 若 $E \backslash I_1$ 为空, 则证毕. 否则令

$$\mathcal{F}_1 = \{I \in \mathcal{F} : I \cap I_1 = \varnothing\}.$$

由于 I_1 闭, $\mathcal{F}$ 为 E 的 Vitali 覆盖, 故 $\mathcal{F}_1$ 非空. 于是存在非退化闭区间 $I_2 \in \mathcal{F}_1$ 使得 $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, 且

$$m(I_2) > \frac{1}{2} \sup_{I \in \mathcal{F}_1} m(I) > 0.$$

若 $E \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{2} I_k \right)$ 为空, 则证毕. 否则令

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ I \in \mathcal{F} : I \cap \left(\bigcup_{k=1}^{2} I_k \right) = \varnothing \right\}.$$

由于 $\bigcup_{k=1}^{2} I_k$ 闭, $\mathcal{F}$ 为 E 的 Vitali 覆盖, 故 $\mathcal{F}_2$ 非空. 于是存在 $I_3 \in \mathcal{F}_2$ 使得 $I_3 \cap \left(\bigcup_{k=1}^{2} I_k\right) = \varnothing$, 且

$$m\left(I_3\right) > \frac{1}{2} \sup_{I \in \mathcal{F}_2} m\left(I\right) > 0.$$

...... 依此继续得到一列互不相交的非退化闭区间 $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots \in$ $\mathcal{F}$ 满足: $\forall N$,

$$E \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}_N} I,$$

其中

$$\mathcal{F}_N = \left\{ I \in \mathcal{F} : I \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) = \varnothing \right\},$$

此外还有

$$m\left(I_{N+1}\right) > \frac{1}{2} \sup_{I \in \mathcal{F}_N} m\left(I\right) > 0.$$

因 $\{I_k : k \geqslant 1\}$ 互不相交且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset G,\ m\left(G\right) < \infty,$$

可知

$$\lim_{k \to \infty} m\left(I_k\right) = 0. \tag{5.1}$$

2. 下证 $\forall N \geqslant 1$,

$$E \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} \left(5 I_k\right).$$

事实上, $\forall x \in E \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right)$, 存在 $I \in \mathcal{F}_N$ 使得 $x \in I$. 那么 I 必定与 $\{I_{N+1}, I_{N+2}, \ldots\}$ 中的某一个相交, 否则

$$m\left(I_{k+1}\right) > \frac{1}{2} m\left(I\right), \ \forall k > N.$$

这与 (*Eq.* 5.1) 矛盾, 因为 $I \in \mathcal{F}$ 为非退化的. 将 $\{I_{N+1}, I_{N+2}, \ldots\}$ 中与 I 相交且指标最小者记为 $I_s, (s \geqslant N+1)$, 即 I 与 $I_1, I_2, \ldots I_{s-1}$ 不相交, $I \in \mathcal{F}_{s-1}$. 根据构造

$$m\left(I_s\right) > \frac{1}{2} m\left(I\right).$$

因此

$$x \in \left(5 I_s\right) \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} \left(5 I_k\right).$$

从而当 N 充分大时,

$$m\left(E\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right)\right) \leqslant 5\sum_{k=N+1}^{\infty} m\left(I_k\right) < \varepsilon.$$

设 x 是实数值函数 $f(x)$ 定义域的内点, f 在 x 处的上导数和下导数定义为

$$\overline{D}f(x) = \lim_{h\to 0}\left[\sup_{0<|t|\leqslant h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right],$$

$$\underline{D}f(x) = \lim_{h\to 0}\left[\inf_{0<|t|\leqslant h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right].$$

显然 $\underline{D}f(x) \leqslant \overline{D}f(x)$, 若 $\underline{D}f(x)$, $\overline{D}f(x)$ 存在且相等, 那么 f 在 x 处可导, 且 $f'(x) = \underline{D}f(x) = \overline{D}f(x)$.

在证明 Lebesgue 定理之前, 先引入类似于 Chebychev 不等式的结果.

引理 5.2.2 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的单调增函数. 那么 $\forall \alpha > 0$,

$$m^*\left(\left\{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) \geqslant \alpha\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(f(b) - f(a)\right),$$

且

$$m^*\left(\left\{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) = \infty\right\}\right) = 0.$$

- 令

$$E_\alpha = \left\{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) \geqslant \alpha\right\}.$$

任取 $0 < \alpha' < \alpha$, 记 $\mathcal{F}$ 为满足下述条件的闭区间 $[c, d]$ 全体,

$$[c, d] \subset (a, b), f(d) - f(c) \geqslant \alpha' (d - c).$$

由中值定理可知, $\mathcal{F}$ 是 E_α 的 Vitali 覆盖. 根据 Vitali 引理, $\forall \varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的闭区间 $\{[c_k, d_k]\}_{k=1}^N \subset \mathcal{F}$ 使得

$$m^* \left(E_\alpha \backslash \left(\bigcup_{k=1}^N [c_k, d_k] \right) \right) < \varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned} m^* (E_\alpha) &\leqslant m^* \left(\bigcup_{k=1}^N [c_k, d_k] \right) + m^* \left(E_\alpha \backslash \left(\bigcup_{k=1}^N [c_k, d_k] \right) \right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^N (d_k - c_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha'} \sum_{k=1}^{N} \left(f(d_k) - f(c_k)\right) + \varepsilon.$$

由此得

$$m^*\left(E_\alpha\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(f(d) - f(c)\right).$$

另外 $\forall \alpha > 0,$

$$\left\{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) = \infty\right\} \subset E_\alpha.$$

从而 $\forall \alpha > 0,$

$$\begin{aligned} & m^*\left(\left\{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) = \infty\right\}\right) \\ & \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(f(d) - f(c)\right) \to 0, \ (\alpha \to \infty). \end{aligned}$$