§ 5.4 协方差和相关系数

问题 对于二维随机变量(X,Y):

$$\boxed{\text{已知联合分布}} \;\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}\; \boxed{\text{边缘分布}}$$

这说明对于二维随机变量，除了每个随机变量各自的概率特性以外，相互之间可能还有某种联系. 问题是用一个什么样的数去反映这种联系.

数 $E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

反映了随机变量X,Y之间的某种关系

协方差和相关系数的定义

定义 称 $E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$

为X,Y的协方差. 记为

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

称 $\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$

为（X,Y）的协方差矩阵

若$D(X)>0, D(Y)>0$,称

$$E\left(\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为X,Y的 **相关系数**，记为

$$\boxed{\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}}$$

事实上， $\boldsymbol{\rho}_{XY}=\operatorname{cov}(X^{*},Y^{*})$

$$\operatorname{cov}(X^*,Y^*)=E[(X^*-EX^*)(Y^*-EY^*)]$$

$$=E\left[\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}-E\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)\right)\left(\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}-E\left(\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)\right)\right]$$

$$=E\left[\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)\left(\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)\right]$$

$$=\frac{E\left[\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)\right]}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho_{XY}$$

若 $\boldsymbol{\rho}_{XY}=0$, 称 X,Y 不相关.

协方差和相关系数的计算

——利用函数的期望或方差计算协方差

- $\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)}$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=\frac{1}{2}\big(D(X+Y)-D(X)-D(Y)\big)$$

$$=-\frac{1}{2}\big(D(X-Y)-D(X)-D(Y)\big)$$

- 若 (X,Y) 为离散型，

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-E(X))(y_j-E(Y))p_{ij}$$

- 若 (X,Y) 为连续型，

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f(x,y)dxdy$$

例 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$，求 ρ_{XY}

解 $\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\boldsymbol{\mu}_1)(y-\boldsymbol{\mu}_2)f(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

令 $\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=s$

$\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_1 s\cdot\sigma_2 t\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s^2-2\rho st+t^2)}(\sigma_1 ds)(\sigma_2 dt)$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ste^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(s-\rho\ t)^2+(1-\rho^2)t^2]}dsdt$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ste^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s-\rho\ t)^2-\frac{1}{2}t^2}dsdt$$

$$\overset{令 s-\rho\ t=u}{=}\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(\rho\, t+u)e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}t^2}dudt$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\, t^2\cdot e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}t^2}dudt + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t\, u e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}t^2}dudt\right]$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}\cdot t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}dtdu$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\sqrt{2\pi\cdot(1-\rho^2)}\cdot\sqrt{2\pi}\quad=\boldsymbol{\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2}\sqrt{\sigma_2^2}}=\rho$$

若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$,

则 X,Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X,Y 不相关

例 设 X, Y 相互独立，且都服从 $N(0,\sigma^2)$,
$U = aX + bY$， $V = aX - bY$， a,b 为常数,
且都不为零，求 ρ_{UV}

解 $\operatorname{cov}(U,V) = E(UV) - E(U)E(V)$

$$= E(a^2X^2 - b^2Y^2)$$
$$-\left[E(aX+bY)\right]\left[E(aX-bY)\right]$$

$$= a^2E(X^2) - b^2E(Y^2)$$
$$-\left[aE(X)+bE(Y)\right]\left[aE(X)-bE(Y)\right]$$

$$= a^2E(X^2) - b^2E(Y^2)$$

$$-\left[a^2E^2(X) - b^2E^2(Y)\right]$$

$$= a^2\left[E(X^2) - E^2(X)\right] - b^2\left[E(Y^2) - E^2(Y)\right]$$

$$= a^2D(X) - b^2D(Y)$$

$$= (a^2 - b^2)\sigma^2$$

而 $$D(U)=D(aX+bY)$$

$$=a^2D(X)+b^2D(Y) \quad =(a^2+b^2)\sigma^2$$

$$D(V)=D(aX-bY)$$

$$=a^2D(X)+b^2D(Y) \quad =(a^2+b^2)\sigma^2$$

故 $$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\cdot\sqrt{D(V)}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sigma^2}{\sqrt{(a^2+b^2)\sigma^2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2)\sigma^2}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

协方差和相关系数的性质

协方差的性质

- $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)=E(XY)-E(X)E(Y)$

证 $\operatorname{cov}(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$

$$=E\left[XY-X\cdot E(Y)-Y\cdot E(X)+E(X)\cdot E(Y)\right]$$

$$=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)-E(Y)\cdot E(X)+E(X)\cdot E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=\operatorname{cov}(Y,X)$$

- $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X, Y)$

证 $\operatorname{cov}(aX, bY) = E\left[(aX - E(aX))(bY - E(bY))\right]$

$$= E\left[a(X - E(X)) \cdot b(Y - E(Y))\right]$$

$$= abE\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right]$$

$$= ab\operatorname{cov}(X, Y)$$

❑ $\operatorname{cov}(X+Y,Z)=\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z)$

证

$$\operatorname{cov}(X+Y,Z)=E\left\{\left[(X+Y)-E(X+Y)\right](Z-EZ)\right\}$$

$$=E\left\{\left[(X-EX)+(Y-EY)\right](Z-EZ)\right\}$$

$$=E\left[(X-EX)(Z-EZ)+(Y-EY)(Z-EZ)\right]$$

$$=E\left[(X-EX)(Z-EZ)\right]+E\left[(Y-EY)(Z-EZ)\right]$$

$$=\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z)$$

- $\operatorname{cov}(X, X) = D(X)$

证 $\operatorname{cov}(X, X) = E\left[(X - EX)(X - EX)\right]$

$$= D(X)$$

- $|\operatorname{cov}(X,Y)|^2 \le D(X)D(Y)$

当$D(X) > 0, D(Y) > 0$ 时，当且仅当

$$P(Y - E(Y) = t_0(X - E(X))) = 1$$

时，等式成立

—Cauchy-Schwarz不等式

证 5 令

$$g(t)=E[(X-E(X))\cdot t-(Y-E(Y))]^2$$

$$=E[(X-E(X))^2\cdot t^2-2(X-E(X))(Y-E(Y))\cdot t+(Y-E(Y))^2]$$

$$=D(X)\cdot t^2-2\operatorname{cov}(X,Y)\cdot t+D(Y)$$

对任何实数 t,

$$g(t)\geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$4\operatorname{cov}^2(X,Y)-4D(X)D(Y)\leq 0$$

即 $|\operatorname{cov}(X,Y)|^2\leq D(X)D(Y)$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ $g(t)=0$ 有两个相等的实零点

等号成立，即 $|\operatorname{cov}(X,Y)|^2 = D(X)D(Y)$

此时，零点为

$$t_0 = -\frac{-2\operatorname{cov}(X,Y)}{2D(X)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}$$

$$= \frac{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}{D(X)} \quad \left(\text{或} \frac{-\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}{D(X)}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}} \quad \left(\text{或} -\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}\right)$$

此时，

$g(t_0)=0$ 即

$$\left.\begin{array}{l} E[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]^2=0 \\ E[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]=0 \end{array}\right\}$$

可以证明

$$\Longleftrightarrow \quad D[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad P[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))=0]=1$$

$$P[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))=0]=1$$

即

$$P[(Y-E(Y))=t_0(X-E(X))]=1$$

即 Y 与 X 有线性关系的概率等于1，这种线性关系为

$$P[(Y-E(Y))=\pm\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}(X-E(X))]=1$$

$$P\left(\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=\pm\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=1$$

标准化随机变量

设随机变量 X 的期望$E(X)$、方差$D(X)$都存在，且$D(X) \neq 0$, 则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量. 显然，

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1$$

$$P\left(Y^* = \pm X^*\right) = 1$$

完全类似地可以证明

$$E^2(XY) \le E(X^2)E(Y^2)$$

当$E(X^2) > 0, E(Y^2) > 0$时，当且仅当

$$P(Y = t_0 X) = 1$$

时，等式成立

$$g(t) = E[Y - tX]^2$$

已知 $E(X^2)=0$

求证 $E(X)=0$

证明：

由 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)\geq 0$

知 $E^2(X)\leq E(X^2)$

故当 $E(X^2)=0$ 知 $E(X)=0$

相关系数的性质

- $|\rho_{XY}| \leq 1$

证明：由 $|\operatorname{cov}(X,Y)|^2 \leq D(X)D(Y)$

及 $\rho_{XY} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$

知 $\rho_{XY}^2 = \dfrac{|\operatorname{cov}(X,Y)|^2}{D(X)D(Y)} \leq 1$

故 $|\rho_{XY}| \leq 1$

- $|\rho_{XY}|=1$ $\Longleftrightarrow$ Cauchy-Schwarz不等式的等号成立

$\Longleftrightarrow$ 即Y与X有线性关系的概率等于1，这种线性关系为

$$P\left(\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=\pm\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=1$$

$$\rho_{XY} = 1 \quad \longrightarrow$$

$$t_0 = -\frac{-2\operatorname{cov}(X,Y)}{2D(X)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}$$

$$= \frac{\rho \cdot \sqrt{D(X) \cdot D(Y)}}{D(X)} = \sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}$$

$$P[(Y - E(Y)) = \sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}(X - E(X))] = 1$$

$$P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = 1$$

$$P\left(Y^* = X^*\right) = 1$$

$$\rho_{XY} = -1 \Longrightarrow$$

$$t_0 = -\frac{-2\operatorname{cov}(X,Y)}{2D(X)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}$$

$$= \frac{\rho \cdot \sqrt{D(X) \cdot D(Y)}}{D(X)} = -\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}$$

$$P[(Y - E(Y)) = -\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}(X - E(X))] = 1$$

$$P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = -\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = 1$$

$$P\left(Y^* = -X^*\right) = 1$$

- $\rho_{XY}=0 \iff X$，Y不相关

$$\iff \operatorname{cov}(X,Y)=0$$

$$\iff E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$\iff D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

X，Y相关时，

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\operatorname{cov}(X,Y)$$

X, Y 相互独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ X, Y 不相关

若 X, Y 服从二维正态分布，

X, Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X, Y 不相关