第十二章 平稳过程

平稳过程是一类特殊的随机过程,它的应用极为广泛.

第一节 严平稳过程

一. 定义:

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,

如果对任意 n 维分布函数，及任意实数ε，满足:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$= F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \cdots, t_n + \varepsilon) \quad n = 1, 2, \cdots$$

则称X(t)为严平稳过程，或称狭义平稳过程。

取 $\varepsilon=-t_1$, 则：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon,\cdots,t_n+\varepsilon)$$

$$=F(x_1,x_2,\cdots,x_n;0,t_2-t_1,\cdots,t_n-t_1)$$

即严平稳过程的有限维概率分布与时间起点t_1无关，只时间差t_2-t_1、……t_n-t_1有关。

二. 严平稳过程的一维、二维分布函数的性质

一维分布函数

$$F_1(x_1;t_1)=F_1(x_1;t_1+\varepsilon) \quad 取 \quad \varepsilon=-t_1,$$

$$=F_1(x_1;0)$$

$$=F_1(x_1)$$

上式表明:严平稳过程的一维分布函数 $F_1(x_1, t_1)$不依赖于参数 t_1。

二维分布函数

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=F_2(x_1,x_2;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon)$$ 取 $\varepsilon=-t_1$,

$$=F_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1)$$ 记 $t_2-t_1=\tau$

$$=F_2(x_1,x_2;0,\tau)$$

$$=F_2(x_1,x_2;\tau)$$

即：二维分布函数 $F_2(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2;t_1,t_2)$ 仅依赖于参数间距 $\tau=t_2-t_1$, 而与 t_2 , t_1 本身无关.

三.严平稳过程的等价条件

(1)对离散状态随机过程 ：

$$P\{X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n\}$$
$$=P\{X(t_1+\varepsilon)=x_1,X(t_2+\varepsilon)=x_2,\cdots,X(t_n+\varepsilon)=x_n\}$$

(2)对连续状态随机过程：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon,\cdots,t_n+\varepsilon)$$

四.严平稳过程的数字特征的性质

以连续状态严平稳过程$\{X(t), t \in T\}$为例

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x,t)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx$$

$$= \mu_X \quad \text{(常数)};$$

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x,t)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx$$

$$= \Psi_X^2 \quad \text{(常数)};$$

$$D[X(t)] = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2$$

$$= \Psi_X^2 - \mu_X^2$$

$$= \sigma_X^2 \qquad (\text{常数});$$

即：由一维分布函数决定的三个数字特征均为常数，与参数 t无关;

$$E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t, t+\tau)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau)\, dx_1 dx_2$$

$$= R_X(\tau)$$

(仅依赖于$\tau = t_2 - t_1$, 而不依赖于 t);

$$E\{[X(t)-EX(t)][X(t+\tau)-EX(t+\tau)]\}$$

$$=E[X(t)X(t+\tau)]-E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$=R_X(\tau)-\mu_X^2$$

$$=C_X(\tau)$$ (仅依赖于$\tau = t_2 - t_1$, 而不依赖于 t);

即：由二维分布函数决定的两个数字特征只是时间差$\tau = t_2 - t_1$的函数，与时间起点 t_1无关;

综合上述，得到

定理一　设 $\{X(t), t \in T\}$ 是严平稳过程,

如果过程的二阶矩存在，那么

(1) $E[X(t)] = \mu_X \quad E[X^2(t)] = \Psi_X^2 \quad D[X(t)] = \sigma_X^2$

均为常数,与参数 t无关;

(2) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$

$$E\{[X(t) - EX(t)][X(t+\tau) - EX(t+\tau)]\} = C_X(\tau)$$

仅依赖于参数间距 τ ,而不依赖于t .

称为数字特征的平稳性.

例1 (Bernoulli序列) 独立重复地进行某项试验，每次试验成功的概率为 p(0<p<1)，失败的概率为1-p .

以表示X_n第n次试验成功的次数，

试验证 $\{X_n, n=1,2,3,\cdots\}$ 是严平稳过程.

解： 令 $\{X_n=0\}$ =第n次试验失败

$\{X_n=1\}=$ 第n次试验成功

则 $P\{X_n=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1.$

且 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是独立随机序列.

任取m个正整数: $i_1, i_2, \cdots, i_m$,

m维分布律

$$P\{X_{i_1} = k_1, X_{i_2} = k_2, \cdots, X_{i_m} = k_m\}$$

$$= \prod_{r=1}^{m} P\{X_{i_r} = k_r\}$$

$$= \prod_{r=1}^{m} p^{k_r}(1-p)^{1-k_r} \qquad k_r = 0,1.$$

对任意正整数 l 有

$$P\{X_{i_1+l}=k_1, X_{i_2+l}=k_2, \cdots, X_{i_m+l}=k_m\}$$

$$=\prod_{r=1}^{m} P\{X_{i_r+l}=k_r\}$$

$$=\prod_{r=1}^{m} p^{k_r}(1-p)^{1-k_r}$$

$$=P\{X_{i_1}=k_1, X_{i_2}=k_2, \cdots, X_{i_m}=k_m\}$$

故BernmulLi序列$\{X_n, n=1,2\ldots\ldots\}$是严平稳过程.

例2　设X与Y是相互独立的标准正态随机变量,

$$Z(t)=(X^2+Y^2)t, t>0$$

试验证随机过程Z(t)不是严平稳过程,

Z(t)的数字特征也不具有平稳性.

解　首先求Z(t)的一维分布函数

$$X\sim N(0,1)\quad Y\sim N(0,1)$$

X与Y独立

故X与Y的联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\qquad -\infty<x,y<+\infty$$

$$Z(t)=(X^2+Y^2)t, t>0$$ 的分布函数为

$$F(z;t)=P\{Z(t)\le z\}$$

$$=P\{(X^2+Y^2)t\le z\}$$

$$=P\{X^2+Y^2\le \frac{z}{t}\}$$

若Z(t)≤0,则 $F(z;t)=0$

若Z(t)>0,则 $F(z;t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{z}{t}} f(x,y)dxdy$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{z}{t}} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} (-e^{-\frac{r^2}{2}}) |_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{z}{2t}}$$

于是 $F(z;t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z}{2t}}, z > 0 \\ 0, z \le 0 \end{cases}$ 依赖于参数t

故对任意实数ε, $F(z;t) \neq F(z;t+\varepsilon)$

Z(t)不是严平稳过程

由Z(t)的一维分布函数可知其概率密度

$$f(z;t)=\begin{cases}\frac{1}{2t}e^{-\frac{z}{2t}}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$$

服从参数 $\lambda=\frac{1}{2t}$ 的指数分布,

$E[Z(t)]=\frac{1}{\lambda}=2t$ 依赖于t

即Z(t)的均值函数不满足平稳性.

第二节 广义平稳过程

一、广义平稳过程的定义

定义2 设随机过程X(t),对于任意 $t \in T$,满足:

(1) $E[X^2(t)]$存在且有限;

(2) $E[X(t)] = \mu_X$ 是常数;

(3) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 仅依赖于τ ,而与 t无关,

则称X(t)为广义平稳过程,或称宽平稳过程,

简称平稳过程.

参数集T为整数集或可列集的平稳过程又称为平稳序列,或称平稳时间序列.

二、广义平稳过程的数字特征的性质

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是平稳过程,则

(1) $E[X(t)] = \mu_X$ 是常数;

(2) $\Psi_X^2 = E[X^2(t)]$

$$= E[X(t)X(t+0)]$$

$$= R_X(0)$$ 是常数;

(3) $D[X(t)] = EX^2(t) - [EX(t)]^2$

$$= \Psi_X^2 - \mu_X^2$$

$$= \sigma_X^2$$ 是常数;

(4) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 仅依赖于τ,而与t无关;

(5) $C_X(t,t+\tau) = \mathrm{cov}(X(t), X(t+\tau))$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$= R_X(\tau) - \mu_X^2$$

$= C_X(\tau)$ (仅依赖于 τ，而与t无关)

三、平稳过程的例子

例1 随机相位正弦波 $X(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$,式中 a和ω是常数, Θ是(0,2π)上服从均匀分布的随机变量. 验证X(t)是平稳过程.

验证 (1) $E[X(t)] = E[a\cos(\omega t + \Theta)]$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$= 0$ 是常数;

(2) $E[X(t)X(t+\tau)]$

$$= E[a\cos(\omega t + \Theta)\cdot a\cos(\omega(t+\tau) + \Theta)]$$

$= \dfrac{a^2}{2}\cos\omega\tau$ 仅依赖于τ

(3) $E[X^2(t)] = \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau\,|_{\tau=0}$

$$= \frac{a^2}{2}$$ 是常数,

所以, $X(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$ 是平稳过程.

例2 随机振幅正弦波 $Z(t) = X\cos 2\pi t + Y\sin 2\pi t$

其中X和 Y都是随机变量,且 $EX = EY = 0,$

$DX = DY = 1$, $E(XY) = 0.$ 验证Z(t)是平稳过程.

验证 由已给条件,知 $EX^2 = EY^2 = 1$

(1) $E[Z(t)] = E[X\cos 2\pi t + Y\sin 2\pi t]$

$$= \cos 2\pi t \cdot EX + \sin 2\pi t \cdot EY$$

$$= 0$$

(2)

$$E[Z(t)Z(t+\tau)]$$

$$= E[(X\cos 2\pi t + Y\sin 2\pi t)\cdot(X\cos 2\pi(t+\tau) + Y\sin 2\pi(t+\tau))]$$

$$= \cos 2\pi t \cos 2\pi(t+\tau) + \sin 2\pi t \sin 2\pi(t+\tau)$$

$$= \cos 2\pi\tau$$

(3) $E[Z^2(t)] = 1$

所以Z(t)是平稳过程.

例3(白噪声序列) 互不相关的随机变量序列

$\{X_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$, $EX_n=0$, $DX_n=\sigma^2\neq0$

是一个平稳序列.

验证

(1) $EX_n=0$,

取τ为任意非零整数,

由X_n与$X_{n+\tau}$互不相关,则有

(2) $E[X_n X_{n+\tau}]=E(X_n)\cdot E(X_{n+\tau})=0$

(3) $EX_n^2=DX_n+(EX_n)^2=\sigma^2$

所以, $\{X_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是一个平稳序列.

例4通讯系统中的加密序列。设

$\{\xi_0,\eta_0,\xi_1,\eta_1,\cdots,\xi_n,\eta_n,\cdots\}$是相互独立的随机变量序列.

$\xi_n(n=0,1,2,\cdots)$同分布，$\eta_n(n=0,1,2,\cdots)$同分布，

$E\xi_n=E\eta_n=0,\ \ D\xi_n=D\eta_n=\sigma^2\neq 0.$ 设

$$X_n=\xi_n+\eta_n+(-1)^n(\xi_n-\eta_n)$$

则加密序列$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$是平稳序列.

验证： $X_n=[1+(-1)^n]\xi_n+[1+(-1)^{n+1}]\eta_n$

(1) $EX_n=0$

$$X_n = [1+(-1)^n]\xi_n + [1+(-1)^{n+1}]\eta_n$$

(2) $$EX_n^2 = DX_n + (EX_n)^2 \quad = DX_n$$

$$= [1+(-1)^n]^2 D\xi_n + [1+(-1)^{n+1}]^2 D\eta_n$$

$$= 4\sigma^2$$

(3) 取τ为任意正整数,

由X_n与$X_{n+\tau}$互相独立, 有

$$E[X_n X_{n+\tau}] = EX_n \cdot EX_{n+\tau} = 0,$$

所以, $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是平稳序列.

四、严平稳过程与广义平稳过程的关系

1.广义平稳过程,不一定是严平稳过程.

广义平稳只是随机过程的特征变量具有平稳性，但其分布函数未必平稳。

2.严平稳过程,(如果二阶矩不存在),不一定是广义平稳过程.

广义平稳定义中要求$E[X^2(t)]$存在且有限，但严平稳过程只是要求任意n个状态的联合分布不随时间推移而改变，其$E[X^2(t)]$可能不存在

推论　存在二阶矩的严平稳过程必定是广义平稳过程.

例5 随机电报信号

电报信号用电流 I 或 $-I$ 给出,任意时刻 t 的电报信号 $X(t)$ 为 I 或 $-I$ 的概率各为 0.5。又以 $N(t)$ 表示[0,t)内信号变化的次数,已知 $\{N(t),\ t \geq 0\}$是一泊松过程,

则$\{X(t),\ t \geq 0\}$是一个平稳过程.

泊松过程的定义

$$P\{N(t+\tau)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^k}{k!}e^{-\lambda|\tau|}$$

$$\lambda > 0, k = 0,1,2,\cdots$$

验证

(1) $$E[X(t)] = IP\{X(t) = I\} + (-I)P\{X(t) = -I\}$$

$$= \frac{I}{2} - \frac{I}{2} = 0$$

(2) $$E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$= I^2 P\{X(t)X(t+\tau) = I^2\}$$

$$+ (-I^2)P\{X(t)X(t+\tau) = -I^2\}$$

$$= I^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N(t+\tau) - N(t) = 2n\}$$

$$- I^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N(t+\tau) - N(t) = 2n+1\}$$

由泊松过程的定义

$$P\{N(t+\tau)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^k}{k!}e^{-\lambda|\tau|}$$

$$\lambda>0, k=0,1,2,\cdots$$

于是得到

$$E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=I^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^{2n}}{(2n)!}e^{-\lambda|\tau|}\quad -I^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-\lambda|\tau|}$$

$$= I^2 e^{-\lambda|\tau|}\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda|\tau|)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda|\tau|)^{2n+1}}{(2n+1)!}\}$$

$$= I^2 e^{-\lambda|\tau|}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda|\tau|)^{n}}{n!}$$

$$= I^2 e^{-\lambda|\tau|}\cdot e^{-\lambda|\tau|} \quad = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$$

(3) $E[X^2(t)] = I^2$

所以, $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个平稳过程.

五.两个平稳过程的关系

回顾广义平稳过程通常简称为平稳过程.

定义3 设X(t)和 Y(t) 是两个平稳过程,如果互相关函数 $E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau)$ 仅是参数间距τ的函数,则称 X(t)和 Y(t)平稳相关,或称其为联合平稳的. 此时

$$C_{XY}(\tau)=\operatorname{cov}(X(t),Y(t+\tau))$$

$$=E\,[X(t)\,Y(t+\tau)]-E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)]$$

$$=R_{XY}(\tau)-\mu_X\mu_Y$$

定义4 $$\rho_{XY}(\tau)=\frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_X(0)\cdot C_Y(0)}}$$

称为标准互协方差函数.

特别当 $\rho_{XY}(\tau)=0$ 时,称两个平稳过程不相关.

其中 $$C_X(0)=\operatorname{cov}(X(t),X(t))$$

$$=E[X(t)-EX(t)]^2$$

$$=DX(t)=\sigma_X^2$$

$$C_Y(0)=\operatorname{cov}(Y(t),Y(t))$$

$$=E[Y(t)-EY(t)]^2$$

$$=DY(t)=\sigma_Y^2$$

(均为 常数).

第三节 正态平稳过程

一.正态过程

正态随机变量复习：

一维正态随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,概率密度

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

二维正态随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

n维正态分布 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 概率密度

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)' C^{-1}(x-\mu)\}$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

协方差矩阵 $C = (C_{ij})_{n\times n}$， $C_{ij} = Cov(X_i, X_j)$

定义5 如果随机过程$X(t)$,对任意正整数n,

$\forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, (X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ 服从正态分布

则称$X(t)$为正态过程,又称高斯(Gauss)过程.

独立正态过程:如果 $\{X(t), t \in T\}$

是正态过程,同时又是独立过程,

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为独立正态过程.

正态序列:正态过程$\{X(t), t \in T\}$如果T是可列集,

$T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$, 记 $X(t) = X_t$; 那么,

$\{X_t, t = t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$ 是正态序列.

二. 正态平稳过程

设 $\{X(t), t \in T\}$是正态过程, $X(t)$服从正态分布,则

$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$ 必存在,即二阶矩存在.

定义 如果正态过程 $X(t)$又是(广义)平稳过程,则称$X(t)$为正态平稳过程.

定理二：设$X(t)$是正态过程.

则$X(t)$为严平稳过程 $\Leftrightarrow$ $X(t)$为广义平稳过程.

例1 设正态过程$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的均值函数

$\mu_X(t) = 0$, 自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$,

试写出过程的一维、二维概率密度函数.

例2 设$X(t)$是正态平稳过程,且$E[X(t)] = \mu_X(t) = 0$,

令 $Y(t) = \begin{cases} 1, 当X(t) < 0 \\ 0, 当X(t) \geq 0 \end{cases}$

证明 $Y(t)$是平稳过程.

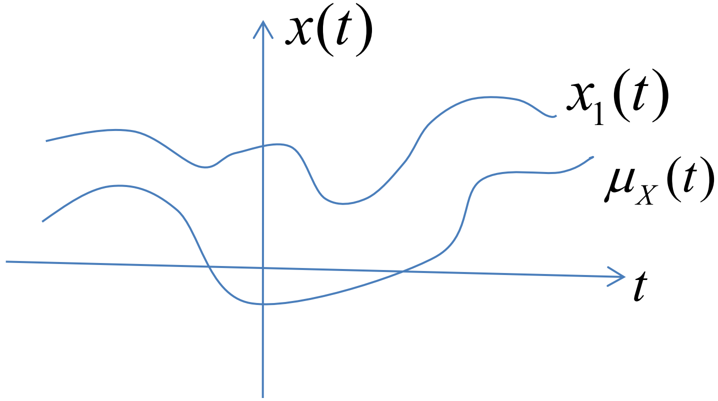
补充1. 随机过程X(t)的自相关函数

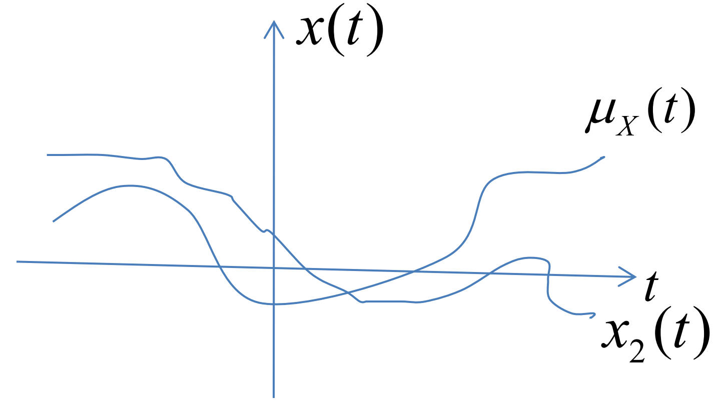
对任意两个状态$X(t_1)$和$X(t_2)$，其相关系数为

$$\rho_X(t_1,t_2)=\frac{Cov[X(t_1),X(t_2)]}{\sqrt{D[X(t_1)]\cdot D[X(t_1)]}}$$

$$=\frac{E[X(t_1)\cdot X(t_2)]-E[X(t_1)]\cdot E[X(t_2)]}{\sqrt{D[X(t_1)]\cdot D[X(t_1)]}}$$

即$E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$越大， $X(t_1)$和$X(t_2)$线性相关性越强





补充2. 广义平稳过程的数字特征

定义

设随机过程X(t),对于任意$t \in T$,满足:

(1) $E[X^2(t)]$存在且有限;

(2) $E[X(t)]=\mu_X$ 是常数;

(3) $E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$ 仅依赖于τ ,而与 t无关,

当τ=0时，$E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$ 即：

$$E[X^2(t)]=R_X(0)=\Psi_X^2$$ 为与 t无关的常数

从而，$D[X(t)] = E[X^2(t)] - \{E[X(t)]\}^2 = \Psi_X^2 - \mu_X^2$

为与 t无关的常数

$$C_X(t,t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$= R_X(t,t+\tau) - \mu_X \cdot \mu_X = R_X(\tau) - \mu_X^2$$