概率论与数理统计

指数分布

$$T \sim Exp(\lambda),\ \lambda > 0$$

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t},\ t \geqslant 0 \\ 0, \quad otherwise \end{cases}$$

任意时段内，粒子出现率与时间长成比例 $\lambda > 0$

固定$t > 0$: $\quad 0, \quad \delta, \quad 2\delta, \quad 3\delta, \quad \cdots \quad t = k\delta$

$$P(T > t) = P\left(T > k\delta\right) = P\left(T > \left(\frac{t}{\delta}\right)\delta\right)$$

$$\approx (1 - \lambda\delta)^{t/\delta} \to e^{-\lambda t},\ k \to \infty$$

指数分布

例 3 设某人打一次电话所用的时间 ζ 服从参数为 1/10（单位：min）的指数分布，当你走进电话室需要打电话时，某人恰好在你前面打电话．求以下几个事件的概率：

（1）你需要等待 10min 以上；

（2）你需要等待 10～20min.

指数分布

例 3　设某人打一次电话所用的时间 ζ 服从参数为 1/10（单位：min）的指数分布，当你走进电话室需要打电话时，某人恰好在你前面打电话．求以下几个事件的概率：

（1）你需要等待 10min 以上；

（2）你需要等待 10～20min.

解　用 ζ 表示某人的通话时间，也就是你的等待时间，则 ζ 的分布密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

所以要求的概率分别为

$$(1)\ P(\zeta>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx=e^{-1}\approx 0.368\ ;$$

指数分布

例 3 设某人打一次电话所用的时间 ζ 服从参数为 1/10（单位：min）的指数分布，当你走进电话室需要打电话时，某人恰好在你前面打电话．求以下几个事件的概率：$P(\zeta > T_{in} + 10 \mid \zeta > T_{in}) = P(\zeta > 10)$

（1）你需要等待 10min 以上；

（2）你需要等待 10～20min.

解 用 ζ 表示某人的通话时间，也就是你的等待时间，则 ζ 的分布密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

所以要求的概率分别为

(1) $P(\zeta > 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx = e^{-1} \approx 0.368$；

指数分布

例 3 设某人打一次电话所用的时间 ζ 服从参数为 1/10（单位：min）的指数分布，当你走进电话室需要打电话时，某人恰好在你前面打电话．求以下几个事件的概率：$P(\zeta > T_{in} + 10 \mid \zeta > T_{in}) = P(\zeta > 10)$

（1）你需要等待 10min 以上；

（2）你需要等待 10～20min.

$$P(T_{in} + 20 > \zeta > T_{in} + 10 \mid \zeta > T_{in}) = P(20 > \zeta > 10)$$

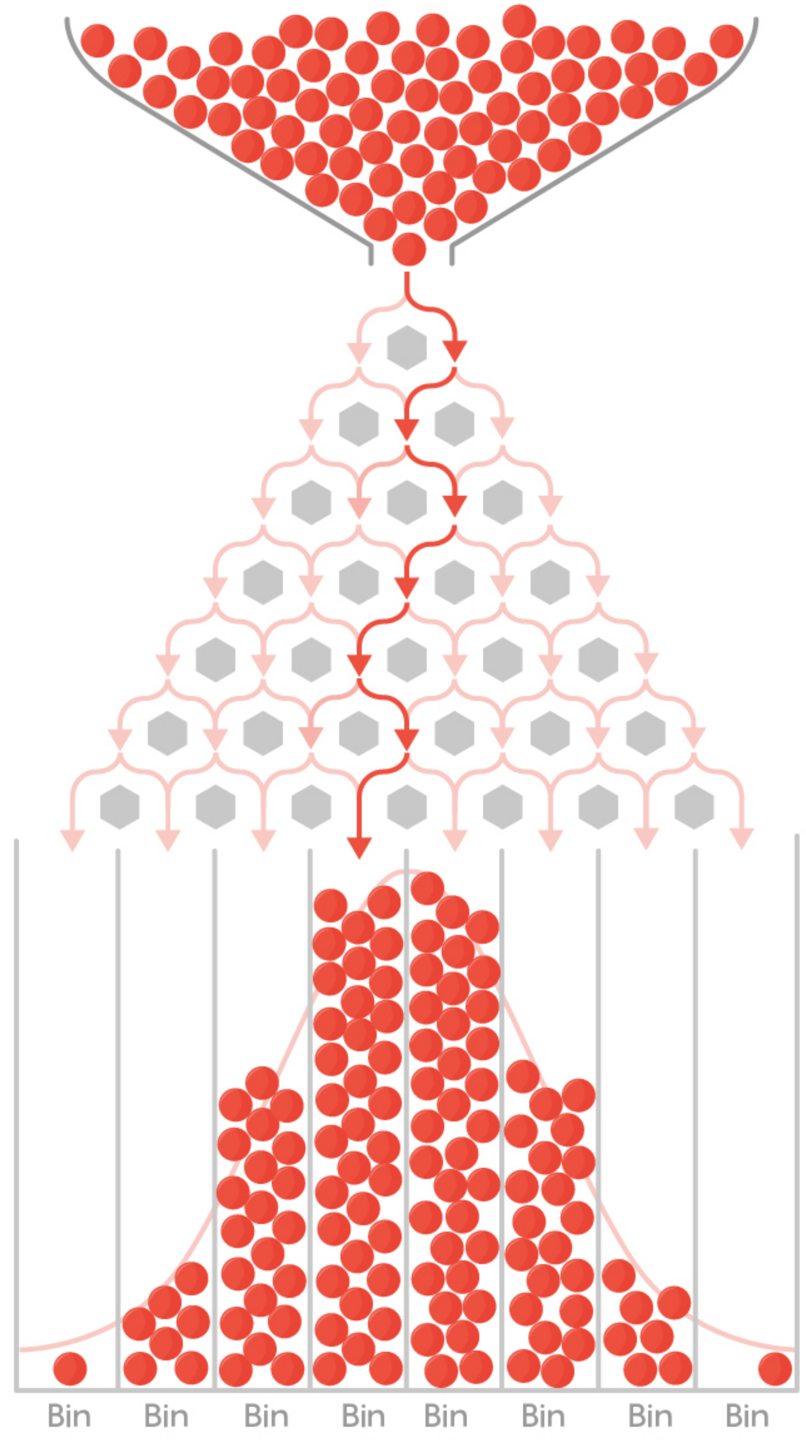
解 用 ζ 表示某人的通话时间，也就是你的等待时间，则 ζ 的分布密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

所以要求的概率分别为

(1) $P(\zeta > 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx = e^{-1} \approx 0.368$；

Galton板到正态分布



www.quantamagazine.org

Gamma函数

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \\ &= \beta^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx,\ \forall \alpha > 0, \beta > 0\end{aligned}$$

Gamma函数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$
$$= \beta^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx, \ \forall \alpha > 0, \beta > 0$$

积分收敛

Gamma函数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$
$$= \beta^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx,\ \forall \alpha > 0, \beta > 0$$

积分收敛

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha > 0;$$
$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n!) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$$

Gamma分布

$$X \sim Gamma(\alpha, \beta),\ \alpha > 0, \beta > 0$$

$$p(x|\alpha > 0, \beta > 0) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$Gamma(n, \lambda) = \underbrace{T_1 + T_2 + \cdots + T_n}_{\text{n (independent) copies of Exp}(\lambda)}$$

- Geometric -> Exponential
- Nonnegative Binomial -> Gamma

Beta函数

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\ \forall\alpha,\beta>0$$

Beta函数

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\ \forall\alpha,\beta>0$$

积分收敛

Beta函数

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\ \forall \alpha, \beta > 0$$

积分收敛

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

Beta函数

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\ \forall\alpha,\beta>0$$

积分收敛

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$$

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Beta函数与Gamma函数

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du \int_0^\infty v^{\beta-1}e^{-v}dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\alpha-1}v^{\beta-1}e^{-u-v}dudv\end{aligned}$$

Beta函数与Gamma函数

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}du \int_0^{\infty} v^{\beta-1}e^{-v}dv$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}v^{\beta-1}e^{-u-v}dudv$$

$$u = st,\ v = s(1-t) \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{pmatrix}$$

Beta函数与Gamma函数

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du \int_0^\infty v^{\beta-1}e^{-v}dv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\alpha-1}v^{\beta-1}e^{-u-v}dudv$$

$$u = st,\ v = s(1-t) \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^\infty s^{\alpha+\beta-2} \cdot e^{-s} \cdot sds \int_0^\infty t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

Beta函数与Gamma函数

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du \int_0^\infty v^{\beta-1}e^{-v}dv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\alpha-1}v^{\beta-1}e^{-u-v}dudv$$

$$u = st,\ v = s(1-t) \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^\infty s^{\alpha+\beta-2} \cdot e^{-s} \cdot sds \int_0^\infty t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

$$\Longrightarrow B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Beta分布

$$p(x|\alpha > 0, \beta > 0) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} x^{\beta-1}, 0 < x < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

$$\underbrace{T_1 + T_2}_{\text{independent Exp}(\lambda)} \quad \sim Gamma$$

$$\frac{T_1}{T_1 + T_2}, \frac{T_2}{T_1 + T_2} \sim Beta$$