概率论与数理统计

排列组合公式

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

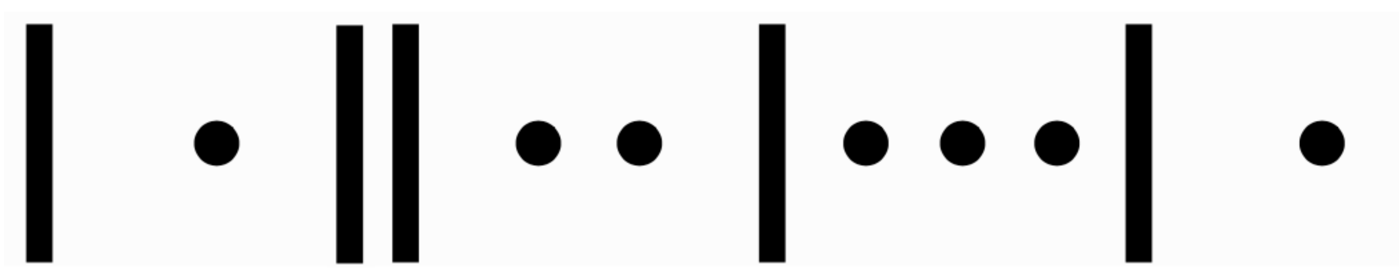
$$n \cdot \binom{n-1}{k-1} = k \cdot \binom{n}{k}$$

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j}$$

不同的偏导数

假设k是正整数，那么n维欧氏空间上的光滑函数共有多少个不同的偏导数?

Hint: 把 k 阶导数分隔为 n 份！ 想象将 n-1 个隔板插入 k 个小球形成的 k 个空位，例如：



$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

抓阄的次序与概率

例 3.3 设某班共有 N 个同学($N\geqslant 2$)．现有 m 张免费的电影票要发给这个班的同学($1\leqslant m<N$)．班长决定由抓阄的方式确定哪 m 个同学得到票．即用纸做成 N 个阄，外表一样，其中 m 个阄内含有“有”字，其余 $N-m$ 个是白阄(不含字)，把这些阄随便堆放在桌上，由班上同学排成一队依次任取一阄，取到有字的阄的同学方可得到电影票．问：所排的队中第 i 个同学得到电影票的概率是多少？($i=1,2,\cdots,N$)．

Hint: 先考虑一个具体情形 N=5，m=1，i=2 $\left(\frac{1\cdot 4!}{5!}=\frac{1}{5}\right)$

$$\frac{m\cdot(N-1)!}{N!}=\frac{m}{N}$$

抓到阄的概率与抓阄的次序无关

概率公理化

概率系统: $(\Omega, \mathscr{F}, P)$

$P(A) \geqslant 0$ (一切 $A \in \mathscr{F}$);

$P(\Omega) = 1$;

若 $A_n \in \mathscr{F}$ (一切 $n \geqslant 1$),且两两不相交,就有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

$P(\varnothing) = 0\,?$ $\qquad 1 = P(\Omega) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} P(\varnothing)$

概率的性质

$$A_n \subset A_{n+1} \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$A_n \supset A_{n+1} \implies P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$\forall A_n \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

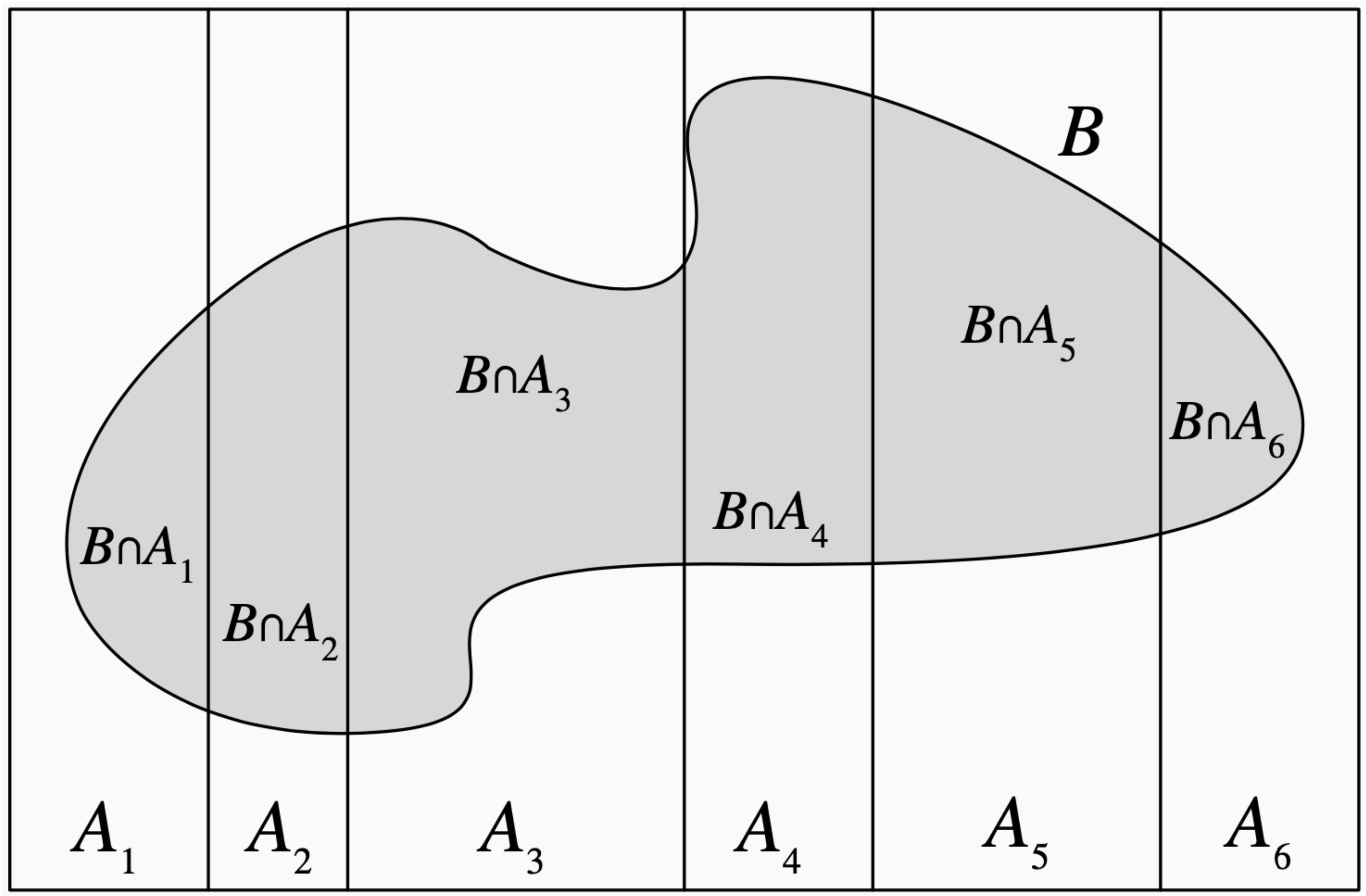
男孩女孩

一家庭有两个小孩，已知其中一个是女孩。两个都是女孩的概率多大？（假设男女孩出生概率相等）

$$\{BB, BG, GB, GG\}$$

$$\frac{\#\{GG\}}{\#\{BG, GB, GG\}} = \frac{1}{3}$$

全概率公式



$$P(B) = \sum_{n=1}^{\cdots} P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\cdots} P(B \mid A_n) P(A_n)$$

全概率公式

例 2　设某昆虫产 k 个卵的概率为$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$，$\lambda>0$ 为常数，$k=0$，1，2，….每个卵能孵化成幼虫的概率为 $p(0<p<1)$，且各个卵能否孵化成幼虫是相互独立的，求：该昆虫有后代的概率.

$$A=\{\text{有昆虫后代}\},\ B_k=\{\text{产 } k \text{ 个卵}\}$$

$$P(B_k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

$$P(A^c)=\sum_{k=0}^{\infty}P(B_k)P(A^c\mid B_k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}(1-p)^k=e^{-\lambda p}$$

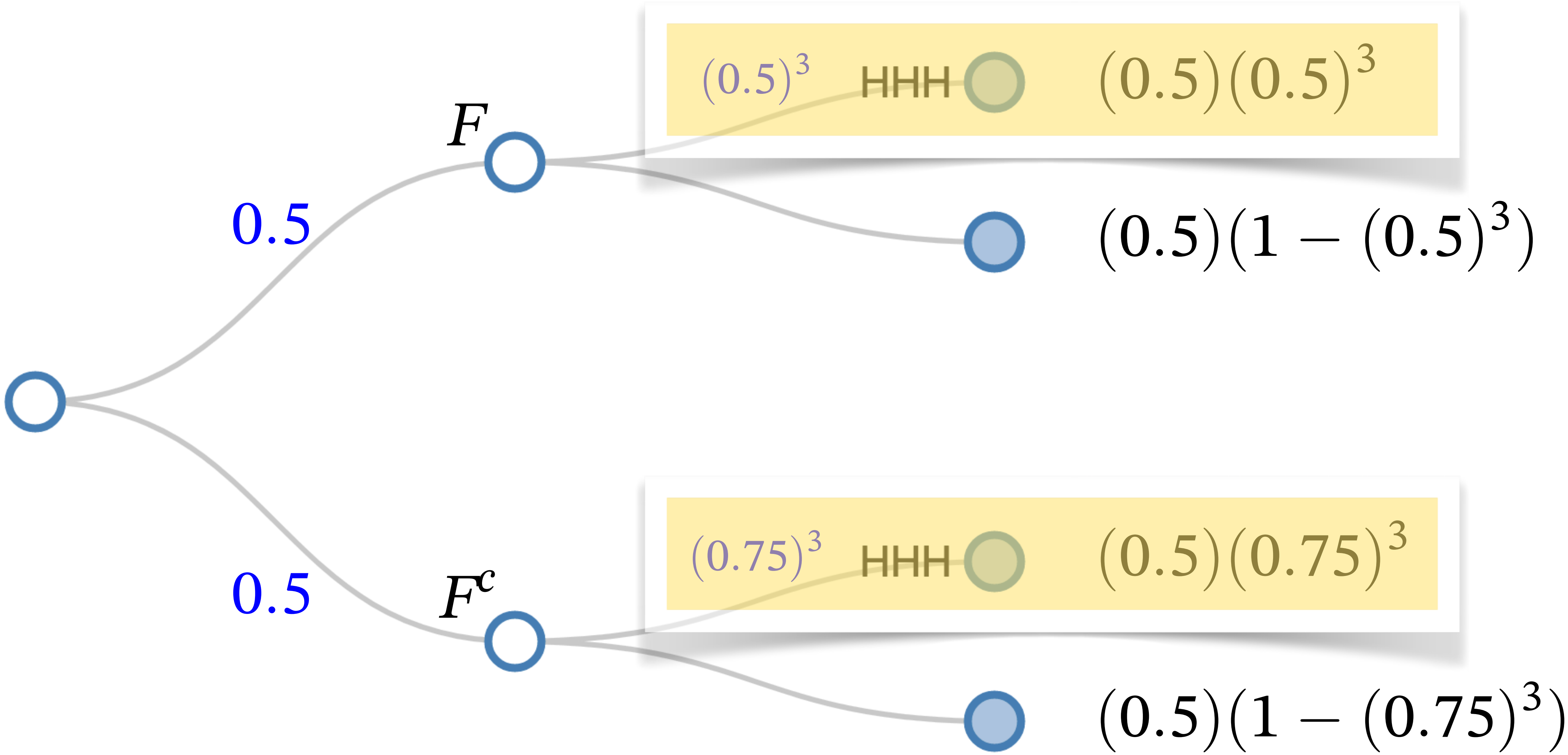
随机硬币

两枚硬币，一枚均匀，另一枚正面概率为3/4。现随机取一枚硬币，连续投掷3次都是正面！取到的是均匀硬币的概率多大?

$$A = \{\text{出现三次正面}\}$$
$$F = \{\text{取到均匀硬币}\}$$

$$P(F \mid A) = ?$$

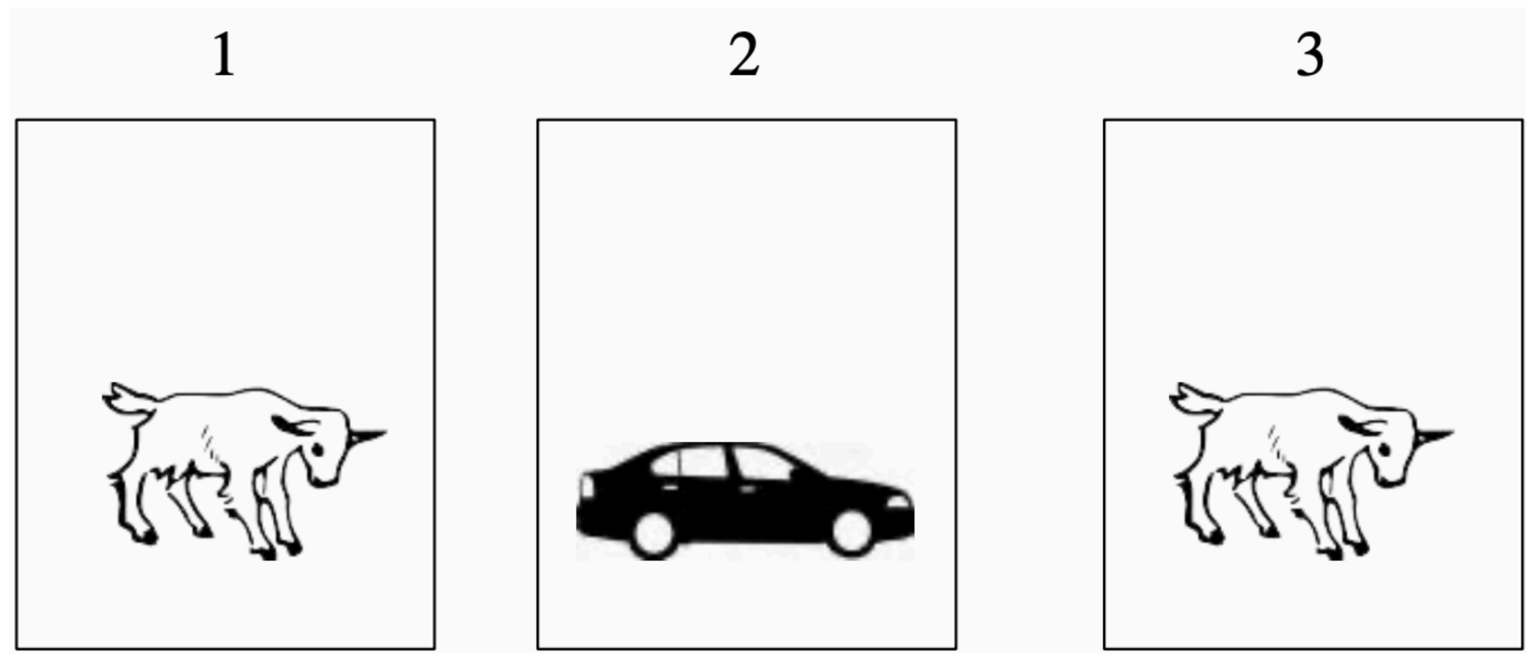
$$P(F \mid A) = \frac{P(A \mid F)P(F)}{P(A \mid F)P(F) + P(A \mid F^c)P(F^c)}$$



$$P(F \mid A) = \frac{(0.5)(0.5)^3}{(0.5)(0.5)^3 + (0.5)(0.75)^3}$$

$$P(F \mid A) = \frac{P(A \mid F)P(F)}{P(A \mid F)P(F) + P(A \mid F^c)P(F^c)}$$

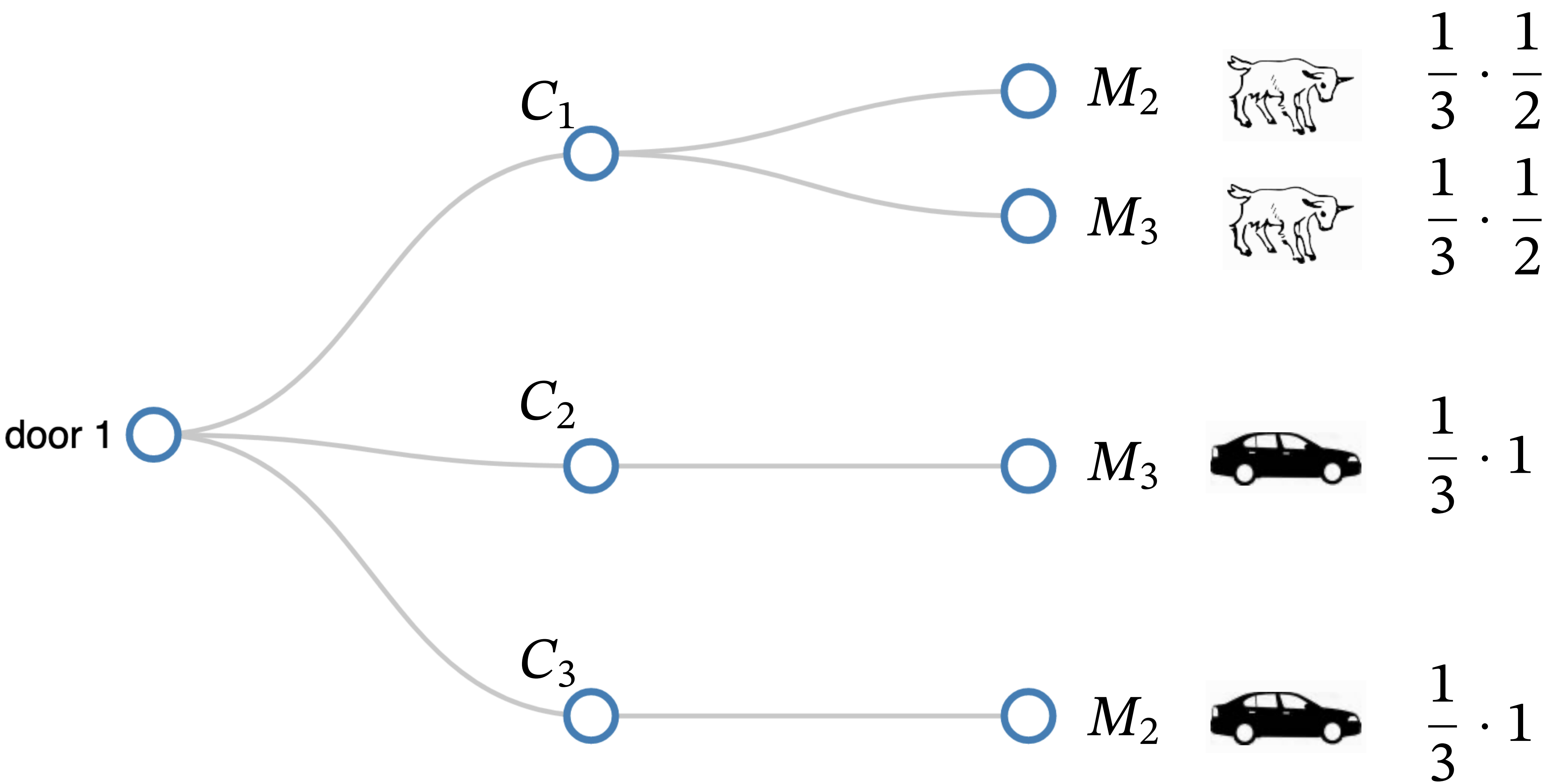
Monty Hall



$$C_k = \{\ 车在第\ k\ 扇门后\ \}$$

$$M_k = \{\ 主持人打开第\ k\ 扇门\ \}$$

Monty Hall



划分： $\Omega = C_1M_2 \cup C_1M_3 \cup C_2M_3 \cup C_3M_2$

Monty Hall

$P(C_k)$, $k = 1, 2, 3$	$P(M_2 \mid C_k)$	$P(M_2 \mid C_k)P(C_k)$	$P(C_k \mid M_2)$
$P(C_1) = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$P(C_2) = \frac{1}{3}$	0	0	0
$P(C_3) = \frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$P(M_2) = \sum_{k=1}^{3} P(M_2 \mid C_k)P(C_k) = \frac{1}{2}$$

条件概率 - 条件概率, Bayes公式

$$P(E) \neq 0,\, E \in \mathscr{F}, \quad P^*(B) := P(B \mid E)$$

条件概率:

$$P^*(B \mid A) := P(B \mid A, E) := P(B \mid A \cap E)$$

$$\begin{aligned} P^*(B \mid A) &= \frac{P(B \cap A \cap E)}{P(A \cap E)} = \frac{P(B \cap A \cap E)/P(E)}{P(A \cap E)/P(E)} \\ &= \frac{P(B \cap A \mid E)}{P(A \mid E)} = \frac{P^*(B \cap A)}{P^*(A)} \end{aligned}$$

条件概率 - 条件概率, Bayes公式

全概率公式:

$$P^*(B) = \sum_{n=1}^{\cdots} P^*(B \mid A_n) P^*(A_n)$$

$$P(B \mid E) = \sum_{n=1}^{\cdots} P(B \mid A_n, E) P(A_n \mid E)$$

Bayes公式:

$$P^*(A \mid B) = \frac{P^*(A \cap B)}{P^*(B)} = \frac{P^*(B \mid A) P^*(A)}{P^*(B)}$$

$$P(A \mid B, E) = \frac{P(A \cap B \mid E)}{P(B \mid E)} = \frac{P(B \mid A, E) P(A \mid E)}{P(B \mid E)}$$

事件独立性

$$P(A) \neq 0: \quad P(B \mid A) = P(B)$$

$$\iff \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A) = 0: \quad P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0$$

概率为 0 的事件与任意事件独立

A, B独立 $\iff A^c, B$独立

概率为 1 的事件与任意事件独立

$$A, B, C, D\text{独立} \Longrightarrow A \cup B, C \cup D\text{独立}$$

$$A, B, C, D\text{独立} \Longrightarrow A^c \cap B^c, C^c \cap D^c\text{独立}$$

轮流射击

例 5 甲、乙两人的射击水平相当，于是约定比赛规则为双方对同一目标轮流射击，若一方失利，另一方可以继续射击，直到有人命中目标为止．命中一方为该轮比赛的优胜者．问：先射击者是否一定有优势？为什么？

解 设甲、乙两人每次命中的概率均为 p，失利的概率为 q，$0<p<1$，$p+q=1$.

令 $A_i=$“第 i 次射击命中目标”，$i=1$，2，$\cdots$.

假设甲先发第一枪，则

$$
\begin{aligned}
P(\text{甲胜})&=P(A_1+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5+\cdots)\\
&=P(A_1)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5)+\cdots\\
&=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})P(A_5)+\cdots\\
&=p+q^2p+q^4p+\cdots\\
&=p(1+q^2+q^4+\cdots)\\
&=p\,\frac{1}{1-q^2}=p\,\frac{1}{(1-q)(1+q)}=\frac{1}{1+q}.
\end{aligned}
$$

轮流射击（续）

$$A = \{\text{甲第一次射击击中目标}\}$$
$$B = \{\text{乙第一次射击击中目标}\}$$
$$W = \{\text{甲最终赢得比赛}\}$$

$$W = A \cup (A^c \cap B^c \cap W)$$

$$\begin{aligned} P(W) &= P(A) + P(A^c \cap B^c)P(W) \\ &= p + q^2 P(W) \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow P(W) = \frac{1}{1+q}$$

条件概率 - 独立性

$$P(E) \neq 0,\, E \in \mathscr{F}, \quad P^*(B) := P(B \mid E)$$

条件概率:

$$P^*(B \mid A) := P(B \mid A, E) := P(B \mid A \cap E)$$

$$P^*(B \mid A) = \frac{P^*(B \cap A)}{P^*(A)}$$

独立性定义:

$$P^*(A \cap B) = P^*(A)P^*(B)$$

$$P(A \cap B \mid E) = P(A \mid E)P(B \mid E)$$

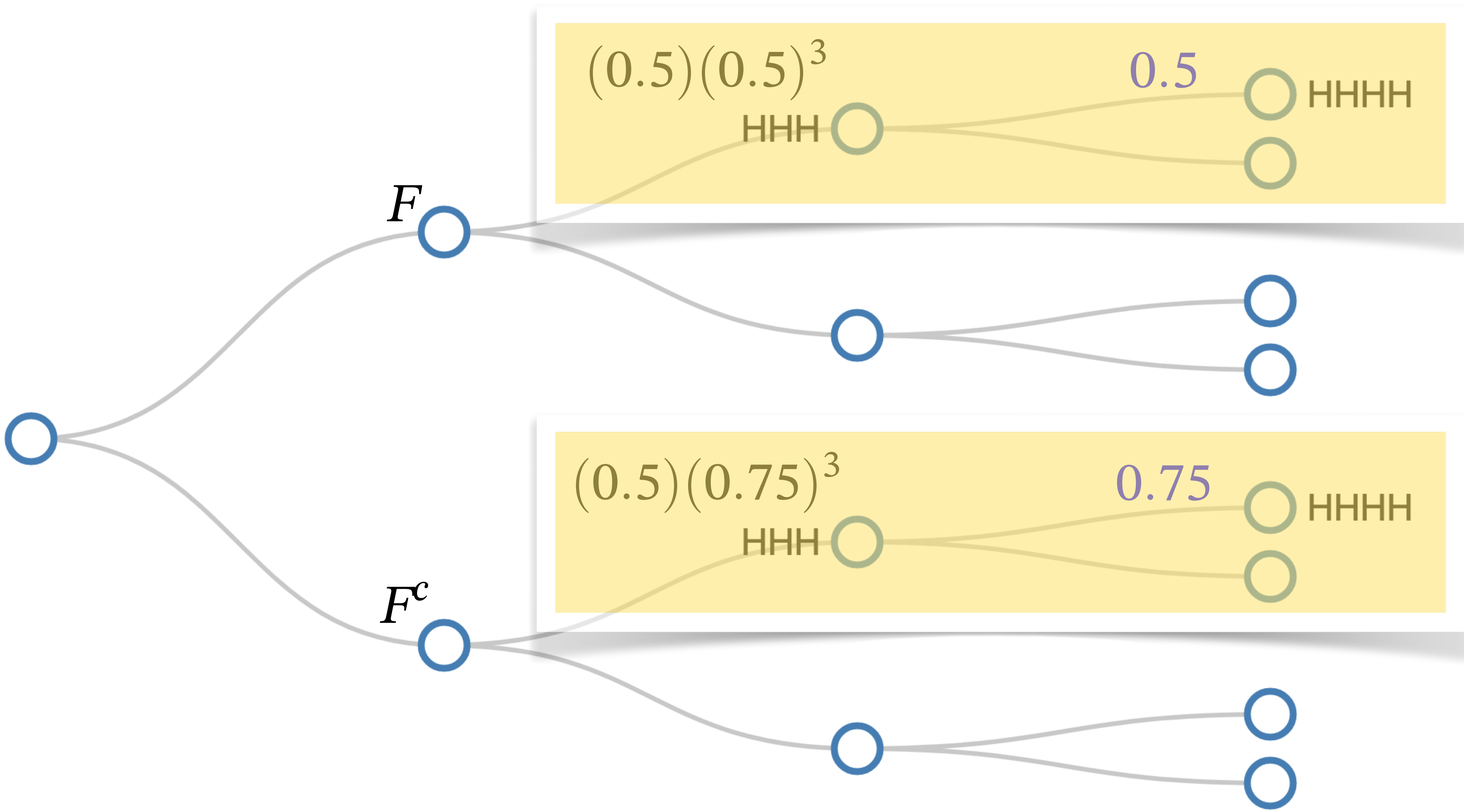
随机硬币（续）

两枚硬币，一枚均匀，另一枚正面概率为3/4。现随机取一枚硬币，连续投掷3次都是正面！将该硬币再投掷一次，出现正面的概率是多少？

$$A = \{\text{出现三次正面}\}$$
$$F = \{\text{取到均匀硬币}\}$$
$$H = \{\text{第四次是正面}\}$$

$$P(H \mid A) = ?$$

$$P(H \mid A) = P(H \mid F, A)P(F \mid A) + P(H \mid F^c, A)P(F^c \mid A)$$



$$P(H \mid A) = \frac{(0.5)\cdot(0.5)(0.5)^3 + (0.75)\cdot(0.5)(0.75)^3}{(0.5)(0.5)^3 + (0.5)(0.75)^3}$$

$$P(H \mid A) = P(H \mid F, A)P(F \mid A) + P(H \mid F^c, A)P(F^c \mid A)$$

F条件下，A与H独立：

$$\begin{aligned} P(H \mid F, A) &= \frac{P(H \cap A \cap F)}{P(A \cap F)} \\ &= \frac{P(H \cap A \mid F)P(F)}{P(A \mid F)P(F)} \\ &= \frac{P(H \cap A \mid F)}{P(A \mid F)} \\ &= P(H \mid F) \end{aligned}$$

同理：

$$P(H \mid F^c, A) = P(H \mid F^c)$$