2.3 Lebesgue 可测性的刻画

记号: $A \backslash B = A \cap B^c$.

定理 2.3.1 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 以下各条等价.
(1) E 为可测集,
(2) $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, $m^*(G \backslash E) < \varepsilon$,
(3) 存在 G_δ 集 H 和零测集 Z 使得: $E = H \backslash Z$. 此时 $m(E) = m(H)$, 因此称 H 为 E 的等测包.

■ (1) $\Rightarrow$ (2). 若 $m(E) < \infty$. $\forall \varepsilon > 0$, 存在开矩体 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant m(E) + \varepsilon.$$

令 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 则 G 为开集, $E\subset G$,

$$\begin{aligned} m(G\backslash E) &= m(G)-m(E) \text{ (定理 2.1.1 (1))} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|I_k| - m(E) \text{ (次可加性)} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

若 $m(E)=\infty$. $\forall k$, 令 $E_k=E\cap B(0,k)$. 那么 $\forall k$, $m(E_k)<\infty$, $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 运用已有结论, $\forall \varepsilon>0$, 存在开集 G_k, $E_k\subset G_k$,

$$m(G_k\backslash E_k)\leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

取 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, 那么 G 为开集, $E\subset G$,

$$m(G\backslash E)\leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k\backslash E_k)\right)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k\backslash E_k)\leqslant \varepsilon.$$

$(2) \Rightarrow (3)$. 由假设 $\forall k$, 存在开集 G_k, $E \subset G_k$ 满足

$$m^*(G_k \backslash E) \leqslant \frac{1}{k}.$$

令 $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 $E \subset H$,

$$m^*(H \backslash E) \leqslant m^*(G_k \backslash E) \leqslant \frac{1}{k} \to 0.$$

因此取 $Z = H \backslash E$, 那么

$$E = H \backslash Z,\ m(Z) = 0.$$

$(3) \Rightarrow (1)$. 由于 Z 为可测集 , 又根据定理 2.2.3, H 为可测集 , 因此 $E = H \backslash Z$ 可测.

利用定理 2.3.1, 我们也有

定理 2.3.2 $E \subset \mathbb{R}^n$. 以下各条等价.
(1) E 为可测集,
(2) $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m^*(E \backslash F) < \varepsilon$,
(3) 存在 F_σ 集 K 和零测集 Z 使得: $E = K \cup Z$. 此时 $m(E) = m(K)$, 因此称 K 为 E 的等测核.

- $(1) \Rightarrow (2)$. $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E^c$ 满足

$$m(G \backslash E^c) \leqslant \varepsilon.$$

又

$$G \backslash E^c = G \cap E = E \cap (G^c)^c = E \backslash G^c,$$

因此

$$m(E \backslash G^c) = m(G \backslash E^c) \leqslant \varepsilon.$$

同时 G^c 为闭集, $G^c \subset E$.

(2) $\Rightarrow$ (3) . 由假设 $\forall k$, 存在闭集 F_k, $F_k \subset E$ 满足

$$m^*\left(E \backslash F_k\right) \leqslant \frac{1}{k}.$$

令 $K = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $K \subset E$,

$$m^*\left(E \backslash K\right) \leqslant m^*\left(E \backslash F_k\right) \leqslant \frac{1}{k} \to 0.$$

因此取 $Z = E \backslash K$, 那么

$$E = K \cup Z,\ m\left(Z\right) = 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (1) . 由于 Z 为可测集 , 又根据定理 2.2.3, K 为可测集 , 因此 $E = K \cup Z$ 可测.

利用可测集的等价刻画, 我们得到 Lebesgue 测度的相对伸缩不变性.

定理 2.3.3 (相对伸缩不变性) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. $\forall \lambda > 0$, 记

$$\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}.$$

那么 $m^*(\lambda E) = \lambda^n m^*(E)$, 且 λE 可测当且仅当 E 可测.

- $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 E 的开矩体覆盖当且仅当 $\{\lambda I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 λE 的开矩体覆盖, 而 $\forall k$, $|\lambda I_k| = \lambda^n |I_k|$, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda I_k| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

由此可知 $m^*(\lambda E) = \lambda^n m^*(E)$. 若 E 可测, 那么存在 G_δ 集 H

和零测集 Z 使得: $E = H \backslash Z$. 由于 λH 是 G_δ 集, $m^*(\lambda Z) = \lambda^n m^*(Z) = 0$, 同时

$$\lambda E = \lambda H \backslash \lambda Z.$$

因此 λE 可测. 反过来, 若 λE 可测, 那么 $E = (1/\lambda)\lambda E$ 可测.

定理 2.3.4 (**Borel 正则性**) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 存在 G_δ 集 H 满足 $E \subset H$, $m^*(E) = m(H)$, 即任何集合都存在等测包.

- 由 Lebesgue 外测度定义可知, $\forall k$, 存在开集 G_k, $E \subset G_k$ 满足

$$m(G_k) \leqslant m^*(E) + \frac{1}{k}.$$

令 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 H 为 G_δ 集, $E \subset H$, 且

$$m^*(E) \leqslant m(H) \leqslant m(G_k) \leqslant m^*(E) + \frac{1}{k}, \ \forall k.$$

因此 $m^*(E) = m(H)$.

注 2.3.1 若 $m^*(E) < \infty$, $\forall \varepsilon$, 存在开集 G, $E \subset G$ 满足

$$m^*(G) \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

因此

$$m^*(G) - m^*(E) \leqslant \varepsilon.$$

但不能由此得出

$$m^*(G \backslash E) \leqslant \varepsilon,$$

因为, 除非 E 可测 (定理 2.1.1(1)),

$$m^*(G \backslash E) = m^*(G) - m^*(E),$$

一般不能成立.

定理 2.3.5 若 $\{E_k\}$ 为递增集合列, 那么

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

- 显然有

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \leqslant m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

为证相反的不等式, 由 Borel 正则性, $\forall k$, 存在 G_δ 集 H_k 满足 $E_k \subset H_k, m^*(E_k) = m(H_k)$. 令 $G_k = \bigcap_{j\geqslant k} H_j$. 那么 $\{G_k\}$ 为递增可测集列, 且 $E_k \subset G_k, m^*(E_k) = m(G_k)$. 因此

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = \lim_{k\to\infty} m(G_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) \geqslant m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

2.4 不可测集

定理 2.1.1指出: 若 A 与 B 不相交, 且 A 可测, 那么有可加性

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).$$

特别地, 外测度限制在可测集类上具有可加性. 但对一般集合外测度的可加性不一定成立.

考察区间 $[0,1]$. 记 $x \sim y$, 如果 $x - y \in \mathbb{Q}$. 这给出了一个等价类关系:

- $x \sim x, \forall x \in [0,1]$
- $x \sim y$ 当且仅当 $y \sim x$
- 若 $x \sim y, y \sim z$, 那么 $x \sim z$

任何两个等价类或相交, 或相等. 且区间 $[0,1]$ 是*互不相交的等价类的并集*,

$$[0,1]=\bigcup_{\alpha}\mathcal{E}_{\alpha}.$$

现从每个等价类 $\mathcal{E}_\alpha$ 取出一个代表元素 x_α(**选择公理**) 做成集合

$$\mathcal{N}=\{x_\alpha\}$$

定理 2.4.1 $\mathcal{N}$ 是不可测集.

■ 用反证法. 记区间 $[-1,1]$ 中的全体有理数为 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. 考察平移类

$$\mathcal{N}_k=\mathcal{N}+r_k.$$

那么 $\{\mathcal{N}_k\}$ 是互不相交的集列. 若不然, 存在有理数 $r_k, r_{k'}$ 及 $x_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, x_{\alpha'} \in \mathcal{E}_{\alpha'}$ 满足

$$r_k \neq r_{k'},\ x_\alpha + r_k = x_{\alpha'} + r_{k'}.$$

从而 $\alpha \neq \alpha'$ 且

$$x_\alpha - x_{\alpha'} = r_{k'} - r_k \in \mathbb{Q}.$$

因此 $x_\alpha \sim x_{\alpha'}$, 这与 $\mathcal{N}$ 的构造矛盾, 因为 $\mathcal{N}$ 仅包含每个等价类中一个元素.

另外

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-1,2]\,.$$

事实上, 根据构造 $\forall$, $\mathcal{N}_k \subset [-1,2]$, 而它们互不相交, 因此 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-1,2]$. 若 $x \in [0,1]$, 那么 x 包含于某等价类 $\mathcal{E}_\alpha$,

又 $x_\alpha \in [0,1]$, 因此 $x - x_\alpha$ 是 $[-1,1]$ 中的有理数, 即 x 包含于某 $\mathcal{N}_k$.

若 $\mathcal{N}$ 是可测集. 那么 $\{\mathcal{N}_k\}$ 是互不相交的可测集列, 且根据前面的包含关系有

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}_k) \leqslant 3.$$

进而有

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}) \leqslant 3.$$

但这是不可能的, 因为 $m(\mathcal{N}) = 0$ 或 $m(\mathcal{N}) > 0$ 都将导致矛盾.

定理 2.4.2 **(Vitali)** $\mathcal{N}$ 定义同上.
(1) 设 $E \subset \mathcal{N}$, 若 E 可测, 那么 $m(E) = 0$
(2) 设 $E \subset \mathbb{R}$, $m^*(E) > 0$. 那么存在 E 的不可测子集.

证明作为练习.

定理 2.4.3 存在不相交的集合 A, B 使得

$$\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

■ 事实上, 若对任意不相交的集合都有等号成立, 那么由可测集的定义可知, 任何集合都可测, 这与前面的结论矛盾. ///

2.5 重温 Cantor 函数

定理 2.5.1 设 $\mathfrak{C}$ 为区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 集, $h(x)$ 为 Cantor 函数. 令

$$g(x) = h(x) + x.$$

那么
(1) $g(x)$ 是将 $[0,1]$ 映射为 $[0,2]$ 的严格单调连续函数
(2) $g(\mathfrak{C})$ 是具有正测度的可测集
(3) 存在可测集 $\mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{C}$ 使得: $g(\mathfrak{C}_0)$ 是不可测集

- (1) 利用 Cantor 函数的性质
  (2) 令 $\mathcal{O} = [0,1] \setminus \mathfrak{C}$. 那么由 (1) 可知, $[0,2]$ 能写成不交并

$$[0,2] = g(\mathcal{O}) \cup g(\mathfrak{C}).$$

由于严格单调的连续函数存在连续的逆函数 (参见习题), 因此 $g(\mathcal{O})$ 为开集, $g(\mathfrak{C})$ 为闭集, 从而都是可测集. 根据 Cantor 集的构造, 可设 $\mathcal{O}=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 其中 $\{I_k\}$ 为互不相交的开区间. 容易看出 $\forall k$, $g(I_k)$ 是一个开区间, 且

$$m(g(I_k)) = m(I_k).$$

由此得到

$$m(g(\mathcal{O})) = \sum_{k=1}^{\infty} m(g(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = 1.$$

从而 $m(g(\mathfrak{C})) = 1$.

(3) 运用 (2) 和定理 2.4.2.