Chap 8 参数估计

统计推断的基本问题

- 参数估计 (Chap8)
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验 (Chap9)

§ 8.1 参数的点估计

什么是参数估计？

例如，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

若μ, σ^2未知，在抽取样本、获取样本观测值之后，

通过构造样本的函数(统计量), 给出它们的估计值或取值区间，就是参数估计的内容.

点估计　区间估计

§8.1 点估计方法

点估计的思想方法

设总体X的分布函数的形式已知，但它含有一个或多个未知参数：$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的一个样本

构造 k 个统计量：

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \\ \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \\ \theta_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{array}\right\} \text{随机变量}$$

当测得一组样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$时，代入上述统计量，即可得到 k 个数：

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}\right\} \text{数值}$$

称数$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 为未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计值

称对应的统计量 $\theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\cdots$, $\theta_k(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

为未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量

常用的点估计方法

❑ 矩法

方法： 用样本的 k 阶矩作为总体的 k 阶矩的估计量，建立含有待估计参数的方程，从而可解出待估计参数

即：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E(X)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to E(X^2)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 \to E(X^3)$$

记作：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{E}(X)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \hat{E}(X^2)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 = \hat{E}(X^3)$$

由
$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{E}(X) \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \hat{E}(X^2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\mu} = \hat{E}(X) = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{E}(X^2) - \hat{E}^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

即：以样本均值估计总体均值，

以样本的2阶中心距估计方差

例2 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的样本，求 μ, σ^2 的矩法估计量。

解 $$\hat{\mu}_{矩} = \hat{E}(X) = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2_{矩} = \hat{E}(X^2) - \hat{E}^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

❑ 点估计的极大似然估计法

思想方法：一次试验就出现的
事件有较大的概率

例如: 有两个外形相同的箱子,都装有100个球

第一箱　99个白球，　1个红球

第二箱　1个白球，99个红球

现从两箱中任取一箱，并从箱中任取一球，结果所取得的球是白球。

问　所取的球来自哪一箱？

答　第一箱.

例 设总体 X 服从0-1分布，且$P(X = 1) = p$，用极大似然法求 p 的估计值。

解 X 的概率分布为

$$P(X = 1) = p,$$

$$P(X = 0) = 1-p,$$

可以写成

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体 X 的样本,

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为总体 X 的样本值,

则

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

$$= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdots\cdots P(X_n = x_n)$$

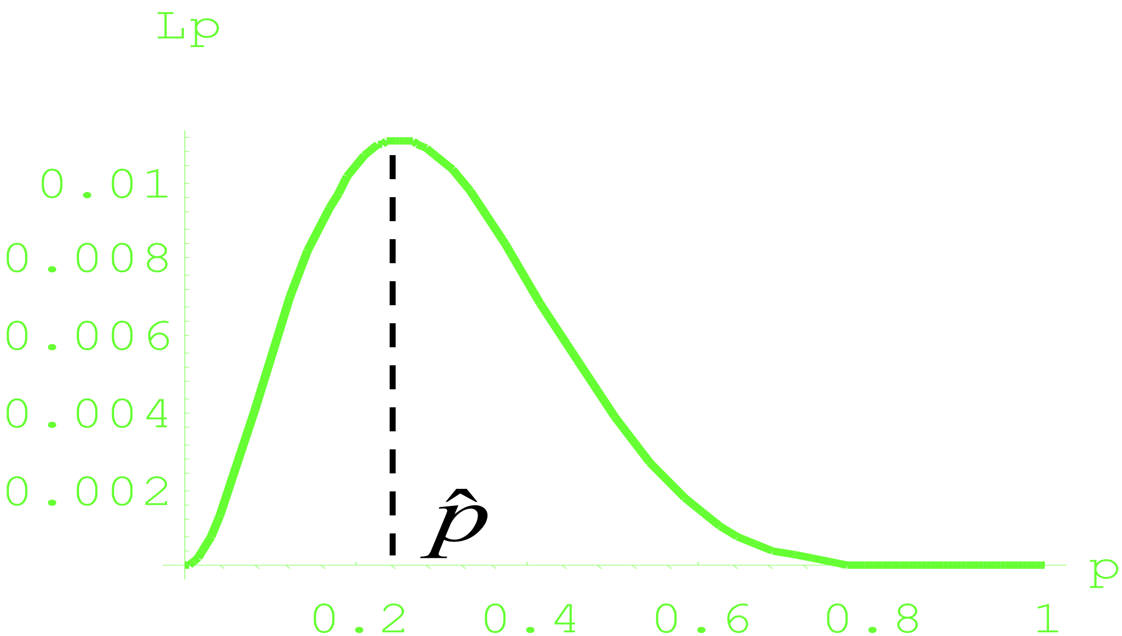
$$= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdots\cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\equiv L(p)$$

$$x_i = 0,1, i = 1,2,\cdots,n$$

对于不同的 p ,$L(p)$不同，见右下图



现经过一次试验， 事件

$$(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

发生了， 则 p 的取值应使这个事件发生的概率 $L(p)$最大。

在容许的范围内选择 p ，使$L(p)$最大

$$L(P) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

注意到，$\ln L(p)$是 L 的单调增函数，故 若某个p 使$\ln L(p)$最大，则这个p 必使$L(p)$最大。

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}\overset{令}{=}0 \quad \Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\ln L}{\mathrm{d}p^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p^2}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0\right)$$

所以 $\hat{p}=\bar{x}$ 为所求 p 的估计值.

一般地，设X为离散型随机变量，其分布律为

$$P(X=x)=f(x,\theta),\quad x=u_1,u_2,\cdots,\theta\in\Theta$$

$X_1, X_2,\ldots, X_n$为总体 X 的样本,

$x_1, x_2,\ldots, x_n$为总体 X 的样本值,

则$X_1, X_2,\ldots, X_n$的概率分布为

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

$$=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

$$\overset{\text{记为}}{=} L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)\overset{\text{或}}{=}L(\theta)\quad x_i=u_1,u_2,\cdots,$$

$$i=1,2,\cdots,n,\theta\in\Theta$$

称$L(\theta)$为样本的似然函数

当给定一组样本值时，$L(\theta)$就是参数θ的函数，极大似然估计法的思想就是：

选择适当的$\theta=\hat{\theta}$，使$L(\theta)$取最大值，即

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta})$$
$$=\max_{\theta\in\Theta}\{f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)\}$$

则称这样得到的$\hat{\theta}$

$$\hat{\theta}=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

为参数 θ 的极大似然估计值

称统计量

$$\overset{\frown}{\theta}=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

为参数 θ的极大似然估计量

注1 若随机变量X连续, 取$f(x_i,\theta)$为X_i的密度函数

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

注2 未知参数个数可以不止一个, 如θ_1, θ_2,…, θ_k

设X的密度函数(或分布率)为 $f(x,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$

则定义似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

$$=L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

$$-\infty<x_i<+\infty, i=1,2,\cdots,n \quad (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in\Theta$$

若 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 关于 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ 可微，则称

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = 0 \qquad r = 1, 2, \cdots, k$$

为似然方程组

若对于某组给定的样本值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，参数 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 使得似然函数取得最大值，即

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k)$$

$$= \max_{(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \in \Theta} \{L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)\}$$

则称 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 为 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ 的极大似然估计值

显然，

$$\hat{\theta}_r = g_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad r = 1,2,\cdots,k$$

称统计量

$$\hat{\theta}_r = g_r(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad r = 1,2,\cdots,k$$

为$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$的极大似然估计量

例 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 X 的一组样本值，求 μ, σ^2 的极大似然估计.

解 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$$

似然方程组为
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial \mu}\ln L\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ln L\right) = \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - \dfrac{n}{2(\sigma^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu}_{mle} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \\ \hat{\sigma^2}_{mle} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

μ, σ^2 的极大似然估计量分别为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

求未知参数的极大似然估计值(量)的方法

1）写出似然函数L

2）求出 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$ ，使得

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k)$$

$$=\max_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in\Theta}\{L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\}$$

若 L 是 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的可微函数, 解似然方程组

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = 0$$

$$r = 1, 2, \cdots, k$$

可求得未知参数的极大似然估计值 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$

然后, 再求得极大似然估计量.

若 L 不是$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的可微函数, 需用其它方法求极大似然估计值. 请看下例:

例 设 $X \sim U(a,b)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 X 的一个样本，求 a, b 的极大似然估计值与极大似然估计量.

解 X 的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a<x_i<b,\ i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数只有当 $a < x_i < b,\ i = 1,2,\ldots,n$ 时才能获得最大值, 且 a 越大, b 越小, L 越大.

令
$$x_{\min} = \min\ \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$$
$$x_{\max} = \max\ \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$$

取
$$\hat{a} = x_{\min}, \qquad \hat{b} = x_{\max}$$

则对满足$a \le x_{\min} \le x_{\max} \le b$的一切 $a < b$, 都有

$$\frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{\max} - x_{\min})^n}$$

故 $\hat{a}=x_{\min},\ \hat{b}=x_{\max}$

是 a , b 的极大似然估计值.

$$X_{\min}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

$$X_{\max}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

分别是 a , b 的极大似然估计量.

极大似然估计值的不变性原理

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计值, $u(\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ 是 θ 的函数，且具有单值的反函数 $\theta = \theta(u), u \in U$ 则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的极大似然估计值.

如：在正态分布总体$N(\mu,\sigma^2)$中，σ^2的极大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ 是σ^2的单值函数，且具有单值的反函数，故σ的极大似然估计值为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$\lg\sigma$的极大似然估计值为

$$\hat{\lg\sigma} = \lg\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$P(X>t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}dx$$

矩估计就不具有这个性质.

例如 设 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,\ D(X)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的样本

由矩法，令

$$E(X)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma=\overline{X}$$

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

得σ与σ^2的矩法估计量为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\overline{X}$$

——不具有不变性

$$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\neq(\hat{\sigma})^2$$

例 设 X 的密度函数为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \theta\le x<+\infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解

似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)}, & \theta\le x_i<+\infty, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

当 $\theta\le x_i<+\infty$ 时，$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)}$

是θ的增函数， 故$\theta=\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$时，

$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ 取最大值

当 $\theta \le x_i < +\infty$ 不成立时，$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = 0$

故θ的极大似然估计为$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$