

25.7 习题 7

习题 25.7.1 设 $f \geq 0$. 令

$$E_{2^k} = \{x : 2^k < f(x)\},$$

以及

$$F_k = \{x : 2^k < f(x) \leq 2^{k+1}\}.$$

若 f 几乎处处有限, 那么 F_k 互不相交,

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k = \{x : f(x) > 0\}.$$

试证明 f 可积当且仅当

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(F_k) < \infty,$$

当且仅当

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(E_{2^k}) < \infty.$$

由此证明以下结论. 设

$$f_a(x) = \begin{cases} |x|^{-a}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{1 + |x|^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

那么 $f_a(x)$ 可积当且仅当 $a < n$, $F_a(x)$ 可积当且仅当 $a > n$.

习题 25.7.2 教材第二版 p161, 2,3,4,7 教材第二版 p168, 8,9,12,13