概率论与数理统计

随机变量与分布函数

量化，并更加有效的描述随机事件:

$$\{X \in I\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\},\ I \subset \mathbb{R}$$

随机变量X的分布函数定义为:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X \in (-\infty, x]),\ x \in \mathbb{R}$$

分布函数

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]$$

$$\begin{aligned}
F(x) = P(X \leqslant x) &= P\left(X \in \bigcap_{n}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= P\left(\bigcap_{n}^{\infty} \left\{X \in \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right\}\right) \\
&= \lim_{n} P\left(X \in \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \lim_{n} F\left(x + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

分布函数

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$$

$$\begin{aligned} P(X < x) &= \lim_{n} P\left(X \in \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n} F\left(x - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$(-\infty, \infty) = \bigcup_{n}^{\infty} (-\infty, n] \qquad \varnothing = \bigcap_{n}^{\infty} (-\infty, -n]$$

$$F(-\infty) = 0 \quad F(\infty) = 1$$

二项分布Poisson逼近

定理 7.2 如果 $0<p_n<1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$，则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{7.4}$$

证明 根据排列组合公式,有

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!}(np_n)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(1-p_n)^{n-k}.$$

注意,

$$(1-p_n)^{n-k} = \exp\{(n-k)\ln(1-p_n)\}$$
$$= \exp\left\{(n-k)p_n \cdot \frac{1}{p_n}\ln(1-p_n)\right\},$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n}\ln(1-p_n) = -1,$$

故(7.4)式成立. $\square$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

二项分布最大概率点

定理 2.1 设 $n \geqslant 2, 0 < p < 1, m = [(n+1)p]$（不超过 $(n+1)p$ 的最大整数），

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n),$$

则有下列结论：

(1) 当 $(n+1)p$ 不是整数时，

$$p_n(0) < p_n(1) < \cdots < p_n(m-1) < p_n(m) > p_n(m+1) > \cdots > p_n(n); \tag{2.4}$$

(2) 当 $(n+1)p$ 是整数时，

$$p_n(0) < p_n(1) < \cdots < p_n(m-1) = p_n(m) > p_n(m+1) > \cdots > p_n(n). \tag{2.5}$$

证明 显然

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p},$$

又 $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1$ 的充要条件是 $k < (n+1)p-1$，于是有下列结论：

当 $k < (n+1)p-1$ 时，$p_n(k+1) > p_n(k)$； (2.6)

当 $k > (n+1)p-1$ 时，$p_n(k+1) < p_n(k)$； (2.7)

当 $k = (n+1)p-1$ 时，$p_n(k+1) = p_n(k)$. (2.8)

$(n+1)p$ 不是整数：

$$[(n+1)p]-1 < (n+1)p-1 < [(n+1)p] < (n+1)p$$

$(n+1)p$ 是整数：

$$[(n+1)p]-1 = (n+1)p-1 < [(n+1)p] = (n+1)p$$