定理 5.2.1 **(Lebesgue)** 设 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上的单调函数. 那么 $f(x)$ 在 (a,b) 上的几乎处处可微.

- 考察单增情形. 不妨设 (a,b) 有界, 否则考察 $(-N,N)\cap(a,b)$, 然后令 $N\to\infty$. 令

$$E_{\alpha,\beta}=\left\{x\in(a,b):\overline{D}f(x)>\alpha>\beta>\underline{D}f(x)\right\}.$$

那么 $f(x)$ 在 (a,b) 上不可微的点集全体可以表示为

$$\bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q},\alpha>\beta}E_{\alpha,\beta}.$$

只需证明 $m\left(E_{\alpha,\beta}\right)=0$. 为此, $\forall\varepsilon>0$, 取开集 G 满足

$$E_{\alpha,\beta}\subset G\subset(a,b)\,,\ m(G)\leqslant m^*\left(E_{\alpha,\beta}\right)+\varepsilon.$$

记 $\mathcal{F}$ 为满足下述条件的闭区间 $[c,d]$ 全集,

$$[c,d]\subset G,\ f(d)-f(c)<\beta(d-c)\,.$$

那么 $\mathcal{F}$ 是 $E_{\alpha,\beta}$ 的 Vitali 覆盖. 根据 Vitali 引理, $\forall\varepsilon>0$, 存在有限个互不相交的闭区间 $\{[c_k,d_k]\}_{k=1}^N\subset\mathcal{F}$ 使得

$$m^*\left(E_{\alpha,\beta}\backslash\left(\bigcup_{k=1}^N[c_k,d_k]\right)\right)<\varepsilon.$$

根据引理 5.2.2,

$$m^*\left(E_{\alpha,\beta}\right)\leqslant\sum_{k=1}^N m^*\left(E_{\alpha,\beta}\cap[c_k,d_k]\right)+m^*\left(E_{\alpha,\beta}\backslash\left(\bigcup_{k=1}^N[c_k,d_k]\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\left(f\left(d_k\right)-f\left(c_k\right)\right)+\varepsilon \\
&\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\left(d_k-c_k\right)+\varepsilon \\
&\leqslant \frac{\beta}{\alpha}m\left(G\right)+\varepsilon\ (\text{注意}\bigcup_{k=1}^{N}\left[c_k,d_k\right]\subset G) \\
&\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\left(m^*\left(E_{\alpha,\beta}\right)+\varepsilon\right)+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

由于 $m\left(E_{\alpha,\beta}\right)<\infty$. 因此

$$
\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)m^*\left(E_{\alpha,\beta}\right)\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varepsilon+\varepsilon
$$

从而 $m(E_{\alpha,\beta}) = 0$.

记号: 函数 f 的差商定义为

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

约定: 若 $f(x)$ 为定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的可测函数, 那么考虑差商 $\Delta_h f(x)$ $(0 < h \leqslant 1)$ 时始终约定

$$f(x) = f(b), \forall x \in [b, b+1].$$

若 $f \in L^1([a,b])$, 进一步定义 $\forall x \notin [a, b+1], f(x) = 0$. 那么 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 利用变量平移变换不变性得到

$$\int f(x+h)\,\chi_{[a+h,b]}(x+h)\,dx = \int f(x)\,\chi_{[a+h,b]}(x)\,dx,$$

由于

$$\chi_{[a+h,b]}(x+h) = \chi_{[a,b-h]}(x),$$

因此

$$\int_a^{b-h} f(x+h)\,dx = \int_{a+h}^b f(x)\,dx.$$

由此得到

$$\int_a^b \Delta_h f(x)\,dx = \frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^{a+h} f(x)\,dx\right) \tag{5.2}$$

$$= f(b) - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx$$

推论 5.2.1 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的单调增函数. 那么 f

在 (a, b) 上几乎处处可微, $f'(x) \in L^1([a, b])$ 且有

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leqslant f(b) - f(a).$$

■ 由于单调函数可测, 因此 $\forall 0 < h < 1$, $\Delta_{1/n} f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负可测. 根据 Lebesgue 定理, $f(x)$ 在 (a, b) 上几乎处处可微. 因此 $a.e.\ x \in [a, b]$,

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_{1/n} f(x) = f'(x).$$

由 Fatou 引理以及 $(Eq.\ 5.2)$,

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_a^b \Delta_{1/n} f(x)\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \liminf_{n\to\infty}\left(f(b) - \frac{1}{1/n}\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx\right) \\
&\leqslant f(b) - f(a).
\end{aligned}
$$

上述推论中严格不等号是可以成立的.

例 5.2.1 若 $h(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, 那么 $h'(x) = 0,\ a.e.\ x \in [a,b]$, 因而

$$
\int_a^b h'(x)\,dx = 0 < 1 = h(1) - h(0).
$$

可见类似于 Riemann 积分中的 Newton-Leibniz 公式对几乎处处可微分函数不一定成立. 后面我们将考察使得这一公式成立的条件

5.3 有界变差函数

定义 5.3.1 设 $f(x)$ 为定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数，那么 f 的全变差定义为

$$V_f([a,b]) = \sup\left\{\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|\right\},$$

正变差和负变差分别定义为

$$P_f([a,b]) = \sup\left\{\sum_{k=0}^{N-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^+\right\},$$

$$N_f([a,b]) = \sup\left\{\sum_{k=0}^{N-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^-\right\},$$

这里的上确界都对所有 $[a,b]$ 的划分 $a=t_0<t_1,\dots,t_N=b$ 进行.

定义 5.3.2 设 $f(x)$ 为定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数, 称 f 为有界变差函数, 如果

$$V_f([a,b])<\infty.$$

记为 $f\in BV([a,b])$.

由定义容易看出

- $f\in BV([a,b])$, 那么 f 有界.
- 有界变差函数的线性组合是有界变差函数.

例 5.3.1 若 f 在 $[a,b]$ 上单调增, 那么 f 是有界变差函数, 且

$$V_f([a,b])=f(b)-f(a).$$

例 5.3.2 若 f 是 $[a,b]$ 上的 Lipschitz 函数, 即存在 $c>0$,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant c\,|x-y|\,,\ \forall x,y\in[a,b]\,.$$

那么 f 是有界变差函数, 且

$$V_f([a,b]) \leqslant c\,(b-a)\,.$$

习题 5.3.1 考察

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\left(x^{-b}\right), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

那么 $f\in BV([0,1])$ 当且仅当 $a>b$.

容易证明

引理 5.3.1 设 $f(x)$ 为定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数. 那么 $\forall x \in [a,b]$,

$$V_f([a,b]) = V_f([a,x]) + V_f([x,b]).$$

证明参见教材第二版 p251 定理 5.4.

引理 5.3.2 设 $f \in BV([a,b])$. 那么 f 能表示为递增函数之差, 即 $\forall x \in [a,b]$,

$$f(x) = (f(x) + V_f([a,x])) - V_f([a,x]).$$

■ 由于 $f \in BV([a,b])$, $V_f([a,x]) < \infty$, 等式显然成立. 显然 $V_f([a,x])$ 关于单调增加. 只要证明

$$F(x) = f(x) + V_f([a,x])$$

单调增加. 事实上 $\forall x, y \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} & f(y)+V_f([a,y])-(f(x)+V_f([a,x])) \\ & =f(y)-f(x)+V_f([a,y])-V_f([a,x]) \\ & =f(y)-f(x)+V_f([x,y]) \geqslant 0. \end{aligned}$$

有界变差写为递增函数之差的表示称为 **Jordan 分解**. 这种分解不是唯一的.

习题 5.3.2 设 $f \in BV([a,b])$. 那么 $\forall x \in [a,b]$, 以下成立

(1)

$$f(x)-f(a)=P_f([a,x])-N_f([a,x]),$$

(2)

$$V_f([a,x])=P_f([a,x])+N_f([a,x]).$$

定理 5.3.1 (Jordan) $f \in BV([a,b])$ 当且仅当 f 能表示为递增函数之差.

- 只证明必要性. 设 $f = g - h$, 其中 g, h 单调增. 那么对任意 $[a,b]$ 的划分 $a = t_0 < t_1, \ldots, t_N = b$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| + \sum_{k=0}^{N-1} |h(t_{k+1}) - h(t_k)|$$
$$\leqslant (g(b) - g(a)) + (h(b) - h(a)).$$

可见 $f \in BV([a,b])$, 且

$$V_f([a,b]) \leqslant V_g([a,b]) + V_h([a,b])$$

结合 Lebesgue 定理及其推论得到

推论 5.3.1 $f \in BV([a,b])$, 那么 f 在 (a,b) 上的几乎处处可微, 且 $f'(x) \in L^1([a,b])$.

不定积分的微分

教材第二版 p256-259

若 $f \in L^1([a,b])$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

是否有

$$F'(x) = f(x),\ a.e.\ x.$$