例 4.4.2 令 $E=\mathbb{R}, \forall k, E_k=(k, k+1)$,

$$f_k(x)=\chi_{E_k}(x), \ \forall x \in E.$$

显然 $f_k \to f \triangleq 0, a.e.x.$ 但

$$0=\int_E f<\liminf_{k \to \infty} \int_E f_k=1.$$

Fatou 引理的一个直接应用是下面的控制收敛定理, 这里仅针对非负可测函数, 更一般的结论在下节介绍.

推论 4.4.2 设 f 和 $\{f_k\}$ 为非负可测函数,

$$f_k(x) \leqslant f(x), \ \lim_{k \to \infty} f_k(x)=f(x), a.e.x.$$

那么

$$\lim_{k \to \infty} \int f_k=\int f.$$

■ 由单调性,

$$\int f_k \leqslant \int f.$$

因此

$$\limsup_{k\to\infty} \int f_k \leqslant \int f.$$

再结合 Fatou 引理完成证明.

定理 4.4.4 (**单调收敛定理-MCT**) 设 $\{f_k\}$ 为非负可测函数,

$$f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x), \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), a.e.x.$$

那么

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k = \int f.$$

■ 注意 $f_k(x) \leqslant f(x)$, $a.e.x.$, 然后运用非负可测函数的单调收敛定理.

例 4.4.3 教材第二版 p160 例题 2.

定理 4.4.5 (**逐项积分**) 设 $\{a_k\}$ 为非负可测函数, 那么

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx,$$

若

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx < \infty,$$

那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) < \infty,\ a.e.x.$$

- 令

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^{j} a_k(x),\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

那么$f_j(x)$,$f(x)$ 非负可测,$f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.
直接运用 MCT 及非负可测函数积分的性质 (5) .

下面给出逐项积分定理的应用.

例 4.4.4 教材第二版 p163 推论 4.7

例 4.4.5 教材第二版 p164 例题 4

例 4.4.6 考察 $\mathbb{R}^n$ 的函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{n+1}}, & x \neq 0, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

试证明 $\forall \varepsilon > 0, f(x)$ 在 $|x| \geqslant \varepsilon$ 可积, 且存在常数 $C > 0$ 满足

$$\int_{|x| \geqslant \varepsilon} f(x)\, dx \leqslant \frac{C}{\varepsilon}.$$

- 令 $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 \leqslant |x| < 2\}, \forall k \geqslant 0,$

$$A_k = 2^k \varepsilon A = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^k \varepsilon \leqslant |x| < 2^{k+1}\varepsilon\right\}.$$

并定义

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x),$$

其中

$$a_k(x) = \frac{1}{(2^k \varepsilon)^{n+1}} \chi_{A_k}(x).$$

显然

$$f(x) \leqslant g(x),\ x \in A_k.$$

因此

$$\int_{|x| \geqslant \varepsilon} f(x)\, dx \leqslant \int g(x)\, dx.$$

又由逐项积分定理及 Lebesgue 测度的相对伸缩不变性,

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\varepsilon)^{n+1}} m(A_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\varepsilon)^{n+1}} \left(2^k\varepsilon\right)^n m(A) \\ &= \frac{m(A)}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2m(A)}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

因而

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)\,dx \leqslant \frac{2m(A)}{\varepsilon}.$$