运用概率的性质改写为

$$1 - P(A) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(B_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

因此定理成立.

定理 1.5.3 任意事件序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

- 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \ (n \geqslant 2)$. 那么 $B_1, B_2, \ldots$ 互不

相交, 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \subset A_n.$$

运用概率公理得到

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

例题 1.5.8 在 n 个不同的盒子中放入 r $(r \leqslant n)$ 个不同的球, 允许一盒多球. 求以下事件概率.

(1) $A = \{$第一盒恰好不多于两个球$\}$
(2) $B = \{$至少有一盒多于一球$\}$
(3) $C = \{$恰有一盒多于一球$\}$

■ (1) 令 $A_i = \{$第一盒中正好有i个球$\}$. 那么这些事件互不相交, 且

$$P(A) = P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{C_r^i (n-1)^{r-i}}{n^r}.$$

(2)

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(B^c) \\ &= 1 - P(\{\text{所有盒子都至多一个球}\}) \\ &= 1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}. \end{aligned}$$

(3) 令 $C_i = \{$恰好第i盒多于一球$\}, 1 \leqslant i \leqslant n,$

$C_{ij}=\{$恰好第i盒有j个球$\}$, $2 \leqslant j \leqslant r$. 那么

$$P(C)=\sum_{i,j} P(C_{ij})=\sum_{i,j} \frac{C_r^j (n-1)\cdots(n-r+j)}{n^r}$$

$$=n\sum_j \frac{C_r^j (n-1)\cdots(n-r+j)}{n^r}.$$

1.6 条件概率

例题 1.6.1 某家有两个孩子, 其中至少一个男孩的概率是多少? 若已知至少有一个女孩, 那么这时至少有一个男孩的概率又是多少?

■ 用 b 表示男孩, g 表示女孩, 那么第一个问题的一个自然的样本空间为

$$\{bb, bg, gb, gg\}.$$

每个样本概率为 $1/4$, 因此

$$P\left(\text{至少一个}b\right) = P\left(\{bb, bg, gb\}\right) = \frac{3}{4}.$$

而对第二个问题的条件下, 样本空间被限制到

$$\{bg, gb, gg\}.$$

每个样本概率仍为 $1/4$. 此时

$$P\left(\text{至少一个}b|\text{至少一个}g\right)=\frac{P\left(\{bg,gb\}\right)}{P\left(\{bg,gb,gg\}\right)}=\frac{2}{3}.$$

定义 1.6.1 在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率, 记为 $P\left(A|B\right)$, 定义为

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)},P\left(B\right)>0.$$

$P\left(A|B\right)$ 没有定义，如果 $P\left(B\right)=0$. 非负数 $P\left(A|B\right)$ 则称为事件 A 在事件 B 发生时的**条件概率**

条件概率是一个概率律

定理 1.6.1 如果 $P(B) > 0$, 那么 $P(\cdot|B)$ 概率公理中的所有条件.

- (i)

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1;$$

(ii) 对任意的事件集 A_n, 总有

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B).$$

如果 A_n 互不相交, 那么

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B).$$

乘法法则

定理 1.6.2 如果 $P(B) > 0$, 那么 $P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$.

定理 1.6.3 如果 $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}) > 0$, 那么

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n)$$
$$= P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}).$$

- 右侧公式为

$$P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1})}.$$

由于 $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}) > 0$, 上式中所有分母均为正数.

例题 1.6.2 一个盒子中装有 $r \geqslant 2$ 个红球和 $b \geqslant 2$ 个蓝球. 任取 4 个球并不再放回. 试确定取出的小球依次为红, 蓝, 红, 蓝

的概率.

- 令 $R_j = \{$第j 次取出的为红球$\}$, $B_j = \{$第j 次取出的为蓝球$\}$. 需要计算 $P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4)$. 注意到

$$P(R_1) = \frac{r}{r+b}, P(B_2|R_1) = \frac{b}{r+b-1},$$

$$P(R_3|B_2 \cap R_1) = \frac{r-1}{r+b-2}, P(B_4|R_3 \cap B_2 \cap R_1) = \frac{b-1}{r+b-3}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4) \\
&= P(R_1) P(B_2|R_1) P(R_3|B_2 \cap R_1) P(B_4|R_3 \cap B_2 \cap R_1) \\
&= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1} \cdot \frac{r-1}{r+b-2} \cdot \frac{b-1}{r+b-3}.
\end{aligned}$$

例题 1.6.3 三个人将他们的帽子放在桌上. 打乱帽子顺序，然后三个人从中任意取走一顶帽子. 每一个人都正好拿到自己原本帽子的概率有多大?

- 令 $E_j = \{第j 个人拿到他自己的帽子\}$. 我们来计算

$$P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right).$$

根据乘法法则,

$$P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) = P\left(E_1\right) P\left(E_2 | E_1\right) P\left(E_3 | E_1 \cap E_2\right).$$

易见

$$P\left(E_1\right) = \frac{1}{3}, P\left(E_2 | E_1\right) = \frac{1}{2}, P\left(E_3 | E_1 \cap E_2\right) = 1.$$

因此

$$P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

乘法法则对条件概率同样成立

定理 1.6.4 如果 $P\left(B\right) > 0$, $P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1} | B\right) > 0$, 那么

$$\begin{aligned} & P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n | B\right) \\ & = P\left(A_1 | B\right) P\left(A_2 | A_1 \cap B\right) \ldots P\left(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1} \cap B\right). \end{aligned}$$

- 右侧公式为

$$\frac{P\left(A_1 \cap B\right)}{P\left(B\right)} \frac{P\left(A_1 \cap A_2 \cap B\right)}{P\left(A_1 \cap B\right)} \cdots \frac{P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n \cap B\right)}{P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1} \cap B\right)}.$$

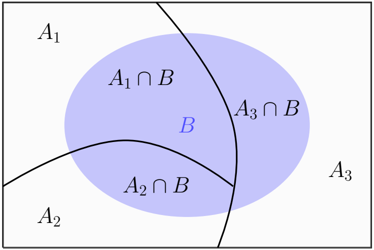
由于 $P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1} | B\right) > 0$, 上式所有分母为正.

全概率公式

定义 1.6.2 令 S 为一个集合. 如果 $A_n, n = 1, \ldots, N$ 互不相交并且 $\bigcup_{n=1}^{N} A_n = S$, 那么 $\{A_n\}$ 称为集合 S 的**一个划分**.

例如, 在如下图示中 $B \cap A_1, B \cap A_2, B \cap A_3$ 是集合 B 的一个划分，并且容易看到

$$P(B) = \sum_{n=1}^{3} P\left(B \cap A_n\right).$$



一般地, 下面的定理告诉我们, 为了求出集合的概率, 可以首先确定一个样本空间的划分, 再尝试求出在每一个划分集合上的条件概率.

定理 1.6.5 如果 $\{A_n\}$ 是样本空间 S 的划分，$P(A_n) > 0, n =$

$1, \ldots, N$ 那么

$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) P(B|A_n).$$

- 直接运用划分以及条件概率的定义得出.

例题 1.6.4 投掷一个均匀的骰子. 假设第一次投掷中出现的点数为 X, 继续投掷直到出现点数 $Y \geqslant X$. 令 A 表示 $Y = 6$ 这一事件，试求出其概率

- 如果 $X = i$, 那么 Y 可能是 $i, i+1, \ldots, 6$, 并且它们是等可能

的. 因此（参见本例附注）

$$P\left(A|X=i\right)=\frac{1}{7-i},$$

从而

$$\begin{aligned}P\left(A\right)&=\sum_{i=1}^{6}P\left(A|X=i\right)P\left(X=i\right)\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right).\end{aligned}$$

注意本例的样本空间是 $\{Y\geqslant X\}$, $P\left(A\right)$ 的概率也可以通过细分样本空间来完成，令 N_k 表示至停止投掷时所用去的投

掷次数为 k, 根据题意投掷次数至少为 2. 如果已知 $X=i$ 并且投掷次数为 k, 那么 A 发生时最后一次点数始终是 6, 而其前面的点数只能出现在 $\{1,...,i-1\}$ 这 $i-1$ 个数中, 特别地 $X=1$ 时投掷次数只有一种可能，即 2 次. 因此

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{6} P(A|X=i)\cdot P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{k=2}^{\infty} P(A\cap N_k|X=i)\cdot P(X=i) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\sum_{i=2}^{6}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{i-1}{6}\right)^{k-2}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \quad \text{（}i=1\text{单算）}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\frac{6}{7-i} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{7-i}.$$

例题 1.6.5 投掷一个均匀四面体骰子. 如果出现 1 或者 2, 那么你可以继续投掷一次, 否则停止投掷. 投掷总点数至少为 4 的概率是多少?

■ 令 $E_j = \{第一次点数为j\}$, $E = \{总点数至少为4\}$. 如果第一次点数为 1, 那么第二次投掷必须是 3 或者 4. 因此 $P(E|E_1) = 2/4 = 1/2$. 类似地 $P(E|E_2) = 3/4$. 如果第一次点数为 3, 那么停止投掷, 总点数只能是 3, 因此 $P(E|E_3) = 0$. 如果第一次点数为 4, 那么停止投掷, 总点数为 4, 因此