数. 求解

$$p=\frac{x-a}{b-a},\forall p\in(0,1).$$

得到其分位函数 $F^{-1}(p)=x=(b-a)p+a$.

Gamma 分布

定义 2.2.4 假设 $\alpha>0, \beta>0$. 随机变量 X 称为具有参数 α 和 β 的 **Gamma 分布**, 如果 X 的概率函数为

$$f(x|\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

称为 Gamma 函数.

指数分布可视为 Gamma 分布的一个特殊情形.

当 $\alpha =$ 正整数 $n, f(x|n,\beta)$ 常常用于排队系统的建模, 例如已知客户到来时间分布的情况下, 银行的服务速率的分布, 即在单位时间内服务的客户数量.

当 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx,$$

收敛.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-y} d\left(\frac{y}{\beta}\right) \quad (\text{令} y = \beta x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = 1.
$$

Gamma 函数的性质. $\Gamma(1) = 1$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left(-x^{\alpha} e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
&= \alpha \Gamma(\alpha).
\end{aligned}
$$

特别地, $\forall$ 自然数 n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

另外

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-x} d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \ \ (\text{令} y = (2x)^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sqrt{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$