4.8 Fubini 定理的应用 I-Tonelli 定理

定理 4.8.1 **(Tonelli)** 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上非负可测. 那么
(1) 对几乎所有 $y\in\mathbb{R}^{n_2}, f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测.
(2) 函数

$$y\mapsto\int_{\mathbb{R}^{n_1}}f^y(x)\,dx$$

在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测.
(3) 重积分能化为累次积分:

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}}f^y(x)\,dxdy,$$

等号在广义实数意义下成立. 类似的结论对 $f_x(y)$ 也成立, 因

此有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_x(y)\,dydx.$$

- 令

$$f_N(x,y)=f(x,y)\,\chi_{E_N}(x,y),$$

其中

$$E_N=\{(x,y):|(x,y)|\leqslant N,\ \ |f(x,y)|\leqslant N\}.$$

那么 f_N 可积, $f_N\nearrow f$. 根据 Fubini 定理, 存在零测集 $Z_N\subset\mathbb{R}^{n_2}$, 使得 $\forall y\in Z_N^c, f_N^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测. 注意 $f_N^y\nearrow f^y$. 取 $Z=\bigcup_{N=1}^{\infty}Z_N$,

那么 $m(Z)=0$ 且 $\forall y\in Z^c, f^y$ 可测. 由 MCT 得到,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_N^y(x)\,dx \nearrow \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\,dx,\ \forall y\in Z^c.$$

再运用 Fubini 定理得 $y\mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_N^y(x)\,dx$ 可测, 因此 $y\mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\,dx$. 同时

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_N(x,y)\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_N^y(x)\,dxdy,$$

在等式两测分别使用 MCT 得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy=\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\,dxdy.$$

从 Tonelli 定理立即得到

定理 4.8.2 若 $E \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 可测. 那么
(1) 对几乎所有 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $E^y = \{x : (x, y) \in E\} \subset \mathbb{R}^{n_1}$ 可测.
(2) 函数 $y \mapsto m(E^y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测, 且成立

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} m(E^y)\, dy.$$

习题 4.8.1 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的可测函数. 那么 $\tilde{f}(x, y) = f(x)$ 是 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上的可测函数.

定理 4.8.3 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数. 令

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

那么

(1) $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数当且仅当 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是可测集.
(2) 如果 (1) 成立, 那么

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = m(\mathcal{A}).$$

- 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 那么 (习题 4.8.1)

$$F(x,y) = f(x) - y$$

在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上可测. 因此

$$\mathcal{A} = \{(x,y) : y \geqslant 0\} \cap \{(x,y) : F(x,y) \geqslant 0\}$$

是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的可测集.

反过来, 设 $\mathcal{A}$ 可测. 注意

$$\mathcal{A}_x = \{y : (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

正是区间 $[0, f(x)]$. 根据 Tonelli 定理, $x \mapsto m(\mathcal{A}_x) = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 可测, 同时还有

$$m(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\mathcal{A}_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

4.9 Fubini 定理的应用 II-卷积, 分布函数

设 $f(x)$, $g(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 若积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

存在, 则称之为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积, 记为 $(f*g)(x)$.

定理 4.9.1 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么 $(f*g)(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx$$

证明见教材第二版 p217

定理 4.9.2 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, g 有界可测. 那么 $(f * g)(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

证明见教材第二版 p217

定理 4.9.3 (**层饼定理**) 证明见教材第二版 p220.