3.4 Egorov 定理与 Lusin 定理

定理 3.4.1 **(Egorov)** 设 $\{f_k\}$ 为 E 上的几乎处处有限可测函数列，$m(E) < \infty$. 若存在几乎处处有限的函数 f 使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \ a.e.\ x \in E,$$

那么 $\forall\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E \backslash F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, 且 f_k 在 F_ε 上一致收敛于 f.

- 不妨设 f 为实值函数, 且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \ \forall x \in E.$$

令

$$E_k^l = \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{l},\ \forall j > k \right\}.$$

那么 $\left\{E_k^l\right\}$ 为可测集列, 且 $\forall k$, $E_k^l \subset E_{k+1}^l$, 另外对给定 $l > 0$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^l = E$. 由于 $m(E) < \infty$, 利用测度的极限性质得到

$$\lim_{k\to\infty} m\left(E \backslash E_k^l\right) = 0.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 k_l 使得

$$m\left(E \backslash E_k^l\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^l},\ \forall k \geqslant k_l.$$

取 $L > 0$ 满足

$$\sum_{l \geqslant L} \frac{\varepsilon}{2^l} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$A_\varepsilon = \bigcap_{l \geqslant L} E_{k_l}^l.$$

那么 A_ε 为可测集, 且

$$m\left(E \backslash A_\varepsilon\right) = m\left(\bigcup_{l \geqslant L}\left(E \backslash E_{k_l}^l\right)\right) \leqslant \sum_{l \geqslant L} m\left(E \backslash E_{k_l}^l\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

同时 $\forall \delta > 0$, 取 l 满足 $1/l < \delta$. 由于 $\forall x \in A_\varepsilon$ 蕴含 $x \in E_{k_l}^l$,

$$\left|f_k(x) - f(x)\right| < \frac{1}{l} < \delta, \ \forall k > k_l,$$

即 $\{f_k\}$ 在 A_ε 上一致收敛. 最后利用可测集的等价刻画, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ 使得

$$m\left(A_\varepsilon \backslash F_\varepsilon\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此得到

$$m(E\backslash F_\varepsilon) \leqslant m(E\backslash A_\varepsilon) + m(A_\varepsilon\backslash F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

引理 3.4.1 设 f 为 E 上的可测简单函数 . 那么 $\forall\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E\backslash F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, 且 f 为 F_ε 上的连续函数.

■ 由假设, 存在互异实数 $a_1, ..., a_N$, 互不相交的可测集 $E_1, ..., E_N$ 满足 $\bigcup_{k=1}^N E_k = E$, 使得

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}(x), \ \forall x \in E.$$

$\forall\varepsilon > 0, k = 1, ..., N$, 存在闭集 $F_k \subset E_k$ 满足

$$m(E_k\backslash F_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{N}.$$

令

$$F_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{N} F_k.$$

那么 F_ε 是闭集, 且

$$m\left(E\backslash F_\varepsilon\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left(E_k\backslash F_k\right)\right) \leqslant \varepsilon.$$

同时, 由于 f 在每一个 F_k 上为常数, f 在 F 上连续. ///

定理 3.4.2 **(Lusin)** 设 f 为 E 上的几乎处处有限的可测函数 . 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$ 使得 $m\left(E\backslash F_\varepsilon\right) \leqslant \varepsilon$, 且 f 为 F_ε 上的连续函数.

■ 不妨设 f 为实值函数.

1. 若 $m(E) < \infty$. 由定理 3.2.1, 存在可测简单函数列 $\{\phi_k\}$ 使得

$$\phi_k(x) \to f(x),\ \forall x \in E.$$

$\forall \varepsilon > 0, k \geqslant 1$, 根据引理 3.4.1, 存在闭集 $F_k \subset E$ 使得 ϕ_k 在 F_k 上连续, 且

$$m(E \backslash F_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

运用 Egorov 定理, 存在闭集 $F_0 \subset E$ 使得 ϕ_k 在 F_0 上一致收敛于 f, 且 $m(E \backslash F_0) \leqslant \varepsilon/2$. 令

$$F_\varepsilon = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k.$$

那么 F_ε 是闭集,

$$m\left(E\backslash F_\varepsilon\right)=m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(E\backslash F_k\right)\right)\leqslant\varepsilon.$$

由于 ϕ_k 在 F_ε 上一致收敛于 f, 因此 f 是 F_ε 上的连续函数.

2. 若 $m\left(E\right)=\infty$, 令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, 其中

$$E_k=\left\{x\in E:k-1\leqslant|x|<k\right\},\ \forall k\geqslant 1.$$

对 E_k 运用已有结论, 存在闭集满足 $F_k\subset E_k, f$ 是 F_k 上的连续函数, 以及

$$m\left(E_k\backslash F_k\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

令

$$F_\varepsilon=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k.$$

那么 f 是 F_ε 上的连续函数, 同时容易看出 F_ε 是闭集,

$$m\left(E \backslash F_{\varepsilon}\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E_{k} \backslash F_{k}\right)\right) \leqslant \varepsilon.$$