4.7 重积分与累次积分

本节主要介绍 Fubini 定理, 它将给出 Lebesgue 重积分与累次积分的关系.

记号: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 中的点记为 (x, y), $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$.

任给 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x, y)$, 当 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ 固定时, 称

$$f^y(x) = f(x, y)$$

为 $f(x, y)$ 在 y 给定时的截面函数, 类似地称

$$f_x(y) = f(x, y)$$

为 $f(x, y)$ 在 $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ 给定时的截面函数. 对集合也有类似的定义, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 分别称

$$E^y = \{x : (x, y) \in E\}, \ E_x = \{y : (x, y) \in E\}$$

为 E 在 y 给定时和在 x 给定时的截集. 容易看出

$$\chi_{E^y}(x) = \chi_E^y(x), \; \chi_{E_x}(y) = (\chi_E)_x(y).$$

例 4.7.1 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上可测. 那么 $f^y(x)$ 或 $f_x(y)$ 不一定可测. 事实上, 若 $E \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的不可测集与 $\{0\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 的乘积, 那么显然 E 可测, 但容易看出 $y = 0$ 时 $\chi_{E^y}(x)$ 不可测.

尽管可测函数的截面函数不一定都可测, 但我们将证明几乎所有截面函数是可测的.

定理 4.7.1 **(Fubini)** 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上可积. 那么
(1) 对几乎所有 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积.

(2) 函数

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\, dx$$

在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可积.
(3) 重积分能化为累次积分:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\, dxdy.$$

类似的结论对 $f_x(y)$ 也成立, 因此有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_x(y)\, dydx.$$

令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上满足 (1) (2) (3) 的所有可积函数全体, 我们将证明

$$L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}.$$

证明分为几个步骤完成. 首先证明 $\mathcal{F}$ 关于线性运算和单调序列极限封闭. 其次, 由于可积函数最终是简单函数积分的极限, 问题转化为证明 $\mathcal{F}$ 包含简单函数, 而简单函数是测度有限的可测集上的特征函数的线性组合, 因此问题归结为证明 $\mathcal{F}$ 包含测度有限可测集上的特征函数. 最后我们通过极限过程完成定理证明.

1. $\mathcal{F}$ 关于有限线性运算封闭.

- 设 $\{f_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{F}$. 对 $\forall k$, 存在零测集 $A_k \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 使得 $\forall y \in A_k^c$, $f_k^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积. 令 $A = \bigcup_{k=1}^N A_k$, 那么 A 是零测集, 并且

$\forall y \in A^c$, $\{f_k^y\}_{k=1}^N$ 的线性组合在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积. 再利用积分的线性性质, 可知 $\mathcal{F}$ 包含任何 $\{f_k\}_{k=1}^N$ 的线性组合.

2. $\mathcal{F}$ 对单调序列极限封闭, 即: 若 f 可积, $\{f_k\} \subset \mathcal{F}$ 为单调递增 (或递减) 可测序列, 收敛于 f, 那么 $f \in \mathcal{F}$.

- 考虑递增情形. 不妨假设 $\{f_k\}$ 非负, 否则考察 $\{f_k - f_1\}$. 由 MCT,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy.$$

对 $\forall k$, 存在零测集 $A_k \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 使得 $\forall y \in A_k^c, f_k^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积. 令 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 那么 A 是零测集, 并且 $\forall k, \forall y \in A^c, f_k^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$

上可积. 令

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_k^y(x)\,dx,$$

那么 $g_k(y)$ 非负, 单调收敛到

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\,dx.$$

根据假设 $\{f_k\} \subset \mathcal{F}$, 因此 $g_k(y)$ 可测, 从而非负 $g(y)$ 可测. 同时

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_k^y(x)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} g_k(y)\,dy,$$

取极限 $k \to \infty$, 由 MCT 得

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(y)\,dy.$$

注意到 f 非负可积, 这表明 $g(y) < \infty, a.e.\ y \in \mathbb{R}^{n_2}$, 即

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\,dx < \infty,\ a.e.\ y \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

换言之对几乎所有 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $f^y(x)$ 可积, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)\,dxdy.$$

3. 若 E 为有限测度 G_δ 集, 那么 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$.

(a) 若 $E = Q_1 \times Q_2$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开方体, 其中 Q_1, Q_2 分别为 $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ 上的有界开方体, 那么 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$. 事实上, $\forall y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\chi_E^y(x) = \chi_{Q_1}(x)\chi_{Q_2}(y)$ 是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的可测函数, 且可

积, 此外

$$g(y)=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\chi_E^y(x)\,dx=\left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\chi_{Q_1}(x)\,dx\right)\chi_{Q_2}(y)=|Q_1|\,\chi_{Q_2}(y)\,.$$

易见, $g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测, 且可积,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}}g(y)\,dy=|Q_1|\,|Q_2|=|E|=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_E(x,y)\,dxdy.$$

从而 $\chi_E(x,y)\in\mathcal{F}$.

(*b*) 若 E 包含于 $\mathbb{R}^n$ 上某有界开方体 $Q_1\times Q_2$ 的边界, 其中 Q_1,Q_2 分别为 $\mathbb{R}^{n_1},\mathbb{R}^{n_2}$ 上的有界开方体, 那么 $\chi_E(x,y)\in\mathcal{F}$. 事实上, 由于有界闭方体的边界在 $\mathbb{R}^n$ 中测度为零, 因此

$$\int_{\mathbb{R}^n}\chi_E(x,y)\,dxdy=0.$$

由于 $E \subset (\partial Q_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times \partial Q_2)$, 可知 $\forall y \in \mathbb{R}^{n_2}$,

$$\chi_E^y(x) \leqslant \chi_{\partial Q_1}(x)\,\chi_{Q_2}(y) + \chi_{Q_1}(x)\,\chi_{\partial Q_2}(y)\,.$$

由此得到

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E^y(x)\,dx = 0,\ \forall y \in (\partial Q_2)^c\,.$$

因此对几乎所有 y, $\chi_E^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E^y(x)\,dxdy = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x,y)\,dxdy.$$

(c) 若 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{K} \overline{Q}_k$, 其中 Q_k 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开方体, Q_k 互不相交, 那么根据 (a) (b) 可知 $\chi_{\overline{Q}_k}(x,y) \in \mathcal{F}$. 再利用第 **1** 步得 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$.

(d) 若 E 是有限测度开集, 那么 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$. 为此, 注意 E 能写成可数个互不重叠闭方体的并集,

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{Q}_j,$$

其中 Q_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开方体, Q_j 互不相交. 令

$$f_k(x,y) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{\overline{Q_j}}(x,y),$$

显然 $f_k \in \mathcal{F}$, 单调递增收敛于 $f = \chi_E(x,y)$. 由于 E 测度有限, f 可积. 利用第 **2** 步得 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$.

(e) 若 E 为有限测度 G_δ 集,

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

其中 G_k 是开集. 任取包含 E 的有限测度开集 G, 令

$$O_k=G\cap\left(\bigcap_{j=1}^{k} G_j\right).$$

那么 O_k 是有限测度开集, 且

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k.$$

因此 $f_k\in\mathcal{F}$, 单调递减收敛于 $f=\chi_E(x,y)$. 由于 E 测度有限, f 可积. 利用第 **2** 步得 $\chi_E(x,y)\in\mathcal{F}$.

4. 若 E 为零测度集, 那么 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$.

■ 取 G_δ 集 H 使得, $E \subset H$, $m(H) = 0$. 由第 **3** 步, 对几乎所有 y, $\chi_H^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_H^y(x)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_H(x,y)\, dxdy = 0.$$

这表明

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_H^y(x)\, dx = 0, \ \ a.e.\ y.$$

进而有

$$\chi_H^y(x) = 0, \ \ a.e.\ x.$$

注意到 $\chi_E^y(x) \leqslant \chi_H^y(x)$, 便知对几乎所有 y,

$$\chi_E^y(x) = 0, \ \ a.e.\ x.$$

因此 $\chi_E^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测, 可积, 并且有

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E^y(x)\,dx = 0,\ a.e.\ y.$$

以及

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E^y(x)\,dxdy = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x,y)\,dxdy.$$

5. 若 E 为有限测度集, 那么 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$.

取 G_δ 集 H 使得, $E \subset H$, $m(H \backslash E) = 0$. 由于

$$\chi_E = \chi_H - \chi_{H\backslash E},$$

根据第 **1**, **3**, **4** 步知 $\chi_E(x,y) \in \mathcal{F}$.

6. $L(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}$.

■ 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 由于 $f = f^+ - f^-$, 根据第 **1** 步, 不妨设 $f \geqslant 0$. 于是存在简单函数递增序列 ϕ_k 点点收敛到 f. 又 $\forall k$, ϕ_k 是有限测度集上的特征函数的线性组合, 从而 $\forall k$, $\phi_k \in \mathcal{F}$, 因此 $f \in \mathcal{F}$. ///