# 1.7 独立性

**定义 1.7.1** 事件 $A$ 和 $B$ 称为相互**独立**的, 如果

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

**定理 1.7.1** 如果 $P(A) = 0$, 那么 $A$ 与任何事件相互**独立.**

- 由于 $A \cap B \subset A$, 因此 $P(A \cap B) = 0 = P(A) P(B)$ //

**定理 1.7.2** 如果事件 $A$ 和 $B$ 独立, 那么事件 $A^c$ 和 $B$ 独立, 事件 $A^c$ 和 $B^c$ 独立.

■ 我们证明 $A^c$ 和 $B$ 独立. 事实上

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\
&= (1 - P(A))\, P(B) \\
&= P(A^c)\, P(B)
\end{aligned}
$$

//

**例题 1.7.1** 如果 $P(A) = 1$, 那么 $A$ 与任何事件相互**独立.**

■ 由于 $P(A) = 1$, $P(A^c) = 0$, 因此 $A^c$ 与任何事件相互独立, 从而 $A$ 与任何事件相互独立 //

**定理 1.7.3** 如果 $A$ 与任何事件相互独立, 那么 $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$.

- 由假设, $A$ 与自身相互独立, 因此

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A),$$

由此可知结论成立

**定理 1.7.4** 如果 $P(B) > 0$, 那么不难, 事件 $A$ 和 $B$ 相互独立当且仅当

$$P(A|B) = P(A).$$

- 由条件概率的定义看出

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$

因此事件 $A$ 和 $B$ 相互独立当且仅当 $P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$, 这正是 $P(A|B) = P(A)$

运用这一事实我们有

**例题 1.7.2** 如果 $P(B) > 0, P(B^c) > 0$ 那么事件 $A$ 和 $B$ 相互独立当且仅当

$$P(A|B) = P(A|B^c)$$

**例题 1.7.3** 一个均匀的硬币投掷两次. 令 $A = \{$第一次为 H$\}$, $B = \{$第二次为 T$\}$. 那么事件 $A$ 和 $B$ 独立.

- 样本空间为 $\{HH, HT, TH, TT\}$. 每一个单一事件概率为 $1/4$.

$$P(A) = P(\{HH, HT\}) = \frac{1}{2}, P(B) = P(\{HT, TT\}) = \frac{1}{2}.$$

因此

$$P(B \cap A) = \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

# 1.8 多个集合的独立性

**定义 1.8.1** 一列集合族 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 称为是相互独立的，如果对于任何子集 $\{j_1, ..., j_s\} \subset \{1, ..., n\}$, 都有

$$P\left(A_{j_1}A_{j_2}...A_{j_s}\right) = P\left(A_{j_1}\right)P\left(A_{j_2}\right)...P\left(A_{j_s}\right).$$

- 从定义容易看出, 如果集合族 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是相互独立的. 从中选择任意多个集合组成一个新的集合族, 那么这个新的集合族也是相互独立的.

两两独立不能推出相互独立.

**例题 1.8.1** 投掷两个均匀的相互独立的硬币. 令

$E = \{$第一次为正$\}$,

$F = \{$第二次为正$\}$,

$G = \{两次投掷一正一反\}$.
这些事件两两独立，但它们不是相互独立的.

■ 由于 $P(E) = 1/2$, $P(F) = 1/2$, $P(G) = 1/2$, 但 $P(EFG) = 0 \neq 1/8 = P(E)P(F)P(G)$, 所以它们不是独立的. 由前面的例题已经知道 $E$ 和 $F$ 独立. 为证明 $E$ 和 $G$ 独立, 只需注意

$$
\begin{aligned}
P(G|E) &= \frac{P(G \cap E)}{P(E)} \\
&= \frac{P(\{第一次为正,第二次为反\})}{P(E)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(G).
\end{aligned}
$$

同样地, $F$ 和 $G$ 独立.

**定理 1.8.1** 若 $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ 相互独立，那么 $\{A_1^c, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ 也独立，从而将任何 $A_k$ 变为 $A_k^c$ 后得到的集合族仍然独立.

- 只要证明任何包含 $A_1^c$ 的子集族 $\{A_1^c, A_{j_1}, A_3, \ldots, A_{j_s}\}$，$\{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{2, \ldots, n\}$ 都有

$$P\left(A_1^c A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_s}\right) = P\left(A_1^c\right) P\left(A_{j_1}\right) P\left(A_{j_2}\right) \ldots P\left(A_{j_s}\right).$$

事实上，有原集族独立性

$$P\left(A_1 A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_s}\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_{j_1}\right) P\left(A_{j_2}\right) \ldots P\left(A_{j_s}\right),$$

同时也有

$$P\left(A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_s}\right) = P\left(A_{j_1}\right) P\left(A_{j_2}\right) \ldots P\left(A_{j_s}\right).$$

用后一个等式减去前一个等式得到

$$P\left(A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_s}\right)-P\left(A_1A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_s}\right)$$
$$=\left(1-P\left(A_1\right)\right)P\left(A_{j_1}\right)P\left(A_{j_2}\right)\ldots P\left(A_{j_s}\right).$$

进一步化简就得到所要证的式子. ///

**例题 1.8.2** 若 $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 相互独立, 那么

(1) $A_1\cap A_2$ 与 $A_3\cap A_4$ 独立

(2) $A_1\cup A_2$ 与 $A_3\cup A_4$ 独立

■ (1) 直接用定义.

(2) 由假设知, $\{A_1^c,A_2^c,A_3^c,A_4^c\}$ 相互独立, 从而 $A_1^c\cap A_2^c$ 与 $A_3^c\cap A_4^c$ 独立, 进一步便知 $(A_1^c\cap A_2^c)^c$ 与 $(A_3^c\cap A_4^c)^c$ 独立, 即 $A_1\cup A_2$ 与 $A_3\cup A_4$ 独立. ///

**例题 1.8.3** 每个原件可靠性 $r \in (0,1)$. 比较串联与并联系统的可靠性.

- 记 $A_{ij} = \{第\,(i,j)\,个原件正常工作\}$, $i = 1, 2, j = 1, ..., n$.

  串联可靠性.

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{1k}\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{2k}\right)\right) \\
&= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{1k}\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{2k}\right) - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{1k}\right) P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{2k}\right) \\
&= 2r^n - r^{2n} = r^n\left(2 - r^n\right)
\end{aligned}
$$

并联可靠性.

$$
\begin{aligned}
& P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left(A_{1k} \cup A_{2k}\right)\right) \\
& =\prod_{k=1}^{n} P\left(A_{1k} \cup A_{2k}\right) \\
& =\prod_{k=1}^{n}\left(P\left(A_{1k}\right)+P\left(A_{2k}\right)-P\left(A_{1k} A_{2k}\right)\right) \\
& =\left(2r-r^{2}\right)^{n}=r^{n}(2-r)^{n} .
\end{aligned}
$$

由 Jensen 不等式

$$
1=\left(\frac{2-r+r}{2}\right)^{n} \leqslant \frac{1}{2}\left((2-r)^{n}+r^{n}\right),
$$

所以

$$2 - r^n \leqslant (2 - r)^n ,$$

即并联更可靠.

# Lecture 2

# 一元随机变量与分布

**Y. Ruan**
**Department of Mathematics**

**Probability and Statistics**
**Beihang University**

## 2.1 随机变量的定义

**定义 2.1.1** **随机变量**是定义在样本空间 $S$ 上的实数值函数, 通常用大写字母表示，例如 $X$

**定义 2.1.2** 取值于有限集合或由互不相同的实数组成的无穷序列 (即可数多个实数值) 的随机变量称为**离散随机变量**, 可取值与某区间中所有实数的随机变量成为连续随机变量.

**定义 2.1.3** 假设 $X$ 是一个随机变量. 那么 $X$ 的**分布**定义为所有如下形式的概率的集合：$P(X \in C)$ 对任意 $C \subset \mathbb{R}$. 其中 $\{X \in C\}$ 是 $\{\omega \in S : X(\omega) \in C\}$ 的简写 . $\omega$ 通常表示一个样本, 或是在随机过程中也成为一个轨道.

**例题 2.1.1** 假设一个硬币正面出现的概率为 $p$. 令 $N$ 为投掷直到正面首次出现所需的次数. 假设投掷是相互独立的, 那么 $N$

是一个取值于 1,2,3,...... 的随机变量

- 每一次连续投掷是一次实验，这些实验组成了样本空间. 对应每一次实验 $N$ 有唯一的取值, 即第一次正面在一次投掷序列中的位置, 因此它是一个随机变量. $N$ 的分布为

$$P(N=1)=p$$

$$P(N=2)=(1-p)p$$

$$\vdots$$

$$P(N=n)=(1-p)^{n-1}p$$

$$\vdots$$

并且 $P(N\in C)=0$ 对任意 $C\backslash\{1,2,3,......\}$ .

## 离散分布

**定理 2.1.1** 令 $X$ 为一个随机变量，其取值为 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$. 那么其分布可以由如下式子来计算，对任意 $C \subset \mathbb{R}$,

$$P(X \in C) = \sum_{x_i \in C} P(X = x_i),$$

并且

$$\sum_{i} P(X = x_i) = 1.$$

■ 注意到 $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \varnothing$, $\forall i \neq j$ 并运用概率公理.

对离散分布，$f(x) = P(X = x)$ 通常称为 $X$ 的概率函数. 上面的定理说明对离散随机变量，概率函数即可确定其分布.

**例题 2.1.2** 连续投掷一个均匀硬币 10 次. 各次投掷相互独立. 令 $X$ 为正面出现次数. 试确定 $X$ 的概率函数.

■ 每一次实验包含 10 次投掷，所有实验组成一个样本数目为 $2^{10}$ 的样本空间. 根据题设，每一个样本具有概率 $\frac{1}{2^{10}}$. 容易看出 $X$ 是定义在这些样本上的随机变量. 其取值范围是 $R = \{0, 1, ..., 10\}$. 对 $\forall x \in R$,

$$f(x) = P(X = x) = C_{10}^{x} \cdot \frac{1}{2^{10}}.$$

///

// Bernoulli 分布