概率论与数理统计

随机变量与分布函数

量化，并更加有效的描述随机事件:

$$\{X \in I\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\},\ I \subset \mathbb{R}$$

随机变量X的分布函数定义为:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X \in (-\infty, x]),\ x \in \mathbb{R}$$

分布函数

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]$$

$$\begin{aligned}
F(x) = P(X \leqslant x) &= P\left(X \in \bigcap_{n}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= P\left(\bigcap_{n}^{\infty} \left\{X \in \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right\}\right) \\
&= \lim_{n} P\left(X \in \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \lim_{n} F\left(x + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

分布函数

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$$

$$P(X < x) = \lim_{n} P\left(X \in \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right)$$

$$= \lim_{n} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

$$(-\infty, \infty) = \bigcup_{n}^{\infty} (-\infty, n] \qquad \varnothing = \bigcap_{n}^{\infty} (-\infty, -n]$$

$$F(-\infty) = 0 \quad F(\infty) = 1$$

二项分布

Bernoulli分布：投掷正面出现概率为p的硬币1次，正面出现次数X的分布

$$X \sim Bernoulli(p),\ 0 \leqslant p \leqslant 1:$$
$$P(X = k) = p^k \cdot (1 - p)^{1-k},\ k = 0, 1$$

二项分布：投掷正面出现概率为p的硬币n次，正面出现次数X的分布

$$X \sim Bin(n, p),\ n \geqslant 1, 0 \leqslant p \leqslant 1:$$
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \dots$$

二项分布最大概率点

定理 2.1 设 $n\geqslant 2,0<p<1,m=[(n+1)p]$（不超过 $(n+1)p$ 的最大整数），

$$p_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n),$$

则有下列结论：

(1) 当 $(n+1)p$ 不是整数时，

$$\begin{aligned}p_n(0)&<p_n(1)<\cdots<p_n(m-1)<p_n(m)\\&>p_n(m+1)>\cdots>p_n(n);\end{aligned}\tag{2.4}$$

(2) 当 $(n+1)p$ 是整数时，

$$\begin{aligned}p_n(0)&<p_n(1)<\cdots<p_n(m-1)=p_n(m)\\&>p_n(m+1)>\cdots>p_n(n).\end{aligned}\tag{2.5}$$

证明 显然

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p},$$

又$\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p}>1$的充要条件是$k<(n+1)p-1$，于是有下列结论：

当$k<(n+1)p-1$时，$p_n(k+1)>p_n(k)$； (2.6)

当$k>(n+1)p-1$时，$p_n(k+1)<p_n(k)$； (2.7)

当$k=(n+1)p-1$时，$p_n(k+1)=p_n(k)$. (2.8)

$(n+1)p$不是整数：

$$[(n+1)p]-1<(n+1)p-1<[(n+1)p]<(n+1)p$$

$(n+1)p$是整数：

$$[(n+1)p]-1=(n+1)p-1<[(n+1)p]=(n+1)p$$

二项分布Poisson逼近

定理 7.2 如果 $0<p_n<1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$，则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{7.4}$$

证明 根据排列组合公式,有

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!}(np_n)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(1-p_n)^{n-k}. \end{aligned}$$

注意,

$$\begin{aligned} (1-p_n)^{n-k} &= \exp\{(n-k)\ln(1-p_n)\} \\ &= \exp\left\{(n-k)p_n \cdot \frac{1}{p_n}\ln(1-p_n)\right\}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n}\ln(1-p_n) = -1,$$

故(7.4)式成立. □

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

得分问题（解答）

甲、乙两人各出同样的赌注，用掷硬币作为博奕手段．每掷一次，若正面朝上，甲得1分乙不得分．反之，乙得1分，甲不得分．谁先得到规定分数就赢得全部赌注．当进行到甲还差2分乙还差3分，就分别达到规定分数时，发生了意外使赌局不能进行下去，问如何公平分配赌注？

得分问题（解答）

甲、乙两人各出同样的赌注，用掷硬币作为博奕手段．每掷一次，若正面朝上，甲得1分乙不得分． 反之，乙得1分，甲不得分． 谁先得到规定分数就赢得全部赌注．当进行到甲还差2分乙还差3分，就分别达到规定分数时，发生了意外使赌局不能进行下去，问如何公平分配赌注？

$P(m,n)$: 甲乙距离分数线分别为m,n时, 甲最终赢得比赛

得分问题（解答）

甲、乙两人各出同样的赌注，用掷硬币作为博奕手段．每掷一次，若正面朝上，甲得1分乙不得分． 反之，乙得1分，甲不得分． 谁先得到规定分数就赢得全部赌注．当进行到甲还差2分乙还差3分，就分别达到规定分数时，发生了意外使赌局不能进行下去，问如何公平分配赌注？

$P(m,n)$: 甲乙距离分数线分别为m,n时, 甲最终赢得比赛

$$P(m,n) = \sum_{k=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-1-k}$$

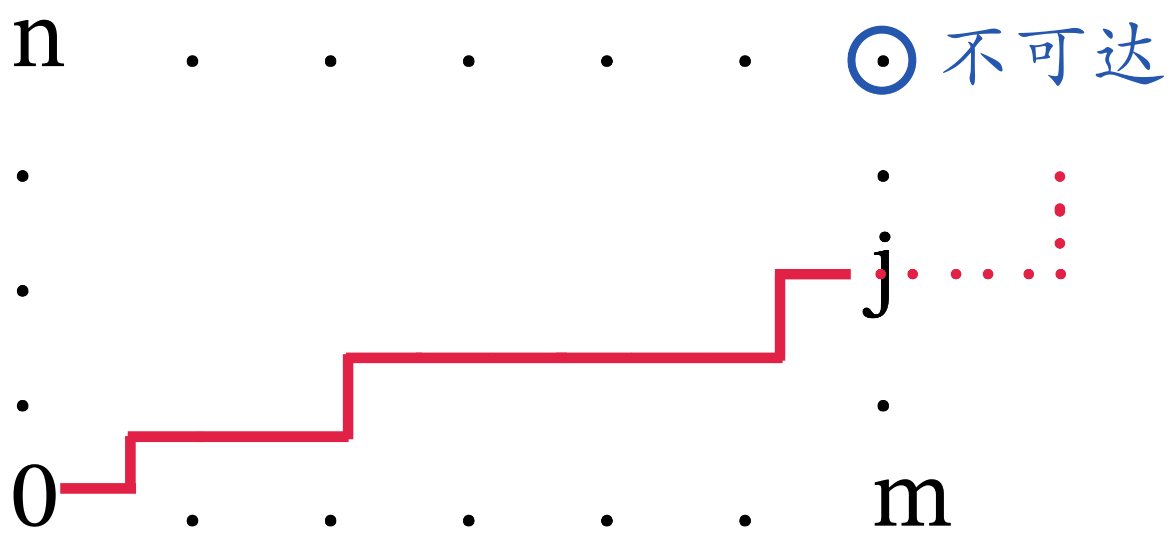
得分问题（解答）

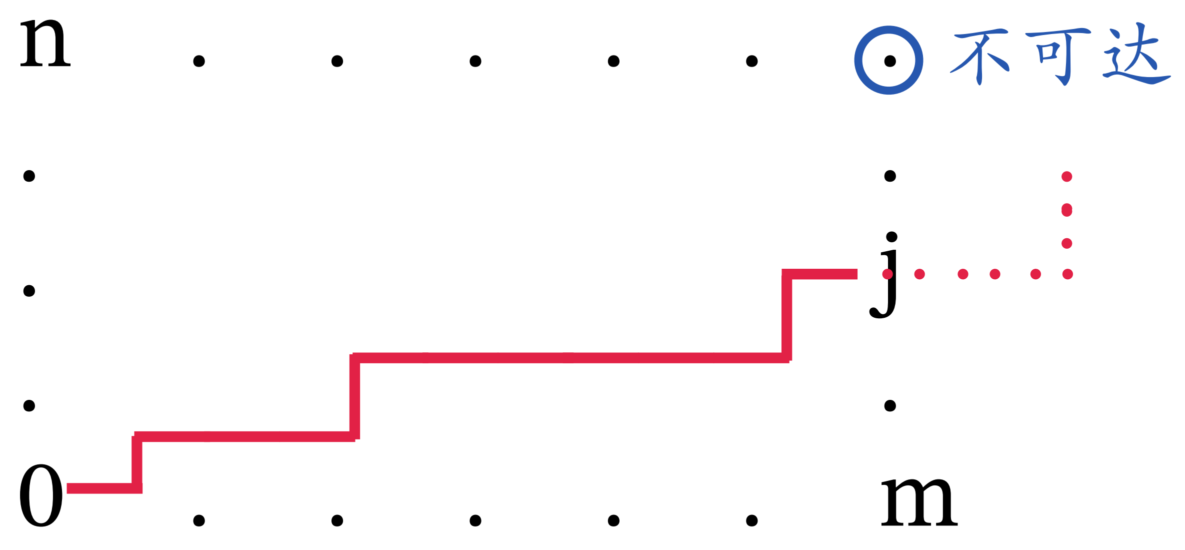
甲、乙两人各出同样的赌注，用掷硬币作为博奕手段．每掷一次，若正面朝上，甲得1分乙不得分． 反之，乙得1分，甲不得分． 谁先得到规定分数就赢得全部赌注．当进行到甲还差2分乙还差3分，就分别达到规定分数时，发生了意外使赌局不能进行下去，问如何公平分配赌注？

$P(m,n)$: 甲乙距离分数线分别为m,n时, 甲最终赢得比赛

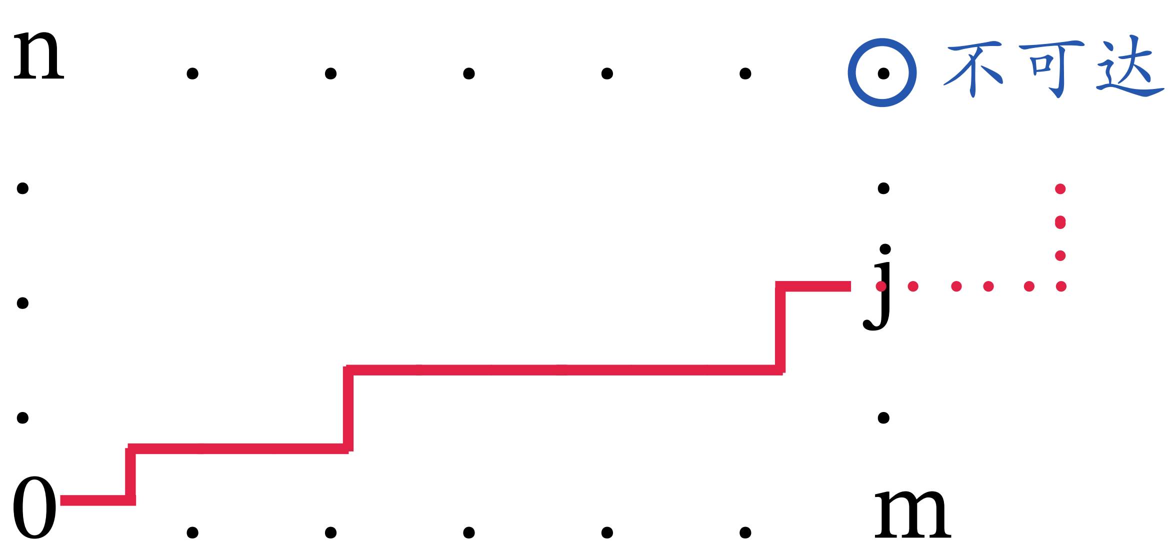
$$P(m,n) = \sum_{k=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-1-k}$$

$$P(m,n) = \frac{1}{2} \cdot P(m-1,n) + \frac{1}{2} \cdot P(m,n-1)$$


n
不可达
j
0
m

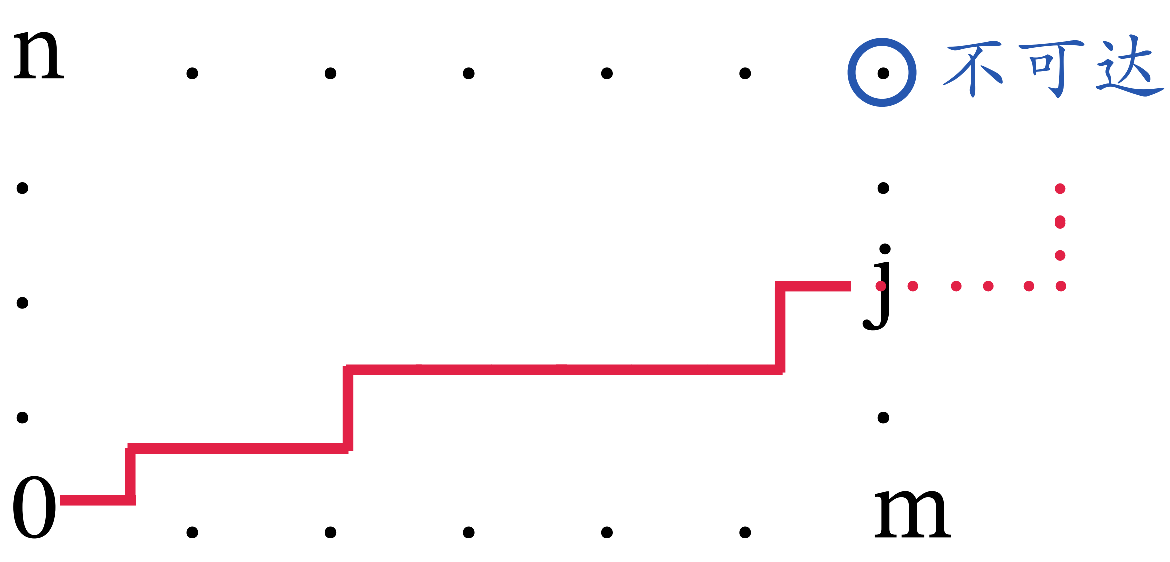


$P(3,0)$	$P(2,0)$	$P(1,0)$	$*$
$P(3,1)$	$P(2,1)$	$P(1,1)$	$P(0,1)$
$P(3,2)$	$P(2,2)$	$P(1,2)$	$P(0,2)$
$P(3,3)$	$P(2,3)$	$P(1,3)$	$P(0,3)$



$$
\begin{array}{cccc}
P(3,0) & P(2,0) & P(1,0) & * \\
P(3,1) & P(2,1) & P(1,1) & P(0,1) \\
P(3,2) & P(2,2) & P(1,2) & P(0,2) \\
P(3,3) & P(2,3) & P(1,3) & P(0,3)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & * \\
P(3,1) & P(2,1) & P(1,1) & 1 \\
P(3,2) & P(2,2) & P(1,2) & 1 \\
P(3,3) & P(2,3) & P(1,3) & 1
\end{array}
$$



甲需赢得m+n-1步中的至少m步

$$
\begin{array}{cccc}
P(3,0) & P(2,0) & P(1,0) & * \\
P(3,1) & P(2,1) & P(1,1) & P(0,1) \\
P(3,2) & P(2,2) & P(1,2) & P(0,2) \\
P(3,3) & P(2,3) & P(1,3) & P(0,3)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & * \\
P(3,1) & P(2,1) & P(1,1) & 1 \\
P(3,2) & P(2,2) & P(1,2) & 1 \\
P(3,3) & P(2,3) & P(1,3) & 1
\end{array}
$$

Poisson分布

Poisson分布：单位时间发射粒子平均数目 $\lambda > 0$.
在给定的单位时间内，粒子数量X的分布

$$X \sim Poisson(\lambda),\ \lambda > 0:$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$0, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \quad \cdots, \quad 1$$

1/n的时长内出现粒子的概率近似为 $p = \lambda / n$

$np \approx \lambda,\ n \to \infty$

Poisson分布最大概率点

定理 2.2 设 X 服从泊松分布，$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(\lambda>0; k=0,1,2,\cdots)$，则有下列结论：

(1) 当 λ 不是整数时，

$$p_0 < p_1 < \cdots < p_{[\lambda]} > p_{[\lambda]+1} > \cdots$$

(这里$[\lambda]$是不超过 λ 的最大整数)；

(2) 当 λ 是整数时，

$$p_0 < p_1 < \cdots < p_{\lambda-1} = p_\lambda > p_{\lambda+1} > \cdots.$$

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{\lambda}{k+1} > 1 \Longleftrightarrow k < \lambda - 1$$

超几何分布

超几何分布：一罐子中有N个小球，其中K个涂有颜色，从中取出n个，有颜色的小球数X的分布

$X \sim Hypergeometric(N, K, n),\ N \geqslant K, n \geqslant 1:$

$$P(X=k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, & max(0, K-N+n) \leqslant k \leqslant min(n, K) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- n=1，Bernoulli(p), p=K/N
- 二项分布 $K/N \approx p,\ N \to \infty$

超几何分布二项逼近

定理 2.3 设超几何分布(2.10)中 D 是 N 的函数，即 $D=D(N)$ 且

$$\lim_{N\to\infty}\frac{D(N)}{N}=p \quad (0<p<1),$$

则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{C_{D(N)}^{k}C_{N-D(N)}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \tag{2.11}$$

(对任何固定的 $k\geqslant 0$).

证明 既然 $0<p<1$，故 N 充分大时，$n<D(N)<N$（注意，n 是固定的！）以下简记 $D(N)$ 为 D. 易知

$$\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}=\frac{D!}{k!(D-k)!}\cdot\frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-n+k)!}\cdot\frac{n!(N-n)!}{N!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{D(D-1)\cdots(D-k+1)}{N^k}\cdot\frac{(N-D)(N-D-1)\cdots(N-D-n+k+1)}{N^{n-k}}\cdot\frac{N^n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$

$$=C_n^k\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{D-i+1}{N}\right]\left[\prod_{i=1}^{n-k}\frac{N-D-i+1}{N}\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{N}{N-i+1}\right]$$

$$\to C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(N\to\infty).\quad\square$$

证明 既然 $0<p<1$，故 N 充分大时，$n<D(N)<N$（注意，n 是固定的！）以下简记 $D(N)$ 为 D. 易知

$$
\begin{aligned}
\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} &= \frac{D!}{k!(D-k)!} \cdot \frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-n+k)!} \\
&\quad \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \cdot \frac{D(D-1)\cdots(D-k+1)}{N^k} \\
&\quad \cdot \frac{(N-D)(N-D-1)\cdots(N-D-n+k+1)}{N^{n-k}} \\
&\quad \cdot \frac{N^n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \\
&= C_n^k \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{D-i+1}{N} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-k} \frac{N-D-i+1}{N} \right) \\
&\quad \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{N}{N-i+1} \right) \\
&\to C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (N \to \infty). \qquad \square
\end{aligned}
$$

证明 既然 $0<p<1$，故 N 充分大时，$n<D(N)<N$（注意，n 是固定的！）以下简记 $D(N)$ 为 D. 易知

$$\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{D!}{k!(D-k)!} \cdot \frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-n+k)!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \cdot \frac{D(D-1)\cdots(D-k+1)}{N^k} \cdot \frac{(N-D)(N-D-1)\cdots(N-D-n+k+1)}{N^{n-k}} \cdot \frac{N^n}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$

$$= C_n^k \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{D-i+1}{N}\right)\left(\prod_{i=1}^{n-k} \frac{N-D-i+1}{N}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{N}{N-i+1}\right)$$

$$\to C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (N \to \infty). \quad \square$$

超几何分布

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant min(n,K)} P(X=k) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant min(n,K)} \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$$

回顾：Vandermonde等式 $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j}$

注意n与K的对称性

$$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}$$

几何分布

几何分布：投掷正面出现概率为p的硬币直到正面出现，总投掷次数W的分布

$$W \sim Geometric(p),\ 0 < p < 1:$$
$$P(W = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

等待时间W： $P(W > k) = (1-p)^k$

无记忆性：

$$P(W > k + n \mid W > n) = P(W > k) = (1-p)^k,\ \ k, n \geqslant 1,$$

负二项分布

负二项分布：投掷正面出现概率为p的硬币直到正面出现r次，总投掷次数Wr的分布

$$W_r \sim NBin(r,p),\ r \geqslant 1, 0 < p < 1:$$

$$P(W_r = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r},\ k = r, r+1, r+2, \ldots$$

$$W_r = \underbrace{W + W + \cdots + W}_{\text{r (independent) copies of W}}$$

在k个小球的k-1个间隙中插入r-1个搁板将小球分为r组

负二项分布(附)

Binomial展开: $|x| < 1, \alpha \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{k} \\
&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^{3} + \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.
$$

负二项分布(附)

$$P(W_r = r + j) = \binom{r+j-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^j$$
$$= \binom{r+j-1}{j} \cdot p^r \cdot (1-p)^j, j = 0, 1, 2, \ldots$$

投掷k次，r次正面，j次反面

$$p^{-r} = (1 + (p-1))^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-r}{j} (p-1)^j$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-j+1)}{j!} (p-1)^j$$

负二项分布(附)

$$p^{-r} = (1 + (p-1))^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-r}{j} (p-1)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-j+1)}{j!} (p-1)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r+j-1)\cdots(r+1)(r)}{j!} (1-p)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{j} p^r (1-p)^j = 1$$

负二项分布(附)

$$p^{-r} = (1+(p-1))^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-r}{j} (p-1)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-j+1)}{j!} (p-1)^j$$

← "负二项"

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r+j-1)\cdots(r+1)(r)}{j!} (1-p)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{j} (1-p)^j$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{j} p^r (1-p)^j = 1$$