§ 8.2 点估计的评价标准

对于同一个未知参数, 不同的方法得到的估计量可能不同,于是提出问题

1、应该选用哪一种估计量?

2、用什么标准来评价一个估计量的好坏?

常用标准

(1) 无偏性

(2) 有效性

(3) 一致性

无偏性

定义 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体X的样本，

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体参数θ的估计量，

$E(\hat{\theta})$存在, 如果：

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计量.

例1 设总体X的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 存在，

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体X的样本，

求证：不论 X 服从什么分布,

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 μ_k的无偏估计量

证　由于 $E(X_i^k) = \mu_k \quad i = 1, 2, \cdots, n$ 　因而

$$E(A_k) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu_k = \mu_k$$

特别地,

样本均值 $\bar{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的无偏估计量

样本二阶原点矩 $A_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

是总体二阶原点矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的无偏估计量

例2 设总体 X 的期望 $E(X)$与方差 $D(X)$存在, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 X 的一个样本, $n > 1$. 求证：

(1) $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 不是 $D(X)$ 的无偏估计量

(2) $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是 $D(X)$ 的无偏估计量

证 前已证 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \bar{X}^2$

$$E(X_i) = E(X) = \mu, \qquad D(X_i) = D(X) = \sigma^2$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = \mu, \qquad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

因而 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2\right)$

$E(X_i^2)=E^2(X_i)+D(X)$

$=\mu^2+\sigma^2$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\bar{X}^2)$$

$E(\overline{X}^2)=E^2(\overline{X}_i)+D(\overline{X})$

$=\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}$

$$=(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故 $E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=\sigma^2$ 证毕.

通常，在估计时：
确实以样本均值估计总体均值

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

但却不以2阶中心距 S_n^2 估计总体方差，
而是以样本方差 S^2 估计总体方差

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S^2$$

例3 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad \theta>0 \text{ 为常数}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 X 的一个样本

求证： $\bar{X}$ 与 $n\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 都是 θ 的无偏估计量

证明： $X\sim E\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$ $\quad E(X)=\theta$

故 $E(\bar{X})=E(X)=\theta$

$\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量

令 $Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

$$F_Z(z)=P(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le z)$$

$$=1-P(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>z)$$

$$=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z)$$

$$=1-P(X_1>z)P(X_2>z)\cdots P(X_n>z)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>z)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i\le z))=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-\frac{n}{\theta}z} & z\ge 0\end{cases}$$

$$=F_{X_i}(z)=1-e^{-\frac{z}{\theta}}$$

故

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \dfrac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta} z} & z \geq 0 \end{cases}$$

即 $Z \sim E\left(\dfrac{n}{\theta}\right)$ $E(Z) = \dfrac{\theta}{n}$ $E(nZ) = \theta$

故 nZ 是θ的无偏估计量.

$$D(Z) = \frac{\theta^2}{n^2} \qquad D(nZ) = n^2 D(Z) = n^2 \cdot \frac{\theta^2}{n^2} = \theta^2$$

有效性

定义 设 $\hat{\theta}_1 = \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

都是总体参数θ的无偏估计量, 且

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

例4 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 X 的一个样本,

$$X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$ $\theta > 0$ 为常数

由前面例4 可知, $\bar{X}$ 与 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

都是 θ 的无偏估计量, 问哪个估计量更有效?

解 $D(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n}$ $D(n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}) = \theta^2$

所以 $\bar{X}$ 比 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 更有效.

例5 设总体期望为 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为总体X的一个样本，

(1) 设常数 $c_i \neq \dfrac{1}{n}$ $i=1,2,\cdots,n.$ $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$

求证 $\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量

(2) 求证 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 比 $\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 更有效

证：(1) $$E(\hat{\mu}_1)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu=\mu\sum_{i=1}^{n}c_i=\mu$$

(2) $$D(\hat{\mu})=D(\bar{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_1)=D(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}D(c_iX_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i^2D(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2$$

证明 $\hat{\mu}=\bar{X}$ 比 $\hat{\mu}_1=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ 更有效

只需 $D(\hat{\mu})<D(\hat{\mu}_1)$ 即 $\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}c_i^2$

而 $$1=\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} c_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} c_i c_j$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} c_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(c_i^2+c_j^2) \quad = n\sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{n}\le \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

“=” 成立当且仅当$c_1 = c_2 = \ldots = c_n$

$\Rightarrow$ $$D(\hat{\mu}) < D(\hat{\mu}_1)$$

结论 算术均值比加权均值更有效.

算术均值是所有线性无偏估计中方差最小的，称为最小方差无偏估计.

例如 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, (X_1, X_2) 是一样本

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\mu}_1 &= \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 \\
\hat{\mu}_2 &= \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 \\
\hat{\mu}_3 &= \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2
\end{aligned}\right\} \text{都是}\mu\text{的无偏估计量}$$

例7(2) 知 $\hat{\mu}_3$ 最有效.

一致性

定义 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体参数 θ 的估计量. 若对于任意的 $\theta\in\Theta$, 当 $n\to\infty$ 时, $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ, 即 $\forall\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P(\left|\hat{\theta}-\theta\right|\geq\varepsilon)=0$$

则称 $\hat{\theta}$ 是总体参数 θ 的一致(或相合)估计量.

一致性估计量仅在样本容量 n 足够大时,才显示其优越性.

例6 样本k阶矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是总体k阶矩 $E(X^k)$ 的一致估计

证明： $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = E(X^k)$

故，

$$1 \geq P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right)}{\varepsilon^2}$$

$$= 1 - \frac{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right)}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i^k)}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{nD(X^k)}{n^2\varepsilon^2} \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

例7 正态分布总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的一致估计

证明： $E(S^2)=\sigma^2$ 故，

$$1 \ge P\left\{\left|S^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\} = P\left\{\left|S^2-E(S^2)\right|<\varepsilon\right\} \ge 1-\frac{D(S^2)}{\varepsilon^2}$$

其中， $D(S^2)=D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n-1}\right]$

$$=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2\cdot D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

故，

$$1 \ge P\left\{\left|S^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\} \ge 1-\frac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|S^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=1$$

例8 $X \sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $\theta>0$ 为常数

则 $\bar{X}$ 是θ的无偏、一致估计量.

证 由例3 知 $\bar{X}$ 是θ的无偏估计量.

$$1\ge P\left\{\left|\overline{X}-\theta\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2}=1-\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\overline{X}-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$$

所以 $\bar{X}$ 是 θ 的一致估计量, 证毕.