# Lecture 1

# 预备知识

**Y. Ruan**
**Department of Mathematics**

# Real Analysis

## 1.1 引例

回顾 Riemann 积分: 若 $f_n(x)$ $R$-可积, 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $R$-可积, 且极限与积分可交换,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

一致收敛的条件通常不能去掉. 考察例子: 设 $[0,1]$ 中的全体有理数为 $\{r_1,r_2,...\}$（暂且接受这一表示的合理性）, 令

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_1,r_2,...,r_n\},\\ 0, & \text{其余}x\in[0,1].\end{cases}$$

显然 $f_n(x)$ $R$-可积,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \ldots\}, \\ 0, & \text{其余} x \in [0,1]. \end{cases}$$

但

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0,$$

而 $f(x)$ 并非 $R$-可积, $R$-积分无从谈起, 积分与极限换序自然也不成立.

再看一例. 令 $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, 那么

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & \text{其余} x \in [0,1]. \end{cases}$$

虽然这里没有一致收敛, 但极限函数仍然 $R$-可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

# 1.2 课程概要

- 预备知识：点集，可数与不可数，Cantor 集合，距离等
- Lebesgue 测度
- Lebesgue 可测函数
- Lebesgue 积分
- Lebesgue 多重积分
- 有界变差函数，积分与微分
- $L^p$ 空间及其度量性质

第一章介绍一些基本概念, 并简要复习数学分析的内容, 未给出证明的结论作为练习.

# 1.3 $\mathbb{R}^n$ 中的点集

## 集合与映射

记号:

$\mathbb{R}$-实数集
$\mathbb{N}$-自然数集 $\{1, 2, ...\}$
$\mathbb{Q}$-有理数集
$\mathbb{Z}$-整数集

令 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个集合, 其余集记为 $E^c$. 空集记为 $\varnothing$.

若 $f : X \longmapsto Y$, $E \subset X$, $F \subset Y$, 记 $E$ 在 $f$ 下的象集

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\},$$

$F$ 在 $f$ 下的原象集

$$f^{-1}(F) = \{x : f(x) \in F\}.$$

容易验证 $f^{-1}$ 与余集, 并集和交集运算可交换,

$$f^{-1}(F^c) = \left(f^{-1}(F)\right)^c,$$

对任意集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(F_\alpha),\ f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A} f^{-1}(F_\alpha).$$

$f$ 与余集, 交集运算不一定可交换, 但有

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A} f(F_\alpha),\ f\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in A} f(F_\alpha).$$

对集合 $A$, 其指示函数定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

## 集合的上下极限

若 $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为递增集列,

$$\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k\geqslant 1} E_k,$$

若 $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为递减集列,

$$\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{k\geqslant 1} E_k.$$

若 $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为一集合列, 上极限和下极限定义为

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{j\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant j} E_k = \lim_{j\to\infty} \bigcup_{k\geqslant j} E_k.$$

$$\liminf_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{j\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant j} E_k = \lim_{j\to\infty}\bigcap_{k\geqslant j} E_k.$$

**例 1.3.1** 令 $E_k = [-1/k, 1]$ 若 $k > 0$ 为奇, $E_k = [-1, 1/k]$ 若 $k > 0$ 为偶, 试求集列上下极限.

■ 对任意 $j$, $\bigcup_{k\geqslant j} E_k = [-1, 1]$, $\limsup_{k\to\infty} E_k = [-1, 1]$. 而 $\bigcap_{k\geqslant j} E_k = \{0\}$, $\liminf_{k\to\infty} E_k = \{0\}$. ///

**定理 1.3.1 (De Morgan's Law)** 令 $\mathcal{F}$ 为一集合族.

$$\left(\bigcup_{E\in\mathcal{F}} E\right)^c = \bigcap_{E\in\mathcal{F}} E^c, \quad \left(\bigcap_{E\in\mathcal{F}} E\right)^c = \bigcup_{E\in\mathcal{F}} E^c$$

■ 证明第一个等式. $x \in \left(\bigcup_{E\in\mathcal{F}} E\right)^c \iff x \notin E$ 对所有 $E \in \mathcal{F}$

$\Longleftrightarrow x \in E^c$ 对所有 $E \in \mathcal{F}$, 即 $x \in \bigcap_{E\in\mathcal{F}} E^c$.

## 可数与不可数

**定义 1.3.1** 集合 $E$ 称为可数的 (或至多可数的), 如果存在 $E$ 到 $\mathbb{N}$ 的单射. 否则称为不可数集.

有限集, 数 (序) 列是可数集. 可数集的子集是可数集.

**引理 1.3.1** 存在 $X$ 到 $Y$ 的单射当且仅当存在 $Y$ 到 $X$ 的满射.

- 若 $f: X \longmapsto Y$ 单 , 任取 $x_0 \in X$, 则

$$g(y) \longmapsto \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in f(X), \\ x_0, & y \in Y \backslash f(X), \end{cases}$$

是 $Y$ 到 $X$ 的满射. 若 $g: Y \longmapsto X$ 满, 对 $\forall x \in X$, $g^{-1}(x)$ 为非空集, 且对不同的 $x$ 值互不相交, 任取 $g^{-1}(x)$ 中一员记为 $f(x)$, 则 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 的单射.

**定理 1.3.2** (1) 若 $X, Y$ 可数, 那么 $X \times Y$ 可数.
(2) 若 $A$ 为可数集, 对任意 $\alpha \in A$, $X_\alpha$ 可数. 那么 $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 可数.

■ (1) 只需说明 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可数集, 而 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的点 $(i, j)$ 可以先按坐标和大小排列, 坐标和相等的点则按照 $j$ 的递增次序排列,

$$\begin{array}{lllll}
(1,1) & & & & \\
(2,1) & (1,2) & & & \\
(3,1) & (2,2) & (1,3) & & \\
(4,1) & (3,2) & (2,3) & (1,4) & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

这便给出到 $\mathbb{N}$ 的一个单射.

(2) 令 $f_\alpha$ 为 $\mathbb{N}$ 到 $X_\alpha$ 的满射, 则

$$(\alpha, n) \in A \times \mathbb{N} \longmapsto f_\alpha(n) \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$$

为满射, 从而存在 $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 到 $A \times \mathbb{N}$ 的单射, 因此 $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 可数.

**定理 1.3.3** $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

- $\mathbb{Z}$ 可数, 因为它能写成 $\{\ldots, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. 令

$$f : (i, j) \in \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longmapsto \begin{cases} \frac{i}{j}, & j \neq 0; \\ 0, & j = 0. \end{cases}$$

则 $f$ 定义了一个从 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的满射, 因而 $\mathbb{Q}$ 可数.

**定理 1.3.4** $\mathbb{R}$ 上的单调函数间断点可数.

■ 不妨设 $f$ 单调增, 故仅有一类间断点. 若 $x$ 为间断点, 记 $J_x = (f(x-), f(x+))$. 那么 $J_x$ 非空, 对 $x \neq x'$, $J_{x'}$ 与 $J_x$ 不相交. 由于每个 $J_x$ 含有一个有理数, 所以这样的 $J_x$ 有至多可数个, 从而间断点可数. ///

经过适当准备后, 我们将会引入完全集, 并证明完全集都是不可数的.

# 1.4　$\mathbb{R}^n$ 中的距离

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ , $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ,

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

定义

$$|x| = \sqrt{x \cdot x},$$

那么 $|\cdot|$ 满足

- $|x| \geqslant 0$, $|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$
- $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$ , $\alpha \in \mathbb{R}$
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ （三角不等式）

三角不等式等价于 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|x \cdot y| \leqslant |x|\,|y|\,,$$

这等价于

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

若 $x = 0$ 或 $y = 0$, 不等式自然成立. 不妨设 $|x| > 0$, $|y| > 0$. 由于

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}x_k^2 + \frac{1}{2}y_k^2\right) = \frac{1}{2}\,|x|^2 + \frac{1}{2}\,|y|^2\,.$$

若 $|x| = |y| = 1$, Cauchy-Schwarz 不等式显然成立。否则令

$$x' = \frac{x}{|x|},\ y' = \frac{y}{|y|},$$

并对 $x', y'$ 运用已有结论.

令 $d(x,y) = |x-y|$, 那么

- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \geqslant 0$, $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$
- $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$ , $\forall z$（三角不等式）

**定义 1.4.1** 满足上述三条的函数 $(x,y) \longmapsto d(x,y)$ 称为距离.

从 $|\cdot|$ 得到距离便是我们通常说的欧式距离. 有了距离就能定义极限与收敛.

若 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为实数列, 上极限和下极限定义为

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \inf_{j\geqslant 1} \sup_{k\geqslant j} a_k = \lim_{j\to\infty} \sup_{k\geqslant j} a_k,$$

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = \sup_{j\geqslant 1}\inf_{k\geqslant j} a_k = \lim_{j\to\infty}\inf_{k\geqslant j} a_k.$$

容易看出

$$-\infty \leqslant \liminf_{k\to\infty} a_k \leqslant \limsup_{k\to\infty} a_k \leqslant \infty.$$

**定理 1.4.1** 序列的上下极限分别是序列的最大和最小极限点, 具体而言:

(1) $b = \limsup_{k\to\infty} a_k$ 当且仅当存在子列收敛到 $b$, 且对 $b' > b$, 存在 $k_0$, 当 $k > k_0$ 时 $a_k < b'$;

(2) $c = \liminf_{k\to\infty} a_k$ 当且仅当存在子列收敛到 $c$, 且对 $c' < c$, 存在 $k_0$, 当 $k > k_0$ 时 $a_k > c'$;

■ (2) 可以从 (1) 导出, 只证 (1). 令 $b_j = \sup_{k \geqslant j} a_k$, 那么 $b_j$ 为递减列, $b = \lim_{j \to \infty} b_j$. 不妨设 $b$ 为有限实数. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $j_0$ 使得, 只要 $j \geqslant j_0$ 那么

$$|b_j - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对 $j \geqslant j_0$ 又存在 $a_{k_j}$ 使得

$$\left|a_{k_j} - b_j\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

放在一起就有

$$\left|a_{k_j} - b\right| < \varepsilon.$$

因此子列 $\left\{a_{k_j}\right\}_j$ 收敛到 $b$. 若 $b' > b$, 取 $\varepsilon = b' - b$, 那么

$$|b_{j_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此对 $k \geqslant j_0$,

$$a_k \leqslant b_{j_0} < b + \frac{\varepsilon}{2} < b'.$$

有了距离, 自然还能考虑集合的直径,

$$diam\,(E) = \sup\{|x-y| : x, y \in E\}\,,$$

集合之间的距离,

$$d\,(E_1, E_2) = \inf\{|x-y| : x \in E_1, y \in E_2\}\,.$$

# 1.5 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 闭集, $G_\delta$ 集, $F_\sigma$ 集

## 开集闭集

**定义 1.5.1** 令 $x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 称

$$B(x, \delta) = \{y : |y - x| < \delta\}$$

以 $x$ 为中心 $\delta$ 为半径的开球.

**定义 1.5.2** 令 $E \subset \mathbb{R}^n$. $x \in E$ 称为内点, 如果存在开球 $B(x, \delta)$ 包含于 $E$. 集合 $E$ 的内点全体称为 $E$ 的内部, 记为 $int(E)$. 集合 $E$ 称为开集, 如果 $E = int(E)$, 即每个点均为内点.

约定: $\varnothing$ 为开集.

**定义 1.5.3** 集合 $E$ 称为闭集, 如果 $E^c$ 是开集.