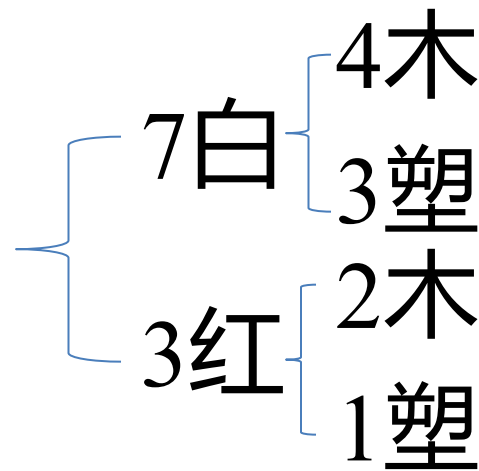
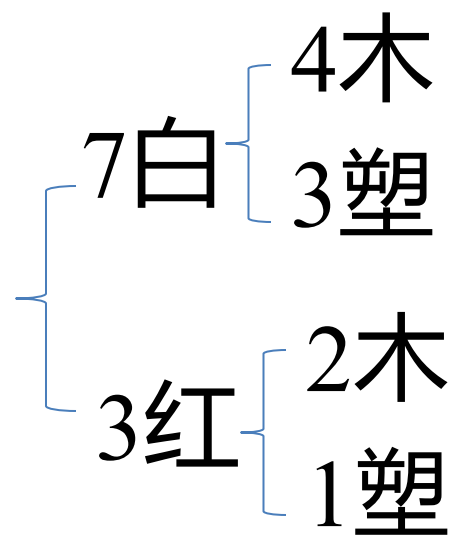


## §1.3 条件概率与乘法公式

**引例** 袋中有7只白球，3只红球；白球中有4只木球，3只塑料球；红球中有2只木球，1只塑料球.



现从袋中任取1球，假设每个球被取到的可能性相同. 若已知取到的球是白球，问它是木球的概率是多少？

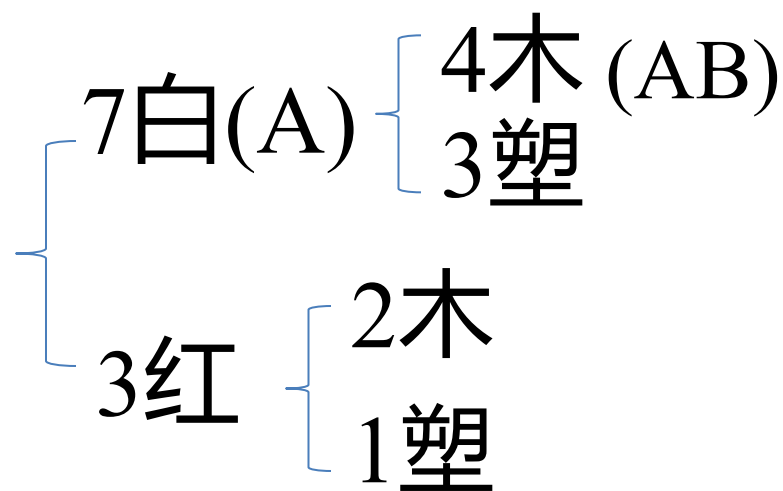


设  $A$  表示任取一球，取得白球；  
 $B$  表示任取一球，取得木球

所求的概率称为在事件  $A$  发生的条件下事件  $B$  发生的条件概率。记为

$$P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{4}{7}$$



$$= \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{\cancel{n_{AB}} / n}{\cancel{n_A} / n}$$

$$= \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(B | A) = \frac{4}{7} = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{\frac{n_{AB}}{n_{\Omega}}}{\frac{n_A}{n_{\Omega}}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

**定义** 设 $A$ 、 $B$ 为两事件,  $P(A) > 0$ , 则称  $\frac{P(AB)}{P(A)}$

为事件  $A$  发生的条件下事件  $B$  发生的条件概率,

记为  $P(B|A)$

条件概率也是概率，它符合概率的定义，具有概率的性质：

□ 非负性

$$P(B|A) \geq 0$$

□ 规范性

$$P(\Omega|A) = 1$$

□ 可列可加性

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

其他性质：

$$P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A)$$

$$P(\overline{B} | A) = 1 - P(B | A)$$

$$P(B_1 - B_2 | A) = P(B_1 | A) - P(B_1 B_2 | A)$$

## 乘法公式

将  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  变形, 即得

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0)$$

称为乘法公式

推广

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \\ \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

## 例1

已知某厂生产的灯泡能用到1000小时的概率为0.8，能用到1500小时的概率为0.4，求已用到1000小时的灯泡能用到1500小时的概率

**解** 令  $A$  灯泡能用到1000小时  
 $B$  灯泡能用到1500小时

所求概率为

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

$B \subset A$

**例2** 一盒中装有5个产品，其中有3个一等品，2个二等品，从中不放回地取产品，每次1个，

5个产品  $\left\{ \begin{array}{l} 3\text{个一等} \\ 2\text{个二等} \end{array} \right.$

- 求：
- (1) 取两次，两次都取得一等品的概率
  - (2) 取两次，第二次取得一等品的概率
  - (3) 取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率
  - (4) 取三次，第三次才取得一等品的概率

5个产品  $\left\{ \begin{array}{l} 3\text{个一等} \\ 2\text{个二等} \end{array} \right.$

**解** 令  $A_i$  为第  $i$  次取到一等品

(1) 取两次，两次都取得一等品的概率

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

(2) 取两次，第二次取得一等品的概率

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(\overline{A_1} A_2 \cup A_1 A_2) = P(\overline{A_1} A_2) + P(A_1 A_2) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$



(3) 取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 | A_2) &= \frac{P(\bar{A}_1 A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2) - P(A_1 A_2)}{P(A_2)} \\ &= 1 - \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4) 取三次，第三次才取得一等品的概率

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) &= P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

**例3** 某人外出旅游两天，需要知道两天的天气情况，据天气预报，第一天下雨的概率为0.6，第二天下雨的概率为0.3，两天都下雨的概率为0.1. 求 第一天下雨时，第二天不下雨的概率

**解** 设 $A_1, A_2$  分别表示第一天下雨与第二天下雨

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_2 | A_1) &= \frac{P(A_1 \bar{A}_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1) - P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \\ &= \frac{0.6 - 0.1}{0.6} = \frac{5}{6} > P(\bar{A}_2) = 0.7 \end{aligned}$$

**例4** 为了防止意外，矿井内同时装有两种报警设备  $A$  与  $B$ ，已知设备  $A$  单独使用时有效的概率为0.92，设备  $B$  单独使用时有效的概率为0.93，在设备  $A$  失效的条件下，设备  $B$  有效的概率为0.85，求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率。

设事件  $A, B$  分别表示设备  $A, B$  有效

则已知  $P(A) = 0.92$        $P(B) = 0.93$

$$P(B | \bar{A}) = 0.85$$

求  $P(A \cup B)$

已知  $P(A) = 0.92$   $P(B) = 0.93$

$$P(B | \bar{A}) = 0.85$$

求  $P(A \cup B)$

**解** 由  $P(B | \bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$

即  $0.85 = \frac{0.93 - P(AB)}{0.08}$

$\rightarrow P(AB) = 0.862$

故  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$   
 $= 0.92 + 0.93 - 0.862 = 0.988$

已知  $P(A) = 0.92$   $P(B) = 0.93$

$$P(B | \bar{A}) = 0.85$$

求  $P(A \cup B)$

## 解法二

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cup B}) &= P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B} | \bar{A}) \\ &= P(\bar{A}) \cdot [1 - P(B | \bar{A})] \\ &= 0.08 \cdot [1 - 0.85] = 0.012 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = 0.988$$