

第十三章 马尔可夫链

马尔可夫过程是一类特殊的随机过程，
马尔可夫链是离散状态的马尔可夫过程

例子：

甲乙两人游戏，每一局甲赢1元的概率为 p ，
输1元的概率为 $q=1-p$ ，假设一开始甲带了0元
钱，令 X_n 表示n局后甲所拥有的钱数，计算：

$$P\{X_5 = 3 \mid X_1 = 1, X_3 = 1, X_4 = 2\},$$

$$P\{X_5 = 3 \mid X_4 = 2\}$$

它们是否相等

解：

$$\begin{aligned} & P\{X_5 = 3 \mid X_1 = 1, X_3 = 1, X_4 = 2\} \\ &= P\{X_5 - X_4 = 1 \mid X_1 = 1, X_3 = 1, X_4 = 2\} \\ &= P\{X_5 - X_4 = 1\} = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P\{X_5 = 3 \mid X_4 = 2\} \\ &= P\{X_5 - X_4 = 1 \mid X_4 = 2\} \\ &= P\{X_5 - X_4 = 1\} = p \end{aligned}$$

$$\therefore P\{X_5 = 3 \mid X_1 = 1, X_3 = 1, X_4 = 2\} = P\{X_5 = 3 \mid X_4 = 2\}$$

更一般的，

$$\forall k \geq 1, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1},$$

对任意状态 $j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_k, j_{k+1}$

$$P\{S_{t_{k+1}} = j_{k+1} \mid S_{t_1} = j_1, \dots, S_{t_{k-1}} = j_{k-1}, S_{t_k} = j_k\}$$

$$= P\{S_{t_{k+1}} = j_{k+1} \mid S_{t_k} = j_k\}$$

Markov性

Markov性的直观含义：

令 $A = \{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{k-1}} = j_{k-1}\}$ 过去

$B = \{X_{t_k} = j_k\}$ 现在

$C = \{X_{t_{k+1}} = j_{k+1}\}$ 将来

Markov性：

$$P(C | AB) = P(C | B)$$

即：已知到现在为止的所有信息来预测将来，则只与现在状态有关，与过去状态无关。

第一节: 马尔可夫链的定义

一. 定义
设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的状态空间 S 是有限集或可列集, 对任意正整数 n , 对于 T 内任意 $n+1$ 个参数 $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ 和 S 内任意 $n+1$ 个状态 $j_1, j_2, \dots, j_n, j_{n+1}$,
如果条件概率

$$\begin{aligned} P\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} \mid X(t_1) = j_1, X(t_2) = j_2, \dots, X(t_n) = j_n\} \\ = P\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} \mid X(t_n) = j_n\} \end{aligned}$$

恒成立, 则称此过程为马尔可夫链.
称为马尔可夫性, 或称无后效性.

马氏性的直观含义可以解释如下：

将 t_n 看作为现在时刻,那末 t_1 、 t_2 、 \cdots 、 t_{n-1} 就是过去时刻,而 t_{n+1} 则是将来时刻.

于是,马氏性是说,当已知系统现时情况的条件下,系统将来的发展变化与系统的过去无关.可以称之为无后效性.

许多实际问题都具有这种无后效性.

例如 生物基因遗传从这一代到下一代的转移中仅依赖于这一代而与以往各代无关.

二.马尔可夫链的分类

状态空间S是离散的(有限集或可列集),
参数集T可为离散或连续的两类.

三：离散参数马尔可夫链

(1) 转移概率

定义 在离散参数马尔可夫链 $\{X(t), t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$
中,条件概率

$$P\{X(t_{m+1}) = j | X(t_m) = i\} = p_{ij}(t_m)$$

称为 $X(t)$ 在时刻(参数) t_m 由状态 i 一步转移
到状态 j 的一步转移概率,简称转移概率.

条件概率

$$P\{X(t_{m+n}) = j \mid X(t_m) = i\} = p_{ij}^{(n)}(t_m)$$

称为 $X(t)$ 在时刻(参数) t_m 由状态 i 经 n 步转移到状态 j 的 n 步转移概率, 简称**转移概率**.

(2) 转移概率的性质: 对于状态空间 S 内的任意两个状态 i 和 j , 恒有

$$(1) \quad p_{ij}^{(n)}(t_m) \geq 0$$

$$(2) \quad \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}(t_m) = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(2) \quad \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}(t_m) = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}(t_m) = \sum_{j \in S} P\{X(t_{m+n}) = j \mid X(t_m) = i\}$$

$$= \frac{\sum_{j \in S} P\{X(t_{m+n}) = j, X(t_m) = i\}}{P\{X(t_m) = i\}}$$

$$= \frac{P\{(\{\sum_{j \in S} X(t_{m+n}) = j\}) \{X(t_m) = i\}\}}{P\{X(t_m) = i\}}$$

$$= \frac{P\{X(t_m) = i\}}{P\{X(t_m) = i\}}$$

$$= 1$$

四. 离散参数齐次马尔可夫链

定义 在离散参数马尔可夫链 $\{X(t), t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$

中,如果一步转移概率 $P_{ij}(t_m)$ 不依赖于参数 t_m ,
即对任意两个不等的参数 t_m 和 t_k , $m \neq k$ 有

$$P\{X(t_{m+1}) = j | X(t_m) = i\} = p_{ij}(t_m)$$

$$= P\{X(t_{k+1}) = j | X(t_k) = i\} = p_{ij}(t_k) = p_{ij}$$

则称此马尔可夫链具有齐次性或时齐性,
称 $X(t)$ 为离散参数齐次马尔可夫链.

例1：Bernoulli序列是离散参数齐次马尔可夫链.

验证：在Bernoulli序列 $\{X_n, n=1,2, 3\cdots,\}$ 中，
对任意正整数 n ， $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ ， X_{t_1} 、
 X_{t_2} 、……、 $X_{t_{n+1}}$ 相互独立，

$$P\{X_n = k\} = p^k (1-p)^{1-k} \quad k = 0,1.$$

故对 $j_k = 0, 1 (k=1, 2, \cdots, n+1)$ ，有

$$\begin{aligned} P\{X_{t_{n+1}} = j_{n+1} \mid X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \cdots, X_{t_n} = j_n\} \\ = P\{X_{t_{n+1}} = j_{n+1}\} \\ = P\{X_{t_{n+1}} = j_{n+1} \mid X_{t_n} = j_n\} \end{aligned}$$

即满足马尔可夫性,且

$$P\{X_{t_{n+1}} = j_{n+1} \mid X_{t_n} = j_n\}$$

$$= P\{X_{t_{n+1}} = j_{n+1}\} = \begin{cases} p, & j_{n+1} = 1 \\ 1 - p, & j_{n+1} = 0 \end{cases}$$

不依赖于参数 t_n ,满足齐次性.

故Bernoulli序列是离散参数齐次马尔可夫链.

例2:爱伦菲斯特(Ehrenfest)模型

一容器中有 $2a$ 个粒子在作随机运动.设想有一实际不存在的界面把容器分为左右容积相等的两部分.当右边粒子多于左边时,粒子向左边运动的概率要大一些,大出部分与两边粒子的差数成正比;反之,当右边粒子少于左边时,粒子向右边运动的概率要大一些.

以 X_n 表示n次变化后,右边粒子数与均分数a之差,则状态空间 $S = \{-a, -a+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, a-1, a\}$,

以 $j > 0$ 为例, $X_n = j$ 意思是,右边粒子数为 $a+j$,此时, $P_{j,j-1}$ 意思是右边减少一个粒子,即粒子向左运动。

转移概率,由

$$\begin{cases} p_{j,j-1} - p_{j,j+1} = 2j \cdot k \\ p_{j,j-1} + p_{j,j+1} = 1 \\ p_{a,a-1} - p_{a,a+1} = 2a \cdot k = 1 \end{cases}$$

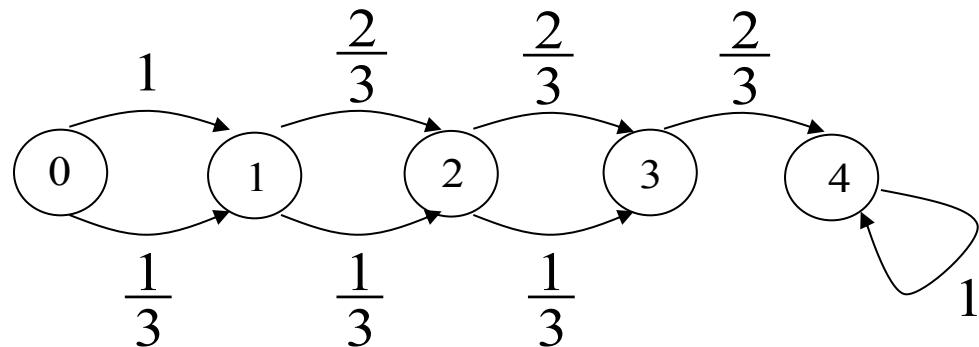
解得

$$\begin{cases} p_{j,j-1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{j}{a}\right), \\ p_{j,j+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{j}{a}\right), j \in S, j \neq \pm a \\ p_{a,a-1} = p_{-a,-a+1} = 1 \end{cases}$$

则 $\{X_n, n=1,2, 3\cdots,\}$ 是齐次马尔可夫链.

例：一维随机游动

一个质点在直线上的五个位置:0,1,2,3,4之上随机游动.当它处在位置1或2或3时,以 $1/3$ 的概率向左移动一步而以 $2/3$ 的概率向右移动一步;当它到达位置0时,以概率1返回位置1;当它到达位置4时以概率1停留在该位置上(称位置0为反射壁,称位置4为吸收壁).



称为状态转移示意图：

第二节：参数离散的齐次马尔可夫链

一、转移概率矩阵

设 $\{X_t, t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ 是齐次马尔可夫链，由于状态空间 S 是离散的(有限集或可列集)，不妨设其状态空间

$$S=\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

则对内的任意两个状态 i 和 j , 由转移概率 p_{ij} 排序一个矩阵

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

称为(一步)转移概率矩阵

$$p_{ij} = P\{X(t_{m+1}) = j \mid X(t_m) = i\}$$

转移概率矩阵的性质：

(1) $p_{ij} \geq 0$,即元素均非负;

(2) $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$,即每行和为1.

称为随机矩阵.

例1 Bernoulli序列的状态空间 $S=\{0,1\}$,转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_{00} &= P\{X(t_{m+1}) = 0 \mid X(t_m) = 0\} \\ &= P\{X(t_{m+1}) = 0\} = q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{01} &= P\{X(t_{m+1}) = 1 \mid X(t_m) = 0\} \\ &= P\{X(t_{m+1}) = 1\} = p \end{aligned}$$

同理

$$p_{10} = q \quad p_{11} = p$$

或者：

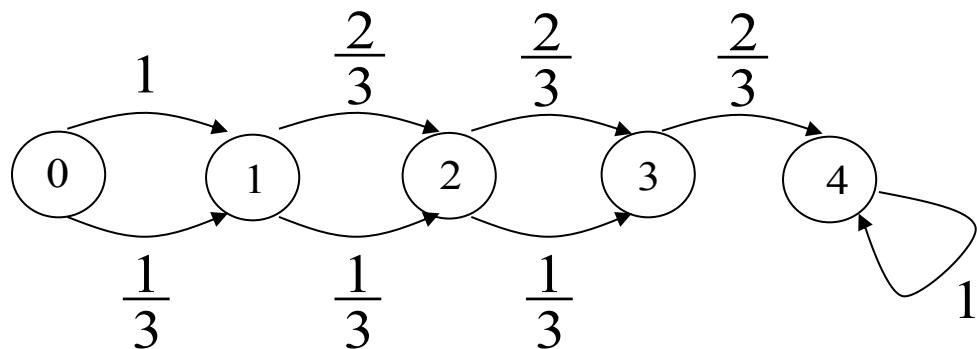
$$p_{ij} = P\{X(t_{m+1}) = j \mid X(t_m) = i\}$$

$$= P\{X(t_{m+1}) = j\} = \begin{cases} q, & j = 0 \\ p, & j = 1 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

例2：一维随机游动

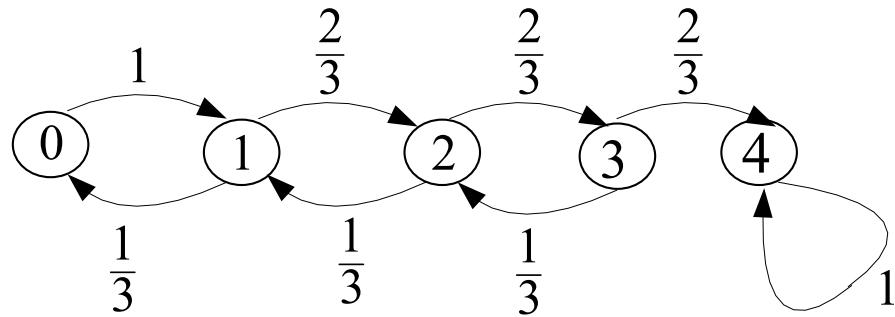
一个质点在直线上的五个位置:0,1,2,3,4之上随机游动.当它处在位置1或2或3时,以 $1/3$ 的概率向左移动一步而以 $2/3$ 的概率向右移动一步;当它到达位置0时,以概率1返回位置1;当它到达位置4时以概率1停留在该位置上(称位置0为反射壁,称位置4为吸收壁).



称为状态转移示意图：

由图可知

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$



其中 , $p_{01} = 1$

$$p_{10} = \frac{1}{3} \quad p_{12} = \frac{2}{3}$$

$$p_{21} = \frac{1}{3} \quad p_{23} = \frac{2}{3}$$

$$p_{32} = \frac{1}{3} \quad p_{34} = \frac{2}{3}$$

$$p_{44} = 1$$

故 , $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例3（成功流）

设在一串贝努里试验中,每次试验成功的概率为p,

令 $X_n = \begin{cases} 0, & \text{第 } n \text{ 次试验失败} \\ k, & \text{第 } n \text{ 次试验接连第 } k \text{ 次成功}, 1 \leq k \leq n \end{cases}$

则 $\{X_n, n=1,2, 3\cdots,\}$ 是齐次马尔可夫链.求转移矩阵。

其状态空间 $S=\{0,1,2, \cdots, k, \cdots\}$

第n次试验接连第k次成功，即：第n次试验成功且为连续的第k次成功

$$P\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = i\} = P\{X_{n+1} = 0\} = q = 1 - p$$

$$P\{X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i\} = P\{\text{第}n+1\text{次试验时成功}\} = p$$

j≥i+2或0<j≤i时 $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = 0$

即：

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \begin{cases} 0, & j \geq i+2 \\ p, & j = i+1 \\ 0, & 0 < j \leq i \\ q, & j = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

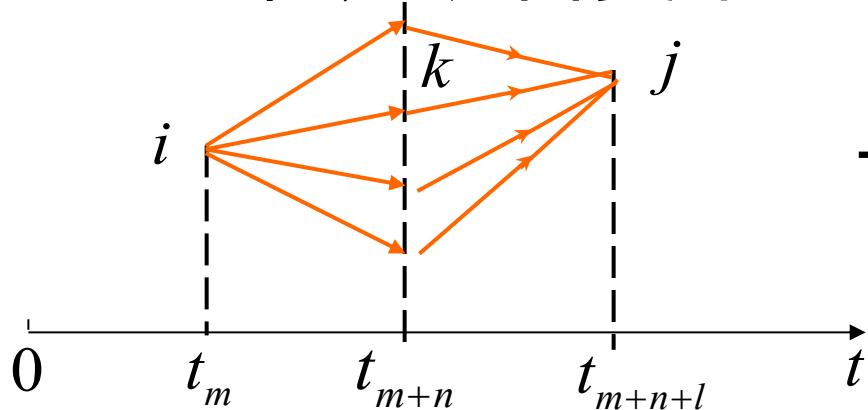
于是转移概率矩阵

二：切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

定理一 设 $\{X(t), t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ 是马尔可夫链, 则有

$$P_{ij}^{(n+l)}(t_m) = \sum_k P_{ik}^{(n)}(t_m) P_{kj}^{(l)}(t_{m+n})$$

称为切普曼-柯尔莫哥洛夫方程.



可写为矩阵形式：

$$P^{(n+l)}(t_m) = P^{(n)}(t_m) P^{(l)}(t_{m+n})$$

证明：

$$p_{ij}^{(n+l)}(t_m) = P\{X(t_{m+n+l}) = j \mid X(t_m) = i\}$$

全概率公式

$$\begin{aligned} &= \sum_k P\{X(t_{m+n}) = k \mid X(t_m) = i\} \\ &\quad \cdot P\{X(t_{m+n+l}) = j \mid X(t_m) = i, X(t_{m+n}) = k\} \end{aligned}$$

马尔可夫性

$$\begin{aligned} &= \sum_k P\{X(t_{m+n}) = k \mid X(t_m) = i\} \\ &\quad \cdot P\{X(t_{m+n+l}) = j \mid X(t_{m+n}) = k\} \end{aligned}$$

$$= \sum_k p_{ik}^{(n)}(t_m) p_{kj}^{(l)}(t_{m+n})$$

证毕！

如果马尔可夫链具有齐次性,那么切普曼-柯尔莫哥洛夫方程化为

$$p_{ij}^{(n+l)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(l)},$$

可写为矩阵形式：

$$P^{(n+l)} = P^{(n)} P^{(l)}$$

当n=1,L=1时 ,得到 :

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}$$

进一步改写为矩阵形式

$$P^{(2)} = P^2$$

其中 $P^{(2)} = (P_{ij}^{(2)})$ 是两步转移概率矩阵, P 是一步转移概率矩阵

用数学归纳法可得：

$$P^{(n)} = P^n \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

即：n步转移概率矩阵 $P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$ 等于一步
转移概率矩阵 P 的 n 次幂.

因此也常把 P^n 作为 n 步转移概率矩阵的符号.

例4：在本节例2中,求 $p_{00}^{(2)}$ 和 $p_{31}^{(2)}$.

解

由 $p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}$ 得

$$p_{00}^{(2)} = \sum_{k=0}^4 p_{0k} p_{k0} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{31}^{(2)} = \sum_{k=0}^4 p_{3k} p_{k1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{或 } P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)}) = P^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例5 传输数字0和1的通讯系统,每个数字的传输需经过若干步骤,设每步传输正确的概率为 $9/10$,传输错误的概率为 $1/10$,

- (1)问:数字1经三步传输出1的概率是多少?
- (2)若某步传输出数字1,那么又接连两步都传输出1的概率是多少?

解 以 X_n 表示第n步传输出的数字,则 $\{X_n, n=0,1,2, \dots\}$ 是一齐次马尔可夫链, X_0 是初始状态,状态空间 $S=\{0,1\}$,

一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 P^{(3)} &= P^3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{82}{100} & \frac{18}{100} \\ \frac{18}{100} & \frac{82}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{756}{1000} & \frac{244}{1000} \\ \frac{244}{1000} & \frac{756}{1000} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$P_{11}^{(3)} = \frac{756}{1000}$$

$$(2) \quad P\{X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1 \mid X_n = 1\}$$

$$= P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\} \cdot P\{X_{n+2} = 1 \mid X_{n+1} = 1, X_n = 1\}$$

$$= P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\} \cdot P\{X_{n+2} = 1 \mid X_{n+1} = 1\}$$

$$= p_{11} \cdot p_{11}$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0.81$$

三.有限维概率分布

马尔可夫链 $\{X(t), t = t_0, t_0, t_0, \dots\}$ 在初始时刻 t_0 的概率分布：

$$P_j(t_0) = P\{X(t_0)=j\}, j=0,1,2, \dots$$

称为初始分布.

初始分布与转移概率完全地确定了马尔可夫链的任何有限维分布.

定理：

设齐次马尔可夫链 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 的状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots, i, \dots\}$, 则对任意 n 个非负整数 $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ 和 S 内的任意 n 个状态 j_1, j_2, \dots, j_n , 有

$$P\{X(k_1) = j_1, X(k_2) = j_2, \dots, X(k_n) = j_n\}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(0) p_{ij_1}^{(k_1)} \cdot p_{j_1 j_2}^{(k_2 - k_1)} \cdots p_{j_{n-1} j_n}^{(k_n - k_{n-1})}$$

证 由概率的乘法公式和马尔可夫性

$$P\{X(k_1) = j_1, X(k_2) = j_2, \dots, X(k_n) = j_n\}$$

$$= P\{X(k_1) = j_1\} \cdot P\{X(k_2) = j_2 \mid X(k_1) = j_1\}$$

$$\cdot P\{X(k_3) = j_3 \mid X(k_1) = j_1, X(k_2) = j_2\}$$

.....

$$\cdot P\{X(k_n) = j_n \mid X(k_1) = j_1, X(k_2) = j_2, \dots, X(k_{n-1}) = j_{n-1}\}$$

$$= P\{X(k_1) = j_1\} \cdot P\{X(k_2) = j_2 \mid X(k_1) = j_1\}$$

$$\cdot P\{X(k_3) = j_3 \mid X(k_2) = j_2\}$$

.....

$$\cdot P\{X(k_n) = j_n \mid X(k_{n-1}) = j_{n-1}\}$$

$$= P\{X(k_1) = j_1\} \cdot p_{j_1 j_2}^{(k_2 - k_1)} p_{j_2 j_3}^{(k_3 - k_2)} \cdots p_{j_{n-1} j_n}^{(k_n - k_{n-1})}$$

由全概率公式,上式等号右端第一因式化为

$$\begin{aligned} P\{X(k_1) = j_1\} &= \sum_{i=0}^{+\infty} P\{X(0) = i\} \cdot P\{X(k_1) = j_1 \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(0) p_{ij_1}^{(k_1)} \end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned} &P\{X(k_1) = j_1, X(k_2) = j_2, \dots, X(k_n) = j_n\} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{+\infty} p_i(0) p_{ij_1}^{(k_1)} \right] p_{j_1 j_2}^{(k_2 - k_1)} p_{j_2 j_3}^{(k_3 - k_2)} \cdots p_{j_{n-1} j_n}^{(k_n - k_{n-1})} \end{aligned}$$

证毕

例6 在本节例5中,设初始时输入0和1的概率分别为 $1/3$ 和 $2/3$,求第2、3、6步都传输出1的概率.

解 由题设知

$$p_0(0) = \frac{1}{3} \quad p_1(0) = \frac{2}{3}$$

故 $P\{X_2 = 1, X_3 = 1, X_6 = 1\}$

$$= \left[\sum_{i=0,1} p_i(0) p_{i1}^{(2)} \right] p_{11}^{(1)} p_{11}^{(3)}$$

$$= (p_0(0) p_{01}^{(2)} + p_1(0) p_{11}^{(2)}) p_{11} p_{11}^{(3)}$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{756}{1000} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{18}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{82}{100} \right) = 0.4128$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{82}{100} & \frac{18}{100} \\ \frac{18}{100} & \frac{82}{100} \end{pmatrix}$$

马尔可夫链在任何时刻 t_n 的一维概率分布

$$p_j(t_n) = P\{X(t_n) = j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

又称为**绝对概率**,或称为**瞬时概率**.

由全概率公式得

$$p_j(t_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(t_{n-1}) p_{ij}(t_{n-1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

如果马尔可夫链具有齐次性,那么上式化为

$$p_j(t_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(t_{n-1}) p_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

由上式递推得到

$$p_j(t_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(t_0) p_{ij}^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

式中 t_0 是初始时刻.

上式表明: 齐次马尔可夫链在时刻 t_n 的瞬时概率完全地由初始分布和 n 步转移概率所确定.

写成向量形式得

$$\begin{aligned} & (p_0(t_n), p_1(t_n), \dots, p_j(t_n), \dots) \\ & = (p_0(t_0), p_1(t_0), \dots, p_j(t_0), \dots) P^{(n)} \end{aligned}$$

n 步转移概率矩阵 $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) = P^n$

例7

本节例2中,设质点在初始时刻 t_0 恰处在状态2,试求在 t_2 时刻,质点处在各个状态的概率.

即 : 已知 :

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(p_0(t_0), p_1(t_0), p_2(t_0), p_3(t_0), p_4(t_0)) = (0, 0, 1, 0, 0)$$

故：

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(p_0(t_2), p_1(t_2), p_2(t_2), p_3(t_2), p_4(t_2))$$

$$= (p_0(t_0), p_1(t_0), p_2(t_0), p_3(t_0), p_4(t_0)) \cdot P^{(2)}$$

$$=(0,0,1,0,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{9}, 0, \frac{4}{9}, 0, \frac{4}{9}\right)$$

或者(解2) $p_2(t_0) = 1$ $p_0(t_0) = p_1(t_0) = p_3(t_0) = p_4(t_0) = 0$

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_0(t_2) = \sum_{i=0}^4 p_i(t_0) p_{i0}^{(2)} = 1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$p_1(t_2) = \sum_{i=0}^4 p_i(t_0) p_{i1}^{(2)} = 1 \times 0 = 0$$

$$p_2(t_2) = \sum_{i=0}^4 p_i(t_0) p_{i2}^{(2)} = 1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$p_3(t_2) = \sum_{i=0}^4 p_i(t_0) p_{i3}^{(2)} = 1 \times 0 = 0$$

$$p_4(t_2) = \sum_{i=0}^4 p_i(t_0) p_{i4}^{(2)} = 1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

四. 平稳分布

对于齐次马尔可夫链

$$p_j(t_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(t_{n-1}) p_{ij}$$

如果一维分布 $p_j(t_n)$ 与 t_n 无关, 即:

$$\begin{aligned} & (p_0(t_{n-1}), p_1(t_{n-1}), p_2(t_{n-1}), \dots, p_j(t_{n-1}), \dots) \\ &= (p_0(t_n), p_1(t_n), p_2(t_n), \dots, p_j(t_n), \dots) \\ &= (p_0, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots) \end{aligned}$$

此时: $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots) = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots) \cdot P$

即:
$$p_j = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i p_{ij}$$

于是有

定义4 对于齐次马尔可夫链 $\{X(t), t = t_0, t_1, t_2, \dots\}$, 如果存在概率分布 $p_j, j=0,1,2, \dots$ 满足

$$p_j = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i p_{ij}, \quad j = 0,1,2,\dots$$

则称 $p_j, j=0,1,2, \dots$ 为平稳分布,

称 $X(t)$ 具有平稳性, 是平稳齐次马尔可夫链.

此时：

$$\begin{aligned}& \left(p_0(t_{n-1}), p_1(t_{n-1}), p_2(t_{n-1}), \dots, p_j(t_{n-1}), \dots \right) \\&= \left(p_0(t_n), p_1(t_n), p_2(t_n), \dots, p_j(t_n), \dots \right) \\&= \left(p_0(t_{n-1}), p_1(t_{n-1}), p_2(t_{n-1}), \dots, p_j(t_{n-1}), \dots \right) \cdot P\end{aligned}$$

即：

$$(p_0, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots) = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots) \cdot P$$

另外有： $\sum_{j=0}^{+\infty} p_j = 1$

定理 如果齐次马尔可夫链 $\{X(t), t = t_0, t_1, t_2, \dots\}$,的初始分布

$$p_j(t_0) = P\{X(t_0) = j\}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

是一个平稳分布,则

$$p_j(t_n) = P\{X(t_n) = j\} = p_j(t_0), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

例8

设齐次马尔可夫链

$\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 的
转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

且初始概率分布为

$$p_j(0) = P\{X_0 = j\} = \frac{1}{3}, \quad j = 1, 2, 3$$

(1)求 $P\{X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3\}$

(2)求 $P\{X_2 = 3\}$

(3)求平稳分布

解 (1)

$$P\{X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3\}$$

$$= P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 2 \mid X_1 = 1\}P\{X_3 = 3 \mid X_2 = 2, X_1 = 1\}$$

$$= P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 2 \mid X_1 = 1\}P\{X_3 = 3 \mid X_2 = 2\}$$

$$= P\{X_1 = 1\} \cdot p_{12} \cdot p_{23}$$

$$= \sum_{j=1}^3 P\{X_0 = j\}P\{X_1 = 1 \mid X_0 = j\} \cdot p_{12} \cdot p_{23}$$

$$= p_{12} \cdot p_{23} \cdot \sum_{j=1}^3 P\{X_0 = j\}p_{j1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \right) = \frac{4}{81}$$

$$(2) \quad P\{X_2 = 3\}$$

$$= \sum_{j=1}^3 P\{X_0 = j\} P\{X_2 = 3 \mid X_0 = j\}$$

$$= \sum_{j=1}^3 P\{X_0 = j\} p_{j3}^{(2)}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{27}$$

(3) 平稳分布(P_1, P_2, P_3)满足

$$(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

即 : $p_1 = p_1 \frac{1}{3} + p_2 \frac{1}{3} + p_3 0$

解之得

$$p_2 = p_1 \frac{2}{3} + p_2 \frac{1}{3} + p_3 \frac{2}{3}$$

$$p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{2}{4}, p_3 = \frac{1}{4}$$

$$p_3 = p_1 0 + p_2 \frac{1}{3} + p_3 \frac{1}{3}$$

故平稳分布为

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4})$$

例9

带一个反射壁的一维随机游动,以 $X(t_n) = j$ 表示
在时刻 t_n 粒子处于 j 状态,状态空间

$$S = \{0, 1, 2, \dots, j, \dots\}$$

转移概率 $p_{00} = q, \quad p + q = 1$

$$p_{j,j+1} = p \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

$$p_{j,j-1} = q \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

求平稳分布 $\pi_j, j = 0, 1, 2, \dots$

解 根据题设条件，知 转移概率

转移概率矩阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$p_{00} = q,$
 $p_{j,j+1} = p$
 $p_{j,j-1} = q$

平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_j, \dots)$ 应满足

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j = 1 \end{cases}$$

即应满足

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} = q\pi_0 + q\pi_1, & (1) \\ \pi_j = \pi_{j-1} p_{j-1,j} + \pi_{j+1} p_{j+1,j} = p\pi_{j-1} + q\pi_{j+1}, & (2) \\ \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j = 1, & (3) \end{cases}$$

由(1)得 $\pi_1 = \frac{p}{q}\pi_0 \quad (4),$

由(2)得 $\pi_{j+1} - \pi_j = \frac{p}{q}(\pi_j - \pi_{j-1})$

$$= \dots = \left(\frac{p}{q}\right)^j (\pi_1 - \pi_0) = \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^j\right] \pi_0$$

$$\pi_j - \pi_1 = (\pi_j - \pi_{j-1}) + (\pi_{j-1} - \pi_{j-2}) + \dots + (\pi_2 - \pi_1) = \left[\left(\frac{p}{q}\right)^j - \left(\frac{p}{q}\right)\right] \pi_0$$

得到 $\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$

由(4),(5)得 $\sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0 = \pi_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} = 1$

当 $p/q < 1$ 时, 即当 $p < q$ 时, 解得 $\pi_0 = 1 - \frac{p}{q}$

代入(5)式得平稳分布 $\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \left(1 - \frac{p}{q}\right) \quad j = 0, 1, 2, \dots$

而当 $p \geq q$ 时, 不存在平稳分布.