概率论与数理统计

随机事件独立性(复习)

A, B独立: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

注意:

E, F 与独立 A, $E \subset F \Longrightarrow F \setminus E$ 与独立 A

$\forall E, F \Longrightarrow (F \setminus E) \cap A = (F \cap A) \setminus (E \cap A)$

随机变量独立性

$\{a < X < b\}, \{c < Y < d\}$相互独立, $\forall a, b, c, d$

$$\Longleftrightarrow$$

$\{a < X \leqslant b\}, \{c < Y \leqslant d\}$相互独立, $\forall a, b, c, d$

$$(x, y) = \bigcup_{n \geqslant 1}^{\infty} \left(x, y - \frac{1}{n}\right], (x, y] = \bigcap_{n \geqslant 1}^{\infty} \left(x, y + \frac{1}{n}\right)$$

同理 $\Longleftrightarrow$

$\{-\infty < X \leqslant b\}, \{-\infty < Y \leqslant d\}$相互独立, $\forall b, d$

随机变量独立性

★   "$\Longleftarrow$"亦可利用分布函数的性质

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d)$$
$$= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$
$$= F_X(b)F_Y(d) - F_X(a)F_Y(d) - F_X(b)F_Y(c) + F_X(a)F_Y(c)$$
$$= (F_X(b) - F_X(a))(F_Y(d) - F_Y(c))$$

独立性等价条件

$$X \sim F_X(x),\ Y \sim F_Y(y)$$
$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),\ \forall x,y$$

离散型：

$$X \in \{x_1, x_2, \cdots, \},\ Y \in \{y_1, y_2, \cdots, \}$$
$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j),\ \forall i,j$$

连续型：

$$X \sim p_X(x),\ Y \sim p_Y(y)$$
$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y),\ a.e.\ (x,y)$$

正态分布，边际与条件分布

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y-m}{\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}\right)^2\right]\right\}$$

$$m = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$