

概率统计及随机过程

马健

交作业：

参考书：

《概率统计与随机过程习题解集》
邢家省 编著
机械工业出版社

本课程分三个部分：

一、概率论：第1章—第6章

二、数理统计：第7章—第9章

三、随机过程：第10章—第12章

概率论研究对象：随机现象

概率(几率、或然率)： 随机事件出现的可能性的量度
probability

概率发展简史

16世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题；

17世纪中叶，法国数学家B. 帕斯卡、荷兰数学家C. 惠更斯 基于排列组合的方法，研究了较复杂的赌博问题，解决了“合理分配赌注问题”（即得分问题）。

而概率论的飞速发展则在17世纪微积分学说建立以后.

1933年前苏联数学家柯莫哥洛夫在他的《概率论基本概念》一书中首次提出概率的公理化定义。

数理统计研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所考察的问题作出推断或预测，直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议.

概率论是数理统计学的基础，数理统计学是概率论的一种应用.

概率统计的应用举例：

1. 股市行情
2. 天气预报
3. 国民经济统计
4. 系统可靠性
5. 统计物理

• • • • •

第一章 随机事件及其概率

确定性现象：在一定条件下,某种结果是否发生,事先完全可以预言;

如：向空中抛物体会向下落;

随机现象：

- 每次试验后出现的结果**有多个可能**
- 每次试验前不能预言出现什么结果

如：明天早上是否下雨;
甲乙两支足球队比赛，哪一个队将胜
明天的股市行情

§1.1 随机事件与样本空间

基本术语

试验：各种各样的科学试验或对某一事物的某种特性的观察。

随机试验：有如下特点的试验（用 E 表示）：

- ☐ 可在相同的条件下重复进行
- ☐ 试验的可能结果不止一个，但能明确所有可能的结果
- ☐ 试验前不能预知出现哪种结果

样本空间：随机试验 E 所有可能的结果组成的集合，记为 Ω 或者 S

样本点(基本事件)：一次随机试验的直接结果；常记为 ω ；是样本空间的元素

随机事件：是在随机试验中可能发生也可能不发生的事情；样本空间的子集，常记为 A, B, \dots

必然事件：所有样本点所组成的事件，每次试验必定发生的事件

不可能事件：每次试验必定不发生的事情，不包含任何样本点的事件

例1：给出一组随机试验及相应的样本空间

E_1 ：投一枚硬币，观察正面反面出现的情况

$$\Omega_1 = \{H, T\}$$

E_2 ：投一枚硬币3次，观察正面反面出现的情况

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, \\ HTT, THT, TTH, TTT\}$$

E_3 ：投一枚硬币3次，观察正面反面出现的次数

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}$$

E_4 : 投一颗骰子 , 观察向上一面出现的点数

$$\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

E_5 : 观察电话总机每天9:00~10:00接到的电话次数

$$\Omega_5 = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\} \longrightarrow \text{有限样本空间}$$

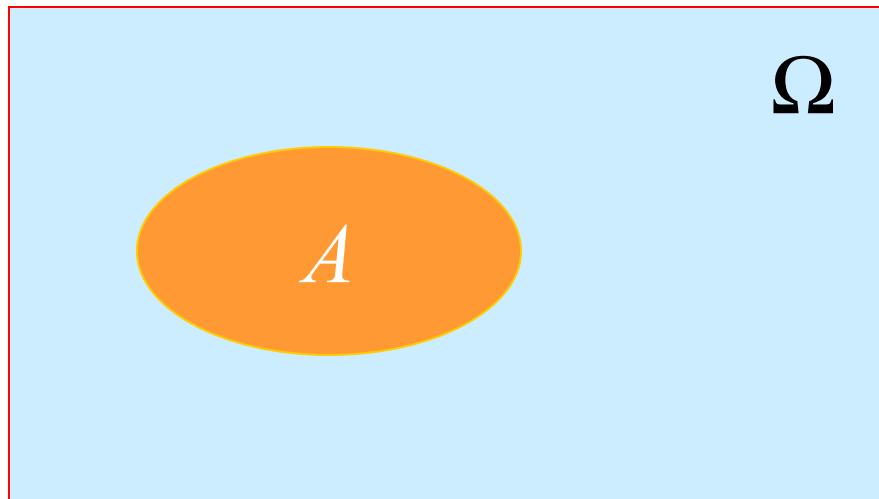
E_6 : 观察某地区每天的最高温度与最低温度

$$\Omega_6 = \{(x, y) \mid T_1 \leq x \leq y \leq T_2\} \longrightarrow \text{无限样本空间}$$

其中 T_1, T_2 分别是该地区的最低温度与最高温度

随机事件的关系和运算

Venn图

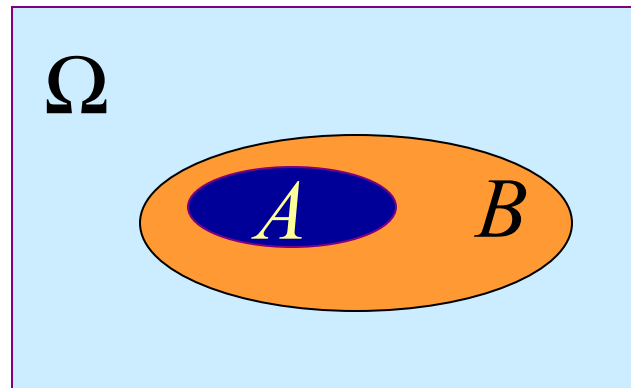


随机事件的关系和运算雷同于
集合的关系和运算

● $A \subset B$ —— A 包含于 B

组成 A 的样本点也
是组成 B 的样本点

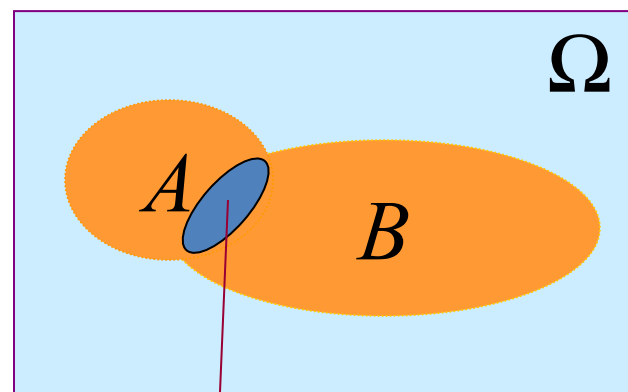
事件 A 发生必导致
事件 B 发生



$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 且 } B \subset A$$

● $A \cap B$ 或 AB ——事件 A 与事件 B 的积事件

由同时属于 A 与 B
的样本点所组成的
事件



$A \cap B$ 发生

事件 A 与事件 B 同时
发生

A_1, A_2, \dots, A_n 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^n A_i$

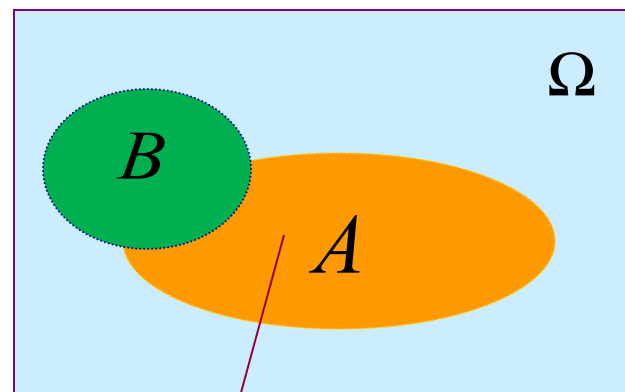
$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

● $A - B$ 差事件

由属于 A 但不属于
 B 的样本点所组成
的事件

$A - B$ 发生

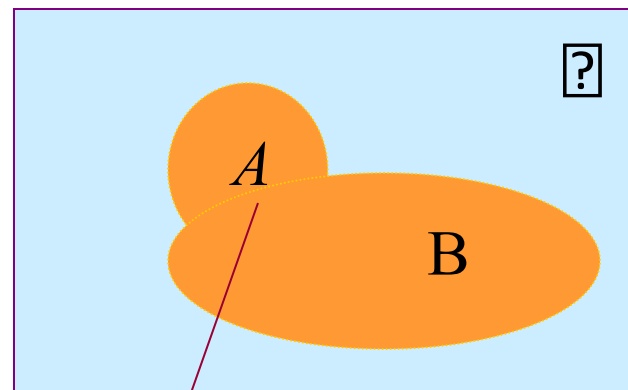
事件 A 发生，但
事件 B 不发生



$A - B$

● $A \cup B$ 或 $A + B$ —— 事件 A 与事件 B 的**和事件**

由组成 A 与组成 B
的所有的样本点所
组成的事件



$A \cup B$ 发生

事件 A 与事件 B 至
少有一个发生

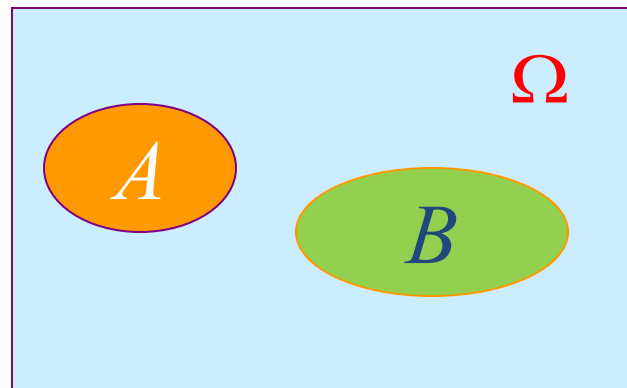
A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^n A_i$

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

● 事件 A 与事件 B 互斥(互不相容)

$$\Leftrightarrow AB = \emptyset$$

$\Leftrightarrow A$ 、 B 不可能同时
发生



A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容

$$\Leftrightarrow A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互不相容

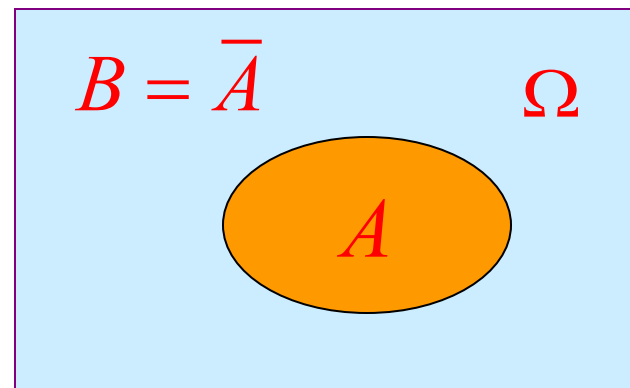
$$\Leftrightarrow A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$$

● 事件 A 与事件 B 互相对立

$$\Leftrightarrow AB = \emptyset$$

$$A \cup B = \Omega$$

\Leftrightarrow 每次试验 A 、 B 中
必有一个也只有一个发生



称 B 为 A 的**对立事件(or逆事件)** , 记为 $B = \bar{A}$

注意：“ A 与 B 互相对立” 与 “ A 与 B 互斥”
是两个不同的概念



运算律

事件的关系与运算完全对应着集合的关系和运算，有着下列的运算律：

■ 吸收律 $A \cup \Omega = \Omega$

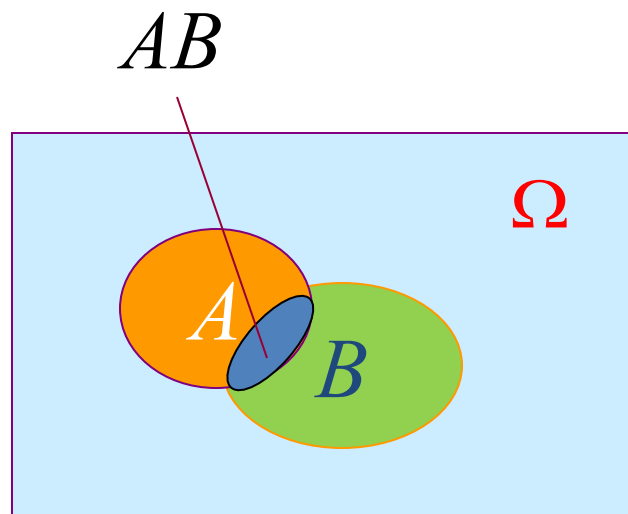
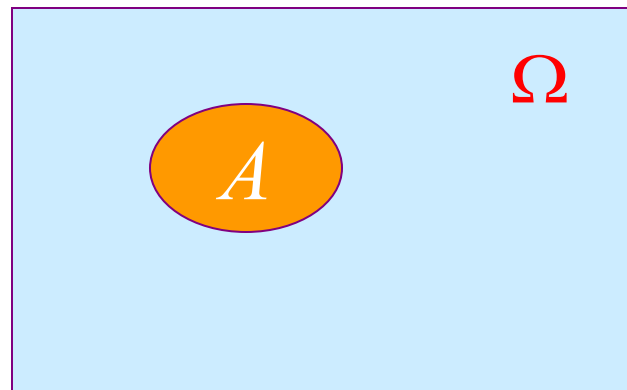
$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup (AB) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$



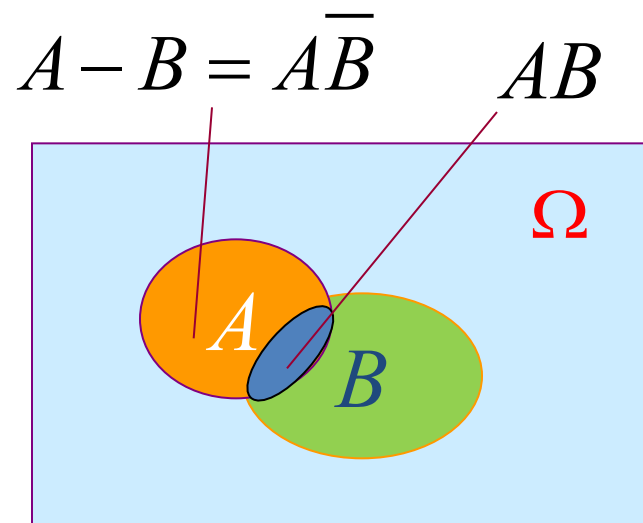
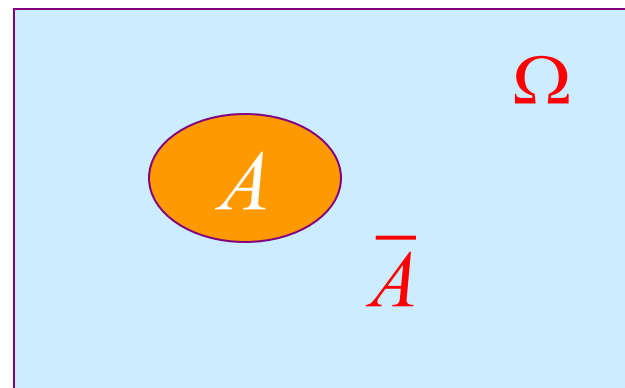
■ 重余律 $\overline{\overline{A}} = A$

□ 幂等律 $A \cup A = A$

$$A \cap A = A$$

□ 差化积

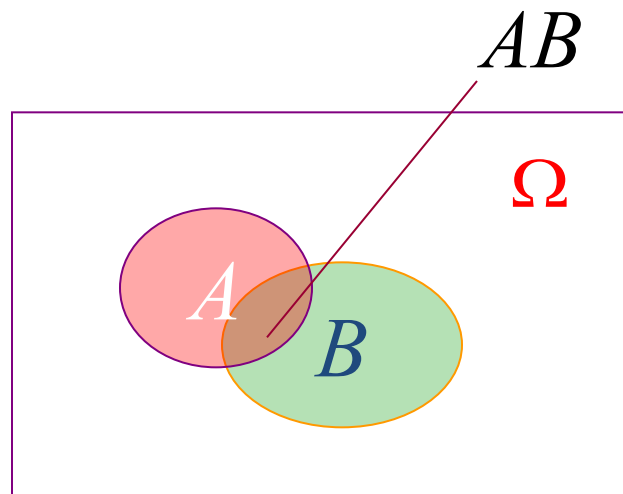
$$A - B = \overline{A} \overline{B} = A - (AB)$$



□ 交换律

$$AB = BA$$

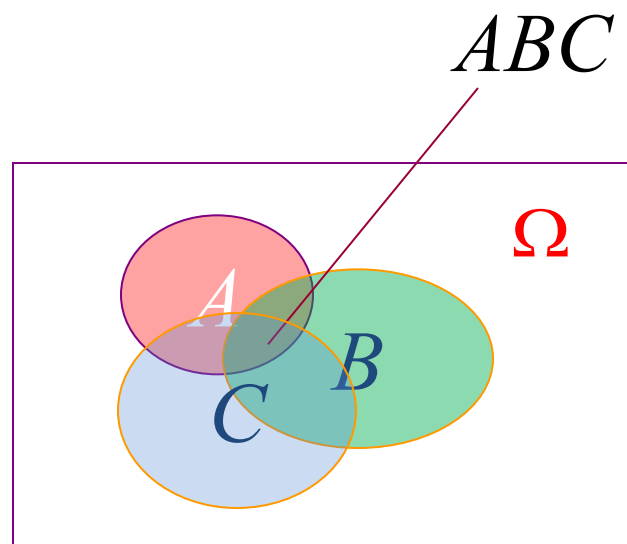
$$A \cup B = B \cup A$$



□ 结合律

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$



□ 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

□ 反演律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

例2 化简事件 $\overline{(\overline{A}\overline{B} \cup C)\overline{A}\overline{C}}$

解 原式 = $\overline{\overline{A}\overline{B} \cup C \cup AC}$

$$= \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} \cup AC$$

$$= (A \cup B)\overline{C} \cup AC$$

$$= A\overline{C} \cup B\overline{C} \cup AC$$

$$= A(\overline{C} \cup C) \cup B\overline{C}$$

$$= A\Omega \cup B\overline{C}$$

$$= A \cup B\overline{C}$$

例3 利用事件关系和运算表达多个事件的关系

$$A, B, C \text{ 都不发生} \text{——} \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$
$$= \overline{A \cup B \cup C}$$

$$A, B, C \text{ 不都发生} \text{——} \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$
$$= \overline{ABC}$$