1、设随机变量$X \sim B(n,p)$，则数学期望$E(e^{2X})=$________

1、设随机变量X~B(n,p)，则数学期望 $E(e^{2X})$=______ $(e^2 p+1-p)^n$

解： $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\cdots,n$

$$E(e^{2X})=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^2 p)^k (1-p)^{n-k} \cdot$$

$$=(e^2 p+1-p)^n$$

2、

设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则$E|X-\mu|^6=$______

2、

设随机变量X~N(μ, σ²),则E|X- μ |⁶=_____

$$E|X-\mu|^6$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|^6\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|\sigma y|^6\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\sigma dy$$

$$=\frac{\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^6\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot dy$$

$$=\frac{\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^6\cdot(-\frac{1}{y})de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=-\frac{\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^5de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=-\frac{\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\left(y^5\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy^5\right)$$

$$=\frac{\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy^5$$

$$=\frac{\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot 5y^4dy$$

$$=\frac{5\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot y^4dy$$

$$=\frac{5\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^4\cdot(-\frac{1}{y})de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= -\frac{5\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^3 \cdot de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= -\frac{5\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\left(y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy^3 \right)$$

$$= \frac{5\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy^3$$

$$= \frac{5\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot 3y^2 dy$$

$$= \frac{15\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot y^2 dy$$

$$= \frac{15\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot (-\frac{1}{y}) de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= -\frac{15\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= -\frac{15\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\left(y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)$$

$$= \frac{15\sigma^6}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= 15\sigma^6 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= 15\sigma^6$$

3、设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为两个随机变量的分布函数， $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$

则下列各组数中能使$F(x)$为某随机变量的分布函数的有________

(A) $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{2}{3}$　　(B) $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{2}{5}$

(C) $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$　　(D) $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{2}{5}$

3、设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为两个随机变量的分布函数，$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$

则下列各组数中能使$F(x)$为某随机变量的分布函数的有____(B)____

(A) $a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{2}{3}$ (B) $a=\frac{3}{5},\quad b=\frac{2}{5}$

(C) $a=\frac{3}{2},\quad b=\frac{1}{2}$ (D) $a=\frac{3}{4},\quad b=\frac{2}{5}$

4、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(x+y)}, 0<2x<y<+\infty \\ 0, 其它 \end{cases}$$

(1)确定常数a

(2)求(X,Y)关于X的边沿概率密度;

(3)求(X,Y)关于Y的边沿概率密度;

(4)求P(X≥1,Y≥2)

解　(1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy \quad =\int_{0}^{+\infty}dx\int_{2x}^{+\infty}ae^{-(x+y)}dy$

$$=a\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx \quad =a(-\frac{1}{3}e^{-3x})\Big|_{0}^{+\infty} \quad =a\frac{1}{3}$$

得　$a=3$

(2)求(X,Y)关于X的边沿概率密度;

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{2x}^{+\infty}3e^{-(x+y)}dy=3e^{-3x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

(3)求(X,Y)关于Y的边沿概率密度;

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{y}{2}} 3e^{-(x+y)}dx = 3e^{-y}(1-e^{-\frac{y}{2}}), y>0 \\ 0, y\le 0\end{cases}$$

(4) $$P\{X\ge 1, Y\ge 2\} = \iint\limits_{x\ge 1, y\ge 2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_2^{+\infty} dy \int_1^{\frac{y}{2}} 3e^{-(x+y)}dx \quad = \int_2^{+\infty} 3e^{-y}(e^{-1}-e^{-\frac{y}{2}})dy$$

$$=3(-e^{-1}e^{-y}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}y})\Big|_2^{+\infty} \quad = e^{-3}$$

5、已知二维随机变量 (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy,0<x<1,0<y<2x\\0,\text{其它}\end{cases}$$

试求：（1）Z=max(X,Y)的分布函数$F_Z(z)$；

（2）Z=max(X,Y)的概率密度$F_Z(z)$.

5、已知二维随机变量 (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy,0<x<1,0<y<2x\\0,\text{其它}\end{cases}$$

试求：（1）Z=max(X,Y)的分布函数$F_Z(z)$；（2）Z=max(X,Y)的概率密度$F_Z(z)$.

解 （1） Z=max(X,Y)的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max(X,Y)\le z\}$$

$$=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{\substack{x\le z\\ y\le z}} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\substack{x\le z \\ y\le z}} f(x,y)dxdy$$

当z<0时, $F_Z(z)=0$

当$0 \le z<1$时, $F_Z(z) = \int_0^z dy \int_{\frac{y}{2}}^z 2xydx = \int_0^z y(z^2 - \frac{y^2}{4})dy$

$$= (z^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16})\Big|_0^z = \frac{7}{16} z^4$$

当$1 \le z<2$时, $F_Z(z) = \int_0^z dy \int_{\frac{y}{2}}^1 2xydx = \int_0^z y(1 - \frac{y^2}{4})dy$

$$= (\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16})\Big|_0^z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{16}$$

当z>2时, $F_Z(z) = 1$

于是

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \frac{7}{16}z^4, 0\le z\le 1\\ \frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{16}, 1<z\le 2\\ 1, z>2\end{cases}$$

Z=max(X,Y)的概率密度为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}\frac{7}{4}z^3, 0\le z\le 1\\ z-\frac{z^3}{4}, 1<z\le 2\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

6、设总体X和Y相互独立且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$

而 $X_1\ X_2\ \ldots\ldots X_9$ 和 $Y_1\ Y_2\ \ldots\ldots Y_9$ 分别是来自总体X和Y的简单随机样本,试求:

（1） $\sum_{i=1}^{9} X_i$ 服从的分布;

（2） $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9} Y_i^2$ 服从的分布;

（3） 统计量 $U = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9} Y_i^2}}$ 服从的分布;

（4） U^2 服从的分布;

解　（1）根据题设条件知

$$\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0,9\sigma^2)$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{9}}\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0,1)$$

（2）　$$\frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{9}\left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(9)$$

（3）由t分布的构造方式,得到

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}}=\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{9}}\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9}Y_i^2\Big/9}}\sim t(9)$$

即统计量U服从自由度为9的t分布；

（4）
$$U^2=\frac{(\sum_{i=1}^{9}X_i)^2}{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}=\frac{(\frac{1}{\sigma\sqrt{9}}\sum_{i=1}^{9}X_i)^2\Big/1}{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9}Y_i^2\Big/9}\sim F(1,9)$$

7、设总体$X \sim N(0,3^2)$, $X_1\ X_2\ \ldots\ldots X_n$为来自X的一个样本，

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$ 为样本均值。

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

则DS^2=___

解：$\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}Z_n=\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$

$$DZ_n=D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n-1}\right]\quad=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$$

$$=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

另外，$EZ_n=E\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n-1}\right]\quad=\dfrac{\sigma^2}{n-1}\cdot E\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$

$$=\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot(n-1)\qquad=\sigma^2$$

8、

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体$N(\mu, 4^2)$的样本.

试求:(1) $U=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)$ 服从的分布；

(2) $V=\frac{1}{16}\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2$ 服从的分布；

（3）令 $Y=\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)}{\sqrt{\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2}}$ 求Y服从的分布

8、

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体$N(\mu, 4^2)$的样本.

试求:(1) $U = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \mu)$ 服从的分布；

$N(0,1)$

(2) $V = \frac{1}{16}\sum_{j=17}^{32}(X_j - \mu)^2$ 服从的分布；

$\chi^2(16)$

（3）令 $Y = \frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i - \mu)}{\sqrt{\sum_{j=17}^{32}(X_j - \mu)^2}}$ 求Y服从的分布

$t(16)$

解 由条件知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，同服从分布$N(\mu, 4^2)$

$$\frac{X_i-\mu}{4} \sim N(0,1) \qquad (\frac{X_i-\mu}{4})^2 \sim \chi^2(1)$$

（1） $$U=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)=\frac{1}{\sqrt{16}}\sum_{i=1}^{16}(\frac{X_i-\mu}{4}) \sim N(0,1)$$

（2） $$(\frac{X_i-\mu}{4})^2 \sim \chi^2(1)$$

$$V=\sum_{j=17}^{32}(\frac{X_j-\mu}{4})^2 \sim \chi^2(16)$$

（3） 因为U与V相互独立，由t分布的定义知，

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)}{\sqrt{\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2}}=\frac{U}{\sqrt{V/16}}\sim t(16)$$

8、设总体X~N(0,3^2), X_1 X_2 ……X_n为来自X的一个样本，$\bar{X}$为样本均值。

设 $Z_i = X_i - \bar{X}$ $\quad i = 1, 2, \cdots, n$

试求： 1. $D(Z_i)$ 2. $E(Z_1 Z_2)$

8、设总体$X \sim N(0,3^2)$, $X_1\ X_2 \ldots\ldots X_n$为来自X的一个样本，$\bar{X}$为样本均值。

设 $Z_i = X_i - \bar{X} \qquad i = 1,2,\cdots,n$

试求： 1. $D(Z_i)$ 2. $E(Z_1 Z_2)$

解 1. $$D(Z_i) = D\left(\frac{n-1}{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{k\neq i} X_k\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_i + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k\neq i} D(X_k)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot 3^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (n-1) \cdot 3^2$$

$$= \frac{9(n-1)}{n}$$

2. $$X_j\overline{X} = X_j\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad = \frac{1}{n}X_j^{\ 2} + \frac{1}{n}\sum_{i\neq j}X_jX_i$$

$$E(X_j\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}X_j^{\ 2}\right) + E\left(\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}X_jX_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}E\left(X_j^{\ 2}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i\neq j}E\left(X_jX_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}E\left(X_j^{\ 2}\right) \;= \frac{1}{n}E\left(X^{\ 2}\right)$$

$$E(Z_1Z_2) = E[X_1X_2 - X_1\bar{X} - X_2\bar{X} + (\bar{X})^2]$$

$$= -2\times\frac{1}{n}E(X^2) + E(\bar{X}^2)$$

$$= -2\times\frac{1}{n}\cdot 3^2 + \frac{3^2}{n} \quad = -\frac{9}{n}$$

9、设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}\exp\{-\dfrac{x^2}{\theta}\}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}，\quad (\theta>0)$$

$x_1\ x_2\ \ldots\ldots x_n$为一组样本值($x_i$>0, i=1,2, …n). $X_1\ X_2\ \ldots\ldots X_n$是来自总体X的样本。求参数θ的极大似然估计值和极大似然估计量。

9、设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}\exp\{-\dfrac{x^2}{\theta}\},x>0\\0,x\le 0\end{cases},\quad(\theta>0)$$

$x_1\ x_2\ \ldots\ldots x_n$为一组样本值($x_i>0$, i=1,2, …n).
$X_1\ X_2\ \ldots\ldots X_n$是来自总体X的样本。求参数θ的极大似然估计值和极大似然估计量。

解：似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}\exp\{-\frac{x_i^2}{\theta}\}\ =\prod_{i=1}^{n}2x_i\cdot\frac{1}{\theta^n}\exp\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}\}$$

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} 2x_i - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

令 $-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$

得解 $n\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

得参数θ的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

得参数θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

10、设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本.

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

试求:

(1)求 $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从的分布;

(2)求 $X_{n+1} - \overline{X_n}$ 服从的分布;

(3)写出 $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ 服从的分布;

(4)求统计量 $Y = \frac{X_{n+1} - \overline{X_n}}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 服从的分布;

10、设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本.

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

试求:

(1)求 $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从的分布; $\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

(2)求 $X_{n+1} - \overline{X_n}$ 服从的分布; $X_{n+1} - \overline{X_n} \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$

(3)写出 $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ 服从的分布; $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

(4)求统计量 $Y = \frac{X_{n+1} - \overline{X_n}}{S_n}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 服从的分布;

$Y \sim t(n-1)$

11、设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本. μ已知,下列几个作为σ^2的估计量中,较优的是(　　)

(A) $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

(B) $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

(C) $\hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

(D) $\hat{\sigma}_4^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \mu)^2$

11、设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本. μ已知,下列几个作为σ^2的估计量中,较优的是(C)

(A) $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

(B) $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

(C) $\hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

(D) $\hat{\sigma}_4^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \mu)^2$

12、设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本.

令 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad Z_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_n)^2 \qquad n=2,3,\cdots$

试作：（1）求EZ_n

（2）求DZ_n

（3）证明：对任何$\varepsilon>0$,成立

$$\lim_{n\to+\infty}P\{|Z_n-\sigma^2|<\varepsilon\}=1$$

解

（1） $Z_n = S^2 \quad EZ_n = ES^2 = \sigma^2$

（2）由条件知，

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} Z_n = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$DZ_n = D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n-1}\right] \quad = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

（3）由切比雪夫不等式有

$$P\left\{\left|Z_n-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\left|Z_n-EZ_n\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{DZ_n}{\varepsilon^2}$$

所以 $$1\geq P\left\{\left|Z_n-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2(n-1)}$$

上式两边取极限，即得

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|Z_n-\sigma^2\right|<\varepsilon\right\}=1$$

证毕

14、设随机变量X存在数学期望EX和方差DX≠0,则对任意正数ε,

下列不等式恒成立的是（　）

（A） $P\{|X-EX|\geq \varepsilon\} > \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$

（B） $P\{|X-EX|< \varepsilon\} < 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$

（C） $P\{|X|\geq \varepsilon\sqrt{DX}\} \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}$

（D） $P\{|X|\geq \varepsilon\} \leq \dfrac{E|X|^k}{\varepsilon^k},\qquad (k>0)$

证明:

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} = \int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)dx$$

$$\leq \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{|x|^k}{\varepsilon^k} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{|x|\geq\varepsilon} |x|^k f(x)dx$$

$$= \frac{E|X|^k}{\varepsilon^k}$$

D

15、

四个位置：1,2,3,4，在圆周上逆时针排列.粒子在这四个位置上随机游动.粒子从任何一个位置,以2/3概率逆时针游动到相邻位置;以1/3概率顺时针游动到相邻位置；以 $X(n)=j$ 表示时刻n粒子处在位置j(j=1,2,3,4)

(1)写出齐次马尔可夫链 $\{X(n),n=1,2,\cdots\}$ 的状态空间;

(2)求齐次马尔可夫链 $\{X(n),n=1,2,\cdots\}$ 的一步状态转移矩阵;

(3)求条件概率 $P\{X(n+3)=3, X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$

解. (1)依题意 ,状态空间 S={1,2,3,4}

(2)转移概率矩阵

$$P=(p_{ij})_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$P\{X(n+3)=3, X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$$

$$= P\{X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$$

$$\cdot P\{X(n+3)=3 \mid X(n+1)=1, X(n)=2\}$$

$$= P\{X(n+1)=1 \mid X(n)=2\}$$

$$\cdot P\{X(n+3)=3 \mid X(n+1)=1\}$$

$$= p_{21} p_{13}^{(2)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{4} p_{1k} p_{k3}$$

$$= \frac{1}{3}(0 \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$$

16、设随机过程$Y(t)=e^{-tX}$, $-\infty< t<+\infty$,其中X是在(0,1)上服从均匀分布的随机变量。

试求:（1）X的概率密度$f_X(x)$

（2） $E[Y(t)]$, $E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$, $E[(Y(t))^2]$,

（3） Y(t)是否为广义平稳过程?

16、设随机过程$Y(t)=e^{-tX}$, $-\infty< t<+\infty$,其中X是在(0,1)上服从均匀分布的随机变量。

试求:（1）X的概率密度$f_X(x)$

（2） $E[Y(t)]$, $E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$, $E[(Y(t))^2]$,

（3） Y(t)是否为广义平稳过程?

解（1）由题设条件，知X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（2） Y(t)的均值函数

$$\mu_Y(t)=E[Y(t)]=E[e^{-tX}]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tx}f(x)dx \quad =\int_0^1 e^{-tx}dx=\frac{1-e^{-t}}{t}$$

Y(t)的自相关函数

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$$

$$=E[e^{-t_1X}\cdot e^{-t_2X}]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t_1+t_2)x}f(x)dx$$

$$=\int_0^1 e^{-(t_1+t_2)x}dx=\frac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}$$

$$E[(Y(t))^2]=\frac{1-e^{-2t}}{2t}$$

（3）由（2）知Y(t)不是广义平稳过程