§9.1 假设检验的基本概念

△ 何为假设检验?

假设是指施加于一个或多个总体的概率分布或参数的判断. 所作的假设可以是正确的, 也可以是错误的.

为判断所作的假设是否正确, 从总体中抽取样本, 根据样本的取值, 按一定的原则进行检验, 然后, 作出接受或拒绝所作假设的决定.

△ 假设检验的内容

- 参数检验
  - 总体均值、均值差的检验
  - 总体方差、方差比的检验
- 非参数检验
  - 分布拟合检验
  - 秩和检验

△ 假设检验的理论依据

假设检验所以可行，其理论背景为实际推断原理，即“小概率原理”

引 例

某厂生产的螺钉,按标准强度为68克/mm^2,
而实际生产的螺钉强度 X 服从 $N(\mu, 3.6^2)$.
若 $E(X)=\mu=68$, 则认为这批螺钉符合要求,否则认为不符合要求.为此提出如下假设:

$H_0: \mu = 68$ —— 称为**原假设**或**零假设**

原假设的对立面:

$H_1: \mu \neq 68$ —— 称为**备择假设**

现从该厂生产的螺钉中抽取容量为 36 的样本,
其样本均值为 $\bar{x} = 68.5$, 问原假设是否正确?

若原假设正确，则

$$\overline{X} \sim N(68, \frac{3.6^2}{36})$$

因而 $E(\overline{X}) = 68$，即 $\overline{X}$ 偏离68不应该太远，偏离较远是小概率事件， 由于

$$\frac{\overline{X} - 68}{\frac{3.6}{6}} \sim N(0,1)$$

故 $\left| \frac{\overline{X} - 68}{\frac{3.6}{6}} \right|$ 取较大值是小概率事件

对于较小的正数α（通常取$\alpha = 0.05, 0.01, \ldots$）

有 $$P\left(\left| \frac{\bar{X}-68}{\frac{3.6}{6}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \alpha$$

即事件 $\left| \frac{\bar{X}-68}{\frac{3.6}{6}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 发生的概率很小（为α）

例如,取$\alpha = 0.05$，则

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-0.025} = 1.96$$

则 $\left|\dfrac{\bar{X}-68}{\frac{3.6}{6}}\right|>1.96$ 的概率很小

即 $\bar{X}>69.18$ 或 $\bar{X}<66.824$ 的概率很小

称 $\bar{X}$ 的取值区间 $(69.18, +\infty)$与$(-\infty, 66.824)$

为检验的**拒绝域**

称 $\bar{X}$ 的取值区间 $(66.824, 69.18)$

为检验的**接受域** (实际上没理由拒绝),

现 $\bar{x}=68.5$ 落入接受域,

故接受原假设 H_0: $\mu=68$

由引例可见,在给定 α 的前提下,接受还是拒绝原假设完全取决于样本值, 因此所作检验可能导致以下两类错误的产生：

第一类错误 —— 弃真错误

第二类错误 —— 取伪错误

假设检验的两类错误

真实情况 \ 所作判断	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	第一类错误 (弃真)
H_0 为假	第二类错误 (取伪)	正确

犯第一类错误的概率通常记为 α

犯第二类错误的概率通常记为 β

希望所用的检验方法尽量少犯错误,但不能完全排除犯错误的可能性.理想的检验方法应使犯两类错误的概率都很小,但在样本的容量给定的情形下, 不可能使两者都很小,降低一个,往往使另一个增大.

假设检验的指导思想是控制犯第一类错误的概率不超过 α,然后, 若有必要,通过增大样本容量的方法,减少 β .

本引例中

犯第一类错误的概率

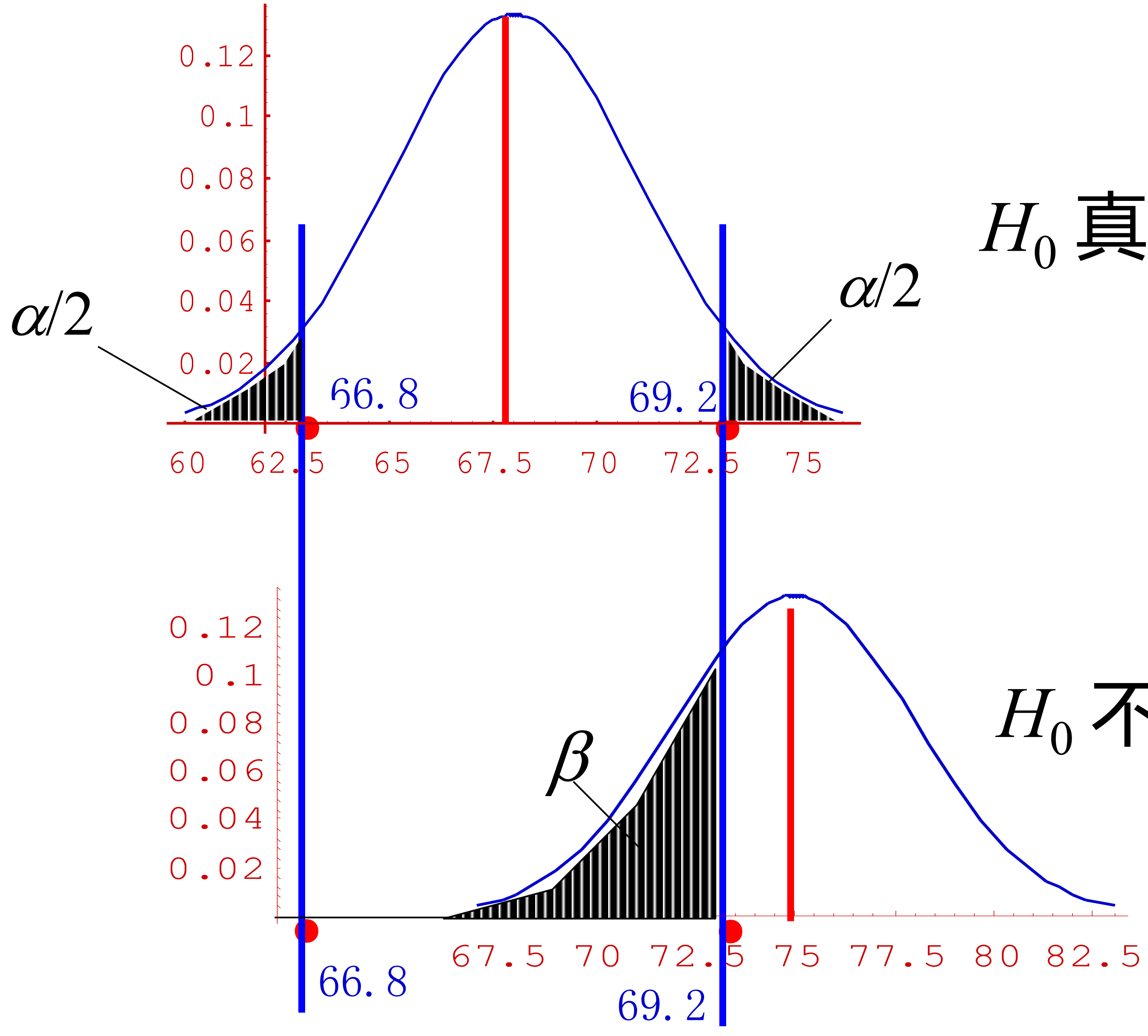
$=P($拒绝$H_0|H_0$为真$)=P(\bar{X}<66.824\cup\bar{X}>69.18)$

$=0.05=\alpha$

若H_0为真, 则

$$\bar{X}\sim N(68,\frac{3.6^2}{36})$$

所以,拒绝 H_0 的概率为 α, α又称为**显著性水平**, α 越小,犯第一类错误的概率越小.



0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
60
62.5
65
67.5
70
72.5
75
α/2
α/2
66.8
69.2
H0 真
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
β
67.5
70
72.5
75
77.5
80
82.5
66.8
69.2
H0 不真

注 1° 一般,作假设检验时,先控制犯第一类错误的概率 α, 在保证 α 的条件下使 β 尽量地小.要降低 β 一般要增大样本容量.

注 2° 备择假设可以是单侧的,也可以是双侧的.引例中的备择假设是双侧的.如果根据以往的生产情况, $\mu_0 = 68$.现采用了新工艺,关心的是新工艺能否提高螺钉强度, μ 越大越好.此时, 可作如下的假设检验:

原假设 $H_0 : \mu = 68$；备择假设 $H_1 : \mu > 68$

当原假设$H_0: \mu = \mu_0 = 68$ 为真时,

$\bar{X} - \mu_0$ 取较大值的概率较小

当备择假设$H_1: \mu > 68$ 为真时,

$\bar{X} - \mu_0$ 取较大值的概率较大

给定显著性水平α, 根据 $P\left(\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \right) = \alpha$

可确定拒绝域

$$\bar{x} \in \left(\mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad +\infty \right)$$

因而, 接受域

$$\bar{x} \in (-\infty, \quad \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

称这种检验为右边检验.

另外，可设

原假设 $H_0: \mu \le 68$

备择假设 $H1: \mu > 68$

注 3° **关于零假设与备择假设的选取**

H_0与H_1地位应平等,但在控制犯第一类错误的概率 α 的原则下,使得采取拒绝H_0的决策变得较慎重,即H_0得到特别的保护.

因而,通常把有把握的、有经验的结论作为原假设,或者尽可能使后果严重的错误成为第一类错误.

如：某厂生产一种铜丝，其折断力(大了质量好)服从正态分布$N(570,8^2)$.现改进了工艺，抽取10个样品，测得其平均值为575.2。

问：改进工艺是否提高了产品质量。

则可设：

原假设 $H_0: \mu = 570$

备择假设 $H_1: \mu > 575.2$

假设检验的步骤

- ❑ 根据实际问题所关心的内容，建立原假设 H_0与备择假设H_1
- ❑ 在 H_0为真时,选择一个合适的检验统计量V,它的分布是已知的,由H_1确定拒绝域的形式
- ❑ 给定显著性水平α，对应的拒绝域

双侧检验 $(V < V_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (V > V_{1-\frac{\alpha}{2}})$

右边检验 $(V > V_{1-\alpha})$

左边检验 $(V < V_{\alpha})$

- ❑ 根据样本值计算出统计量的值,若在拒绝域内则拒绝原假设，否则接受原假设

§9.2 正态总体的参数检验

- **关于μ的检验(σ^2 已知)**

(1.1) μ的双边检验(σ^2 已知)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，需检验：

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$H_0:\ \mu=\mu_0\ ;\quad H_1:\ \mu\neq\mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu=\mu_0$成立，则样本均值 $\bar{X}$ 不能偏离μ_0太多

即 $\bar{X}-\mu_0$不能非常大或者非常小

$\bar{X}-\mu_0$非常大时，说明样本数据不支持原假设 $\mu=\mu_0$，而是支持被择假设 $\mu\neq\mu_0$

$\bar{X}-\mu_0$非常小时，说明样本数据不支持原假设 $\mu=\mu_0$，而是支持被择假设 $\mu\neq\mu_0$

$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

形式为：

$\bar{X} - \mu_0 > ?$ 或 $\bar{X} - \mu_0 < ?$

显著性水平为α ，即 $\bar{X} - \mu_0$非常大或者非常小的标准为 :$\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小到其发生的概率只有α（0.05或0.01）

因为统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \text{或}\ \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha$$

故拒绝域 $\left\{\bar{X}\ \middle|\ \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \text{或}\ \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

即 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 或 $|U|\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

（1.2）$\boldsymbol{\mu}$ 的右边检验(σ^2 已知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu = \mu_0$成立，则样本均值 $\bar{X}$ 不能大于μ_0太多

即 $\bar{X} - \mu_0$不能非常大

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu > \mu_0$

注：

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小时，说明样本数据相对支持原假设$\mu = \mu_0$，此时不能拒绝原假设，不属于拒绝域

H_0 ： $\mu = \mu_0$ ； H_1 ： $\mu > \mu_0$

形式为：

$$\bar{X} - \mu_0 \geq ?$$

显著性水平为α ，即 $\bar{X} - \mu_0$非常大的标准为：

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大到其发生的概率只有α

因为统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{1-\alpha}\right)=\alpha$$

故拒绝域 $\left\{\bar{X}\;\middle|\;\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{1-\alpha}\right\}$

即 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{1-\alpha}$ 或 $U\geq Z_{1-\alpha}$

（1.3）$\boldsymbol{\mu}$ 的左边检验(σ^2 已知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ ; \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu < \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu = \mu_0$成立，则样本均值 $\bar{X}$ 不能小于μ_0太多

即 $\bar{X} - \mu_0$ 不能非常小

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu < \mu_0$

注：

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大时，说明样本数据相对支持原假设$\mu = \mu_0$，此时不能拒绝原假设，不属于拒绝域

H_0 ： $\mu = \mu_0$ ； H_1 ： $\mu < \mu_0$

形式为：

$$\bar{X} - \mu_0 \le ?$$

显著性水平为α ，即 $\bar{X} - \mu_0$非常小的标准为：

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小到其发生的概率只有α

因为统计量 $$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_\alpha\right)=\alpha$$

或 $-Z_{1-\alpha}$

故拒绝域 $$\left\{\bar{X}\;\middle|\;\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\alpha}\right\}$$

即 $$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\alpha}$$ 或 $U\le -Z_{1-\alpha}$

U 检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U \geq z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U \leq -z_{1-\alpha}$

关于μ 的检验(σ^2 未知)

（2.1）μ 的双边检验(σ^2 未知)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2未知，需检验：

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

给定显著性水平α与样本值($x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu = \mu_0$成立，则样本均值$\bar{X}$不能偏离μ_0太多

即 $\bar{X} - \mu_0$不能非常大或者非常小

$\bar{X} - \mu_0$非常大时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$\bar{X} - \mu_0$非常小时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

形式为：

$\bar{X} - \mu_0 > ?$ 或 $\bar{X} - \mu_0 < ?$

显著性水平为α ，即 $\bar{X} - \mu_0$非常大或者非常小的标准为：$\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小到其发生的概率只有α（0.05或0.01）

因为统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$ $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ \text{或}\ \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\alpha$$

故拒绝域

$$\left\{\overline{X}\ \middle|\ \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ \text{或}\ \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

即 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $|T|\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

（2.2）$\boldsymbol{\mu}$ 的右边检验（σ^2 未知）

$$H_0: \mu = \mu_0 ; \quad H_1: \mu > \mu_0$$

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}(n-1)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha}$$

（2.3）$\boldsymbol{\mu}$ 的左边检验(σ^2 未知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \; ; \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \le -t_{1-\alpha}(n-1) \qquad \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -Z_{1-\alpha}$$

T 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\lvert T \rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T \geq t_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T \leq -t_{1-\alpha}$

例1 某糖厂有一台自动打包机打包，额定标准是每包质量为100kg。设包质量服从正态分布，且根据以往经验，其方差为$\sigma^2=(0.4)^2$。某天开工后，为检查打包机工作情况，随机的抽取9包，称得质量（单位：kg）如下：

99	98.5	102.5	101	98
99	102	102.1	100.5	

问 这天打包机工作是否正常($\alpha=0.05$)？

解　μ 的双边检验(σ^2 已知)

$$H_0: \mu = 100 ; \quad H_1: \mu \neq 100$$

拒绝域 $\left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 即：$\left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq 1.96$

而由样本值：$\left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \dfrac{100.29 - 100}{0.4 / \sqrt{9}} \right| = 2.175$

故拒绝$H_0: \mu = 100$

例2 某厂生产小型马达，其说明书上写着：这种小型马达在正常负载下平均消耗电流不会超过0.8 安培.

现随机抽取16台马达试验，求得平均消耗电流为0.92安培，消耗电流的标准差为0.32安培.

假设马达所消耗的电流服从正态分布，取显著性水平为$\alpha = 0.05$，问根据这个样本，能否否定厂方的断言?

解 根据题意待检假设可设为

$H_0: \mu \leq 0.8$ ； $H_1: \mu > 0.8$

σ末知, 拒绝域为：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1)$$

查表得 $t_{1\text{-}0.05}(16\text{-}1) = 1.753$, 故拒绝域为

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > 1.753$$

由 $\bar{x} = 0.92 \quad \mu = 0.8$ 得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = 1.452$

$s = 0.32 \quad n = 16$

故接受原假设, 得到结论：不能否定厂方断言.

$H_0: \mu \geq 0.8$ ； $H_1: \mu < 0.8$

σ未知, 拒绝域为：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}(n-1)$$

查表得 $-t_{1-0.05}(16-1) = -1.753$, 故拒绝域为

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < -1.753$$

由 $\bar{x}=0.92 \quad \mu=0.8$ 得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=1.452$

$s=0.32 \quad n=16$

故接受原假设，得到结论：不能相信厂方断言.

由例2可见：对问题的提法不同(把哪个假设作为原假设)，统计检验的结果也会不同.

由于假设检验是控制犯第一类错误的概率，使得拒绝原假设 H_0 的决策变得比较慎重，也就是 H_0 得到特别的保护. 因而，通常把有把握的，经验的结论作为原假设，或者尽量使后果严重的错误成为第一类错误.

上述两种解法的立场不同，因此得到不同的结论.第一种假设是不轻易否定厂方的结论；第二种假设是不轻易相信厂方的结论.

§9.2 正态总体的参数检验

- 关于σ^2的检验（μ 未知）

(1)σ^2的双边检验（μ 未知）

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， μ 未知，需检验：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
构造统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$; $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

拒绝域的推导

形式：

若$\sigma^2=\sigma_0^2$成立，则样本方差 S^2不能偏离σ_0^2太多，即 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 不能非常大或者非常小

$\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$非常大时，说明样本数据不支持原假设 $\sigma^2=\sigma_0^2$，而是支持被择假设 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 非常小时，说明样本数据不支持原假设

$\sigma^2=\sigma_0^2$，　而是支持被择假设 $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

H_0 ： $\sigma^2=\sigma_0^2$ ； H_1 ： $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

形式为：

$\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}>?$　　或　　$\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}<?$

显著性水平为α，即 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 非常大或者非常小

的标准为： $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 非常大或者非常小到其发生的

概率只有α（0.05或0.01）

因为统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$P_{H_0}\left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

$$= \alpha$$

故拒绝域

$$\left\{ S^2 \;\middle|\; \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

(1)σ^2的右边检验（μ 未知）

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2;\quad H_1:\ \sigma^2>\sigma_0^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

(1)σ^2的左边检验（μ 未知）

$$H_0：\sigma^2=\sigma_0^2；\quad H_1：\sigma^2<\sigma_0^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{\alpha}(n-1)$$

σ^2 的检验 (μ 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ (μ 未知)	$\chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}(n-1)$

关于σ^2的检验（μ已知）

(1)σ^2的双边检验（μ已知）

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ已知，需检验：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2\;; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

构造统计量

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

故拒绝域

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \text{ 或 } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$$

(1)σ^2的右边检验（μ已知）

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2\ ;\quad H_1:\ \sigma^2>\sigma_0^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n)$$

(1)σ^2的左边检验（μ已知）

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 \le \chi^2_{\alpha}(n)$$

σ^2 的检验(μ 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ (μ 已知)	$\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2 \le \chi^2_{\alpha}(n)$

例1：某厂生产螺钉，生产一直比较稳定，长期以来，螺钉的直径服从方差为 σ^2=0.0002(cm^2)的正态分布。今从产品中随机抽取10只进行测量，得螺钉直径的数据(单位：cm)如下：

1.19	1.21	1.21	1.18	1.17
1.20	1.20	1.17	1.19	1.18

问：(α =0. 05)

(1)是否可以认为螺钉直径的方差为0.0002

(2)是否可以认为螺钉直径的方差大于0.0002

(1) μ 未知

$$H_0 : \sigma^2 = 0.0002 ; \quad H_1 : \sigma^2 \neq 0.0002$$

拒绝域：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

查表知：$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{\frac{0.05}{2}}(10-1) = 2.7$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2}}(10-1) = 19.0$$

故拒绝域：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \in (0,\ 2.7) \cup (19.0,\ \infty)$

而由观测值知：$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0.00022$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 10$$

故接受

(2) μ 未知

$$H_0: \sigma^2 = 0.0002; \quad H_1: \sigma^2 > 0.0002$$

拒绝域： $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

查表知： $\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{1-0.05}(10-1) = 16.9$

故拒绝域： $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \in (16.9, \infty)$

而由观测值知：$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0.00022$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 10$$

故接受

例2某汽车配件厂在新工艺下对加工好的25个活塞的直径进行测量,得样本方差$s^2=0.00066$. 已知老工艺生产的活塞直径的方差为0.00040. 问改革后活塞直径的方差是否大于改革前？

解 设测量值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 = 0.00040$

需考察改革后活塞直径的方差是否大于改革前的方差？故待检验假设可设为：

$$H_0: \sigma^2 = 0.00040 ;\quad H_1: \sigma^2 > 0.00040.$$

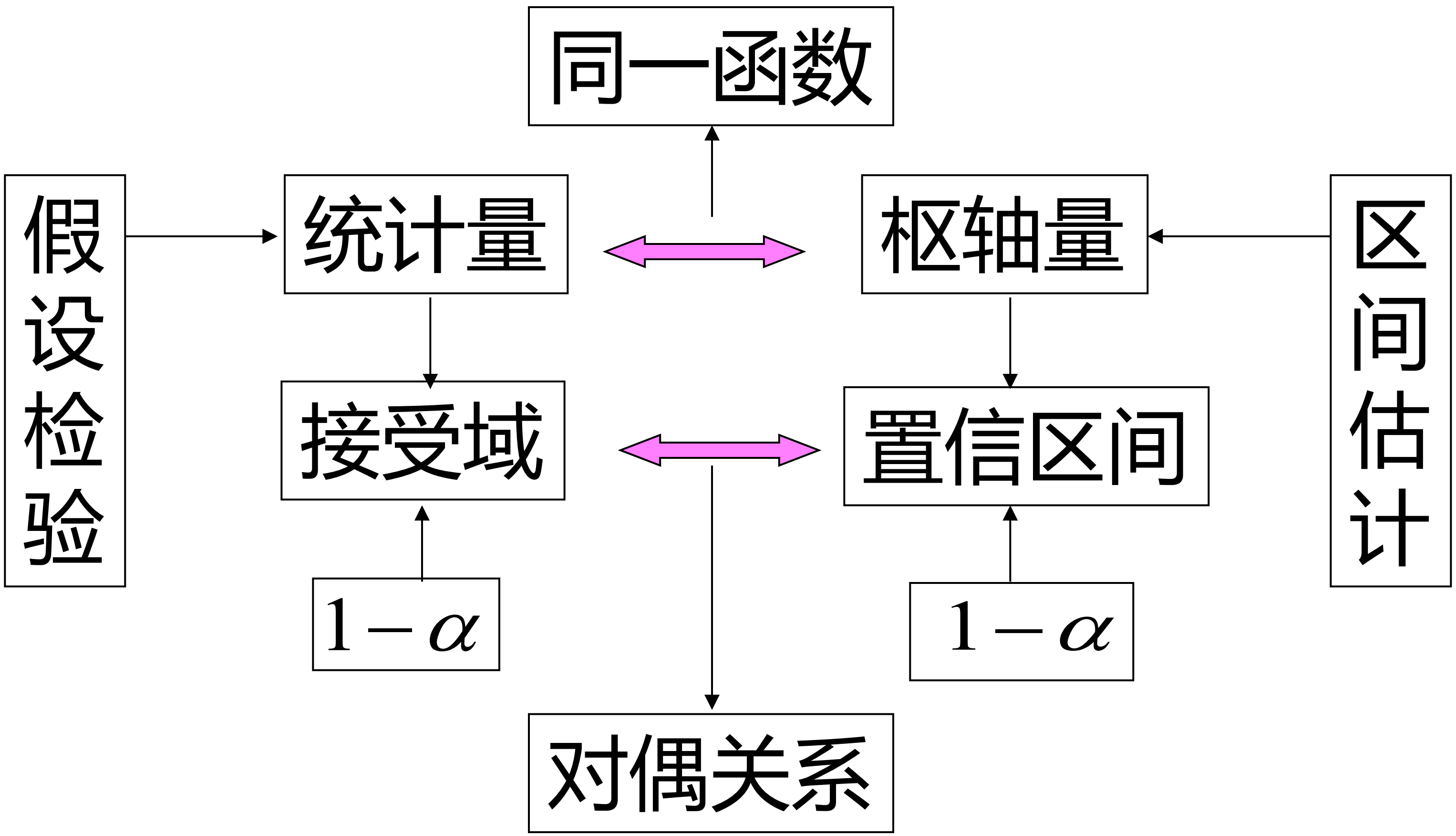
取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域 ：$\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}{}^2(n-1) = \chi^2_{1-0.05}(24) = 36.415$

现 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(25-1)\times 0.00066}{0.00040} = 39.6 > 36.415$

落在拒绝域内，故拒绝H_0. 即改革后的方差显著大于改革前的方差.

假设检验与区间估计的联系



例5 新设计的某种化学天平，其测量的误差服从正态分布，现要求 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg, 即要求 $3\sigma \leq 0.1$。现拿它与标准天平相比，得10个误差数据，其样本方差s^2 =0.0009. 试问在 $\alpha = 0.05$的水平上能否认为满足设计要求？

现要求 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg, 即要求 $3\sigma \le 0.1$。

注： 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg,

$$\Longleftrightarrow P\{|X-\mu|<0.1\}=99.7\%$$

$$\Longleftrightarrow P\{|X-\mu|>0.1\}=0.3\%$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|>\frac{0.1}{\sigma}\right\}=0.3\%$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}<-\frac{0.1}{\sigma} \text{或} \frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{0.1}{\sigma}\right\}=0.3\%$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}<-\frac{0.1}{\sigma}\right\}=0.15\%=0.0015$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{0.1}{\sigma}=z_{0.0015}=-2.97 \approx -3$$

$$\Longleftrightarrow 3\sigma \le 0.1$$

解一　$H_0: \sigma \le 1/30$ ；　$H_1: \sigma \ge 1/30$

μ 未知, 故选检验统计量　$\chi^2 = \dfrac{9S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(9)$

拒绝域：$\chi^2 = \dfrac{9S^2}{1/900} > \chi^2_{1-0.05}(9) = 16.919$

现　$\chi^2 = \dfrac{9S^2}{1/900} = 7.29 < 16.919$ 落在拒绝域外

故接受原假设, 即认为满足设计要求.

解二 σ^2的单侧置信区间为

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)=\left(0,\ \frac{0.0081}{3.325}\right)=(0,\ 0.0024)$$

H_0中，$\sigma_0^2=\dfrac{1}{900}=0.0011<0.0024$ 则H_0成立

从而接受原假设, 即认为满足设计要求.

样本容量的选取

虽然当样本容量 n 固定时，我们不能同时控制犯两类错误的概率，但可以适当选取 n 的值，使犯取伪错误的概率 β 控制在预先给定的限度内.