定理 4.3.4 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 那么 f 可测, 且

$$\mathcal{R}\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

■ 设 $|f| \leqslant M$. 只要证 f 可测以及 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相等. 由 Riemann 可积, 存在阶梯函数 $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足: $\forall k$, $x \in [a,b]$, $|L_k| \leqslant M$, $|U_k| \leqslant M$,

$$L_1 \leqslant L_2 \cdots \leqslant f \leqslant \cdots \leqslant U_2 \leqslant U_1,$$

以及

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{R}\int_{[a,b]}L_k(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\mathcal{R}\int_{[a,b]}U_k(x)\,dx=\mathcal{R}\int_{[a,b]}f(x)\,dx.$$

容易看出存在极限

$$L(x)=\lim_{k\to\infty}L_k(x)\,,\ U(x)=\lim_{k\to\infty}U_k(x)\,. \tag{4.1}$$

那么 $L(x)$, $U(x)$ 可测,

$$L(x)\leqslant f(x)\leqslant U(x)\,. \tag{4.2}$$

注意阶梯函数的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相等, 结合有界收敛定理就有

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{R}\int_{[a,b]}L_k(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}L_k(x)\,dx=\int_{[a,b]}L(x)\,dx,$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{R}\int_{[a,b]} U_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} U_k(x)\,dx = \int_{[a,b]} U(x)\,dx.$$

因此由 (*Eq.* 4.2)，

$$\int_{[a,b]} (U(x) - L(x))\,dx = 0.$$

根据例 4.3.1

$$U(x) = L(x),\ a.e.\ x \in [a,b].$$

进而也有

$$U(x) = f(x) = L(x),\ a.e.\ x \in [a,b].$$

所以 $f(x)$ 可测. 另外由 $(Eq.\ 4.1)$, $L_k(x) \to f(x)$, $a.e.\ x \in [a,b]$, 根据 $f(x)$ 的 Lebesgue 积分定义就有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} L_k(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, dx.$$

综上就得到

$$\mathcal{R} \int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, dx.$$

4.4　非负可测函数的积分

定义 4.4.1 设 f 为非负广义实值可测函数, 其积分定义为

$$\int f = \sup\left\{\int h : h\text{有界可测, 支集测度有限}, 0 \leqslant h \leqslant f\right\}.$$

若 $\int f < \infty$, 则称 f 是 Lebesgue 可积的. 设 E 是可测集, 那么 f 在 E 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)\,dx = \int f(x)\,\chi_E(x)\,dx.$$

若 $\int_E f < \infty$, 则称 f 是 E 上是 Lebesgue 可积的. Lebesgue 可积简称可积.

习题 4.4.1 考察 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f_a(x) = \begin{cases} |x|^{-a}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{1+|x|^a},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

那么 $f_a(x)$ 可积当且仅当 $a < n$, $F_a(x)$ 可积当且仅当 $a > n$. (进一步讨论参见本节习题)

非负可测函数积分的有以下性质.

定理 4.4.1 设 f, g 为非负可测函数.

(1) $\forall a, b \geqslant 0$,

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

(2) 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 为不相交可测集, 那么

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

(3) 若 $0 \leqslant f \leqslant g$, 那么

$$\int f \leqslant \int g.$$

(4) 若 $0 \leqslant f \leqslant g$, 且 g 可积. 那么 f 可积.

(5) 若 f 可积. 那么

$$f(x) < \infty, \ a.e.x.$$

(2) (3) (4) 直接由定义得到. 为说明 (1), 注意到由定义容易得出

$$a\int f = \int af, \ b\int g = \int bg,$$

因此只需考察 $a = b = 1$ 的情形. 设 ϕ, ψ 是支集测度有限的有界可测函数, $\phi \leqslant f, \psi \leqslant g$. 显然 $\phi + \psi$ 是支集测度有限的有界可测函数, 且 $\phi + \psi \leqslant f + g$, 因此

$$\int f + \int g \leqslant \int (f + g).$$

为证反面不等式, 设 η 是支集测度有限的有界可测函数, 且 $\eta \leqslant f+g$. 令 $\eta_1 = \min(f(x), \eta(x))$, $\eta_2 = \eta - \eta_1$. 那么 η_1, η_2 都是支集测度有限的有界可测函数,

$$\eta_1 \leqslant f,\ \eta_2 \leqslant g.$$

因此

$$\int \eta = \int \eta_1 + \int \eta_2 \leqslant \int f + \int g.$$

对 η 取上确界便得到 (1).

(5) $\forall k \geqslant 1$, 令 $E_k = \{f \geqslant k\}$, $E_\infty = \{f = \infty\}$. 那么

$$\int f \geqslant \int f\chi_{E_k} \geqslant km(E_k).$$

因此 $m(E_1) < \infty$, $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$. 又 $\{E_k\}$ 为递减可测集

列,

$$m\left(E_\infty\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(E_k\right) = 0.$$

(6) 类似例 4.3.1容易看出, 若

$$\int f = 0,$$

那么 $f(x) = 0,\ a.e.x.$ 反过来, 若 $f(x) = 0,\ a.e.x.$

定理 4.4.2 **(Chebychev)** 设 $f \geqslant 0$ 为 E 上的可测函数. 那么 $\forall \lambda > 0$,

$$m\left(\{x \in E : f(x) \geqslant \lambda\}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_E f.$$

■ 令

$$E_\lambda = \{x \in E : f(x) \geqslant \lambda\}.$$

1. 若 $m(E_\lambda) < \infty$. 取 $g(x) = \lambda \chi_{E_\lambda}(x)$. 显然 $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, 根据积分定义与性质

$$\lambda m(E_\lambda) = \int_E g \leqslant \int_E f.$$

从而

$$m(E_\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_E f.$$

2. 若 $m(E_\lambda) = \infty$. 令 Q_N 为原点为中心边长 N 的方体以及

$$E_{\lambda,N} = \{x \in E : f(x) \geqslant \lambda\} \cap Q_N.$$

取 $g_N(x) = \lambda \chi_{E_{\lambda,N}}(x)$. 显然 $0 \leqslant g_N(x) \leqslant f(x)$, 根据积分定义与性质

$$\lambda m(E_{\lambda,N}) = \int_E g_N \leqslant \int_E f.$$

由于 $E_{\lambda,N}$ 关于 N 递增, 取极限 $N \to \infty$ 得到

$$\infty = \lambda m(E_\lambda) = \lambda \lim_{N\to\infty} m(E_{\lambda,N}) \leqslant \int_E f.$$

此时所要证明的不等式, 两侧都是 ∞, 自然成立. //

定理 4.4.3 设 $f \geqslant 0$ 为 E 上的可测函数. 那么

$$\int_E f = 0$$

当且仅当 $f(x)=0, a.e. x\in E.$

- 由 Chebychev 不等式, $\forall k>0,$

$$m\left(f>\frac{1}{k}\right)\leqslant k\int_E f=0.$$

又

$$\{f>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{f>\frac{1}{k}\right\},$$

因此

$$m(f>0)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m\left(f>\frac{1}{k}\right)=0.$$

反过来, 若 $f(x)=0$, $a.e.x\in E$, 设 ϕ 为简单函数, g 有界可测, $supp\,(g)<\infty$, 满足 $0\leqslant\phi\leqslant g\leqslant f$. 因而 $\phi=0$, $a.e.x\in E$, 根据简单函数积分定义 $\int_E\phi=0$. 由 ϕ 任意, 进一步根据支集测度有限的有界可测函数的积分定义, $\int_E g=0$. 从而, 由 g 任意, $\int_E f=0$.

注 4.4.1 定理 4.4.3表明几乎处处相等的非负可测函数, Lebesgue 积分相等.

推论 4.4.1 若 f 在 E 上非负可积, 那么 $\forall E_0\subset E$, $m\,(E_0)=0$,

$$\int_E f=\int_{E\setminus E_0} f.$$

- 由非负函数积分线性性质,

$$\int_E f=\int_{E\setminus E_0} f+\int_{E_0} f.$$

由假设 f 在 E_0 上几乎处处为零, 再运用定理 4.4.3得证. ///

收敛定理

引理 4.4.1 (Fatou) 设 $\{f_k\}$ 为非负可测函数列, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $a.e.x.$ 那么

$$\int f \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int f_k.$$

■ 设 g 有界可测, $supp\,(g) < \infty$, $0 \leqslant g \leqslant f$. 令 $g_k = \min\,(g, f_k)$. 那么 $\forall k$, $supp\,(g_k) < \infty$, $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$, $a.e.x.$ 根据定理 4.3.3,

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k = \int g.$$

由构造

$$g_k \leqslant f_k.$$

因此,

$$\int g = \liminf_{k\to\infty} \int g_k \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int f_k.$$

对 g 取上确界即可. ///

注 4.4.2 这里并不排除 $\int f = \infty$, 或 $\liminf_{k\to\infty} \int f_k = \infty$.

下例指出 Fatou 引理中的不等号可以是严格的.

例 4.4.1 令 $E = (0, 1]$, $\forall k$, $E_k = (0, 1/k)$,

$$f_k(x) = k\chi_{E_k}(x), \ \forall x \in E.$$

显然 $f_k \to f \triangleq 0$, $a.e.x.$ 但

$$0 = \int_E f < \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k = 1.$$