连续函数

定义 1.5.10 函数 f 定义域为 $E \subset \mathbb{R}^n$. f 在 x 处连续如果对 $x, x_n \in E$, $x_n \to x$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

若 f 在 E 上每一点都连续, 则称 f 在 E 上连续.

定理 1.5.9 函数 f 定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. f 在 $x \in E$ 处连续当且仅当 ε-δ 准则成立, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(B(x,\delta) \cap E) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

- 必要性. 用反证法. 设存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$ 有

$$f(B(x,\delta) \cap E) \not\subseteq B(f(x), \varepsilon_0).$$

那么对 $\delta = 1/k$, 就存在 $x_k \in B(x, 1/k) \cap E$ 使得

$$|f(x_k) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0.$$

因此 $x_k \to x$, 但 $f(x_k)$ 不收敛到 $f(x)$, 与连续性矛盾.

充分性. 若 f 在 $x \in E$ 处不连续, 那么存在 $x_k \in E$, $x_k \to x$, $f(x_k)$ 不收敛到 $f(x)$. 因此存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及子列 x_{k_j} 使得

$$\left|f\left(x_{k_j}\right) - f(x)\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

与 ε-δ 准则矛盾. ///

定理 1.5.10 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 函数 f 在 E 上连续当且仅当对 $\forall$ 开集 $G\subset\mathbb{R}$, 存在开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 使得

$$f^{-1}(G)=U\cap E.$$

■ 必要性. 设 f 在 E 上连续 , $G\subset\mathbb{R}$ 开. 任取 $x\in f^{-1}(G)$, $f(x)\in G$, 因此存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(f(x),\varepsilon)\subset G$. 由 ε-δ 准则, 存在 $\forall\delta_x>0$ 使

$$f(B(x,\delta_x)\cap E)\subset B(f(x),\varepsilon)\subset G.$$

令

$$U=\bigcup_{x\in f^{-1}(G)}B(x,\delta_x),$$

那么由于是开球的并集, U 是开集. 且根据构造

$$f^{-1}(G) = U \cap E.$$

充分性. 任取 $x \in E$. 要证 f 在 x 连续. $\forall \varepsilon > 0$, 由充分性条件, 存在开集 $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ 使得

$$f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) = U_\varepsilon \cap E.$$

于是 $x \in U_\varepsilon \cap E, f(U_\varepsilon \cap E) \subset B(f(x), \varepsilon)$. 因 U_ε 开, 存在 $\delta > 0$, $B(x, \delta) \subset U_\varepsilon$. 从而

$$f(B(x, \delta) \cap E) \subset f(U_\varepsilon \cap E) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

由 ε-δ 准则, f 在 x 连续.

1.6 Cantor 集与 Cantor 函数

令

$$C_0 = [0, 1].$$

将 C_0 分为三等分, 并移走中间的开区间, 得到

$$C_1 = \left[1, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

对每一个闭区间重复上述步骤, 得到

$$C_2 = \left[1, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

如此继续, 在第 k 次移除操作之后剩余的集合记为 C_k. 那么 Cantor 集定义为

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

集合列 $\{C_k\}$ 满足: $\forall k \geqslant 0$,

- C_k 由 2^k 个长为 3^{-k} 的闭区间组成
- $C_{k+1} \subset C_k$.

定理 1.6.1 Cantor 集 $\mathfrak{C}$ 满足
(1) $\mathfrak{C}$ 是闭集,
(2) $\mathfrak{C}$ 总长度为零, 即构造过程中移除的开区间长度总和为 1,
(3) $\mathfrak{C}$ 是完全集, 因而是不可数集,

(4) $\mathfrak{C}$ 没有内点.

■ (1) $\forall k$, C_k 是闭集, 因而其交集 $\mathcal{C}$ 仍是闭集.

(2) $\forall k$, 第 k 次移除的开区间长度为 $1/3$ 倍的 C_{k-1} 长度, 移除的开区间长度总和为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 2/3} = 1$$

因此 Cantor 集 $\mathfrak{C}$ 的长度为零.

(3) 任给 $x \in \mathfrak{C}$. 根据构造 $\forall k \geqslant 0$, 都有 $x \in C_k$. 因此 x 应包含于构成 C_k 的 2^k 个长为 3^{-k} 的闭区间中的某一个, 记 x_k 为该区间距 x 较远的端点, 那么

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3^k} \leqslant |x_k - x| \leqslant \frac{1}{3^k},$$

可见 $\{x_k\} \subset \mathfrak{C}$ 是收敛到 x 的点列. 同时 $\forall s \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}|x_{k+s} - x_k| &\geqslant |x_k - x| - |x_{k+s} - x| \\ &\geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}} > 0.\end{aligned}$$

因此 $\{x_k\}$ 是互异的, 从而 x 是 $\mathfrak{C}$ 的极限点.

(4) 只需说明 $\forall x \in \mathfrak{C}$, 任意以它为中心的开球内总有 $\mathfrak{C}$ 之外的点. 为此我们证明 x 能由 $\mathfrak{C}$ 外的点列逼近. 事实上, 用 S_k 表示构造 Cantor 集时在第 k 步移除的开区间的中点全体. 记 y_k 为 S_k 中距 x 最近者. 那么

$$|y_k - x| \leqslant 2\frac{1}{3^k}.$$

因此 $\{y_k\}$ 收敛到 x, 同时该点列不包含于 $\mathfrak{C}$.

记 $O_k = [0,1] \setminus C_k$, 那么 O_k 由 $2^k - 1$ 个开区间组成, 这些开区间从左到右依次记为 $I_j^k \left(j = 1, ..., 2^k - 1\right)$. 令

$$h_k(x) = \begin{cases} \dfrac{j}{2^k}, & x \in I_j^k,\ j = 1, ..., 2^k - 1, \\ linear, & \text{其余} x \in [0,1]. \end{cases}$$

容易看出: $\forall k \geqslant 1, j = 1, ..., 2^k - 1$,

// $h_k \in C([0,1])$ 单调增加,

$$h_k(0) = 0,\ h_k(1) = 1,$$

//

$$h_{k+1}(x) = h_k(x),\ \forall x \in I_j^k,$$

//

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|h_{k+1}(x) - h_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^k},$$

因此 $h_k(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 令

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x), \ \forall x \in [0,1].$$

定义 1.6.1 上述极限函数 $h(x)$ 称为 Cantor 函数, 又称为"魔鬼的阶梯".

由定义得到

定理 1.6.2 Cantor 函数 $h(x)$ 有以下性质:
(1) $h(x)$ 连续,
(2) 单调增加, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$,

(3) $h'(x) = 0, \forall x \in \mathcal{O} = \bigcup_{k=1} \bigcup_{j=1,\ldots,2^k-1} I_j^k.$

注意 $\mathcal{O}$ 是开集族的并集, 因此仍然是开集, 它的长度为 1, 性质 (3) 表明 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上导数几乎为零, 但它却不是常数. 在后面我们更加明确这里的" 几乎" 的含义.