二维离散型随机变量的边缘分布律

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)\qquad i=1,2,\cdots$$

$$=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\text{记作}}{=}p_{i\bullet},$$

y / x	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$p_{2\bullet}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$p_{m\bullet}$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet n}$	1

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} \overset{\text{记作}}{=} p_{\bullet j}, \qquad j = 1,2,\cdots$$

已知联合分布律可以求出边缘分布律；

已知边缘分布律一般不能唯一地求出联合分布律

例3 把三个球等可能地放入编号为1，2，3的三个盒子中，每盒容纳的球数无限. 记 X 为落入1号盒的球数，Y 为落入2号盒的球数，求

(1) (X, Y) 的联合分布律与边缘分布律；

(2) $P(X=Y), P(Y>X)$;

(3) $F(x, y)$

解： (1) X的可能取值为0、1、2、3

Y的可能取值为0、1、2、3

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0\mid X=0)$$

$$=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^3$$

一般的，

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$$

$$=C_3^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}\cdot C_{3-i}^j\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-i-j}$$

$$j=0,\cdots,3-i;\ i=0,1,2,3;$$

其联合分布与边缘分布如下表所示

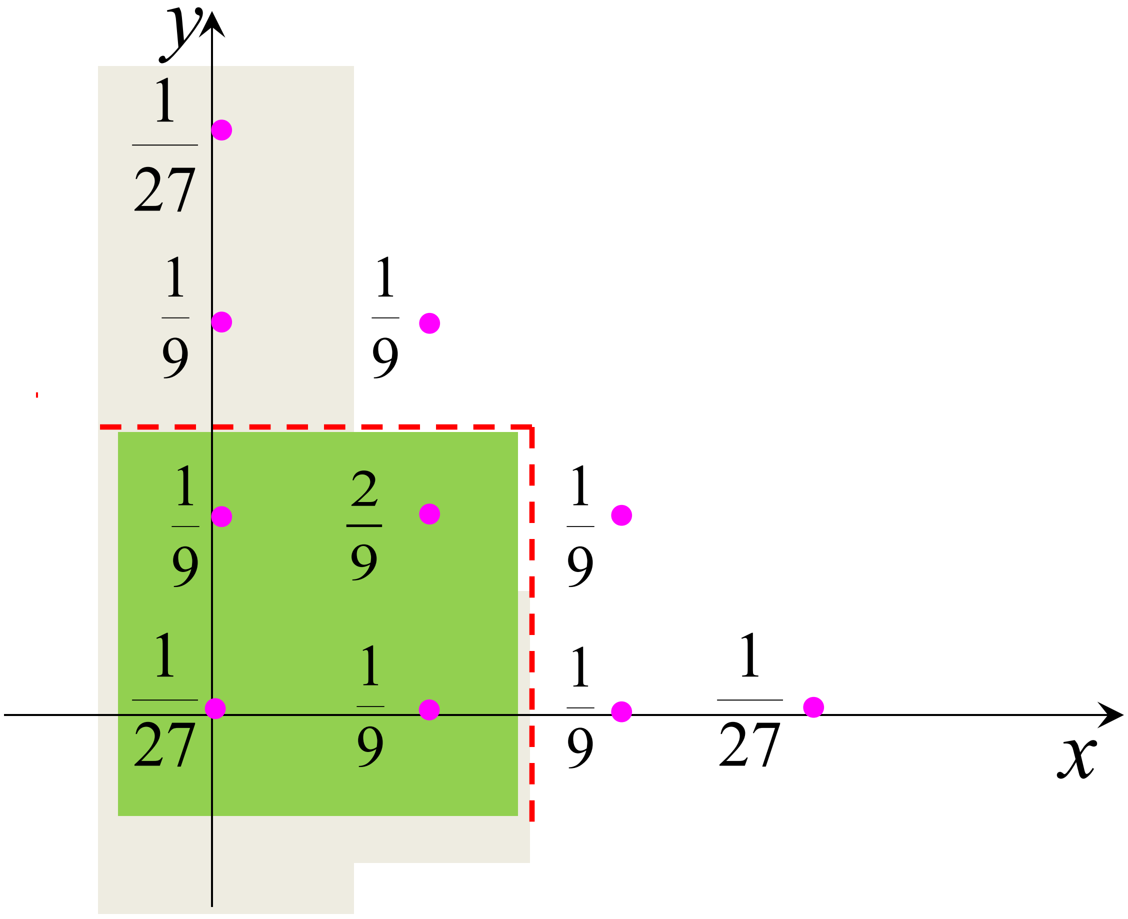
Y \ X (p_{ij})	0	1	2	3	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

(2) 由表可知

$$P(Y = X) = \frac{7}{27}$$

$$P(Y > X) = \frac{10}{27}$$

(3) 要求$F(x,y)$，先将(X,Y)的可能取值画在xoy平面上，对于不同位置的(x,y)求$F(x,y)$:



$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ 或 } y<0, \\ 1/27, & 0\le x<1,\ 0\le y<1, \\ 4/27, & 0\le x<1,\ 1\le y<2, \\ 7/27, & 0\le x<1,\ 2\le y<3, \\ 8/27, & 0\le x<1,\ y\ge 3, \\ 4/27, & 1\le x<2,\ 0\le y<1, \\ 13/27, & 1\le x<2,\ 1\le y<2, \\ 19/27, & 1\le x<2,\ 2\le y<3, \\ 20/27, & 1\le x<2,\ y\ge 3, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
7/27, & 2 \le x < 3,\ 0 \le y < 1, \\
19/27, & 2 \le x < 3,\ 1 \le y < 2, \\
25/27, & 2 \le x < 3,\ 2 \le y < 3, \\
26/27, & 2 \le x < 3,\ y \ge 3, \\
26/27, & 2 \le x < 3,\ y \ge 3, \\
8/27, & x \ge 3,\ 0 \le y < 1, \\
20/27, & x \ge 3,\ 1 \le y < 2, \\
26/27, & x \ge 3,\ 2 \le y < 3, \\
1, & x \ge 3,\ y \ge 3
\end{cases}
$$

例4 把3 个红球和3 个白球等可能地放入编号为 1，2，3 的三个盒子中，每盒容纳的球数无限，记 X 为落入1号盒的白球数，Y 为落入 1 号盒的红球数. 求(X, Y)的联合分布律和边缘分布律.

解

$$P(X=i, Y=j)=P(X=i)P(Y=j \mid X=i)$$

$$=C_3^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}\cdot C_3^j\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-j}$$

$$i, j=0,1,2,3$$

见下表

$Y \backslash X$ (p_{ij})	0	1	2	3	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{8}{27}\cdot\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{27}$	$\frac{1}{27}\cdot\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{8}{27}\cdot\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{9}$	$\frac{1}{27}\cdot\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{8}{27}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

本例与前例有相同的边缘分布，但它们的联合分布却不同. 故

联合分布可以唯一确定边缘分布

但边缘分布却不能唯一确定联合分布

例5 二元两点分布

下面的二维离散型随机变量称为二元两点分布

$Y \backslash X$ (p_{ij})	1	0	$p_{\bullet j}$
1	p	0	p
0	0	q	q
$p_{i\bullet}$	p	q	1

$p+q=1$ ，$0<p<1$

二维连续性随机变量的边缘密度函数

$$F_X(x) = F(x, +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv du$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$$

与离散型随机变量相同，已知联合分布可以求得边缘分布；反之则不能唯一确定.

例6 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：边缘密度函数与边缘分布函数

$$F(x,y)=P\left(X\le x,Y\le y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0 \\ y^4, & 0\le x<1,\ 0\le y<x\ , \\ 2x^2y^2-y^4, & 0\le x<1,\ x\le y<1\ , \\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1,\ y\ge 1\ , \\ y^4, & x\ge 1,\ 0\le y<x\ , \\ 1, & x\ge 1,\ y\ge x\ ,\end{cases}$$

(4) $F_X(x) = F(x, +\infty)$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0\ , \\ 2x^2 - x^4\ , & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y^4\ , & 0 \le y < 1, \\ 1\ , & y \ge 1 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x - 4x^3, & 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

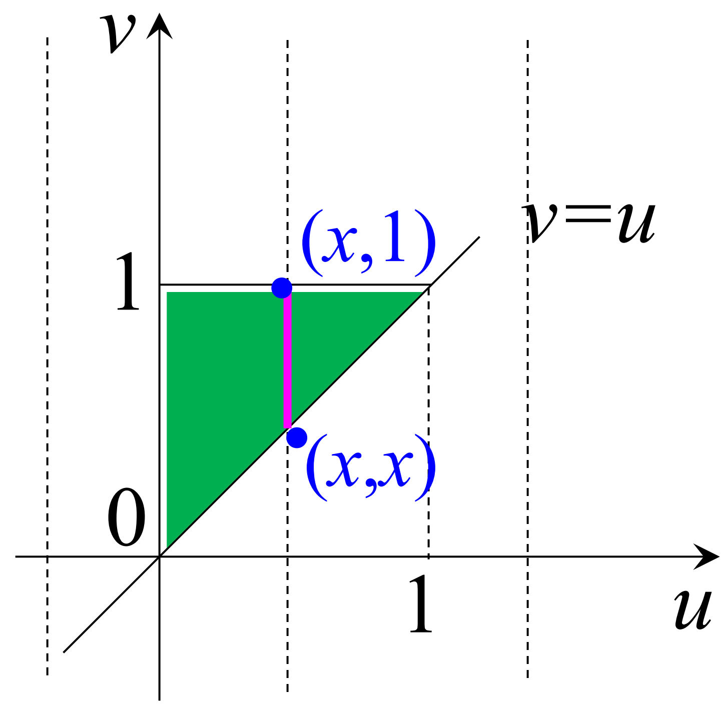
也可以直接由联合密度求边缘密度，再积分求边缘分布函数。

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv$$

$$=\begin{cases}\int_x^1 8xv dv, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\,du$$

$$= \begin{cases} \int_0^y 8uy\,du, & 0 \le y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$