因此

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k - f| = 0.$$

定理 4.5.6 (依测度 DCT) 教材第二版 p183 定理 4.15

积分的进一步性质

定理 4.5.7 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积. 那么 $\forall\varepsilon > 0$,
(1) 存在有限测度集 B(可取为球体) 使得

$$\int_{B^c} |f| \leqslant \varepsilon.$$

(2) (绝对连续性) 存在 $\delta > 0$,

$$\int_E |f| \leqslant \varepsilon,\ \forall E,\ m(E) < \delta.$$

- (1) 不妨设 $f \geqslant 0$, 否则考察 $|f|$. 令

$$f_N(x) = f(x)\,\chi_{B(0,N)}(x).$$

显然 $f_N(x) \geqslant 0, f_N(x) \leqslant f_{N+1}(x)$ 且

$$f_N(x) \to f(x),\ \forall x.$$

由 MCT,

$$\int f_N \to \int f.$$

因此 $\forall\varepsilon>0$, 当 N 充分大时

$$\int_{(B(0,N))^c} f=\int (f-f_N)\leqslant \varepsilon.$$

(2) 同上, 不妨设 $f\geqslant 0$. 令

$$f_N(x)=f(x)\chi_{E_N}(x),$$

其中

$$E_N=\{x:f(x)\leqslant N\}.$$

显然 $f_N(x)\geqslant 0, f_N(x)\leqslant f_{N+1}(x)$ 且

$$f_N(x)\to f(x),\ \forall x.$$

$\forall\varepsilon>0$, 由 MCT, 存在 N 充分大满足

$$0\leqslant\int (f-f_N)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

那么 $\forall E$, 取 $\delta < \varepsilon / (2N)$, 当 $m(E) < \delta$ 就有

$$\begin{aligned}
\int_E f &= \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \\
&\leqslant \int (f - f_N) + \int_E f_N \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + Nm(E) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

下面考察变量的平移变换下积分的不变性质. 任意函数 f 的平移定义为

$$\tau_h f(x) = f(x+h), \ \forall x, \ h \in \mathbb{R}^n.$$

定理 4.5.8 (积分变量的平移变换) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_h f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\int \tau_h f = \int f.$$

- **1**. 若 E 为可测集, $f = \chi_E$. 显然

$$\tau_h \chi_E(x) = \chi_{E_h}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

其中

$$E_h = \{x + h : x \in E\}.$$

由于

$$m(E_h) = m(E).$$

因此
$$\int \tau_h f = \int f.$$

2. 利用积分的线性性质, 结论对简单函数成立.

3. 若 f 为非负可测函数, 那么存在简单函数 $\{\phi_k\}$ 使得 $\forall k$, $\phi_k \leqslant \phi_{k+1}, 0 \leqslant \phi_k \leqslant f$,
$$\phi_k \to f,\ \forall x.$$
容易看出 $\forall k$, $\tau_h\phi_k \leqslant \tau_h\phi_{k+1}, 0 \leqslant \tau_h\phi_k \leqslant \tau_h f$,
$$\tau_h\phi_k \to \tau_h f,\ \forall x.$$
由上一步
$$\int \tau_h\phi_k = \int \phi_k.$$

利用 MCT 得到

$$\int \tau_h f = \int f.$$

4. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么

$$\int \tau_h f^+ = \int f^+, \quad \int \tau_h f^- = \int f^-.$$

因此 $\tau_h f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int \tau_h f = \int f.$$

$/\!/\!/$

例 4.5.4 (逐项积分) 教材第二版 p186 推论 4.16

例 4.5.5 (积分下求导) 教材第二版 p187 定理 4.17

4.6 连续函数与可积函数

记号: $C_c(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支集连续函数全体

定理 4.6.1 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\int |f(x) - \phi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

- 令

$$f_N(x) = f(x)\chi_{E_N}(x),$$

其中

$$E_N = \{x : |x| \leqslant N,\ \ |f(x)| \leqslant N\}.$$

那么

$$|f_N(x)| \leqslant |f(x)|, \ f_N(x) \to f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

根据 DCT, 当 $N > 0$ 充分大,

$$\int |f_N(x) - f(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 Lusin 定理, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E_N$ 使得 f_N 在 F_ε 上连续,

$$m(E_N \backslash F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{8N}.$$

取包含 E_N 的开集 G_ε 满足

$$m(G_\varepsilon \backslash E_N) < \frac{\varepsilon}{8N},$$

那么 $f_N(x)$ 是闭集 $F_\varepsilon \cup G_\varepsilon^c$ 上的连续函数. 运用 *Tietze* 延拓定理, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 ϕ 使得

$$f_N(x) = \phi(x), \ \forall x \in F_\varepsilon \cup G_\varepsilon^c.$$

并且 $|\phi(x)| \leqslant N, \forall x \in \mathbb{R}^n$. 显然 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. 利用上述估计

$$\begin{aligned}
&\int |f(x) - \phi(x)| \, dx \\
&\leqslant \int |f_N(x) - f(x)| \, dx + \int |f_N(x) - \phi(x)| \, dx \\
&= \int |f_N(x) - f(x)| \, dx + \int_{G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon} |f_N(x) - \phi(x)| \, dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon} |f_N(x) - \phi(x)| \, dx
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2Nm\left(G_\varepsilon \backslash F_\varepsilon\right) \leqslant \varepsilon.$$

注 4.6.1 从证明可以看出，若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是有界的，即 $\forall x$, $|f(x)| \leqslant M$，那么 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 也满足 $\forall x$, $|\phi(x)| \leqslant M$.

推论 4.6.1 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么存在 $\phi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得

(1)

$$\lim_{k\to\infty} \int |f(x) - \phi_k(x)|\, dx = 0.$$

(2)

$$\phi_k(x) \to f(x),\ a.e.\ x.$$

■ (1) $\forall k$, 存在 $\psi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$,

$$\int |f(x) - \psi_k(x)|\, dx < \frac{1}{k}.$$

(2) 由 Chebychev 不等式, ψ_k 依测度收敛于 f, 因此存在子列几乎处处收敛于 f. 将这一子列记为 ϕ_k 即可. ///

推论 4.6.2 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 若

$$\int f(x)\,\phi(x)\,dx,\ \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

那么 $f = 0$, $a.e.\ x$.

- 利用定理 4.5.4, 只要证明, $\forall$ 可测集 E,

$$\int_E f = 0.$$

1. 若 $m(E) < \infty$. 那么 $\chi_E(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 因此存在 $\phi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\phi_k(x) \to \chi_E(x),\ a.e.\ x.$$

且 (见注 4.6.1)

$$|\phi_k(x)| \leqslant 1, \ \forall x.$$

根据 DCT,

$$\int_E f(x)\,dx = \int f(x)\,\chi_E(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int f(x)\,\phi_k(x)\,dx = 0.$$

2. 令

$$E_N = E \cap B(0,N).$$

由前一步可知, $\forall N > 0$

$$\int_{E_N} f(x)\,dx = 0.$$

根据 DCT,

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f(x)\,dx = 0.$$

定理 4.6.2 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么

$$\lim_{h \to 0} \int |\tau_h f(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

- $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\int |f - \phi| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

利用积分变量的平移变换,

$$\int |\tau_h f - \tau_h \phi| = \int |f - \phi|.$$

根据 DCT,

$$\lim_{h\to 0}\int|\tau_h\phi-\phi|=0.$$

因此当 $h>0$ 充分小,

$$\begin{aligned}\int|\tau_hf-f|&\leqslant\int|\tau_hf-\tau_h\phi|+\int|\tau_h\phi-\phi|+\int|\phi-f|\\&=2\int|\phi-f|+\int|\tau_h\phi-\phi|\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$