Lecture 14

随机过程

ruanyl@buaa.edu.cn
September 2016, Beihang University

14.1 基本概念

定义 14.1.1 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 参数集合 $\mathbb{T}$ 以及状态空间 $\mathbb{S}$. 映射 $X(t,\omega) : \mathbb{T}\times\Omega \mapsto S$ 称为以 $\mathbb{T}$ 为指标集的随机过程, 对每一个 t, $X(t,\omega)$ 是一个随机变量. 通常写作 $X = \{X_t : t \in T\}$ 或者 $\{X_t\}$.

参数集 $\mathbb{T}$ 可以是离散集合如 $\{0, 1, 2, ...\}$, 这时称 $\{X_t\}$ 为离散参数随机过程; $\mathbb{T}$ 也可以是区间, 例如 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = [0, +\infty)$ 等, 这时称 $\{X_t\}$ 为连续参数随机过程; $\mathbb{S}$ 称为 $\{X_t\}$ 的状态空间 (可数或不可数)

定义 14.1.2 $\{X_t\}$ 为随机过程. 对任意正整数 $m \geqslant 1$, 以及 $t_1, ..., t_m \in \mathbb{T}$, 随机向量 $(X_{t_1}, ..., X_{t_m})$ 的分布被称为 $\{X_t\}$ 的有限维分布.

例题 14.1.1 无穷 Bernoulli 试验 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是参数集为 $T = \{1, 2, ...\}$, 状态空间为 $\{0, 1\}$ 的随机过程, 即 Bernoulli 过程.

例题 14.1.2 用 X_t 表示截至 t 时刻为止, 达到银行的客户数目, 那么 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个状态空间为 $\{0,1,...\}$ 的随机过程

例题 14.1.3 英国生物学家观察到花粉在水中会不停地运动, 用 X_t 表示 t 时刻水中花粉位置的一个坐标, 那么 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个状态空间为 $\mathbb{R}$ 的随机过程, 被称为 Brownian 运动.

定义 14.1.3 $\{X_t\}$ 为随机过程. 它在 t 处的期望记作 $m(t) = E(X_t)$. 在 (s,t) 处的自相关函数与自协方差函数分别定义为

$$R(s,t) = E(X_sX_t),$$

$$C(s,t) = R(s,t) - m(s)\,m(t)$$

X_t 的方差 $Var(X_t) = C(t,t)$.

例题 14.1.4 假设 $\{X_k, k=1,2,...\}$ 为 Bernoulli 过程, $P(X_k=1) = p$. 那么 $E(X_k) = E\left(X_k^2\right) = p$, $Var(X_k) = p(1-p)$. 对任意 $k_1\neq k_2$, $R(k_1,k_2) = E(X_{k_1}X_{k_2}) = p^2$, $C(k_1,k_2) = 0$.

14.2 平稳随机过程

定义 14.2.1 称 $\{X_t : t \in T\}$ 为严平稳过程, 若对任意 $n \geqslant 1$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及 s, 总有 $(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$ 与 $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 同分布.[1]

定义 14.2.2 称 $\{X_t : t \in T\}$ 为 (宽) 平稳过程, 若存在 $m \in \mathbb{R}$ 以及函数 $b(h)$ 满足:

(1) $E\left(X_t^2\right) < \infty, \forall t \in T$;

(2) $E(X_t) = m, \forall t \in T$;

(3) $R(s,t) = b(s-t), \forall s,t \in T$

在定义中取 $s = t$, 便有 $E\left(X_t^2\right) = R(t,t) = b(0)$, 不依赖于 t. 另外其协方差函数 $C(s, s+t)$ 只依赖于 t, 常简写为 $C(t) = C(s, s+t)$.

容易看出, 二阶矩存在的严平稳过程一定是 (宽) 平稳过程. 反过来的叙述不一定成立, 然而正太过程是一个例外.

[1]这里仅考虑实值过程

定义 14.2.3 任何有限维分布都服从 (多元) 正太分布的随机过程称为 Gaussian 过程, 或正太过程.

例题 14.2.1 $\{X_t\}$ 为 Gaussian 过程. 那么 $\{X_t\}$ 为平稳过程当且仅当它是严平稳过程

■ 由于正太分布存在各阶矩, 因此严平稳 Gaussian 过程一定是平稳过程. 反之, 假设 Gaussian 过程 $\{X_t\}$ 是平稳的, 那么对任意 $n \geqslant 1$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及 s, $(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$ 与 $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 都服从正态分布, 并且由平稳性, 它们也具有相同的期望和协方差矩阵, 因此 $(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$ 与 $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 具有相同的正太分布, 从而是严平稳过程. ///

定理 14.2.1 平稳过程自协方差函数 $C(t)$ 有如下性质

(1) $|C(t)| \leqslant C(0), \forall t \in T$;

(2) $C(-t) = C(t)$;

(3) $C(t)$ 是非负定函数, 即对任意 $t_1, t_2, ..., t_n$ 以及 $z_1, z_2, ..., z_n$

$$\sum_{i,j} C(t_i - t_j) z_i z_j \geqslant 0$$

■ (1) $Var(X_t) = C(t, t+0) = C(0) \geqslant 0$. 因此, 若 $C(0) > 0$, 那么 X_{s+t} 与 X_s 的相关系数为

$$\frac{C(s+t, s)}{[Var(X_{s+t})]^{1/2}[Var(X_s)]^{1/2}} = \frac{C(t)}{C(0)}$$

因此总有 $|C(t)| \leqslant C(0)$. (2)(3) 由协方差 (矩阵) 的性质直接得到.

例题 14.2.2 假设 Y 为任意随机变量, $X_t = Y, \forall t \in T$. 那么 $\{X_t\}$ 为平稳过程. 如果 Y 还具有有限方差, 那么 $\{X_t\}$ 是严平稳过程.

协方差函数

$$C(t)=\sigma^2,\forall t.$$

容易看出

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{a.e.}Y.$$

例题 14.2.3 假设 $\{X_k,k=1,2,\ldots\}$ 是方差 $\sigma^2<\infty$ 的独立同分布序列组成的随机过程, 那么 $\{X_k\}$ 是严平稳过程, 协方差函数

$$C(0)=\sigma^2,C(k)=0,\forall k\neq 0.$$

根据大数定律

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{a.e.}E(X_1).$$

14.3 遍历过程

$\{X_t\}$ 为 (宽) 平稳过程, 记

$$\langle X\rangle_t = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} X_s ds$$

这一积分在适当条件下有意义, 例如假设 $s \longrightarrow E\left(X_s^2\right)$ 是局部有界的, 即 $\sup_{L>0}\left\{E\left(X_s^2\right) : |s| < L\right\} < \infty, \forall L > 0$. 那么

$$E\left(\int_{-t}^{t} |X_s|\, ds\right) = \int_{-t}^{t} E\,|X_s|\, ds = \int_{-t}^{t} \left[E\left(X_s^2\right)\right]^{1/2} ds < \infty$$

从而 $\int_{-t}^{t} |X_s|\, ds < \infty$ (几乎处处). 以下总假设使得 $\langle X\rangle_t$ 有意义的条件成立.

定义 14.3.1 $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ 为平稳过程, $E\left(X_t\right) = m, \forall t \in T$. 称 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性, 如果

$$\lim_{t\to+\infty} E\left[\left(\langle X\rangle_t - m\right)^2\right] \to 0.$$

注记 14.3.1 对离散时间参数随机过程可以类似地定义 (均方) 均值遍历性, 并证明均值遍历性的充分必要条件, 只需将积分替换为相应的求和.

注意到

$$E\left(\langle X\rangle_t\right)=\frac{1}{2t}E\left(\int_{-t}^{t}X_s ds\right)=\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}E\left(X_s\right)ds=m$$

因此 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性当且仅当 $\sigma_t^2=Var\left(\langle X\rangle_t\right)\to 0$. 下面来计算 σ_t^2. 先计算

$$\begin{aligned}E\left[\left(\langle X\rangle_t\right)^2\right]&=\frac{1}{4t^2}E\left[\int_{-t}^{t}X_u du\int_{-t}^{t}X_v dv\right]\\&=\frac{1}{4t^2}E\left[\int_{-t}^{t}\int_{-t}^{t}X_uX_v du dv\right]\\&=\frac{1}{4t^2}\int_{-t}^{t}\int_{-t}^{t}E\left(X_uX_v\right)du dv\end{aligned}$$

从而

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \frac{1}{4t^2}\int_{-t}^{t}\int_{-t}^{t}\left[E\left(X_uX_v\right)-m^2\right]dudv \\
&= \frac{1}{4t^2}\int_{-t}^{t}\int_{-t}^{t}C\left(u-v\right)dudv \\
&= \frac{1}{4t^2}\int_{-2t}^{2t}C\left(\tau\right)\left(2t-\left|\tau\right|\right)d\tau \;\; \left(\tau=u-v,\gamma=v\right)
\end{aligned}
$$

总结起来就有

定理 14.3.1 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性当且仅当

$$
\lim_{t\to+\infty}\sigma_t^2=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^{2t}C\left(\tau\right)\left(1-\frac{\tau}{2t}\right)d\tau=0.
$$

借助这一结论, 可以证明另一个更为简洁的均值遍历性充分必要条件.

定理 14.3.2 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性当且仅当

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C(\tau)\,d\tau=0$$

- (I) 假设

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^s C(\tau)\,d\tau=0.$$

那么, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 c_0 使得

$$\frac{1}{s}\int_c^s C(\tau)\,d\tau<\varepsilon,\forall c\geqslant c_0.$$

又有

$$\sigma_t^2=\frac{1}{t}\int_0^{2t} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2t}\right)d\tau$$

$$
= \frac{1}{t}\int_0^{c_0} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2t}\right)d\tau + \frac{1}{t}\int_{c_0}^{2t} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2t}\right)d\tau
$$

其中

$$
\frac{1}{t}\int_0^{c_0} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2t}\right)d\tau < \frac{c_0}{t}C(0)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_{c_0}^{2t} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2t}\right)d\tau &= \frac{1}{2t^2}\int_{c_0}^{2t} C(\tau)(2t-\tau)\,d\tau \\
= \frac{1}{2t^2}\int_{c_0}^{2t} C(\tau)\int_{\tau}^{2t} ds\,d\tau &= \frac{1}{2t^2}\int_{c_0}^{2t}\int_{c_0}^{s} C(\tau)\,d\tau\,ds
\end{aligned}
$$

因而, 当 $t \to +\infty$ 时就有

$$
\sigma_t^2 < \frac{c_0}{t}C(0) + \frac{\varepsilon}{2t^2}\int_{c_0}^{2t} s\,ds \to 2\varepsilon
$$

由 ε 的任意性可知 $\lim_{t\to+\infty}\sigma_t^2 = 0$, 从而 $\{X_t\}$ 具有均值遍历性.

(II) 假设 $\{X_t\}$ 具有均值遍历性, 那么 $\lim_{t\to+\infty}\sigma_t^2=0$. 由于

$$
\begin{aligned}
cov\left(\langle X\rangle_t, X_0\right) &= E\left[\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}(X_s-m)(X_0-m)\,ds\right] \\
&= \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}E\left[(X_s-m)(X_0-m)\right]ds \\
&= \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}C(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_{0}^{t}C(\tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

另一方面, $t\to+\infty$,

$$
\left[cov\left(\langle X\rangle_t, X_0\right)\right]^2 \leqslant Var\left(\langle X\rangle_t\right)Var\left(X_0\right)=\sigma_t^2 C(0)\to 0
$$

因此

$$
\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C(\tau)\,d\tau=0.
$$