

Lecture 5

随机变量的函数

Probability and Statistics
Beihang University

5.1 一元随机变量的函数

很多时候我们关心的不仅仅是随机变量本身, 同时也关心通过已知随机变量所描述的其他数量的分布情况, 例如

例题 5.1.1 假设 X 在整数集合 $C = \{1, 2, \dots, 9\}$ 上是均匀分布的. 想要知道 X 与集合 C 中点 5 距离的分布情况, 因而我们考虑 $Y = |X - 5|$. 显然 Y 也是一个随机变量, 并且它是随机变量 X 的函数. Y 的分布可以由 X 的分布来确定. Y 的取值范围是 $\{0, 1, \dots, 4\}$. 由于 $P(X = i) = \frac{1}{9}, i = 1, 2, \dots, 9$, 因此

$$P(Y = j) = \begin{cases} P(X \in \{5\}) = \frac{1}{9}, & j = 0 \\ P(X \in \{4, 6\}) = \frac{2}{9}, & j = 1 \\ P(X \in \{3, 7\}) = \frac{2}{9}, & j = 2 \\ P(X \in \{2, 8\}) = \frac{2}{9}, & j = 3 \\ P(X \in \{1, 9\}) = \frac{2}{9}, & j = 4 \end{cases}$$

一般地

定理 5.1.1 如果 X 是一个离散随机变量, Y 是随机变量 X 的函数, $Y = h(X)$, 那么 Y 的概率函数可以写作

$$g(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} P(X = x)$$

其中 $h^{-1}(y)$ 表示 y 在 h 作用下的原象集 $\{x : h(x) = y\}$.

我们经常用 $h^{-1}(C)$ 来表示使得 $h(x)$ 取值在 C 中的 x 的集合, $h^{-1}(C) = \{x : h(x) \in C\}$. 上面这个定理的一个特殊情形是 $h(x)$ 为严格单调函数, 此时 $h^{-1}(y)$ 仅有一个点, 我们有

定理 5.1.2 如果 X 是一个离散随机变量, 它的概率函数是 $f(x)$. Y 是随机变量 X 的函数, $Y = h(X)$, 那么 Y 的概率函数可以写作

$$g(y) = P(X = h^{-1}(y)) = f(h^{-1}(y))$$

定理 5.1.3 如果连续型随机变量 X 的密度和分布函数分别为 $f(x), F(x), P(X \in \mathcal{S}) = 1$. Y 是随机变量 X 的函数 $Y = h(X)$, 并且 $h(x)$ 是 \mathcal{S} 上的严格单调的可微分函数. 令 $\mathcal{T} = \phi(\mathcal{S})$, 那么 Y 的密度函数为

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| \cdot 1_{\mathcal{T}}(y)$$

这里 $1_{\mathcal{T}}(y)$ 表示集合 \mathcal{T} 上的特征函数: $1_{\mathcal{T}}(y) = 1$ 如果 $y \in \mathcal{T}$, 否则为 0.

■ 我们证明 $h(x)$ 是严格单调减少的情形. 由于 $h(x)$ 严格单调, 于是 $h^{-1}(y)$ 在 \mathcal{T} 上存在, 并且也是严格单调减少的. 按定义 Y 的分布函数在 $y \in \mathcal{T}$ 时为

$$P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y)$$

$$\begin{aligned}
&= P(X \geq h^{-1}(y)) \\
&= 1 - P(X < h^{-1}(y)) \\
&= 1 - P(X \leq h^{-1}(y)) \\
&= 1 - F(h^{-1}(y))
\end{aligned}$$

这里我们用到了连续型随机变量分布函数的连续性. 等式两边对 y 求导数

$$\begin{aligned}
g(y) &= -f(h^{-1}(y)) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \\
&= f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|.
\end{aligned}$$

///

例题 5.1.2 已知微生物繁殖速度是指数增长的. 在 0 时刻将 v 个微生物放入一个水池中, 用 X 表示微生物增长率. 经过时间 t 小

时之后, 微生物的数量将变为 ve^{Xt} . 现假设 $v = 10$, X 的分布函数为

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试确定 5 小时之后, 微生物数量的分布.

■ 令 $h(x) = 10e^{5x}$, $\mathcal{S} = (0, 1)$. 则 $h(x)$ 是一个严格递增函数, 它将 \mathcal{S} 映射为 $\mathcal{T} = (10, 10e^5)$, $h^{-1}(y) = \frac{1}{5} \ln \frac{y}{10}$, $h'(x) = 50e^{5x}$. 因此

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} = \frac{1}{5y}.$$

从而微生物的数量 $Y = h(X)$ 的分布为

$$g(y) = \begin{cases} \frac{3(1-\frac{1}{5} \ln \frac{y}{10})^2}{5y}, & y \in (10, 10e^5) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



5.2 多元随机变量的函数

与一元情形类似我们有

定理 5.2.1 如果 (X_1, X_2) 是一个离散联合分布, 它的概率函数是 $f(x, y)$. (Y_1, Y_2) 是 (X_1, X_2) 的函数,

$$\phi : (X_1, X_2) \mapsto (Y_1 = \phi_1(X_1, X_2), Y_2 = \phi_2(X_1, X_2)).$$

那么 (Y_1, Y_2) 的联合概率函数可以写作

$$g(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \sum_{(x_1, x_2) \in \phi^{-1}(y_1, y_2)} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

其中 $\phi^{-1}(y_1, y_2)$ 表示 (y_1, y_2) 在 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ 作用下的原象集 $\{(x_1, x_2) : \phi_1(x_1, x_2) = y_1, \phi_2(x_1, x_2) = y_2\}$.

定理 5.2.2 如果 (X_1, X_2) 是具有密度函数 $f(x_1, x_2)$ 的连续型分布.
 $P((X_1, X_2) \in \mathcal{S}) = 1$. (Y_1, Y_2) 是 (X_1, X_2) 的可微分函数,

$$\phi : (X_1, X_2) \mapsto (Y_1 = \phi_1(X_1, X_2), Y_2 = \phi_2(X_1, X_2)).$$

并且 (Y_1, Y_2) 是 (X_1, X_2) 一一对应, 即 (X_1, X_2) 也可以表示为 (Y_1, Y_2) 的函数

$$\psi : (Y_1, Y_2) \mapsto (X_1 = \psi_1(Y_1, Y_2), X_2 = \psi_2(Y_1, Y_2)).$$

令 $\mathcal{T} = \phi(\mathcal{S})$. 那么 (Y_1, Y_2) 的联合概率函数是 (注意绝对值)

$$g(y_1, y_2) = f(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)) \left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| \cdot 1_{\mathcal{T}}(y_1, y_2)$$

其中

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

为 Jacobian 行列式.

上面的定理可以直接地推广到多个变量的情形, 在此不做详述.

例题 5.2.1 如果 (X_1, X_2) 是具有密度函数 $f(x_1, x_2)$ 的连续型分布. $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + b$, ($a_1 \neq 0$). 那么 Y 具有连续型分布, 其密度函数为

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{|a_1|} dx_2.$$

■ 假设 $a_1 > 0$. ($a_1 < 0$ 证明类似). 令

$$A_y = \{(x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 + b \leq y\}$$

那么 Y 的分布函数为

$$G(y) = \int \int_{A_y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{(y-a_2x_2-b)/a_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

对内层积分进行变量代换, 令 $z = a_1x_1 + a_2x_2 + b$, 那么 $dz = a_1dx_1$,

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f\left(\frac{z - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{a_1} dz dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{a_1} dx_2 \right) dz \end{aligned}$$

由此可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{a_1} dx_2$$

正是所求的密度函数.



该结论的一个特殊情形是 $Y = X_1 + X_2$, 此时我们有

定理 5.2.3 如果 (X_1, X_2) 是具有密度函数 $f(x_1, x_2)$ 的连续型分布. 那么 $Y = X_1 + X_2$ 具有连续型分布, 其密度函数为

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - x_2, x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y - x_1) dx_1.$$

随机变量 Y 的分布称为 X_1 与 X_2 分布的卷积.

例题 5.2.2 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 具有同样分布函数 $F(x)$. 确定下列随机变量的分布

$$Y_1 = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}, Y_n = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

并确定 Y_1 与 Y_n 的联合分布

■ 由独立性, Y_n 的分布函数为

$$G_n(y) = P(Y_n \leq y)$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y) \\
&= P(X_1 \leq y) P(X_2 \leq y) \cdots P(X_n \leq y) \\
&= [F(y)]^n
\end{aligned}$$

Y_1 的分布函数为

$$\begin{aligned}
&G_1(y) \\
&= P(Y_1 \leq y) \\
&= 1 - P(Y_1 > y) \\
&= 1 - P(X_1 > y) P(X_2 > y) \cdots P(X_n > y) \\
&= 1 - [1 - F(y)]^n
\end{aligned}$$

注意

$$\{Y_n \leq y\} = \{Y_n \leq y\} \cap \{Y_1 \leq y\} + \{Y_n \leq y\} \cap \{Y_1 > y\}$$

因此 Y_1 与 Y_n 的联合分布函数 ($y_n \geq y_1$)

$$G(y_1, y_n)$$

$$\begin{aligned}
&= P(Y_n \leq y_n, Y_1 \leq y_1) \\
&= P(Y_n \leq y_n) - P(Y_n \leq y_n, Y_1 > y_1) \\
&= [F(y_n)]^n - P(y_1 < X_1 \leq y_n) \cdots P(y_1 < X_n \leq y_n) \\
&= [F(y_n)]^n - [F(y_n) - F(y_1)]^n
\end{aligned}$$



例题 5.2.3 假设 X, Y 独立, 具有同样的指数密度函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

确定 $U = X + Y$ 与 $V = X/Y$ 的密度, 并证明 U 与 V 相互独立.

■ 由题可知 X, Y 的联合密度为

$$h(x, y) = f(x)f(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

下面求 U 与 V 联合密度. 考虑变量替换

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x/y, \end{cases} \quad x, y > 0$$

它存在唯一反函数

$$\begin{cases} x = \frac{uv}{1+v}, \\ y = \frac{u}{1+v}, \end{cases} \quad u, v > 0$$

于是 Jacobian 行列式的绝对值为

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u(1+v)-uv}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} \right| = \frac{u}{(1+v)^2}$$

因此 U 与 V 联合密度为

$$g(u, v) = \exp\left(-\left(\frac{uv}{1+v} + \frac{u}{1+v}\right)\right) \cdot \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$= ue^{-u} \cdot \frac{1}{(1+v)^2}$$

由此可见 U 与 V 相互独立. U, V 的分布分别是

$$g_U(u) = ue^{-u}, u > 0$$

$$g_V(v) = \frac{1}{(1+v)^2}, v > 0$$

