Lecture 15

Markov 链

ruanyl@buaa.edu.cn
September 2016, Beihang University

15.1　随机游动

一个赌徒的游戏中, 赌徒 G 投掷一枚硬币 (正面出现概率为 p), 正面出现时获得一个金币, 反面出现时减少一个金币. 用 S_n 表示游戏进行到第 n 步 (投掷硬币 n 次) 时赌徒 G 的金额总数. S_0 表示初始金币数量.

S_n 可以分解为独立同分布随机变量之和, 令 $X_i = 1$, 如果第 i 次投掷出现正面; $X_i = -1$, 如果第 i 次投掷出现反面; $P(X_i = 1) = p$. 那么

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

S_n 常常被称为简单随机游动, 若 $P(X_i = 1) = p = 1/2$, 那么称之为对称的. S_n 具有如下重要性质.

引理 15.1.1 S_n 具有**空间齐次性**:

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_n = j + b | S_0 = a + b).$$

- 两边都等于 $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = j\right)$.

引理 15.1.2 S_n 具有**时间齐次性**:

$$P\left(S_n = j | S_0 = a\right) = P\left(S_{n+m} = j | S_m = a\right).$$

- 由于 $\{X_i\}$ 是独立同分布的,

$$P\left(S_n = j | S_0 = a\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a\right) = P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i = j - a\right)$$
$$= P\left(S_{n+m} = j | S_m = a\right)$$

引理 15.1.3 S_n 具有 **Markov 性质**: $\forall m \geqslant 1, \forall j, s_0, \ldots, s_m$,

$$P\left(S_{m+n} = j | S_m = s_m, \ldots, S_0 = s_0\right) = P\left(S_{n+m} = j | S_m = s_m\right).$$

这一性质也常常写作, $\forall j$,

$$P\left(S_{m+n} = j | S_m, \ldots, S_0\right) = P\left(S_{n+m} = j | S_m\right).$$

- 注意 $\{S_{m+n}=j\}=\left\{\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i=j-S_m\right\}$ 以及
$\{S_m=s_m,\ldots,S_0=s_0\}=\{X_m=s_m-s_{m-1},\ldots,X_1=s_1-s_0\}$.

由条件概率的定义和 $\{X_i\}$ 的独立性, 直接计算得到

$$
\begin{aligned}
LHS &= \frac{P\left(S_{m+n}=j,S_m=s_m,\ldots,S_0=s_0\right)}{P\left(S_0=s_0,\ldots,S_m=s_m\right)} \\
&= \frac{P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i=j-s_m, X_m=s_m-s_{m-1},\ldots,X_1=s_1-s_0\right)}{P\left(X_m=s_m-s_{m-1},\ldots,X_1=s_1-s_0\right)} \\
&= \frac{P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i=j-s_m\right)P\left(X_m=s_m-s_{m-1},\ldots,X_1=s_1-s_0\right)}{P\left(X_m=s_m-s_{m-1},\ldots,X_1=s_1-s_0\right)} \\
&= P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i=j-s_m\right)=P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i=j-S_m \middle| S_m=s_m\right) \\
&= P\left(S_m=j \middle| S_m=s_m\right)=RHS
\end{aligned}
$$

15.2 离散时间 Markov 链

以下主要介绍离散时间参数 Markov 链. 假设 S 为**可数**状态空间. $|S|$ 表示状态数目.

定义 15.2.1 称 $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$ 为 (离散时间)Markov 链, 如果 $X_0 \sim \lambda$, 且满足 Markov 条件 $(\mathbf{M}_0)$: 对 $\forall n \geqslant 0, \forall i_0, ..., i_{n+1} \in S$,

$$P\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, ..., X_0 = i_0\right) = P\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\right).$$

Markov 条件的两个等价形式

- $(\mathbf{M}_1)$ 对 $\forall n \geqslant 0, \forall n_1 < \cdots < n_k \leqslant n, \forall i_{n+1}, i_{n_1}, ..., i_{n_k} \in S$,

$$P\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_{n_k} = i_{n_k}, ..., X_{n_1} = i_{n_1}\right) = P\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_{n_k} = i_{n_k}\right).$$

- $(\mathbf{M}_2)$ 对 $\forall m, n \geqslant 0, \forall i_{m+n}, i_0, ..., i_m \in S$,

$$P\left(X_{m+n} = i_{m+n} | X_m = i_m, ..., X_0 = i_0\right) = P\left(X_{m+n} = i_{m+n} | X_m = i_m\right).$$

习题 15.2.1 假设 $\{B_j, j = 1, 2, ..., k\}$ 是全空间的划分. 试证明

$$P(A|C) = \sum_{j=1}^{k} P(A|B_j \cap C) P(B_j|C)$$

习题 15.2.2 试证明 $(\mathbf{M}_0)\Leftrightarrow(\mathbf{M}_1)$, $(\mathbf{M}_0)\Leftrightarrow(\mathbf{M}_2)$.

随机游动是一个简单的 Markov 链, 其状态的变化是由转移概率 $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ 确定的. 一般的 Markov 链亦是如此.

定义 15.2.2 Markov 链 $\{X_n\}$ 的转移概率矩阵 $\mathbf{P} = (p_{ij})$ 是由转移概率

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$$

组成的 $|S| \times |S|$ 矩阵.