

Lecture 14

随机过程

ruanyl@buaa.edu.cn

September 2016, Beihang University

14.1 基本概念

定义 14.1.1 给定概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) , 参数集合 \mathbb{T} 以及状态空间 S . 映射 $X(t, \omega) : \mathbb{T} \times \Omega \mapsto S$ 称为以 \mathbb{T} 为指标集的随机过程, 对每一个 t , $X(t, \omega)$ 是一个随机变量. 通常写作 $X = \{X_t : t \in T\}$ 或者 $\{X_t\}$.

参数集 \mathbb{T} 可以是离散集合如 $\{0, 1, 2, \dots\}$, 这时称 $\{X_t\}$ 为离散参数随机过程; \mathbb{T} 也可以是区间, 例如 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = [0, +\infty)$ 等, 这时称 $\{X_t\}$ 为连续参数随机过程; S 称为 $\{X_t\}$ 的状态空间 (可数或不可数)

定义 14.1.2 $\{X_t\}$ 为随机过程. 对任意正整数 $m \geq 1$, 以及 $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{T}$, 随机向量 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ 的分布被称为 $\{X_t\}$ 的有限维分布.

例题 14.1.1 无穷 Bernoulli 试验 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是参数集为 $T = \{1, 2, \dots\}$, 状态空间为 $\{0, 1\}$ 的随机过程, 即 Bernoulli 过程.

例题 14.1.2 用 X_t 表示截至 t 时刻为止, 达到银行的客户数目, 那么 $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ 是一个状态空间为 $\{0, 1, \dots\}$ 的随机过程

例题 14.1.3 英国生物学家观察到花粉在水中会不停地运动, 用 X_t 表示 t 时刻水中花粉位置的一个坐标, 那么 $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ 是一个状态空间为 \mathbb{R} 的随机过程, 被称为 Brownian 运动.

定义 14.1.3 $\{X_t\}$ 为随机过程. 它在 t 处的期望记作 $m(t) = E(X_t)$. 在 (s, t) 处的自相关函数与自协方差函数分别定义为

$$R(s, t) = E(X_s X_t),$$

$$C(s, t) = R(s, t) - m(s)m(t)$$

X_t 的方差 $\text{Var}(X_t) = C(t, t)$.

例题 14.1.4 假设 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 为 Bernoulli 过程, $P(X_k = 1) = p$. 那么 $E(X_k) = E(X_k^2) = p$, $\text{Var}(X_k) = p(1-p)$. 对任意 $k_1 \neq k_2$, $R(k_1, k_2) = E(X_{k_1} X_{k_2}) = p^2$, $C(k_1, k_2) = 0$.

14.2 平稳随机过程

定义 14.2.1 称 $\{X_t : t \in T\}$ 为严平稳过程, 若对任意 $n \geq 1, t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及 s , 总有 $(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s})$ 与 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 同分布.¹

定义 14.2.2 称 $\{X_t : t \in T\}$ 为 (宽) 平稳过程, 若存在 $m \in \mathbb{R}$ 以及函数 $b(h)$ 满足:

- (1) $E(X_t^2) < \infty, \forall t \in T;$
- (2) $E(X_t) = m, \forall t \in T;$
- (3) $R(s, t) = b(s - t), \forall s, t \in T$

在定义中取 $s = t$, 便有 $E(X_t^2) = R(t, t) = b(0)$, 不依赖于 t . 另外其协方差函数 $C(s, s+t)$ 只依赖于 t , 常简写为 $C(t) = C(s, s+t)$.

容易看出, 二阶矩存在的严平稳过程一定是 (宽) 平稳过程. 反过来的叙述不一定成立, 然而正太过程是一个例外.

¹这里仅考虑实值过程

定义 14.2.3 任何有限维分布都服从 (多元) 正态分布的随机过程称为 Gaussian 过程, 或正太过程.

例题 14.2.1 $\{X_t\}$ 为 Gaussian 过程. 那么 $\{X_t\}$ 为平稳过程当且仅当它是严平稳过程

■ 由于正态分布存在各阶矩, 因此严平稳 Gaussian 过程一定是平稳过程. 反之, 假设 Gaussian 过程 $\{X_t\}$ 是平稳的, 那么对任意 $n \geq 1, t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及 s , $(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s})$ 与 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 都服从正态分布, 并且由平稳性, 它们也具有相同的期望和协方差矩阵, 因此 $(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s})$ 与 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 具有相同的正态分布, 从而是严平稳过程. //

定理 14.2.1 平稳过程自协方差函数 $C(t)$ 有如下性质

- (1) $|C(t)| \leq C(0), \forall t \in T$;
- (2) $C(-t) = C(t)$;

(3) $C(t)$ 是非负定函数, 即对任意 t_1, t_2, \dots, t_n 以及 z_1, z_2, \dots, z_n

$$\sum_{i,j} C(t_i - t_j) z_i z_j \geq 0$$

■ (1) $\text{Var}(X_t) = C(t, t+0) = C(0)$. 因此 X_{s+t} 与 X_s 的相关系数为

$$\frac{C(s+t, s)}{[\text{Var}(X_{s+t})]^{1/2} [\text{Var}(X_s)]^{1/2}} = \frac{C(t)}{C(0)}$$

因此总有 $|C(t)| \leq C(0)$. (2)(3) 由协方差 (矩阵) 的性质直接得到. //

例题 14.2.2 假设 Y 为任意随机变量, $X_t = Y, \forall t \in T$. 那么 $\{X_t\}$ 为平稳过程. 如果 Y 还具有有限方差, 那么 $\{X_t\}$ 是严平稳过程. 协方差函数

$$C(t) = \sigma^2, \forall t.$$

容易看出

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.e.} Y.$$

例题 14.2.3 假设 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ 是方差 $\sigma^2 < \infty$ 的独立同分布序列组成的随机过程, 那么 $\{X_k\}$ 是严平稳过程, 协方差函数

$$C(0) = \sigma^2, C(k) = 0, \forall k \neq 0.$$

根据大数定律

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.e.} E(X_1).$$

14.3 遍历过程

$\{X_t\}$ 为 (宽) 平稳过程, 记

$$\langle X \rangle_t = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t X_s ds$$

这一积分在适当条件下有意义, 例如假设 $s \rightarrow E(X_s^2)$ 是局部有界的, 即 $\sup_{L>0} \{E(X_s^2) : |s| < L\} < \infty, \forall L > 0$. 那么

$$E \left(\int_{-t}^t |X_s| ds \right) = \int_{-t}^t E |X_s| ds = \int_{-t}^t [E(X_s^2)]^{1/2} ds < \infty$$

从而 $\int_{-t}^t |X_s| ds < \infty$ (几乎处处). 以下总假设使得 $\langle X \rangle_t$ 有意义的条件成立.

定义 14.3.1 $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ 为平稳过程, $E(X_t) = m, \forall t \in T$. 称 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性, 如果

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E \left[(\langle X \rangle_t - m)^2 \right] \rightarrow 0.$$

注记 14.3.1 对离散时间参数随机过程可以类似地定义 (均方) 均值遍历性, 并证明均值遍历性的充分必要条件, 只需将积分替换为相应的求和.

注意到

$$E(\langle X \rangle_t) = \frac{1}{2t} E\left(\int_{-t}^t X_s ds\right) = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t E(X_s) ds = m$$

因此 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性当且仅当 $\sigma_t^2 = \text{Var}(\langle X \rangle_t) \rightarrow 0$. 下面来计算 σ_t^2 . 先计算

$$\begin{aligned} E\left[(\langle X \rangle_t)^2\right] &= \frac{1}{4t^2} E\left[\int_{-t}^t X_u du \int_{-t}^t X_v dv\right] \\ &= \frac{1}{4t^2} E\left[\int_{-t}^t \int_{-t}^t X_u X_v dudv\right] \\ &= \frac{1}{4t^2} \int_{-t}^t \int_{-t}^t E(X_u X_v) dudv \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \frac{1}{4t^2} \int_{-t}^t \int_{-t}^t [E(X_u X_v) - m^2] du dv \\&= \frac{1}{4t^2} \int_{-t}^t \int_{-t}^t C(u - v) du dv \\&= \frac{1}{4t^2} \int_{-2t}^{2t} C(\tau) (2t - |\tau|) d\tau \quad (\tau = u - v, \gamma = v)\end{aligned}$$

总结起来就有

定理 14.3.1 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma_t^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^{2t} C(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2t}\right) d\tau = 0.$$

借助这一结论, 可以证明另一个更为简洁的均值遍历性充分必要条件.

定理 14.3.2 $\{X_t\}$ 具有 (均方) 均值遍历性当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t C(\tau) d\tau = 0$$

■ (I) 假设

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s C(\tau) d\tau = 0.$$

那么, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 c_0 使得

$$\frac{1}{s} \int_c^s C(\tau) d\tau < \varepsilon, \forall c \geq c_0.$$

又有

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{t} \int_0^{2t} C(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2t}\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^{c_0} C(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2t}\right) d\tau + \frac{1}{t} \int_{c_0}^{2t} C(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2t}\right) d\tau$$

其中

$$\frac{1}{t} \int_0^{c_0} C(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2t}\right) d\tau < \frac{c_0}{t} C(0)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{c_0}^{2t} C(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2t}\right) d\tau &= \frac{1}{2t^2} \int_{c_0}^{2t} C(\tau) (2t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2t^2} \int_{c_0}^{2t} C(\tau) \int_{\tau}^{2t} ds d\tau = \frac{1}{2t^2} \int_{c_0}^{2t} \int_{c_0}^s C(\tau) d\tau ds \end{aligned}$$

因而, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时就有

$$\sigma_t^2 < \frac{c_0}{t} C(0) + \frac{\varepsilon}{2t^2} \int_{c_0}^{2t} s ds \rightarrow 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma_t^2 = 0$, 从而 $\{X_t\}$ 具有均值遍历性.

(II) 假设 $\{X_t\}$ 具有均值遍历性, 那么 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma_t^2 = 0$. 由于

$$\begin{aligned} cov(\langle X \rangle_t, X_0) &= E \left[\frac{1}{2t} \int_{-t}^t (X_s - m) (X_0 - m) ds \right] \\ &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t E[(X_s - m) (X_0 - m)] ds \\ &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t C(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t C(\tau) d\tau \end{aligned}$$

另一方面, $t \rightarrow +\infty$,

$$[cov(\langle X \rangle_t, X_0)]^2 \leq Var(\langle X \rangle_t) Var(X_0) = \sigma_t^2 C(0) \rightarrow 0$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t C(\tau) d\tau = 0.$$

