Lecture 7

期望与方差-II

Probability and Statistics
Beihang University

7.1 随机变量的方差

定义 7.1.1 若随机变量 X 有 $E\left(X^2\right)<\infty$, 那么

$$Var\left(X\right)=E\left(\left(X-EX\right)^2\right)$$

称为 X 的**方差**. X 的方差也常常记为 σ_X^2. 若 $E\left(|X|\right)<\infty$, $E\left(X^2\right)=\infty$, 那么称 X 的方差为无穷. 其他情形下, 我们称方差不存在. $\sqrt{Var\left(X\right)}$ 称为 X 的**标准差**.

方差是随机变量偏离平均值的程度, 即是对平均离散程度的刻画.

注记 7.1.1 回顾 Lyapounov 不等式：$0<\alpha\leqslant\beta$. 那么

$$\left(E\left(|X|^\alpha\right)\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(E\left(|X|^\beta\right)\right)^{1/\beta}$$

由此看出, 高阶矩存在必然有低阶矩存在. 例如若取 $\beta=2$, $\alpha=1$, 那么 $E\left(|X|\right)\leqslant\left(E\left(|X|^2\right)\right)^{1/2}$, 或者 $\left(E\left(|X|\right)\right)^2\leqslant E\left(|X|^2\right)$.

因此, 若 $E\left(|X|^2\right) = E\left(X^2\right) < \infty$, 那么 $E(|X|) < \infty$, 从而也有 $|E(X)| < \infty$, 即, 2 阶矩存在即可保证期望存在. 因此在方差的定义中, 只需要 $E\left(X^2\right) < \infty$, 就有 $Var(X) < \infty$

方差及其性质

定理 7.1.1 假设随机变量 X 有 $E\left(X^2\right) < \infty$. X 的方差具有以下性质:

(1) c 为常数, $Var(c) = 0$; 反之, 若 $Var(X) = 0$, 那么 $P(X = EX) = 1$;

(2) $Var(X + c) = Var(X)$;

(3) $Var(cX) = c^2 Var(X)$;

(4) $Var(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$;

(5) (期望的极小性) $Var(X) = E\left[(X - EX)^2\right] \leqslant E\left[(X - \mu)^2\right], \forall \mu$.

- (1) 若 $X \equiv c$, 那么 $EX = c$, $Var(X) = 0$. 若 $Var(X) = 0$, 那么

由上一节 Markov 不等式的推论可知 $P(X=EX)=1$.

(2)(3) 直接由定义验证.

(4) 将方差定义式展开

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left((X-EX)^2\right) \\ &= E\left(X^2-2XEX+(EX)^2\right) \\ &= E\left(X^2\right)-2(EX)^2+(EX)^2 \\ &= E\left(X^2\right)-(EX)^2 \end{aligned}$$

(5) 令 $h(\mu)=E\left[(X-\mu)^2\right]$, 展开得到

$$\begin{aligned} h(\mu) &= E\left(X^2-2\mu X+\mu^2\right) \\ &= E\left(X^2\right)-2\mu EX+\mu^2 \end{aligned}$$

二次函数 $h(\mu)$ 在 $\mu=EX$ 时达到唯一最小值 $Var(X)$.

注记 7.1.2 期望是对随机变量取值的" 加权平均", 性质 (6) 说明, 如果将到 X 各个取值的平方距离之加权平均作为误差标准并称之为均方误差, 那么期望 EX 的均方误差是最小的, 而方差就是其对应的均方误差 .

7.2 协方差与相关系数

多个随机变量时, 除了联合分布以外, 我们也常常关心各个随机变量的相互依赖情况, 因此这里我们引入协方差与相关系数, 它们将用来刻画随机变量之间的线性依赖关系.

定义 7.2.1 假设 X, Y 为随机变量, $E\left(X^2\right) < \infty$, $E\left(Y^2\right) < \infty$, 那么
(1) **协方差**定义为

$$Cov\,(X, Y) = E\left[(X - E(X))\,(Y - E(Y))\right]$$

(2) **相关系数**定义为

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov\,(X, Y)}{\sqrt{E\left[(X - E(X))^2\right]}\sqrt{E\left[(Y - E(Y))^2\right]}} = \frac{Cov\,(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

相关系数也常用 ρ_{XY} 表示.

注意相关系数定义中隐含 $\sigma_X^2 \neq 0, \sigma_Y^2 \neq 0$. 若 $\sigma_X^2 = 0$, 那么 X 几乎为常数 $E(X)$, 因此与任意随机变量独立, 此时可定义相关系数为 0.

习题 7.2.1 证明随机变量 X 与自己独立当且仅当存在常数 c, 使得 $P(X = c) = 1$, 从而, 若 X 与任意随机变量 Y 独立, 那么 X 以概率 1 为常数.

定理 7.2.1 (Schwarz 不等式) X, Y 为随机变量. 那么

$$(E(XY))^2 \leqslant E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right)$$

特别地, 如果 $E\left(X^2\right) < \infty$, $E\left(Y^2\right) < \infty$ 那么 $E(XY) < \infty$. 此时, 不等式中等号成立当且仅当 X, Y 线性相关: 即存在 $(a, b) \neq (0, 0)$ 使得 $P(aX + bY = 0) = 1$.

- (1) 如果 $E\left(X^2\right) = 0$ (或者 $E\left(Y^2\right) = 0$), 那么 $P(X = 0) = 1$ (或

者 $P(Y=0)=1$), 因此 $P(XY=0)=1$, $E(XY)=0$, 不等式成立. 此时可取 $(a,b)=(1,0)$ (或者 $(a,b)=(0,1)$)

(2) 如果 $E\left(X^2\right)=\infty$ (或者 $E\left(Y^2\right)=\infty$), 那么不等式右端为 ∞, 不等式仍然成立.

(3) 如果 $0<E\left(X^2\right)<\infty$, $0<E\left(Y^2\right)<\infty$, 那么考虑关于 $\lambda\in\mathbb{R}$ 的二次函数,

$$0\leqslant E\left((\lambda X+Y)^2\right)=\lambda^2E\left(X^2\right)+2\lambda E(XY)+E\left(Y^2\right) \tag{7.1}$$

该不等式恒成立当且仅当

$$[2E(XY)]^2-4\cdot E\left(X^2\right)\cdot E\left(Y^2\right)\leqslant 0$$

从而所要证明的不等式成立. (*Equation* 7.1) 等号成立当且仅当

$$[2E(XY)]^2-4\cdot E\left(X^2\right)\cdot E\left(Y^2\right)=0,\ \lambda=-E(XY)/E\left(X^2\right)\ (\neq 0).$$

这正是 $E\left((\lambda X+Y)^2\right)=0$ 当且仅当 $E(XY)=E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)$. 这时取 $(a,b)=(\lambda,1)$.

定理 7.2.2 假设 X, Y 为随机变量, $E\left(X^2\right) < \infty, E\left(Y^2\right) < \infty$, 那么 $Cov\left(X, Y\right) < \infty$, 并且

$$\left(Cov\left(X, Y\right)\right)^2 \leqslant \sigma_X^2 \sigma_Y^2, \rho_{XY} \in \left[-1, 1\right];$$

特别地, 上述不等式取得等号, 即 $|\rho_{XY}| = 1$, 当且仅当 X, Y 线性相关, 即存在常数 $(a, b) \neq (0, 0)$ 以及 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $P\left(aX + bY = c\right) = 1$.

■ 由方差定义的注记 (7.1.1), $E\left(X^2\right) < \infty$ 与 $E\left(Y^2\right) < \infty$ 可以推知 EX, EY 存在, 并且 $\sigma_X^2 < \infty, \sigma_Y^2 < \infty$. 对 $X-EX$ 和 $Y-EY$ 运用 Schwarz 不等式即可得到所要的不等式. 等号成立, 即 $|\rho_{XY}| = 1$, 当且仅当存在 $(a, b) \neq (0, 0)$ 使得 $a\left(X - EX\right) + b\left(Y - EY\right) = 0$, 即 $aX + bY = aEX + bEY \in \mathbb{R}$. ///

注记 7.2.1 该定理指出了 $E\left(X^2\right) < \infty, E\left(Y^2\right) < \infty$ 在方差定义

中的合理性, 它们保证了协方差和相关系数的存在性, 同时也指出, 相关系数正是随机变量的**线性相关性**的度量, $|\rho_{XY}| = 1$ 时, X, Y 以概率 1 成线性关系. 然而 $|\rho_{XY}|$ 很小也不意味着 X, Y 相互依赖程度很小, 正如例题 (7.2.1) 指出, $\rho_{XY} = 0$ 时 X, Y 仍然可能存在相互依赖性.

定义 7.2.2 $\rho_{XY} > 0$ 时, 称 X, Y 为**正相关**, $\rho_{XY} < 0$ 时, 称 X, Y 为**负相关**, $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X, Y 为**不相关**.

协方差及其性质

定理 7.2.3 假设 X, Y 为随机变量, $E\left(X^2\right) < \infty$, $E\left(Y^2\right) < \infty$, 那么

$$Cov\left(X, Y\right) = E\left(XY\right) - E\left(X\right) E\left(Y\right)$$

- 直接计算得

$$Cov\left(X, Y\right) = E\left[\left(X - E\left(X\right)\right)\left(Y - E\left(Y\right)\right)\right]$$

$$= E[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)]$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

定理 7.2.4 假设 X, Y 相互独立, $0 < E(X^2) < \infty$, $0 < E(Y^2) < \infty$, 那么

$$Cov(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$$

即独立性随机变量是不相关的.

- 由独立性 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 根据定理 (7.2.3) 便有 $Cov(X, Y) = 0$, 从而也有 $\rho(X, Y) = 0$.

例题 7.2.1 (相互依赖但 $\rho_{XY} = 0$) 假设 X, Y 在单位圆内服从均匀分布:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

那么 $\rho_{XY} = 0$ 但 X, Y 不独立

■ 由于 $G = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$ 并非矩形区域, 因此 X, Y 不独立. 另外, 注意 $xf(x, y)$ 关于原点反对称,

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)\, dxdy = 0$$

类似地, 可知 $EX = 0$, $E(XY) = 0$, 因此 $\rho_{XY} = 0$.

习题 7.2.2 (迟到的练习题) X, Y 具有连续型联合分布, 联合密度为 $f(x, y)$. 假设 $G = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$ 是四边平行于坐标轴的有界或无界矩形区域. 那么 X, Y 独立当且仅当 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ 对任意 $(x, y) \in G$ 成立.

定理 7.2.5 假设 X, Y 为随机变量, $E(X^2) < \infty$, $E(Y^2) < \infty$, 那么

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

特别地, 如果 X, Y 不相关, 那么 $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

- 由定义计算得

$$
\begin{aligned}
&Var(X+Y) \\
&= E\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - \left((EX)^2 - 2EXEY + (EY)\right) \\
&= E\left(X^2\right) - (EX)^2 + E\left(Y^2\right) - (EY)^2 + 2E(XY) - 2EXEY \\
&= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)
\end{aligned}
$$

如果 X, Y 不相关, 那么 $Cov(X, Y) = 0$, 因此公式成立.

7.3　协方差矩阵

请参见多元正态分布一节!