Lecture 3

多元随机变量与分布

ruanyl@buaa.edu.cn
September 2016, Beihang University

二元分布

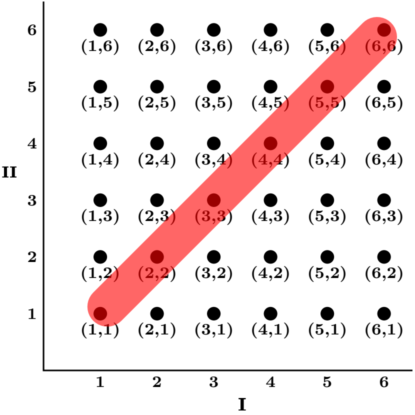
定义 假设 X, Y 是随机变量. 那么 (X, Y) 的**联合分布或者二元分布**定义为所有如下形式的概率的集合：$P((X, Y) \in C)$ 对任意 $C \subset \mathbb{R}^2$. 其中 $\{(X, Y) \in C\}$ 是 $\{\omega \in S : (X(\omega), Y(\omega)) \in C\}$ 的简写 . ω 通常表示一个样本.

二元离散分布

定义 如果联合分布 (X, Y) 的可能取值范围是有限点集或者无穷可数点集, 那么这个分布被称为**离散分布**.

定理 如果 X, Y 是离散随机变量, 那么 (X, Y) 是一个联合离散分布.

例题 投掷两个骰子, 分别用 X 和 Y 表示每个骰子出现的点数. 那么下图则是 (X, Y) 的联合分布的表示. 颜色区域表示事件 $\{X = Y\}$



与一元情形类似, 离散联合分布也有概率函数

定义 如果 (X, Y) 是一个离散联合分布, 那么下面的函数称为其联合概率函数

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y).$$

定理 如果 (X, Y) 是一个离散联合分布，那么其联合概率函数满足

$$\sum_{x,y} f(x, y) = 1$$

并且对任意 $C \subset \mathbb{R}^2$,

$$P((X, Y) \in C) = \sum_{(x,y)\in C} f(x, y).$$

二元连续分布

定义 随机变量 X, Y 称为具有连续联合分布，如果存在定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的非负函数 $f(x, y)$ 使得下面的等式成立,

$$P((X, Y) \in E) = \int\int_E f(x, y)\, dxdy$$

其中 E 是 $\mathbb{R}^2$ 上的任意有界, 无界, 开或者闭的实数区域. **非负**函数 $f(x,y)$ 则称为该连续分布的**密度函数**.

需要注意的是在这个定义中我们并不假定密度函数 $f(x,y)$ 的连续性, 或是有界性.

定理 由概率公理可知, 密度函数应满足

$$\int\int_{R^2} f(x,y)\, dxdy = 1.$$

定理 假设随机变量 X, Y 具有连续联合分布. 那么

$$P\left((X,Y) \in C_0\right) = 0$$

其中 C_0 是 $\mathbb{R}^2$ 上的任何有限点集, 无穷点列或者函数曲线的图集.

例题 假设随机变量 X, Y 的联合分布具有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试确定常数 c, 并求出 $P(X\geqslant Y)$.

- 密度函数在全空间积分应当为 1,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} cx^2y\,dy\right)dx \\ &= c\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2x^4}{2}\right)dx \\ &= c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)=\frac{4c}{21} \end{aligned}$$

因而 $c=21/4$.

$$P(X\geqslant Y)=\frac{21}{4}\int_{0}^{1}\left(\int_{x^2}^{x} x^2y\,dy\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{21}{4} \int_0^1 \left(\frac{x^2 x^2}{2} - \frac{x^2 x^4}{2} \right) dx \\
&= \frac{21}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{3}{20}
\end{aligned}
$$

二元混合分布

定义 假设 X 是离散随机变量，Y 是连续随机变量, 如果存在 $\mathbb{R}^2$ 上的非负函数 $f(x,y)$ 使得下面的积分对任何 $A, B \subset \mathbb{R}$ 都有意义并且成立

$$
P(X \in A, Y \in B) = \int_B \sum_{x \in A} f(x,y)\, dy.
$$

例题 在临床试验中, 为了试验某药物的有效性, 通常会对患者进行跟踪治疗, 并查看治愈一段时间之后疾病是否会反复. 用

$X=1$ 表示完全治愈, 用 $X=0$ 表示疾病反复. 另外用 P 表示治愈率. 这里 X 是离散随机变量, 而治愈率 P 通常也是具有随机性的, 用一个连续型随机变量表示 P 是比较合理的. 因此我们有 X 和 P 的联合密度函数应该是

$$f(x,p)=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1, p\in(0,1).$$

试确定概率 $P\left(X\leqslant 0, P\leqslant \frac{1}{2}\right)$

- 按定义

$$\begin{aligned}
P\left(X\leqslant 0, P\leqslant \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{1/2}\sum_{x\leqslant 0} f(x,p)\,dp \\
&= \int_0^{1/2}(1-p)\,dp \\
&= \left(p-\frac{p^2}{2}\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

累积分布函数

定义 给定概率空间以及概率 P. 该空间上的随机变量 X, Y 的联合**分布函数**定义为

$$F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y), \forall x, y.$$

联合分布函数有如下性质

- 如果 X, Y 的分布函数分别记作 $F_X(x)$, $F_Y(y)$, 那么成立

$$F_X(x) = P(X \leqslant x, Y < \infty) = \lim_{y \to \infty} F(x,y),$$

以及

$$F_Y(y) = P(X < \infty, Y \leqslant y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y).$$

这里 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为联合分布关于 X 和 Y 的**边际分布**.

// $F(\cdot,-\infty)=F(-\infty,\cdot)=0, F(\infty,\infty)=1.$

下面的定理给出了分布函数与密度函数的关系.

定理 假设 X, Y 的联合分布具有密度函数 $f(x,y)$. 那么 X, Y 的联合分布函数是连续的, 并且在其二阶导数存在时, 联合分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dsdt$$

满足以下关系

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}.$$

特别地, 如果 f 在 (x,y) 连续, 那么上面的求导关系式在该连续点成立.

定理 假设 X, Y 的联合分布具有密度函数 $f(x, y)$. 那么 X, Y 的联合分布函数关于 X 的分布具有密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,$$

关于 Y 的分布具有密度函数

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

如果 X 或者 Y 或者两者同时是离散随机变量, 那么类似的结论也成立. 对离散随机变量只需将对密度函数的积分改写为对离散概率函数的求和.

例题 本节开始投掷两个骰子的例题中我们给出了其联合分布, 试写出它的两个边际分布.

- 对 $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$,

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = \sum_y P(X=x, Y=y) = \frac{1}{6}$$

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = \sum_x P(X=x, Y=y) = \frac{1}{6}$$

这个例题中的联合分布做成一个**各个元素都非负**的矩阵, 其各列和都是相等的. 乘以适当的常数后可使得各列和变为 1, 这一列和为 1 的矩阵被称为**随机矩阵**.

例题 假设 X, Y 的联合分布由下面的矩阵给出

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

试写出它的两个边际分布.

例题 假设随机变量 X, Y 的联合分布具有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求出其边际密度函数

- 由前面的定理

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}\left(x^2-x^6\right)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_{-y^{1/2}}^{y^{1/2}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$$

多元分布 (参考内容)

许多二元分布的概念和相关性质都可以直接地推广到多元情形, 在此不做累述.

例题 在一个临床试验中, 有 n 个病人接受治疗. 用 X_i 表示第 i 个病人在接收治疗后的状态,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{恢复} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

假设每个病人能痊愈的概率是 p, 各个病人情况是相互独立的, 那么 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 的联合密度应该是

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} p^{x_1+\ldots+x_n}(1-p)^{n-x_1-\ldots-x_n}, & x_i \in \{0,1\}, \forall i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

例题 排队系统是一个由客户以及服务组成的系统, 客户排队等待并按照某流程接受服务. 一个简单的情形是所有客户都排队等待同一个终端提供的服务, (例如客户排队等待从同一台取款机取款). 假设有 n 个客户. 第 i 个客户接受服务所消耗的时间是 $X_i, i=1,\dots,n$. 为了描述这个系统中客户等待时间的分布情况, 我们通常假设 $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ 的联合密度是

$$f(\mathbf{x})=\begin{cases}\frac{c}{\left(2+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{n+1}}, & x_i>0, \forall i\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

确定常数 c.

- 联合密度 $f(\mathbf{x})$ 应满足

$$I=\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n=1$$

将 $f(\mathbf{x})$ 的表达式代入并做累次积分, 首先对 x_n 积分得到

$$I = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{c}{n\left(2+\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^n} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = 1$$

然后再依次对 $x_{n-1}, \dots, x_1$ 积分得到

$$I = \frac{c}{n! \cdot 2} = 1$$

因此 $c = 2n!$