

# Lecture 9

## 常用分布及其应用-II

ruanyl@buaa.edu.cn

September 2016, Beihang University

## 9.1 正态分布

**定义 9.1.1** 随机变量  $X$  称为具有参数为  $\mu$  和  $\sigma^2$  ( $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ) 的**正态分布**, 如果  $X$  具有密度函数

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, x \in \mathbb{R} \quad (9.1)$$

通常记作  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . 若  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 则称  $X$  服从**标准正态分布**.

可以验证  $f(x|\mu, \sigma^2)$  是一个概率密度函数. 容易看出关于  $f(x|\mu, \sigma^2)$  的无穷积分收敛. 令  $y = (x - \mu) / \sigma$ , 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|\mu, \sigma^2) dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

注意到

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2+z^2)} dydz \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|\mu, \sigma^2) dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot (2\pi)^{1/2} = 1$$

**注记 9.1.1** 由上面的变量代换看出,  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  那么  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**定理 9.1.1**  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 那么  $X$  存在任意阶矩, 并且  $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$E(X^{2k+1}) = 0,$$

$$E(X^{2k}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1).$$

■ 容易看出  $E(X^0) = 1$ , 并且由密度函数对称性  $E(X^{2k+1}) = 0$ .  
当  $n \geq 2$ , 由分部积分

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} d\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \\ &= (n-1) E(X^{n-2}) \end{aligned}$$

因此定理成立.

由此可见标准正太分布  $\mathcal{N}(0, 1)$  的期望为 0, 方差为 1.

**定理 9.1.2**  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , 那么

(1)  $E(X) = \mu$ ;

(2)  $Var(X) = \sigma^2$ ;

(3)  $\psi(t) = E(e^{tX}) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

■ (1)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma} \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &\quad + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \mu \end{aligned}$$

(2) 由 (9.1.1), 标准正太分布 2 阶矩为 1,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy = \sigma^2 \end{aligned}$$

(3) 对  $t \in \mathbb{R}$  下列积分存在,

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

通过配完全平方

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 + tx = -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 + \frac{2\sigma^2 t}{2\sigma^2} x$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sigma^2} [x - (\mu + \sigma^2 t)]^2 + \frac{2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2}{2\sigma^2} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} [x - (\mu + \sigma^2 t)]^2 + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2
\end{aligned}$$

因此

$$E(e^{tX}) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$



根据生成函数与矩的关系, 可以通过计算  $\psi^{(n)}(0)$  来验证定理 9.1.1. 例如  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  的 0 阶矩, 1 阶矩, 2 阶矩分别为

$$\psi^{(0)}(0) = \psi(0) = 1$$

$$\psi'(0) = \left[ (\mu + \sigma^2 t) \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \right]_{t=0} = \mu$$

$$\psi''(0) = \left[ [\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2] \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \right]_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2$$

**定理 9.1.3**  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . 令  $Y = aX + b$  ( $a \neq 0$ ), 那么  $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ .

■  $Y$  与  $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$  具有相同的生成函数,

$$E(e^{tY}) = E(e^{atX+bt}) = e^{\mu(at) + \frac{1}{2}\sigma^2(at)^2} e^{bt} = e^{(a\mu+b)t + \frac{1}{2}(a\sigma)^2 t^2}$$



**定理 9.1.4** 随机变量  $X_1, \dots, X_n$  **相互独立**,  $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . 那么

$$Y = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$$



■  $Y$  的生成函数为

$$E(e^{tY}) = E\left(e^{t\sum_{k=1}^n X_k}\right) = \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k}) = e^{(\sum \mu_k)t + \frac{1}{2}(\sum \sigma_k^2)t^2}$$



这一结论也可以进一步推广为：随机变量  $X_1, \dots, X_n$  **相互独立**,  $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .  $a_k \in \mathbb{R}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 不全 0,  $b \in \mathbb{R}$ . 那么

$$Y = a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n a_k\mu_k + b, \sum_{k=1}^n a_k^2\sigma_k^2\right)$$

**定义 9.1.2** 随机变量  $X_1, \dots, X_n$  的平均值  $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  称为样本平均, 通常记为  $\bar{X}$ .

利用上面的定理可知, 如果随机变量  $X_1, \dots, X_n$  相互独立,  $X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . 那么  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .

## 9.2 协方差矩阵

**定义 9.2.1** 随机向量  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  的期望为

$$E(X) = (EX_1, \dots, EX_n)^T$$

$X$  的协方差矩阵为

$$C(X) = E \left[ (X - E(X)) (X - E(X))^T \right]$$

这里  $E(\cdot)$  对矩阵的作用理解为对矩阵的每一个元素取期望。

**注记 9.2.1** 若假设  $EX_i^2 < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ , 那么运用 Schwarz 不等式可知,  $X$  的期望, 方差-协方差矩阵都是存在的。

为简化书写, 记

$$\sigma_i = \left( E \left[ (X_i - E(X_i))^2 \right] \right)^{1/2}, \rho_{ij} = \rho_{ji} = \text{cov}(X_i, X_j) / (\sigma_i \sigma_j)$$

**例题 9.2.1** 假设  $EX_i^2 < \infty, \forall i = 1, 2$ , 写出  $(X_1, X_2)$  的协方差矩阵  $C$ ,  $\det C$  以及 ( $C$  非退化时)  $C^{-1}$

■ 令  $X = (X_1, X_2)$ , 将  $(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))^T$  展开为

$$\begin{pmatrix} (X_1 - EX_1)(X_1 - EX_1) & (X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) \\ (X_2 - EX_2)(X_1 - EX_1) & (X_2 - EX_2)(X_2 - EX_2) \end{pmatrix}$$

那么  $(X_1, X_2)$  的协方差矩阵  $C$  为

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

当  $C$  非退化时, 即  $\det C \neq 0, (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \rho_{12} \in (-1, 1))$ , 那么  $C^{-1}$  存在, 并且  $\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho_{12}^2)$ ,

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\rho_{12} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \\ -\rho_{21} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$



**定理 9.2.1** 随机向量  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  的协方差矩阵  $C(X)$  是对称, 正半定矩阵.

■ 对称性容易看出. 为证明正半定性, 任取  $z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} z^T C(X) z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E [z_i (X_i - E(X_i)) (X_j - E(X_j)) z_j] \\ &= E \left[ (z^T (X - EX)) \cdot (z^T (X - EX))^T \right] \end{aligned}$$

因此  $z^T C(X) z \geq 0, \forall z$ , 即正半定.



**例题 9.2.2** 假设  $EX_i^2 < \infty$ ,  $\sigma_i > 0, \forall i = 1, 2$ , 其相关系数  $|\rho| < 1$ , 那么  $(X_1, X_2)$  的协方差矩阵  $C$  是对称正定的, 并且存在下三角矩阵  $G$ , 使得  $C = GG^T$ .

**注记 9.2.2** 这一结论称为  $C$  的 Cholesky 分解. 它对一般的对称正定矩阵成立: 假设  $A$  为对称正定矩阵, 那么存在下三角矩阵  $G$ , 其对角元素为正, 使得  $A = GG^T$ .

■ 根据题设  $\det C \neq 0$ , 因而非退化, 从而是对称正定的. 令

$$G = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2(1-\rho^2)^{1/2} \end{pmatrix}$$

则有

$$GG^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = C$$

///

**例题 9.2.3** 假设  $Z = (Z_1, Z_2)$  为随机向量,  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1), i = 1, 2$  相互独立, 那么  $(Z_1, Z_2)$  的协方差矩阵为单位矩阵.

## 9.3 二元正态分布

**例题 9.3.1** 假设  $Z = (Z_1, Z_2)^T$  为随机向量,  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1), i = 1, 2$  相互独立.  $\mu_i \in \mathbb{R}, \sigma_i > 0, i = 1, 2, |\rho| < 1$ . 令  $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ ,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \mu, G = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2(1 - \rho^2)^{1/2} \end{pmatrix}$$

试写出  $X = (X_1, X_2)^T$  的联合密度函数与协方差矩阵.

■ 由于  $Z_1, Z_2$  相互独立, 其联合密度函数为

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2) \right], (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

由题解得

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 - \rho^2)^{1/2} \sigma_1 \sigma_2} \begin{pmatrix} \sigma_2 (1 - \rho^2)^{1/2} & 0 \\ -\rho\sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

或者写作

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, Z_2 = \frac{1}{(1 - \rho^2)^{1/2}} \left( \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)$$

因此由密度变换公式得到  $(X_1, X_2)$  的联合密度函数

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= g(z_1, z_2) |\det G|^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi (1 - \rho^2)^{1/2} \sigma_1 \sigma_2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

下面计算  $X_1, X_2$  的协方差矩阵. 由题设  $X = GZ + \mu$ ,  $EX = \mu$ ,

$$C(X) = E[(X - \mu) \cdot (X - \mu)^T] = E[GZ \cdot (GZ)^T]$$

$$= GE [Z \cdot Z^T] G^T = GG^T$$



基于上面的计算我们有

**定义 9.3.1** 如果  $X = (X_1, X_2)$  具有如下联合密度函数,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}$$

那么称  $X = (X_1, X_2)$  具有参数为  $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ ,  $C = GG^T$  的**二元正太分布**. 记作  $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ . 这里  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ,  $\rho \in (-1, 1)$ .



结合我们在例题 (9.2.1, 9.2.2) 中计算过的  $C$  和  $C^{-1}$ , 容易看到, 定义 (9.3.1) 的二元正太分布密度也可以表达为简洁的矩阵形式:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi (\det C)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \right\}$$

从定义 (9.3.1) 的二元正太分布密度的表达式可以看出

**定理 9.3.1** 如果  $X = (X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ , 那么关于  $X_1$  和  $X_2$  的边际分布仍然是正太分布,  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

## 正态条件分布

**定理 9.3.2** 如果  $(X_1, X_2)$  具有如定义 (9.3.1) 所给出的二元正态分布, 那么  $X_2$  在给定  $X_1 = x_1$  时的条件分布是一个正态分布, 其期望方差分别为

$$E(X_2|x_1) = \mu_2 + \rho\sigma_2 \cdot \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \text{Var}(X_2|x_1) = (1 - \rho^2) \sigma_2^2$$

■ 注意到二元正态分布  $(X_1, X_2)$  是由  $Z = (Z_1, Z_2)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$  经过线性变换而得到的 (例题 (9.3.1)):

$$\begin{cases} X_1 = \sigma_1 Z_1 + \mu_1, \\ X_2 = \sigma_2 \left[ \rho Z_1 + (1 - \rho^2)^{1/2} Z_2 \right] + \mu_2. \end{cases}$$

将  $X_2$  重写为

$$X_2 = \sigma_2 (1 - \rho^2)^{1/2} Z_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \mu_2$$

就可以看出, 当  $X_1 = x_1$  给定 (从而  $Z_1 = (X_1 - \mu_1) / \sigma_1$  也给定),  $X_2$  的条件分布就由  $Z_2$  在给定  $Z_1$  时的条件分布决定, 然而  $Z_1, Z_2$  是相互独立的, 因此  $Z_2$  在给定  $Z_1$  时的条件分布就是  $Z_2$  的分布. 由于  $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , 因此  $X_2$  在给定  $X_1 = x_1$  时的条件分布是

$$\mathcal{N}\left(\mu_2 + \sigma_2 \rho \cdot \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, (1 - \rho^2) \sigma_2^2\right).$$




## 正态分布独立与不相关等价

如果  $X_1, X_2$  相互独立, 那么它们是不相关的, 反过来的结论一般不成立. 但对正态分布, 我们有

**定理 9.3.3** 如果  $X = (X_1, X_2)$  服从二元正态分布. 那么  $X_1, X_2$  相互独立当且仅当它们互不相关.

■ 独立则有不相关. 反过来, 假设  $X_1, X_2$  不相关, 那么相关系数  $\rho = 0$ , 此时定义 (9.3.1) 中的联合密度函数变为,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

即  $f(x_1, x_2)$  分解为  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  的密度的乘积, 因此  $X_1, X_2$  相互独立. 

同样的推理可证明

**定理 9.3.4** 如果  $X = (X_1, X_2)$  服从二元正太分布. 那么  $X_1, X_2$  相互独立当且仅当其协方差矩阵为对角矩阵.

综合前面的结论我们有

- // 例题 (9.3.1) 的题目条件可直接写作  $Z = (Z_1, Z_2)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$ , 这里面协方差矩阵  $I$ (单位矩阵) 为对角矩阵, 因此其分量  $Z_1, Z_2$  的独立性已经隐含其中.
- // 例题 (9.3.1) 实际上指出, 如果  $Z = (Z_1, Z_2)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$ ,  $GG^T$  为对称正定矩阵, 那么  $X = (X_1, X_2)^T = GZ + \mu$  服从正太分布  $\mathcal{N}(\mu, GG^T)$ .

## 9.4 多元正态分布

**定义 9.4.1** 多元随机变量  $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$  称为具有  $n$  元正态分布, 如果它具有如下密度函数,  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\},$$

其中  $\Sigma$  为对称正定矩阵. 通常记作  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ .

**注记 9.4.1** 一个等价定义: 多元随机变量  $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$  称为具有  $n$  元正态分布, 如果任意的线性组合  $Y = \sum_i^n a_i X_i$  都服从 (一维) 正态分布 (含退化情形, 例如所有  $a_i = 0$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(0, 0)$ )

类似与二元情形我们有

**定理 9.4.1** 如果  $X = (X_1, \dots, X_n)$  服从多元正态分布.  $X_1, \dots, X_n$  相互独立当且仅当它们互不相关.

**定理 9.4.2** 如果  $X = (X_1, \dots, X_n)$  服从多元正太分布.  $X_1, \dots, X_n$  相互独立当且仅当其协方差矩阵为对角矩阵.

**例题 9.4.1** 用  $I$  表示单位矩阵. 如果  $X \sim \mathcal{N}(0, I)$ . 令  $Y = \mu + GX$ , 那么  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, GG^T)$ .

■ 参见例题 (9.3.1) 的推导过程. //

**例题 9.4.2** 用  $I$  表示单位矩阵. 如果  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$ ,  $A$  为正交矩阵. 令  $Y = AX$ , 那么  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$ , 正交变换不改变  $X$  的协方差及其各分量独立性.

■ 直接运用上一例题结论 //