Lecture 7

期望与方差-II

ruanyl@buaa.edu.cn
September 2016, Beihang University

7.1 随机变量的方差

定义 7.1.1 若随机变量 X 有 $E\left(X^2\right) < \infty$, 那么

$$Var\left(X\right) = E\left(\left(X - EX\right)^2\right)$$

称为 X 的**方差**. X 的方差也常常记为 σ_X^2. 若 $E\left(|X|\right) < \infty$, $E\left(X^2\right) = \infty$, 那么称 X 的方差为无穷. 其他情形下, 我们称方差不存在. $\sqrt{Var\left(X\right)}$ 称为 X 的**标准差**.

方差是随机变量偏离平均值的程度, 即是对平均离散程度的刻画.

注记 7.1.1 回顾 Lyapounov 不等式：$0 < \alpha \leqslant \beta$. 那么

$$\left(E\left(|X|^\alpha\right)\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(E\left(|X|^\beta\right)\right)^{1/\beta}$$

由此看出, 高阶矩存在必然有低阶矩存在. 例如若取 $\beta = 2$, $\alpha = 1$, 那么 $E\left(|X|\right) \leqslant \left(E\left(|X|^2\right)\right)^{1/2}$, 或者 $\left(E\left(|X|\right)\right)^2 \leqslant E\left(|X|^2\right)$.

因此, 若 $E\left(|X|^2\right) = E\left(X^2\right) < \infty$, 那么 $E\left(|X|\right) < \infty$, 从而也有 $|E(X)| < \infty$, 即, 2 阶矩存在即可保证期望存在. 因此在方差的定义中, 只需要 $E\left(X^2\right) < \infty$, 就有 $Var(X) < \infty$

方差及其性质

定理 7.1.1 假设随机变量 X 有 $E\left(X^2\right) < \infty$. X 的方差具有以下性质:

(1) c 为常数, $Var(c) = 0$; 反之, 若 $Var(X) = 0$, 那么 $P(X = EX) = 1$;

(2) $Var(X + c) = Var(X) + c$;

(3) $Var(cX) = c^2 Var(X)$;

(4) $Var(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$;

(5) (期望的极小性) $Var(X) = E\left[(X - EX)^2\right] \leqslant E\left[(X - \mu)^2\right], \forall \mu$.

- (1) 若 $X \equiv c$, 那么 $EX = c$, $Var(X) = 0$. 若 $Var(X) = 0$, 那么

由上一节 Markov 不等式的推论可知 $P(X = EX) = 1$.

(2)(3) 直接由定义验证.

(4) 将方差定义式展开

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E\left((X - EX)^2\right) \\
&= E\left(X^2 - 2XEX + (EX)^2\right) \\
&= E\left(X^2\right) - 2(EX)^2 + (EX)^2 \\
&= E\left(X^2\right) - (EX)^2
\end{aligned}
$$

(5) 令 $h(\mu) = E\left[(X - \mu)^2\right]$, 展开得到

$$
\begin{aligned}
h(\mu) &= E\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) \\
&= E\left(X^2\right) - 2\mu EX + \mu^2
\end{aligned}
$$

二次函数 $h(\mu)$ 在 $\mu = EX$ 时达到唯一最小值 $Var(X)$.

注记 7.1.2 期望是对随机变量取值的" 加权平均", 性质 (6) 说明, 如果将到 X 各个取值的平方距离之加权平均作为误差标准并称之为均方误差, 那么期望 EX 的均方误差是最小的, 而方差就是其对应的均方误差 .

7.2 协方差与相关系数

多个随机变量时, 除了联合分布以外, 我们也常常关心各个随机变量的相互依赖情况, 因此这里我们引入协方差与相关系数, 它们将用来刻画随机变量之间的线性依赖关系.

定义 7.2.1 假设 X, Y 为随机变量, $E\left(X^2\right) < \infty$, $E\left(Y^2\right) < \infty$, 那么
(1) **协方差**定义为

$$Cov\,(X, Y) = E\left[(X - E\,(X))\,(Y - E\,(Y))\right]$$

(2) **相关系数**定义为

$$\rho\,(X, Y) = \frac{Cov\,(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

相关系数也常用 ρ_{XY} 表示.

注意相关系数定义中隐含 $\sigma_X^2 \neq 0, \sigma_Y^2 \neq 0$. 若 $\sigma_X^2 = 0$, 那么 X 几乎为常数 $E(X)$, 因此与任意随机变量独立, 此时可定义相关系数为 0.

定理 7.2.1 (Schwarz 不等式) X, Y 为随机变量. 那么

$$(E(XY))^2 \leqslant E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right)$$

特别地, 如果 $E\left(X^2\right) < \infty, E\left(Y^2\right) < \infty$ 那么 $E(XY) < \infty$. 此时, 不等式中等号成立当且仅当存在非零常数 $a \neq 0, b \neq 0$ 使得 $P(aX + bY = 0) = 1$.

- (1) 如果 $E\left(X^2\right) = 0$ (或者 $E\left(Y^2\right) = 0$), 那么 $P(X = 0) = 1$ (或者 $P(Y = 0) = 1$), 因此 $P(XY = 0) = 1$, $E(XY) = 0$, 不等式成立.

  (2) 如果 $E\left(X^2\right) = \infty$ (或者 $E\left(Y^2\right) = \infty$), 那么不等式右端为 ∞, 不等式仍然成立.

(3) 如果 $0 < E\left(X^2\right) < \infty, 0 < E\left(Y^2\right) < \infty$, 那么考虑 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 恒成立不等式

$$0 \leqslant E\left((aX + bY)^2\right) = a^2 E\left(X^2\right) + b^2 E\left(Y^2\right) + 2abEXEY$$

特别地, 取 $a = \left(E\left(Y^2\right)\right)^{1/2} > 0, b = \left(E\left(X^2\right)\right)^{1/2} > 0$ 就有

$$-\left(E\left(X^2\right)\right)^{1/2}\left(E\left(Y^2\right)\right)^{1/2} \leqslant EXEY$$

同样由

$$0 \leqslant E\left((aX - bY)^2\right) = a^2 E\left(X^2\right) + b^2 E\left(Y^2\right) - 2abEXEY$$

可得到

$$EXEY \leqslant \left(E\left(X^2\right)\right)^{1/2}\left(E\left(Y^2\right)\right)^{1/2}$$

从而定理成立.

定理 7.2.2 假设 X, Y 为随机变量, $E\left(X^2\right) < \infty, E\left(Y^2\right) < \infty$, 那么 $Cov\left(X, Y\right) < \infty$, 并且

$$\left(Cov\left(X, Y\right)\right)^2 \leqslant \sigma_X^2 \sigma_Y^2, \rho_{XY} \in [-1, 1] ;$$

特别地, 上述不等式取得等号, 即 $|\rho_{XY}| = 1$, 当且仅当存在非零常数 $a \neq 0, b \neq 0$ 以及 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $P\left(aX + bY = c\right) = 1$.

■ 由方差定义的注记, $E\left(X^2\right) < \infty$ 与 $E\left(Y^2\right) < \infty$ 可以推知 $\sigma_X^2 < \infty$ 与 $\sigma_Y^2 < \infty$. 对 $X - EX$ 和 $Y - EY$ 运用 Schwarz 不等式即可得到等号成立的条件. ///

注记 7.2.1 该定理指出了 $E\left(X^2\right) < \infty, E\left(Y^2\right) < \infty$ 在方差定义中的合理性, 它们保证了协方差和相关系数的存在性, 同时也指出, 相关系数正是随机变量的**线性相关性**的度量, $|\rho_{XY}| = 1$ 时, X, Y 以概率 1 成线性关系. 然而 $|\rho_{XY}|$ 很小也不意味着 X, Y 相互

依赖程度很小, 正如例题 (7.2.1) 指出, $\rho_{XY}=0$ 时 X,Y 仍然可能存在相互依赖性.

定义 7.2.2 $\rho_{XY}>0$ 时, 称 X,Y 为**正相关**, $\rho_{XY}<0$ 时, 称 X,Y 为**负相关**, $\rho_{XY}=0$ 时, 称 X,Y 为**不相关**.

协方差及其性质

定理 7.2.3 假设 X,Y 为随机变量, $E\left(X^2\right)<\infty, E\left(Y^2\right)<\infty$, 那么

$$Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

- 直接计算得

$$\begin{aligned} Cov\left(X,Y\right) &= E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)\left(Y-E\left(Y\right)\right)\right] \\ &= E\left[XY-XE\left(Y\right)-E\left(X\right)Y+E\left(X\right)E\left(Y\right)\right] \\ &= E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right) \end{aligned}$$

定理 7.2.4 假设 X, Y 相互独立, $0 < E\left(X^2\right) < \infty$, $0 < E\left(Y^2\right) < \infty$, 那么

$$Cov\,(X, Y) = \rho\,(X, Y) = 0$$

即独立性随机变量是不相关的.

- 由独立性 $E\,(XY) = E\,(X)\,E\,(Y)$, 根据定理 (7.2.3) 便有 $Cov\,(X, Y) = 0$, 从而也有 $\rho\,(X, Y) = 0$.

例题 7.2.1 (相互依赖但 $\rho_{XY} = 0$) 假设 X, Y 在单位圆内服从均匀分布:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

那么 $\rho_{XY} = 0$ 但 X, Y 不独立

■ 由于 $G=\{(x,y):f(x,y)>0\}$ 并非矩形区域, 因此 X,Y 不独立. 另外, 注意 $xf(x,y)$ 关于原点反对称,

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,dxdy=0$$

类似地, 可知 $EX=0$, $E(XY)=0$, 因此 $\rho_{XY}=0$. ///

习题 7.2.1 (迟到的练习题) X,Y 具有连续型联合分布, 联合密度为 $f(x,y)$. 假设 $G=\{(x,y):f(x,y)>0\}$ 是四边平行于坐标轴的有界或无界矩形区域. 那么 X,Y 独立当且仅当 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 对任意 $(x,y)\in G$ 成立.

定理 7.2.5 假设 X,Y 为随机变量, $E\left(X^2\right)<\infty$, $E\left(Y^2\right)<\infty$, 那么

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

特别地, 如果 X,Y 不相关, 那么 $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$.

■ 由定义计算得

$$
\begin{aligned}
& Var\left(X+Y\right) \\
& = E\left(X^2+2XY+Y^2\right) - \left(\left(EX\right)^2 - 2EXEY + \left(EY\right)\right) \\
& = E\left(X^2\right) - \left(EX\right)^2 + E\left(Y^2\right) - \left(EY\right)^2 + 2E\left(XY\right) - 2EXEY \\
& = Var\left(X\right) + Var\left(Y\right) + 2Cov\left(X,Y\right)
\end{aligned}
$$

如果 X, Y 不相关, 那么 $Cov\left(X,Y\right)=0$, 因此公式成立.