Lecture 5

随机变量的函数

ruanyl@buaa.edu.cn
September 2016, Beihang University

一元随机变量的函数

很多时候我们关心的不仅仅是随机变量本身，同时也关心通过已知随机变量所描述的其他数量的分布情况，例如

例题 假设 X 在整数集合 $C=\{1,2,...,9\}$ 上是均匀分布的. 想要知道 X 与集合 C 中点 5 距离的分布情况，因而我们考虑 $Y=|X-5|$. 显然 Y 也是一个随机变量，并且它是随机变量 X 的函数. Y 的分布可以由 X 的分布来确定. Y 的取值范围是 $\{0,1,...,4\}$. 由于 $P(X=i)=\frac{1}{9}, i=1,2,...,9$, 因此

$$P(Y=j)=\begin{cases} P(X\in\{5\})=\frac{1}{9}, & j=0\\ P(X\in\{4,6\})=\frac{2}{9}, & j=1\\ P(X\in\{3,7\})=\frac{2}{9}, & j=2\\ P(X\in\{2,8\})=\frac{2}{9}, & j=3\\ P(X\in\{1,9\})=\frac{2}{9}, & j=4\end{cases}$$

一般地

定理 如果 X 是一个离散随机变量, Y 是随机变量 X 的函数, $Y=h(X)$, 那么 Y 的概率函数可以写作

$$g(y)=P(Y=y)=\sum_{x\in h^{-1}(y)} P(X=x)$$

其中 $h^{-1}(y)$ 表示 y 在 h 作用下的原象集 $\{x:h(x)=y\}$.

我们经常用 $h^{-1}(C)$ 来表示使得 $h(x)$ 取值在 C 中的 x 的集合, $h^{-1}(C)=\{x:h(x)\in C\}$. 上面这个定理的一个特殊情形是 $h(x)$ 为严格单调函数, 此时 $h^{-1}(y)$ 仅有一个点 , 我们有

定理 如果 X 是一个离散随机变量, 它的概率函数是 $f(x)$. Y 是随机变量 X 的函数, $Y=h(X)$, 那么 Y 的概率函数可以写作

$$g(y)=P\left(X=h^{-1}(y)\right)=f\left(h^{-1}(y)\right)$$

定理 如果 X 是一个以 $f(x)$ 为密度函数的连续型随机变量, $P(X \in \mathcal{S}) = 1$. Y 是随机变量 X 的函数 $Y = h(X)$, 并且 $h(x)$ 是 $\mathcal{S}$ 上的严格单调的可微分函数. 令 $\mathcal{T} = \phi(\mathcal{S})$, 那么 Y 的密度函数为

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| \cdot 1_{\mathcal{T}}(y)$$

这里 $1_{\mathcal{T}}(y)$ 表示集合 $\mathcal{T}$ 上的特征函数：$1_{\mathcal{T}}(y) = 1$ 如果 $y \in \mathcal{T}$, 否则为 0.

■ 我们证明 $h(x)$ 是严格单调减少的情形. 由于 $h(x)$ 严格单调, 于是 $h^{-1}(y)$ 在 $\mathcal{T}$ 上存在, 并且也是严格单调减少的. 按定义 Y 的分布函数在 $y \in \mathcal{T}$ 时为

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant y) &= P(h(X) \leqslant y) \\ &= P\left(X \geqslant h^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P\left(X < h^{-1}(y)\right) \\
&= 1 - P\left(X \leqslant h^{-1}(y)\right) \\
&= 1 - f\left(h^{-1}(y)\right)
\end{aligned}
$$

这里我们用到了连续型随机变量分布函数的连续性. 等式两边对 y 求导数

$$
\begin{aligned}
g(y) &= -f\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \\
&= f\left(h^{-1}(y)\right) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| .
\end{aligned}
$$

例题 已知微生物繁殖速度是指数增长的. 在 0 时刻将 v 个微生物放入一个水池中, 用 X 表示微生物增长率. 经过时间 t 小时之

后, 微生物的数量将变为 ve^{Xt}. 现假设 $v=10$, X 的分布函数为

$$f(x)=\begin{cases} 3(1-x)^2, & x\in(0,1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试确定 5 小时之后, 微生物数量的分布.

■ 令 $h(x)=10e^{5x}$, $\mathcal{S}=(0,1)$. 则 $h(x)$ 是一个严格递增函数, 它将 $\mathcal{S}$ 映射为 $\mathcal{T}=\left(10,10e^5\right)$, $h^{-1}(y)=\frac{1}{5}\ln\frac{y}{10}$, $h'(x)=50e^{5x}$. 因此

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{h'\left(h^{-1}(y)\right)}=\frac{1}{5y}.$$

从而微生物的数量 $Y=h(X)$ 的分布为

$$g(y)=\begin{cases} \frac{3\left(1-\frac{1}{5}\ln\frac{y}{10}\right)^2}{5y}, & y\in\left(10,10e^5\right) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

多元随机变量的函数

与一元情形类似我们有

定理 如果 (X_1, X_2) 是一个离散联合分布，它的概率函数是 $f(x, y)$. (Y_1, Y_2) 是 (X_1, X_2) 的函数，

$$\phi : (X_1, X_2) \mapsto (Y_1 = \phi_1(X_1, X_2), Y_2 = \phi_2(X_1, X_2)).$$

那么 (Y_1, Y_2) 的联合概率函数可以写作

$$g(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \sum_{(x_1, x_2) \in \phi^{-1}(y_1, y_2)} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

其中 $\phi^{-1}(y_1, y_2)$ 表示 (y_1, y_2) 在 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ 作用下的原象集 $\{(x_1, x_2) : \phi_1(x_1, x_2) = y_1, \phi_2(x_1, x_2) = y_2\}$.

定理 如果 (X_1, X_2) 是具有密度函数 $f(x_1, x_2)$ 的连续型分布. $P((X_1, X_2) \in \mathcal{S}) = 1$. (Y_1, Y_2) 是 (X_1, X_2) 的可微分函数,

$$\phi : (X_1, X_2) \mapsto (Y_1 = \phi_1 (X_1, X_2), Y_2 = \phi_2 (X_1, X_2)).$$

并且 (Y_1, Y_2) 是 (X_1, X_2) 一一对应, 即 (X_1, X_2) 也可以表示为 (Y_1, Y_2) 的函数

$$\psi : (Y_1, Y_2) \mapsto (X_1 = \psi_1 (Y_1, Y_2), X_2 = \psi_2 (Y_1, Y_2)).$$

令 $\mathcal{T} = \phi(\mathcal{S})$. 那么 (Y_1, Y_2) 的联合概率函数是（注意绝对值）

$$g(y_1, y_2) = f(\psi_1 (y_1, y_2), \psi_2 (y_1, y_2)) \left| \frac{\partial (\psi_1, \psi_2)}{\partial (y_1, y_2)} \right| \cdot 1_{\mathcal{T}} (y_1, y_2)$$

其中

$$\frac{\partial (\psi_1, \psi_2)}{\partial (y_1, y_2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

为 Jacobian 行列式.

上面的定理可以直接地推广到多个变量的情形, 在此不做详述.

例题 如果 (X_1, X_2) 是具有密度函数 $f(x_1, x_2)$ 的连续型分布. $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + b$, $(a_1 \neq 0)$. 那么 Y 具有连续型分布, 其密度函数为

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{|a_1|} dx_2.$$

- 假设 $a_1 > 0$. （$a_1 < 0$ 证明类似）. 令

$$A_y = \{(x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 + b \leqslant y\}$$

那么 Y 的分布函数为

$$G(y) = \int\int_{A_y} f(x_1, x_2)\, dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{(y-a_2x_2-b)/a_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

对内层积分进行变量代换, 令 $z = a_1x_1 + a_2x_2 + b$, 那么 $dz = a_1 dx_1$,

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} f\left(\frac{z - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{a_1} dz dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{a_1} dx_2 \right) dz \end{aligned}$$

由此可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y - a_2x_2 - b}{a_1}, x_2\right) \frac{1}{a_1} dx_2$$

正是所求的密度函数.

该结论的一个特殊情形是 $Y = X_1 + X_2$, 此时我们有

定理 如果 (X_1, X_2) 是具有密度函数 $f(x_1, x_2)$ 的连续型分布. 那么 $Y = X_1 + X_2$ 具有连续型分布, 其密度函数为

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - x_2, x_2)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y - x_1)\, dx_1.$$

随机变量 Y 的分布称为 X_1 与 X_2 **分布的卷积.**

例题 假设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布, 具有同样分布函数 $F(x)$. 确定下列随机变量的分布

$$Y_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

并确定 Y_1 与 Y_n 的联合分布

- 由独立性, Y_n 的分布函数为

$$G_n(y) = P(Y_n \leqslant y)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y, \ldots, X_n \leqslant y\right) \\
&= P\left(X_1 \leqslant y\right) P\left(X_2 \leqslant y\right) \cdots P\left(X_n \leqslant y\right) \\
&= \left[F(y)\right]^n
\end{aligned}
$$

Y_1 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
& G_1(y) \\
&= P\left(Y_1 \leqslant y\right) \\
&= 1 - P\left(Y_1 > y\right) \\
&= 1 - P\left(X_1 > y\right) P\left(X_2 > y\right) \cdots P\left(X_n > y\right) \\
&= 1 - \left[1 - F(y)\right]^n
\end{aligned}
$$

注意

$$
\{Y_n \leqslant y\} = \{Y_n \leqslant y\} \cap \{Y_1 \leqslant y\} + \{Y_n \leqslant y\} \cap \{Y_1 > y\}
$$

因此 Y_1 与 Y_n 的联合分布函数（$y_n \geqslant y_1$）

$$
G(y_1, y_n)
$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(Y_n \leqslant y_n, Y_1 \leqslant y_1\right) \\
&= P\left(Y_n \leqslant y_n\right) - P\left(Y_n \leqslant y_n, Y_1 > y_1\right) \\
&= \left[F\left(y_n\right)\right]^n - P\left(y_1 < X_1 \leqslant y_n\right) \cdots P\left(y_1 < X_n \leqslant y_n\right) \\
&= \left[F\left(y_n\right)\right]^n - \left[F\left(y_n\right) - F\left(y_1\right)\right]^n
\end{aligned}
$$

例题 假设 X, Y 独立, 具有同样的指数密度函数

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

确定 $U = X + Y$ 与 $V = X/Y$ 的密度, 并证明 U 与 V 相互独立.

- 由题可知 X, Y 的联合密度为

$$
h(x, y) = f(x) f(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

下面求 U 与 V 联合密度. 考虑变量替换

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x/y, \end{cases} \quad x, y > 0$$

它存在唯一反函数

$$\begin{cases} x = \frac{uv}{1+v}, \\ y = \frac{u}{1+v}, \end{cases} \quad u, v > 0$$

于是 Jacobian 行列式的绝对值为

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u(1+v)-uv}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{matrix}\right\| = \frac{u}{(1+v)^2}$$

因此 U 与 V 联合密度为

$$g(u,v) = \exp\left(-\left(\frac{uv}{1+v} + \frac{u}{1+v}\right)\right) \cdot \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$= ue^{-u} \cdot \frac{1}{(1+v)^2}$$

由此可见 U 与 V 相互独立. U, V 的分布分别是

$$g_U(u) = ue^{-u}, u > 0$$

$$g_V(v) = \frac{1}{(1+v)^2}, v > 0$$