Lecture 1

事件与概率

Probability and Statistics
Beihang University

1.1 课程内容

- 预备知识: 微积分，多元微积分，线性代数
- 本课程是概率论与数理统计的入门课程，将向初学者介绍: 概率论，统计推断和随机过程；（1）概率论：概率空间，事件与概率，条件概率，随机变量，多元随机变量，随机变量的期望与方差，大数定理与中心极限定理等（2）统计推断：Bayes 估计，极大似然估计，样本估计量及其分布，假设检验（3）随机过程：平稳随机过程，平稳 Gaussian 过程, 遍历过程, Markov 链等
- 教学参考书目以及讲稿等课程相关内容可在课程中心或是 https://scistats.github.io/ 找到

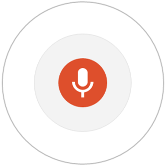
1.2　作业与评估

- 课程时间: 周一, 周三（单）; J3-311.
- 助教安排: 助教主要负责批改平时作业以及期末答疑辅导.
- 平时作业: 从第二周开始每周一课间交作业，请尽量不要迟交或缺交，以免影响总评成绩.
- 评估方法: 平时作业 (15%) + 期末考试 (85%). 统一闭卷考试.

1.3 概率与不确定性

几个常见例子:

- 在一个计算机网络系统中，网络出现拥挤的概率有多大？
- 同一生产线生产的某产品，其合格率如何估计？
- 如何使用随机模型估算基于股票走势的金融产品的价格？
- 某一机构为客户提供服务，怎样分配资源才能让服务更有效？
- Google 搜索引擎是如何对页面进行排序的？
- 语音识别系统如何使用概率模型对音频序列进行识别？



1.4 集合

定义 1.4.1 **集合**是由一些对象组成的，这些对象称为集合的元素. 如果 S 是一个集合并且 x 是 S 的一个元素，我们写作 $x \in S$. 反之则写作 $x \notin S$. 空集记为 $\varnothing$.

例题 1.4.1 $S = \{x_1, x_2\}$ 是一个有限集. $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ 是一个可数集合. $S = \{x | 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 是区间 $[0, 1]$ 中所有实数组成的集合，这是一个不可数集合.

定义 1.4.2 如果集合 S 的元素同时也属于 T, 我们就称 S 是 T 的**子集**，并记为 $S \subset T$. 如果 $S \subset T$ 并且 $T \subset S$, 那么 $S = T$.

例题 1.4.2 包含所有元素的集合称是一个全集 Ω. 全集的定义取决于所考虑的问题. 当全集给定之后，所有集合都是全集的子集，特别地 $\varnothing$ 是全集的子集.

1.5 集合的运算

集合 S 的**余集**

$$S^c = \{x | x \notin S\} = \Omega \backslash S$$

并集

$$S \cup T = \{x | x \in S \text{ 或者} x \in T\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_n = \{x | x \in S_k \text{ 对某个} k\}$$

交集

$$S \cap T = \{x | x \in S \text{ 并且} x \in T\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} S_n = \{x | x \in S_k \text{ 对所有} k\}$$

一些相关性质（其中 Ω 为全集）

$$S \cup T = T \cup S, \qquad S \cup (T \cup U) = (S \cup T) \cup U$$
$$S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U), \quad S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$$
$$(S^c)^c = S, \qquad S \cap S^c = \varnothing$$
$$S \cup \Omega = \Omega, \qquad S \cap \Omega = S$$

定理 1.5.1 (De Morgan's Law) 对任意集合 $S_1, \dots, S_n$, 我们有

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} S_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} S_k^c, \quad \left(\bigcap_{k=1}^{n} S_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} S_k^c$$

- 我们证明第一个等式. $x \in (\bigcup S_k)^c \Longleftrightarrow x \notin \bigcup S_k \Longleftrightarrow x \notin S_k$ 对所有 $k \Longleftrightarrow x \in S_k^c$ 对所有 $k \Longleftrightarrow x \in \bigcap S_k^c$. ///

1.6 排列组合知识点复习

- n 个不同对象的不同的排列方法总数为：$n!$
- 从 n 个不同对象中选择 k 个组成一个 $k-$ 序列，不同的 $k-$ 序列总数为：

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- 从 n 个不同对象中任选 k 个（不计顺序）的方法总数为：

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

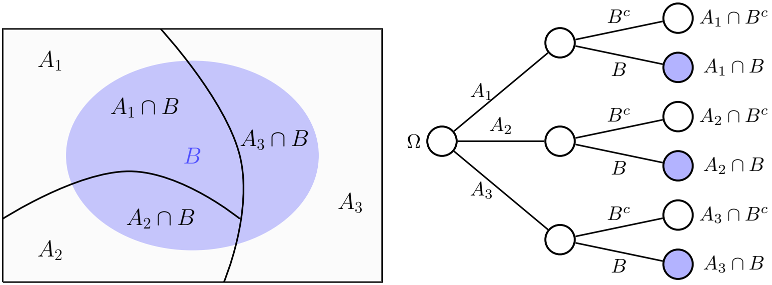
- 将 n 个不同对象划分为 r 组(不计顺序), $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_r$, 那么不同的方法总数为：

$$C_n^{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

1.7 概率模型

定义 1.7.1 **概率模型**由样本空间和概率组成. 样本空间是所有实验结果的集合. 样本空间的子集称为**事件**. **概率**则是集合上的函数，它赋予每一个事件一个非负数.

很多概率模型可以通过图形或是树形结构来表示:



样本空间

例题 1.7.1 在一次游戏中，玩家连续投掷一个硬币 10 次. 每出现一次正面，玩家赢得 1 元.

■ 在这个游戏中，影响到游戏结果的是正面出现的个数. 令 s_k $(k = 0, ..., 10)$ 表示在 10 次连续投掷中正面出现 k 次的事件. 那么我们可以定义样本空间为 $\Omega = \{s_0, s_1, ..., s_{10}\}$. ///

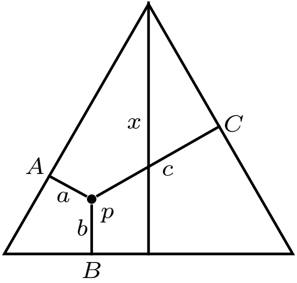
例题 1.7.2 在一次游戏中，玩家连续投掷一个硬币 10 次. 在第一个正面出现之前，每投一次硬币玩家赢得 1 元. 在第一个正面出现之后，直到第二个正面出现，每投一次硬币玩家赢得 2 元. 以此类推......

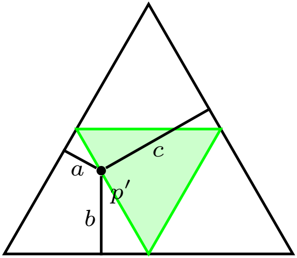
■ 在这个游戏中正面出现的次数以及何时出现都将影响到游戏结果. 因此合适的样本空间应该包括所有可能出现的 10-投掷序列. ///

例题 1.7.3 将一根长度为 x 的木棍分为三段，它们正好组成一

个三角形的概率是多少?

- 提示: 考虑一个高为 x 的等边三角形. 从该三角形的内部任意一点 p 向三边作垂线. 三条垂线段对应着一个分割木棍的方法. 注意到在图形中 $x = a + b + c$. a, b, c 能组成一个三角形当且仅当 p 点位于绿色三角形中，绿色三角形是通过连接三边中点形成的. 所以所求的事件概率为 $1/4$.





概率公理

给定样本空间，**概率律**将赋予每一个事件 A 一个非负数 $P(A)$, 称之为事件 A 的概率. 概率律应满足一下公理

- $P(A) \geqslant 0$;
- $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ 如果 A_n 互不相交, 即. $A_i \cap A_j = \varnothing$ 如果 $i \neq j$;
- $P(\Omega) = 1$.

例题 1.7.4 假设 $C_n, n = 1, \ldots, N$ 为互不相交的集合, 即, $C_i \cap C_j = \varnothing$ 对于 $i \neq j$, 那么

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} C_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(C_n).$$

■ 取 $A_n = C_n$, 如果 $n = 1, \ldots, N$, $A_n = \varnothing$ 如果 $n > N$. 然后对 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 运用概率公理.

从概率公理可以推出一些简单的性质, 它们可以通过图形直接验证:

- $P(\varnothing) = 0$

  $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 + P(\varnothing)$

- 由于 $\Omega = A \cup A^c$, 总有 $P(A^c) = 1 - P(A)$

- 如果 $A \subset B$, 那么 $P(A) \leqslant P(B)$

  $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  注意到 $A \cup B$ 可以写成两个不相交集合的并集 $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$, 因此

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(B) + P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

- $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$
- $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

例题 1.7.5 投掷两个硬币并假设样本空间 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ 中的每一个事件是等概率的, 即. $\frac{1}{4}$. 令

$$E = \{\text{第一个硬币出现正面}\}$$

$$F = \{\text{第二个硬币出现正面}\}$$

试计算 $P(\{\text{至少有一个硬币出现正面}\})$.

- 直接计算

$$P(\{\text{至少有一个硬币显示正面}\}) = P(\{HH, HT, TH\}) = \frac{3}{4}.$$

或者运用概率的性质

$$
\begin{aligned}
& P\left(\left\{\text{至少有一个硬币显示正面}\right\}\right)=P(E\cup F) \\
& =P(E)+P(F)-P(E\cap F) \\
& =P(\{HH,HT\})+P(\{HH,TH\})-P(\{HH\}) \\
& =\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

例题 1.7.6 水电公司希望对水电需求进行预先规划. 为此工程人员将水需求量标记在 X 轴上，而将电需求量标记在 Y 轴上. 假设水的需求通常在 0 至 200 单位之间，而电需求量则在 0 至 150 之间. 那么水电需求量分布在平面上的一个矩形区域里. 假设任何一个水电需求量事件 E 的发生概率等于事件所占区域面积与总水电分布区域面积的比值. 试求出用水量和用电量都至少在 100 以上的区域概率.

■ 令

$$A=\{\text{用水量至少在100以上的区域}\}$$

$$B=\{\text{用电量至少在100以上的区域}\}$$

由题设 $P(A)=(200-100)/200=0.5,$

$P(B)=(150-100)/150\approx 0.3,$

$$P(A\cap B)=\frac{(200-100)\cdot(150-100)}{200\cdot 150}\approx 0.15$$

因此

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\approx 0.65$$

概率为零并不表明不可能发生，例如令

$$E=\{\text{用水量为100, 用电量在0至150之间}\},$$

那么在水电需求的矩形区域中（通过简单的极限计算可知），

$$P(E) = 0.$$

但这一事件 E 仍然是有可能发生的. 同样地推理可知 $P(E) = 1$ 也并不表示该事件一定发生.

定义 1.7.2 如果事件 A 满足 $P(A) = 1$, 那么我们称事件 A 是几乎必然发生的.

事件概率的收敛性质

定理 1.7.1 任给递增事件序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots.$ 令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 那么

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

- 令 $B_1 = A_1, B_2 = A_1^c \cap A_2, B_3 = A_2^c \cap A_3, \ldots$ 那么 $B_1, B_2, B_3, \ldots$

互不相交, 并且

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A$$

由概率的性质

$$P\left(A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right)$$

对 n 取极限

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)
\end{aligned}$$

$$= P(A)$$

最后一个等号运用了概率公理.

定理 1.7.2 任给递减事件序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. 令 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 那么

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

- 令 $B_1 = A_1, B_2 = A_2^c, B_3 = A_3^c, \ldots$ 那么 $B_1, B_2, B_3, \ldots$ 是递增事件序列, 并且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = A^c$$

对 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ 运用已证明的定理得到

$$P(A^c) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

运用概率的性质改写为

$$1-P\left(A\right)=1-\lim_{n\to\infty}P\left(B_n^c\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(A_n\right)$$

因此定理成立

并集的概率

定理 1.7.3 对任意集合序列 $\{A_i\}_{i=1}^n$, 下列公式成立

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P\left(A_i\right)-\sum_{i<j\leqslant n}P\left(A_iA_j\right)\\ &+\sum_{i<j<k\leqslant n}P\left(A_iA_jA_k\right)-\cdots\\ &+\left(-1\right)^{n+1}P\left(A_1A_2\ldots A_n\right)\end{aligned}$$

■ 用归纳法证明. 假设定理对 n 成立, 希望证明 $n+1$ 时上式仍然成立, 也就是, 需要证明

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} P\left(A_i\right) - \sum_{i<j\leqslant n+1} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{i<j<k\leqslant n+1} P\left(A_iA_jA_k\right) - \cdots + (-1)^{n+2} P\left(A_1A_2\ldots A_{n+1}\right)$$

为此，我们用 I_{RHS} 表示上面等式的右侧，希望证明

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = I_{RHS}.$$

用 I_{n+1} 表示 I_{RHS} 不含有 $n+1$ 的各项之和, J_{n+1} 表示 I_{RHS} 含有 $n+1$ 的各项之和. 那么 $I_{RHS} = I_{n+1} + J_{n+1}$, 运用对 n 个集合并集

时的归纳假设容易看出

$$I_{n+1} = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

而

$$\begin{aligned} J_{n+1} = & P\left(A_{n+1}\right) - \sum_{i<n+1} P\left(A_i A_{n+1}\right) \\ & + \sum_{i<j<n+1} P\left(A_i A_j A_{n+1}\right) - \cdots \\ & + (-1)^{n+2} P\left(A_1 A_2 \ldots A_{n+1}\right). \end{aligned}$$

进一步地观察并再次运用对 n 个集合并集时的归纳假设可以看出, J_{n+1} 中除去第一项后余下的部分（连同符号）等于

$$-P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap A_{n+1}\right)\right) = -P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right).$$

换言之

$$J_{n+1}=P\left(A_{n+1}\right)-P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap A_{n+1}\right).$$

这样我们证明了

$$\begin{aligned}
I_{RHS} &= I_{n+1}+J_{n+1}\\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)+P\left(A_{n+1}\right)-P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap A_{n+1}\right)\\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right).
\end{aligned}$$

///

例题 1.7.7 现有 n 张写有不同数字的卡片, 对应每一张卡片都有 1 个信封，它内侧写有一个与对应卡片相同的数字. 现在将 n

张卡片随机地放入信封, 至少有一张卡片装入与之对应信封的概率是多大?

- $A_i = \{第i\text{ 张卡片放入正确的信封}\}$, 那么我们需要计算 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$. 这需要用到并集的概率公式. 首先 $P(A_i) = \frac{1}{n}$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

当 $i < j$, $P(A_iA_j) = \frac{1}{n(n-1)}$, 于是

$$\sum_{i<j\leqslant n} P(A_iA_j) = C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

当 $i < j < k$, $P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$, 于是

$$\sum_{i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) = C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!}.$$

以此类推, $P\left(A_1A_2\ldots A_n\right)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 1}=\frac{1}{n!}$. 所以

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\to 1-e^{-1}.$$

1.8 条件概率

条件概率是在有限的信息中对事件概率的估计

定义 1.8.1 在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率, 记为 $P(A|B)$, 定义为

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

$P(A|B)$ 没有定义，如果 $P(B) = 0$. 非负数 $P(A|B)$ 则称为事件 A 在事件 B 发生时的**条件概率**

条件概率是一个概率律

定理 1.8.1 如果 $P(B) > 0$, 那么 $P(\cdot|B)$ 概率公理中的所有条件.

(i)

$$P\left(\Omega|B\right)=\frac{P\left(\Omega\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(B\right)}{P\left(B\right)}=1;$$

(ii) 对任意的事件集 A_n, 总有

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cap B\right).$$

如果 A_n 互不相交, 那么

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\middle| B\right)=\frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cap B\right)\right)}{P\left(B\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n|B\right).$$

乘法法则

定理 1.8.2 如果 $P(B) > 0$, 那么 $P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$.

定理 1.8.3 如果 $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}) > 0$, 那么

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) \\
&= P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}).
\end{aligned}
$$

- 右侧公式为

$$
P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1})}.
$$

由于 $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}) > 0$, 上式中所有分母均为正数.

例题 1.8.1 一个盒子中装有 $r \geqslant 2$ 个红球和 $b \geqslant 2$ 个蓝球. 任取 4 个球并不再放回. 试确定取出的小球依次为红, 蓝, 红, 蓝的概率.

- 令 $R_j = \{$第j 次取出的为红球$\}$, $B_j = \{$第j 次取出的为蓝球$\}$. 需要计算 $P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4)$. 注意到

$$P(R_1) = \frac{r}{r+b}, P(B_2|R_1) = \frac{b}{r+b-1},$$

$$P(R_3|B_2 \cap R_1) = \frac{r-1}{r+b-2}, P(B_4|R_3 \cap B_2 \cap R_1) = \frac{b-1}{r+b-3}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4) \\
&= P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|B_2 \cap R_1)P(B_4|R_3 \cap B_2 \cap R_1) \\
&= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1} \cdot \frac{r-1}{r+b-2} \cdot \frac{b-1}{r+b-3}.
\end{aligned}$$

例题 1.8.2 三个人将他们的帽子放在桌上. 打乱帽子顺序，然后三个人从中任意取走一顶帽子. 每一个人都正好拿到自己原本帽子的概率有多大?

- 令 $E_j = \{$第j 个人拿到他自己的帽子$\}$. 我们来计算 $P(E_1E_2E_3)$. 根据乘法法则,

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1)\,P(E_2|E_1)\,P(E_3|E_1E_2).$$

易见

$$P(E_1) = \frac{1}{3}, P(E_2|E_1) = \frac{1}{2}, P(E_3|E_1E_2) = 1.$$

因此

$$P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

乘法法则对条件概率同样成立

定理 1.8.4 如果 $P(B)>0$, $P(A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1}|B)>0$, 那么

$$
\begin{aligned}
&P(A_1\cap A_2\cap\ldots A_n|B)\\
&=P(A_1|B)\,P(A_2|A_1\cap B)\ldots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1}\cap B).
\end{aligned}
$$

- 右侧公式为

$$
\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}\frac{P(A_1\cap A_2\cap B)}{P(A_1\cap B)}\cdots\frac{P(A_1\cap A_2\cap\ldots A_n|B)}{P(A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1}\cap B)}.
$$

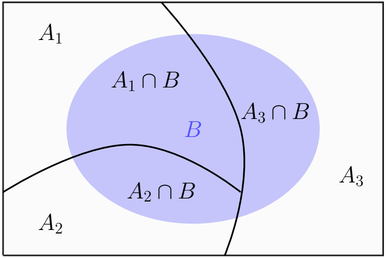
由于 $P(A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1}|B)>0$, 上式所有分母为正. ///

全概率公式

定义 1.8.2 令 S 为一个集合. 如果 $A_n, n=1,\ldots,N$ 互不相交并且 $\bigcup_{n=1}^{N}A_n=S$, 那么 $\{A_n\}$ 称为集合 S 的一个**划分**.

例如, 在如下图示中 $B\cap A_1, B\cap A_2, B\cap A_3$ 是集合 B 的一个划分，并且容易看到

$$P(B)=\sum_{n=1}^{3}P(B\cap A_n).$$



一般地, 下面的定理告诉我们, 为了求出集合的概率, 可以首先确定一个样本空间的划分, 再尝试求出在每一个划分集合上的条件概率.

定理 1.8.5 如果 $\{A_n\}$ 是样本空间 S 的划分，$P(A_n) > 0, n = 1, \ldots, N$ 那么

$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) P(B|A_n).$$

- 直接运用划分以及条件概率的定义得出. //

例题 1.8.3 投掷一个均匀的骰子. 假设第一次投掷中出现的点数为 X, 继续投掷直到出现点数 $Y \geqslant X$. 令 A 表示 $Y = 6$ 这一事件，试求出其概率

- 如果 $X = i$, 那么 Y 可能是 $i, i+1, \ldots, 6$, 并且它们是等可能的. 因此（参见本例附注）

$$P(A|X = i) = \frac{1}{7-i},$$

从而

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{6} P(A|X=i)\,P(X=i) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right).
\end{aligned}
$$

注意本例的样本空间是 $\{Y \geqslant X\}$, $P(A)$ 的概率也可以通过细分样本空间来完成，令 N_k 表示至停止投掷时所用去的投掷次数, 根据题意投掷次数至少为 2. 如果已知 $X=i$ 并且投掷次数为 k, 那么 A 发生时最后一次点数始终是 6, 而其前面的点数只能出现在 $\{1,...,i-1\}$ 这 $i-1$ 个数中, 特别地 $X=1$ 时投掷次数只有一种可能，即 2 次. 因此

$$
P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A|X=i)\cdot P(X=i)
$$

$$= \sum_{i=1}^{6}\sum_{k=2}^{\infty} P\left(A \cap N_k | X = i\right) \cdot P\left(X = i\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \sum_{i=2}^{6}\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{i-1}{6}\right)^{k-2} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \quad （i = 1\text{单算}）$$

$$= \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} \frac{6}{7-i} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{7-i}.$$

例题 1.8.4 投掷一个均匀四面体骰子. 如果出现 1 或者 2, 那么你可以继续投掷一次, 否则停止投掷. 投掷总点数至少为 4 的概率是多少?

■ 令 $E_j = \{\text{第一次点数为}j\}$, $E = \{\text{总点数至少为}4\}$. 如果第一次点数为 1, 那么第二次投掷必须是 3 或者 4. 因此 $P\left(E|E_1\right) = 2/4 = 1/2$. 类似地 $P\left(E|E_2\right) = 3/4$. 如果第一次点数为 3, 那么停止投掷， 总点数只能是 3, 因此 $P\left(E|E_3\right) = 0$. 如果第一次点数为 4, 那么停止投掷， 总点数为 4, 因此 $P\left(E|E_4\right) = 1$. 运用全

概率公式得到

$$
\begin{aligned}
P(E) &= \sum_{n=1}^{4} P(E_n)\, P(E|E_n) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 \\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}
$$

Bayes's 法则

定理 1.8.6 假设 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是样本空间的一个划分. 并假设 $P(A_i) > 0, \forall i$. 对于任意具有正概率的事件 B, 都成立

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}.$$

- 由条件概率与全概率公式得到

例题 1.8.5 当飞机出现时, 雷达探测到飞机并发出警报的概率为 0.99. 如果飞机没有出现，那么雷达对以 0.1 的概率发出错误的警报. 假设飞机出现的概率为 0.05. 那么当雷达发出警报时飞机确实出现了的概率有多大?

- 令 $A = \{飞机出现\}, B = \{警报响起\}$. 根据题设

$$P(B|A) = 0.99, P(B|A^c) = 0.1, P(A) = 0.05.$$

需要计算 $P(A|B)$. 由 Bayes's 法则

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}\\ &= \frac{0.99\cdot 0.05}{0.99\cdot 0.05+0.1\cdot 0.95}\\ &\approx 0.34.\end{aligned}$$

例题 1.8.6 在回答多项选择的问题时，学生要么知道如何解答要么用猜的办法来解答. 假设 p 是学生知道如何解答的概率，而 $1-p$ 是学生通过猜来解答的概率. 同时假设不知道如何解答的学生会以 $1/4$ 的概率来选择 4 个选项中的任何一个. 已知一个学生选对了正确答案，那么有多大的概率是这个学生真正知道正确的解题方法?

- 令 $A=\{$学生知道解答方法$\}$，
  $B=\{$学生回答正确$\}$.
  根据题设已知 $P(B|A)=1$，$P(B|A^c)=1/4$ 以及 $P(A)=p$.

要计算 $P(A|B)$ 由 Bayes's 法则

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{4}\cdot(1-p)} \\ &= \frac{4p}{1+3p}\end{aligned}$$

1.9 独立性

定义 1.9.1 事件 A 和 B 称为相互**独立**的, 如果

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

定理 1.9.1 如果 $P(A) = 0$, 那么 A 与任何事件相互**独立.**

- 由于 $A \cap B \subset A$, 因此 $P(A \cap B) = 0 = P(A) P(B)$ //

定理 1.9.2 如果事件 A 和 B 独立, 那么事件 A^c 和 B 独立, 事件 A^c 和 B^c 独立.

- 我们证明 A^c 和 B 独立. 事实上

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 - P(A))\, P(B) \\
&= P(A^c)\, P(B)
\end{aligned}
$$

例题 1.9.1 如果 $P(A) = 1$, 那么 A 与任何事件相互**独立.**

■ 由于 $P(A) = 1$, $P(A^c) = 0$, 因此 A^c 与任何事件相互独立, 从而 A 与任何事件相互独立

定理 1.9.3 如果 A 与任何事件相互**独立, 那么** $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$.

■ 由假设, A 与自身相互独立, 因此

$$
P(A) = P(A \cap A) = P(A)\, P(A),
$$

由此可知结论成立

定理 1.9.4 如果 $P(B) > 0$, 那么不难, 事件 A 和 B 相互独立当且仅当

$$P(A|B) = P(A).$$

- 由条件概率的定义看出

$$P(A|B)\,P(B) = P(A\cap B)$$

因此事件 A 和 B 相互独立当且仅当 $P(A|B)\,P(B) = P(A)\,P(B)$, 这正是 $P(A|B) = P(A)$ //

运用这一事实我们有

例题 1.9.2 如果 $P(B) > 0, P(B^c) > 0$ 那么事件 A 和 B 相互独立当且仅当

$$P(A|B) = P(A|B^c)$$

例题 1.9.3 一个均匀的硬币投掷两次. 令 $A = \{\text{第一次为 H}\}$, $B = \{\text{第二次为 T}\}$. 那么事件 A 和 B 独立.

■ 样本空间为 $\{HH, HT, TH, TT\}$. 每一个单一事件概率为 1/4.

$$P(A) = P(\{HH, HT\}) = \frac{1}{2}, P(B) = P(\{HT, TT\}) = \frac{1}{2}.$$

因此

$$P(B \cap A) = \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

例题 1.9.4 投掷一个均匀硬币直到正面出现. 假设各次投掷是相互独立的. 那么有多大的概率，正面最终出现?

■ 令 p_n 为正面首次出现在第 n 次投掷的概率. 那么正面最终出现的概率应该是

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots = 1.$$

因此在连续投掷一个均匀硬币时，正面可能很早出现，可能很晚才出现，但可以肯定正面最终会以概率 1 出现.

定义 1.9.2 一列集合族 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 称为是相互独立的，如果对于任何子集 $\{j_1, ..., j_s\} \subset \{1, ..., n\}$, 都有

$$P\left(A_{j_1}A_{j_2}...A_{j_s}\right) = P\left(A_{j_1}\right)P\left(A_{j_2}\right)...P\left(A_{j_s}\right).$$

// 从定义容易看出, 如果集合族 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是相互独立的. 从中选择任意多个集合组成一个新的集合族, 那么这个新的集合族也是相互独立的.

两两独立不能推出相互独立.

例题 1.9.5 投掷两个均匀的相互独立的硬币. 令

$E = \{$第一次为正$\}$,
$F = \{$第二次为正$\}$,
$G = \{$两次投掷一正一反$\}$.

这些事件两两独立，但它们不是相互独立的.

■ 由于 $P(E) = 1/2, P(F) = 1/2, P(G) = 1/2$, 但 $P(EFG) = 0 \neq 1/8 = P(E)P(F)P(G)$, 所以它们不是独立的. 由前面的例

题已经知道 E 和 F 独立. 为证明 E 和 G 独立, 只需注意

$$\begin{aligned}
P(G|E) &= \frac{P(G\cap E)}{P(E)} \\
&= \frac{P(\{\text{第一次为正, 第二次为反}\})}{P(E)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(G).
\end{aligned}$$

同样地, F 和 G 独立.

撞击时间

例题 1.9.6 考虑这样一个游戏. 假设 n 为正整数, $i\in[0,n]$ 为非负整数. 一个小球停留在 i 处. 现投掷一个硬币，正面出现的概率为 p. 当硬币为正面时小球移动到 $i+1$, 反之移动到 $i-1$. 假设硬币的投掷是互不影响的. 如果小球抵达 0, 那么游戏结束,

你不会得到任何奖励. 如果小球抵达 n, 那么游戏也结束，并且你可以获得奖励. 试求出你赢得奖励的概率 a_i.

- 令

$$A_i = \{小球起始位置为i\}, \ W = \{赢得奖励\}.$$

由题，我们要求出

$$a_i = P(W|A_i).$$

注意到，由于硬币的投掷互不影响，每一次投掷硬币之后，游戏又回到原有的状态，唯一的区别是，小球的起始位置发生了改变. 若 $i \in (0, n)$，令 $B = \{第一次投掷是正面\}$, 那么由 (条件概率的) 全概率公式

$$\begin{aligned} P(W|A_i) &= P(WB|A_i) + P(WB^c|A_i) \\ &= P(W|BA_i) P(B|A_i) + P(W|B^cA_i) P(B^c|A_i) \\ &= pP(W|A_{i+1}) + (1-p) P(W|A_{i-1}) \end{aligned}$$

也就是

$$a_i = pa_{i+1} + (1-p)\, a_{i-1}. \tag{1.1}$$

另外，根据题意 $a_0 = 0, a_n = 1$.

我们需要求解方程 (*Equation* 1.1).

$$a_1 = pa_2$$

$$a_2 = pa_3 + (1-p)\, a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = p + (1-p)\, a_{n-2}$$

将左侧的 a_j 写作 $pa_j + (1-p)\, a_j$ 的形式, 那么上述方程可以写作

$$a_2 - a_1 = \frac{1-p}{p} a_1$$

$$a_3 - a_2 = \frac{1-p}{p}\left(a_2 - a_1\right) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 a_1$$

$$\vdots$$

$$1 - a_{n-1} = \frac{1-p}{p}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} a_1$$

相加得到,

$$1 - a_1 = a_1 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k. \tag{1.2}$$

例题 1.9.7 均匀硬币时的抵达时间, $p = 1/2$.

■ 将 $p = 1/2$ 代入 (*Equation* 1.1) 得到 $a_1 = 1/n$. 因此

$$a_k = \frac{k}{n}, k = 1, ..., n-1.$$

例题 1.9.8 非均匀硬币时的抵达时间, $p \neq 1/2$.

- 由于 $p \neq 1/2$, ($Equation$ 1.1) 等价于

$$
\begin{aligned}
& 1 - a_1 \\
& = a_1 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-p}{p} \right)^k \\
& = a_1 \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}
\end{aligned}
$$

因此

$$
1 = a_1 \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}
$$

于是

$$a_1 = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}$$

这样每一个 a_i 都可以被依次求解出,

$$a_k = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}, k = 1, ..., n-1.$$