Lecture 9

常用分布及其应用-II

ruanyl@buaa.edu.cn
September 2016, Beihang University

9.1 正态分布

定义 9.1.1 随机变量 X 称为具有参数为 μ 和 $\sigma^2(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$ 的**正态分布**, 如果 X 具有密度函数

$$f\left(x|\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, x \in \mathbb{R} \qquad (9.1)$$

通常记作 $X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$. 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则称 X 服从**标准正态分布**.

可以验证 $f\left(x|\mu,\sigma^2\right)$ 是一个概率密度函数. 容易看出关于 $f\left(x|\mu,\sigma^2\right)$ 的无穷积分收敛. 令 $y = (x-\mu)/\sigma$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x|\mu,\sigma^2\right) dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

注意到

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2+z^2\right)} dydz$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} rdrd\theta = 2\pi$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x|\mu,\sigma^2\right) dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot (2\pi)^{1/2} = 1$$

注记 9.1.1 由上面的变量代换看出, $X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ 那么 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

定理 9.1.1 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 那么 X 存在任意阶矩, 并且 $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$

$$E\left(X^{2k+1}\right) = 0,$$

$$E\left(X^{2k}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1).$$

- 容易看出 $E\left(X^0\right) = 1$, 并且由密度函数对称性 $E\left(X^{2k+1}\right) = 0$.

当 $n \geqslant 2$, 由分部积分

$$\begin{aligned} E\left(X^n\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} d\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \\ &= (n-1) E\left(X^{n-2}\right) \end{aligned}$$

因此定理成立.

由此可见标准正太分布 $\mathcal{N}(0,1)$ 的期望为 0, 方差为 1.

定理 9.1.2 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 那么
(1) $E(X) = \mu$;
(2) $Var(X) = \sigma^2$;
(3) $\psi(t) = E(e^{tX}) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right), t \in \mathbb{R}$.

■ (1)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&+ \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \mu
\end{aligned}$$

(2) 由 (9.1.1), 标准正太分布 2 阶矩为 1,

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sigma^2
\end{aligned}
$$

(3) 对 $t \in \mathbb{R}$ 下列积分存在,

$$
E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx
$$

通过配完全平方

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + tx = -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 + \frac{2\sigma^2 t}{2\sigma^2} x
$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2 + \frac{2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2 + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$$

因此

$$E\left(e^{tX}\right) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

根据生成函数与矩的关系, 可以通过计算 $\psi^{(n)}(0)$ 来验证定理 9.1.1. 例如 $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的 0 阶矩, 1 阶矩, 2 阶矩分别为

$$\psi^{(0)}(0) = \psi(0) = 1$$
$$\psi'(0) = \left[\left(\mu+\sigma^2 t\right)\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right]_{t=0} = \mu$$
$$\psi''(0) = \left[\left[\sigma^2 + \left(\mu+\sigma^2 t\right)^2\right]\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right]_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2$$

定理 9.1.3 $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. 令 $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$, 那么 $Y \sim \mathcal{N}\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$.

- Y 与 $\mathcal{N}\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$ 具有相同的生成函数,

$$E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{atX+bt}\right) = e^{\mu(at)+\frac{1}{2}\sigma^2(at)^2} e^{bt} = e^{(a\mu+b)t+\frac{1}{2}(a\sigma)^2 t^2}$$

定理 9.1.4 随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ **相互独立**, $X_k \sim \mathcal{N}\left(\mu_k, \sigma_k^2\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots n$. 那么

$$Y = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$$

■ Y 的生成函数为

$$E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t\sum_{k=1}^{n} X_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{tX_k}\right) = e^{(\sum \mu_k)t + \frac{1}{2}\left(\sum \sigma_k^2\right)t^2}$$

这一结论也可以进一步推广为：随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ **相互独立**, $X_k \sim \mathcal{N}\left(\mu_k, \sigma_k^2\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots n$. $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ 不全 0, $b \in \mathbb{R}$. 那么

$$Y = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k + b, \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2\right)$$

定义 9.1.2 随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 的平均值 $\frac{1}{n}\left(X_1 + \cdots + X_n\right)$ 称为样本平均, 通常记为 $\bar{X}$.

利用上面的定理可知, 如果随机变量 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立, $X_k \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. 那么 $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$.