Lecture 9

常用分布及其应用-II

Probability and Statistics
Beihang University

9.1 正态分布

定义 9.1.1 随机变量 X 称为具有参数为 μ 和 $\sigma^2(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$ 的**正态分布**, 如果 X 具有密度函数

$$f\left(x|\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, x \in \mathbb{R} \tag{9.1}$$

通常记作 $X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$. 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则称 X 服从**标准正态分布**.

可以验证 $f\left(x|\mu,\sigma^2\right)$ 是一个概率密度函数. 容易看出关于 $f\left(x|\mu,\sigma^2\right)$ 的无穷积分收敛. 令 $y=(x-\mu)/\sigma$, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x|\mu,\sigma^2\right) dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

注意到

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2+z^2\right)} dydz \\ &= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} rdrd\theta = 2\pi\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x|\mu,\sigma^2\right) dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot (2\pi)^{1/2} = 1$$

注记 9.1.1 由上面的变量代换看出, $X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ 那么 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

定理 9.1.1 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 那么 X 存在任意阶矩, 并且 $\forall k = 0,1,2,\ldots$

$$E\left(X^{2k+1}\right) = 0,$$

$$E\left(X^{2k}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1).$$

- 容易看出 $E\left(X^0\right) = 1$, 并且由密度函数对称性 $E\left(X^{2k+1}\right) = 0$. 当 $n \geqslant 2$, 由分部积分

$$\begin{aligned} E\left(X^n\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} d\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \\ &= (n-1) E\left(X^{n-2}\right) \end{aligned}$$

因此定理成立.

由此可见标准正太分布 $\mathcal{N}(0,1)$ 的期望为 0, 方差为 1.

定理 9.1.2 $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, 那么

(1) $E(X) = \mu$;

(2) $Var(X) = \sigma^2$;

(3) $\psi(t) = E\left(e^{tX}\right) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right), t \in \mathbb{R}$.

■ (1)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&\quad + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

(2) 由 (9.1.1), 标准正太分布 2 阶矩为 1,

$$Var\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sigma^2$$

(3) 对 $t \in \mathbb{R}$ 下列积分存在,

$$E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

通过配完全平方

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + tx = -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 + \frac{2\sigma^2 t}{2\sigma^2} x$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2+\frac{2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2}{2\sigma^2} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2+\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2
\end{aligned}
$$

因此

$$
E\left(e^{tX}\right)=\exp\left(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)
$$

根据生成函数与矩的关系, 可以通过计算 $\psi^{(n)}(0)$ 来验证定理 9.1.1. 例如 $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的 0 阶矩, 1 阶矩, 2 阶矩分别为

$$
\psi^{(0)}(0)=\psi(0)=1
$$

$$
\psi'(0)=\left[\left(\mu+\sigma^2 t\right)\exp\left(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right]_{t=0}=\mu
$$

$$
\psi''(0)=\left[\left[\sigma^2+\left(\mu+\sigma^2 t\right)^2\right]\exp\left(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right]_{t=0}=\sigma^2+\mu^2
$$

定理 9.1.3 $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. 令 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$, 那么 $Y \sim \mathcal{N}\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$.

- Y 与 $\mathcal{N}\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$ 具有相同的生成函数,

$$E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{atX+bt}\right) = e^{\mu(at)+\frac{1}{2}\sigma^2(at)^2} e^{bt} = e^{(a\mu+b)t+\frac{1}{2}(a\sigma)^2t^2}$$

亦可用密度变换公式直接证明.

定理 9.1.4 随机变量 $X_1, ..., X_n$ **相互独立**, $X_k \sim \mathcal{N}\left(\mu_k, \sigma_k^2\right)$, $k = 1, 2, ...n$. 那么

$$Y = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$$

■ Y 的生成函数为

$$E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{t\sum_{k=1}^{n}X_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}E\left(e^{tX_k}\right)=e^{(\sum\mu_k)t+\frac{1}{2}\left(\sum\sigma_k^2\right)t^2}$$

亦可用密度卷积公式直接证明.

这一结论也可以进一步推广为：随机变量 $X_1,\dots,X_n$ **相互独立**, $X_k\sim\mathcal{N}\left(\mu_k,\sigma_k^2\right)$, $k=0,1,2,\dots n$. $a_k\in\mathbb{R}$ $(k=0,1,2,\dots n)$ 不全 0, $b\in\mathbb{R}$. 那么

$$Y=a_1X_1+\cdots+a_nX_n+b\sim\mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\mu_k+b,\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sigma_k^2\right)$$

定义 9.1.2 随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 的平均值 $\frac{1}{n}\left(X_1+\cdots+X_n\right)$ 称为样本平均, 通常记为 $\overline{X}$.

利用上面的定理可知, 如果随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 相互独立, $X_k\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$. 那么 $\overline{X}\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2/n\right)$.

9.2 协方差矩阵

定义 9.2.1 随机向量 $X=(X_1,...,X_n)^T$ 的期望为

$$E(X)=(EX_1,...,EX_n)^T$$

X 的协方差矩阵为

$$C(X)=E\left[(X-E(X))(X-E(X))^T\right]$$

这里 $E(\cdot)$ 对矩阵的作用理解为对矩阵的每一个元素取期望.

注记 9.2.1 若假设 $EX_i^2<\infty,\forall i=1,...,n$, 那么运用 Schwarz 不等式可知, X 的期望, 方差-协方差矩阵都是存在的.

为简化书写, 记

$$\sigma_i=\left(E\left[(X_i-E(X_i))^2\right]\right)^{1/2},\rho_{ij}=\rho_{ji}=cov(X_i,X_j)/(\sigma_i\sigma_j)$$

例题 9.2.1 假设 $EX_i^2 < \infty, \forall i = 1, 2$, 写出 (X_1, X_2) 的协方差矩阵 C, $\det C$ 以及 (C 非退化时)C^{-1}

- 令 $X = (X_1, X_2)$, 将 $(X - E(X))(X - E(X))^T$ 展开为

$$\begin{pmatrix} (X_1 - EX_1)(X_1 - EX_1) & (X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) \\ (X_2 - EX_2)(X_1 - EX_1) & (X_2 - EX_2)(X_2 - EX_2) \end{pmatrix}$$

那么 (X_1, X_2) 的协方差矩阵 C 为

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

当 C 非退化时, 即 $\det C \neq 0$, $(\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \rho_{12} \in (-1, 1))$, 那么 C^{-1} 存在, 并且 $\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1 - \rho_{12}^2\right)$,

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\rho_{12}\frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\rho_{21}\frac{1}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$

定理 9.2.1 随机向量 $X = (X_1, ..., X_n)^T$ 的协方差矩阵 $C(X)$ 是对称, 正半定矩阵.

- 对称性容易看出. 为证明正半定性, 任取 $z \in \mathbb{R}^n$,

$$z^T C(X) z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[z_i (X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j)) z_j\right]$$
$$= E\left[\left(z^T (X - EX)\right) \cdot \left(z^T (X - EX)\right)^T\right]$$

因此 $z^T C(X) z \geqslant 0, \forall z$, 即正半定.

例题 9.2.2 假设 $EX_i^2 < \infty, \sigma_i > 0, \forall i = 1, 2$, 其相关系数 $|\rho| < 1$, 那么 (X_1, X_2) 的协方差矩阵 C 是对称正定的, 并且存在下三角矩阵 G, 使得 $C = GG^T$.

注记 9.2.2 这一结论称为 C 的 Cholesky 分解. 它对一般的对称正定矩阵成立：假设 A 为对称正定矩阵, 那么存在下三角矩阵 G, 其对角元素为正, 使得 $A = GG^T$.

■ 根据题设 $\det C \neq 0$, 因而非退化, 从而是对称正定的. 令

$$G = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\left(1-\rho^2\right)^{1/2} \end{pmatrix}$$

则有

$$GG^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = C$$

例题 9.2.3 假设 $Z = (Z_1, Z_2)$ 为随机向量, $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, 2$ **相互独立**, 那么 (Z_1, Z_2) 的协方差矩阵为单位矩阵.

9.3 二元正态分布

例题 9.3.1 假设 $Z=(Z_1,Z_2)^T$ 为随机向量, $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $i=1,2$ **相互独立** . $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$, $i=1,2$, $|\rho|<1$. 令 $\mu=(\mu_1,\mu_2)^T$,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \mu, G = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\left(1-\rho^2\right)^{1/2} \end{pmatrix}$$

试写出 $X=(X_1,X_2)^T$ 的联合密度函数与协方差矩阵.

- 由于 Z_1,Z_2 相互独立, 其联合密度函数为

$$g(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(z_1^2+z_2^2\right)\right], (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

由题解得

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(1-\rho^2\right)^{1/2}\sigma_1\sigma_2}\begin{pmatrix} \sigma_2\left(1-\rho^2\right)^{1/2} & 0 \\ -\rho\sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1-\mu_1 \\ X_2-\mu_2 \end{pmatrix}$$

或者写作

$$Z_1=\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}, Z_2=\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)^{1/2}}\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)$$

因此由密度变换公式得到 (X_1, X_2) 的联合密度函数

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2) \\
& = g\left(z_1, z_2\right)|\det G|^{-1} \\
& = \frac{1}{2\pi\left(1-\rho^2\right)^{1/2}\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right. \\
& \left.\left.-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}
\end{aligned}$$

下面计算 X_1, X_2 的协方差矩阵. 由题设 $X=GZ+\mu$, $EX=\mu$,

$$C(X)=E\left[(X-\mu)\cdot(X-\mu)^T\right]=E\left[GZ\cdot(GZ)^T\right]$$

$$= GE\left[Z \cdot Z^T\right] G^T = GG^T$$

基于上面的计算我们有

定义 9.3.1 如果 $X = (X_1, X_2)$ 具有如下联合密度函数, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\left(1-\rho^2\right)^{1/2}\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

那么称 $X = (X_1, X_2)$ 具有参数为 $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$, $C = GG^T$ 的**二元正太分布**. 记作 $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$. 这里 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\rho \in (-1, 1)$. $\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right) = 0$ 时称该二元正太分布为

退化的. 若 $\mu = 0$, C 为单位矩阵 I, 那么称 $\mathcal{N}(0, I)$ 为标准二元正太分布.

结合我们在例题 (9.2.1, 9.2.2) 中计算过的 C 和 C^{-1}, 容易看到, 定义 (9.3.1) 的二元正太分布密度也可以表达为简洁的矩阵形式：$\forall x = (x_1, x_2)^T$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi(\det C)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right\}$$

从定义 (9.3.1) 的二元正太分布密度的表达式可以看出

定理 9.3.1 如果 $X = (X_1, X_2)^T \sim \mathcal{N}(\mu, C)$, 那么关于 X_1 和 X_2 的边际分布仍然是正太分布, $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $X_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$.

正太条件分布

定理 9.3.2 如果 (X_1, X_2) 具有如定义 (9.3.1) 所给出的二元正太分布, 那么 X_2 在给定 $X_1 = x_1$ 时的条件分布是一个正态分布, 其期望方差分别为

$$E\left(X_2|x_1\right) = \mu_2 + \rho\sigma_2 \cdot \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, Var\left(X_2|x_1\right) = \left(1 - \rho^2\right)\sigma_2^2$$

- 注意到二元正太分布 (X_1, X_2) 是由 $Z = (Z_1, Z_2)^T \sim \mathcal{N}(0, I)$ 经过线性变换而得到的 (例题 (9.3.1)):

$$\begin{cases} X_1 = \sigma_1 Z_1 + \mu_1, \\ X_2 = \sigma_2 \left[\rho Z_1 + \left(1 - \rho^2\right)^{1/2} Z_2\right] + \mu_2. \end{cases}$$

将 X_2 重写为

$$X_2 = \sigma_2 \left(1 - \rho^2\right)^{1/2} Z_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \mu_2$$

就可以看出, 当 $X_1 = x_1$ 给定 (从而 $Z_1 = (X_1 - \mu_1)/\sigma_1$ 也给定), X_2 的条件分布就由 Z_2 在给定 Z_1 时的条件分布决定, 然而 Z_1, Z_2 是相互独立的, 因此 Z_2 在给定 Z_1 时的条件分布就是 Z_2 的分布. 由于 $Z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$, 因此 X_2 在给定 $X_1 = x_1$ 时的条件分布是

$$\mathcal{N}\left(\mu_2 + \sigma_2\rho \cdot \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2\right).$$

///

正太分布独立与不相关等价

如果 X_1, X_2 相互独立, 那么它们是不相关的, 反过来的结论一般不成立. 但对正太分布, 我们有

定理 9.3.3 如果 $X = (X_1, X_2)^T$ 服从二元正太分布. 那么 X_1, X_2 相互独立当且仅当它们互不相关.

■ 独立则有不相关. 反过来, 假设 X_1, X_2 不相关, 那么相关系数 $\rho = 0$, 此时定义 (9.3.1) 中的联合密度函数变为, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] \cdot \\
&\quad \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

即 $f(x_1, x_2)$ 分解为边际分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的密度乘积, 因此 X_1, X_2 相互独立. ///

同样的推理可证明

定理 9.3.4 如果 $X=(X_1,X_2)^T$ 服从二元正太分布. 那么 X_1,X_2 相互独立当且仅当其协方差矩阵为对角矩阵.

正太分布的线性变换

在例题 (9.3.1) 中我们看到, 如果 $Z=(Z_1,Z_2)^T\sim\mathcal{N}(0,I)$, 那么 $X=(X_1,X_2)^T=GZ+\mu$ 服从正太分布 $\mathcal{N}(\mu,GG^T)$. 一般地, 我们有

定理 9.3.5 如果 $X=(X_1,X_2)^T$ 服从二元正太分布 $\mathcal{N}(\mu,C)$. L 为 1×2 或者 2×2 矩阵, $Y=LX$. 那么 $Y\sim\mathcal{N}(L\mu,LCL^T)$, 即正太分布的线性变换仍然是正态分布.

- 若 $L=(l_1,l_2)$, 即 $Y=l_1X_1+l_2X_2$, 由例题 (9.3.1) 可知, 存在 a_1,a_2 使得 $Y=a_1Z_1+a_2Z_2$, 其中 Z_1,Z_2 是相互独立的标准正太分布, 因此 Y 也服从正态分布 (定理 (9.1.4)). 若 L 为 2×2 退化

矩阵, 可归为前一种情形. 若 L 为 2×2 非退化矩阵, 可运用密度变化公式证明. ///

9.4　多元正态分布

定义 9.4.1 多元随机变量 $X=(X_1,...,X_n)^T\in\mathbb{R}^n$ 称为具有 n 元正太分布, 如果它具有如下密度函数, $x\in\mathbb{R}$

$$f(x|\mu,\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\},$$

其中 Σ 为对称正定矩阵. 通常记作 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$. 当 Σ 为退化矩阵时, 称 X 为退化的 n 元正太分布.

注记 9.4.1 一个等价定义：多元随机变量 $X=(X_1,...,X_n)^T\in\mathbb{R}^n$ 称为具有 n 元正太分布, 如果任意的线性组合 $Y=\sum_i^n a_iX_i$ 都服从 (一维) 正态分布 (含退化情形, 例如所有 $a_i=0$, $Y\sim\mathcal{N}(0,0)$)

多元正太分布许多性质与二元情形类似, 例如我们有

定理 9.4.1 如果 $X=(X_1,...,X_n)^T$ 服从多元正太分布. $X_1,...,X_n$ 相互独立当且仅当它们互不相关.

定理 9.4.2 如果 $X = (X_1, ..., X_n)^T$ 服从多元正太分布. $X_1, ..., X_n$ 相互独立当且仅当其协方差矩阵为对角矩阵.

定理 9.4.3 如果 $X = (X_1, ..., X_n)^T$ 服从多元正太分布 $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. L 为 $m \times n$ 矩阵, $Y = LX$. 那么 $Y \sim \mathcal{N}(L\mu, L\Sigma L^T)$.

- 一般情形可通过生成函数证明. 仅证明 L 为可逆矩阵的情形. 由于线性变换 $y = Lx$ 的 Jacobian 行列式为 $\det L$, 由密度变换公式, Y 的密度为

$$f\left(L^{-1}y\right) \cdot \frac{1}{|\det L|}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \Sigma)^{1/2}|\det L|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(L^{-1}y - \mu\right)^T \Sigma^{-1}\left(L^{-1}y - \mu\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\det\left(L\Sigma L^T\right)\right)^{1/2}} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-L\mu)^T\left(L^{-1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(L^{-1}\right)(y-L\mu)\right\}$$

因此 Y 服从期望 $L\mu$, 协方差 $\left(\left(L^{-1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(L^{-1}\right)\right)^{-1} = L\Sigma L^T$ 的正态分布.

例题 9.4.1 用 I 表示单位矩阵. 如果 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2 I\right)$, A 为正交矩阵. 令 $Y = AX$, 那么 $Y \sim \mathcal{N}\left(A\mu, \sigma^2 I\right)$, 即正交变换不改变 X 的协方差及其各分量独立性.

■ 直接运用上一结论.