# Lecture 6

# 期望与方差-I

**Probability and Statistics**
**Beihang University**

# 6.1 随机变量的期望

## 离散随机变量及其函数的期望

离散随机变量可取至多可数个不同的实数, 因此它以写成有限或可数求和

$$X(\omega)=\sum_i x_i I_{A_i}(\omega) \tag{6.1}$$

这里 $\bigcup_i A_i$ 是概率空间的划分 . 例如若 $x_i$ 是互不相同的, 可以将概率空间划分为 $A_i=\{\omega: X(\omega)=x_i\}$ 的并集 . $I_A(\omega)$ 是集合 $A$ 上的指示函数,

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\in A^c\end{cases}.$$

如果 $X$ 仅取有限个值, 那么我们称 $X$ 是**简单随机变量**.

**定义 6.1.1** 假设 $X$ 是 $(Equation\ 6.1)$ 中的离散随机变量. 定义如

下“加权平均值”

$$\sum_i x_i \cdot P(A_i) = x_1 P(A_1) + x_2 P(A_2) + x_3 P(A_3) + \cdots$$

如果这个求和是绝对收敛的, 那么我们把这个求和称为 $X$ 的期望, 并且记作

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(A_i) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

注意 $E(X)$ 的定义仅仅依赖于 $X$ 的分布, 因此如果 $X, Y$ 具有相同分布, 那么 $E(X) = E(Y)$ .

**定理 6.1.1** 假设 $g(x)$ 是实数空间上某函数, $X$ 是 ($Equation$ 6.1) 中的离散随机变量. 那么 $Y = g(X)$ 的期望是 (如果该求和绝对

收敛)

$$E(Y) = \sum_i g(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

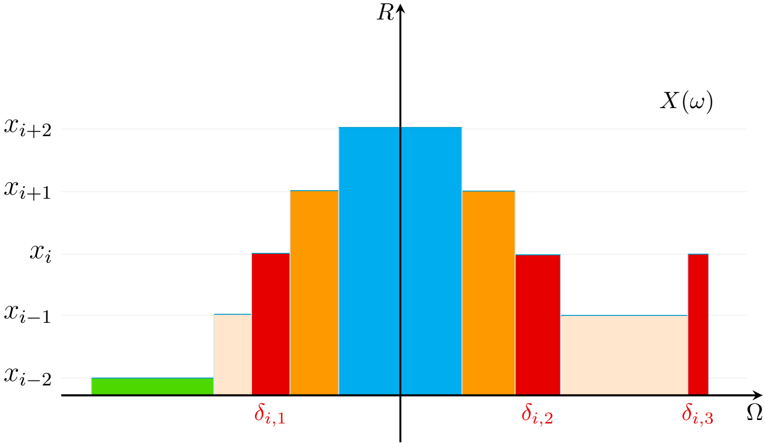
- 事实上

$$Y(\omega) = \sum_x g(x_i) \cdot I_{A_i}(\omega),$$

而 $\bigcup_i A_i = \bigcup_i \{X = x_i\}$ 形成概率空间的划分, 因此由定义可知 $Y$ 的期望是

$$\sum_i g(x_i) \cdot P(A_i) = \sum_i g(x_i) \cdot P(X = x_i).$$

离散随机变量在概率空间的积分可以通过下图来理解




$$P\big(\omega : X(\omega) = x_i\big) = P\big(\delta_{i,1}\big) + P\big(\delta_{i,2}\big) + P\big(\delta_{i,3}\big)$$

Figure 6.1: 简单随机变量积分示意图

## 连续型随机变量及其函数的期望

我们已经知道如何求简单随机变量的积分. 为了求连续型随机变量的积分, 我们将用简单随机变量来近似连续型随机变量, 进而用简单随机变量的积分来近似连续型随机变量的积分.

给定随机变量 $X$, 将其取值空间 $\mathbb{R}$ 分割为互不相交的小区间 $B_i = [x_i, x_{i+1}), \bigcup_i B_i = \mathbb{R}$. 小区间的度量为

$$|B_i| = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

如果划分充分细小, 我们可以认为随机变量 $X$ 在 $B_i$ 上近似地取常数值 $x_i \in B_i$. 例如, 如果 $X \geqslant 0$, 可取 $B_i = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)$, 令

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{2^n}, & X(\omega) \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right), 0 \leqslant i \leqslant n2^n - 1 \\ n, & X(\omega) \geqslant n \end{cases}$$

那么 $X_n$ 是一列收敛 $(n \to \infty)$ 到 $X$ 的简单随机变量.

注意, 如果 $\bigcup_i B_i$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个划分, 令 $\Omega_i = \{\omega : X(\omega) \in B_i\}$, 那么 $\bigcup_i \Omega_i$ 是 $\Omega$ 的一个划分.

# 一般随机变量在概率空间的积分可以通过下图来理解

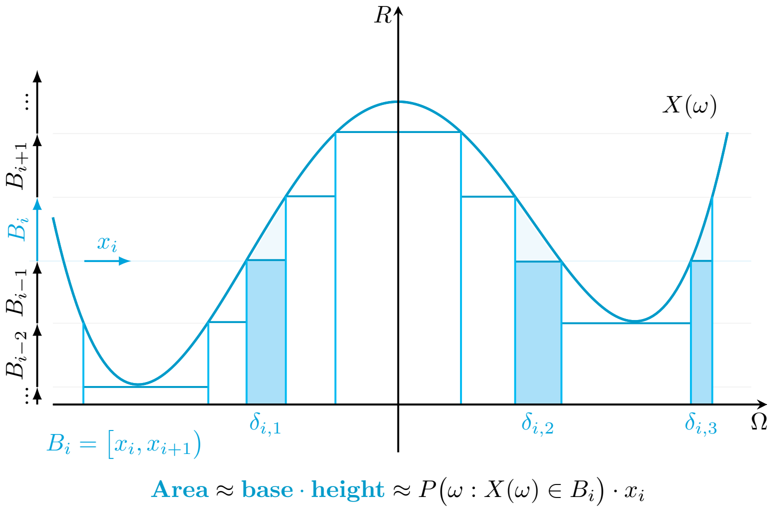



Figure 6.2: 随机变量积分示意图

因此我们只需要对简单随机变量 $X_n$ 计算积分, 而 $X_n$ 的积分 (参见Figure 6.2)：

$$E(X_n) = \sum_i P(X_n = x_i) \cdot x_i = \sum_i P(X \in B_i) \cdot x_i$$

如果 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 那么

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_i P(X \in B_i) \cdot x_i \\
&= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} I_{B_i}(x) f(x)\, dx \cdot x_i \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_i x_i I_{B_i}(x) \right) f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_i x_i I_{B_i}(x) \right) f(x)\, dx
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$, 划分 $\bigcup_i B_i$ 变得越来越细,

$$\sum_i x_i I_{B_i}(x) \to x$$

并且

$$E(X_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

因而我们有

**定义 6.1.2** 假设随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 如果存在 (绝对收敛) 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

那么把它称为 $X$ 的期望, 并记作

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

**定理 6.1.2** 假设 $g(x)$ 是实数空间上某函数, $X$ 是以 $f(x)$ 为密度函数的连续型随机变量. 那么 $Y = g(X)$ 的期望是 (如果该积分绝对收敛)

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

- 如同前面, 将 $g(x)$ 取值空间 $\mathbb{R}$ 分割为互不相交的小区间 $B_i = [y_i, y_{i+1})$, $\bigcup_i B_i = \mathbb{R}$. 小区间的度量为

$$|B_i| = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

令 $C_i = g^{-1}(B_i)$. 于是 $Y$ 可以由 $\bigcup_i C_i$ 上的简单随机变量 $Y_n$ 近似 (参见Figure 6.3) 而 $E(Y)$ 可以用 $E(Y_n)$ 来近似

$$E(Y_n) = \sum_i P(Y_n = y_i) \cdot y_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i P\left(Y \in B_i\right) \cdot y_i \\
&= \sum_i P\left(X \in g^{-1}\left(B_i\right)\right) \cdot y_i \\
&= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} I_{C_i}\left(x\right) f\left(x\right) dx \cdot y_i \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_i y_i I_{C_i}\left(x\right)\right) f\left(x\right) dx
\end{aligned}
$$

根据 $Y_n$ 的定义,

$$
\sum_i y_i I_{C_i}\left(x\right) \to g\left(x\right)
$$

因而上面的求和收敛到

$$
E\left(Y_n\right) \to \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right) f\left(x\right) dx
$$

对多个随机变量, 同样的结论成立, 例如已知随机向量 $\mathbf{Z} = (X, Y)$ 有分布密度 $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = f(x, y)$, $g(\mathbf{z}) = g(x, y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数, 那么随机变量 $g(\mathbf{z})$ 的期望 (若存在) 为

$$E(\mathbf{Z}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{z}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, & \text{连续型} \\ \displaystyle\sum_{\mathbf{z}} g(\mathbf{z}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}), & \text{离散型} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, dxdy, & \text{连续型} \\ \displaystyle\sum_{x}\sum_{y} g(x, y) f(x, y), & \text{离散型} \end{cases}$$

# 随机变量的函数在概率空间的积分可以通过下图来理解

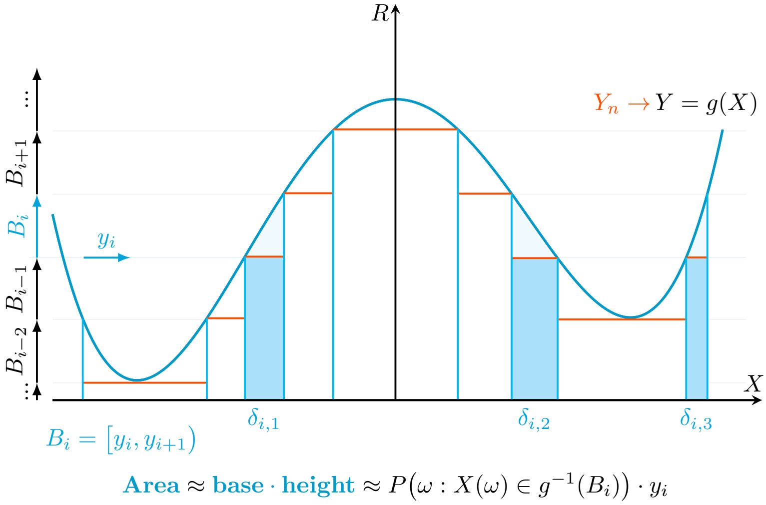



Figure 6.3: 随机变量函数的积分示意图

**例题 6.1.1** 已知 $X$ 的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求 $\frac{1}{X^2}$ 的期望.

■ $\frac{1}{X^2}$ 的期望为

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}f(x)\,dx=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{4}$$

## 条件期望

在条件概率一节我们看到给定 $X=x, f_Y(\cdot|x)$ 是一个概率密度, $g(x)$ 是实数空间上某函数, 因此可以考虑随机变量 $g(Y)$ 在

给定 $X=x$ 时的期望, 称之为**条件期望**, 写作

$$E\left(g\left(Y\right)|X=x\right)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(y\right)f_Y\left(y|x\right)dy, & \text{连续型}\\ \sum\limits_{y} g\left(y\right)f_Y\left(y|x\right), & \text{离散型}\end{cases}$$

此时它是一个 $x$ 的函数, 对上式同乘以 $f_X\left(x\right)$ 并积分 (求和) 便得到

$$E\left(g\left(Y\right)\right)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E\left(g\left(Y\right)|X=x\right)f_X\left(x\right)dx, & \text{连续型}\\ \sum\limits_{x} E\left(g\left(Y\right)|X=x\right)f_X\left(x\right), & \text{离散型}\end{cases} \tag{6.2}$$

这是条件期望的性质, 常常用于期望的计算.

# 6.2 期望与方差及其性质

假设 $X$ 为随机变量, $g$ 是 $X$ 的值域空间上某函数, 我们已经知道如何求 $Y = g(X)$ 的期望. 下面我们考虑几个 $g(x)$ 的情形.
(1) $n \geqslant 1$ 为正整数, $g(x) = x^n$, $n$ 阶矩 $E(X^n)$, 1 阶矩正是期望
(2) $g(x) = (x - E(X))^2$, 方差 $D(X) = E\left[(x - E(X))^2\right]$.

## 期望及其性质

我们已经知道, 随机变量 $X$ 的期望就是 $X$ 在概率空间上的积分, 它具有如下性质:

**定理 6.2.1** 假设 $X, Y$ 为随机变量, 以下成立
(1) $E(I_A) = P(A)$, $A \subset \mathbb{R}$;
(2) $E(\alpha) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(3) 如果 $EX, EY$ 存在, 那么 $E(\alpha X + \beta Y)$ 存在 , $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(4) $X(\omega) \leqslant Y(\omega), \forall\omega$. 那么 $E(X) \leqslant E(Y)$.
(5) $|E(X)| \leqslant E|X|$.

**注记 6.2.1** 如果除去一个概率为 0 的集合外, $X \leqslant Y$ 成立, 那么结论 (4) 仍然成立.

■ 证明简单随机变量情形. (1)(2) 为期望的特殊情形, 可直接由定义得出.

(3) 假设

$$X = \sum_i x_i I_{A_i}, Y = \sum_j y_j I_{B_j}$$

首先注意 $\cup A_i, \cup B_j$ 都是全空间的划分, 因此

$$E(X) = \sum_i x_i P(A_i) = \sum_{i,j} x_i P(A_i \cap B_j),$$

$$E(Y)=\sum_j y_j P(B_j)=\sum_{i,j} y_j P(A_i\cap B_j).$$

另外 $\alpha X+\beta Y=\sum_{i,j}(\alpha x_i+\beta y_j)\, I_{A_i\cap B_j}$, 因此

$$\begin{aligned}
E(\alpha X+\beta Y) &= \sum_{i,j}(\alpha x_i+\beta y_j)\, P(A_i\cap B_j)\\
&= \alpha\sum_{i,j} x_i P(A_i\cap B_j)+\beta\sum_{i,j} y_j P(A_i\cap B_j)\\
&= \alpha\sum_i x_i P(A_i)+\beta\sum_j y_j P(B_j)\\
&= \alpha E(X)+\beta E(Y)
\end{aligned}$$

(4) 假设 $X, Y$ 可如同 (3) 表示出来. 由假设当 $A_i\cap B_j$ 不空时, 总有 $x_i\leqslant y_j$. 因此 $E(X)\leqslant E(Y)$.

(5) 由于 $-|X|\leqslant X\leqslant |X|, \forall\omega$. 运用 (1) 便有

$$-E(|X|)\leqslant E(X)\leqslant E(|X|)$$

即 $|E(X)| \leqslant E|X|$.

通过将随机变量分解为简单随机变量的和, 期望的可加性质常常用于计算较复杂随机变量的期望.

**例题 6.2.1** 对目标进行射击, 直到击中目标 $n$ 次为止, 如果每次射击命中率为 $p\,(0 < p < 1)$, 求所需射击次数的期望.

■ (解法 I) 用 $X_i$ 表示击中目标总数为 $i$ 次时所需要的射击次数. 那么 $X_i - X_{i-1}$ 表示第 $i-1$ 次击中目标后再次击中目标所用的射击次数. 容易看出 $Y_i = X_i - X_{i-1}, i \geqslant 1, (X_0 = 0)$ 相互独立且与 $Y_1$ 有同样的分布:

$$P(Y_1 = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

因此

$$EY_1 = \sum_{k \geqslant 1} kP(Y_1 = k) = p \sum_{k \geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= p\left(\sum_{k\geqslant 0} x^k\right)'\Bigg|_{x=1-p} = p\left(\frac{1}{1-x}\right)'\Bigg|_{x=1-p} \\
&= p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

从而

$$
EX_n = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EY_i = \frac{n}{p}
$$

(解法 II) 用 $X_n$ 表示击中目标总数为 $n$ 次时所需要的射击次数. 令 $W_1 = 1$ 表示第一次射击击中目标, $W_1 = 0$ 表示第一次射击没有击中目标. 由 (*Equation* 6.2)

$$
EX_n = E\left(X_n|W_1 = 1\right)P\left(W_1 = 1\right) + E\left(X_n|W_1 = 0\right)P\left(W_1 = 0\right)
$$

首先注意各次射击是独立的. 如果第一次击中目标, 那么还需要再击中目标 $n-1$ 次才能实现击中目标总次数为 $n$ 次. 如果

第一次没有击中目标, 那么第一次射击对总射击次数 $n$ 次没有贡献, 从第二次射击开始还需要再击中目标 $n$ 次. 因此上面的方程变为:

$$EX_n = p\left(1 + EX_{n-1}\right) + (1-p)\left(1 + EX_n\right)$$

边界条件为 $EX_0 = 0$, 解之得到 $EX_n = EX_{n-1} + 1/p$, 从而 $EX_n = n/p$.

(解法 III) 用 $X_n$ 表示击中目标总数为 $n$ 次时所需要的射击次数. 令 $Z_1 = 1$ 表示第 $n-1$ 次击中目标后, 下一次射击击中目标, $Z_1 = 0$ 表示第 $n-1$ 次击中目标后, 下一次射击没有击中目标. 注意由独立性可知 $EZ_1 = EX_1$. 类似上一解法我们有

$$EX_n = p\left(EX_{n-1} + 1\right) + (1-p)\left(EX_{n-1} + 1 + EZ_1\right)$$

边界条件为 $EX_0 = 0$, 先求得 $EZ_1 = EX_1 = 1/p$, $EX_n = EX_{n-1} + 1/p$, 解得 $EX_n = n/p$.

**定理 6.2.2** 假设 $X$ 为**非负**随机变量, 那么

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X \geqslant t)\, dt$$

- 仅证明非负简单随机变量情形. 令 $X$ 可取值为 $0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_n$, 那么

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x_i} x_i \cdot P(X = x_i) \\ &= \sum_{x_i} \int_0^{x_i} dt \cdot P(X = x_i) \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{x_i \geqslant t} P(X = x_i)\, dt \quad (\text{交换积分与求和次序}) \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} P(X \geqslant t)\, dt$$

由于 $X$ 为简单随机变量, 这里的无穷区间积分 $\int_0^{\infty} (\cdot)$ 实际上是有限区间积分.

**注记 6.2.2** 事实上仅有至多可数个 $t$ 使得 $P(X > t) \neq P(X \geqslant t)$, 因而该定理可进一步写作: $X$ 为**非负**随机变量, 那么

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X \geqslant t)\, dt = \int_0^{\infty} P(X > t)\, dt.$$

如果 $X$ 的分布函数为 $F$, 那么

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t))\, dt.$$

另外如果 $X$ 取值为 $\{0, 1, 2, \ldots\}$, 那么结论进一步简化为

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n).$$

运用该结论我们再来看之前的例题

**例题 6.2.2** 对目标进行射击, 直到击中目标为止, 如果每次射击命中率为 $p\,(0 < p < 1)$, 求所需射击次数的期望.

■ 用 $X$ 表示需射击次数. 注意 $\{X \geqslant n\}$ 等价于前 $n-1$ 次没有击中目标, 其概率为

$$P\,(X \geqslant n) = (1-p)^{n-1}$$

因此

$$E\,(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P\,(X \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}.$$

**定理 6.2.3** 假设 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 为独立随机变量, $E\,|X_i| < \infty, \forall i$, 那

么乘积 $X_1X_2\cdots X_n$ 的期望存在, 并且

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

- 证明 $n=2$ 时简单随机变量的情形. 假设

$$X=\sum_i x_i I_{A_i},\ Y=\sum_j y_j I_{B_j}$$

那么由独立性

$$E(XY)=\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i\cap B_j)=\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i)P(B_j)=E(X)E(Y)$$

# 几个不等式

- (Jensen 不等式) $\phi$ 为凸函数, $E[X]$, $E[\phi(X)]$ 存在, 那么

$$\phi(E[X]) \leqslant E[\phi(X)]$$

- (Holder 不等式) $X, Y$ 为随机变量, $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 那么

$$E(|XY|) \leqslant (E(|X|^p))^{1/p} (E(|Y|^q))^{1/q}$$

  $p = q = 2$ 时称为 Schwarz 不等式. 特别地, 如果 $E(|X|^p) < \infty$, $E(|Y|^q) < \infty$ 那么 $E(|XY|) < \infty$. 此时, Holder 不等式等号成立当且仅当存在 $(a, b) \neq (0, 0)$, 使得 $P(a|X|^p + b|Y|^q = 0) = 1$, 即 $a|X|^p + b|Y|^q$ 几乎处处为 0.

- (Minkowski 不等式) $X, Y$ 为随机变量, $p \geqslant 1$. 那么

$$(E(|X+Y|^p))^{1/p} \leqslant (E(|X|^p))^{1/p} + (E(|Y|^p))^{1/p}$$

- (Lyapounov 不等式) $0 < \alpha \leqslant \beta$. 那么

$$\left(E\left(|X|^{\alpha}\right)\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(E\left(|X|^{\beta}\right)\right)^{1/\beta}$$

- (Markov 不等式) $0 < \alpha$, 那么

$$P\left(|X| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{1}{\alpha} E\left(|X|\right)$$

- (Chebyshev 不等式) $0 < \alpha$, $E\left(X^2\right) < \infty$. 令 $m = E\left(X\right)$, 那么

$$P\left(|X - m| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} E\left(|X - m|^2\right)$$

这里多数不等式都与函数积分不等式平行, 不再重复证明. Schwarz 不等式及其等号成立条件将会在协方差一节给出证

明. Chebyshev 不等式与 Markov 不等式的证明相同, 这里仅证明 Markov 不等式. 事实上, 令 $A=\{|X|\geqslant\alpha\}$, 那么

$$|X(\omega)|=|X(\omega)|\cdot 1_A(\omega)+|X(\omega)|\cdot 1_{A^c}(\omega),\forall\omega$$

于是

$$\begin{aligned}E(|X|)&=E(|X|\cdot 1_A)+E(|X|\cdot 1_{A^c})\\&\geqslant E(|X|\cdot 1_A)\\&\geqslant E(\alpha\cdot 1_A)=\alpha P(|X|\geqslant\alpha)\end{aligned}$$

因此 Markov 不等式成立.

作为 Markov 不等式的简单运用, 我们有

**定理 6.2.4** 假设 $X$ 为非负随机变量, $E(X)=0$ 当且仅当 $P(X=0)=1$.

- (必要性) 令 $A_n = \left\{X \geqslant \frac{1}{n}\right\}$, 那么由 Markov 不等式 , $\forall n$,

$$P\left(X \geqslant \frac{1}{n}\right) \leqslant nE(X) = 0$$

即 $P(A_n) = 0, \forall n$. 注意到 $\cup_n \left[\frac{1}{n}, \infty\right) = (0, \infty), \cup_n A_n = \{X > 0\}$. 由概率的下半连续性就得到

$$P(X > 0) = \lim_n P(A_n) = 0$$

从而 $P(X = 0) = 1$.

(充分性) 证明简单非负随机变量情形. 设 $X = \sum_i x_i I_{A_i}, x_i \geqslant 0$. 注意 $P(X = 0) = 1$ 等价于, 对任意 $i$, 都有 $x_i = 0$ 或者 $P(A_i) = 0$. 因此 $E(X) = 0$. ///