

# Lecture 1

# 事件与概率

Probability and Statistics  
Beihang University

## 1.1 课程内容

- // 预备知识: 微积分, 多元微积分, 线性代数
- // 本课程是概率论与数理统计的入门课程, 将向初学者介绍: 概率论, 统计推断和随机过程; (1) 概率论: 概率空间, 事件与概率, 条件概率, 随机变量, 多元随机变量, 随机变量的期望与方差, 大数定理与中心极限定理等 (2) 统计推断: Bayes 估计, 极大似然估计, 样本估计量及其分布, 假设检验 (3) 随机过程: 平稳随机过程, 平稳 Gaussian 过程, 遍历过程, Markov 链等
- // 教学参考书目以及讲稿等课程相关内容可在课程中心或是 <https://scistats.github.io/> 找到

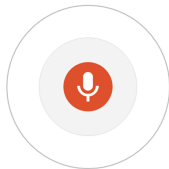
## 1.2 作业与评估

- // 课程时间: 周二, 周四 (双); 上午 1-2 节, J4-304.
- // 助教安排: 助教主要负责批改平时作业以及期末答疑辅导.
- // 平时作业: 从第三周开始每周二课间交作业, 请尽量不要迟交或缺交, 以免影响总评成绩.
- // 评估方法: 平时作业 (20%) + 期末考试 (80%). 统一闭卷考试.

## 1.3 概率与不确定性

几个常见例子:

- // 在一个计算机网络系统中，网络出现拥挤的概率有多大？
- // 同一生产线生产的某产品，其合格率如何估计？
- // 如何使用随机模型估算基于股票走势的金融产品的价格？
- // 某一机构为客户提供服务，怎样分配资源才能让服务更有效？
- // Google 搜索引擎是如何对页面进行排序的？
- // 语音识别系统如何使用概率模型对音频序列进行识别？



## 1.4 集合

**定义 1.4.1** 集合是由一些对象组成的，这些对象称为集合的元素. 如果  $S$  是一个集合并且  $x$  是  $S$  的一个元素，我们写作  $x \in S$ . 反之则写作  $x \notin S$ . 空集记为  $\emptyset$ .

**例题 1.4.1**  $S = \{x_1, x_2\}$  是一个有限集.  $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  是一个可数集合.  $S = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$  是区间  $[0, 1]$  中所有实数组成的集合，这是一个不可数集合.

**定义 1.4.2** 如果集合  $S$  的元素同时也属于  $T$ ，我们就称  $S$  是  $T$  的子集，并记为  $S \subset T$ . 如果  $S \subset T$  并且  $T \subset S$ ，那么  $S = T$ .

**例题 1.4.2** 包含所有元素的集合称是一个全集  $\Omega$ . 全集的定义取决于所考虑的问题. 当全集给定之后，所有集合都是全集的子集，特别地  $\emptyset$  是全集的子集.

## 1.5 集合的运算

集合  $S$  的余集

$$S^c = \{x | x \notin S\} = \Omega \setminus S$$

并集

$$S \cup T = \{x | x \in S \text{ 或者 } x \in T\}$$

$$\bigcup_{k=1}^n S_k = \{x | x \in S_k \text{ 对某个 } k\}$$

交集

$$S \cap T = \{x | x \in S \text{ 并且 } x \in T\}$$

$$\bigcap_{k=1}^n S_k = \{x | x \in S_k \text{ 对所有 } k\}$$

一些相关性质 (其中  $\Omega$  为全集)

$$\begin{aligned} S \cup T &= T \cup S, & S \cup (T \cup U) &= (S \cup T) \cup U \\ S \cap (T \cup U) &= (S \cap T) \cup (S \cap U), & S \cup (T \cap U) &= (S \cup T) \cap (S \cup U) \\ (S^c)^c &= S, & S \cap S^c &= \emptyset \\ S \cup \Omega &= \Omega, & S \cap \Omega &= S \end{aligned}$$

**定理 1.5.1 (De Morgan's Law)** 对任意集合  $S_1, \dots, S_n$ , 我们有

$$\left( \bigcup_{k=1}^n S_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^n S_k^c, \quad \left( \bigcap_{k=1}^n S_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^n S_k^c$$

■ 我们证明第一个等式.  $x \in \left( \bigcup_{k=1}^n S_k \right)^c \iff x \notin \bigcup_{k=1}^n S_k \iff x \notin S_k$   
对所有  $k \iff x \in S_k^c$  对所有  $k \iff x \in \bigcap_{k=1}^n S_k^c$ . //

## 1.6 排列组合知识点复习

//  $n$  个不同对象的不同的排列方法总数为:  $n!$

// 从  $n$  个不同对象中选择  $k$  个组成一个  $k$ -序列, 不同的  $k$ -序列总数为:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

// 从  $n$  个不同对象中任选  $k$  个 (不计顺序) 的方法总数为:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

// 将  $n$  个不同对象划分为  $r$  组 (不计顺序),  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ , 那么不同的方法总数为:

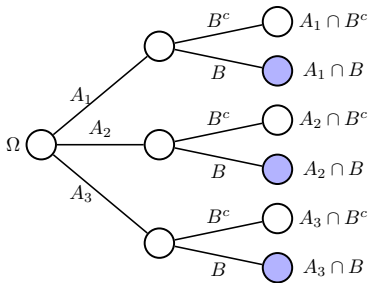
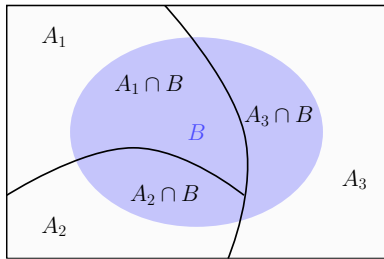
$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$



## 1.7 概率模型

**定义 1.7.1 概率模型**由样本空间和概率组成. 样本空间是所有实验结果的集合. 样本空间的子集称为**事件**. **概率**则是集合上的函数, 它赋予每一个事件一个非负数.

很多概率模型可以通过图形或是树形结构来表示:



## 样本空间

**例题 1.7.1** 在一次游戏中，玩家连续投掷一个硬币 10 次. 每出现一次正面，玩家赢得 1 元.

■ 在这个游戏中，影响到游戏结果的是正面出现的个数. 令  $s_k$  ( $k = 0, \dots, 10$ ) 表示在 10 次连续投掷中正面出现  $k$  次的事件. 那么我们可以定义样本空间为  $\Omega = \{s_0, s_1, \dots, s_{10}\}$ . //

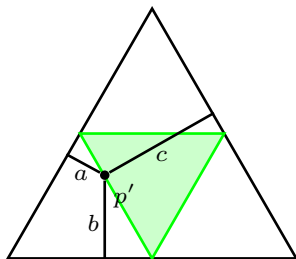
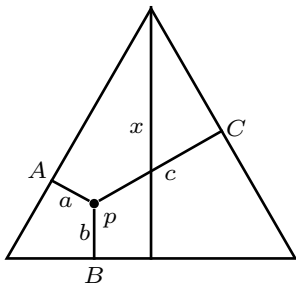
**例题 1.7.2** 在一次游戏中，玩家连续投掷一个硬币 10 次. 在第一个正面出现之前，每投一次硬币玩家赢得 1 元. 在第一个正面出现之后，直到第二个正面出现，每投一次硬币玩家赢得 2 元. 以此类推.....

■ 在这个游戏中正面出现的次数以及何时出现都将影响到游戏结果. 因此合适的样本空间应该包括所有可能出现的 10-投掷序列. //

**例题 1.7.3** 将一根长度为  $x$  的木棍分为三段，它们正好组成一

个三角形的概率是多少？

■ 提示: 考虑一个高为  $x$  的等边三角形. 从该三角形的内部任意一点  $p$  向三边作垂线. 三条垂线段对应着一个分割木棍的方法. 注意到在图形中  $x = a + b + c$ .  $a, b, c$  能组成一个三角形当且仅当  $p$  点位于绿色三角形中, 绿色三角形是通过连接三边中点形成的. 所以所求的事件概率为  $1/4$ .



## 概率公理

给定样本空间，**概率律**将赋予每一个事件  $A$  一个非负数  $P(A)$ ，称之为事件  $A$  的概率. 概率律应满足一下公理

//  $P(A) \geq 0$ ;

//  $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$  如果  $A_n$  互不相交, 即.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  如果  $i \neq j$ ;

//  $P(\Omega) = 1$ .

**例题 1.7.4** 假设  $C_n, n = 1, \dots, N$  为互不相交的集合, 即,  $C_i \cap C_j = \emptyset$  对于  $i \neq j$ , 那么

$$P\left(\bigcup_{n=1}^N C_n\right) = \sum_{n=1}^N P(C_n).$$

■ 取  $A_n = C_n$ , 如果  $n = 1, \dots, N$ ,  $A_n = \emptyset$  如果  $n > N$ . 然后对  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  运用概率公理.



从概率公理可以推出一些简单的性质, 它们可以通过图形直接验证:

$$// \quad P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$$

$$// \quad \text{由于 } \Omega = A \cup A^c, \text{ 总有 } P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$// \quad \text{如果 } A \subset B, \text{ 那么 } P(A) \leq P(B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$// \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

注意到  $A \cup B$  可以写成两个不相交集合并集  $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$ , 因此

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(B) + P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$\text{// } P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$\text{// } P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N P(A_n)$$

$$\text{// } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$$

**例题 1.7.5** 投掷两个硬币并假设样本空间  $S = \{HH, HT, TH, TT\}$  中的每一个事件是等概率的, 即.  $\frac{1}{4}$ . 令

$$E = \{\text{第一个硬币出现正面}\}$$

$$F = \{\text{第二个硬币出现正面}\}$$

试计算  $P(\{\text{至少有一个硬币出现正面}\})$ .

■ 直接计算

$$P(\{\text{至少有一个硬币显示正面}\}) = P(\{HH, HT, TH\}) = \frac{3}{4}.$$

或者运用概率的性质

$$\begin{aligned}P(\{\text{至少有一个硬币显示正面}\}) &= P(E \cup F) \\&= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\&= P(\{HH, HT\}) + P(\{HH, TH\}) - P(\{HH\}) \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$



**例题 1.7.6** 水电公司希望对水电需求进行预先规划. 为此工程人员将水需求量标记在  $X$  轴上, 而将电需求量标记在  $Y$  轴上. 假设水的需求通常在 0 至 200 单位之间, 而电需求量则在 0 至 150 之间. 那么水电需求量分布在平面上的一个矩形区域里. 假设任何一个水电需求量事件  $E$  的发生概率等于事件所占区域面积与总水电分布区域面积的比值. 试求出用水量 and 用电量都至少在 100 以上的区域概率.

■ 令

$$A = \{\text{用水量至少在100以上的区域}\}$$

$$B = \{\text{用电量至少在100以上的区域}\}$$

由题设  $P(A) = (200 - 100) / 200 = 0.5$ ,

$$P(B) = (150 - 100) / 150 \approx 0.3,$$

$$P(A \cap B) = \frac{(200 - 100) \cdot (150 - 100)}{200 \cdot 150} \approx 0.15$$

因此

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \approx 0.65$$

///

概率为零并不表明不可能发生, 例如令

$$E = \{\text{用水量为100, 用电量在0至150之间}\},$$



那么在水电需求的矩形区域中（通过简单的极限计算可知），

$$P(E) = 0.$$

但这一事件  $E$  仍然是有可能发生的. 同样地推理可知  $P(E) = 1$  也并不表示该事件一定发生.

**定义 1.7.2** 如果事件  $A$  满足  $P(A) = 1$ , 那么我们称事件  $A$  是几乎必然发生的.

### 事件概率的收敛性质

**定理 1.7.1** 任给递增事件序列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  令  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . 那么

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

■ 令  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_1^c \cap A_2$ ,  $B_3 = A_2^c \cap A_3$ , ... 那么  $B_1, B_2, B_3, \dots$

互不相交, 并且

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = A_n, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A$$

由概率的性质

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$$

对  $n$  取极限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \end{aligned}$$

$$= P(A)$$

最后一个等号运用了概率公理.



**定理 1.7.2** 任给递减事件序列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  令  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . 那么

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

■ 令  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_2^c$ ,  $B_3 = A_3^c$ , ... 那么  $B_1, B_2, B_3, \dots$  是递增事件序列, 并且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = A^c$$

对  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  运用已证明的定理得到

$$P(A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$$

运用概率的性质改写为

$$1 - P(A) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

因此定理成立



并集的概率

**定理 1.7.3** 对任意集合序列  $\{A_i\}_{i=1}^n$ , 下列公式成立

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ &\quad + \sum_{i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

■ 用归纳法证明. 假设定理对  $n$  成立, 希望证明  $n + 1$  时上式仍然成立, 也就是, 需要证明

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i < j \leq n+1} P(A_i A_j) \\&+ \sum_{i < j < k \leq n+1} P(A_i A_j A_k) - \cdots \\&+ (-1)^{n+2} P(A_1 A_2 \cdots A_{n+1})\end{aligned}$$

为此, 我们用  $I_{RHS}$  表示上面等式的右侧, 希望证明

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = I_{RHS}.$$

用  $I_{n+1}$  表示  $I_{RHS}$  不含有  $n + 1$  的各项之和,  $J_{n+1}$  表示  $I_{RHS}$  含有  $n + 1$  的各项之和. 那么  $I_{RHS} = I_{n+1} + J_{n+1}$ , 运用对  $n$  个集合并集

时的归纳假设容易看出

$$I_{n+1} = P \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)$$

而

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= P(A_{n+1}) - \sum_{i < n+1} P(A_i A_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j < n+1} P(A_i A_j A_{n+1}) - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+2} P(A_1 A_2 \cdots A_{n+1}). \end{aligned}$$

进一步地观察并再次运用对  $n$  个集合并集时的归纳假设可以看出,  $J_{n+1}$  中除去第一项后余下的部分 (连同符号) 等于

$$-P \left( \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}) \right) = -P \left( \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right).$$

换言之

$$J_{n+1} = P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right).$$

这样我们证明了

$$\begin{aligned} I_{RHS} &= I_{n+1} + J_{n+1} \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right). \end{aligned}$$



**例题 1.7.7** 现有  $n$  张写有不同数字的卡片, 对应每一张卡片都有 1 个信封, 它内侧写有一个与对应卡片相同的数字. 现在将  $n$

张卡片随机地放入信封, 至少有一张卡片装入与之对应信封的概率是多大?

■  $A_i = \{\text{第} i \text{ 张卡片放入正确的信封}\}$ , 那么我们需要计算  $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ . 这需要用到并集的概率公式. 首先  $P(A_i) = \frac{1}{n}$ , 于是

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

当  $i < j$ ,  $P(A_i A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ , 于是

$$\sum_{i < j \leq n} P(A_i A_j) = C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

当  $i < j < k$ ,  $P(A_i A_j A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ , 于是

$$\sum_{i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) = C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!}.$$



以此类推,  $P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots 1} = \frac{1}{n!}$ . 所以

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \rightarrow 1 - e^{-1}.$$



## 1.8 条件概率

条件概率是在有限的信息中对事件概率的估计

**定义 1.8.1** 在事件  $B$  发生的条件下, 事件  $A$  发生的概率, 记为  $P(A|B)$ , 定义为

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

$P(A|B)$  没有定义, 如果  $P(B) = 0$ . 非负数  $P(A|B)$  则称为事件  $A$  在事件  $B$  发生时的**条件概率**

条件概率是一个概率律

**定理 1.8.1** 如果  $P(B) > 0$ , 那么  $P(\cdot|B)$  概率公理中的所有条件.

■ (i)

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1;$$

(ii) 对任意的事件集  $A_n$ , 总有

$$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B).$$

如果  $A_n$  互不相交, 那么

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| B\right) &= \frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B). \end{aligned}$$

## 乘法法则

**定理 1.8.2** 如果  $P(B) > 0$ , 那么  $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ .

**定理 1.8.3** 如果  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}) > 0$ , 那么

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}). \end{aligned}$$

■ 右侧公式为

$$P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1})}.$$

由于  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}) > 0$ , 上式中所有分母均为正数.

**例题 1.8.1** 一个盒子中装有  $r \geq 2$  个红球和  $b \geq 2$  个蓝球. 任取 4 个球并不再放回. 试确定取出的小球依次为红, 蓝, 红, 蓝的概率.

■ 令  $R_j = \{\text{第}j\text{次取出的为红球}\}$ ,  $B_j = \{\text{第}j\text{次取出的为蓝球}\}$ . 需要计算  $P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4)$ . 注意到

$$P(R_1) = \frac{r}{r+b}, P(B_2|R_1) = \frac{b}{r+b-1},$$

$$P(R_3|B_2 \cap R_1) = \frac{r-1}{r+b-2}, P(B_4|R_3 \cap B_2 \cap R_1) = \frac{b-1}{r+b-3}.$$

因此

$$\begin{aligned} & P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4) \\ &= P(R_1) P(B_2|R_1) P(R_3|B_2 \cap R_1) P(B_4|R_3 \cap B_2 \cap R_1) \\ &= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1} \cdot \frac{r-1}{r+b-2} \cdot \frac{b-1}{r+b-3}. \end{aligned}$$



**例题 1.8.2** 三个人将他们的帽子放在桌上. 打乱帽子顺序, 然后三个人从中任意取走一顶帽子. 每一个人都正好拿到自己原本帽子的概率有多大?

■ 令  $E_j = \{\text{第}j\text{个人拿到他自己的帽子}\}$ . 我们来计算  $P(E_1E_2E_3)$ . 根据乘法法则,

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2).$$

易见

$$P(E_1) = \frac{1}{3}, P(E_2|E_1) = \frac{1}{2}, P(E_3|E_1E_2) = 1.$$

因此

$$P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$



乘法法则对条件概率同样成立

**定理 1.8.4** 如果  $P(B) > 0, P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}|B) > 0$ , 那么

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n|B) \\ &= P(A_1|B) P(A_2|A_1 \cap B) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1} \cap B). \end{aligned}$$

■ 右侧公式为

$$\frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(A_1 \cap B)} \dots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n|B)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1} \cap B)}.$$

由于  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}|B) > 0$ , 上式所有分母为正.

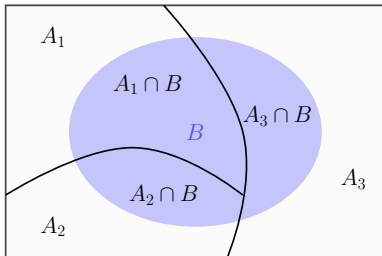


全概率公式

**定义 1.8.2** 令  $S$  为一个集合. 如果  $A_n, n = 1, \dots, N$  互不相交并且  $\bigcup_{n=1}^N A_n = S$ , 那么  $\{A_n\}$  称为集合  $S$  的一个划分.

例如, 在如下图示中  $B \cap A_1, B \cap A_2, B \cap A_3$  是集合  $B$  的一个划分, 并且容易看到

$$P(B) = \sum_{n=1}^3 P(B \cap A_n).$$



一般地, 下面的定理告诉我们, 为了求出集合的概率, 可以首先确定一个样本空间的划分, 再尝试求出在每一个划分集合上的条件概率.



**定理 1.8.5** 如果  $\{A_n\}$  是样本空间  $S$  的划分,  $P(A_n) > 0, n = 1, \dots, N$  那么

$$P(B) = \sum_{n=1}^N P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^N P(A_n) P(B|A_n).$$

■ 直接运用划分以及条件概率的定义得出.



**例题 1.8.3** 投掷一个均匀的骰子. 假设第一次投掷中出现的点数为  $X$ , 继续投掷直到出现点数  $Y \geq X$ . 令  $A$  表示  $Y = 6$  这一事件, 试求出其概率

■ 如果  $X = i$ , 那么  $Y$  可能是  $i, i+1, \dots, 6$ , 并且它们是等可能的. 因此

$$P(A|X=i) = \frac{1}{7-i},$$

从而

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^6 P(A|X=i) P(X=i) \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right). \end{aligned}$$



注意本例的样本空间是  $\{Y \geq X\}$ .

**例题 1.8.4** 投掷一个均匀四面体骰子. 如果出现 1 或者 2, 那么你可以继续投掷一次, 否则停止投掷. 投掷总点数至少为 4 的概率是多少?

■ 令  $E_j = \{\text{第一次点数为 } j\}$ ,  $E = \{\text{总点数至少为 } 4\}$ . 如果第一次点数为 1, 那么第二次投掷必须是 3 或者 4. 因此  $P(E|E_1) = 2/4 = 1/2$ . 类似地  $P(E|E_2) = 3/4$ . 如果第一次点数为 3, 那么停止投掷, 总点数只能是 3, 因此  $P(E|E_3) = 0$ . 如果第一次点

数为 4, 那么停止投掷, 总点数为 4, 因此  $P(E|E_4) = 1$ . 运用全概率公式得到

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{n=1}^4 P(E_n) P(E|E_n) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$



## Bayes's 法则

**定理 1.8.6** 假设  $\{A_i\}_{i=1}^n$  是样本空间的一个划分. 并假设  $P(A_i) >$

0,  $\forall i$ . 对于任意具有正概率的事件  $B$ , 都成立

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}.$$

■ 由条件概率与全概率公式得到



**例题 1.8.5** 当飞机出现时, 雷达探测到飞机并发出警报的概率为 0.99. 如果飞机没有出现, 那么雷达对以 0.1 的概率发出错误的警报. 假设飞机出现的概率为 0.05. 那么当雷达发出警报时飞机确实出现了的概率有多大?

■ 令  $A = \{\text{飞机出现}\}$ ,  $B = \{\text{警报响起}\}$ . 根据题设

$$P(B|A) = 0.99, P(B|A^c) = 0.1, P(A) = 0.05.$$

需要计算  $P(A|B)$ . 由 Bayes's 法则

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|A^c) P(A^c)} \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.05}{0.99 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95} \\ &\approx 0.34. \end{aligned}$$



**例题 1.8.6** 在回答多项选择的问题时, 学生要么知道如何解答要么用猜的办法来解答. 假设  $p$  是学生知道如何解答的概率, 而  $1 - p$  是学生通过猜来解答的概率. 同时假设不知道如何解答的学生会以  $1/4$  的概率来选择 4 个选项中的任何一个. 已知一个学生选对了正确答案, 那么有多大的概率是这个学生真正知道正确的解题方法?

- 令  $A = \{\text{学生知道解答方法}\}$ ,  
 $B = \{\text{学生回答正确}\}$ .

根据题设已知  $P(B|A) = 1$ ,  $P(B|A^c) = 1/4$  以及  $P(A) = p$ .  
要计算  $P(A|B)$  由 Bayes's 法则

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|A^c) P(A^c)} \\ &= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{4} \cdot (1 - p)} \\ &= \frac{4p}{1 + 3p} \end{aligned}$$



## 1.9 独立性

**定义 1.9.1** 事件  $A$  和  $B$  称为相互独立的, 如果

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

**定理 1.9.1** 如果  $P(A) = 0$ , 那么  $A$  与任何事件相互独立.

■ 由于  $A \cap B \subset A$ , 因此  $P(A \cap B) = 0 = P(A) P(B)$  //

**定理 1.9.2** 如果事件  $A$  和  $B$  独立, 那么事件  $A^c$  和  $B$  独立, 事件  $A^c$  和  $B^c$  独立.

■ 我们证明  $A^c$  和  $B$  独立. 事实上

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - P(A)) P(B) \\
 &= P(A^c) P(B)
 \end{aligned}$$

///

**例题 1.9.1** 如果  $P(A) = 1$ , 那么  $A$  与任何事件相互独立.

■ 由于  $P(A) = 1, P(A^c) = 0$ , 因此  $A^c$  与任何事件相互独立, 从而  $A$  与任何事件相互独立

///

**定理 1.9.3** 如果  $A$  与任何事件相互独立, 那么  $P(A) = 0$  或  $P(A) = 1$ .

■ 由假设,  $A$  与自身相互独立, 因此

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A) P(A),$$

由此可知结论成立

///



**定理 1.9.4** 如果  $P(B) > 0$ , 那么不难, 事件  $A$  和  $B$  相互独立当且仅当

$$P(A|B) = P(A).$$

■ 由条件概率的定义看出

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$

因此事件  $A$  和  $B$  相互独立当且仅当  $P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$ , 这正是  $P(A|B) = P(A)$  //

运用这一事实我们有

**例题 1.9.2** 如果  $P(B) > 0, P(B^c) > 0$  那么事件  $A$  和  $B$  相互独立当且仅当

$$P(A|B) = P(A|B^c)$$

**例题 1.9.3** 一个均匀的硬币投掷两次. 令  $A = \{\text{第一次为 H}\}$ ,  $B = \{\text{第二次为 T}\}$ . 那么事件  $A$  和  $B$  独立.

■ 样本空间为  $\{HH, HT, TH, TT\}$ . 每一个单一事件概率为  $1/4$ .

$$P(A) = P(\{HH, HT\}) = \frac{1}{2}, P(B) = P(\{HT, TT\}) = \frac{1}{2}.$$

因此

$$P(B \cap A) = \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

///

**例题 1.9.4** 投掷一个均匀硬币直到正面出现. 假设各次投掷是相互独立的. 那么有多大的概率, 正面最终出现?

■ 令  $p_n$  为正面首次出现在第  $n$  次投掷的概率. 那么正面最终出现的概率应该是

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots = 1.$$

因此在连续投掷一个均匀硬币时, 正面可能很早出现, 可能很晚才出现, 但可以肯定正面最终会以概率 1 出现.

///

**定义 1.9.2** 一列集合族  $\{A_i\}_{i=1}^n$  称为是相互独立的, 如果对于任何子集  $\{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, n\}$ , 都有

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\dots A_{j_s}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\dots P(A_{j_s}).$$

// 从定义容易看出, 如果集合族  $\{A_i\}_{i=1}^n$  是相互独立的. 从中选择任意多个集合组成一个新的集合族, 那么这个新的集合族也是相互独立的.

两两独立不能推出相互独立.

**例题 1.9.5** 投掷两个均匀的相互独立的硬币. 令

$$E = \{\text{第一次为正}\},$$

$$F = \{\text{第二次为正}\},$$

$$G = \{\text{两次投掷一正一反}\}.$$

这些事件两两独立, 但它们不是相互独立的.

■ 由于  $P(E) = 1/2$ ,  $P(F) = 1/2$ ,  $P(G) = 1/2$ , 但  $P(EFG) = 0 \neq 1/8 = P(E)P(F)P(G)$ , 所以它们不是独立的. 由前面的例

题已经知道  $E$  和  $F$  独立. 为证明  $E$  和  $G$  独立, 只需注意

$$\begin{aligned} P(G|E) &= \frac{P(G \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{P(\{\text{第一次为正, 第二次为反}\})}{P(E)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(G). \end{aligned}$$

同样地,  $F$  和  $G$  独立.



### 撞击时间

**例题 1.9.6** 考虑这样一个游戏. 假设  $n$  为正整数,  $i \in [0, n]$  为非负整数. 一个小球停留在  $i$  处. 现投掷一个硬币, 正面出现的概率为  $p$ . 当硬币为正面时小球移动到  $i+1$ , 反之移动到  $i-1$ . 假设硬币的投掷是互不影响的. 如果小球抵达 0, 那么游戏结束,

你不会得到任何奖励. 如果小球抵达  $n$ , 那么游戏也结束, 并且你可以获得奖励. 试求出你赢得奖励的概率  $a_i$ .

■ 令

$$A_i = \{ \text{小球起始位置为 } i \}, W = \{ \text{赢得奖励} \}.$$

由题, 我们要求出

$$a_i = P(W|A_i).$$

注意到, 由于硬币的投掷互不影响, 每一次投掷硬币之后, 游戏又回到原有的状态, 唯一的区别是, 小球的起始位置发生了改变. 若  $i \in (0, n)$ , 令  $B = \{ \text{第一次投掷是正面} \}$ , 那么由 (条件概率的) 全概率公式

$$\begin{aligned} P(W|A_i) &= P(WB|A_i) + P(WB^c|A_i) \\ &= P(W|BA_i)P(B|A_i) + P(W|B^cA_i)P(B^c|A_i) \\ &= pP(W|A_{i+1}) + (1-p)P(W|A_{i-1}) \end{aligned}$$

也就是

$$a_i = pa_{i+1} + (1 - p) a_{i-1}. \quad (1.1)$$

另外，根据题意  $a_0 = 0, a_n = 1$ .

我们需要求解方程 (Equation 1.1).

$$a_1 = pa_2$$

$$a_2 = pa_3 + (1 - p) a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = p + (1 - p) a_{n-2}$$

将左侧的  $a_j$  写作  $pa_j + (1 - p) a_j$  的形式, 那么上述方程可以写作

$$a_2 - a_1 = \frac{1 - p}{p} a_1$$

$$a_3 - a_2 = \frac{1 - p}{p} (a_2 - a_1) = \left( \frac{1 - p}{p} \right)^2 a_1$$

$$\vdots$$

$$1 - a_{n-1} = \frac{1-p}{p} (a_{n-1} - a_{n-2}) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} a_1$$

相加得到,

$$1 - a_1 = a_1 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k. \quad (1.2)$$

///

**例题 1.9.7** 均匀硬币时的抵达时间,  $p = 1/2$ .

■ 将  $p = 1/2$  代入 (Equation 1.1) 得到  $a_1 = 1/n$ . 因此

$$a_k = \frac{k}{n}, k = 1, \dots, n-1.$$

///

**例题 1.9.8** 非均匀硬币时的抵达时间,  $p \neq 1/2$ .

■ 由于  $p \neq 1/2$ , (Equation 1.1) 等价于

$$\begin{aligned} & 1 - a_1 \\ &= a_1 \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1-p}{p} \right)^k \\ &= a_1 \frac{\left( \frac{1-p}{p} \right) - \left( \frac{1-p}{p} \right)^n}{1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)} \end{aligned}$$

因此

$$1 = a_1 \frac{1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^n}{1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)}$$



于是

$$a_1 = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}$$

这样每一个  $a_i$  都可以被依次求解出,

$$a_k = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}, k = 1, \dots, n-1.$$

