

# Lecture 7

## 期望与方差-II

ruanyl@buaa.edu.cn

September 2016, Beihang University

## 7.1 随机变量的方差

**定义 7.1.1** 若随机变量  $X$  有  $E(X^2) < \infty$ , 那么

$$\text{Var}(X) = E\left((X - EX)^2\right)$$

称为  $X$  的**方差**.  $X$  的方差也常常记为  $\sigma_X^2$ . 若  $E(|X|) < \infty$ ,  $E(X^2) = \infty$ , 那么称  $X$  的方差为无穷. 其他情形下, 我们称方差不存在.  $\sqrt{\text{Var}(X)}$  称为  $X$  的**标准差**.

方差是随机变量偏离平均值的程度, 即是对平均离散程度的刻画.

**注记 7.1.1** 回顾 Lyapounov 不等式:  $0 < \alpha \leq \beta$ . 那么

$$(E(|X|^\alpha))^{1/\alpha} \leq \left(E(|X|^\beta)\right)^{1/\beta}$$

由此看出, 高阶矩存在必然有低阶矩存在. 例如若取  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 1$ , 那么  $E(|X|) \leq \left(E(|X|^2)\right)^{1/2}$ , 或者  $(E(|X|))^2 \leq E(|X|^2)$ .

因此, 若  $E(|X|^2) = E(X^2) < \infty$ , 那么  $E(|X|) < \infty$ , 从而也有  $|E(X)| < \infty$ , 即, 2 阶矩存在即可保证期望存在. 因此在方差的定义中, 只需要  $E(X^2) < \infty$ , 就有  $\text{Var}(X) < \infty$

## 方差及其性质

**定理 7.1.1** 假设随机变量  $X$  有  $E(X^2) < \infty$ .  $X$  的方差具有以下性质:

- (1)  $c$  为常数,  $\text{Var}(c) = 0$ ; 反之, 若  $\text{Var}(X) = 0$ , 那么  $P(X = EX) = 1$ ;
- (2)  $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$ ;
- (3)  $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$ ;
- (4)  $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ;
- (5) (期望的极小性)  $\text{Var}(X) = E[(X - EX)^2] \leq E[(X - \mu)^2], \forall \mu$ .

■ (1) 若  $X \equiv c$ , 那么  $EX = c, \text{Var}(X) = 0$ . 若  $\text{Var}(X) = 0$ , 那么

由上一节 Markov 不等式的推论可知  $P(X = EX) = 1$ .

(2)(3) 直接由定义验证.

(4) 将方差定义式展开

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E\left((X - EX)^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2XEX + (EX)^2\right) \\ &= E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2 \end{aligned}$$

(5) 令  $h(\mu) = E[(X - \mu)^2]$ , 展开得到

$$\begin{aligned} h(\mu) &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu EX + \mu^2 \end{aligned}$$

二次函数  $h(\mu)$  在  $\mu = EX$  时达到唯一最小值  $\text{Var}(X)$ .

**注记 7.1.2** 期望是对随机变量取值的"加权平均", 性质 (6) 说明, 如果将到  $X$  各个取值的平方距离之加权平均作为误差标准并称之为均方误差, 那么期望  $EX$  的均方误差是最小的, 而方差就是其对应的均方误差.

## 7.2 协方差与相关系数

多个随机变量时, 除了联合分布以外, 我们也常常关心各个随机变量的相互依赖情况, 因此这里我们引入协方差与相关系数, 它们将用来刻画随机变量之间的线性依赖关系.

**定义 7.2.1** 假设  $X, Y$  为随机变量,  $E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$ , 那么  
(1) **协方差**定义为

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

(2) **相关系数**定义为

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{E[(X - E(X))^2]} \sqrt{E[(Y - E(Y))^2]}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2} \sqrt{\sigma_Y^2}}$$

相关系数也常用  $\rho_{XY}$  表示.

注意相关系数定义中隐含  $\sigma_X^2 \neq 0, \sigma_Y^2 \neq 0$ . 若  $\sigma_X^2 = 0$ , 那么  $X$  几乎为常数  $E(X)$ , 因此与任意随机变量独立, 此时可定义相关系数为 0.

**习题 7.2.1** 证明随机变量  $X$  与自己独立当且仅当存在常数  $c$ , 使得  $P(X=c) = 1$ , 从而, 若  $X$  与任意随机变量  $Y$  独立, 那么  $X$  以概率 1 为常数.

**定理 7.2.1 (Schwarz 不等式)**  $X, Y$  为随机变量. 那么

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$$

特别地, 如果  $E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$  那么  $E(XY) < \infty$ . 此时, 不等式中等号成立当且仅当  $X, Y$  线性相关:  $(a, b) \neq (0, 0)$  使得  $P(aX + bY = 0) = 1$ .

■ (1) 如果  $E(X^2) = 0$  (或者  $E(Y^2) = 0$ ), 那么  $P(X=0) = 1$  (或

者  $P(Y=0)=1$ ), 因此  $P(XY=0)=1, E(XY)=0$ , 不等式成立. 此时可取  $(a,b)=(1,0)$  (或者  $(a,b)=(0,1)$ )

(2) 如果  $E(X^2)=\infty$  (或者  $E(Y^2)=\infty$ ), 那么不等式右端为  $\infty$ , 不等式仍然成立.

(3) 如果  $0 < E(X^2) < \infty, 0 < E(Y^2) < \infty$ , 那么考虑关于  $\lambda \in \mathbb{R}$  的二次函数,

$$0 \leq E\left((\lambda X + Y)^2\right) = \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2) \quad (7.1)$$

该不等式恒成立当且仅当

$$[2E(XY)]^2 - 4 \cdot E(X^2) \cdot E(Y^2) \leq 0$$

从而所要证明的不等式成立. (7.1) 等号成立当且仅当

$$[2E(XY)]^2 - 4 \cdot E(X^2) \cdot E(Y^2) = 0, \lambda = -E(XY)/E(X^2) (\neq 0).$$

这正是  $E((\lambda X + Y)^2) = 0$  当且仅当  $E(XY) = E(X^2)E(Y^2)$ . 这时取  $(a,b)=(\lambda,1)$ . //



**定理 7.2.2** 假设  $X, Y$  为随机变量,  $E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$ , 那么  $\text{Cov}(X, Y) < \infty$ , 并且

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2, \rho_{XY} \in [-1, 1];$$

特别地, 上述不等式取得等号, 即  $|\rho_{XY}| = 1$ , 当且仅当  $X, Y$  线性相关, 即存在常数  $(a, b) \neq (0, 0)$  以及  $c \in \mathbb{R}$  使得  $P(aX + bY = c) = 1$ .

■ 由方差定义的注记 (7.1.1),  $E(X^2) < \infty$  与  $E(Y^2) < \infty$  可以推知  $EX, EY$  存在, 并且  $\sigma_X^2 < \infty, \sigma_Y^2 < \infty$ . 对  $X - EX$  和  $Y - EY$  运用 Schwarz 不等式即可得到所要的不等式. 等号成立, 即  $|\rho_{XY}| = 1$ , 当且仅当存在  $(a, b) \neq (0, 0)$  使得  $a(X - EX) + b(Y - EY) = 0$ , 即  $aX + bY = aEX + bEY \in \mathbb{R}$ . //

**注记 7.2.1** 该定理指出了  $E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$  在方差定义

中的合理性, 它们保证了协方差和相关系数的存在性, 同时也指出, 相关系数正是随机变量的**线性相关性的度量**,  $|\rho_{XY}| = 1$  时,  $X, Y$  以概率 1 成线性关系. 然而  $|\rho_{XY}|$  很小也不意味着  $X, Y$  相互依赖程度很小, 正如例题 (7.2.1) 指出,  $\rho_{XY} = 0$  时  $X, Y$  仍然可能存在相互依赖性.

**定义 7.2.2**  $\rho_{XY} > 0$  时, 称  $X, Y$  为**正相关**,  $\rho_{XY} < 0$  时, 称  $X, Y$  为**负相关**,  $\rho_{XY} = 0$  时, 称  $X, Y$  为**不相关**.

### 协方差及其性质

**定理 7.2.3** 假设  $X, Y$  为随机变量,  $E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$ , 那么

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

■ 直接计算得

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$\begin{aligned}
 &= E[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)] \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y)
 \end{aligned}$$



**定理 7.2.4** 假设  $X, Y$  相互独立,  $0 < E(X^2) < \infty, 0 < E(Y^2) < \infty$ , 那么

$$\text{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$$

即独立性随机变量是不相关的.

■ 由独立性  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , 根据定理 (7.2.3) 便有  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , 从而也有  $\rho(X, Y) = 0$ .



**例题 7.2.1 (相互依赖但  $\rho_{XY} = 0$ )** 假设  $X, Y$  在单位圆内服从均匀分布:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

那么  $\rho_{XY} = 0$  但  $X, Y$  不独立

■ 由于  $G = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$  并非矩形区域, 因此  $X, Y$  不独立. 另外, 注意  $xf(x, y)$  关于原点反对称,

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = 0$$

类似地, 可知  $EX = 0, E(XY) = 0$ , 因此  $\rho_{XY} = 0$ . //

**习题 7.2.2 (迟到的练习题)**  $X, Y$  具有连续型联合分布, 联合密度为  $f(x, y)$ . 假设  $G = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$  是四边平行于坐标轴的有界或无界矩形区域. 那么  $X, Y$  独立当且仅当  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  对任意  $(x, y) \in G$  成立.

**定理 7.2.5** 假设  $X, Y$  为随机变量,  $E(X^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$ , 那么

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

特别地, 如果  $X, Y$  不相关, 那么  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ .

■ 由定义计算得

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \left( (EX)^2 - 2EXEY + (EY)^2 \right) \\ &= E(X^2) - (EX)^2 + E(Y^2) - (EY)^2 + 2E(XY) - 2EXEY \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) \end{aligned}$$

如果  $X, Y$  不相关, 那么  $Cov(X, Y) = 0$ , 因此公式成立.



## 7.3 协方差矩阵

请参见多元正态分布一节!