Метод прогонки

> Author: Михаил Кулаков https://t.me/Ferrochet

Выкладки и описание

Метод прогонки — это метод решения систем линейных алгебраических уравнений, который работает с трёхдиагональными матрицами.
Трёхдиагональные матрицы — такие матрицы, в которых от нуля отличаются только элементы на главной диагонали и на двух побочных к ней (нижней и верхней). Для удобства выкладок введём такую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-3} & c_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix},$$

здесь $c_0, \dots, c_{n-1}; \quad a_0, \dots, a_{n-2}; \quad b_0, \dots, b_{n-2}$ — некоторые известные действительные числа.
Требуется решить следующее уравнение:

$$Ax = f,$$

где $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ и $f = \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$.

Можно переписать задачу в виде следующей системы линейных уравнений:
$c_0x_0 + b_0x_1 = f_0$
$a_0x_0 + c_1x_1 + b_1x_2 = f_1$
$\dots$
$a_{i-1}x_{i-1} + c_ix_i + b_ix_{i+1} = f_i \quad (*)$
$\dots$
$a_{n-2}x_{n-2} + c_{n-1}x_{n-1} = f_{n-1}$

Как подойти к решению данной системы? Для упрощения уравнений напрашивается применение прямого хода метода Гаусса (это первая часть метода Гаусса, где мы превращаем исходную матрицу в верхнюю треугольную): с помощью него мы можем добиться устранения элементов побочной нижней диагонали и получить двухдиагональную матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} c'_0 & b'_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c'_1 & b'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c'_2 & b'_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c'_{n-2} & b'_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Значит решения уравнений теперь можно искать в виде:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i,$$

где $\alpha_i,\ \beta_i$ — некоторые вещественные коэффициенты $(0 \le i \le n-1)$. Причём $\alpha_{n-1} = 0$ (это видно из последней строки матрицы, x_{n-2} в последнее уравнение входит фиктивно).

Для удобства выкладок выразим общий вид решения в другой форме (сдвинули индекс на единицу):

$$x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1},$$

а затем подставим в $(*)$:

$$a_{i-1}(\alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}) + c_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i.$$

Теперь выразим из этого уравнения x_i:

$$x_i = \frac{f_i - b_i x_{i+1} - a_{i-1}\beta_{i-1}}{c_i + a_{i-1}\alpha_{i-1}} = -\frac{b_i}{c_i + a_{i-1}\alpha_{i-1}} x_{i+1} + \frac{f_i - a_{i-1}\beta_{i-1}}{c_i + a_{i-1}\alpha_{i-1}}.$$

Как видно, мы получили то же самое рекуррентное соотношение (вида $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$), откуда следует:

$$\alpha_i = -\frac{b_i}{c_i + a_{i-1}\alpha_{i-1}}; \quad \beta_i = \frac{f_i - a_{i-1}\beta_{i-1}}{c_i + a_{i-1}\alpha_{i-1}},$$

где для α_i существует ограничение $1 \le i \le n-2$ (из-за несуществования b_{n-1}), но ранее мы установили, что $\alpha_{n-1} = 0$.
Для коэффициента β_i же такой проблемы нет, индекс имеет следующие ограничения: $1 \le i \le n-1$.

Из первого уравнения системы можно выразить:

$$\alpha_0 = -\frac{b_0}{c_0}; \quad \beta_0 = \frac{f_0}{c_0}.$$

Помимо этого, заметим ещё, что

$$x_{n-1} = \beta_{n-1},$$

это вытекает из последней строчки матрицы. Так мы получили все требуемые рекуррентные соотношения для решения СЛАУ.

Краткое заключение

Для нахождения неизвестных $x_0, \dots, x_{n-1}$ требуется сначала найти коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ и $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$. Мы вывели рекуррентные формулы для их вычисления и нашли значения $\alpha_0,\ \beta_0,\ \alpha_n$.

$$\alpha_i = -\frac{b_i}{c_i + a_{i-1}\alpha_{i-1}}; \quad \beta_i = \frac{f_i - a_{i-1}\beta_{i-1}}{c_i + a_{i-1}\alpha_{i-1}};$$

$$\alpha_0 = -\frac{b_0}{c_0}; \quad \beta_0 = \frac{f_0}{c_0}; \quad \alpha_{n-1} = 0.$$

После вычисления этих коэффициентов можно найти $x_{n-1}(\text{он равен } \beta_{n-1})$, а затем с помощью рекуррентных формул вывести и оставшиеся значения неизвестных $x_0, \dots, x_{n-2}$.

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i;$$

$$x_{n-1} = \beta_{n-1}.$$

Реализации алгоритма

[Реализация на Haskell]
[Реализация на Python]

Используемая литература

1. *С.П. Шарый Курс вычислительных методов 2020*