排序（Sorting）

@M了个J

https://github.com/CoderMJLee

http://cnblogs.com/mjios

码拉松

初识排序

■ 什么叫排序?

□ 排序前：3,1,6,9,2,5,8,4,7

□ 排序后：1,2,3,4,5,6,7,8,9（升序） 或者 9,8,7,6,5,4,3,2,1（降序）

■ 排序的应用无处不在

排名	车型	所属厂商	2月销量
1	哈弗H6	长城汽车	25728
2	大众途观	上汽大众	15428
3	吉利博越	吉利汽车	15013
4	宝骏510	上汽通用五菱	12268
5	现代ix35	北京现代	12178
6	长安CS75	长安汽车	11297
7	哈弗F7	长城汽车	10665
8	长安CS55	长安汽车	10476
9	长安CS35	长安汽车	10353
10	奔驰GLC	北京奔驰	9450

小码哥教育 SEEMYGO

10大排序算法

名称	时间复杂度			额外空间复杂度	In-place	稳定性
	最好	最坏	平均			
冒泡排序（Bubble Sort）	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$	✔	✔
选择排序（Selection Sort）	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$	✔	✘
插入排序（Insertion Sort）	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$	✔	✔
归并排序（Merge Sort）	$O(nlogn)$	$O(nlogn)$	$O(nlogn)$	$O(n)$	✘	✔
快速排序（Quick Sort）	$O(nlogn)$	$O(n^2)$	$O(nlogn)$	$O(logn)$	✔	✘
希尔排序（Shell Sort）	$O(n)$	$O(n^{4/3})$ ~ $O(n^2)$	取决于步长序列	$O(1)$	✔	✘
堆排序（Heap Sort）	$O(nlogn)$	$O(nlogn)$	$O(nlogn)$	$O(1)$	✔	✘
计数排序（Counting Sort）	$O(n + k)$	$O(n + k)$	$O(n + k)$	$O(n + k)$	✘	✔
基数排序（Radix Sort）	$O(d * (n + k))$	$O(d * (n + k))$	$O(d * (n + k))$	$O(n + k)$	✘	✔
桶排序（Bucket Sort）	$O(n + k)$	$O(n + k)$	$O(n + k)$	$O(n + m)$	✘	✔

- 以上表格是基于数组进行排序的一般性结论
- 冒泡、选择、插入、归并、快速、希尔、堆排序，属于比较排序（Comparison Sorting）

冒泡排序（Bubble Sort）

■ 冒泡排序也叫做起泡排序

■ 执行流程（本课程统一以升序为例子）

① 从头开始比较每一对相邻元素，如果第1个比第2个大，就交换它们的位置

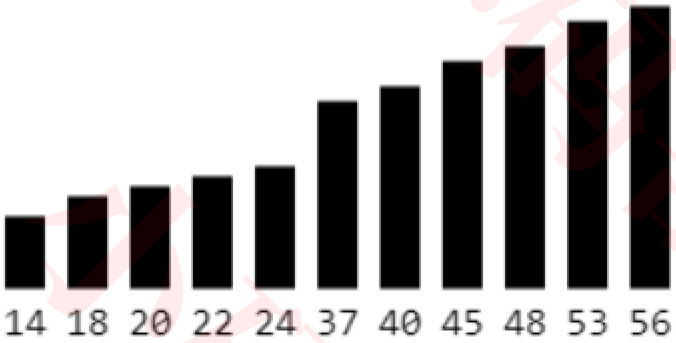
✓ 执行完一轮后，最末尾那个元素就是最大的元素

② 忽略 ① 中曾经找到的最大元素，重复执行步骤 ①，直到全部元素有序

```java
for (int end = array.length - 1; end > 0; end--) {
    for (int begin = 1; begin <= end; begin++) {
        if (cmp(begin, begin - 1) < 0) {
            swap(begin, begin - 1);
        }
    }
}
```

冒泡排序 – 优化①

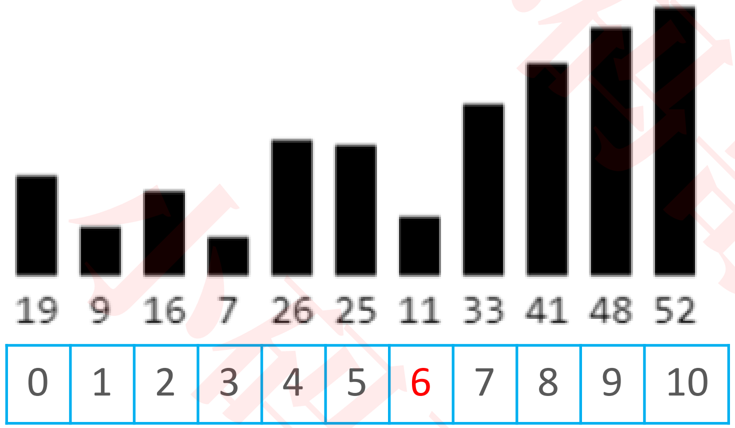
■ 如果序列已经完全有序，可以提前终止冒泡排序




```java
for (int end = array.length - 1; end > 0; end--) {
    boolean sorted = true;
    for (int begin = 1; begin <= end; begin++) {
        if (cmp(begin, begin - 1) < 0) {
            swap(begin, begin - 1);
            sorted = false;
        }
    }
    if (sorted) break;
}
```

冒泡排序 – 优化②

- 如果序列尾部已经局部有序，可以记录最后1次交换的位置，减少比较次数



- 最后1次交换的位置是 6

```java
for (int end = array.length - 1; end > 0; end--) {
    int sortedIndex = 1;
    for (int begin = 1; begin <= end; begin++) {
        if (cmp(begin, begin - 1) < 0) {
            swap(begin, begin - 1);
            sortedIndex = begin;
        }
    }
    end = sortedIndex;
}
```

- 最坏、平均时间复杂度：$O(n^2)$
- 最好时间复杂度：$O(n)$
- 空间复杂度：$O(1)$

排序算法的稳定性（Stability）

- 如果相等的2个元素，在排序前后的相对位置保持不变，那么这是稳定的排序算法
  - 排序前：$5, 1, 3_a, 4, 7, 3_b$
  - 稳定的排序： $1, 3_a, 3_b, 4, 5, 7$
  - 不稳定的排序：$1, 3_b, 3_a, 4, 5, 7$

- 对自定义对象进行排序时，稳定性会影响最终的排序效果

- 冒泡排序属于稳定的排序算法
  - 稍有不慎，稳定的排序算法也能被写成不稳定的排序算法，比如下面的冒泡排序代码是不稳定的

```
for (int end = array.length - 1; end > 0; end--) {
    for (int begin = 1; begin <= end; begin++) {
        if (cmp(begin, begin - 1) <= 0) {
            swap(begin, begin - 1);
        }
    }
}
```

原地算法（In-place Algorithm）

- 何为原地算法?
  - 不依赖额外的资源或者依赖少数的额外资源，仅依靠输出来覆盖输入
  - 空间复杂度为 $O(1)$ 的都可以认为是原地算法

- 非原地算法，称为 Not-in-place 或者 Out-of-place

- 冒泡排序属于 In-place

选择排序（Selection Sort）

■ 执行流程

① 从序列中找出最大的那个元素，然后与最末尾的元素交换位置

✓ 执行完一轮后，最末尾的那个元素就是最大的元素

② 忽略 ① 中曾经找到的最大元素，重复执行步骤 ①

```
for (int end = array.length - 1; end > 0; end--) {
    int max = 0;
    for (int begin = 1; begin <= end; begin++) {
        if (cmp(max, begin) < 0) {
            max = begin;
        }
    }
    swap(max, end);
}
```

■ 思考

□ 选择排序是否还有优化的空间?

✓ 使用堆来选择最大值

■ 选择排序的交换次数要远远少于冒泡排序，平均性能优于冒泡排序

■ 最好、最坏、平均时间复杂度：$O(n^2)$，空间复杂度：$O(1)$，属于不稳定排序

堆排序（Heap Sort）

- 堆排序可以认为是对选择排序的一种优化

- 执行流程

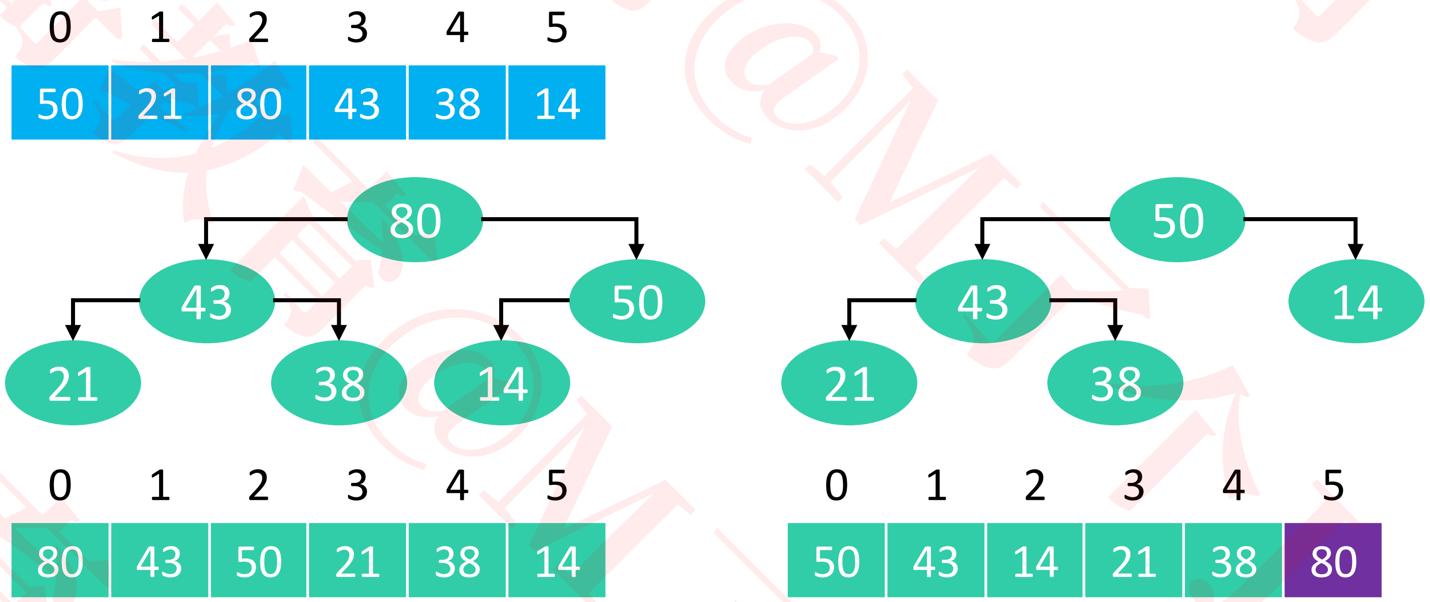
① 对序列进行原地建堆（heapify）

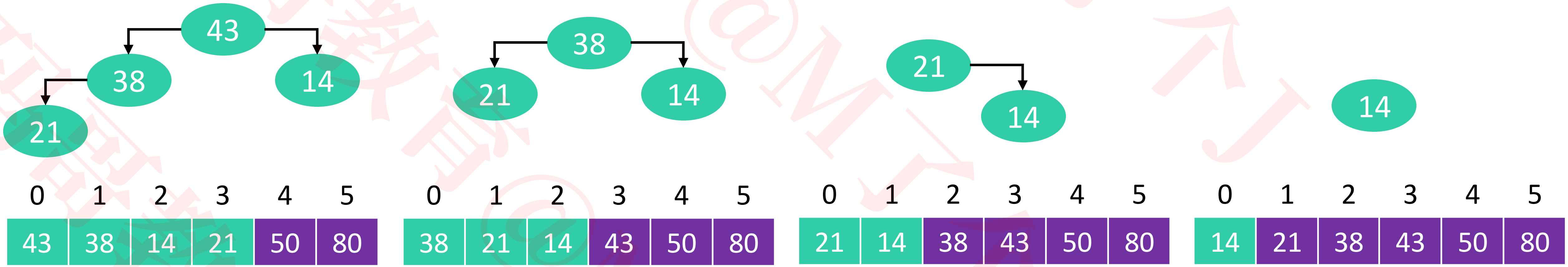
② 重复执行以下操作，直到堆的元素数量为 1

✓ 交换堆顶元素与尾元素

✓ 堆的元素数量减 1

✓ 对 0 位置进行 1 次 siftDown 操作





堆排序 – 实现

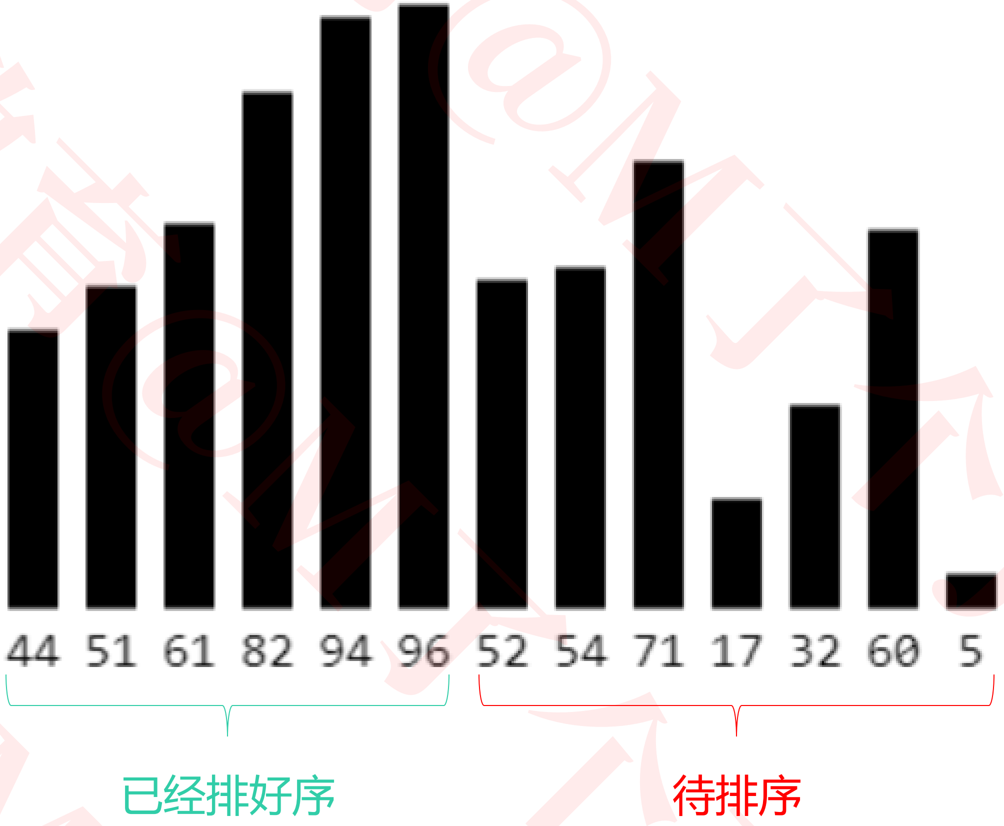
```java
// heapify
heapSize = array.length;
for (int i = (heapSize >> 1) - 1; i >= 0; i--) {
    siftDown(i);
}

while (heapSize > 1) {
    swap(0, --heapSize);
    siftDown(0);
}
```

```java
private void siftDown(int index) {
    T element = array[index];
    int half = heapSize >> 1;
    while (index < half) {
        int childIndex = (index << 1) + 1;
        T child = array[childIndex];
        int rightIndex = childIndex + 1;
        if (rightIndex < heapSize
                && cmp(array[rightIndex], child) > 0) {
            child = array[childIndex = rightIndex];
        }
        if (cmp(element, child) >= 0) break;
        array[index] = child;
        index = childIndex;
    }
    array[index] = element;
}
```

- 最好、最坏、平均时间复杂度：O(nlogn)，空间复杂度：O(1)，属于不稳定排序

插入排序（Insertion Sort）

■ 插入排序非常类似于扑克牌的排序



■ 执行流程

① 在执行过程中，插入排序会将序列分为2部分

✓ 头部是已经排好序的，尾部是待排序的

② 从头开始扫描每一个元素

✓ 每当扫描到一个元素，就将它插入到头部合适的位置，使得头部数据依然保持有序

插入排序 – 实现

```
for (int begin = 1; begin < array.length; begin++) {
    int cur = begin;
    while (cur > 0 && cmp(cur, cur - 1) < 0) {
        swap(cur, cur - 1);
        cur--;
    }
}
```

小码哥教育 SEEMYGO

插入排序 – 逆序对（Inversion）

■ 什么是逆序对?

□ 数组 <2,3,8,6,1> 的逆序对为：<2,1> <3,1> <8,1> <8,6> <6,1>，共5个逆序对

■ 插入排序的时间复杂度与逆序对的数量成正比关系

□ 逆序对的数量越多，插入排序的时间复杂度越高

■ 最坏、平均时间复杂度：$O(n^2)$

■ 最好时间复杂度：$O(n)$

■ 空间复杂度：$O(1)$

■ 属于稳定排序

■ 当逆序对的数量极少时，插入排序的效率特别高

□ 甚至速度比 $O(n\log n)$ 级别的快速排序还要快

■ 数据量不是特别大的时候，插入排序的效率也是非常好的

9	8	7	6	5	4	3	2
8	9	7	6	5	4	3	2
7	8	9	6	5	4	3	2
6	7	8	9	5	4	3	2
5	6	7	8	9	4	3	2
4	5	6	7	8	9	3	2
3	4	5	6	7	8	9	2
2	3	4	5	6	7	8	9

插入排序 – 优化

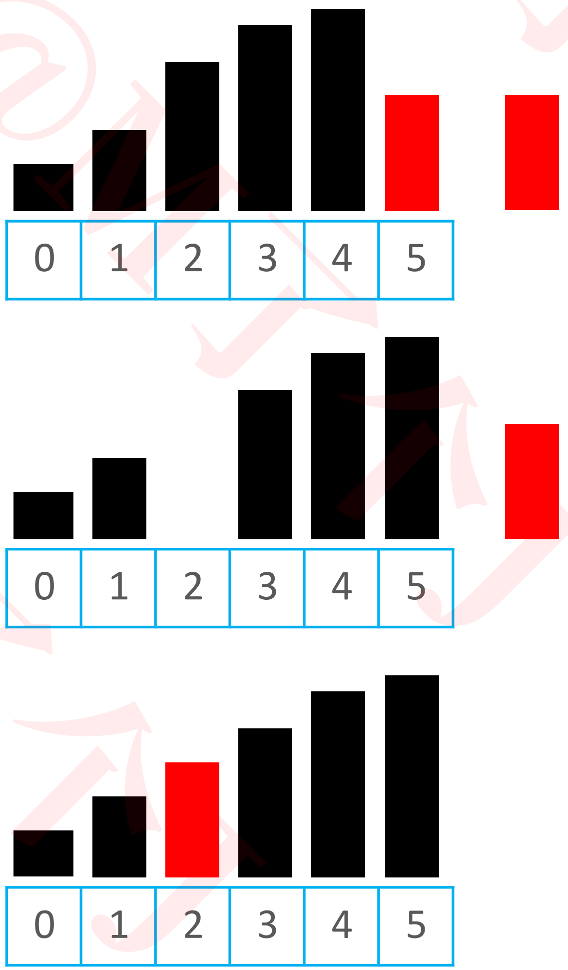
■ 思路是将【交换】转为【挪动】

① 先将待插入的元素备份

② 头部有序数据中比待插入元素大的，都朝尾部方向挪动1个位置

③ 将待插入元素放到最终的合适位置

```
for (int begin = 1; begin < array.length; begin++) {
    int cur = begin;
    T v = array[cur];
    while (cur > 0 && cmp(v, array[cur - 1]) < 0) {
        array[cur] = array[cur - 1];
        cur--;
    }
    array[cur] = v;
}
```



二分搜索（Binary Search）

- 如何确定一个元素在数组中的位置？（假设数组里面全都是整数）
- 如果是无序数组，从第 0 个位置开始遍历搜索，平均时间复杂度：O(n)

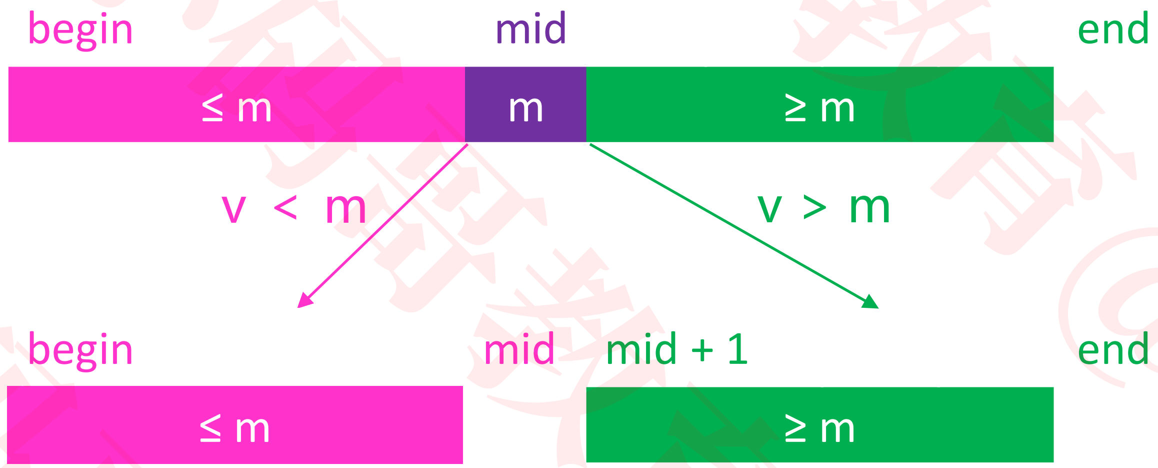
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	66	17	15	28	20	59	88	45	56

- 如果是有序数组，可以使用二分搜索，最坏时间复杂度：O(logn)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	17	20	28	31	45	56	59	66	88

二分搜索 – 思路

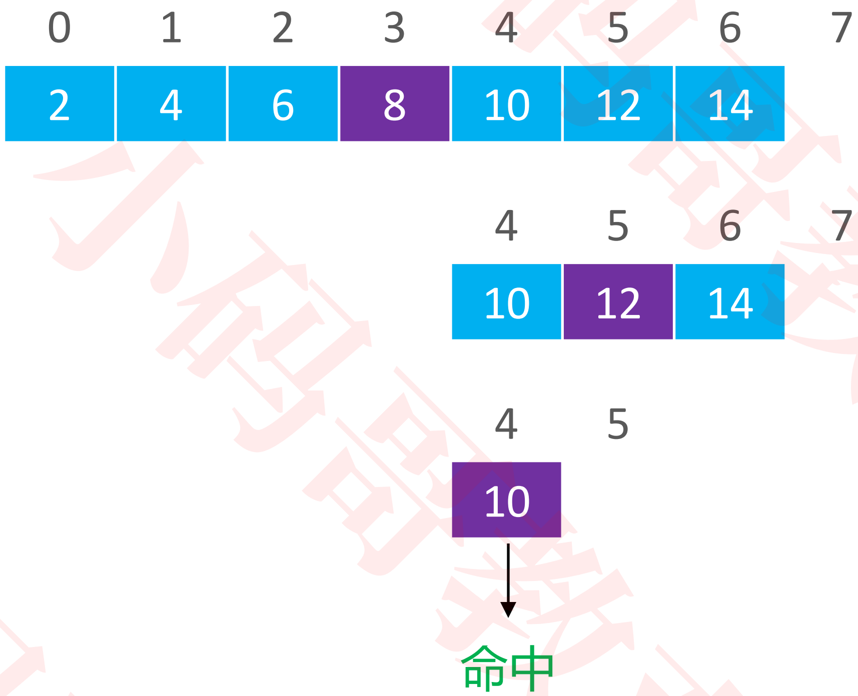
- 假设在 [begin, end) 范围内搜索某个元素 v，mid == (begin + end) / 2
- 如果 v < m，去 [begin, mid) 范围内二分搜索
- 如果 v > m，去 [mid + 1, end) 范围内二分搜索
- 如果 v == m，直接返回 mid



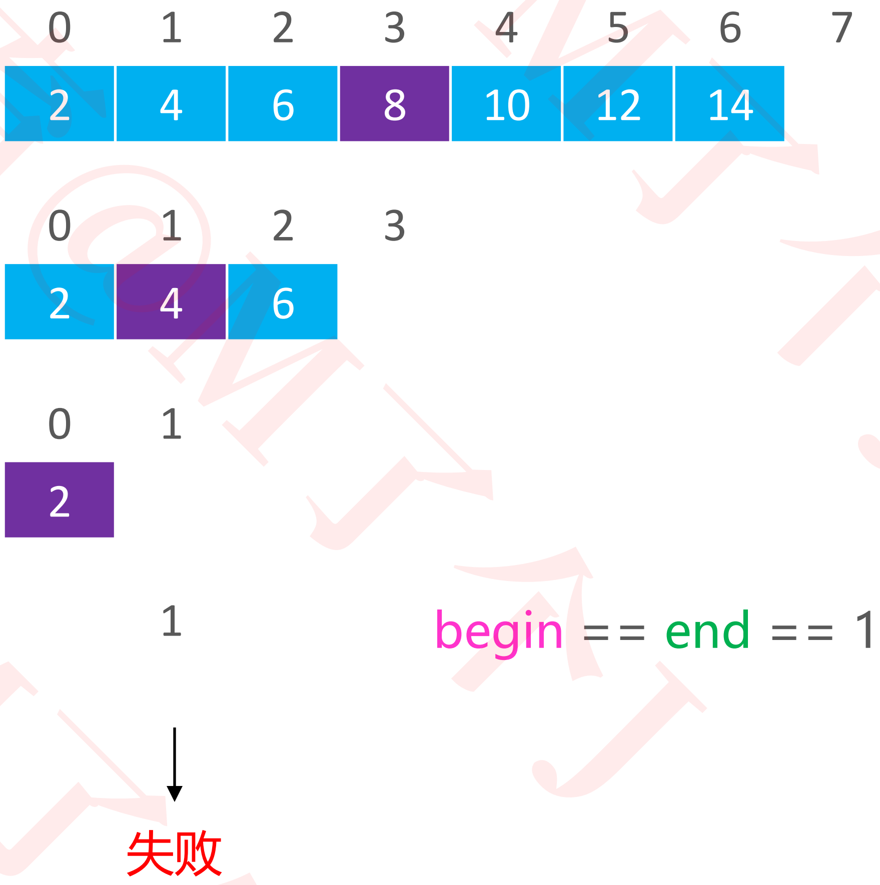
小码哥教育 SEEMYGO

二分搜索 – 实例

- 搜索 10



- 搜索 3



二分搜索 – 实现

```java
public static int search(int[] array, int v) {
    if (array == null || array.length == 0) return -1;
    int begin = 0;
    int end = array.length;
    while (begin < end) {
        int mid = (begin + end) >> 1;
        if (v < array[mid]) {
            end = mid;
        } else if (v > array[mid]) {
            begin = mid + 1;
        } else  {
            return mid;
        }
    }
    return -1;
}
```

- 思考
- 如果存在多个重复的值，返回的是哪一个?
- ✓ 不确定

插入排序 – 二分搜索优化

■ 在元素 v 的插入过程中，可以先二分搜索出合适的插入位置，然后再将元素 v 插入

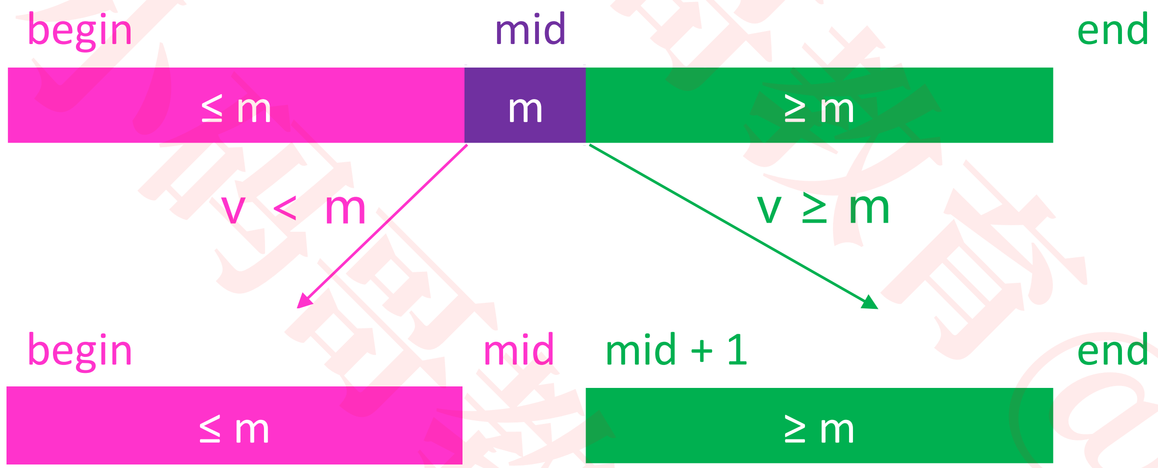
0	1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	8	8	12	14	

■ 要求二分搜索返回的插入位置：第1个大于 v 的元素位置

- 如果 v 是 5，返回 2
- 如果 v 是 1，返回 0
- 如果 v 是 15，返回 7
- 如果 v 是 8，返回 5

插入排序 – 二分搜索优化 – 思路

- 假设在 [begin, end) 范围内搜索某个元素 v，mid == (begin + end) / 2
- 如果 v < m，去 [begin, mid) 范围内二分搜索
- 如果 v ≥ m，去 [mid + 1, end) 范围内二分搜索



插入排序 – 二分搜索优化 – 实例

■ 搜索 5

0	1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	8	8	12	14	

0	1	2	3
2	4	8	

2	3
8	

2

begin == end == 2

■ 搜索 1

0	1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	8	8	12	14	

0	1	2	3
2	4	8	

0	1
2	

0

begin == end == 0

小码哥教育 SEEMYGO

插入排序 – 二分搜索优化 – 实例

■ 搜索 15

0	1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	8	8	12	14	

4	5	6	7
8	12	14	

6	7
14	

7

begin == end == 7

■ 搜索 8

0	1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	8	10	12	14	

4	5	6	7
10	12	14	

4	5
10	

4

begin == end == 4

插入排序 – 二分搜索优化 – 实例

■ 搜索 8

0	1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	8	8	12	14	

4	5	6	7
8	12	14	

4	5
8	

5

begin == end == 5

插入排序 – 二分搜索优化 – 实现

```
for (int i = 1; i < array.length; i++) {
    insert(i, search(i));
}
```

```
private void insert(int source, int dest) {
    T v = array[source];
    for (int i = source; i > dest; i--) {
        array[i] = array[i - 1];
    }
    array[dest] = v;
}
```

```
private int search(int index) {
    int begin = 0;
    int end = index;
    while (begin < end) {
        int mid = (begin + end) >> 1;
        if (cmp(index, mid) < 0) {
            end = mid;
        } else {
            begin = mid + 1;
        }
    }
    return begin;
}
```

- 需要注意的是，使用了二分搜索后，只是减少了比较次数，但插入排序的平均时间复杂度依然是 $O(n^2)$

归并排序（Merge Sort）

- 1945年由约翰·冯·诺伊曼（John von Neumann）首次提出

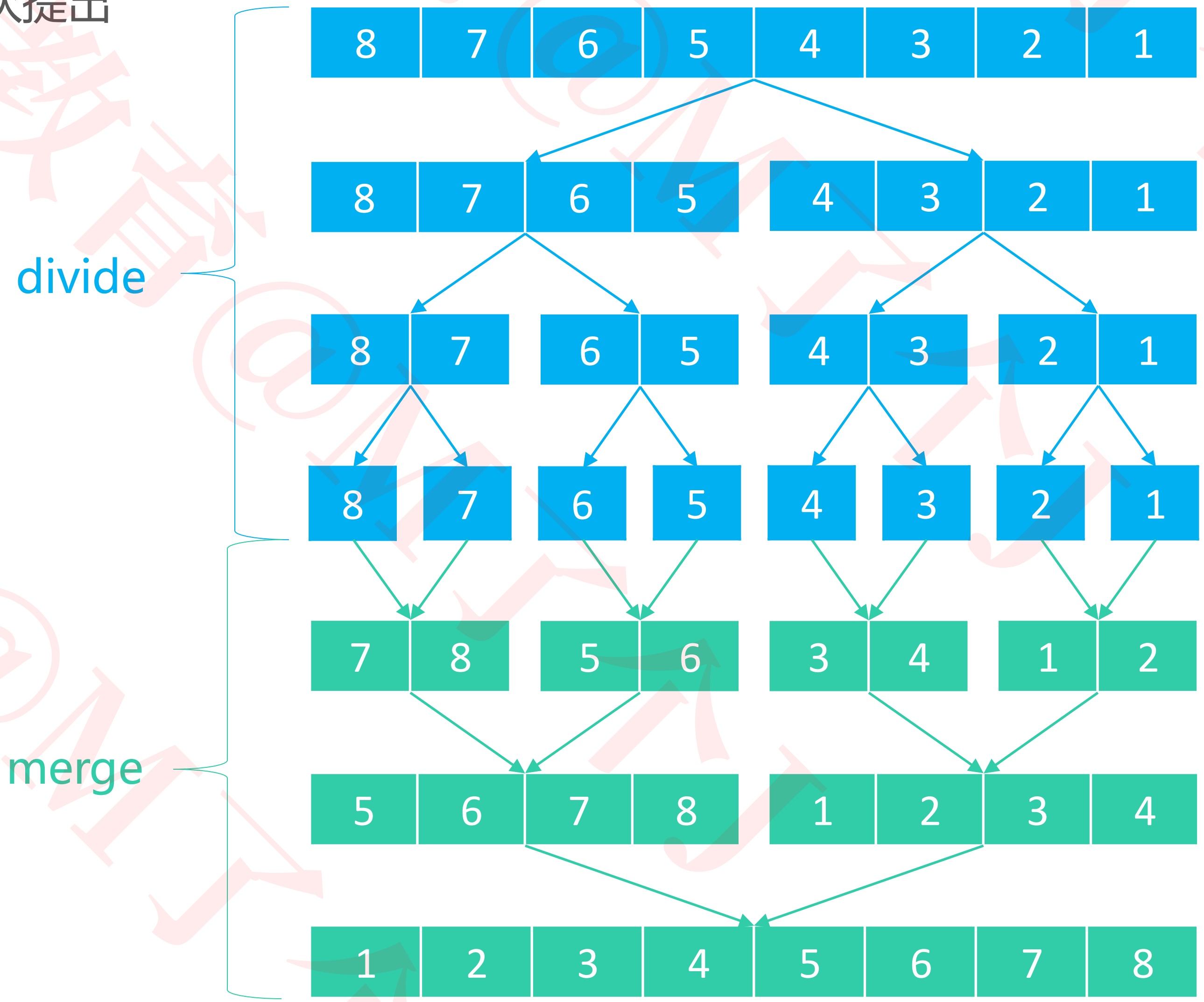
- 执行流程

① 不断地将当前序列平均分割成2个子序列

✓ 直到不能再分割（序列中只剩1个元素）

② 不断地将2个子序列合并成一个有序序列

✓ 直到最终只剩下1个有序序列

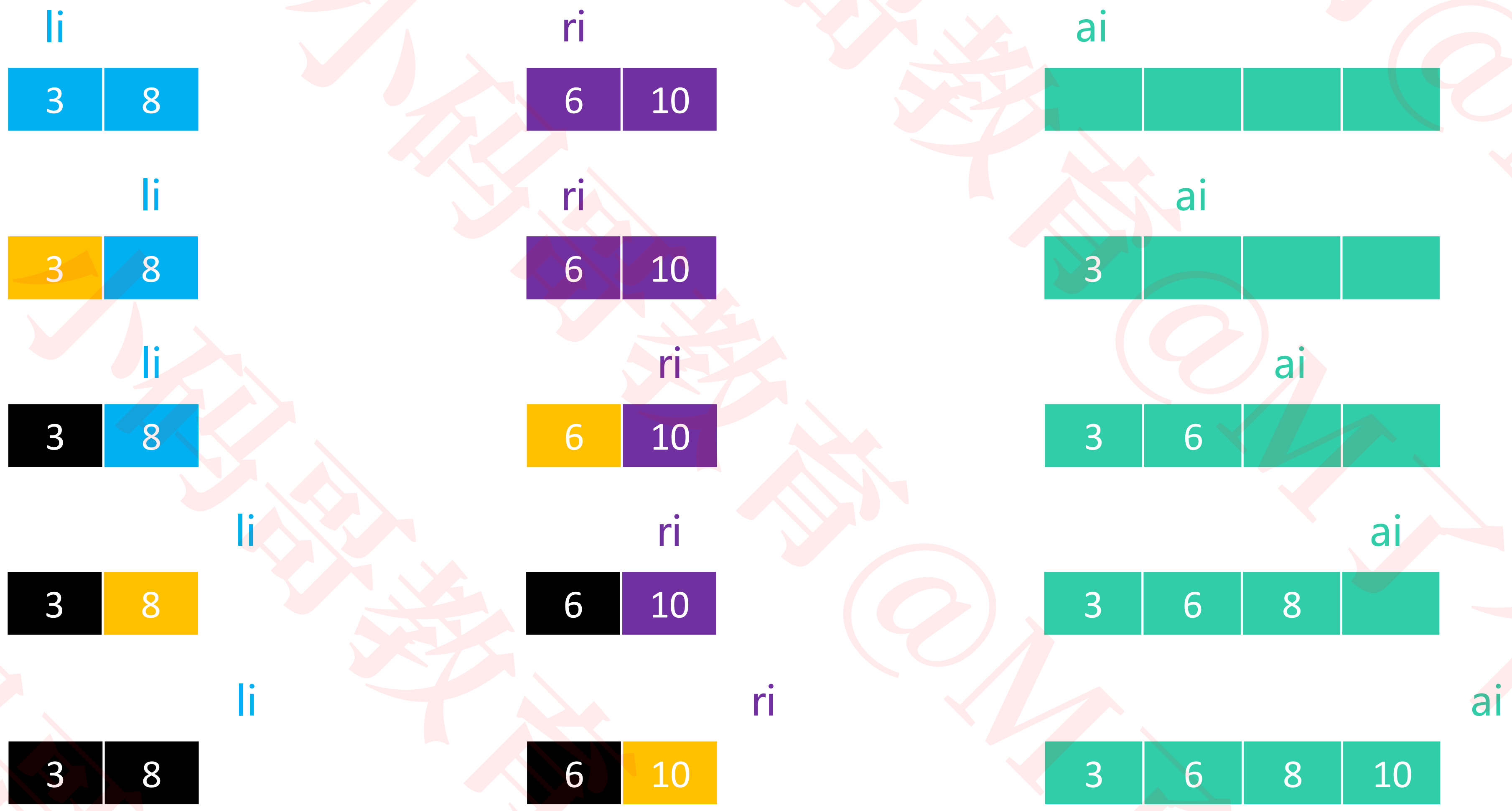


归并排序 – divide实现

```java
// 准备一段临时的数组空间，在merge操作中使用
leftArray = (T[]) new Object[array.length >> 1];
sort(0, array.length);
```

```java
/**
 * [begin, end)
 */
private void sort(int begin, int end) {
    // 至少要有2个元素
    if (end - begin < 2) return;

    int mid = (begin + end) >> 1;
    sort(begin, mid);
    sort(mid, end);
    merge(begin, mid, end);
}
```

归并排序 – merge



归并排序 – merge细节

- 需要 merge 的 2 组序列存在于同一个数组中，并且是挨在一起的

begin				mid				end
8	10	12	14	3	6	11	18	

- 为了更好地完成 merge 操作，最好将其中 1 组序列备份出来，比如 [begin, mid)

				ri				re
8	10	12	14	3	6	11	18	

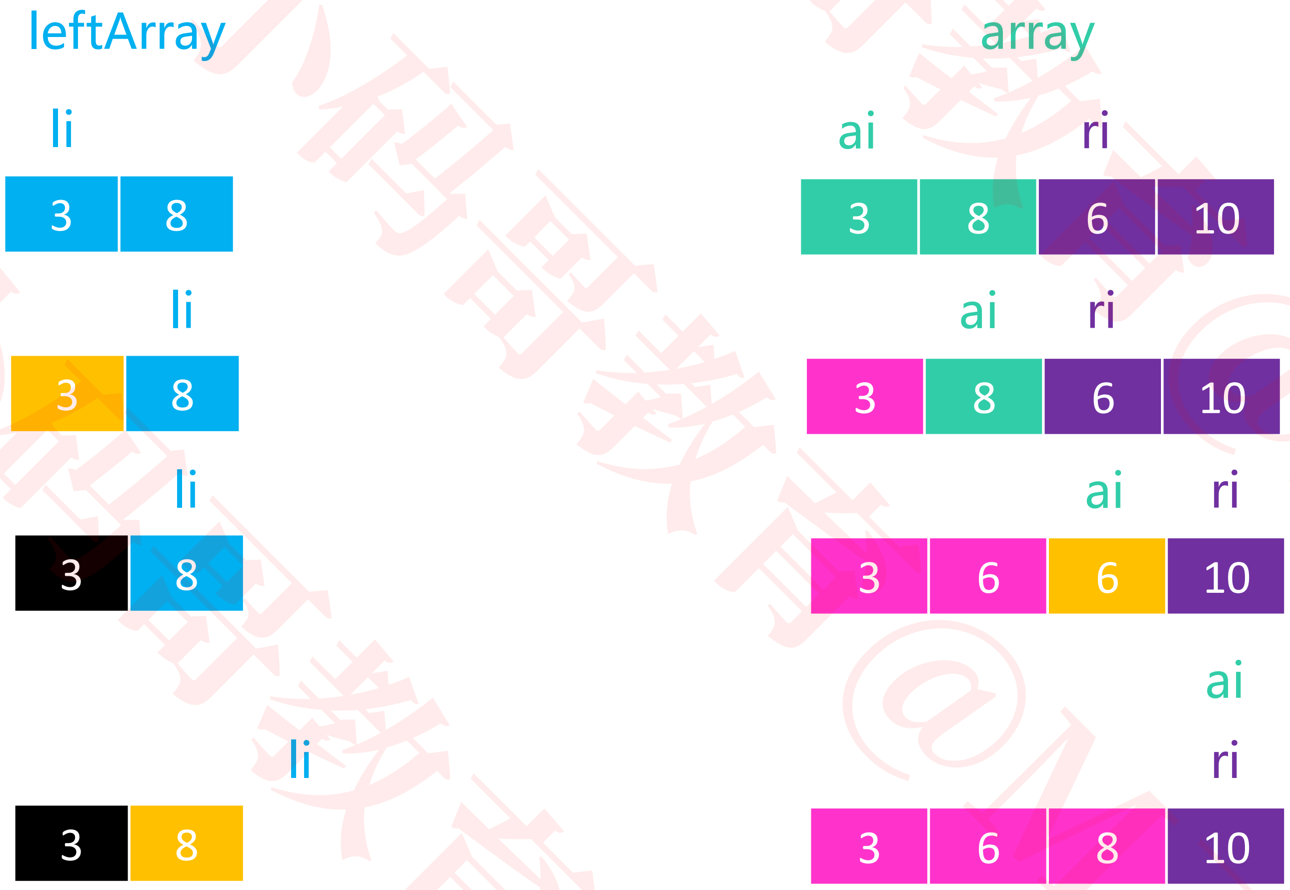
$\underbrace{3 \quad 6 \quad 11 \quad 18}_{\text{rightArray}}$

li				le
8	10	12	14	

$\underbrace{8 \quad 10 \quad 12 \quad 14}_{\text{leftArray}}$

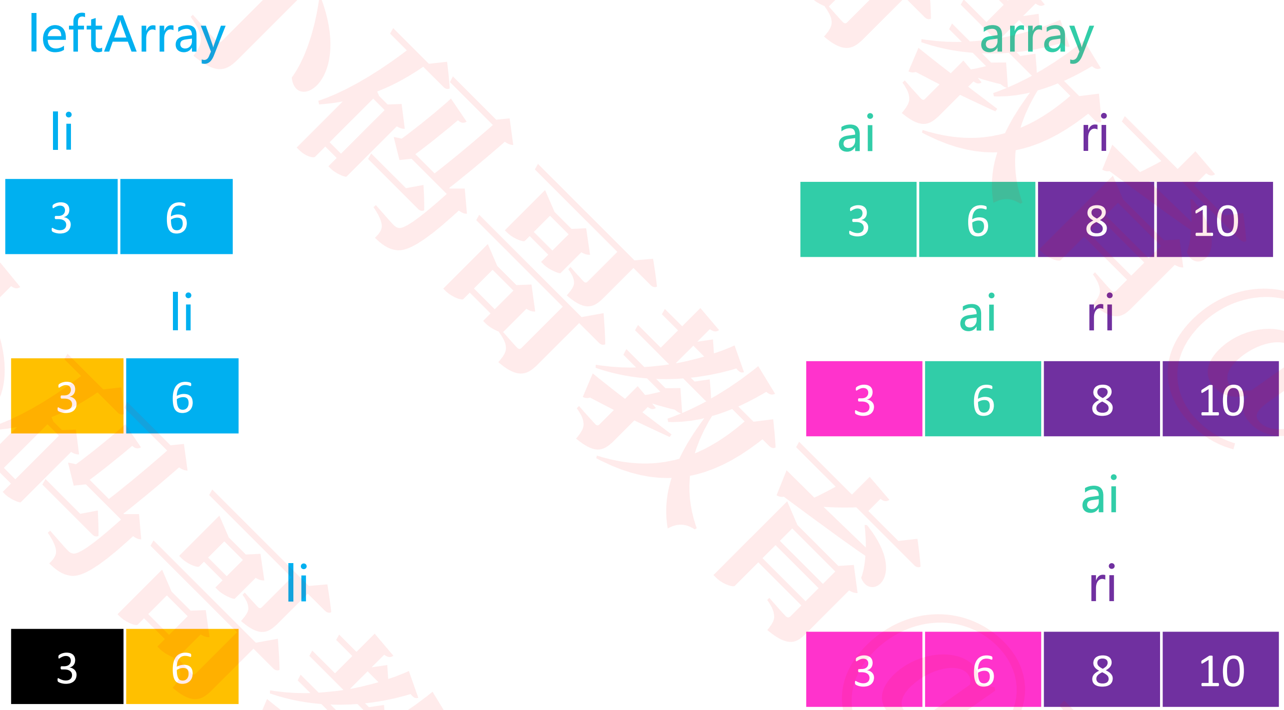
- li == 0，le == mid – begin
- ri == mid，re == end

归并排序 – merge


leftArray
li
3 8
li
3 8
li
3 8
li
3 8
array
ai ri
3 8 6 10
ai ri
3 8 6 10
ai ri
3 6 6 10
ai
ri
3 6 8 10

小码哥教育 SEEMYGO

归并排序 – merge – 左边先结束



归并排序 – merge – 右边先结束

归并排序 – merge实现

```java
/* [begin, mid), [mid, end) */
private void merge(int begin, int mid, int end) {
    int li = 0, le = mid - begin; // 左边数组(基于leftArray)
    int ri = mid, re = end; // 右边数组(基于array)
    int ai = begin; // array的索引
    for (int i = li; i < le; i++) { // 拷贝左边数组到leftArray
        leftArray[i] = array[begin + i];
    }
    while (li < le) {
        if (ri < re && cmp(array[ri], leftArray[li]) < 0) {
            array[ai++] = array[ri++]; // 拷贝右边数组到array
        } else {
            array[ai++] = leftArray[li++]; // 拷贝左边数组到array
        }
    } // cmp位置改为 <= 会失去稳定性
}
```

归并排序 – 复杂度分析

- 归并排序花费的时间
  - $T(n) = 2 * T(n/2) + O(n)$
  - $T(1) = O(1)$
  - $T(n)/n = T(n/2)/(n/2) + O(1)$

- 令 $S(n) = T(n)/n$
  - $S(1) = O(1)$
  - $S(n) = S(n/2) + O(1) = S(n/4) + O(2) = S(n/8) + O(3) = S\left(n/2^k\right) + O(k) = S(1) + O(\log n) = O(\log n)$
  - $T(n) = n * S(n) = O(n\log n)$

- 由于归并排序总是平均分割子序列，所以最好、最坏、平均时间复杂度都是 $O(n\log n)$ ，属于稳定排序

- 从代码中不难看出：归并排序的空间复杂度是 $O(n/2 + \log n) = O(n)$
  - $n/2$ 用于临时存放左侧数组，$\log n$ 是因为递归调用

常见的递推式与复杂度

递推式	复杂度
$T(n) = T(n/2) + O(1)$	$O(\log n)$
$T(n) = T(n-1) + O(1)$	$O(n)$
$T(n) = T(n/2) + O(n)$	$O(n)$
$T(n) = 2 * T(n/2) + O(1)$	$O(n)$
$T(n) = 2 * T(n/2) + O(n)$	$O(n\log n)$
$T(n) = T(n-1) + O(n)$	$O(n^2)$
$T(n) = 2 * T(n-1) + O(1)$	$O(2^n)$
$T(n) = 2 * T(n-1) + O(n)$	$O(2^n)$

作业

- 合并两个有序数组
  - https://leetcode-cn.com/problems/merge-sorted-array/

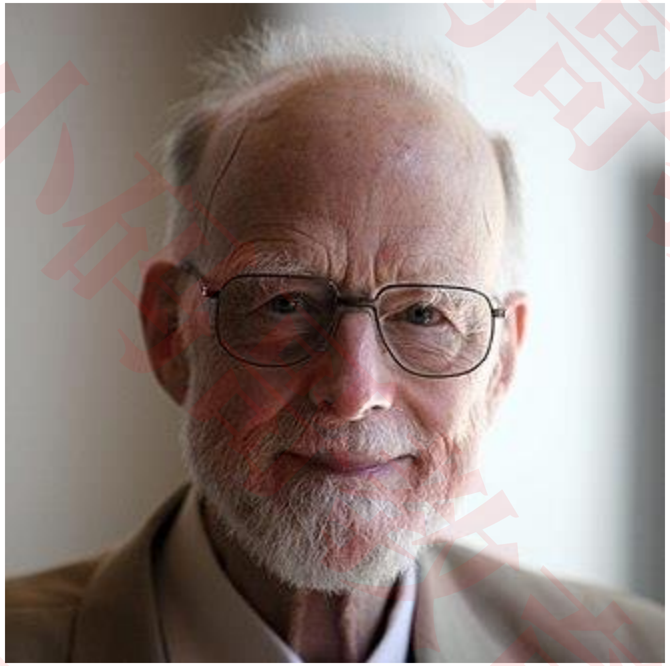
- 合并两个有序链表
  - https://leetcode-cn.com/problems/merge-two-sorted-lists/comments/

- 合并K个有序链表
  - https://leetcode-cn.com/problems/merge-k-sorted-lists/

- 解题教程
  - https://ke.qq.com/course/436549

快速排序（Quick Sort）

- 1960年由查尔斯·安东尼·理查德·霍尔（Charles Antony Richard Hoare，缩写为C. A. R. Hoare）提出
  - 昵称为东尼·霍尔（Tony Hoare）



快速排序 – 执行流程

① 从序列中选择一个轴点元素（pivot）

✓ 假设每次选择 0 位置的元素为轴点元素

② 利用 pivot 将序列分割成 2 个子序列

✓ 将小于 pivot 的元素放在pivot前面（左侧）

✓ 将大于 pivot 的元素放在pivot后面（右侧）

✓ 等于pivot的元素放哪边都可以

③ 对子序列进行 ① ② 操作

✓ 直到不能再分割（子序列中只剩下1个元素）

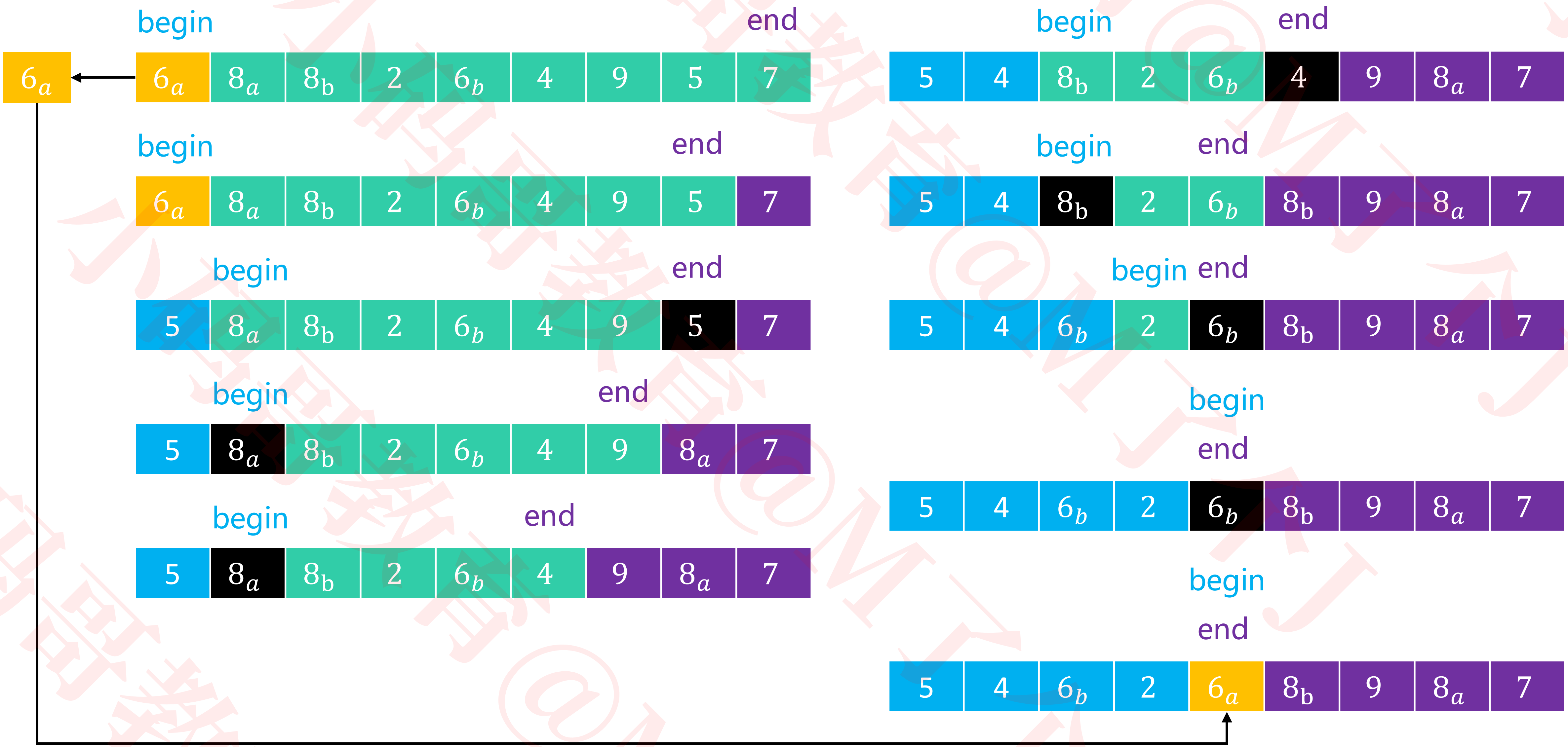
6	11	8	2	9	4	1	5	7	10	3
3	5	1	2	4	6	9	8	7	10	11
2	1	3	5	4	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

■ 快速排序的本质

□ 逐渐将每一个元素都转换成轴点元素

小码哥教育 SEEMYGO

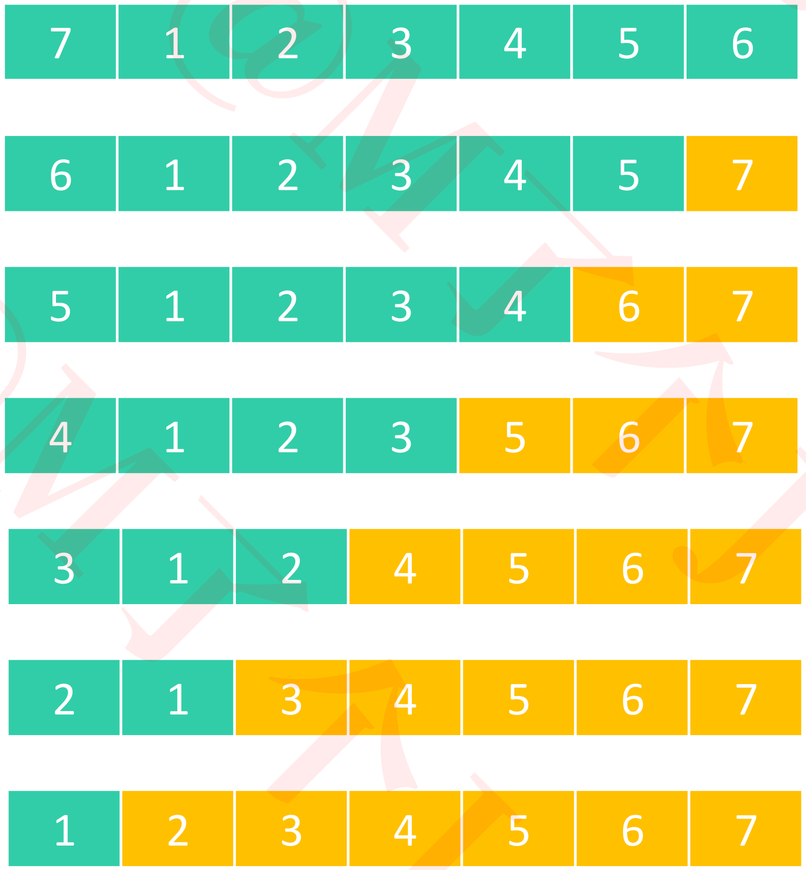
快速排序 – 轴点构造



小码哥教育 SEEMYGO

快速排序 – 时间复杂度

- 在轴点左右元素数量比较均匀的情况下，同时也是最好的情况
  - $T(n) = 2 * T(n/2) + O(n) = O(nlogn)$
- 如果轴点左右元素数量极度不均匀，最坏情况
  - $T(n) = T(n-1) + O(n) = O(n^2)$
- 为了降低最坏情况的出现概率，一般采取的做法是
  - 随机选择轴点元素
- 最好、平均时间复杂度：$O(nlogn)$
- 最坏时间复杂度：$O(n^2)$
- 由于递归调用的缘故，空间复杂度：$O(logn)$
- 属于不稳定排序

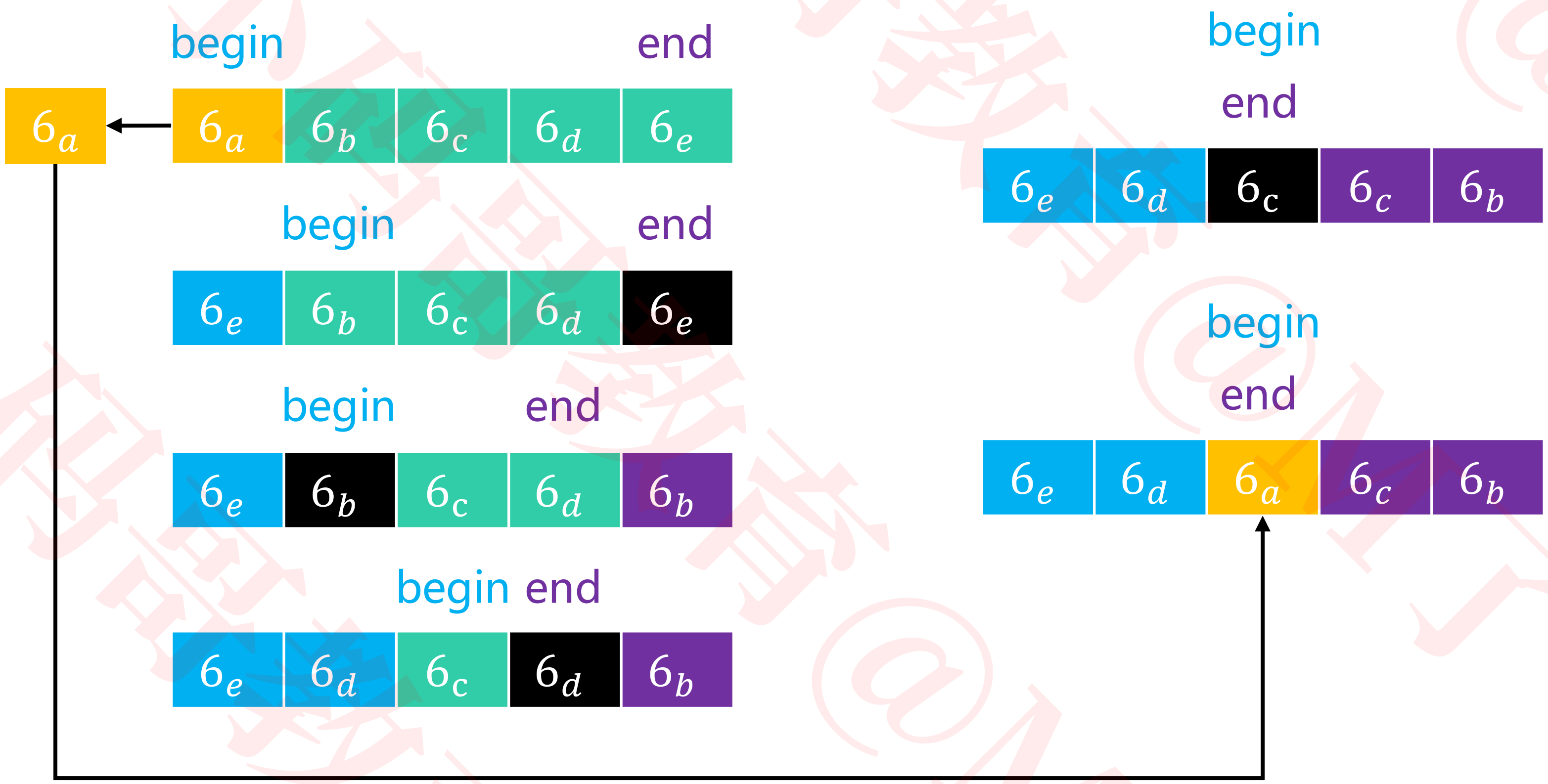


快速排序 – 实现

```java
/* [begin, end) */
private void sort(int begin, int end) {
    // 至少要有2个元素
    if (end - begin < 2) return;

    int middle = pivotIndex(begin, end);
    sort(begin, middle);
    sort(middle + 1, end);
}
```

```java
private int pivotIndex(int begin, int end) {
    // 随机交换begin位置的元素
    swap(begin, begin + (int)(Math.random() * (end - begin)));
    T pivot = array[begin];
    end--; // end指向最后1个元素
    while (begin < end) {
        while (begin < end) {
            if (cmp(pivot, array[end]) < 0) {
                end--;
            } else {
                array[begin++] = array[end];
                break;
            }
        }
        while (begin < end) {
            if (cmp(pivot, array[begin]) > 0) {
                begin++;
            } else {
                array[end--] = array[begin];
                break;
            }
        }
    }
    array[begin] = pivot;
    return begin;
}
```

快速排序 – 与轴点相等的元素

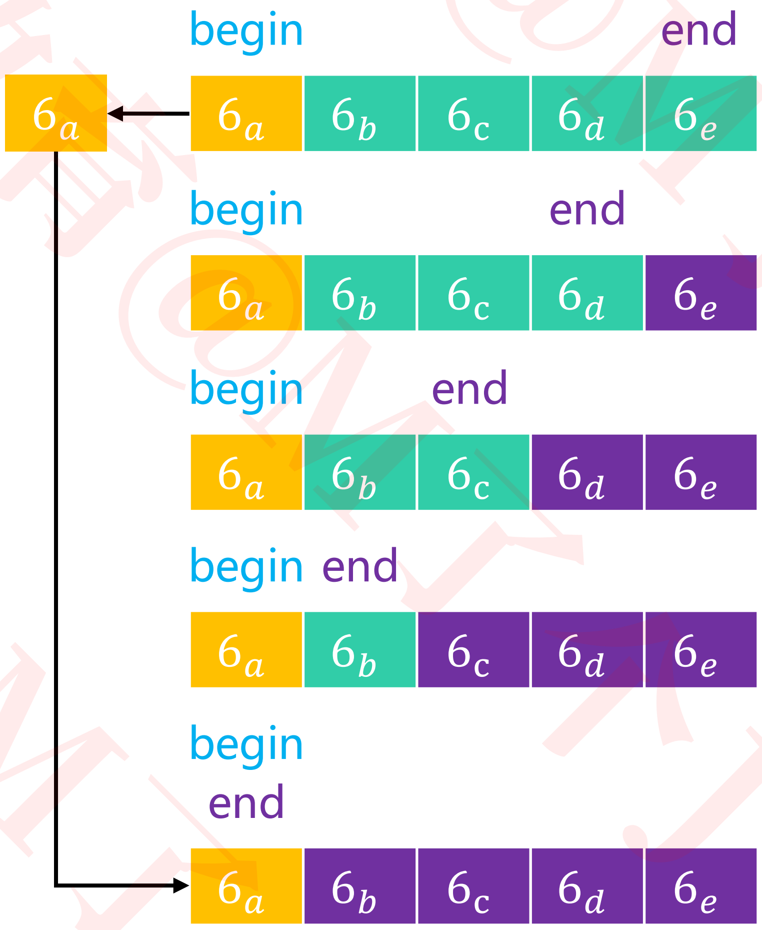


- 如果序列中的所有元素都与轴点元素相等，利用目前的算法实现，轴点元素可以将序列分割成 2 个均匀的子序列

快速排序 – 与轴点相等的元素

■ 思考：cmp 位置的判断分别改为 ≤、≥ 会起到什么效果?

```
while (begin < end) {
    if (cmp(pivot, array[end]) <= 0) {
        end--;
    } else {
        array[begin++] = array[end];
        break;
    }
}
while (begin < end) {
    if (cmp(pivot, array[begin]) >= 0) {
        begin++;
    } else {
        array[end--] = array[begin];
        break;
    }
}
```



■ 轴点元素分割出来的子序列极度不均匀

□ 导致出现最坏时间复杂度 $O(n^2)$

希尔排序（Shell Sort）

- 1959年由唐纳德·希尔（Donald Shell）提出

- 希尔排序把序列看作是一个矩阵，分成 m 列，逐列进行排序
  - m 从某个整数逐渐减为1
  - 当 m 为1时，整个序列将完全有序

- 因此，希尔排序也被称为递减增量排序（Diminishing Increment Sort）

- 矩阵的列数取决于步长序列（step sequence）
  - ✓ 比如，如果步长序列为{1,5,19,41,109,...}，就代表依次分成109列、41列、19列、5列、1列进行排序
  - ✓ 不同的步长序列，执行效率也不同

希尔排序 – 实例

- 希尔本人给出的步长序列是 $n/2^k$，比如 n 为16时，步长序列是{1, 2, 4, 8}

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

- 分成8列进行排序

16	15	14	13	12	11	10	9
8	7	6	5	4	3	2	1

8	7	6	5	4	3	2	1
16	15	14	13	12	11	10	9

8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9

希尔排序 – 实例

- 分成4列进行排序

8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9

8	7	6	5
4	3	2	1
16	15	14	13
12	11	10	9

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
16	15	14	13

4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13

希尔排序 – 实例

■ 分成2列进行排序

4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13

4	3
2	1
8	7
6	5
12	11
10	9
16	15
14	13

→

2	1
4	3
6	5
8	7
10	9
12	11
14	13
16	15

↓

2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15

希尔排序 – 实例

■ 分成1列进行排序

2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15

2	→	1
1		2
……		……
16		15
15		16

↓

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

■ 不难看出来，从8列 变为 1列的过程中，逆序对的数量在逐渐减少

□ 因此希尔排序底层一般使用插入排序对每一列进行排序，也很多资料认为希尔排序是插入排序的改进版

希尔排序 – 实例

- 假设有11个元素，步长序列是{1, 2, 5}

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

11	10	9	8	7
6	5	4	3	2
1				

→

1	5	4	3	2
6	10	9	8	7
11				

- 假设元素在第 col 列、第 row 行，步长（总列数）是 step
  - 那么这个元素在数组中的索引是 col + row * step
  - 比如 9 在排序前是第 2 列、第 0 行，那么它排序前的索引是 2 + 0 * 5 = 2
  - 比如 4 在排序前是第 2 列、第 1 行，那么它排序前的索引是 2 + 1 * 5 = 7

希尔排序 – 实现

```java
List<Integer> stepSequence = sedgewickStepSequence();
for (Integer step : stepSequence) {
    sort(step);
}
```

```java
private void sort(int step) {
    for (int col = 0; col < step; col++) {
        for (int begin = col + step; begin < array.length; begin += step) {
            int cur = begin;
            while (cur > col && cmp(cur, cur - step) < 0) {
                swap(cur, cur - step);
                cur -= step;
            }
        }
    }
}
```

- 最好情况是步长序列只有1，且序列几乎有序，时间复杂度为 O(n)
- 空间复杂度为O(1)，属于不稳定排序

希尔排序 – 步长序列

■ 希尔本人给出的步长序列，最坏情况时间复杂度是 $O(n^2)$

```
private List<Integer> shellStepSequence() {
    List<Integer> stepSequence = new ArrayList<>();
    int step = array.length;
    while ((step >>= 1) > 0) {
        stepSequence.add(step);
    }
    return stepSequence;
}
```

希尔排序 – 步长序列

- 目前已知的最好的步长序列，最坏情况时间复杂度是 $O(n^{4/3})$，1986年由Robert Sedgewick提出

$$
\begin{cases} 9\left(2^k - 2^{\frac{k}{2}}\right) + 1 & k \text{ even}, \\ 8 \cdot 2^k - 6 \cdot 2^{(k+1)/2} + 1 & k \text{ odd} \end{cases}
$$

$$1, 5, 19, 41, 109, \ldots$$

```java
private List<Integer> sedgewickStepSequence() {
    List<Integer> stepSequence = new LinkedList<>();
    int k = 0, step = 0;
    while (true) {
        if (k % 2 == 0) {
            int pow = (int) Math.pow(2, k >> 1);
            step = 1 + 9 * (pow * pow - pow);
        } else {
            int pow1 = (int) Math.pow(2, (k - 1) >> 1);
            int pow2 = (int) Math.pow(2, (k + 1) >> 1);
            step = 1 + 8 * pow1 * pow2 - 6 * pow2;
        }
        if (step >= array.length) break;
        stepSequence.add(0, step);
        k++;
    }
    return stepSequence;
}
```

计数排序（Counting Sort）

- ■ 之前学习的冒泡、选择、插入、归并、快速、希尔、堆排序，都是基于比较的排序
  - □ 平均时间复杂度目前最低是 O(nlogn)

- ■ 计数排序、桶排序、基数排序，都不是基于比较的排序
  - □ 它们是典型的用空间换时间，在某些时候，平均时间复杂度可以比 O(nlogn) 更低

- ■ 计数排序于1954年由Harold H. Seward提出，适合对一定范围内的整数进行排序

- ■ 计数排序的核心思想
  - □ 统计每个整数在序列中出现的次数，进而推导出每个整数在有序序列中的索引

计数排序 – 最简单的实现

7	3	5	8	6	7	4	5

	存放所有整数出现的次数								
索引	0	1	2	3	4	5	6	7	8
次数				1	1	2	1	2	1

3	4	5	5	6	7	7	8

- 这个版本的实现存在以下问题
- 无法对负整数进行排序
- 极其浪费内存空间
- 是个不稳定的排序
- ……

```java
int max = array[0]; // 最大值
for (int i = 1; i < array.length; i++) {
    if (array[i] > max) {
        max = array[i];
    }
}
// 统计元素出现的次数
int[] counts = new int[max + 1];
for (int i = 0; i < array.length; i++) {
    counts[array[i]]++;
}
// 按顺序赋值
int index = 0;
for (int i = 0; i < counts.length; i++) {
    while (counts[i]-- > 0) {
        array[index++] = i;
    }
}
```

计数排序 – 改进思路

array

7	3	5	8	6	7	4	5

	从索引0开始依次存放3~8出现的次数					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	1	2	1	2	1

counts

	每个次数累加上其前面的所有次数 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	2	4	5	7	8

0	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	5	6	7	7	8

- 假设array中的最小值是 min
- array中的元素 k 对应的 counts 索引是 k – min
- array中的元素 k 在有序序列中的索引
  - counts[k – min] – p
  - p 代表着是倒数第几个 k

- 比如元素 8 在有序序列中的索引
  - counts[8 – 3] – 1，结果为 7

- 倒数第 1 个元素 7 在有序序列中的索引
  - counts[7 – 3] – 1，结果为 6

- 倒数第 2 个元素 7 在有序序列中的索引
  - counts[7 – 3] – 2，结果为 5

小码哥教育 SEEMYGO

计数排序 – 改进思路

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	2	4	5	7	8

0	1	2	3	4	5	6	7

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	2	3	5	7	8

0	1	2	3	4	5	6	7
			5				

小码哥教育 SEEMYGO

计数排序 – 改进思路

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	1	3	5	7	8

0	1	2	3	4	5	6	7
	4		5				

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	1	3	5	6	8

0	1	2	3	4	5	6	7
	4		5			7	

计数排序 – 改进思路

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	1	3	4	6	8

0	1	2	3	4	5	6	7
	4		5	6		7	

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	1	3	4	6	7

0	1	2	3	4	5	6	7
	4		5	6		7	8

计数排序 – 改进思路

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	1	1	2	4	6	7

0	1	2	3	4	5	6	7
	4	5	5	6		7	8

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	0	1	2	4	6	7

0	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	5	6		7	8

计数排序 – 改进思路

7	3	5	8	6	7	4	5

	每个元素累加上其前面的所有元素 得到的就是元素在有序序列中的位置信息					
元素	3	4	5	6	7	8
索引	0	1	2	3	4	5
次数	0	1	2	4	5	7

0	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	5	6	7	7	8

计数排序 – 改进实现

```java
int max = array[0]; // 最大值
int min = array[0]; // 最小值
for (int i = 1; i < array.length; i++) {
    if (array[i] > max) {
        max = array[i];
    }
    if (array[i] < min) {
        min = array[i];
    }
}
```

```java
// 用于计数
int[] counts = new int[max - min + 1];
for (int i = 0; i < array.length; i++) {
    counts[array[i] - min]++;
}
for (int i = 1; i < counts.length; i++) {
    counts[i] += counts[i - 1];
}
```

```java
// 用于存放排好序的数据
int[] output = new int[array.length];
for (int i = array.length - 1; i >= 0; i--){
    output[--counts[array[i] - min]] = array[i];
}

for (int i = 0; i < array.length; i++){
    array[i] = output[i];
}
```

- 最好、最坏、平均时间复杂度：$O(n+k)$
- 空间复杂度：$O(n+k)$
- k 是整数的取值范围
- 属于稳定排序

计数排序 – 对自定义对象进行排序

■ 如果自定义对象可以提供用以排序的整数类型，依然可以使用计数排序

```java
private static class Person {
    int age;
    String name;
    Person(int age, String name) {
        this.age = age;
        this.name = name;
    }
    @Override
    public String toString() {
        return "Person [age=" + age
            + ", name=" + name + "]";
    }
}
```

```java
Person[] persons = new Person[] {
        new Person(20, "A"),
        new Person(-13, "B"),
        new Person(17, "C"),
        new Person(12, "D"),
        new Person(-13, "E"),
        new Person(20, "F")
};
```

```java
int max = persons[0].age;
int min = persons[0].age;
for (int i = 1; i < persons.length; i++) {
    if (persons[i].age > max) {
        max = persons[i].age;
    }
    if (persons[i].age < min) {
        min = persons[i].age;
    }
}
```

计数排序 – 对自定义对象进行排序

```java
// 用于计数
int[] counts = new int[max - min + 1];
for (int i = 0; i < persons.length; i++) {
    counts[persons[i].age - min]++;
}
for (int i = 1; i < counts.length; i++) {
    counts[i] += counts[i - 1];
}

// 用于存放排好序的数据
Person[] output = new Person[persons.length];
for (int i = persons.length - 1; i >= 0; i--){
    output[--counts[persons[i].age - min]] = persons[i];
}
```

■ 排序之后的结果

① Person [age=-13, name=B]

② Person [age=-13, name=E]

③ Person [age=12, name=D]

④ Person [age=17, name=C]

⑤ Person [age=20, name=A]

⑥ Person [age=20, name=F]

基数排序（Radix Sort）

- 基数排序非常适合用于整数排序（尤其是非负整数），因此本课程只演示对非负整数进行基数排序
- 执行流程：依次对个位数、十位数、百位数、千位数、万位数...进行排序（从低位到高位）

126	69	593	23	6	89	54	8

↓

593	23	54	126	6	8	69	89

↓

6	8	23	126	54	69	89	593

↓

6	8	23	54	69	89	126	593

- 个位数、十位数、百位数的取值范围都是固定的0~9，可以使用计数排序对它们进行排序

- 思考：如果先对高位排序，再对低位排序，是否可行？

基数排序 – 实现

```java
int max = array[0]; // 最大值
for (int i = 1; i < array.length; i++) {
    if (array[i] > max) {
        max = array[i];
    }
}

int output[] = new int[array.length];
int counts[] = new int[10];
for (int divider = 1; divider <= max; divider *= 10) {
    // 对每一位进行计数排序
    countingSort(divider, output, counts);
}
```

基数排序 – 实现

```java
private void countingSort(int divider, int[] output, int[] counts) {
    for (int i = 0; i < counts.length; i++) {
        counts[i] = 0;
    }
    for (int i = 0; i < array.length; i++) {
        counts[array[i] / divider % 10]++;
    }
    for (int i = 1; i < counts.length; i++) {
        counts[i] += counts[i - 1];
    }
    for (int i = array.length - 1; i >= 0; i--) {
        output[--counts[array[i] / divider % 10]] = array[i];
    }
    for (int i = 0; i < array.length; i++) {
        array[i] = output[i];
    }
}
```

- 最好、最坏、平均时间复杂度：$O(d * (n + k))$，d 是最大值的位数，k 是进制。属于稳定排序
- 空间复杂度：$O(n + k)$，k 是进制

基数排序 – 另一种思路

126	69	593	23	6	89	54	8

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
			593	54		126		8	69
			23			6			89

593	23	54	126	6	8	69	89

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6		23			54	69		89	593
8		126							

6	8	23	126	54	69	89	593

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	126				593				
8									
23									
54									
69									
89									

6	8	23	54	69	89	126	593

基数排序 – 另一种思路的实现

```
int max = array[0]; // 最大值
for (int i = 1; i < array.length; i++) {
    if (array[i] > max) {
        max = array[i];
    }
}
```

```
// 桶数组
int[][] buckets = new int[10][array.length];
// 每个桶的元素数量
int[] bucketSizes = new int[buckets.length];
for (int divider = 1; divider <= max; divider *= 10) {
    for (int i = 0; i < array.length; i++) {
        int no = array[i] / divider % 10;
        buckets[no][bucketSizes[no]++] = array[i];
    }
    int index = 0;
    for (int i = 0; i < buckets.length; i++) {
        for (int j = 0; j < bucketSizes[i]; j++) {
            array[index++] = buckets[i][j];
        }
        bucketSizes[i] = 0;
    }
}
```

- 空间复杂度是 $O(kn + k)$，时间复杂度是 $O(dn)$
- d 是最大值的位数，k 是进制

桶排序（Bucket Sort）

■ 执行流程

① 创建一定数量的桶（比如用数组、链表作为桶）

② 按照一定的规则（不同类型的数据，规则不同），将序列中的元素均匀分配到对应的桶

③ 分别对每个桶进行单独排序

④ 将所有非空桶的元素合并成有序序列

■ 元素在桶中的索引

□ 元素值 * 元素数量

0.34	0.47	0.29	0.84	0.45	0.38	0.35	0.76

0			
1			
2	0.34	0.29	0.35
3	0.47	0.45	0.38
4			
5			
6	0.84	0.76	
7			

0			
1			
2	0.29	0.34	0.35
3	0.38	0.45	0.47
4			
5			
6	0.76	0.84	
7			

0.29	0.34	0.35	0.38	0.45	0.47	0.76	0.84

桶排序 – 实现

```java
double[] array = {0.34, 0.47, 0.29, 0.84, 0.45, 0.38, 0.35, 0.76};
```

```java
// 桶数组
List<Double>[] buckets = new List[array.length];
for (int i = 0; i < array.length; i++) {
    int bucketIndex = (int) (array[i] * array.length);
    List<Double> bucket = buckets[bucketIndex];
    if (bucket == null) {
        bucket = new LinkedList<>();
        buckets[bucketIndex] = bucket;
    }
    bucket.add(array[i]);
}
```

```java
// 对每个桶进行排序
int index = 0;
for (int i = 0; i < buckets.length; i++) {
    if (buckets[i] == null) continue;
    buckets[i].sort(null);
    for (Double d : buckets[i]) {
        array[index++] = d;
    }
}
```

- 空间复杂度：$O(n+m)$，m 是桶的数量
- 时间复杂度：$O(n) + m * O\left(\frac{n}{m} * \log\frac{n}{m}\right) = O\left(n + n * \log\frac{n}{m}\right) = O(n + n * \log n - n * \log m)$
- 因此为 $O(n+k)$，k 为 $n * \log n - n * \log m$
- 属于稳定排序

史上“最强”排序 – 休眠排序

```java
private static class SortThread extends Thread {
    private int value;
    public SortThread(int value) {
        this.value = value;
    }
    public void run() {
        try {
            Thread.sleep(value);
            System.out.println(value);
        } catch (InterruptedException e) {
            e.printStackTrace();
        }
    }
}
```

```java
public static void main(String[] args) {
    int[] array = {10, 100, 50, 30, 60};
    for (int i = 0; i < array.length; i++) {
        new SortThread(array[i]).start();
    }
}
```