Łukasz Czapliński
e-mail: czapl.luk@gmail.com

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P1.11**

Prowadzący: dr Paweł Woźny

Wrocław, dnia 11 listopada 2012 r.

1. Wstęp

1.1. Oznaczenia

$\Phi(n)$	przybliżenie e^n liczone z szeregu Taylora bez przekształceń
$\Psi(n)$	przybliżenie e^n liczone z użyciem funkcji Φ i pewnego usprawnienia
$exp(n)$	funkcja wbudowana licząca e^n (z biblioteki dla C++ $< cmath >$)
$T(f,n)$	czas liczenia funkcji f dla argumentu n

Tabela 1: Użyte oznaczenia

1.2. Omówienie problemu

Funkcja e^x pojawia się w problemach numerycznych niezwykle często. Jej obliczanie z dobrą dokładnością nie jest tak trywialne jak liczenie wartości funkcji wykładniczej, której podstawa jest wymierna. Celem tej pracy będzie porównanie kilku sposobów obliczania tej funkcji, ich dokładności i czasu działania.

1.2.1. Uwarunkowanie zadania

Uwarunkowanie zadania obliczania funkcji jednej zmiennej f, która w dodatku jest ciągła i ma pochodna, można obliczyć wzorem:

$$C(f,x) = |\frac{x * f'(x)}{f(x)}| \tag{1}$$

$$C(e^x,x) = |\frac{x * (e^x)'}{e^x}| = |x| \tag{2}$$

Jak widać, w przypadku obliczania funkcji e^x oznacza to, ze błąd względny jest liniowo zależny od argumentu. Oznacza to, ze obarczone błędem uwarunkowania (czyli efektem zwielokrotnienia małego początkowego zaburzenia danych) może być tylko liczenie wartości funkcji dla bardzo dużych (co do wartości bezwzględnej) argumentów.

1.3. Uzyte metody

Pierwsza z użytych metod, $\Phi(x)$, liczy wartość e^x ze wzoru $e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$.

Druga metoda, $\Psi(x)$, wykorzystuje fakt, iż $e^x = 2^m * e^u$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, a $|u| < \frac{\ln 2}{2}$. Uzasadnienie tego faktu znajduje się w kolejnej sekcji. Sprowadza to liczenie e^x do liczenia e^u, ponieważ 2^m może być policzone jedna komenda procesora (zakładając, że wartość ta mieści się w naszej arytmetyce). Dodatkowo, szereg Maclaurina dla funkcji e^x dla argumentów bliskich zera jest bardzo szybko zbieżny.

1.3.1. Wzory matematyczne i ich wyprowadzenia

Wzór, z którego korzysta pierwsza metoda, to oczywiście rozwinięcie funkcji e^x w szereg Maclaurina:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0) * x^i}{i!} \tag{3}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{4}$$

$$e^0 = 1 \tag{5}$$

stąd:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{6}$$

Z kolei uzasadnieniem drugiej metody jest fakt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{R} : |u| < \frac{\ln 2}{2} \wedge x = m * \ln 2 + u \tag{7}$$

z którego wynika:

$$e^x = e^{(m*\ln 2+u)} \tag{8}$$
$$e^{(m*\ln 2+u)} = e^{(m*\ln 2)} * e^u \tag{9}$$
$$e^{(m*\ln 2)} = 2^m \tag{10}$$

stąd:

$$e^x = 2^m * e^u \tag{11}$$

1.3.2. O programie

Użyty do doświadczenia (i załączony) program napisany jest w C++ i używa arytmetyki typu double (64 bitowa). Zaimplementowane w nim są obie metody: $\Phi(x)$, $\Psi(x)$.

Metoda Φ używa akumulatora, by sumować wartości $\frac{x^i}{i!}$ dla kolejnych i tak długo, dopóki oczekiwany błąd nie przekroczy danej granicy (użyto wartości $\epsilon = 10^{-12}$). Warto zauważyć, ze wartość $\frac{x^i}{i!}$ nie jest liczona w każdej iteracji, lecz używana jest wartość z poprzedniej iteracji wedle wzoru:

$$it(i, x) = \frac{x^i}{i!} \tag{12}$$
$$it(1, x) = x \tag{13}$$
$$it(i + 1, x) = (it(i, x)/(i + 1)) * x \tag{14}$$

Z kolei metoda Ψ najpierw oblicza m i u, a następnie wywołuje metodę $\Phi(u)$. Uzyskany wynik jest równy

$$\Psi(m * \ln 2 + u) = 2^m * \Phi(u) \tag{15}$$

Sam program jest poniekąd interaktywny: po włączeniu oczekuje na jedno z poleceń: "s", "m", "b" lub "e". Po otrzymaniu odpowiedniego polecenia wypisuje na standardowe wyjście wyniki obliczeń funkcji Φ, Ψ i *exp* dla argumentów z przedziału (odpowiednio dla argumentów "s", "m", "b") $[-2, 2]$ z krokiem 0.05, $[-10, 10]$ z krokiem 0.25 i $[-600, 600]$ i krok 10. Z kolei dla argumentu "e" losuje 80 liczb z przedziału $[-600, 600]$, dla każdej z nich wywołuje metody Φ, Ψ i *exp* 1000 razy, mierzy czas wykonania i wyniki zapisuje w plikach "datar.dat" i "datan.dat". Oba pliki są praktycznie identyczne, lecz "datar.dat" zawiera dane sformatowane w postaci tabelki LaTeX'a.

1.3.3. Szacowanie bledu

Założeniem jest stwierdzenie, że funkcja wbudowana *exp* oblicza e^x z błędem na poziomie błędu arytmetyki. Wobec tego błąd Φ i Ψ można oszacować poprzez porównanie ich wyników z wynikiem *exp*.

Warto zauważyć, ze z równań 14 i 15 można oszacować błąd wyniku powstały przez błędy arytmetyki. Niech $i_{min}(x) := \frac{x^{i_{min}(x)}}{i_{min}(x)!} < \epsilon$.

Wówczas:

$$|\Phi(x)| \lessapprox |exp(x) * (1+\zeta)^{i_{min}(x)}| \tag{16}$$

gdzie $(1+\zeta) = (1+\eta) * (1+\theta)/(1-\iota)$ (oznaczenia z Tabeli 2)

η	błąd bezwzględny mnozenia
θ	błąd bezwzględny dzielenia
ι	błąd bezwzględny dodawania

Tabela 2: Oznaczenia błędów

Z kolei

$$|\Psi(m \ln 2 + u)| \lessapprox |exp(m \ln 2 + u) * (1+\eta) * (1+\zeta)^{i_{min}(u)} \tag{17}$$

Wynika stad, ze błąd Φ jest tym większy od błędu Ψ, im większe jest $i_{min}(x)$ od $i_{min}(u)$. Zauważmy jednak, ze takie oszacowania nie biorą pod uwagę błędu liczenia wartości m i u.

2. Wyniki doświadczenia

2.1. Legenda

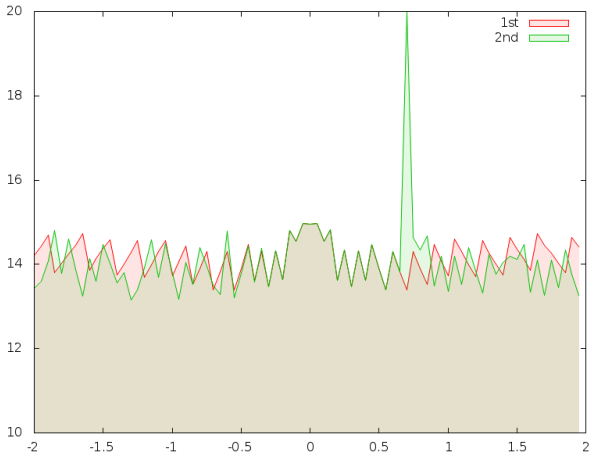
Oznaczenie	Kolor linii	Metoda
1st	Czerwony	Φ
2nd	Zielony	Ψ

Tabela 3: Legenda do wykresów

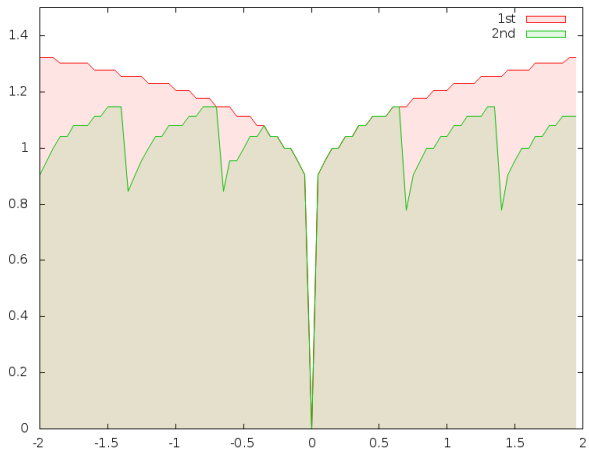
Wszystkie wykresy są w skali logarytmicznej. Innymi słowy, wykresy dokładności podają ilość zgodnych cyfr dziesiętnych, a iteracji rzad czasu.

2.2. Obserwacje

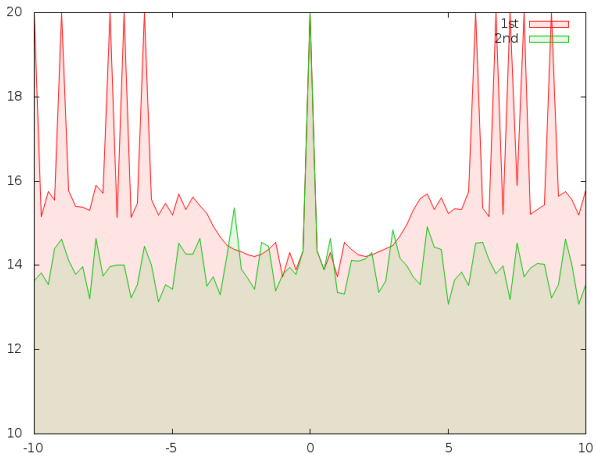
Jak zostało wcześniej wspomniane, zakładamy ze metoda *exp* (jako wbudowana) zwraca wynik z błędem na poziomie błędu arytmetyki. Dzięki temu dokładność pozostałych metod można oszacować przez porównanie ich wyników z wynikiem *exp*. Wykresy 1 i 2 nie oferują żadnych zaskakujących obserwacji. Całkowicie zgadzają się one z wnioskami wyciągniętymi z analizy wzorów. Metoda Ψ wydaje się lepsza od Φ zarówno pod względem błędu jak i ilości iteracji. Obserwacje z wykresów 3 i 4 powoli przestają przystawać do przewidywań. O ile faktycznie ilość iteracji wykonywanych przez Ψ jest mniejsza od Φ, to porównanie błędów jest korzystne dla Φ, zupełnie inaczej niż wynikało z analizy. Wykresy 5 i 6 potwierdzają "dziwną" obserwacje: metoda Ψ liczy e^x z większym błędem niz Φ. Zyskuje jednak na wymaganej ilości iteracji: wykonuje ich nawet 100x mniej.



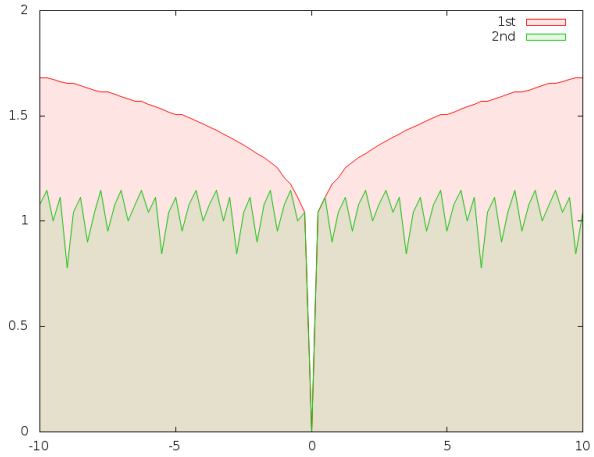
Rysunek 1: Dokładność metod testowanych dla małych liczb



Rysunek 2: Ilość iteracji dla małych liczb



Rysunek 3: Dokładność metod testowanych dla średnich liczb



Rysunek 4: Ilość iteracji dla średnich liczb

2.3. Podsumowanie

Wniosek jest oczywisty: metoda Ψ poświecą cześć dokładności metody Φ na rzecz o wiele krótszego czasu wykonania. Czemu jednak tak się dzieje? Aby to wytłumaczyć, należy cofnąć się do analizy błędów, która wykonaliśmy przed rozpoczęciem obliczeń (1.3.3). Zauważyliśmy tam, ze nie bierzemy pod uwagę błędu obliczania m i u, a przyjmujemy je za dane. Przyjrzyjmy się wiec dokładnie, jak są liczone. Używa się w tym celu wielkości pomocniczych:

$$z := \frac{x}{\ln 2} \tag{18}$$

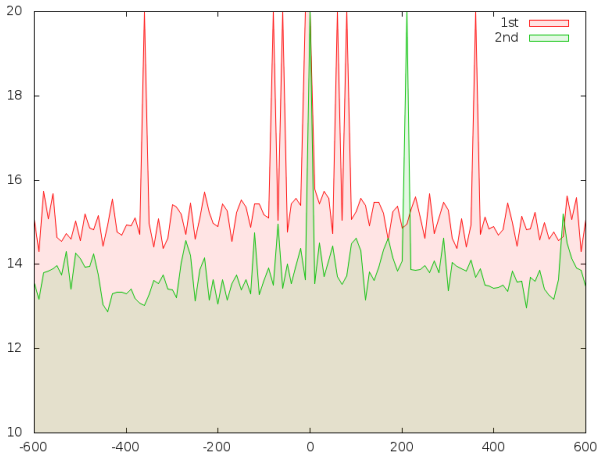
$$m := \lfloor z + sgn(x)\frac{1}{2} \rfloor \tag{19}$$

$$w := z - m \tag{20}$$

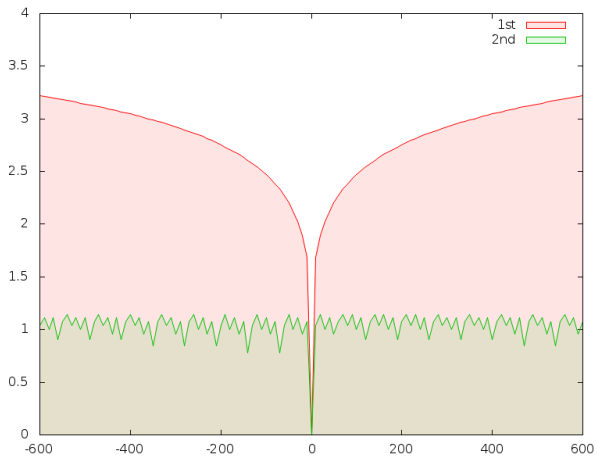
$$u := w \ln 2 \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Zauważmy, ze $|z-m| < \frac{1}{2}$. W szczególności: gdy $z \to m$, to w (a co za tym idzie u) może być obliczone z dużym błędem. Tak wiec końcowy wynik, $2^m * \Phi(u)$ może być obarczone błędem powstającym właśnie przez odejmowanie bliskich sobie liczb. Takie porównanie pozostawia jednak kilka pytań. Czy



Rysunek 5: Dokładność metod testowanych dla dużych liczb



Rysunek 6: Ilość iteracji dla dużych liczb

ilość iteracji wykonywanych przez metody ma tak duże znaczenie, by strata kilku miejsc zerowych dokładności przez metodę Ψ w porównaniu do Φ dawała widoczne korzyści? Jak w porównaniu do nich wypada funkcja wbudowana *exp*? Jak mogla ona zostać zaimplementowana?

3. Czas obliczeń

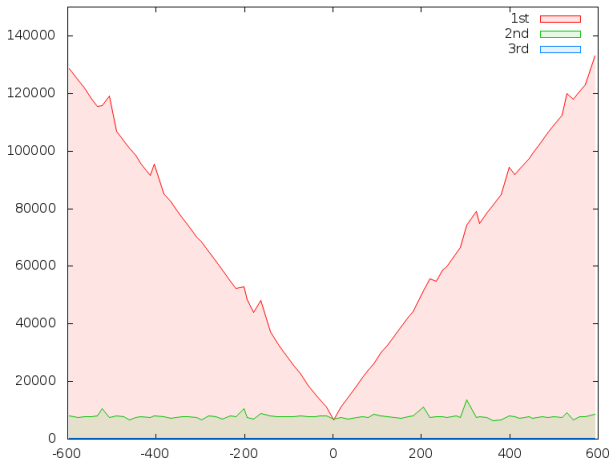
3.1. Porównanie

Aby odpowiedzieć na powstałe pytania, porównałem faktyczny czas upływający od wywołania metody do otrzymania wyniku. Przedstawię tutaj wynikające z tego wnioski.

n	$T(\Phi, n)$	$T(\Psi, n)$	$T(exp, n)$
-562.23	131747	8480	145
-413.1	105884	7881	150
-119.78	47158	14338	156
-104.42	70746	32075	160
-89.31	50313	16304	163
-14.58	21303	12849	157
2.29	12340	12241	160
18.73	18104	13845	166
34.21	22619	14636	154
80.37	37677	13666	155
287.81	73165	11215	167
473.95	112880	12216	249
592.5	138690	11868	161

Tabela 4: Wybrane przykłady z Tabeli 6 (zawartej w dodatku A)

Tabela 1 objaśnia oznaczenia



Rysunek 7: Czas obliczania funkcji - wykres

3.2. Legenda

Wyniki w tabeli 4 zostały podane w milisekundach i przedstawiają czas obliczeń 1000 wywołań odpowiednich funkcji. Porównanie to zostało wykonane na komputerze dysponującym 1GB RAM i procesorem 1,6GHz. Oznaczenia przyjęte na wykresie 7:

Oznaczenie	Kolor linii	Metoda
1st	Czerwony	Φ
2nd	Zielony	Ψ
3rd	Niebieski	*exp*

Tabela 5: Legenda do wykresu 7

3.3. Komentarze

Obserwacje z tabeli 4 potwierdzają, ze ilość wykonywanych iteracji ma znaczący wpływ na czas obliczeń. Co więcej, metoda Φ była widocznie wolniejsza od metody Ψ. Oznacza to, ze używanej metody obliczania e^x trzeba by dobierać do konkretnego zastosowania: gdy zależy nam na prędkości (np przy liczeniu nietrywialnej funkcji wymagającej wielokrotnego policzenia e^x) lepiej byłoby użyć metody Ψ, jednak oznaczałoby to stratę dokładności. Gdy zależałoby na dokładności, lepsza okazałaby się metoda Φ. Jednak z tabeli wynika coś jeszcze: metoda *exp* bije obie metody zaimplementowane dla celów tej pracowni zarówno pod względem prędkości (i to znacząco, dla dowolnego argumentu była 100x szybsza), jak i dokładności (bo założyliśmy, ze zwraca wyniki na poziomie błędu arytmetyki). Co ciekawe, funkcja ta wydaje się mieć prawie stały czas działania (nie rośnie on dla argumentów dalszych od 0, podobnie jak Ψ). Należałoby jednak upewnić się jeszcze, czy na pewno metoda *exp* jest tak dokładna, jak zakładamy. Jest to trudne, gdyż wymagałoby porównania z zewnętrznym źródłem (np z wynikami zwracanymi przez serwis Wolfram Alpha), bo nie wiadomo, czy *exp* nie jest zaimplementowano bezpośrednio na komendach procesora i wobec tego wspólna dla wielu jeżyków programowania. Można by też użyć systemu typu Maple wykonującego obliczenia symbolicznie, jednak jest to praktycznie temat na osobną pracownię.

4. Zakończenie

4.1. Ogólne podsumowanie metod

Głównym wnioskiem płynącym z porównania metod Φ i Ψ jest stwierdzenie, że obie należy stosować w rożnych przypadkach. Φ - gdy zależy na dokładności, a Ψ - na szybkości. Jednak obie są o wiele gorsze od *exp*, wiec albo opiera się ona na zupełnie innym pomyśle, albo omija narzut spowodowany przez język programowania i jest bezpośrednio zaimplementowana w komendach procesora. Najprawdopodobniej mamy do czynienia z połączeniem obu tych podejść. Niestety weryfikacja tego jest trudna, gdyż nie udało się dotrzeć do miejsca w którym *exp* jest bezpośrednio zaimplementowana w bibliotece $< cmath >$, gdyż każde definicja funkcji odwołuje się do kolejnej (zwykle ukrytej w innej bibliotece lub wbudowanej), bez praktycznie jakichkolwiek przekształceń.

4.2. Inne pomysły

Prowadzi to do rozważań: jak inaczej można obliczać funkcję e^x? Jednym z podejść mogłoby być ulepszenie funkcji Ψ przez stablicowanie dość gęsto wartości e^x obliczonych z dużą dokładnością dla argumentów $[-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2}]$, a następnie liczenie m w sposób pozwalający uniknąć utraty cyfr dokładnych. Innym przybliżenie e^x przez pewien wielomian (w zakresie arytmetyki 64-bitowej) i liczenie jego wartości.

A. Pełna tabela porównań czasów obliczania e^x przez omawiane funkcje

n	$T(\Phi, n)$	$T(\Psi, n)$	$T(exp, n)$
-596.17	148180	12506	200
-576.14	137177	10745	158
-562.23	131747	8480	145
-545.85	133589	9229	145
-532.07	142841	10216	146
-521.65	124822	7451	146
-506.14	122918	7014	145
-490.08	118993	8238	146
-473.51	115704	8036	145
-460.79	113860	6908	146
-446.38	115571	8103	146
-434.73	107977	8089	148
-413.1	105884	7881	150
-404.41	98907	7851	146
-382.37	96263	9228	146
-365.74	89563	7296	146
-354.6	89970	10837	162
-340.74	87522	7464	145
-328.28	83809	8646	177
-307.64	78310	7969	146
-297.89	81706	7212	145
-281.32	74355	7701	379
-264.33	75064	12189	167
-250.71	67190	7114	180
-232.18	64807	11163	146
-219.7	56287	8170	153
-201.38	58624	7854	146
-193.77	51570	9015	158
-179.33	52793	9110	147
-163.65	52109	13024	165
-140.71	58414	12993	162
-126.98	49596	12846	168
-119.78	47158	14338	156
-104.42	70746	32075	160
-89.31	50313	16304	163
-73.33	46463	13700	159
-56.07	39545	16506	162
-40.44	28807	16155	162
-29.89	26124	21917	162
-14.58	21303	12849	157
2.29	12340	12241	160
18.73	18104	13845	166
34.21	22619	14636	154
54.19	29470	16317	173
67.84	39643	15080	165
80.37	37677	13666	155
91.98	39696	13499	159
108.24	48243	15110	159

n	$T(\Phi, n)$	$T(\Psi, n)$	$T(exp, n)$
123.15	46979	14359	158
138.7	51271	13978	160
154.13	56626	13351	155
170.26	60691	14501	155
180.91	61728	14751	157
204.8	78896	16940	159
219.56	82391	16479	162
233.73	76855	8102	146
248.62	67957	7550	145
256.7	63042	11322	155
279.96	72897	10338	146
287.81	73165	11215	167
303.05	77112	11944	146
324.25	79607	7197	154
330.84	83817	7186	157
348.27	85332	7936	146
363.36	88990	10888	165
380.05	98772	9236	159
398.46	99692	7561	145
412.29	100074	10498	146
423.13	102765	7733	155
443.57	103733	8243	167
451.24	110008	8520	146
473.95	112880	12216	249
485.82	115843	9207	157
500.45	117960	12699	155
518.14	129029	9128	145
528.67	125099	7433	151
544.34	132195	6737	147
558.64	130792	8351	145
570.43	131566	8301	167
592.5	138690	11868	161

Tabela 6: Czas obliczeń dla funkcji testowanych i wbudowanej
Tabela 1 zawiera oznaczenia.