6 CÍRCULOS E ESFERAS

6.1 EQUAÇÕES CANÔNICAS DE CÍRCULOS E ESFERAS

Um círculo é o conjunto de pontos no plano que estão a uma certa distância r de um ponto dado (a, b).

Desta forma temos que um ponto (x, y) pertence ao círculo de centro (a, b) e raio r se e somente se satisfaz a equação:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

ou equivalentemente:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

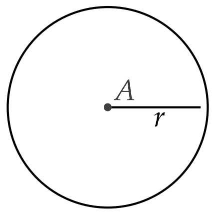


Figure 6.1: Círculo de centro A e raio r.

De modo análogo, a equação reduzida de uma esfera de centro (a, b, c) e raio r é

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

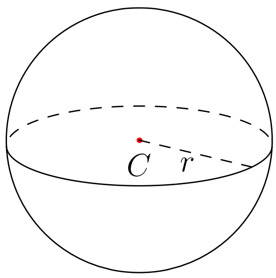


Figure 6.2: Esfera de Centro C e raio r.

Exemplo 6.1 Determine a equação do círculo de centro $(-3, 1)$ que é tangente a reta

$3x - 4y - 2 = 0$

Solução: Já conhecemos o centro e precisamos determinar o raio. Nesse caso o raio é a distância entre a reta e o ponto, já que a tangente a um círculo é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência. Logo:

$$r = \frac{|3(-3) - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

e assim a equação do círculo é:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9 \text{ ou } x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

$\square$

Exemplo 6.2 Determine a equação da esfera cujo diâmetro é o segmento que liga $(3, -1, 2)$ a $(5, 3, 4)$.

Solução: Nesse caso aparentemente não conhecemos nem o centro nem o raio. Mas temos que o centro é o ponto médio do segmento e que o raio é metade do diâmetro. Logo:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{6}$$

O ponto médio é $(4, 1, 3)$ e logo a equação da esfera é:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 6$$

$\square$

Exemplo 6.3 Identifique a curva cuja equação é:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

Solução: Identificaremos a curva completando quadrados. O termo $x^2 - 6x$ pode ser convertido num quadrado, se somarmos 9 e $y^2 - 4y$ pode ser convertido num quadrado somando 4. Desta forma, somaremos $4 + 9$ em cada lado da equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$. Logo temos:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \tag{6.1}$$
$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12 + 4 + 9 \tag{6.2}$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \tag{6.3}$$

Logo a curva é um círculo de raio 5 e centro $(3, 2)$. $\square$

Podemos generalizar o exemplo anterior:

Exemplo 6.4 Identifique a curva cuja equação é:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Solução: Como no exemplo anterior, identificaremos a curva completando quadrados. O termo $x^2 + Ax$ pode ser convertido num quadrado, se somarmos $\frac{A^2}{4}$ e $y^2 + By$ pode ser convertido num quadrado somando $\frac{B^2}{4}$. Desta forma, somaremos $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$ em cada lado da equação:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{6.4}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \tag{6.5}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \tag{6.6}$$

Observamos que para a equação anterior ser a equação de um circulo, $r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$, e assim temos que ter $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$.

No caso em que $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$, o lugar geométrico descrito pela equação 6.6 é vazio, pois a equação não pode ser satisfeita pois a soma de quadrados é necessariamente negativa.

No caso em que $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = 0$, o lugar geométrico descrito pela equação 6.6 é o ponto $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, pois se a soma de quadrados perfeitos é 0 cada termo da soma é zero.
□

De modo análogo, podemos demonstrar que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

descreve uma esfera se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D > 0$, um ponto se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D = 0$ e o conjunto vazio se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D < 0$.

Exemplo 6.5 A superfície cuja equação é:

$$12 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 8z + z^2 = 0$$

é uma esfera. Encontre seu centro e raio.

Solução: Completando os quadrados temos

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 8z + 16) - 1 - 4 - 16 + 12 = 0.$$

Daí segue que:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 9$$

E logo o centro dessa esfera é $(1, -2, -4)$ e o raio é 3. □

6.1.1 Círculo por três pontos

É conhecido que três pontos não colineares determinam um único círculo. Assim sendo, fixados P_1, P_2 e P_3 não colineares podemos facilmente encontrar a equação do círculo que passa por tais pontos. Tal equação pode ser encontrada observando que a equação geral de um círculo é da forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

e que um ponto pertence ao círculo se e somente se suas coordenadas satisfazem tal equação. A substituição de cada ponto resulta assim numa equação linear nas variáveis A, B, C e assim o fato dos três pontos pertencerem ao círculo nos fornecem um sistema linear em três equações e três variáveis A, B, C. Resolvendo tal sistema encontramos, então, a equação do círculo.

Exemplo 6.6 Determine a equação do círculo que passa pelos pontos $(-1, 2)$, $(0, 1)$ e

$(-3, 2)$.

Solução: Substituindo os pontos na equação

temos o sistema:

$$\begin{cases} 5 - A + 2B + C = 0 \\ 1 + B + C = 0 \\ 13 - 3A + 2B + C \end{cases}$$

cujas solução é $A = 4, B = 0, C = -1$. E logo a equação é

$$x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0.$$

Completando quadrado obtemos, então:

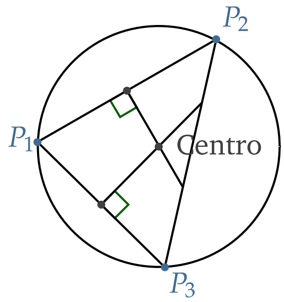
$$(x^2 + 4x + 4) + y^2 - 4 - 1 = 0.$$

Donde segue:

$$(x+2)^2 + y^2 = 5.$$

Desse modo vemos que o círculo que passa por tais pontos tem centro $(-2,0)$ e raio $\sqrt{5}$. □

É possível encontrar a equação de um círculo por três pontos não colineares de uma outra maneira. Para esse fim consideramos o triângulo determinado pelos pontos P_1, P_2, P_3 e esse circunscrito na circunferência. Assim o seu centro é o circuncentro desse triângulo, isto é, o encontro das mediatrizes.



Exemplo 6.7 Determine a equação do círculo que passa pelos pontos $(-1,2)$, $(0,1)$ e $(-3,2)$.

Solução: A equação da reta passando pelos pontos $(-1,2)$, $(0,1)$ é $y-1=-x$, e como o ponto médio desses pontos é: $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ temos que a mediatriz relativa a esse lado é: $y-\frac{3}{2} = x+\frac{1}{2}$ (lembrando que como a mediatriz é perpendicular ao lado seu coeficiente angular é igual a menos o inverso do coeficiente da reta).

De modo análogo a equação da reta passando pelos pontos $(0,1)$ e $(-3,2)$ é $y = -\frac{x}{3}+1$ e a equação da mediatriz é: $3x = -6+y$

temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x = -6+y \\ y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

cujas solução é $x=-2, y=0$, ou seja o centro da circunferência é $(-2,0)$. O raio pode ser calculado observando que este será a distância do centro $(-2,0)$ a um dos vértices do triângulo, por exemplo $(0,1)$. Assim $r^2 = 5$, e logo a equação é:

$$(x+2)^2 + y^2 = 5.$$

□

Exemplo 6.8 Obtenha a equação da esfera que passa pelos pontos $(0,0,1),(2,0,0),(1,1,1),(0,1,0)$

Solução: Impondo que os pontos pertençam a esfera temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}
&1 + C + D = 0\\
&4 + 2A + D = 0\\
&3 + A + B + C + D = 0\\
&1 + B + D = 0
\end{aligned}$$

cuja solução é $A = -\frac{5}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{1}{3}, D = -\frac{2}{3}$ e assim a equação da esfera é:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Completando quadrado obtemos:

$$\left(x^2 - \frac{5x}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) + \left(y^2 - \frac{y}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) +$$
$$+ \left(z^2 - \frac{z}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{24}{36} = 0.$$

Donde segue:

$$\left(x^2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{51}{36}.$$

□

Exercícios

Ex. 1.1 — Determine a equação dos seguintes círculos:

a) Centro $(-2,5)$ e raio $r = 3$.

b) Centro $(1,3)$ e raio $r = 2$

c) Centro a origem e raio $r = a$

d) Centro $(5,2)$ e passando pelo ponto $(2,3)$

e) Tangente ao eixo y na origem e raio a

f) Diâmetro $(5,2)$ a $(-2,10)$

g) Centro $(3,-2)$ tangente a $2x - y = 0$

h) Tangente a $2x - 5y + 1 = 0$ no ponto $(2,1)$ e raio 3 (duas respostas)

Ex. 1.2 — Identifique, dando o centro e o raio.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$

c) $x^2 + y^2 = 2ax$

d) $4x^2 - 4x = 5y - 4y^2$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$

Ex. 1.3 — Encontre a equação do círculo que passa pelos pontos $(4, 0)$, $(0, 3)$ e a origem.

Ex. 1.4 — Encontre a equação dos seguintes círculos

a) Tangente aos eixos coordenados coordenados no segundo quadrante e com raio $r = 4$.

b) Tangente ao eixo x, ao eixo y e a linha que intercepta o eixo x e o eixo y em 3 e 2 respectivamente.

Ex. 1.5 — Verifique que as equações abaixo descrevem esferas, em caso afirmativo identifique o centro e o raio:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$

b) $x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 14z + 58$

c) $x^2 + y^2 - 6y + z^2 + 4z + 16$

d) $x^2 + 2x + y^2 + 4y - z^2 + 6z - 29$

Ex. 1.6 — Dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ então a equação da esfera que tem P_1P_2 como diâmetro é

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

6.2 RETAS TANGENTES E PLANOS TANGENTES

Uma reta é dita tangente a um círculo se a intersecção entre essa reta e o círculo for somente um ponto. Para uma reta tangente o seu vetor diretor é perpendicular ao vetor ligando o raio ao ponto de intersecção. Além disso a distância do centro do círculo a reta tangente é igual ao raio do círculo.

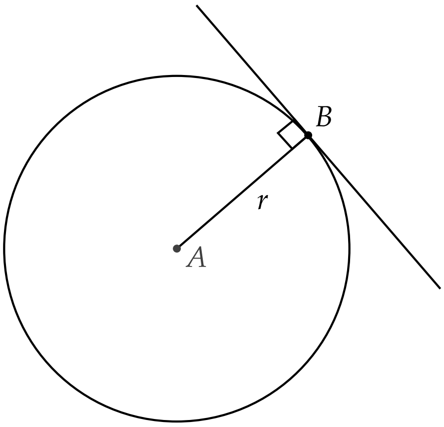


Figure 6.3: Reta tangente a um círculo

De modo análogo, dizemos que um plano é tangente a uma esfera se esse plano interceptar a esfera num único ponto. Nesse caso o vetor normal ao plano é paralelo ao vetor radial ligando o centro da esfera ao ponto onde o plano intercepta a esfera. E a distância do plano tangente ao centro da esfera é igual ao raio da mesma.

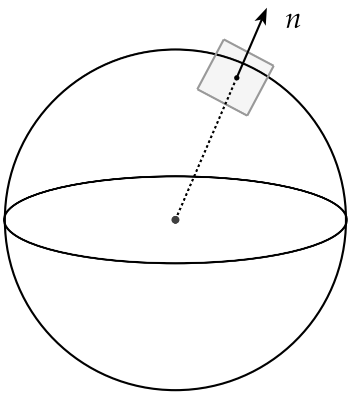


Figure 6.4: Plano tangente a uma esfera

Exemplo 6.9 Encontre a reta tangente ao círculo de equação $x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$ no ponto $(3, 3)$

Solução: Completando quadrados podemos colocar a equação $x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$ na forma reduzida:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

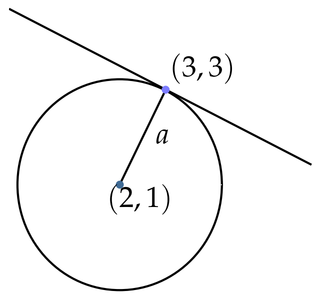
Logo o centro do círculo tem coordenadas $(2, 1)$. Logo, o vetor ligando o centro do círculo ao ponto $(3, 3)$ é $\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ e assim o coeficiente angular da reta passando por estes pontos é igual a 2. Logo, o coeficiente da reta tangente é $-\frac{1}{2}$ (Por quê? Tente escrever a equação da reta tangente na forma padrão obtendo antes equações paramétricas para a mesma.). E assim a equação da reta tangente é:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-3)$$

ou

$$x + 2y = 9.$$

□



Podemos generalizar o exemplo anterior. Dado um círculo de equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Vamos calcular a equação da reta tangente no ponto (x_1, y_1).

Para tanto, consideraremos o vetor ligando o centro do círculo ao ponto de tangencia: $(x_1 - a)\mathbf{i} + (y_1 - b)\mathbf{j}$. Consequentemente a inclinação da reta passando por esses pontos é: $\frac{y_1 - b}{x_1 - a}$ Logo o coeficiente angular da reta tangente é $-\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$. E assim a equação da reta tangente é da forma

$$(y - y_1) = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x + x_1)$$

e logo

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

e assim expandindo:

$$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = k$$

para alguma constante k. Somando $(x_1 - a)(-a) + (y_1 - b)(-b)$ em ambos os lados da equação obtemos:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = k_2$$

para alguma constante k_2, que determinaremos agora. Se substituirmos $x = x_1$ e $y = y_1$ teremos que

$$k_2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

e assim a equação da reta tangente no ponto (x_1, y_1) é

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2.$$

Exemplo 6.10 Obtenha as equações dos planos tangentes a esfera $-3 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 2z + z^2 = 0$ que são paralelos ao plano $x - 2y + 2z = 3$.

Solução: Completando quadrados temos que a equação da esfera pode ser escrita como:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Logo o centro dessa esfera é $(1, -2, -1)$ e o raio é 3.

A equação geral de um plano paralelo a $x - 2y + 2z = 3$ tem equação da forma: $x - 2y + 2z = d$

Como esse plano é tangente a esfera a distância do centro dessas esferas ao plano é igual ao raio dessa esfera. E assim:

$$d(C, \pi) = \frac{|1 - 2(-2) + 2(-1) - d|}{9} = 3$$

e logo $d = -6$ ou $d = 12$ e assim as equações dos planos são $x - 2y + 2z = -6$ e $x - 2y + 2z = 12$.

□

Exercícios

Ex. 2.1 — Encontre a equação a reta tangente no ponto indicado:

a) $x^2 + y^2 = 25$, $(-3, 4)$

b) $x^2 + y^2 = 2x - 4y$, origem.

c) Encontre as retas tangentes ao circulo $x^2 + y^2 = 4x$ que passam pelo ponto $(3, 2)$.

d) Uma corda da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ se encontra sobre a reta cuja equação é $x - 7y + 25 = 0$. Qual o comprimento dessa corda?

Ex. 2.2 — Para um triângulo qualquer encontrar:

a) a equação da circunferência circunscrita ao triângulo

b) a equação da circunferência inscrita ao triângulo

c) a equação da circunferência que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo.

Ex. 2.3 — As equações dos lados de um triângulo são $9x + 2y + 13 = 0, 3x + 8y - 47 = 0$ e $x - y - 1 = 0$. Encontrar a equação da circunferência circunscrita.

Ex. 2.4 — Mostrar que as tangentes de inclinação m à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ são $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$.

Ex. 2.5 — Qual a equação da circûnferencia que passa pelos pontos $(1, 2)$, $(3, 4)$ e que tem centro sobre o eixo y?

Ex. 2.6 — Fixado a, quais devem ser os dois valores de b para que a reta $y = ax + b$ seja tangente ao círculo de centro na origem e raio r?

Ex. 2.7 — Uma circunferência de raio 5 é tangente a reta $3x - 4y - 1 = 0$ no ponto $(3, 2)$. Determinar sua equação (duas soluções).

Ex. 2.8 — Mostrar analiticamente que qualquer reta que passa pelo ponto $(-1, 5)$ não pode ser tangente a circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interprete o resultado geometricamente.

Ex. 2.9 — Encontre a equação dos círculos que passam pelos seguintes conjuntos de pontos. Diga qual o centro, o raio e desenhe.

a) $(3, 4)$, $(-1, 2)$, $(-2, 4)$

b) $(4, 2)$, $(-2, 3)$, $(-1, 6)$

c) $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$

Ex. 2.10 — Mostrar que o plano tangente à esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ no ponto (a,b,c) tem equação $ax+by+cz=r^2$

Ex. 2.11 — Encontre a equação da esfera que passa pelos pontos $(0,0,1)$,$(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e cujo centro esta no plano $x+y-z=0$

Ex. 2.12 — Encontre a esfera que tem centro na reta

$$r:\begin{cases} x=2z-3 \\ y=z-1 \end{cases}$$

e passa pelos pontos $(6,-1,3)$ e $(0,7,5)$

Ex. 2.13 — Calcule a distância do ponto $(2,3,4)$ à esfera $x^2+4x+y^2-2y+z^2+4$.

Ex. 2.14 — Determine a equação da esfera cujo centro é $(3,2,-2)$ é que é tangente ao plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

Ex. 2.15 — Determine a equação da esfera cujo centro se encontra sobre o eixo X e que passa pelos pontos $(3,-4,2)$ e $(6,2,-1)$.

Ex. 2.16 — A equação de uma esfera é $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$. Determinar a equação da esfera concêntrica que é tangente ao plano:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Ex. 2.17 — Encontre os planos tangentes a esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ que são paralelos ao plano $4x-y+3z=2$

Ex. 2.18 — Encontre a equação dos planos que contem a reta r e são tangentes a esfera S:

$$r : \frac{x+6}{2} = y + 3 = z + 1$$

e $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0$.

6.3 CIRCUNFERÊNCIA EM COORDENADAS POLARES

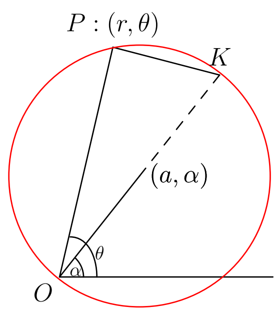
CENTRADA NA ORIGEM O caso mais simples ocorre quando a circunferência está centrada na origem nesse caso a circunferência é o conjunto de pontos que distam uma constante a da origem ou seja a equação em coordenadas polares é

$$r = a.$$

É fácil de ver que essa equação coincide com a em equação em coordenadas cartesianas. Observe que, em coordenadas cartesianas, $P = (x, y)$ pertence a tal círculo se e somente se: $x = a\cos\theta$ e $y = a \operatorname{sen}\theta$. Daí segue que:

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = a^2.$$

PASSANDO PELA ORIGEM Dada uma circunferência de raio a e passando pela origem. As coordenadas polares do centro dessa circunferência são (a, α).



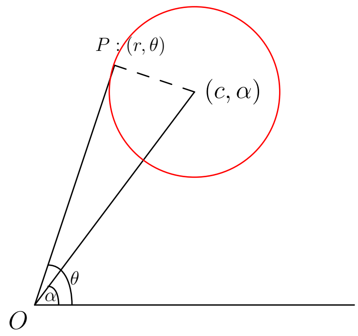
Considere o triângulo ΔOKP. Como $\overline{OK}$ é diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo vemos que ΔOKP é retângulo em P. Da definição de cosseno segue então:

$$r = 2a\cos(\theta - \alpha).$$

FORMA GERAL Dado uma circunferência de centro (c, α) e raio a, usando a lei dos cossenos temos que:

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos(\theta - \alpha)$$

que é a equação da circunferência na forma geral.



Exercícios

Ex. 3.1 — Mostre que o centro do círculo de equação $r = A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta$ é

$$\left(\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}, \operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right)$$

Ex. 3.2 — Mostre que a reta $r\,\mathrm{sen}\,\theta = 4$ é tangente ao círculo $r = 8\cos\theta$

Ex. 3.3 — Mostre que a equação da tangente ao círculo

$$r = 2a\cos\theta$$

no ponto (r_1, θ_1) é:

$$r\cos(\theta - 2\theta_1) = 2a\cos^2\theta_1$$

Ex. 3.4 — Mostre que para todos os valores de a a reta

$$r\cos(\theta - \alpha) = a + r_1\cos\alpha$$

é tangente ao círculo

$$r^2 - 2rr_1\cos\theta + r_1^2 - a^2 = 0$$