Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 03

Link zu diesen Folien

Umfragerückmeldungen

Allgemein

1. Arbeiten mit dem Skript
2. Invarianzbegriff
3. Veranschaulichung komplexerer Relationen
4. Beweistechniken, insbesondere am Beispiel von
   1. Hausaufgabe I-3.1 Äqu.-Relationen und Partitionen
   2. Hausaufgabe I-3.3 (Ur-)Bilder von Funktionen/Relationen

Wochenspezifisch

1. Partitionen
2. Extremalkonzepte

Wochenüberblick

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen in Digraph-Darstellung

Äquivalenzrelation

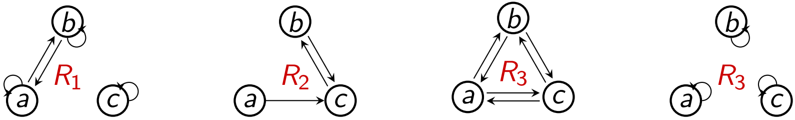
reflexiv, transitiv, symmetrisch

(Totale) Ordnungsrelation

reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, (total)

Äquivalenzrelationen

Gegeben sei die dreielementige Menge $\{a, b, c\}$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?



1. R_1 ist eine Äquivalenzrelation.
2. R_2 ist eine Äquivalenzrelation.
3. R_3 ist eine Äquivalenzrelation.
4. R_4 ist eine Äquivalenzrelation.

https://partici.fi/06765060

Äquivalenzrelationen und Partitionen

Definition 5.24

Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
$\mathcal{A}$ heißt eine **Partition** von X, wenn:

1. Für alle $x \in X$ gibt es eine Menge $A \in \mathcal{A}$, die x enthält.
2. Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ sind A und B entweder gleich oder disjunkt.
3. $\emptyset \notin \mathcal{A}$.

Satz 5.25

1. Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

   $\mathcal{A} := \left\{ [x] \,\middle|\, x \in X \right\}$ ist eine Partition von X.

2. Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine Partition von X. Dann gibt es genau eine Äquivalenzrel. $\sim$ mit $\mathcal{A} = \left\{ [x] \,\middle|\, x \in X \right\}$.

Äquivalenzrelationen an Beispiel 5.20

Kongruenzrelation modulo $m > 1$ in Z

$\mathbb{Z} \,/\, m\mathbb{Z} := \{[z]_{\sim m} \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1] \ldots [m-1]\} =$
$\{\{0 + m\mathbb{Z}\}, \{1 + m\mathbb{Z}\} \ldots \{m - 1 + m\mathbb{Z}\}\}$

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

Definition 5.26

Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

1. Eine Aussageform P auf X heißt **invariant** unter $\sim$, wenn $x \sim y$ impliziert, dass $P(x)$ und $P(y)$ denselben Wahrheitswert haben.

Kombinationen von Eigenschaften

Welche Relationen sind Äquivalenz- und Ordnungsrelationen gleichzeitig?

Welche Äquivalenzrelationen sind total?

Äquivalenz-/Ordnungsrelationen und Hüllenbildung

Äquivalenzrelationen und Hüllenbildung

Ordnungsrelationen und Hüllenbildung

Ordnungsrelationen

Für welche Aussageform P ist

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid P(x, y)\}$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^2$.

https://partici.fi/06765060

1. $P(x, y) := x_1 \leqslant y_1$
2. $P(x, y) := x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2$
3. $P(x, y) := x_1 \leqslant y_2 \wedge x_2 \leqslant y_1$
4. $P(x, y) := 3|y_1 - x_1| = |y_2 - x_2|$

Strenge Ordnungsrelationen und die Rolle der Antisymmetrie

Definition 5.9

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.

R heißt ...	wenn gilt:
reflexiv:	$(x, x) \in R$ für alle $x \in X$
irreflexiv:	$(x, x) \notin R$ für alle $x \in X$
symmetrisch:	$(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R$
antisymmetrisch:	$(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y$

Strenge Ordnungsrelation

irreflexiv, transitiv, antisymmetrisch

Wiederholung Extremalkonzepte

Extremalkonzepte

Es sei $(X, \leqslant)$ eine nichtleere, teilgeordnete Menge und $A \subseteq X$. Welche der folgenden Aussagen über Extremalpunkte von A gilt in $(X, \leqslant)$?

https://partici.fi/06765060

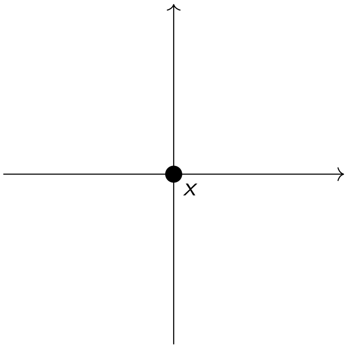
1. Jedes Maximum ist ein maximales Element.
2. Jedes maximale Element ist ein Maximum.
3. Ist $\leqslant$ total, dann existiert ein Supremum.
4. Wenn das Minimum mit dem Maximum übereinstimmt, dann hat A genau ein Element.

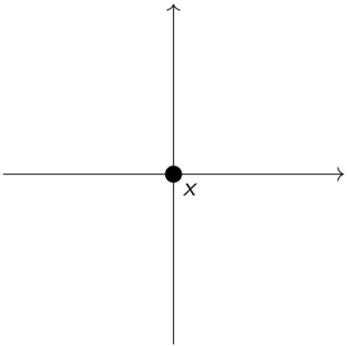
Vergleichbarkeit bzgl. verschiedener Ordnungsrelationen

Wie sehen die Mengen $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid xR_iy\}$ und $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid yR_ix\}$ bzgl.

$$R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 \leqslant y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$
$$R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$

für ein festes $x \in \mathbb{R}^2$ aus?





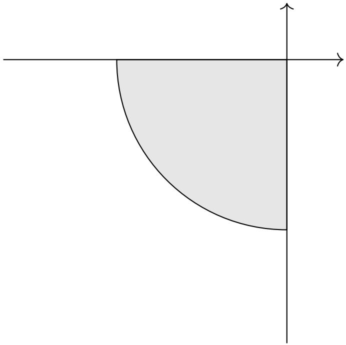
Extremalkonzepte im $\mathbb{R}^2$

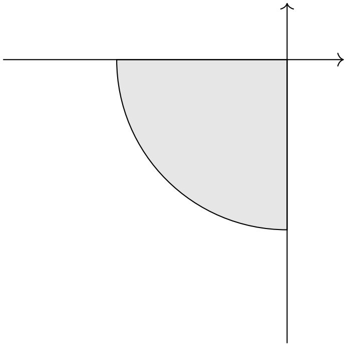
Bestimmen Sie Inf/Sup, Min/Max und min/max Elemente der Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\} \text{ für}$$

$$R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 \leqslant y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$

$$R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\}$$





Geeignete Beweistechniken anhand der Aussage identifizieren

Allgemein

Zu einer Aussage einen (den „einfachsten“?) Beweis zu finden, ist ein kreativer Prozess, der sich schlecht allgemein zusammenfassen lässt.

Aber:

- Eine Äquivalenz
- Viele Äquivalenzen
- Mengengleichheiten
- Aussageformen auf einer abzählbar unendlichen Menge
- Existenzaussagen
- Eindeutigkeitsaussagen
- ...

Beweisaufgaben 1 - Kontextverständnis

Hausaufgabe I-3.3

Es seien $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Mengen. Zeigen Sie:

(i) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ (ii) $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$

- Wie stehen Teilaufgaben zueinander in Beziehung?
- Welche Definitionen werden in der Aussage verwendet?
- Sind mir alle Definitionen klar und habe ich Intuition?
- Kann ich das Ergebnis zusammenfassen?
- Lässt sich die Aussage visualisieren?

Beweisaufgaben 2 - Beweisführung

Hausaufgabe I-3.3

Es seien $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Mengen. Zeigen Sie:

(i) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ (ii) $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$

Beweis.

Hausaufgabe I-3.3

Es seien $f: X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Mengen. Zeigen Sie:

(i) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ (ii) $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$

- Warum gilt in (ii) „$=$“ und nicht nur „$\supseteq$“?
- Gilt in (i) für manche Funktionen auch „$=$“ und nicht nur „$\supseteq$“?
- Was passiert, wenn ich statt Funktionen allgemeinere Relationen untersuche? (Siehe auch Hausaufgabe I-3.3 **??**)

Hausaufgabe I-3.1

Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine Partition von X. Zeigen Sie Satz 5.25(*ii*) des Skripts, also dass es dann eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation R auf X gibt, sodass $\mathcal{A}$ genau aus den Äquivalenzklassen von R besteht.

Beweis.