Lineare Algebra I

Woche 07

25.11.2025 und 27.11.2025

§ 9 Ringe

Ring

Definition 9.1

Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.
3. Es gelten die **Distributivgesetze**

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\
(a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c)
\end{aligned}
$$

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt **kommutativ**, wenn $(R, \cdot)$ kommutativ ist.

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt ein **Ring mit Eins**, wenn $(R, \cdot)$ ein Monoid ist.

Ring

Beispiel 9.2

1. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ und $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind kommutative Ringe mit Eins.

   $(\mathbb{Z},+)$

   $(\mathbb{Z},\cdot)$

2. „Der“ **Nullring** ist der eindeutig bestimmte Ring mit nur einem Element, $R = \{0_R\}$.

   $$0_R + 0_R =$$
   $$0_R \cdot 0_R =$$

Ring

Beispiel 9.2

3. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.

   $(m\mathbb{Z}, +)$

   $(m\mathbb{Z}, \cdot)$

4. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ ein kommutativer Ring mit dem Einselement 1, der **Ring von $\mathbb{Z}$ modulo m**.

   $(\mathbb{Z}_m, +_m)$

   $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$

Beispiel 9.2

5. Ist X eine Menge und $(R, +, \cdot)$ ein Ring, dann ist auch $(R^X, +, \cdot)$ ein Ring.

   Das Nullelement in $(R^X, +, \cdot)$ ist die **Nullfunktion** $x \mapsto 0_R$.

   Besitzt R das Einselement 1_R, dann ist die **Einsfunktion** $x \mapsto 1_R$ das Einselement von $(R^X, +, \cdot)$.

   Ist $(R, +, \cdot)$ kommutativ, dann ist auch $(R^X, +, \cdot)$ kommutativ.

Beispiel 9.2

6. Der **Endomorphismenring** $(\operatorname{End}(G), +, \circ)$ einer abelschen Gruppe $(G, +)$ ist

$$\operatorname{End}(G) \coloneqq \{f\colon G \to G \mid f \text{ ist Endomorphismus}\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon \operatorname{End}(G) \times \operatorname{End}(G) &\to \operatorname{End}(G) \quad \text{mit } (f, g) \mapsto f + g \\ \circ\colon \operatorname{End}(G) \times \operatorname{End}(G) &\to \operatorname{End}(G) \quad \text{mit } (f, g) \mapsto f \circ g \end{aligned}$$

$(\operatorname{End}(G), +, \circ)$ ist ein Ring mit dem Einselement id_G.

$(\operatorname{End}(G), +, \circ)$ ist i. A. nicht kommutativ.

Ring

Beispiel 9.2

7. Ist X eine Menge, dann ist $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ein kommutativer Ring mit dem Einselement X.

   $(\mathcal{P}(X), \triangle)$

   $(\mathcal{P}(X), \cap)$

8. $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cup)$ ist jedoch kein Ring, da das Distributivgesetz nicht gilt.

   $(\mathcal{P}(X), \triangle)$

   $(\mathcal{P}(X), \cup)$

Rechenregeln in Ringen

Lemma 9.3

1. $0_R \cdot a = 0_R = a \cdot 0_R$
2. $a \cdot (-b) = -a \cdot b = (-a) \cdot b$

Beweis.

Rechenregeln in Ringen

Lemma 9.3

3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

4. Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1_R, aber nicht der Nullring, dann gilt $1_R \neq 0_R$.

Beweis.

Charakteristik eines Ringes

Definition 9.4

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1_R.

Wenn $n\,1_R = 0_R$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann heißt

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid n\,1_R = 0_R\}$$

die **Chakteristik** von R, kurz $\operatorname{char}(R)$.
Andernfalls setzen wir $\operatorname{char}(R) = 0$.

Beispiel 9.5

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ haben die Charakteristik
2. Der Nullring ist der einzige Ring mit Charakteristik
3. $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ hat die Charakteristik

Beispiel 9.6

Die Faktormenge $\mathbb{Z} \,/\, m\,\mathbb{Z}$ bildet mit den Verknüpfungen

$$[a] \mathbin{\widetilde{+}} [b] = [a + b]$$
$$[a] \mathbin{\widetilde{\cdot}} [b] = [a \cdot b]$$

den **Restklassenring modulo** m, kurz: $(\mathbb{Z} \,/\, m\,\mathbb{Z}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$.

$(\mathbb{Z} \,/\, m\,\mathbb{Z}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$.

Im Fall $m = 1$ ist $(\mathbb{Z} \,/\, m\,\mathbb{Z}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ ein Nullring.

Restklassenring modulo 4

Beispiel 9.6

$\tilde{+}$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$
$[1]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$
$[2]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$
$[3]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$

$\tilde{\cdot}$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$
$[1]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$
$[2]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$
$[3]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$	$[\ ]$

Nullteiler, Integritätsring

Definition 9.7

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

1. $a \in R$ heißt **Linksnullteiler**, wenn es $b \neq 0_R$ gibt mit $a \cdot b = 0_R$.

2. $b \in R$ heißt **Rechtsnullteiler**, wenn es $a \neq 0_R$ gibt mit $a \cdot b = 0_R$.

3. $(R, +, \cdot)$ heißt **nullteilerfrei**, wenn es außer 0_R keine weiteren Links- oder Rechtsnullteiler gibt, wenn also gilt:

4. Ist $(R, +, \cdot)$
   - ein kommutativer Ring mit Eins
   - nullteilerfrei
   - und ungleich dem Nullring

   dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein **Integritätsring** oder **Integritätsbereich**.

Integritätsring

Beispiel 9.9

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Integritätsringe.

2. Es sei X eine Menge und $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins.

   Dann ist $R^X = \{f \mid f \colon X \to R\}$ mit den punktweisen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein kommutativer Ring mit Eins.

   Es sei R nicht der Nullring, und X habe mindestens zwei Elemente. Dann ist $(R^X, +, \cdot)$ nicht nullteilerfrei!

Restklassenring modulo m

Satz 9.11

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

1. $(\mathbb{Z} \,/\, m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ ist ein Integritätsring.
2. m ist eine Primzahl.

Unterring

Definition 9.12

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

1. Eine bzgl. $+$ und $\cdot$ abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq R$ heißt ein **Unterring** von $(R, +, \cdot)$, wenn $(U, +, \cdot)$ selbst wieder ein Ring ist.
2. Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1_R, dann fordern wir für einen **Unterring mit Eins** $(U, +, \cdot)$ zusätzlich, dass $1_R \in U$ liegt.
3. Ein Unterring $(U, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt**, wenn $U \subsetneq R$ gilt.

Unterringkriterium

Satz 9.13

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $U \subseteq R$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, +, \cdot)$ ist ein Unterring von $(R, +, \cdot)$.
2. $U \neq \emptyset$, und für alle $a, b \in U$ gilt $a - b \in U$ und $a \cdot b \in U$.

Unterring

Beispiel 9.14

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Unterring mit Eins von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
   $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Unterring mit Eins von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
   $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Unterring mit Eins von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

2. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Unterring von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
   Im Fall $m \neq 1$ handelt es sich nicht um einen Unterring mit Eins.

3. Der Nullring $\{0_R\}$ und R selbst sind Unterringe in jedem Ring $(R, +, \cdot)$.

Beispiel 9.14

4. Ist X eine Menge und $Y \subseteq X$, dann ist $(\mathcal{P}(Y), \triangle, \cap)$ ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$.

   Im Fall $Y \subsetneq X$ handelt es sich nicht um einen Unterring mit Eins.

5. Das **Zentrum**

$$Z \coloneqq \{z \in R \,|\, a \cdot z = z \cdot a \text{ für alle } a \in R\}$$

   eines Ringes $(R, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Unterring.

   Wenn R ein Ring mit Eins ist, dann ist Z ein Unterring mit Eins.

Homomorphismus von Ringen

Definition 9.17

Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Ringe.

Eine Abbildung $f\colon R_1 \to R_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus** von $(R_1, +_1, \cdot_1)$ in $(R_2, +_2, \cdot_2)$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(a +_1 b) &= f(a) +_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1 \\ f(a \cdot_1 b) &= f(a) \cdot_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1 \end{aligned}$$

Besitzen beide Ringe ein Einselement 1_{R_1} bzw. 1_{R_2}, so wird für einen **Homomorphismus von Ringen mit Eins** zusätzlich $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ gefordert.

Komposition/Inverse von Homo-/Isomorphismen

Satz 9.18

Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ und $(R_3, +_3, \cdot_3)$ drei Ringe.

1. Sind $f \colon R_1 \to R_2$ und $g \colon R_2 \to R_3$ Ringhomomorphismen, dann ist auch $g \circ f \colon R_1 \to R_3$ ein Ringhomomorphismus.
2. Ist $f \colon R_1 \to R_2$ ein Ringisomorphismus, dann ist auch $f^{-1} \colon R_2 \to R_1$ ein Ringisomorphismus.

Folgerung 9.19

Isomorphie von Ringen ist eine Äquivalenzrelation.

Bild und Kern eines Ringhomomorphismus

Definition 9.21

Es sei $f\colon (R_1, +_1, \cdot_1) \to (R_2, +_2, \cdot_2)$ ein Ringhomomorphismus.

Das **Bild** und der **Kern** von f sind definiert als

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild}(f) &:= \{f(a_1) \in R_2 \mid a_1 \in R_1\} = f(R_1)\\ \operatorname{Kern}(f) &:= \{a_1 \in R_1 \mid f(a_1) = 0_{R_2}\} = f^{-1}(\{0_{R_2}\})\end{aligned}$$

Lemma 9.22

$\operatorname{Bild}(f)$ ist ein Unterring von $(R_2, +_2, \cdot_2)$.
$\operatorname{Kern}(f)$ ist ein Unterring von $(R_1, +_1, \cdot_1)$.

Beispiel 9.23

1. Die Abbildung

$$f\colon (\mathbb{Z}, +, \cdot) \ni a \mapsto 2\,a = 2 \cdot a \in (\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

ist kein Endomorphismus von Ringen.

Homomorphismus von Ringen

Beispiel 9.23

2. Für $m \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$f : (\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m) \ni a \mapsto [a] = a + m\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$$

ein Isomorphismus zwischen dem Ring $\mathbb{Z}$ modulo m und dem Restklassenring modulo m, beides kommutative Ringe mit Eins.

$$\begin{array}{lccccc}
\text{in } (\mathbb{Z} / 5\,\mathbb{Z}, \tilde{+}) & [-21] & \tilde{+} & [9] & = & [-12] \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{in } (\mathbb{Z}_5, +_5) & 4 & +_5 & 4 & = & 3 \\
\text{in } (\mathbb{Z} / 5\,\mathbb{Z}, \tilde{\cdot}) & [-21] & \tilde{\cdot} & [9] & = & [-189] \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{in } (\mathbb{Z}_5, \cdot_5) & 4 & \cdot_5 & 4 & = & 1
\end{array}$$

Beispiel 9.23

3. Für Mengen X und $Y \subseteq X$ ist die Abbildung

$$f\colon (\mathcal{P}(X), \triangle, \cap) \ni A \mapsto A \cap Y \in (\mathcal{P}(Y), \triangle, \cap)$$

ein Homomorphismus von Ringen mit Eins.

Beispiel 9.23

4. Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring, X, Y Mengen und $\varphi\colon Y \to X$.

   φ induziert einen Ringhomomorphismus

   $$\varphi^*\colon (R^X, +, \cdot) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in (R^Y, +, \cdot),$$

   genannt der **Pullback** φ^* von φ.

Injektivität eines Ringhomomorphismus

Lemma 9.24

Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe mit den Nullelementen 0_{R_1} bzw. 0_{R_2}. Für einen Homomorphismus $f\colon R_1 \to R_2$ sind äquivalent:

1. f ist injektiv.
2. $\operatorname{Kern}(f) = \{0_{R_1}\}$.
3. Die einzige Lösung der Gleichung $f(a) = 0_{R_2}$ ist $a = 0_{R_1}$.

§ 9.1 Ideale und Faktorringe

Ideal

Ideale sind bestimmte Unterringe, die dieselbe Funktion einnehmen wie Normalteiler in Gruppen.

Definition 9.25

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

1. Eine Teilmenge $J \subseteq R$ heißt ein **Ideal** von $(R, +, \cdot)$, wenn J ein Unterring von R ist und zusätzlich gilt:

$$R \cdot J \subseteq J \quad \text{und} \quad J \cdot R \subseteq J$$

2. Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt**, wenn $J \subsetneq R$ gilt.

Kerne von Ringhomomorphismen sind Ideale

Lemma 9.27

Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe und $f\colon R_1 \to R_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

1. Die Elemente von R_1, die denselben Funktionswert wie $a \in R_1$ haben, sind genau die Elemente der additiven Nebenklasse von $\operatorname{Kern}(f)$ zu a:

$$f^{-1}(\{f(a)\}) = a +_1 \operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Kern}(f) +_1 a.$$

2. $\operatorname{Kern}(f)$ ist ein Ideal von R_1.

Ideal

Beispiel 9.29

1. In jedem Ring $(R, +, \cdot)$ sind die trivialen Unterringe $\{0\}$ (das **Nullideal**) und R (das **Einsideal**) Ideale.

2. Die Mengen der Form $m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$ sind genau die Ideale des Ringes $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

3. Ist X eine Menge und $Y \subseteq X$, dann ist $(\mathcal{P}(Y), \triangle, \cap)$ ein Ideal von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$.

Faktorring bzgl. eines Ideals

Satz 9.30

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und J ein Ideal. Dann gilt:

1. Die Faktormenge $R \,/\, J = \big\{[a] = a + J \,\big|\, a \in R\big\}$ mit

$$[a] \mathbin{\tilde{+}} [b] := [a + b] \quad \text{für } a, b \in R$$
$$[a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b] := [a \cdot b] \quad \text{für } a, b \in R$$

   ist ein Ring, genannt der **Faktorring von R nach J**. Das Nullelement ist $[0_R] = J$. Für die additiven Inversen gilt $\tilde{-}[a] = [-a]$.

2. Die **kanonische Surjektion** von R auf $R \,/\, J$

$$\pi \colon R \ni a \mapsto [a] \in R \,/\, J$$

   ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Es gilt $\operatorname{Kern}(\pi) = J$.

3. Wenn R ein kommutativer Ring ist, dann auch $R \,/\, J$.

Faktorring bzgl. eines Ideals

Satz 9.30

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann gilt:

4. Ist U irgendein Unterring und ist die Verknüpfung $\tilde{\cdot}$ auf der Menge der Nebenklassen $R \,/\, U$ wohldefiniert, dann ist U notwendigerweise ein Ideal von R.

Faktorring

Beispiel 9.32

1. Für $m \in \mathbb{N}$ ist der Faktorring $\mathbb{Z} \,/\, m\mathbb{Z}$ des Ringes $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nach dem Ideal $m\mathbb{Z}$ der Restklassenring modulo m (Beispiel 9.6).

   Dieser ist isomorph zu $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$, dem Ring von $\mathbb{Z}$ modulo m (Beispiel 9.23).

2. Ist X eine Menge und $Y \subseteq X$, dann ist der Faktorring $\mathcal{P}(X) \,/\, \mathcal{P}(Y)$ isomorph zum Ring $(\mathcal{P}(X \setminus Y), \triangle, \cap)$.

erzeugtes Ideal und Hauptideal

Definition 9.35

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $E \subseteq R$.

1. Dann heißt
$$(E) := \bigcap \big\{ J \,\big|\, J \text{ ist Ideal von } R \text{ und } E \subseteq J \big\}$$
das von E **erzeugte Ideal** in R.

2. Ist speziell $E = \{a\}$ für ein $a \in R$, so schreiben wir auch (a) statt $(\{a\})$ und nennen (a) das **von a erzeugte Hauptideal**.

3. Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ heißt ein **Hauptideal**, wenn es ein $a \in R$ gibt, sodass gilt: $(a) = J$.

Darstellung des erzeugten Ideals

Satz 9.36

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; \begin{pmatrix} a_i \in E \cup -E \cup R\,E \\ \cup\, E\,R \cup R\,E\,R \end{pmatrix} \right\}$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; \begin{pmatrix} a_i \in \{a\} \cup \{-a\} \cup R\,a \\ \cup\, a\,R \cup R\,a\,R \end{pmatrix} \right\}$$

Diese Darstellungen können vereinfacht werden, wenn R ein Einselement besitzt oder kommutativ ist.

Beispiel 9.37

1. Der **Kommutator** der Elemente a, b eines Ringes $(R, +, \cdot)$ ist definiert als
$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a.$$
Das **Kommutatorideal** eines Ringes $(R, +, \cdot)$ ist das von Kommutatoren von R erzeugte Ideal, also
$$K := \big(\big\{[a, b] \,\big|\, a, b \in R\big\}\big).$$
Ist $(R, +, \cdot)$ ein beliebiger Ring und K sein Kommutatorideal, dann ist der Faktorring $(R \,/\, K, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ kommutativ.
Tatsächlich ist $(R \,/\, J, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ genau dann kommutativ, wenn das ausfaktorisierte Ideal J das Kommutatorideal von R enthält.

§ 9.2 Der Homomorphiesatz für Ringe

Homomorphiesatz für Ringe

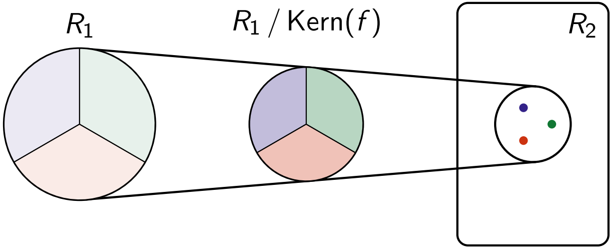
Satz 9.38

Es sei $f\colon (R_1, +_1, \cdot_1) \to (R_2, +_2, \cdot_2)$ ein Ringhomomorphismus.

Dann ist

$$\begin{aligned} I\colon R_1 \,/\, \mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ a + \mathrm{Kern}(f) = [a] &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

ein Ringisomorphismus.



§ 10 Körper

Definition 10.1

Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Es gelten die **Distributivgesetze**

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Körper

Beispiel 10.2

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper.
2. $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ist ein kleinstmöglicher Körper.
3. Der Restklassenring $(\mathbb{Z} \,/\, 4\,\mathbb{Z}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ mit dem Nullelement $[0]$ und dem Einselement $[1]$ ist kein Körper.

Funktionen mit Werten in einem Körper

Beispiel 10.2

Es sei X eine Menge.

1. Ist $(H, +)$ eine Halbgruppe, dann ist auch $(H^X, +)$ Halbgruppe.
2. Ist $(M, +)$ ein Monoid, dann ist auch $(M^X, +)$ ein Monoid.
3. Ist $(G, +)$ eine Gruppe, dann ist auch $(G^X, +)$ eine Gruppe.
4. Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring, dann ist auch $(R^X, +, \cdot)$ ein Ring.
5. Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann ist $(K^X, +, \cdot)$

Satz 10.3

1. Jeder Körper $(K, +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.
   (kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins ungleich dem Nullring)

2. Jeder endliche Integritätsring $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Folgerung 10.4

Der Restklassenring $(\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ modulo m ist ein Körper genau dann, wenn $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist (Satz 9.11).

Dasselbe gilt für den zu $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ isomorphen Ring von $\mathbb{Z}$ modulo m $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$.

In diesem Fall nennen wir diese auch **Restklassenkörper modulo** m bzw. **Körper von** $\mathbb{Z}$ **modulo** m.

Charakteristik eines Ringes

Bemerkung 10.5

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit Einselement 1_K.

Wenn $n\,1_K = 0_K$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann heißt

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid n\,1_K = 0_K\}$$

die **Chakteristik** von K, kurz $\operatorname{char}(K)$.
Andernfalls setzen wir $\operatorname{char}(K) = 0$.

Beispiel

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ haben die Charakteristik 0.
2. Für $m \in \mathbb{N}$ prim hat der Körper $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ die Charakteristik m.

Unterkörper

Definition 10.6

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

1. Eine bzgl. $+$ und $\cdot$ abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq K$ heißt ein **Unterkörper** von $(K, +, \cdot)$, wenn $(U, +, \cdot)$ selbst wieder ein Körper ist.
2. Ein Unterkörper $(U, +, \cdot)$ von $(K, +, \cdot)$ heißt **echt**, wenn $U \subsetneq K$ gilt.

Lemma 7.43: Das Nullelement 0_K von K ist auch das Nullelement von U. Das Einselement 1_K von K ist auch das Einselement von U.

Unterkörperkriterium

Satz 10.7

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $U \subseteq K$.

Dann sind äquivalent:

1. $(U, +, \cdot)$ ist ein Unterkörper von $(K, +, \cdot)$.
2. U besitzt mindestens zwei Elemente, und für alle $a, b \in U$ gilt $a - b \in U$ sowie $a \cdot b^{-1} \in U$, sofenr $b \neq 0_K$ ist.

Beispiel 10.8

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Unterkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
   $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Unterkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
2. Der Restklassenkörper $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ (mit $m \in \mathbb{N}$ prim) und der zu ihm isomorphe Körper $\mathbb{Z}_m$ besitzen keine echten Unterkörper.

Homomorphismus von Körpern

Definition 10.11

Es seien $(K_1, +_1, \cdot_1)$ und $(K_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Körper.

Eine Abbildung $f\colon K_1 \to K_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus** von $(K_1, +_1, \cdot_1)$ in $(K_2, +_2, \cdot_2)$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(a +_1 b) &= f(a) +_2 f(b) \quad && \text{für alle } a, b \in K_1 \\ f(a \cdot_1 b) &= f(a) \cdot_2 f(b) && \text{für alle } a, b \in K_1 \\ f(1_{K_1}) &= 1_{K_2} \end{aligned}$$

Körperhomomorphismen sind injektiv

Lemma 10.14

Es sei $f\colon (K_1, +_1, \cdot_1) \to (K_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körperhomomorphismus.

Dann ist f injektiv.

Beweis.

Körperhomomorphismen

Beispiel 10.15

1. Die Einbettungen

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \ni x \mapsto x \in (\mathbb{R}, +, \cdot)$$
$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \ni x \mapsto x \in (\mathbb{C}, +, \cdot)$$

   sind Körperhomomorphismen.

2. Die Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ besitzen außer der Identität keine weiteren Körperautomorphismen.

3. Die komplexe Konjugation $(\mathbb{C}, +, \cdot) \ni x \mapsto \overline{x} \in (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körperautomorphismus.

4. Realteil $(\mathbb{C}, +, \cdot) \ni x \mapsto \operatorname{Re} x \in (\mathbb{R}, +, \cdot)$ und Imaginärteil $(\mathbb{C}, +, \cdot) \ni x \mapsto \operatorname{Im} x \in (\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind keine Körperhomomorphismen

Bild und Kern eines Körperhomomorphismus

Definition 10.17

Es sei $f\colon (K_1, +_1, \cdot_1) \to (K_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körperhomomorphismus.

Das **Bild** und der **Kern** von f sind definiert als

$$\operatorname{Bild}(f) := \{f(a_1) \in K_2 \mid a_1 \in K_1\} = f(K_1)$$
$$\operatorname{Kern}(f) := \{a_1 \in K_1 \mid f(a_1) = 0_{K_2}\} = f^{-1}(\{0_{K_2}\})$$

$\operatorname{Bild}(f)$ ist ein Unterkörper von $(K_2, +_2, \cdot_2)$.
$\operatorname{Kern}(f)$ ist kein Unterkörper von $(K_1, +_1, \cdot_1)$, denn

Ausfaktorisieren bei Körpern?

Gruppe modulo Normalteiler	$G\,/\,N$	Faktorgruppe
Ring modulo Ideal	$R\,/\,J$	Faktorring
Körper modulo Ideal ?	$K\,/\,J$	Faktorkörper ?

Würden wir für einen Körper K und einen Unterkörper U versuchen, auf der Faktormenge $K\,/\,U$ die Verknüpfungen

$$[a] \mathbin{\tilde{+}} [b] = [a+b] \quad \text{und} \quad [a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b] = [a \cdot b]$$

einzuführen, um wieder eine Körperstruktur zu bekommen, dann könnten wir K auch als Ring betrachten und würden mit den obigen Verknüpfungen auf $K\,/\,U$ auch eine Ringstruktur bekommen. Nach Satz 9.30 ist dafür aber notwendigerweise U ein Ideal des Ringes K. In einem Körper gibt es jedoch nur die beiden trivialen Ideale

$$U_1 = \{0_K\}$$
$$U_2 = K$$

geordneter Körper

Definition 10.19

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit dem Nullelement 0_K und $\leqslant$ eine Totalordnung auf K.

1. Der Körper heißt **geordnet** bzgl. der Totalordnung $\leqslant$, wenn

$$\alpha \leqslant \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

$$\alpha \geqslant 0_K \text{ und } \beta \geqslant 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \geqslant 0_K$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt.

Definition 10.19

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit dem Nullelement 0_K und $\leqslant$ eine Totalordnung auf K.

2. $\alpha \in K$ heißt **nichtnegativ**, wenn $\alpha \geqslant 0_K$ ist.
3. $\alpha \in K$ heißt **positiv**, wenn $\alpha \geqslant 0_K$ und $\alpha \neq 0_K$ ist.
4. $\alpha \in K$ heißt **nichtpositiv**, wenn $\alpha \leqslant 0_K$ ist.
5. $\alpha \in K$ heißt **negativ**, wenn $\alpha \leqslant 0_K$ und $\alpha \neq 0_K$ ist.

Rechenregeln in geordneten Körpern

Lemma 10.20

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.
Dann gilt für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$:

1. $\alpha \geqslant 0_K \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leqslant 0_K$
2. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$
3. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \geqslant 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \gamma$
4. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma \geqslant \beta \cdot \gamma$
5. $\alpha^2 \geqslant 0_K$
6. $\alpha \neq 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 > 0_K$. Insbesondere gilt $1_K > 0_K$.
7. $\alpha > 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1} > 0_K$
8. $\beta > \alpha > 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1} > \beta^{-1} > 0_K$
9. $n\,1_K > 0_K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Insbesondere gilt notwendigerweise $\operatorname{char}(K) = 0_K$.

geordneter Körper

Beispiel 10.21

1. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der bekannten Totalordnung bilden einen geordneten Körper.

2. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der bekannten Totalordnung bilden einen geordneten Körper.

3. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind mit keiner Totalordnung ein geordneter Körper.