Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 04

Link zu diesen Folien

Umfragerückmeldungen

Allgemein

1. Hausaufgaben
   1. Umfang
   2. Punkteverteilung
2. Hüllen in Beweisen

Wochenspezifisch

1. Mengenmächtigkeit bei überabzählbaren Mengen
2. Familien und kartesisches Produkt
3. Auswahlaxiome
4. Halbgruppenverknüpfungen auf Potenzmengen

Wochenüberblick

Zu Gleichmächtigkeit von Mengen und Hausaufgabe I-4.2

Satz

Es seien X überabzählbar und $Y \subseteq X$ abzählbar unendlich, dann sind X und $X \setminus Y$ gleichmächtig.

Satz

Das Intervall $(-1, 1)$ ist zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig.

Satz

Keine Menge ist zu ihrer Potenzmenge gleichmächtig.

Mengen und Familien

Mengen

Familien

Auswahl und Auswahlfunktion

Was ist eigentlich eine „Auswahl“?

Eine Zuordnung eines Index i aus einer Indexmenge I zu genau einem Element einer Menge A_i aus einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen.

Hintergrund:

Was ist eigentlich eine „Auswahlfunktion“?

Eine Zuordnung aller Indizes i aus einer Indexmenge I zu jeweils genau einem Element a_i einer Menge A_i aus einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen.

Kartesische Produkte sind Mengen von Auswahlfunktionen

Definition 4.8

Für endlich viele Mengen A_i, $i = 1, \dots, n$ ist

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \,|\, a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Definition 6.42

Für eine beliebige Indexmenge I und eine Familie von Mengen $(A_i)_{i \in I}$ ist

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \left\{ F \colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \right\}$$

1. Definition 6.42 ohne Definition 4.8?

2. Für endliche I stimmt Definition 6.42 mit Definition 4.8 überein.

Die Rolle von Auswahlaxiomen

Wir wollen Elemente „wählen“ bzw. ihre Existenz nutzen.

Wie weit bringt uns Induktion/Rekursion?

Auswahlaxiome

Auswahlaxiome in Beweisen

Satz 6.46

Das Auswahlaxiom ist äquivalent zur Rechtsinvertierbarkeit surjektiver Funktionen.

Beweis.

Auswahlaxiome in Beweisen (Hausaufgabe I-4.2)

Satz

Es sei X eine überabzählbare Menge. Dann besitzt X eine abzählbar unendliche Teilmenge.

Beweis.

Die Potenznotation für kartesische Produkte

Potenznotation

Ist $A_i = A$ für alle $i \in I$, dann schreiben wir statt $\bigtimes_{i\in I} A$ auch A^I.

Beispiel 1: Was ist eigentlich $\emptyset^\emptyset$?

Beispiel 2: Was hat $\{0,1\}^X$ mit $\mathcal{P}(X)$ zu tun?

Wiederholung Halbgruppe, Unterhalbgruppe

Definition 7.3

Eine **Halbgruppe** $(H, \star)$ ist eine Menge H mit einer **assoziativen Verknüpfung** $\star$ auf H.

Definition 7.11

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe.

1. $U \subseteq H$ heißt **abgeschlossen** bzgl. $\star$, wenn $\star \colon H \times H \to H$ eingeschränkt werden kann zu $\star_U \colon U \times U \to U$.
2. Eine bzgl. $\star$ abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq H$ mit der Verknüpfung $\star_U$ heißt eine **Unterhalbgruppe von $(H, \star)$**.
3. Ist $(H, \star)$ ein Monoid mit neutralem Element e, dann heißt eine bzgl. $\star$ abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq H$, die auch das neutrale Element e enthält, ein **Untermonoid von $(H, \star)$**.

Halbgruppenerweiterung zu Monoiden

Erweiterung

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe. (Wie) können wir $(H, \star)$ zu einem Monoid erweitern?

Lemma (Schnittstabilität der Unterhalbgruppeneigenschaft)

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von UHGen von $(H, \star)$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ eine UHG von $(H, \star)$.

Beweis.

Definition (Unterhalbgruppenhülle)

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe und $E \subseteq H$. Dann ist

$$\langle E \rangle :=$$

die Unterhalbgruppenhülle von E.

(Unter-)Halbgruppen auf $(\mathcal{P}(\{a,b\}),\cap)$

Es sei $X := \{a,b\}$ zweielementig. Wir untersuchen die Halbgruppe $(\mathcal{P}(X),\cap)$, wobei

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

Welche der folgenden Mengen sind Unterhalbgruppen und was sind die dazugehörigen Unterhalbgruppenhüllen?

- $\{\emptyset\}$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$
- $\{\{a,b\}, \{a\}\}$

Wie viele Elemente muss E mindestens haben, damit $\langle E\rangle = \mathcal{P}(X)$?

(Unter-)Halbgruppen auf $(\mathcal{P}(\{a,b\}),\cup)$

Es sei $X := \{a,b\}$ zweielementig. Wir untersuchen die Halbgruppe $(\mathcal{P}(X),\cup)$, wobei

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

Welche der folgenden Mengen sind Unterhalbgruppen und was sind die dazugehörigen Unterhalbgruppenhüllen?

- $\{\emptyset\}$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$
- $\{\{a,b\}, \{a\}\}$

Wie viele Elemente muss E mindestens haben, damit $\langle E\rangle = \mathcal{P}(X)$?

(Unter-)Halbgruppen auf $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \triangle)$

Es sei $X := \{a, b\}$ zweielementig. Wir untersuchen die Halbgruppe $(\mathcal{P}(X), \triangle)$, wobei

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Welche der folgenden Mengen sind Unterhalbgruppen und was sind die dazugehörigen Unterhalbgruppenhüllen?

- $\{\emptyset\}$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{a\}\}$

Wie viele Elemente muss E mindestens haben, damit $\langle E \rangle = \mathcal{P}(X)$?