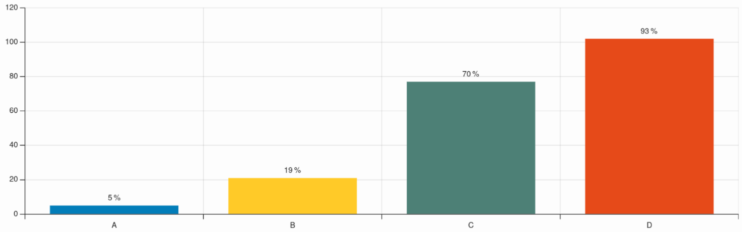
# Plenarübung Lineare Algebra I

## (Inhalts)-Woche 05

Link zu diesen Folien

# Ein gut gemeinter Vorschlag

(Wie) nutzen Sie das Skript zur Vorlesung?




**A** Ich nutze das Skript nicht.

**B** Ich nutze das Skript für die Vorbereitung der Vorlesung.

**C** Ich nutze das Skript für die Nachbereitung der Vorlesung.

**D** Ich nutze das Skript bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben.

# Umfragerückmeldungen

## Wochenspezifisch

1. Beweis Translationsgruppenkriterium (Lemma 7.25)
2. Hausaufgabe I-5.2 (Ordnung abelscher Gruppen)
3. Permutationen
   1. Signum
   2. Fehlstände
   3. Transpositionszerlegung
4. Untergruppen
   1. Erzeugte Gruppe/Untergruppenhülle
   2. Erzeugendensysteme
   3. Zyklische (Unter-)gruppen
5. Nebenklassen
6. Satz von Lagrange

# Wochenüberblick

# Gruppenkriterium mit Translationen („Sudoku-Kriterium“)

**Lemma 7.25**

1. Ist $(G, \star)$ eine Gruppe, so sind alle Rechtstranslationen $\star_a$ und alle Linkstranslation ${}_a\star$ bijektive Abbildungen $G \to G$.
2. Ist $(H, \star)$ eine Halbgruppe mit $H \neq \emptyset$ und sind alle Rechtstranslationen $\star_a$ und alle Linkstranslationen ${}_a\star$ surjektive Abbildungen, dann ist $(H, \star)$ eine Gruppe.

# Anwendung des Translationskriteriums

**Satz**

Jede Gruppe mit Ordnung 4 ist abelsch.

Beweis: Wir bezeichnen die 4 Elemente der Gruppe mit $e$, $a$, $b$ und $c$.

| $\star$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | | | |
| $b$ | $b$ | | | |
| $c$ | $c$ | | | |

| $\star$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | | | |
| $b$ | $b$ | | | |
| $c$ | $c$ | | | |

| $\star$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | | | |
| $b$ | $b$ | | | |
| $c$ | $c$ | | | |

# Kleinste algebraische Strukturen

Wieviele Elemente hat eigentlich die/das kleinste...

1. Halbgruppe
2. Monoid
3. Gruppe
4. nicht-abelsche Gruppe

# Kleinste nicht-abelsche Gruppen

**Satz**

Jede nicht abelsche Gruppe hat mindestens Ordnung

# Darstellungen von Permutationen aus $S_n$

**Definition**

Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $S(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$.
Dann heißt $(S(X), \circ)$ die **symmetrische Gruppe** auf $X$. $S_n := S(\llbracket 1, n \rrbracket)$

Zweizeilenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Tupelform:

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Zyklenform:

$$(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{l_x - 1}(x)), \ldots, (y, \sigma(y), \ldots, \sigma^{l_y - 1}(y))$$

# Wann kommutieren Transpositionen?

**Satz**

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt $\tau(a, b) \circ \tau(c, d) = \tau(c, d) \circ \tau(a, b)$ genau dann, wenn

*Beweis.*

# Kommutativität in $S_n$

## Satz

$S_n$ ist genau dann abelsch, wenn $n \in \{1, 2\}$.

# Tausch im (Ur-)Bildbereich

Welche Transpositionen modifizieren $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{1} & 3 & \color{red}{2} \end{pmatrix}$ ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

# (Un-)eindeutigkeit der Transpositionszerlegungen

Wie können wir (strukturiert) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ zerlegen?

# Bestimmen des Signums

**Möglichkeit 1:**

**Möglichkeit 2:**

**Möglichkeit 3:**

**Möglichkeit 4:**

# Wiederholung Untergruppen und Erzeugung

## Definition

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

1. $U \subseteq G$ **Untergruppe**, wenn $\cdot$-abgeschlossen und selbst Gruppe
2. $E \subseteq G$, dann ist die von $E$ **erzeugte Untergruppe**

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &:= \bigcap \left\{ U \,\middle|\, (U, \cdot) \text{ ist Untergruppe von } (G, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \right\} \\ &= \left\{ a_1 \cdot (\cdots) \cdot a_n \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \dots, n \, (a_i \in E \cup E') \right\}\end{aligned}$$

3. $E \subseteq G$ **Erzeugendensystem**, wenn $\langle E \rangle = G$
4. $a \in G$, dann ist $\langle a \rangle$ **zyklisch** erzeugte UG
5. **Ordnung** $\mathrm{ord}(a)$ ist kleinstes $n \in \mathbb{N}$, so dass $a^n = 1$ (oder $\infty$)

# Particify

Es seien $(G,\cdot)$ Gruppe, $(U,\cdot)$ Untergr., $E, F \subseteq G$, $a \in G$. Was gilt?

https://partici.fi/06765060

1. $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$
2. Für jedes $b \in \langle a \rangle$ ist $\langle b \rangle = \langle a \rangle$
3. Für $E \subseteq F$ ist $\langle E \rangle \subseteq \langle F \rangle$
4. Das größte Erzeugendensystem von $G$ ist eindeutig.
5. Ist $G$ endlich erzeugt, so ist $G$ endlich.

# Untergruppenstruktur in Verknüpfungstabellen

Es sei $(G, \cdot)$ eine (endliche) Gruppe und $(U, \cdot)$ eine Untergruppe mit $U = \{1, u_1, \ldots, u_k\}$. Wie ist die Verknüpfungstabelle strukturiert?

| $\cdot$ | $1$ | $u_1$ | $\ldots$ | $u_k$ | $a_1$ | $\ldots$ | $a_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | | | | | | | |
| $u_1$ | | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $u_k$ | | | | | | | |
| $a_1$ | | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $a_l$ | | | | | | | |

## Untergruppen der $S_3$

Siehe Vorlesungsmitschrift: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\{\sigma_0, \sigma_3\}$, $\{\sigma_0, \sigma_4\}$, $\{\sigma_0, \sigma_5\}$

| $\circ$ | $e$ | $d$ | $d^2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $d$ | $d^2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $e$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $e$ | $d$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $e$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $d^2$ | $e$ | $d$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $d$ | $d^2$ | $e$ |

# Wiederholung Nebenklassen

## Definition

Es sei $(U, \star)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$.

$a \sim^U b \;:\Leftrightarrow\; b \in a \star U$ $\qquad$ $a \,{}^U\!\!\sim b \;:\Leftrightarrow\; a \in U \star b$

$[a]_{\sim^U} = a \star U$ **Linksnebenklasse** $\qquad$ $[a]_{{}^U\!\sim} = U \star a$ **Rechtsnebenklasse**

# Nebenklassen in Verknüpfungstabellen

Es sei $(G, \cdot)$ eine (endliche) Gruppe und $(U, \cdot)$ eine Untergruppe mit $U = \{1, u_1, \ldots, u_k\}$. Wo stehen die Nebenklassen?

| $\cdot$ | $1$ | $u_1$ | $\ldots$ | $u_k$ | $a_1$ | $\ldots$ | $a_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | | | | | | | |
| $u_1$ | | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $u_k$ | | | | | | | |
| $a_1$ | | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $a_l$ | | | | | | | |

# Nebenklassen der $S_3$ in der Verknüpfungstabelle

Nebenklassen für $U = \{e, d, d^2\}$

| $\circ$ | $e$ | $d$ | $d^2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $d$ | $d^2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $e$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $e$ | $d$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $e$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $d^2$ | $e$ | $d$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $d$ | $d^2$ | $e$ |

Nebenklassen für $U = \{e, s_3\}$

| $\circ$ | $e$ | $d$ | $d^2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $d$ | $d^2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
| $d$ | $d$ | $d^2$ | $e$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $d^2$ | $d^2$ | $e$ | $d$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $e$ | $d$ | $d^2$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $d^2$ | $e$ | $d$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $d$ | $d^2$ | $e$ |

# Visualisierung zyklisch erzeugter Gruppen

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) \in \mathbb{N}$. Wie sieht $\langle a \rangle$ aus?

Wir wissen: $\langle a \rangle = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

# Particify

Es seien $(G, \cdot)$ Gruppe, $(U, \cdot)$ Untergruppe, $a, b \in G$: Was gilt?

1. $a \in [a]_{\sim U}$
2. $[a]_{\sim U}$ ist eine Untergruppe
3. $[a]_{\sim\langle a\rangle} = \langle a\rangle$
4. $[a]_{\sim\langle a\rangle} = [a]_{\langle a\rangle\sim}$

https://partici.fi/06765060