Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 02

Link zu diesen Folien

Umfragerückmeldungen

Allgemein

1. Beweisführung und Ressourcen für's „Beweisen lernen" (M. Junk, J.-H. Treude. *Beweisen lernen Schritt für Schritt: für einen gelungenen Einstieg ins Mathestudium*. Springer Berlin Heidelberg, 2020. DOI: 10.1007/978-3-662-61616-1)
2. (Nicht-)Zusammenhang Implikation und Kausalität

Wochenspezifisch

1. Reihenfolge, Position und Rolle von Quantoren
2. Wiederholung zu $\mathcal{P}(\cdot)$, Mengenoperationen und Assoziativität
3. Relationen, Komposition, Hausaufgabe I-2.3 , Hausaufgabe I-2.4
4. Hüllenbildung und Hüllendarstellung
5. Zusammenhang Transitivität/Komposition/Potenzen

Aussagen mit Quantoren aus Programmiersicht 1

Es seien X eine Menge, über die wir mit „for“ iterieren können, und $P(\cdot)$ eine Aussageform. Wie können wir den Wahrheitswert der Aussage

$$\forall x \in X \,(P(x))$$

auswerten?

Option 1:

```
statement =
for x in X:
  statement =
return statement
```

Aussagen mit Quantoren aus Programmiersicht 2

Es seien X eine Menge, über die wir mit „for“ iterieren können, und $P(\cdot)$ eine Aussageform. Wie können wir den Wahrheitswert der Aussage

$$\forall x \in X \, (P(x))$$

auswerten?

Option 2:

```
statement =
for x in X:
  if not P(x):
    statement =

return statement
```

Aussagen mit Quantoren aus Programmiersicht 3

Es seien X, Y Mengen, über die wir mit „for" iterieren können, und $P(\cdot,\cdot)$ eine Aussageform. Wie können wir den Wahrheitswert der Aussage

$$\forall x \in X\, \forall y \in Y\, (P(x,y))$$

auswerten?

Option 1:

```
statement =
for x in X:
  for y in Y:
    statement =
return statement
```

Aussagen mit Quantoren aus Programmiersicht 4

Es seien X, Y Mengen, über die wir mit „for“ iterieren können, und $P(\cdot,\cdot)$ eine Aussageform. Wie können wir den Wahrheitswert der Aussage

$$\forall x \in X\, \forall y \in Y\, (P(x,y))$$

auswerten?

Option 2:

```
statement =
for x in X:
  for y in Y:
    if not P(x,y):
      statement =

  if statement == False:

return statement
```

Aussagen mit Quantoren aus Programmiersicht 5

Es seien X eine Menge, über die wir mit „for“ iterieren können, und $P(\cdot)$ eine Aussageform. Wie können wir den Wahrheitswert der Aussage

$$\exists x \in X\,(P(x))$$

auswerten?

```
statement =
for x in X:
  statement =
return statement
```

```
antistatement =
for x in X:
  antistatement =
return not antistatement
```

Kombination mehrerer Quantoren

Satz

Es seien X, Y nichtleere Mengen, und $P(\cdot,\cdot)$, $Q(\cdot)$, $R(\cdot)$ passende Aussageformen. Weiterhin sei S eine Aussage. Dann gelten

$$\exists y \in Y \, \forall x \in X \, (P(x,y)) \Rightarrow \forall x \in X \, \exists y \in Y \, (P(x,y))$$

$$\forall x \in X \, \exists y \in Y \, (Q(x) \wedge R(y)) \Rightarrow \exists y \in Y \, \forall x \in X \, (Q(x) \wedge R(y))$$

$$(\forall x \in X \, (Q(x))) \vee (\forall x \in X \, (R(x))) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x) \vee R(x))$$

$$\forall x \in X (S \vee R(x)) \Rightarrow S \vee (\forall x \in X \, (R(x)))$$

Einschränkung der Grundmenge in Aussageformen

Satz

Es seien X eine nichtleere Menge sowie P, Q Aussageformen. Dann gilt:

$$\forall x \in \{x \in X \mid P(x)\} : Q(x)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall x \in X : P(x) \to Q(x)$$

Implikationen und Kausalität

Satz 1

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $n > 3 \Rightarrow 2 > 1$.

Satz 2

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $n > 3 \Rightarrow n + 1 > 3$.

Satz 3

$\forall n \in \mathbb{N} : n > 3 \land n < 0 \Rightarrow n + 1 > 3$

Wochenüberblick

Assoziativität von Mengenoperationen

Welche der unten stehenden Aussagen gelten für allgemeine Mengen A, B und C?

https://partici.fi/06765060

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
4. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

Wiederholung Relationen

Definition 5.1

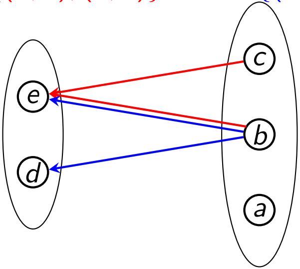
Es seien X und Y Mengen sowie $R \subseteq X \times Y$.
(R, X, Y) heißt eine **Relation** zwischen X und Y mit **Graph** R.

Im Fall $X = Y$ heißt die Relation **homogen**.

Mengenoperationen für Relationen

Es seien $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e\}$ Mengen und

$S := \{(b, e), (c, e)\}$ $R := \{(b, d), (b, e)\}$



Dann sind

1. $S \cap R =$
2. $S \cup R =$
3. $R \setminus S =$
4. $R \triangle S =$

Relationenoperationen für Relationen 1

Es seien X, Y und Z Mengen sowie (R, X, Y) und (S, Y, Z) zwei Relationen. Dann heißt

1. die Relation $(S \circ R, X, Z)$ mit

   $$S \circ R \coloneqq \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

   die **Komposition** von R und S.

2. die Relation (R^{-1}, Y, X) mit

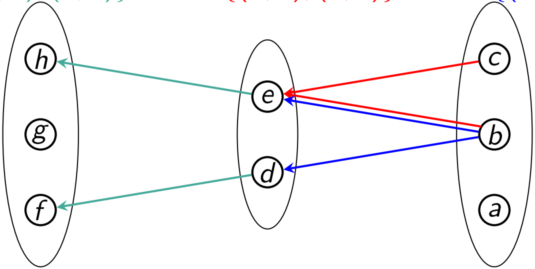
   $$R^{-1} \coloneqq \left\{(y, x) \in Y \times X \,\middle|\, (x, y) \in R\right\} \subseteq Y \times X$$

   die **Umkehrrelation** oder **inverse Relation** von R.

Relationenoperationen für Relationen 2

Es seien $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e\}$ und $Z = \{f, g, h\}$ Mengen und

$$T := \{(d, f), (e, h)\} \quad S := \{(b, e), (c, e)\} \quad R := \{(b, d), (b, e)\}$$



Dann sind

1. $T \circ R =$
2. $R^{-1} =$
3. $T \circ S \circ R^{-1} \circ S =$

Komposition mit der inversen Relation

Es seien X, Y nichtleere Mengen und (R, X, Y) eine nichtleere Relation. Welche der unten stehenden Fälle können auftreten?

https://partici.fi/06765060

1. $R^{-1} \circ R = X \times X$
2. $R^{-1} \circ R = \emptyset$
3. $R^{-1} \circ R = \Delta_X$
4. $R^{-1} \circ R = R$

Hausaufgabe I-2.3 und Beweisführung

Lemma 5.5

Es seien X, Y, Z und W Mengen sowie (R, X, Y), (R_1, X, Y), (R_2, X, Y) sowie (S, Y, Z), (S_1, Y, Z), (S_2, Y, Z) und (T, Z, W) Relationen.

1. Die Komposition ist assoziativ, d. h., es gilt

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$

Eigenschaften homogener Relationen 1

Definition 5.9

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X. R heißt...

reflexiv: $(x, x) \in R \quad$ für alle $x \in X$

irreflexiv: $(x, x) \notin R \quad$ für alle $x \in X$

symmetrisch: $(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R$

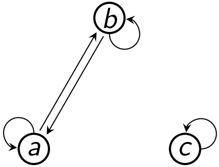
antisymmetrisch: $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y$

transitiv: $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R$

total: $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R \quad$ für alle $x, y \in X$

Eigenschaften homogener Relationen 2

Gegeben sei die dreielementige Menge $\{a, b, c\}$ und die unten stehende Relation R. Welche Aussagen gelten für R?



https://partici.fi/06765060

1. R ist reflexiv
2. R ist irreflexiv
3. R ist symmetrisch
4. R ist antisymmetrisch
5. R ist transitiv
6. R ist total

Hüllenbildung

Allgemeine Hülle aus Abschlusssystemen

Es sei X eine nichtleere Menge und $A \subseteq X$. Weiter sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der Eigenschaft, dass für jede nichtleere Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ gilt: $\bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$. Dann ist die $\mathcal{A}$-Hülle von A:

$$H_{\mathcal{A}}(A) := \bigcap \{B \in \mathcal{A} \mid A \subseteq B\}$$

Darstellung von Hüllen

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X. Wir kennen:

reflexive Hülle von R

$$R^? := \bigcap \{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}$$

symmetrische Hülle von R

$$R^{\text{sym}} := \bigcap \{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}$$

transitive Hülle von R

$$R^+ := \bigcap \{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}$$

reflexiv-transitive Hülle von R

$$R^* := \bigcap \{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv \& transitiv und } R \subseteq S\}$$

reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle von R

$$R^\sim := \bigcap \{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv, symmetrisch \& transitiv und } R \subseteq S\}$$

Darstellung der reflexiven Hülle

Per Konstruktion ist die reflexive Hülle $R^?$ der Relation R die kleinste reflexive Oberrelation von R. Sie hat folgende Darstellung:

Satz 5.17

$$R^? = \bigcup_{n \in \{0,1\}} R^n = R \cup \Delta_X$$

Beweis.

Intuition zur transitiven Hülle (Hausaufgabe I-2.4)

Satz 5.17

$$R^{+} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{n}$$

Gegeben sei $R := \{(a, b), (c, b), (d, e), (e, f), (f, a)\}$.