Lineare Algebra I

Woche 06

17.11.2025 und 18.11.2025

§ 8 Homomorphismen von Halbgruppen und Gruppen

Homomorphismen von Halbgruppen

Homomorphismen sind die **strukturverträglichen Abbildungen** zwischen algebraischen Strukturen.

Definition 8.1

Es seien $(H_1, \star)$ und $(H_2, \square)$ zwei Halbgruppen.

Eine Abbildung $f \colon H_1 \to H_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus von Halbgruppen**, wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \,\square\, f(b) \quad \text{für alle } a, b \in H_1$$

Homomorphismen von Halbgruppen

Definition 8.1

Es sei $f\colon H_1 \to H_2$ ein Homomorphismus der Halbgruppen $(H_1, \star)$ und $(H_2, \square)$.

$$\begin{tikzcd}
\text{Homomorphismus} \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, rightsquigarrow] & \text{Isomorphismus} \arrow[d, rightsquigarrow] \\
\text{Endomorphismus} \arrow[r, rightsquigarrow] & \text{Automorphismus}
\end{tikzcd}$$

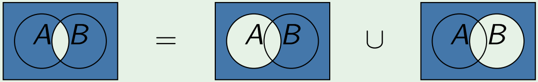
$(H_1, \star) = (H_2, \square)$	f bijektiv	Bezeichnung
		Homomorphismus
✓		**Endomorphismus**
	✓	**Isomorphismus**
✓	✓	**Automorphismus**

Homomorphismen von Halbgruppen

Beispiel

1. $f\colon (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $f(n) = 2\,n$

2. $f\colon (\mathcal{P}(X), \cap) \to (\mathcal{P}(X), \cup)$ mit $f(A) = X \setminus A$



Komposition/Inverse von Homo-/Isomorphismen

Satz 8.2

Es seien $(H_1, \star)$, $(H_2, \Box)$ und $(H_3, \bullet)$ drei Halbgruppen.

1. Sind $f\colon H_1 \to H_2$ und $g\colon H_2 \to H_3$ Halbgruppenhomomorphismen, dann ist auch $g \circ f\colon H_1 \to H_3$ ein Halbgruppenhomomorphismus.
2. Ist $f\colon H_1 \to H_2$ ein Halbgruppenisomorphismus, dann ist auch $f^{-1}\colon H_2 \to H_1$ ein Halbgruppenisomorphismus.

Beweis. Übung

Folgerung 8.3

Isomorphie von Halbgruppen ist eine Äquivalenzrelation.

Homomorphismen von Monoiden

Definition 8.4

Es seien $(H_1, \star)$ und $(H_2, \square)$ zwei Monoide.

Eine Abbildung $f\colon H_1 \to H_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus von Monoiden**, wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \,\square\, f(b) \quad \text{für alle } a, b \in H_1$$
$$f(e_1) = e_2$$

$(H_1, \star) = (H_2, \square)$	f bijektiv	Bezeichnung
		Homomorphismus
✓		**Endomorphismus**
	✓	**Isomorphismus**
✓	✓	**Automorphismus**

Definition 8.6

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei Gruppen.

Eine Abbildung $f\colon G_1 \to G_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus von Gruppen**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(a \star b) &= f(a) \,\square\, f(b) \quad \text{für alle } a, b \in G_1 \\ f(e_1) &= e_2 \end{aligned}$$

$(G_1, \star) = (G_2, \square)$	f bijektiv	Bezeichnung
		Homomorphismus
✓		**Endomorphismus**
	✓	**Isomorphismus**
✓	✓	**Automorphismus**

Lemma 8.8

Es seien $(H_1, \star)$ und $(H_2, \square)$ Monoide.
Weiter sei $f \colon H_1 \to H_2$ ein Monoidhomomorphismus.

Ist $a \in H_1$ invertierbar, dann ist auch $f(a) \in H_2$ invertierbar, und es gilt

$$f(a)' = f(a').$$

Beweis.

Beispiel 8.7

1. $f\colon (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $f(n) = 2\,n$

2. $f\colon (\mathbb{N}_0, +) \to (\mathbb{N}_0, +)$ mit $f(n) = 2\,n$

3. $f\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ mit $f(n) = 2\,n$

Beispiel 8.7

4. $f\colon (\mathcal{P}(X), \cap) \to (\mathcal{P}(X), \cup)$ mit $f(A) = X \setminus A$

5. $f\colon (\mathcal{P}(X), \cup) \to (\mathcal{P}(X), \cap)$ mit $f(A) = X \setminus A$

Beispiel 8.7

6. Es seien X eine Menge und $(Y, \star)$ eine Halbgruppe.

   Dann ist die Abbildung

   $$\Phi \colon (Y^X, \star) \ni f \mapsto f(x_0) \in (Y, \star),$$

   die eine Funktion $f \colon X \to Y$ an einer festen Stelle $x_0 \in X$ auswertet, ein Homomorphismus von Halbgruppen:

Beispiel 8.7

7. Es sei $(H, \star)$ ein Monoid und $a \in H$ invertierbar. Dann ist die **Konjugation mit a**

$$H \ni h \mapsto a \star h \star a' \in H$$

ein Endomorphismus des Monoids $(H, \star)$.

Ist $(G, \star)$ eine Gruppe, dann ist die Konjugation mit $a \in G$

$$G \ni g \mapsto a \star g \star a' \in G$$

sogar ein Gruppenautomorphismus.

Beispiel 8.7

8. Es sei $a > 0$, $a \neq 1$.
   $\log_a \colon (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$

9. $\operatorname{sgn} \colon (S_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$

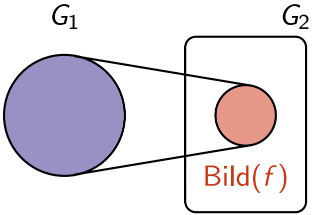
Bild eines Gruppenhomomorphismus

Definition 8.10

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Das **Bild** von f ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &:= \{f(a_1) \in G_2 \mid a_1 \in G_1\} \\ &= f(G_1) \end{aligned}$$



Lemma 8.11

$\mathrm{Bild}(f)$ ist eine Untergruppe von $(G_2, \Box)$.

Beweis.

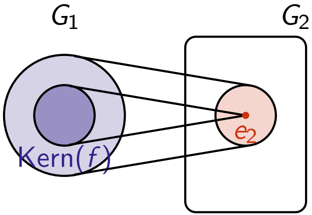
Kern eines Gruppenhomomorphismus

Definition 8.10

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Der **Kern** von f ist definiert als

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(f) &:= \{a_1 \in G_1 \mid f(a_1) = e_2\} \\ &= f^{-1}(\{e_2\}) \end{aligned}$$



Lemma 8.11

$\operatorname{Kern}(f)$ ist eine Untergruppe von $(G_1, \star)$.

Beweis.

Bild und Kern eines Gruppenhomomorphismus

Beispiel 8.12

1. $f\colon (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot) \ni x \mapsto x^2 \in (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$

2. $\operatorname{sgn}\colon (S_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$

Injektivität eines Gruppenhomomorphismus

Lemma 8.13

Es seien $(G_1, \star)$, $(G_2, \Box)$ Gruppen mit neutralen Elementen e_1 bzw. e_2. Für einen Homomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$ sind äquivalent:

1. f ist injektiv.
2. $\operatorname{Kern}(f) = \{e_1\}$.
3. Die einzige Lösung der Gleichung $f(a) = e_2$ ist $a = e_1$.

Beweis.

Eindeutigkeitssatz für Gruppenhomomorphismen

Satz 8.14

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ Gruppen. Weiter seien $f, g \colon G_1 \to G_2$ Homomorphismen, und für ein Erzeugendensystem $E \subseteq G_1$ gelte $f(e) = g(e)$ für alle $e \in E$. Dann ist $f = g$.

§ 8.1 Normalteiler und Faktorgruppen

Normalteiler

Jede Untergruppe U einer Gruppe $(G, \star)$ induziert zwei i. A. verschiedene Äquivalenzrelationen

$$\begin{array}{llll} \sim^U & \text{mit Äquivalenzklassen} & a \star U & \text{(Linksnebenklassen)} \\ {}^U\!\sim & \text{mit Äquivalenzklassen} & U \star a & \text{(Rechtsnebenklassen)} \end{array}$$

Wann stimmen diese beiden Äquivalenzrelationen überein?

Definition 8.15

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe N heißt eine **normale Untergruppe** oder ein **Normalteiler** von $(G, \star)$, wenn gilt:

$$a \star N = N \star a \quad \text{für alle } a \in G.$$

Manchmal notiert man die Eigenschaft, dass $(N, \star)$ ein Normalteiler der Gruppe $(G, \star)$ ist, als $(N, \star) \trianglelefteq (G, \star)$.

Normalteiler

Beispiel 8.17

1. In jeder Gruppe $(G, \star)$ sind die trivialen Untergruppen $\{e\}$ und G Normalteiler.

2. In einer abelschen Gruppe $(G, \star)$ ist jede Untergruppe U ein Normalteiler.

Beispiel 8.17

3. Das **Zentrum**

$$Z := \{z \in G \mid a \star z = z \star a \text{ für alle } a \in G\}$$

einer Gruppe $(G, \star)$ ist ein Normalteiler.

Beispiel 8.17

4. Der **Kommutator** der Elemente a, b einer Gruppe $(G, \star)$ ist definiert als

$$[a, b] := a \star b \star a' \star b' = (a \star b) \star (b \star a)'$$

Die **Kommutator(unter)gruppe** der Gruppe $(G, \star)$ ist die von den Kommutatoren von G erzeugte Untergruppe, also

$$\big\langle \big\{ [a, b] \,\big|\, a, b \in G \big\} \big\rangle$$

Die Kommutatorgruppe ist ein Normalteiler von $(G, \star)$.

„Normalteiler sein“ ist **keine** Ordnungsrelation

Die Relation „ist Normalteiler von“ ist reflexiv und antisymmetrisch, aber i. A. nicht transitiv.

Im Gegensatz zur Untergruppenrelation ist die Normalteilerrelation also i. A. keine Ordnungsrelation.

Beispiel

$$H_4 \trianglelefteq K_4 \trianglelefteq A_4, \quad \text{aber } H_4 \ntrianglelefteq A_4$$

K_4 ist die zur Kleinschen Vierergruppe isomorphe Untergruppe

$$\Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{=H_4}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\}$$

der alternierenden Gruppe A_4 vom Grad 4 (Beispiel 7.45).

Kerne von Gruppenhomomorphismen sind Normalteiler

Lemma 8.18

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ Gruppen und $f \colon G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

1. Die Elemente von G_1, die denselben Funktionswert wie $a \in G_1$ haben, sind genau die Elemente der Nebenklasse von $\operatorname{Kern}(f)$ zu a:

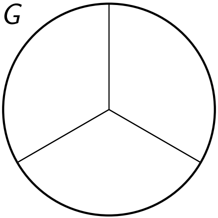
$$f^{-1}(\{f(a)\}) = a \star \operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Kern}(f) \star a.$$

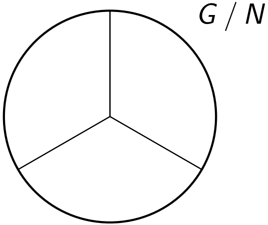
2. $\operatorname{Kern}(f)$ ist ein Normalteiler von G_1.

Beweis.

Faktormenge bzgl. durch Normalteiler induzierten Relation

Faktormenge $\quad G \,/\, N := G \,/ \overset{N}{\sim} = \big\{ [a] = a \star N \;\big|\; a \in G \big\}$





Die Nebenklassen von N partitionieren G.

Können wir in der Faktormenge $G \,/\, N$ auch „rechnen"?

Vielleicht so: $[a] \mathbin{\tilde{\star}} [b] := [a \star b]$?

Satz 8.21

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ ein Normalteiler. Dann gilt:

1. Die Faktormenge $G \,/\, N = \big\{[a] = a \star N \,\big|\, a \in G\big\}$ mit
$$[a] \mathbin{\tilde{\star}} [b] := [a \star b]$$
ist eine Gruppe, genannt die **Faktorgruppe von G nach N**. Neutrales Element ist $[e] = N$. Für die Inversen gilt $[a]' = [a']$.

2. Die **kanonische Surjektion** von G auf $G \,/\, N$
$$\pi \colon G \ni a \mapsto [a] \in G \,/\, N$$
ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Es gilt $\operatorname{Kern}(\pi) = N$.

3. Wenn $(G, \star)$ abelsch ist, dann auch $(G \,/\, N, \tilde{\star})$.

Satz 8.21

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Dann gilt:

4. Ist U irgendeine Untergruppe und ist die Verknüpfung $\widetilde{\star}$ auf der Menge der Linksnebenklassen $G \,/\, U$ (oder auf der Menge der Rechtsnebenklassen $U \setminus G$) wohldefiniert, dann ist U notwendigerweise ein Normalteiler von G.

Faktorgruppe

Beispiel 8.23

1. Ausfaktorisieren des trivialen Normalteilers $\{e\}$ einer Gruppe $(G, \star)$:

2. Ausfaktorisieren des trivialen Normalteilers G einer Gruppe $(G, \star)$:

Faktorgruppe

Beispiel 8.23

3. In der abelschen Gruppe $(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \cdot)$ ist die Untergruppe $(\{\pm 1\}, \cdot)$ ein Normalteiler.

   Die Elemente der Faktorgruppe sind die Nebenklassen

   $$[a] = a \cdot \{\pm 1\} = \{a, -a\} \quad \text{für } a \in \mathbb{Q}_{\neq 0}.$$

   Ein mögliches Repräsentantensystem sind die positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_{>0}$.

   Beim Übergang von $\mathbb{Q}_{\neq 0}$ zu $\mathbb{Q}_{\neq 0} / \{\pm 1\}$ wird also „das Vorzeichen ausfaktorisiert“.

Faktorgruppe

Beispiel 8.23

4. In $(\mathbb{Z}, +)$ ist $m\,\mathbb{Z}$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ ein Normalteiler.

   Die Elemente der Faktorgruppe $\mathbb{Z} \,/\, m\,\mathbb{Z}$ sind $[a] = a + m\,\mathbb{Z}$.

   In der Faktorgruppe rechnen wir $[a] \mathbin{\widetilde{+}} [b] = [a + b]$.

Beispiel 8.23

5. Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und K die Kommutatoruntergruppe.

   Dann ist die Faktorgruppe $(G \,/\, K, \widetilde{\star})$ kommutativ.

   Tatsächlich ist $(G \,/\, N, \widetilde{\star})$ genau dann kommutativ, wenn der ausfaktorisierte Normalteiler N die Kommutatoruntergruppe K von G enthält ($K \leqslant N$).

§ 8.2 Der Homomorphiesatz für Gruppen

Homomorphiesatz für Gruppen

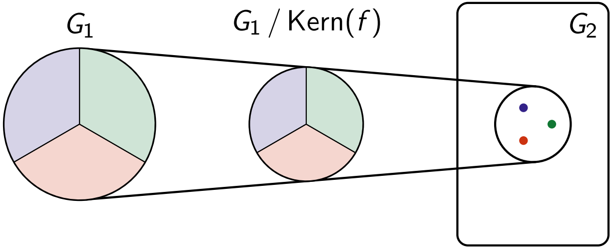
Satz 8.25

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann ist

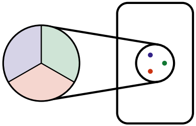
$$\begin{aligned} I\colon\ G_1 \,/\, \mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ [a] &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.



Homomorphiesatz für Gruppen

$$
\begin{aligned}
I\colon\ G_1 \,/\, \operatorname{Kern}(f) \quad &\longrightarrow \quad \operatorname{Bild}(f) \\
[a] \quad &\longmapsto \quad f(a) \quad \text{Isomorphismus}
\end{aligned}
$$



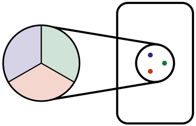
Beweis.

- I ist wohldefiniert:

- I ist Gruppenhomomorphismus:

Homomorphiesatz für Gruppen

$$\begin{aligned} I\colon G_1 \,/\, \mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ [a] &\longmapsto f(a) \quad \text{Isomorphismus} \end{aligned}$$



Beweis.

- I ist surjektiv:

- I ist injektiv:

Beispiel 8.27

1. $f \colon (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot) \ni x \mapsto x^2 \in (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$
   ist ein Endomorphismus der Gruppe $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$.

Homomorphiesatz für Gruppen

Beispiel 8.27

2. $\operatorname{sgn}\colon (S_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$
   ist ein (surjektiver) Gruppenhomomorphismus.