R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 2

Ausgabedatum: 20. Oktober 2025
Abgabedatum: 27. Oktober 2025

Übungsaufgabe I-2.1. (Übungen zu Mengen)

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

(b) Nutzen Sie Mengenkomprehension, um die Menge aller Teilmengen der ganzen Zahlen, die eine ungerade Zahl größer als 11 enthalten, zu beschreiben.

Übungsaufgabe I-2.2. (Aussagen über Mengen)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die Assoziativität der Mengendifferenz „\“.

(b) Es sei n eine natürliche Zahl und X eine Menge mit genau n verschiedenen Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ genau 2^n verschiedene Elemente enthält.

Übungsaufgabe I-2.3. (Relationen)

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Gegeben seien die Relationen

$$\begin{aligned} R &\coloneqq \{(x, A) \in X \times \mathcal{P}(X) \mid x \in A\} && \subseteq X \times \mathcal{P}(X) \\ S &\coloneqq \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\} && \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $S \circ R$, $S^{-1} \circ R$ sowie $S^{-1} \circ S$.

(b) Bestimmen Sie, welche der unten stehenden Relationen (ir-)reflexiv, (anti-)symmetrisch, transitiv oder total sind.

   (i) $R_1 \coloneqq \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq X \times X$ für $X \coloneqq \{a, b, c\}$ mit drei Elementen

   (ii) $R_2 \coloneqq \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(c) Es sei eine nichtleere Menge X und eine Relation R auf X gegeben. Zeigen Sie, dass $(R^i)^{-1} = (R^{-1})^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(d) Geben Sie eine Menge X und eine Relation R auf X an, für die $(R^+)^{\mathrm{sym}} \neq (R^{\mathrm{sym}})^+$ gilt.

Hausaufgabe I-2.1 (Übungen zu Mengen) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{\mathcal{P}(\emptyset), \emptyset\})$.

(b) Nutzen Sie Mengenkomprehension, um die Menge aller Elemente der Potenzmenge der rationalen Zahlen, welche die dritte Wurzel einer negativen ganzen Zahl beinhalten, zu beschreiben.

(c) Es seien A_i für $i = 1, \ldots, 8$ Mengen. Setzen Sie in der folgenden, daraus konstruierten, Menge alle Klammern, die auf Grund der Bindungsregeln (Ausdruck (4.17) des Skripts) weggelassen werden konnten.

$$A_1^c \setminus A_2 \cap A_3^c \setminus A_4^c \cup A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cup A_8^c$$

Hausaufgabe I-2.2 (Aussagen über Mengen) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Es sei $\mathcal{U}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie, dass

$$\Big(\bigcup \mathcal{U}\Big)^c = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}\ (x \in U^c)\}.$$

Beachte: Dies ist eine Verallgemeinerung des zweiten De Morganschen Gesetzes in Lemma 4.5 des Skripts.

(b) Es sei n aus $\mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der n-fachen Potenzmenge der leeren Menge

$$\mathcal{P}^n(\emptyset) \coloneqq \underbrace{\mathcal{P}(\ldots\mathcal{P}}_{n\text{-mal}}(\emptyset)\ldots)$$

und beweisen Sie Ihre Antwort mittels vollständiger Induktion.

Hausaufgabe I-2.3 (Rechenregeln für die Komposition von Relationen) 2 + 2 = 4 Punkte

Es seien X, Y, Z und W Mengen sowie (R, X, Y), (R_1, X, Y), (R_2, X, Y) sowie (S, Y, Z), (S_1, Y, Z), (S_2, Y, Z) und (T, Z, W) Relationen. Zeigen Sie Lemma 5.5 des Skripts, also die folgenden Aussagen über die Komposition und Vereinigung von Relationen.

(a) Die Komposition ist assoziativ, d. h., es gilt

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R). \tag{5.4}$$

(b) Für $\circ$ und $\cup$ gelten die **Distributivgesetze**

$$(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R), \tag{5.5a}$$
$$S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2). \tag{5.5b}$$

Hausaufgabe I-2.4 (Relationen) 3.5 + 3 + 1.5 = 8 Punkte

(a) Gegeben seien die Relationen

$$\begin{aligned} R &:= \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \mid m\} &&\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ S &:= \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \cdot m \text{ ist eine Quadratzahl}\} &&\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie S^{-1}, R^{-1}, S^{100}, R^{100} sowie $S \circ R$.

(b) Bestimmen Sie für jede der in Teilaufgabe (a) erwähnten Relationen, ob sie (ir-)reflexiv, (anti-)symmetrisch, transitiv oder total ist.

(c) Es sei $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine sechselementige Menge und

$$R := \{(a,b), (c,b), (d,e), (e,f), (f,a)\}.$$

Bestimmen Sie $R^?$, R^{sym} und R^+.

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass die Wurzel einer natürlichen Zahl entweder eine ebenfalls eine natürliche (also aus $\mathbb{N}$) oder eine irrationale Zahl (also aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) ist.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.