R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 2 (Lösung)

Ausgabedatum: 20. Oktober 2025
Abgabedatum: 27. Oktober 2025

Übungsaufgabe I-2.1. (Übungen zu Mengen)

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

(b) Nutzen Sie Mengenkomprehension, um die Menge aller Teilmengen der ganzen Zahlen, die eine ungerade Zahl größer als 11 enthalten, zu beschreiben.

Lösung.

(a) Die Definition der Potenzmenge einer Menge X ist

$$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A \mid A \subseteq X\} \tag{4.18}$$

und entsprechend ist (siehe Beispiel 4.7 des Skripts)

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

also eine Menge mit einem Element, nämlich der leeren Menge. Deren Potenzmenge ist also

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,.$$

(b) Die ganzen Zahlen sind mit $\mathbb{Z}$ notiert. Unsere Zielmenge soll eine Menge von Teilmengen $A \subseteq \mathbb{Z}$ sein, die eine noch zu spezifizierende Bedingung erfüllen. Unsere Mengenbeschreibung wird also die Form

$$\{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \text{ erfüllt die Bedingung } \}$$

haben.

Die charakterisierende Bedingung der Aufgabenstellung ist, dass eine Zahl $x \in A$ existiert, die ungerade und größer als 11 ist. Die Bedingungen an x kann man auf verschiedene Weisen schreiben. Eine Möglichkeit ist, die Konjunktion der zwei Aussagen

$$\exists\, y \in \mathbb{Z}\,(x = 2y + 1) \qquad (x \text{ ungerade})$$
$$x > 11 \qquad (x \text{ größer } 11)$$

zu fordern.

Das ergibt die Mengenbeschreibung

$$\left\{A \subseteq \mathbb{Z} \,\middle|\, \exists x \in A\, \big(x > 11 \wedge (\exists\, y \in \mathbb{Z}\,(x = 2y + 1))\big)\right\}.$$

Übungsaufgabe I-2.2. (Aussagen über Mengen)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die Assoziativität der Mengendifferenz „\“.

(b) Es sei n eine natürliche Zahl und X eine Menge mit genau n verschiedenen Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ genau 2^n verschiedene Elemente enthält.

Lösung.

(a) Die Mengendifferenz ist nicht assoziativ. Wir zeigen das, indem wir ein Beispiel für Mengen A, B, C angeben, wo $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$, denn dann kann die Assoziativität nicht allgemein gültig sein.

Für ein einfaches Beispiel wählt man A, B und C nichtleer und gleich (z. B. alle drei als $\mathbb{N}$), denn dann ist

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus A) \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset \neq A = A \setminus \emptyset = A \setminus (A \setminus A) = A \setminus (B \setminus C).$$

Es gilt allerdings allgemein die Inklusion $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$, denn es ist

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus ((B \setminus C) \cup C).$$

Die beiden stimmen also genau dann überein, wenn C keine Schnittmenge mit A hat.

(b) Da wir diese Aussage für jede feste natürliche Zahl n zeigen müssen, bietet sich ein Induktionsbeweis an. Für den **Induktionsanfang** bei $n = 1$ ist die Aussage schnell gezeigt, denn für eine Menge X mit genau einem Element ist die Potenzmenge lediglich $\mathcal{P}(x) = \{\emptyset, X\}$ und besitzt damit $2^1 = 2$ Elemente.

Haben wir die Aussage für Mengen mit genau n Elementen für ein beliebiges n gezeigt, dann können wir den **Induktionsschluss** von Mengen mit n Elementen auf Mengen mit

$n+1$ Elementen wie folgt argumentieren: Es sei X eine Menge mit $n+1$ Elementen und $x \in X$. Dann hat $X \setminus x$ genau $n \in \mathbb{N}$ Elemente und damit hat $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$ nach **Induktionsvoraussetzung** genau 2^n Elemente. Wir zeigen nun, dass wir die Potenzmenge von X als die disjunkte Mengenvereinigung

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \,\dot\cup\, \{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\} \tag{0.1}$$

schreiben können. Dann folgt sofort, dass $\mathcal{P}(X)$ genau doppelt so viele Elemente wie $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$ enthält (denn die rechte Menge hat genau so viele Elemente wie die linke, und damit 2^n), und damit $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Elemente. Dass die Vereinigung disjunkt ist sieht man sofort daran, dass das Element x in jeder der Mengen aus der rechten Menge $\{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\}$ enthalten ist aber in keiner der Mengen aus der Menge $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$. Weiterhin tauchen in der Vereinigung auf der rechten Seite der Gleichung nur Teilmengen von X auf, also muss

$$\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \,\dot\cup\, \{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\}$$

gelten.

Für jedes $B \in \mathcal{P}(X)$ gilt auch $B \setminus \{x\} \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})$. Es gilt außerdem (abhängig davon ob $x \in B$) entweder $B = B \setminus \{x\}$ oder $B = B \setminus \{x\} \cup \{x\}$ und damit aber auf jeden Fall

$$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \,\dot\cup\, \{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\}$$

und damit die Gleichheit der Mengen in (0.1).

Übungsaufgabe I-2.3. (Relationen)

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Gegeben seien die Relationen

$$\begin{aligned} R &\coloneqq \{(x, A) \in X \times \mathcal{P}(X) \mid x \in A\} && \subseteq X \times \mathcal{P}(X) \\ S &\coloneqq \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\} && \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $S \circ R$, $S^{-1} \circ R$ sowie $S^{-1} \circ S$.

(b) Bestimmen Sie, welche der unten stehenden Relationen (ir-)reflexiv, (anti-)symmetrisch, transitiv oder total sind.

  (i) $R_1 \coloneqq \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq X \times X$ für $X \coloneqq \{a, b, c\}$ mit drei Elementen

  (ii) $R_2 \coloneqq \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(c) Es sei eine nichtleere Menge X und eine Relation R auf X gegeben. Zeigen Sie, dass $(R^i)^{-1} = (R^{-1})^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(d) Geben Sie eine Menge X und eine Relation R auf X an, für die $(R^+)^{\text{sym}} \neq (R^{\text{sym}})^+$ gilt.

Lösung.

(a) Zunächst ist die inverse Relation zur Teilmengenrelation S gegeben durch

$$S^{-1} = \{(B,A) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\} = \{(B,C) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid B \supseteq C\},$$

also durch die Obermengenrelation. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} S^{-1} \circ S &= \{(A,C) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{P}(X) \text{ mit } A \subseteq B \text{ und } B \supseteq C\} \\ &= \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X), \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit wieder per Definition gilt, ebenso wie $S^{-1 \circ S} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$, und $S^{-1 \circ S} \supseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ gilt, da für jede beliebige Kombination von A und C immer die Menge $B = X$ gewählt werden kann, um die Bedingung der Mengenkomprehension zu erfüllen.

Weiter ist

$$\begin{aligned} S \circ R &= \{(x,B) \in X \times \mathcal{P}(X) \mid \exists A \in \mathcal{P}(X) \text{ mit } x \in A \text{ und } A \subseteq B\} \\ &= \{(x,B) \in X \times \mathcal{P}(X) \mid x \in B\} = R. \end{aligned}$$

Dabei gelten die erste und letzte Gleichheit per Definition und $S \circ R \subseteq R$ gilt, da für $(x,B) \in S \circ R$ gerade $x \in A \subseteq B$ also $x \in B$ gilt, und $S \circ R \supseteq R$ gilt, da für $x \in B$ immer $A = B$ gesetzt werden kann, um die Mengenkomprehension zu erfüllen.

Zuletzt ist

$$\begin{aligned} S^{-1} \circ R &= \{(x,B) \in X \times \mathcal{P}(X) \mid \exists A \in \mathcal{P}(X) \text{ mit } x \in A \text{ und } A \supseteq B\} \\ &= X \times \mathcal{P}(X), \end{aligned}$$

wo wieder die erste Gleichung per Definition gilt, ebenso wie $S^{-1} \circ R \subseteq X \times \mathcal{P}(X)$, und $S^{-1} \circ R \supseteq X \times \mathcal{P}(X)$ gilt, da man in der Mengenkomprehension für beliebiges x und B immer die Menge $A = B \cup \{x\}$ wählen kann, um die Bedingung zu erfüllen.

(b) (i) Die Relation $R_1 \coloneqq \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq X \times X$ ist **reflexiv**, denn die Diagonale ist enthalten. Damit ist die Relation automatisch **nicht irreflexiv**. Weiterhin ist die Relation **nicht symmetrisch**, denn $(a,b) \in R_1$ aber $(b,a) \notin R_1$. Tatsächlich ist sie **antisymmetrisch**, denn das Gleiche gilt für das einzige verbleibende nicht symmetrische Paar (b,c) ebenfalls. **Transitivität ist nicht gegeben**, denn (a,b) und (b,c) sind in R_1, doch nicht (a,c). Da außerdem (c,a) nicht in R_1 liegt, ist die Relation **nicht total**.

(ii) Die Relation $R_2 \coloneqq \{(x,x) \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist **weder reflexiv noch irreflexiv**, da jeweils eine Hälfte der Diagonalen fehlt (Achtung, $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$). Da nur ein Teil der Diagonalen enthalten ist, ist die Relation weiterhin **transitiv, nicht total aber symmetrisch und antisymmetrisch**.

(c) Wir führen einen Induktionsbeweis über die Indexmenge $i \in \mathbb{N}$ und zwar (in dieser Reihenfolge) für die Aussagen

$$R^i \circ R = R \circ R^i \qquad \text{und} \qquad (R^i)^{-1} = (R^{-1})^i.$$

Der **Induktionsanfang** ist direkt zu sehen, denn natürlich ist für $i = 1$ per Definition

$$R^1 \circ R = R \circ R = R \circ R^1 \qquad \text{und} \qquad (R^1)^{-1} = R^{-1} = (R^{-1})^1.$$

Für den **Induktionsschritt** von $i \in \mathbb{N}$ auf $i+1$ zeigen wir die erste Aussage unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung und der Assoziativität der Komposition von Relationen via

$$R^{i+1} \circ R = (R^i \circ R) \circ R = (R \circ R^i) \circ R = R \circ (R^i \circ R) = R \circ R^{i+1}.$$

Nun nutzen wir, dass für zwei Relationen $S \subseteq X \times Y$ und $T \subseteq Y \times Z$

$$\begin{aligned}(T \circ S)^{-1} &= (\{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ mit } xSy \text{ und } yTz\})^{-1} \\ &= \{(z,x) \in Z \times X \mid \exists y \in Y \text{ mit } xSy \text{ und } yTz\} \\ &= \{(z,x) \in Z \times X \mid \exists y \in Y \text{ mit } yS^{-1}x \text{ und } zT^{-1}y\} \\ &= S^{-1} \circ T^{-1}\end{aligned}$$

ist.

Nutzen wir die beiden obigen Aussagen und die Induktionsvoraussetzung für die zweite Aussage, dann folgt, dass

$$(R^{i+1})^{-1} = (R^i \circ R)^{-1} = (R^{-1} \circ (R^i)^{-1}) = R^{-1} \circ (R^{-1})^i = (R^{-1})^i \circ R^{-1} = (R^{-1})^{i+1}.$$

(d) Wir können eine dreielementige Menge $X = \{a, b, c\}$ mit der Relation $R = \{(a, b), (a, c)\}$ wählen. Dann ist

$$\begin{aligned}(R^+)^{\text{sym}} &= R^{\text{sym}} \\ &= \{(a,b), (a,c), (b,a), (c,a)\} \\ &\neq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \\ &= \{(a,b), (a,c), (b,a), (c,a)\}^+ \\ &= (R^{\text{sym}})^+.\end{aligned}$$

Hausaufgabe I-2.1 (Übungen zu Mengen) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{\mathcal{P}(\emptyset), \emptyset\})$.

(b) Nutzen Sie Mengenkomprehension, um die Menge aller Elemente der Potenzmenge der rationalen Zahlen, welche die dritte Wurzel einer negativen ganzen Zahl beinhalten, zu beschreiben.

(c) Es seien A_i für $i = 1, \ldots, 8$ Mengen. Setzen Sie in der folgenden, daraus konstruierten, Menge alle Klammern, die auf Grund der Bindungsregeln (Ausdruck (4.17) des Skripts) weggelassen werden konnten.

$$A_1^c \setminus A_2 \cap A_3^c \setminus A_4^c \cup A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cup A_8^c$$

Lösung.

(a) Es ist

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

und damit

$$\mathcal{P}(\{\mathcal{P}(\emptyset), \emptyset\}) = \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}.$$

Diese Menge stimmt mit $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ überein, siehe Übungsaufgabe I-2.1 . (1 Punkt)

(b) Die ganzen Zahlen sind mit $\mathbb{Z}$ notiert, die rationalen mit $\mathbb{Q}$. Unsere Zielmenge soll eine Menge von Elementen der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, also Teilmengen $A \subseteq \mathbb{Q}$, sein, die eine noch zu spezifizierende Bedingung erfüllen. Unsere Mengenbeschreibung wird also die Form

$$\{A \subseteq \mathbb{Q} \,|\, A \text{ erfüllt die Bedingung } \}$$

haben.

Die charakterisierende Bedingung der Aufgabenstellung ist, dass eine Zahl in A existiert, die die dritte Wurzel einer negativen ganzen Zahl ist. Die Bedingungen an A kann man auf verschiedene Weisen schreiben. Die direkteste ist

$$\exists\, z \in \mathbb{Z}\, (z < 0 \wedge \sqrt[3]{z} \in A)$$

Das ergibt die Mengenbeschreibung

$$\left\{A \subseteq \mathbb{Q} \,\middle|\, \exists\, z \in \mathbb{Z}\, (z < 0 \wedge \sqrt[3]{z} \in A)\right\}.$$

(1 Punkt)

(c) Wir wenden die Bindungsregeln

$$\cdot^c \text{ bindet stärker als } \setminus \text{ bindet stärker als } \cap \text{ bindet stärker als } \cup \tag{4.17}$$

an und arbeiten uns dabei schrittweise von den am stärksten bindenden Mengenoperationen (von innen) zu den am schwächsten bindenden (nach außen) vor. Da die Klammersetzung gleiche Mengen liefert entsteht dabei die folgende Mengengleichheitskette:

$$\begin{aligned}
& A_1^c \setminus A_2 \cap A_3^c \setminus A_4^c \cup A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cup A_8^c \\
= \; & (A_1^c) \setminus A_2 \cap (A_3^c) \setminus (A_4^c) \cup A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cup (A_8^c) && \text{(Klammern für } \cdot^c) \\
= \; & \big((A_1^c) \setminus A_2\big) \cap \big((A_3^c) \setminus (A_4^c)\big) \cup A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cup (A_8^c) && \text{(Klammern für } \setminus) \\
= \; & \Big(\big((A_1^c) \setminus A_2\big) \cap \big((A_3^c) \setminus (A_4^c)\big)\Big) \cup \Big(A_5 \cap A_6 \cap A_7\Big) \cup (A_8^c). && \text{(Klammern für } \cap)
\end{aligned}$$

Man könnte am Ende noch eine finale Klammer für die Mengenvereinigung um den gesamten Ausdruck setzen, diese würde aber keinen Informationsgewinn oder Lesbarkeitsgewinn liefern, da die Mengenvereinigung die letzte verbleibende Operation ist. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-2.2 (Aussagen über Mengen) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Es sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie, dass

$$\Big(\bigcup \mathcal{A}\Big)^c = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{A}\ (x \in U^c)\}.$$

Beachte: Dies ist eine Verallgemeinerung des zweiten De Morganschen Gesetzes in Lemma 4.5 des Skripts.

(b) Es sei n aus $\mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der n-fachen Potenzmenge der leeren Menge

$$\mathcal{P}^n(\emptyset) \coloneqq \underbrace{\mathcal{P}(\ldots\mathcal{P}(}_{n\text{-mal}}\emptyset)\ldots)$$

und beweisen Sie Ihre Antwort mittels vollständiger Induktion.

Lösung.

(a) Bei dieser Aussage handelt es sich um die allgemeinere Version eines der De Morganschen Gesetze, das sich in Lemma 4.5 für zwei Mengen anstatt für allgemeinere Mengen von Mengen findet. Wir setzen für den Nachweis lediglich die Definitionen der Komplemente und der Schnitte bzw. Vereinigungen ein und formulieren die charakterisierende Bedingung der Menge logisch äquivalent um. Dabei erhalten wir die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
\Big(\bigcup \mathcal{A}\Big)^c &= \Big\{x \in X \,\Big|\, x \notin \bigcup \mathcal{A}\Big\} && \text{(Definition des Komplements)}\\
&= \big\{x \in X \,\big|\, \nexists A \in \mathcal{A}\,(x \in A)\big\} && \text{(Definition der Vereinigung)}\\
&= \{x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A}\,(x \notin A)\} && \text{(Negation)}\\
&= \{x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A}\,(x \in A^c)\} && \text{(Definition des Komplements)}
\end{aligned}$$

(Rot markiert sind die Negationen, in denen die negierende Eigenschaft des Komplements kodiert ist.) (2 Punkte)

(b) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt die Menge $\mathcal{P}^n(\emptyset)$ gerade 0 Elemente, wenn $n = 0$ ist, und

$$2^{2^{\cdots 2^0}} = \underbrace{\exp_2(\ldots \exp_2(}_{n\text{-mal}} 0) \ldots)$$

Elemente, wenn $n > 0$ ist.

Da wir diese Aussage für jede feste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen müssen, bietet sich ein Induktionsbeweis an. Wir erkennen in der Lösung auch, dass sich eine „schöne“ Struktur erst für $n \geqslant 1$ ergibt, weshalb sich hier ein **Induktionsanfang** bei $n = 1$ anbietet. Alternativ kann man die Induktion auch bei $n = 0$ starten und in dem Induktionsschritt eine Fallunterscheidung durchführen. Die Arbeit ist in beiden Strategien die gleiche.

Wir zeigen die Aussage hier für $n = 0$ und $n = 1$ und erst dann per Induktionsschritt. Für $n = 0$ ist die Aussage schnell gezeigt, denn die leere Menge besitzt per Definition keine Elemente. Für $n = 1$ wissen wir, dass $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ist, also $1 = 2^0 = \exp_2(0)$ Elemente besitzt. (1 Punkt)

Haben wir die Aussage für $\mathcal{P}^n(\emptyset)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, dann ergibt sich der **Induktionsschluss** auf $\mathcal{P}^{n+1}(\emptyset)$ gerade aus Übungsaufgabe I-2.2 Teilaufgabe (b). (1 Punkt)

Hausaufgabe I-2.3 (Rechenregeln für die Komposition von Relationen) 2 + 2 = 4 Punkte

Es seien X, Y, Z und W Mengen sowie (R, X, Y), (R_1, X, Y), (R_2, X, Y) sowie (S, Y, Z), (S_1, Y, Z), (S_2, Y, Z) und (T, Z, W) Relationen. Zeigen Sie Lemma 5.5 des Skripts, also die folgenden Aussagen über die Komposition und Vereinigung von Relationen.

(a) Die Komposition ist assoziativ, d. h., es gilt

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R). \tag{5.4}$$

(b) Für $\circ$ und $\cup$ gelten die **Distributivgesetze**

$$(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R), \tag{5.5a}$$

$$S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2). \tag{5.5b}$$

Lösung.

(a) Wir expandieren die Definition der Relationskomposition mehrfach und erhalten die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
(T \circ S) \circ R &= \{(x,w) \in X \times W \mid \exists y \in Y\, ((x,y) \in R \land (y,w) \in T \circ S)\} \\
&= \{(x,w) \in X \times W \mid \exists y \in Y\, ((x,y) \in R \land \exists z \in Z\, ((y,z) \in S \land (z,w) \in T))\} \\
&= \{(x,w) \in X \times W \mid \exists y \in Y, \exists z \in Z\, ((x,y) \in R, \land (y,z) \in S \land (z,w) \in T)\} \\
&= \{(x,w) \in X \times W \mid \exists z \in Z\, (\exists y \in Y\, ((x,y) \in R \land (y,z) \in S) \land (z,w) \in T)\} \\
&= \{(x,w) \in X \times W \mid \exists z \in Z (x,z) \in (S \circ R) \land (z,w) \in T\} \\
&= T \circ (S \circ R)
\end{aligned}$$

wobei das kritische Nach-Links-Rausziehen der Existenzquantoren legitim ist, weil die jeweils vorher nicht mit eingeschlossenen Aussagenteile unabhängig von der jeweiligen Variable b bzw. c sind. Das Gleiche gilt für die Klammerung. (2 Punkte)

(b) Wir zeigen hier Gleichung (5.5a), der Beweis von Gleichung (5.5b) folgt analog. Für den Beweis genügt es wieder, die Definitionen von Komposition und Vereinigung der Relationen auszuschreiben. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(S_1 \cup S_2) \circ R &= \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y\, ((x,y) \in R \land (y,z) \in (S_1 \cup S_2))\} \\
&= \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y\, ((x,y) \in R \land ((y,z) \in S_1 \lor (y,z) \in S_2))\} \\
&= \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y\, (((x,y) \in R \land (y,z) \in S_1) \lor ((x,y) \in R \land (y,z) \in S_2))\} \\
&= \{(x,z) \in X \times Z \mid\ (\exists y \in Y\, ((x,y) \in R \land (y,z) \in S_1) \lor (\exists y \in Y\, ((x,y) \in R \land (y,z) \in S_2)))\} \\
&= (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R).
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe I-2.4 (Relationen) 3.5 + 3 + 1.5 = 8 Punkte

(a) Gegeben seien die Relationen

$$\begin{aligned}
R &:= \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \mid m\} && \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
S &:= \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \cdot m \text{ ist eine Quadratzahl}\} && \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie S^{-1}, R^{-1}, S^{100}, R^{100} sowie $S \circ R$.

(b) Bestimmen Sie für jede der in Teilaufgabe (a) erwähnten Relationen, ob sie (ir-)reflexiv, (anti-)symmetrisch, transitiv oder total ist.

(c) Es sei $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine sechselementige Menge und

$$R \coloneqq \{(a, b), (c, b), (d, e), (e, f), (f, a)\}.$$

Bestimmen Sie $R^?$, R^{sym} und R^+.

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass die Wurzel einer natürlichen Zahl entweder eine ebenfalls eine natürliche (also aus $\mathbb{N}$) oder eine irrationale Zahl (also aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) ist.

Lösung.

(a) Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \cdot m \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ &= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \cdot m \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ &= S \quad (0.5 \text{ Punkte}) \end{aligned}$$

ist, da die Definition symmetrisch formuliert ist. Außerdem ist

$$R^{-1} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \mid m\} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \text{ ist Vielfaches von } m\}. \quad (0.5 \text{ Punkte})$$

Als nächstes zeigen wir, dass $R^i = R$ und $S^i = S$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Das machen wir per Induktionsbeweis über i. Der Induktionsanfang für $i = 1$ ergibt sich per Definition der ersten Relationspotenz.

Für den Induktionsschritt von i auf $i + 1$ halten wir zuerst fest, dass nach Induktionsvoraussetzung

$$S^{i+1} = S^i \circ S = S \circ S$$

und eine analoge Aussage für R folgen. Die Hauptaussage folgt also sofort, wenn wir $S \circ S = S$ und $R \circ R = R$ zeigen können. Zuerst ist

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(n, l) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \mid m \text{ und } m \mid l\} \\ &= \{(n, l) \in \mathbb{N}^2 \mid n \mid l\} = R. \end{aligned}$$

Dabei gelten die äußeren beiden Gleichheitszeichen per Definition und $R \circ R \subseteq R$ gilt, weil $n \mid m$ und $m \mid l$ immer $n \mid l$ impliziert, und $R \circ R \supseteq R$ gilt, weil im Fall $n \mid l$ immer

$m = n$ gewählt werden kann um die Bedingung der Mengenkomprehension zu erfüllen. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} S \circ S &= \{(n, l) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \cdot m \text{ und } m \cdot l \text{ sind Quadratzahlen}\} \\ &= \{(n, l) \in \mathbb{N}^2 \mid n \cdot l \text{ ist Quadratzahl}\} = S. \end{aligned}$$

Wieder gelten die äußeren Gleichungen per Definition. Dass die Inklusion $S \circ S \subseteq S$ gilt sehen wir daran, dass für (n, l) mit dazugehörigem m aus der Mengenkomprehension c und d aus $\mathbb{N}$ existieren, so dass $n \cdot m = c^2$ und $m \cdot l = d^2$ gilt, und somit $(cd)^2 = c^2 d^2 = nl(m^2)$, also $nl = \left(\frac{cd}{m}\right)^2$, was nicht irrational sein kann und damit eine Quadratzahl ist. Außerdem ist $S \circ S \supseteq S$, da wenn (n, l) gegeben ist, so dass $n \cdot l$ eine Quadratzahl ist, dann können wir $m = n$ wählen, um die Bedingung der Mengenkomprehension zu erfüllen. (1 Punkt)

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} S \circ R &= \{(n, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \mid m \text{ und } m \cdot l \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ &= \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \end{aligned}$$

da man für beliebige (n, l) zum Erfüllen der Bedingung in der Mengenkomprehension immer $m = n^2 \cdot l$ wählen kann. (0.5 Punkte)

(b) Wir müssen nur die Eigenschaften von R, S, R^{-1} und $S \circ R$ untersuchen.

Reflexiv (und damit automatisch **nicht irreflexiv**) sind diese Relationen alle, da die Diagonale enthalten ist. (0.5 Punkte)

Symmetrisch sind S und $S \circ R$, was man an der symmetrischen Bedingung in der Definition von S und daran, dass $S \circ R$ die universelle Relation ist, sieht. R sowie R^{-1} sind nicht symmetrisch, da 2 zwar 4 teilt aber nicht andersherum. (0.5 Punkte)

Antisymmetrisch sind R und R^{-1}, weil die definierenden Bedingungen jeweils auch implizieren, dass die Elemente des Tupels größer/kleiner als das jeweils andere sein müssen. S und $S \circ R$ sind symmetrisch und beinhalten Elemente neben der Diagonale, sind daher nicht Antisymmetrisch. (0.5 Punkte)

Transitiv ist R als Teilbarkeitsrelation und damit auch R^{-1}. Weiterhin ist S transitiv, denn sind $n, m, l, a, b \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \cdot m = a^2 \qquad \text{und} \qquad m \cdot l = b^2,$$

dann ist

$$n \cdot l = \left(\frac{ab}{m}\right)^2$$

und die Quadratwurzel aus $n \cdot l$ also rational und damit notwendigerweise ganzzahlig. Als universelle Relation ist natürlich $S \circ R$ ebenfalls transitiv. (1 Punkt)

Total ist weder R noch R^{-1}, was die Tupel $(2, 3)$ und $(3, 2)$ zeigen, wo keine Teilbarkeitseigenschaften gegeben sind. Ebenfalls ist S nicht total, wieder zeigt das Tupel $(2, 3)$, dass nicht jedes Produkt zweier natürlicher Zahlen auch eine Quadratzahl ergibt. Die universelle Relation $S \circ R$ ist natürlich total, da sie alle Tupel enthält. (0.5 Punkte)

(c) Für die reflexive Hülle müssen wir laut Gleichung (5.11) nur die Diagonale hinzufügen, daher ist

$$R^{?} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, b), (d, d), (d, e), (e, e), (e, f), (f, a), (f, f)\}. \quad (0.5\,\text{Punkte})$$

Für die symmetrische Hülle müssen wir alle Elemente der inversen Relation hinzufügen, also

$$R^{\text{sym}} = \{(a, b), (a, f), (b, a), (b, c), (c, b), (d, e), (e, d), (e, f), (f, a), (f, e)\}. \quad (0.5\,\text{Punkte})$$

Zuletzt benötigen wir für die transitive Hülle beliebige Potenzen der Relation, also

$$R^{+} = \{(a, b), (c, b), (d, a), (d, b), (d, e), (d, f), (e, a), (e, b), (e, f), (f, a), (f, b)\}. \quad (0.5\,\text{Punkte})$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.