

Plenum 02

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2022

03.05.2022 und 05.05.2022

Kondition

Was sind die Highlights der Woche?

- Satz 3.16 von Kahan
- Konditionszahlen der Grundoperationen
(Lemma 3.9)
- Definition partieller Ableitungen und partieller Konditionszahlen
- anschauliche Bedeutung der Konditionszahlen und ihrer physikalischen Einheiten

Welche Fragen gibt es? I

- Definition der echten Addition und echten Subtraktion (Mittlerweile wurde dazu im Skript auch ein Beispiel nachgetragen.)
- Bedeutung der Formel (3.1), also

$$F(x + \Delta x) \in F(x) + F'(x) \Delta x + \mathcal{o}(\|\Delta x\|) :$$

Auf der rechten Seite steht eine Funktion, nämlich $\Delta x \mapsto F(x) + F'(x) \Delta x$, plus eine Menge von Funktionen, nämlich $\mathcal{o}(\|\Delta x\|)$. Die rechte Seite ist zu verstehen als die feste Funktion plus eine beliebige Funktion aus der Menge. (Erklärung wird auch im Skript ergänzt.)

Welche Fragen gibt es? II

- Erklärung zur schlechten Konditionierung der echten Subtraktion
- Frage zum Beweis des Satzes 3.16 von Kahan
- Grund der Verwendung der $\|\cdot\|_{\infty \rightarrow \infty}$ -Norm im Falle der relativen Kondition
- Quizfrage nach (3.26): Wie würde dieser Ausdruck aussehen, wenn wir statt der ∞ -Normen überall die 2-Normen verwenden würden?

In dem Fall erhalten wir in (3.16) an Stelle der $\|\cdot\|_{\infty \rightarrow \infty}$ -Norm die $\|\cdot\|_{2 \rightarrow 2}$ -Norm.

Konditionierung von Aufgaben I

Welche Beispiele für schlecht konditionierte Aufgaben fallen Ihnen ein?

- „Messerspitze“ im Kochrezept
- Bestimmung des Erdradius von der Erde aus
- Verzerrung auf Karten (nahe Nordpol)
- Vorhersage des Aktienkurses
- Vorhersage der Wurfbahn eines weit geworfenen Balles
- Systeme mit chaotischer Dynamik wie das Doppelpendel
- Billiard

Konditionierung von Aufgaben II

- nicht oder nicht eindeutig lösbar
Gleichungssysteme (z. B. bei der Rekonstruktion eines 3D-Körpers aus seinem Schattenwurf)
- Klassifikationsergebnis eines trainierten neuronalen Netzes bei einem adversarial attack
- Wettervorhersage über einen langen Zeitraum
- Deformation von Metallstangen, die bis knapp über ihre Fließgrenze belastet worden sind

Abs. Konditionszahlen bei Einheitenwechsel

Im Beispiel 3.4 haben wir die Jacobimatrix der Fkt.

$$s(t, v_0, a) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

an der Stelle $a = 5 \text{ m s}^{-2}$, $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$ und $t = 10 \text{ s}$ bestimmt:

$$\begin{bmatrix} v_0 + a t & t & \frac{1}{2} t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \text{ m s}^{-1} & 10 \text{ s} & 50 \text{ s}^2 \end{bmatrix}$$

- 1 Wie ändern sich diese absoluten partiellen Konditionszahlen, wenn man den Funktionswert s in mm misst statt wie oben in m?
- 2 Und was ändert sich, wenn man v_0 in km h^{-1} misst statt in m s^{-1} ?

Rel. Konditionszahlen bei Einheitenwechsel

- 1 Wie ändern sich die relativen partiellen Konditionszahlen

$$\left[50 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{10 \text{ s}}{250 \text{ m}} \quad 10 \text{ s} \cdot \frac{0 \text{ m s}^{-1}}{250 \text{ m}} \quad 50 \text{ s}^2 \cdot \frac{5 \text{ m s}^{-2}}{250 \text{ m}} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wenn man den Funktionswert s in mm misst statt in m?

- 2 Und was ändert sich, wenn man v_0 in km h^{-1} misst statt in m s^{-1} ?

Konditionszahlen von Grundoperationen

Bestätigen Sie die relativen Konditionszahlen aus Lemma 3.9, insbesondere

Operation	$k(x)$
$x_1 + x_2$	$\frac{ x_1 + x_2 }{ x_1 + x_2 }$
$x_1 \cdot x_2$	2
$\frac{x_1}{x_2}$	2

Bedeutung der Kondition

Wir wollen die Zahlen

$$x_1 = 1.234\,568\,9?$$

$$x_2 = 1.234\,567\,8?,$$

subtrahieren, wobei das **?** für eine Unsicherheit in der 9. Dezimalziffer steht.

- ① Welche absolute bzw. relative Genauigkeit hat das Ergebnis bei einer Störung von $\Delta x_1 = 10^{-8}?$
- ② Wie hängt das mit der absoluten und relativen Kondition der Aufgabe $x_1 - x_2$ zusammen?

[aus Bornemann, 2018, S.44]

Kondition des Skalarprodukts

Bestimmen Sie die relative Konditionszahl der Berechnung des Innenprodukts $x^T y$ von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Kondition von Gleichungssystemen

Wie groß ist die Konditionszahl der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{für kleine } \varepsilon > 0,$$

und wie wirkt sich diese auf die Lösung der
Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

aus?

Einstellung der Wassertemperatur

Wir wollen eine angenehme Wassertemperatur von etwa 35 °C aus **Kaltwasser** (15 °C) und **Heißwasser** (65 °C) mischen.



Bild: stevepb, Pixnio

- ➊ Welche Regler (**kalt** oder **warm**) eignet sich besser für die Feinjustierung der Temperatur?
- ➋ Was hat das mit partiellen Konditionszahlen zu tun?