Lineare Algebra I

Woche 03

28.10.2025 und 30.10.2025

§ 5.1 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelation

Definition 5.19

Es sei X eine Menge. Eine

reflexive

symmetrische

transitive

Relation (R, X, X) auf X heißt eine **Äquivalenzrelation** auf X.

Äquivalenzklassen und Repräsentanten

Definition 5.21

Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

1. Für $x \in X$ heißt die Menge
$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$
die **Äquivalenzklasse** von x bzgl. $\sim$.

2. Jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt ein **Repräsentant** dieser Äquivalenzklasse.

3. Eine Menge $S \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält, heißt ein **Repräsentantensystem** von $\sim$.

Äquivalenzrelationen

Beispiele 5.20 und 5.22

1. Die Identitätsrelation id_X ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge X.

2. Die universelle Relation U_X ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge X.

Kongruenzrelation modulo m

Beispiel 5.20

Es sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Auf $\mathbb{Z}$ ist die **Kongruenzrelation modulo** m

$$x \overset{m}{\equiv} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z}\,(x - y = n\,m)$$

eine Äquivalenzrelation.

Reflexivität

Symmetrie

Transitivität

Beispiel 5.22

Die Äquivalenzklassen der Kongruenzrelation modulo m heißen auch die **Restklassen modulo** m. Im Fall $m = 2$:

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \overset{2}{\equiv} 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \,|\, \exists n \in \mathbb{Z} \, (y - 0 = 2\, n)\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \text{ ist gerade}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[1] &= \{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \overset{2}{\equiv} 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \,|\, \exists n \in \mathbb{Z} \, (y - 1 = 2\, n)\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \text{ ist ungerade}\}
\end{aligned}
$$

Das natürliche Repräsentantensystem ist $\{0, 1\}$.
Ein anderes Repräsentantensystem ist $\{-2, 43\}$.

Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt

Satz 5.23

Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$ und $[x]$ und $[y]$ zwei Äquivalenzklassen. Dann sind diese entweder gleich oder disjunkt.

Beweis.

Partition einer nichtleeren Menge

Definition 5.24

Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
$\mathcal{A}$ heißt eine **Partition** oder **disjunkte Zerlegung** von X, wenn gilt:

1. Für alle $x \in X$ gibt es eine Menge $A \in \mathcal{A}$, die x enthält.
2. Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ sind A und B entweder gleich oder disjunkt.
3. $\emptyset \notin \mathcal{A}$.

Partionen „sind“ Äquivalenzrelationen

Satz 5.25

1. Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

   Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen $\{[x] \,|\, x \in X\}$ eine Partition von X.

2. Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine Partition von X.

   Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation $\sim$, sodass $\mathcal{A}$ genau aus den Äquivalenzklassen von $\sim$ besteht.

Beweis.

Faktormenge

Definition 5.26

Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

Die Menge der Äquivalenzklassen

$$X / \sim := \{[x] \,|\, x \in X\}$$

heißt auch die **Faktormenge** oder die **Quotientenmenge** von $\sim$.

Beispiel 5.27

Rationale Zahlen

Wir hatten die Menge der rationalen Zahlen vorläufig eingeführt als

$$\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Wir wollen aber beispielsweise $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{-2}{-4}$ miteinander identifizieren. Zu diesen Zweck verwenden wir die Äquivalenzrelation

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1.$$

Das führt uns zur Definition

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} / \sim$$

für die **rationalen Zahlen** als Faktormenge.

§ 5.2 Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation

Definition 5.28

Es sei X eine Menge.

1. Eine

   reflexive

   antisymmetrische

   transitive

   Relation (R, X, X) auf X heißt eine **Ordnungsrelation**, **Halbordnung** oder **partielle Ordnung**.
   (X, R) heißt dann eine **halbgeordnete Menge**.

Ordnungsrelation

Definition 5.28

Es sei X eine Menge.

2. $x, y \in X$ heißen **vergleichbar**, wenn $x \, R \, y$ oder $y \, R \, x$ gilt.

3. Ist die Halbordnung R zusätzlich total, gilt also für beliebige $x, y \in X$ stets $x \, R \, y$ oder $y \, R \, x$, dann heißt sie eine **Totalordnung**. (X, R) heißt dann eine **totalgeordnete Menge**.

Ordnungsrelation

Beispiel 5.29

1. Die Inklusionsrelation $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ jeder beliebigen Menge X.
   Sie ist eine totale Ordnung dann und nur dann, wenn X entweder kein oder genau ein Element enthält.

2. Die Teilbarkeitsrelation $\mid$ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.

Inverse Ordnungsrelation

Lemma 5.30

Es sei $\preccurlyeq$ eine Halbordnung auf einer Menge X.

Dann ist auch die inverse Relation $\succcurlyeq$ eine Halbordnung auf X.

Ist $\preccurlyeq$ eine Totalordnung, dann auch $\succcurlyeq$.

obere Schranke, Supremum

Definition 5.34

Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

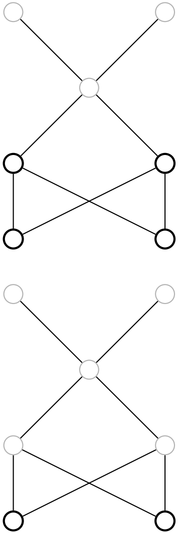
- $b \in X$ heißt eine **obere Schranke** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$x \preccurlyeq b \quad \text{für alle } x \in A$$

- $b \in X$ heißt das **Supremum** oder **kleinste obere Schranke** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

  b ist eine obere Schranke von A,

  und für jede obere Schranke $\widehat{b}$ von A gilt: $b \preccurlyeq \widehat{b}$



maximales Element, Maximum

Definition 5.34

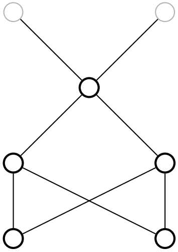
Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

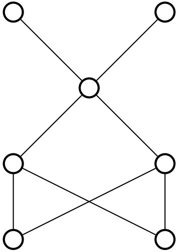
- $b \in X$ heißt ein **Maximum** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

  $$b \in A,$$
  $$\text{und für alle } x \in A \text{ gilt: } x \preccurlyeq b$$

- $b \in X$ heißt ein **maximales Element** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

  $$b \in A,$$
  $$\text{und für alle } x \in A \text{ gilt: } b \preccurlyeq x \;\Rightarrow\; x = b$$



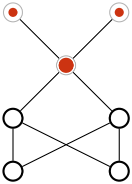


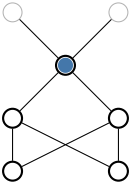
Beziehungen zwischen Supremum und Maximum

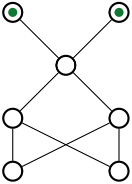
Lemma 5.35

Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge und $A \subseteq X$.

1. Existiert ein Supremum ● von A, so ist dieses eindeutig.
2. Existiert ein Maximum ● von A, so ist dieses eindeutig. Es ist dann auch das einzige maximale Element • von A.
3. Ist b das Maximum ● von A, so ist b auch das Supremum ● von A.
4. Hat A ein Supremum ● b, so gilt: Im Fall $b \in A$ ist b das Maximum ● von A. Im Fall $b \notin A$ besitzt A kein Maximum.
5. Ist $\preccurlyeq$ eine Totalordnung auf A, dann gilt: Ist b ein maximales Element • von A, so ist b auch das Maximum von A.







strenge Ordnungsrelation

Definition 5.31

Es sei X eine Menge.

1. Eine

   irreflexive

   transitive

   und damit automatisch antisymmetrische

   Relation (R, X, X) auf X heißt eine **strenge Ordnungsrelation**, **strenge Halbordnung** oder **strenge partielle Ordnung**. (X, R) heißt dann eine **streng halbgeordnete Menge**.

strenge Ordnungsrelation

Definition 5.31

Es sei X eine Menge und R eine strenge Ordnungsrelation auf X.

2. $x, y \in X$ heißen **vergleichbar**, wenn $x \mathrel{R} y$, $y \mathrel{R} x$ oder $x = y$ gilt.

3. Sind in der strengen Halbordnung R beliebige $x, y \in X$ stets vergleichbar, dann heißt sie eine **strenge Totalordnung**. (X, R) heißt dann eine **streng totalgeordnete Menge**.

Übergang zwischen Ordnung und strenger Ordnung

Lemma 5.32

Es sei X eine Menge.

1. Ist $\preccurlyeq$ eine Ordnungsrelation auf X, dann ist $\prec := \preccurlyeq \setminus \Delta_X$ eine strenge Ordnungsrelation auf X, genannt die **zugehörige strenge Ordnungsrelation**.
2. Ist $\prec$ eine strenge Ordnungsrelation auf X, dann ist $\preccurlyeq := \prec \cup \Delta_X$ eine Ordnungsrelation auf X, genannt die **zugehörige Ordnungsrelation**.

Ist eine von beiden total, dann auch die andere.

Beweis. Übung

§ 6 Abbildungen

Abbildung/Funktion

Definition 6.1

Eine Relation (R, X, Y) zwischen X und Y heißt

- **linkstotal**, falls für alle $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \mathrel{R} y$ gilt.
- **rechtseindeutig**, falls für alle $x \in X$ und alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt: $x \mathrel{R} y_1 \wedge x \mathrel{R} y_2 \;\Rightarrow\; y_1 = y_2$.

Definition 6.2

Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation (f, X, Y) heißt **Abbildung von X in Y** oder **Funktion von X in Y**.

- X heißt der **Definitionsbereich** oder die **Definitionsmenge**.
- Y heißt die **Zielmenge** von f.

Der **Graph** der Funktion $f \colon X \to Y$ ist

$$\big\{(x, f(x)) \,\big|\, x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Notation von Funktionen

Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Definitionsbereichen, Zielmengen und ihren Abbildungsvorschriften übereinstimmen.

Funktion

Beispiel 6.3

1. Die **konstante Funktion** auf X mit dem Wert $y_0 \in Y$ ist

$$X \ni x \mapsto f(x) := y_0 \in Y.$$

2. Für eine Menge X heißt die Abbildung id_X mit

$$X \ni x \mapsto \mathrm{id}_X(x) := x \in X$$

   die **identische Abbildung** von X.

Funktion

Beispiel 6.3

3. Ist $X = \emptyset$ und Y eine beliebige Menge, dann existiert genau eine Funktion $f\colon \emptyset \to Y$, die **leere Funktion**.

4. Ist $Y = \emptyset$ die leere Menge, dann existiert eine Funktion $f\colon X \to \emptyset$ genau dann, wenn auch $X = \emptyset$ ist.

Bildmenge

Definition 6.4

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $A \subseteq X$ heißt

$$f(A) \coloneqq \{f(x) \,|\, x \in A\} \subseteq Y$$

die **Bildmenge** von f **auf** A oder das **Bild** von A **unter** f.

Definition 6.4

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $A \subseteq X$ heißt die Funktion $f|_A$

$$A \ni x \mapsto f|_A(x) \coloneqq f(x) \in Y$$

die **Einschränkung** oder **Restriktion** von f auf A.

Gilt $f(A) \subseteq B$, so ist $f|_A^B$ die **Einschränkung** von f auf A, wobei zusätzlich die Zielmenge durch B ersetzt wird:

$$A \ni x \mapsto f|_A^B(x) \coloneqq f(x) \in B$$

Urbild

Definition 6.6

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $B \subseteq Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

das **Urbild** von B **unter** f.

Für $B = \{y\}$ heißt das Urbild

$$f^{-1}(\{y\}) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

auch die **Faser** von y **unter** f.

Bilder, Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten

Satz 6.8

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien $\{X_i \,|\, i \in I\}$ bzw. $\{Y_j \,|\, j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von X bzw. Y. Dann gilt:

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(X_i) \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j) \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

Beweis.

§ 6.1 Injektivität und Surjektivität

Surjektivität

Definition 6.10

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$ gilt.

Injektivität

Definition 6.10

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn für $x_1, x_2 \in X$ gilt:
$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.

Bijektivität

Definition 6.10

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **bijektiv**, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Surjektivität, Injektivät, Bijektivität

Beispiel 6.13

1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv und nicht injektiv.
2. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
3. $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
4. $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist bijektiv.

Beispiel 6.13

1. Sind X und Y Mengen mit $X \subseteq Y$, dann heißt die injektive Abbildung $i_{Y \leftarrow X}$ mit

$$X \ni x \mapsto i_{Y \leftarrow X}(x) := x \in Y$$

die **kanonische** oder **natürliche Injektion** oder die **kanonische** oder **natürliche Einbettung** von X in Y.

2. Ist X eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, dann heißt die Abbildung

$$\pi\colon X \ni x \mapsto [x] \in X \,/\, \sim,$$

die jedem Element seine Äquivalenzklasse zuordnet, die **kanonische Surjektion**. Diese ist surjektiv.

Komposition von Funktionen

Definition 6.14

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

Die Funktion

$$X \ni x \mapsto (g \circ f)(x) \coloneqq g(f(x)) \in Z$$

heißt die **Komposition** von f und g.

Beispiel 6.15

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \coloneqq x^2 \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) \coloneqq x + 1 \in \mathbb{R}$$

Potenzen von Funktionen

Definition 6.18

Es sei $f\colon X \to X$ eine Funktion.

1. Wir definieren die **Potenzen** von f für $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv durch
$$\begin{aligned} f^0 &:= \operatorname{id}_X \\ f^{n+1} &:= f^n \circ f \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$
2. f heißt eine **Involution**, wenn $f^2 = \operatorname{id}_X$ gilt.
3. f heißt eine **Funktion endlicher Ordnung**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft $f^n = \operatorname{id}_X$. In diesem Fall heißt die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft die **Ordnung** von f. Falls kein solches $n \in \mathbb{N}$ existiert, so heißt f eine **Funktion unendlicher Ordnung**.

Komposition injektiver und surjektiver Funktionen

Lemma 6.19

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

1. Sind f und g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Sind f und g beide surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
3. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
4. Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann ist g injektiv.
5. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
6. Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, dann ist f surjektiv.

Beweis.

Komposition zur Identität

Folgerung 6.20

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ Funktionen.

Wenn $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Beweis.

Funktionen endlicher Ordnung sind bijektiv

Folgerung 6.21

Es sei $f\colon X \to X$ eine Funktion endlicher Ordnung.

Dann ist f bijektiv.

Insbesondere ist jede Involution bijektiv.

Beweis.