R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 1 (Lösung)

Ausgabedatum: 13. Oktober 2025
Abgabedatum: 20. Oktober 2025

Übungsaufgabe I-1.1. (Aussagen und Wahrheitswert)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Sätze Aussagen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen kurz und geben Sie für die Aussagen (wenn möglich) ihren Wahrheitswert an.

(a) Grün ist die schönste Farbe.
(b) Das Lichtjahr ist keine Zeiteinheit.
(c) Geh jetzt ins Bett!

Lösung.

In der Sprache richtet sich der benötigte Genauigkeitsgrad nach der jeweiligen Anwendung und den Konsequenzen eines Missverständnisses. Man kann sich dafür z. B. die Genauigkeit der verwendeten Sprache in der Mathematik, in der Juristik, bei Sportveranstaltungen oder bei Familientreffen ansehen (in der Reihenfolge absteigender Genauigkeit). Insbesondere müssen die Parteien das gleiche Verständnis der verwendeten Begriffe haben, um Missverständnisse auszuschließen. Alle obigen Beispiele sind für uns nur im Rahmen der Umgangssprache „definiert“, diese ist also als Referenzsystem in dieser Aufgabe zu wählen.

(a) Der Satz „Grün ist die schönste Farbe.“ ist **keine Aussage**, denn welche Farbe die schönste ist, ist subjektiv und nicht allgemein gültig. Der Satz „Grün ist Georg’s Lieblingsfarbe“ ist hingegen eine Aussage, wenn klar ist, welcher Georg gemeint ist.
(b) Der Satz „Das Lichtjahr ist keine Zeiteinheit.“ ist **eine Aussage**, denn alle Komponenten des Satzes (Lichtjahre, Zeit) sind im Rahmen des Allgemeinverständnisses ausreichend konkret definiert und durch das „Das“ wird klar, dass es sich hier um das allgemeine Konzept des Lichtjahrs dreht, weshalb keine Quantoren notwendig sind. Die Aussage ist wahr, denn Lichtjahre sind eine Längeneinheit.

(c) Der Satz „Geh jetzt ins Bett!“ ist eine Anweisung, die keinen Wahrheitswert haben kann, und damit **keine Aussage**.

Übungsaufgabe I-1.2. (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache)

Verwenden Sie die in Definition 1.3 des Skripts definierten Junktoren, um die unten stehenden Aussagen zu symbolisieren.

Hinweis: Weitere Beispiele dafür finden sich in Beispiel 1.4 des Skripts.

(a) Sind sie zu stark, bist du zu schwach.

(b) Wir sehen gerade entweder einen Sonnenaufgang oder einen Sonnenuntergang.

(c) Ausschließlich eine Woche vor Silvester ist Heiligabend.

Lösung.

(a) Sind sie zu stark, bist du zu schwach.

S: Sie sind zu stark.
W: Du bist zu schwach.

- $S \rightarrow W$

Hier muss man die Konjunktion/die Wörter „wenn...dann“ aus dem Satzbau folgern.

(b) Wir sehen gerade entweder einen Sonnenaufgang oder einen Sonnenuntergang.

A: Wir sehen gerade einen Sonnenaufgang.
U: Wir sehen gerade einen Sonnenuntergang.

- $(A \land \neg U) \lor (\neg A \land U)$

Das „entweder - oder“ zeigt das ausschließende XOR an.

(c) Ausschließlich eine Woche vor Silvester ist Heiligabend.

S: Es ist eine Woche vor Silvester.
H: Es ist Heiligabend.

- $S \leftrightarrow H$

„Ausschließlich“ markiert hier das Bikonditional.

Übungsaufgabe I-1.3. (Klammern in zusammengesetzten Aussagen)

Es seien A_i für $i = 1, \dots, 8$ Aussagen. Setzen Sie in der folgenden zusammengesetzten Aussage alle Klammern, die auf Grund der Bindungsregeln (Ausdruck (1.1) des Skripts) weggelassen werden konnten.

$$A_1 \lor \neg A_2 \land A_3 \to \neg A_4 \land A_5 \leftrightarrow \neg\neg A_6 \to A_7 \lor A_8$$

Lösung.

Wir wenden die Bindungsregeln

$$\neg \text{ bindet stärker als } \land \text{ bindet stärker als } \lor \text{ bindet stärker als } \to \text{ bindet stärker als } \leftrightarrow \quad (1.1)$$

an und arbeiten uns dabei schrittweise von den am stärksten bindenden Junktoren (von innen) zu den am schwächsten bindenden (nach außen) vor. Da die Klammersetzung logisch äquivalente Ausdrücke liefert entsteht dabei die folgende Kette äquivalenter Aussagen:

$$\begin{aligned}
& A_1 \lor \neg A_2 \land A_3 \to \neg A_4 \land A_5 \leftrightarrow \neg\neg A_6 \to A_7 \lor A_8 \\
\Leftrightarrow\; & A_1 \lor (\neg A_2) \land A_3 \to (\neg A_4) \land A_5 \leftrightarrow (\neg(\neg A_6)) \to A_7 \lor A_8 && \text{(Klammern für } \neg) \\
\Leftrightarrow\; & A_1 \lor ((\neg A_2) \land A_3) \to ((\neg A_4) \land A_5) \leftrightarrow (\neg(\neg A_6)) \to A_7 \lor A_8 && \text{(Klammern für } \land) \\
\Leftrightarrow\; & \Big(A_1 \lor ((\neg A_2) \land A_3)\Big) \to ((\neg A_4) \land A_5) \leftrightarrow (\neg(\neg A_6)) \to (A_7 \lor A_8) && \text{(Klammern für } \lor) \\
\Leftrightarrow\; & \Big[\Big(A_1 \lor ((\neg A_2) \land A_3)\Big) \to ((\neg A_4) \land A_5)\Big] \leftrightarrow \Big[(\neg(\neg A_6)) \to (A_7 \lor A_8)\Big] && \text{(Klammern für } \to)
\end{aligned}$$

Wir könnten jetzt noch ein finales Klammerpaar um den ganzen Ausdruck setzen, das dann zu dem zentralen $\leftrightarrow$ gehört, aber keinen Mehrwert bringt.

Übungsaufgabe I-1.4. (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache mit Quantoren)

Symbolisieren Sie die unten stehenden Aussagen mithilfe der Aussageformen

$$\begin{aligned}
A(x) &: x \text{ ist Arbeitnehmer} \\
K(x, y) &: x \text{ kennt } y \\
S(x, y) &: x \text{ arbeitet für } y
\end{aligned}$$

für die nichtleere Grundmenge P aller Personen. Arbeitgeber sind Personen, für die jemand arbeitet.

(a) Wer für niemanden arbeitet, ist kein Arbeitnehmer.

(b) Es gibt genau einen Arbeitgeber, der keinen seiner Arbeitnehmer kennt.

Lösung.

Beachte: Für die obigen Aussagen sind abhängig von der Verwendung von Negationen und Vertauschen von Existenz- und Allquantor auch andere Lösungen denkbar, siehe Satz 2.2.

(a) Die Aussage „Wer für niemanden arbeitet, ist kein Arbeitnehmer." ist zu interpretieren als „Für alle Personen ist für alle Personen nicht zu arbeiten hinreichend dafür, nicht Arbeitnehmer zu sein." und damit zu:

$$\forall x \in P\, \big((\forall y \in P\, (\neg S(x, y))) \to \neg A(x)\big)$$

(b) „Es gibt genau einen Arbeitgeber, der keinen seiner Arbeitnehmer kennt." kann wie im ersten Beispiel beschrieben werden als:

$$\exists! y \in P\, \Big(\big(\exists x \in P\, (S(x, y))\big) \wedge \big(\forall x\, (A(x) \wedge S(x, y) \to \neg K(x, y))\big)\Big)$$

Übungsaufgabe I-1.5. (Negation von Aussagen mit Quantoren)

Gegeben sei ein Grundbereich X und Aussageformen $A(x), B(x, y), C(x, y, z)$ für $x, y, z \in X$. Negieren Sie die folgenden Aussagen und vereinfachen Sie die resultierenden Aussagen soweit wie möglich.

(a) $\forall x\, \forall y\, \big(A(x) \to B(x, y)\big)$

(b) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big((C(x, y, z) \vee A(z)) \wedge B(x, y)\big)$

Lösung.

Die Regeln für die Vertauschung von Negation und Existenz- und Allquantor finden sich in Satz 2.2. Wir negieren die jeweiligen Aussagen der Teilaufgaben und tauschen dann unter Beachtung der Regeln sukzessive die Negation weiter nach rechts in die Aussage, soweit dies möglich ist. Am Ende kann man z. B. mit den De Morganschen Gesetzen die Negation in den Aussagen „aufteilen". Da jede Anwendung der Negationsregeln eine äquivalente Aussage zur vorherigen Aussage ergibt, ergeben sich als Lösungen Ketten von äquivalenten Aussagen.

(a) Es ist

$$\begin{aligned} \neg\, \big(\forall x\, \forall y\, (A(x) \to B(x, y))\big) &\Leftrightarrow \exists x\, \exists y\, \neg\big(A(x) \to B(x, y)\big) \\ &\Leftrightarrow \exists x\, \exists y\, \big(A(x) \nrightarrow B(x, y)\big). \end{aligned}$$

(Rot markiert sind in diesem Beispiel jeweils die Terme, die sich in der letzten Äquivalenzumformung geändert haben. Die Negation der Allquantoren wurde hier in einem Schritt durchgeführt.)

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\neg\big(\forall x\,\exists y\,\forall z\,\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\big) &\Leftrightarrow \exists x\,\neg\big(\exists y\,\forall z\,\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\big)\\
&\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\neg\big(\forall z\,\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\big)\\
&\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\exists z\,\neg\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\\
&\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\exists z\,\big(\neg(C(x,y,z)\vee A(z))\vee\neg B(x,y)\big)\\
&\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\exists z\,\big(\neg C(x,y,z)\wedge\neg A(z)\vee\neg B(x,y)\big).
\end{aligned}$$

(Rot markiert sind in diesem Beispiel jeweils die Terme, die sich in der letzten Äquivalenzumformung geändert haben. Im letzten Term im letzten Schritt konnten die Klammern auf Grund der Bindungsregeln weggelassen werden.)

Hausaufgabe I-1.1 (Aussagen und Wahrheitswert) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

Entscheiden Sie, welche der folgenden Sätze Aussagen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen kurz und geben Sie für die Aussagen (wenn möglich) ihren Wahrheitswert an.

(a) Kannst du Englisch sprechen?

(b) Autos sind rot.

(c) Das Gewicht ist eine Kraft.

Lösung.

In der Sprache richtet sich der benötigte Genauigkeitsgrad nach der jeweiligen Anwendung und den Konsequenzen eines Missverständnisses. Man kann sich dafür z. B. die Genauigkeit der verwendeten Sprache in der Mathematik, in der Juristik, bei Sportveranstaltungen oder bei Familientreffen ansehen (in der Reihenfolge absteigender Genauigkeit). Insbesondere müssen die Parteien das gleiche Verständnis der verwendeten Begriffe haben, um Missverständnisse auszuschließen. Alle obigen Beispiele sind für uns nur im Rahmen der Umgangssprache „definiert", diese ist also als Referenzsystem in dieser Aufgabe zu wählen.

(a) Der Satz „Kannst du Englisch sprechen?" ist **keine Aussage**, denn es ist eine Frage, die keinen Wahrheitswert haben kann. Die dazugehörige Antwort könnte das, sofern sie korrekt formuliert wird. (1 Punkt)

(b) Das Fehlen jeglicher Quantoren macht den Satz „Autos sind rot." nicht gut interpretierbar, es sind beispielsweise folgende Interpretationen möglich: „*Alle* Autos sind rot." und „*Es gibt* rote Autos." Die erste Interpretation ist in der Umgangssprache gängig, daher geht das hier mit Bauchschmerzen als (falsche) Aussage durch. (1 Punkt)

(c) Der Satz „Das Gewicht ist eine Kraft." ist eine **Aussage**, denn alle Komponenten sind im Rahmen der Umgangssprache ausreichend genau definiert und durch das „Das" wird klar, dass es sich hier um das Konzept des Gewichts, nicht um einzelne Gewichte, handelt. Die Aussage ist wahr. (1 Punkt)

Hausaufgabe I-1.2 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

Verwenden Sie die in Definition 1.3 des Skripts definierten Junktoren, um die unten stehenden Aussagen zu symbolisieren.

Hinweis: Weitere Beispiele dafür finden sich in Beispiel 1.4 des Skripts.

(a) Ich gehe heute entweder in die Uni oder zum Sport.

(b) Bei meiner Größe stoße ich mich nicht oft.

(c) Wenn du den Bildschirm nicht ausmachst, kriegst du noch eckige Augen.

Lösung.

(a) Ich gehe heute entweder in die Uni oder zum Sport.

U: Ich gehe heute in die Uni.
S: Ich gehe heute zum Sport.

- $(U \wedge \neg S) \vee (\neg U \wedge S)$

„Entweder … oder" beschreibt das ausschließende XOR. (1 Punkt)

(b) Bei meiner Größe stoße ich mich nicht oft.

K: Ich bin klein.
S: Ich stoße mich oft.

- $K \wedge \neg S$

Der kausale Zusammenhang zwischen Körpergröße und Stoßhäufigkeit wird in der Logik nicht abgebildet, er war aber für die Interpretation nötig, um den Satz korrekt übertragen zu können. (1 Punkt)

(c) Wenn du den Bildschirm nicht ausmachst kriegst du noch eckige Augen.

F: Du machst den Bildschirm aus.
E: Du kriegst eckige Augen.

- Streng genommen: $\neg F \to E$
- Gemeint war allerdings wahrscheinlich: $\neg F \leftrightarrow E$

(1 Punkt)

Hausaufgabe I-1.3 (Junktoren und Wahrheitstafeln) 2 Punkte

Es seien P und Q Aussagen. Beweisen Sie Lemma 1.5 Aussage (ii) aus dem Skript, also dass die folgenden Aussagen dieselben Wahrheitstafeln haben:

(a) $P \leftrightarrow Q$

(b) $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

Lösung.

Die Wahrheitstafeln ergeben sich zu

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \to Q \land Q \to P$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

womit der Nachweis geführt ist, da die dritte Spalte und die letzte Spalte die gleichen Wahrheitsbelegung haben. (2 Punkte)

Hausaufgabe I-1.4 (Assoziativität der Äquivalenz) 2 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Assoziativität des Junktors „$\leftrightarrow$“.

Lösung.

Der Junktor „$\leftrightarrow$“ ist assoziativ, das heißt dass $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$ und $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$ die gleiche Wahrheitstafeln haben und daher

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

gilt, also dass

$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$$

eine Tautologie ist.

Die Wahrheitstafel ergibt sich als:

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B \leftrightarrow C$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	F	F	F	W
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	F	W
F	W	F	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	W	W	W
F	F	F	W	W	F	F	W

(2 Punkte)

Hausaufgabe I-1.5 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache mit Quantoren) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

Symbolisieren Sie die unten stehenden Aussagen mithilfe der Aussageformen

$$\begin{aligned} B(x) &: x \text{ ist bewohnt} \\ H(x,y) &: x \text{ ist mindestens so hoch wie } y \\ S(x,y) &: x \text{ und } y \text{ stehen in der gleichen Stadt} \end{aligned}$$

für die nichtleere Grundmenge H aller Häuser.

(a) Jedes Haus, das ein höchstes Haus seiner Stadt ist, ist unbewohnt.

(b) Es gibt genau eine Stadt, in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind.

Dabei sollen folgende Annahmen gelten:

- In jeder Stadt steht mindestens ein Haus.
- Jedes Haus steht in genau einer Stadt.

Lösung.

Beachte: Für die obigen Aussagen sind abhängig von der Verwendung von Negationen und Vertauschen von Existenz- und Allquantor auch andere Lösungen denkbar, siehe Satz 2.2.Um die obigen Aussageformen nutzen zu können, müssen wir in dieser Aufgabe die zu beschreibenden Eigenschaften für Städte in die dazugehörigen Eigenschaften von Häusern umformulieren.

(a) Die Aussage

„Jedes Haus, das ein höchstes Haus seiner Stadt ist, ist unbewohnt."

lässt sich umformulieren zu

„Für jedes Haus gilt: Wenn das Haus ein höchstes seiner Stadt ist, dann ist es unbewohnt."

Dafür definieren wir die Hilfsaussageform $E(x)$ mit der Bedeutung „x ist ein höchstes Haus seiner Stadt.":

$$E(x) \coloneqq \forall y \in H\,(S(x,y) \to H(x,y)).$$

Die Aufgabe, welche die Aussageform $E(x)$ hier erfüllen soll, ist, für ein festes x zu „filtern", welche Häuser y in der gleichen Stadt wie x stehen, und nur für diese abzuprüfen ob x mindestens so hoch ist. Für jedes feste $y \in H$, das nicht in der gleichen Stadt steht, wie x, ist $S(x, y)$ falsch und damit $S(x, y) \to H(x, y)$ wahr. Für jedes feste $y \in H$, das in der gleichen Stadt steht, wie x, ist $S(x, y)$ wahr, und damit $S(x, y) \to H(x, y)$ genau dann war, wenn $H(x, y)$ wahr ist, also x mindestens so hoch ist wie y. Damit ist die gesamte Aussage in $E(x)$ für festes x genau dann wahr, wenn für alle Häuser y aus der gleichen Stadt $H(x, y)$ gilt, also x eins der höchsten Häuser ist.

Damit ergibt sich direkt:

$$\forall x \in H\Big(E(x) \to \neg B(x)\Big)$$

(1.5 Punkte)

(b) Die Aussage

„Es gibt genau eine Stadt in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind.“

trennen wir auf in die Konjunktion der Eindeutigkeits und der Existenzaussage

„Es gibt höchstens eine Stadt, in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind.“

und

„Es gibt eine Stadt in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind.“

Diese beiden formulieren wir auf die Häuserebene um zu

„Für je zwei Häuser gilt: Wenn beide Häuser in einer Stadt stehen, in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind, dann stehen sie in der selben Stadt.“

und

„Es gibt ein Haus, dass in einer Stadt steht, in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind.“

Wir formulieren dazu zur Hilfe die Aussageform $G(x)$ mit der Bedeutung „x steht in einer Stadt, in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind.“:

$$G(x) \coloneqq \forall v \in H, \forall w \in H\ \left(B(v) \wedge B(w) \wedge S(x, v) \wedge S(x, w) \to H(v, w) \wedge H(w, v)\right).$$

Dabei ist der Ausdruck $B(v) \wedge B(w) \wedge S(x, v) \wedge S(x, w) \to H(v, w) \wedge H(w, v)$ genau dann wahr, wenn nicht sowohl v als auch w bewohnte Häuser aus der gleichen Stadt wie x sind, oder wenn sowohl v als auch w bewohnte Häuser aus der gleichen Stadt wie x sind, und v und w gleich hoch sind. Für jedes feste x ist $G(x)$ also korrekt, wenn wir alle Kombinationen von bewohnten Häusern v und w aus der gleichen Stadt wie x durchlaufen, und alle gleich hoch sind.

Dann ergibt sich die Lösung

$$\underbrace{\Big(\forall x \in H,\ \forall y \in H\ \Big(G(x) \wedge G(y) \to S(x, y)\Big)\Big)}_{\text{Es gibt höchstens eine Stadt ...}} \wedge \underbrace{(\exists x \in H\ (G(x)))}_{\text{Es gibt eine Stadt...}}$$

(1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-1.6 (Negation von Aussagen mit Quantoren) 1 + 1 = 2 Punkte

Gegeben sei ein Grundbereich X und Aussageformen $A(x), B(x,y), C(x,y,z)$ für $x,y,z \in X$. Negieren Sie die folgenden Aussagen und vereinfachen Sie die resultierenden Aussagen soweit wie möglich.

a) $\exists x\, \forall y\, \big(A(x) \wedge B(x,y)\big)$

b) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big((A(z) \wedge \neg B(x,y)) \vee C(x,y,z)\big)$

Lösung.

Die Regeln für die Vertauschung von Negation und Existenz- und Allquantor finden sich in Satz 2.2. Wir negieren die jeweiligen Aussagen der Teilaufgaben und tauschen dann unter Beachtung der Regeln sukzessive die Negation weiter nach rechts in die Aussage, soweit dies möglich ist. Am Ende kann man z. B. mit den De Morganschen Gesetzen die Negation in den Aussagen „aufteilen“. Da jede Anwendung der Negationsregeln eine äquivalente Aussage zur vorherigen Aussage ergibt, ergeben sich als Lösungen Ketten von äquivalenten Aussagen.

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\neg\big(\exists x\, \forall y\, \big(A(x) \wedge B(x,y)\big)\big) &\Leftrightarrow \forall x \neg\big(\forall y\, \big(A(x) \wedge B(x,y)\big)\big)\\ &\Leftrightarrow \forall x\, \exists y\, \neg\big(A(x) \wedge B(x,y)\big)\\ &\Leftrightarrow \forall x\, \exists y\, \big(\neg A(x) \vee \neg B(x,y)\big).\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\neg\big(\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big((A(z) \wedge \neg B(x,y)) \vee C(x,y,z)\big)\big) &\Leftrightarrow \exists x\, \forall y\, \exists z\, \neg\big((A(z) \wedge \neg B(x,y)) \vee C(x,y,z)\big)\\ &\Leftrightarrow \exists x\, \forall y\, \exists z\, \big(\neg(A(z) \wedge \neg B(x,y)) \wedge \neg C(x,y,z)\big)\\ &\Leftrightarrow \exists x\, \forall y\, \exists z\, \big((\neg A(z) \vee B(x,y)) \wedge \neg C(x,y,z)\big)\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(Rot markiert sind in diesem Beispiel jeweils die Terme, die sich in der letzten Äquivalenzumformung geändert haben. Im letzten Term im letzten Schritt konnten die Klammern auf Grund der Bindungsregeln weggelassen werden.)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.