Lineare Algebra I

Woche 02

21.10.2025 und 23.10.2025

§ 4 Mengenlehre

Was ist eine Menge?

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre, hat 1895 folgenden Versuch der Definition einer Menge angegeben:

Definition

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung X von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von X genannt werden) zu einem Ganzen.“

Diese Definition ist aber zu ungenau und lässt zu vieles als Menge zu, siehe Russell-Paradoxon später.

Mengen sind alleine durch ihre Elemente bestimmt.

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \underbrace{\forall x \in X \ (x \in Y)}_{X \subseteq Y} \wedge \underbrace{\forall x \in Y \ (x \in X)}_{Y \subseteq X}$$

Angabe von Mengen

- Aufzählung endlicher Mengen:

$$X := \{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3, 2\}$$

(Die Elimination doppelter Elemente geschieht bei der Konstruktion. Elemente einer Menge haben keine Reihenfolge.)

- Angabe einiger Elemente und „offensichtliche“ Fortsetzung

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$$

- **Mengenkomprehension** durch Angabe eines **Grundbereichs** X und einer Aussageform A auf X:

$$Y := \{x \in X \,|\, A(x)\}$$

(Auswahl der Elemente x von X, für die $A(x)$ wahr ist.)

cc by nc sa

Zahlbereiche

$\mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ **natürliche Zahlen**

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **natürliche Zahlen mit Null**

$\mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ **ganze Zahlen**

Zähler

$\mathbb{Q}$ $\quad \widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ **rationale Zahlen** (vorläufig)

Nenner

$\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}$ **reelle Zahlen**

$\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{C} := \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **komplexe Zahlen**

mehr zur Konstruktion der Zahlen in Anhang A im Skript

Russell-Paradoxon

Die sehr freie Definition einer Menge nach Cantor lässt es zu, X als die Menge aller Mengen zu definieren. Wählen wir dann $A(x)$ als die Aussageform „enthält sich nicht selbst als Element", so ist

$$R := \{x \in X \mid x \notin x\}$$

die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Enthält R sich selbst?

- Falls R sich selbst enthält ($R \in R$), dann liegt das daran, dass R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ erfüllt.
- Falls R sich nicht selbst enthält ($R \notin R$), dann erfüllt R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ nicht, also gilt $R \in R$.

Also: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ ↯

Ausweg: Axiomatische Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel

- Die Auflösung in der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel (**ZF-Mengenlehre**, 1930) besteht darin, den Mengenbegriff geeignet einzuschränken. Konstruktionen wie die „Menge aller Mengen“ sind dann nicht mehr möglich.

  In dieser Lehrveranstaltung können wir das aber nicht behandeln.

- Die Mengenkomprehension als Konstruktionsprinzip $Y := \{x \in X \mid A(x)\}$ bleibt in der ZF-Mengenlehre erhalten. Der Grundbereich X der Aussageform A muss aber bereits eine Menge sein, damit wieder eine Menge herauskommt.

- Es gibt allgemeinere Objekte als Mengen, sogenannte Klassen, wie zum Beispiel die **Klasse aller Mengen**.

Proseminar „Grundlagen der Mathematik“ geplant für Sommersemester 2026

Intervalle in $\mathbb{R}$

$a \le x \wedge x \le b$ i. S. der üblichen „$\le$"-Relation

Intervalle werden mittels Mengenkomprehension definiert:

Endpunkt

$[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, \overbrace{a \leqslant x \leqslant b}\}$ **abgeschlossen**

$(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ **links offen, rechts abgeschlossen**

$[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ **links abgeschlossen, rechts offen**

$]a,b[$ $(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ **offen**

$[a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x\}$ **rechts unendlich, abgeschlossen**

$(a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$ **rechts unendlich, offen**

$(-\infty, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant b\}$ **links unendlich, abgeschlossen**

$(-\infty, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$ **links unendlich, offen**

$(-\infty, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, \top\} = \mathbb{R}$ **beidseitig unendlich**

wahr

$[\![a, b]\!] \coloneqq [a, b] \cap \mathbb{Z}$ **ganzzahliges Intervall**

Schnittmenge

$[\![1, 3]\!] = \{1, 2, 3\}$

Definition 4.2

$Y \supseteq X$

- X ist eine **Teilmenge** von Y, kurz: $\boxed{X \subseteq Y}$,
  wenn jedes Element von X auch ein Element von Y ist:

  $$\forall x \in X \, (x \in Y).$$

  Y ist dann eine **Obermenge** von X, kurz: $Y \supseteq X$.

- X ist eine **echte Teilmenge** von Y, kurz: $X \subsetneq Y$,
  wenn $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$ gilt:

  $$\forall x \in X \, (x \in Y) \quad \wedge \quad \exists y \in Y \, (y \notin X).$$

  Y ist dann eine **echte Obermenge** von X, kurz: $Y \supsetneq X$.

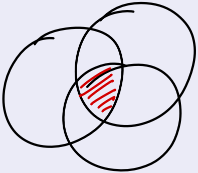
- Die leere Menge $\emptyset$ hat keine Elemente.
  Sie ist Teilmenge jeder Menge.

Definition 4.3

Schnittmenge einer ...

- nichtleeren Menge $\mathcal{A}$ von Mengen

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \mid \forall A \in \mathcal{A}\ (x \in A)\}$$

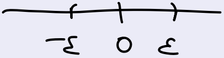


- indizierten Menge von Mengen A_i

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I\ (x \in A_i)\}$$

Indexmenge

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} (-\varepsilon, \varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon \in (0,\infty)} (-\varepsilon, \varepsilon)$$



$$= \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} (-\varepsilon, \varepsilon) = \{0\}$$

- Menge von zwei Mengen A_1, A_2

$$\bigcap \{A_1, A_2\}$$

$$A_1 \cap A_2 := \{x \mid x \in A_1 \ \wedge \ x \in A_2\}$$

Vereinigungsmenge von Mengen

Definition 4.3

Vereinigungsmenge einer ...

- (evtl. leeren) Menge $\mathcal{A}$ von Mengen

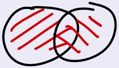
$$\bigcup \mathcal{A} := \underbrace{\{x \mid \exists A \in \mathcal{A}\ (x \in A)\}}_{\text{existiert aufgrund eines Axioms in ZF}}$$

- indizierten Menge von Mengen A_i

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{[n, n+1]}_{\subseteq \mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I\ (x \in A_i)\}$$

- Menge von zwei Mengen A_1, A_2



$$\bigcup \{A_1, A_2\}$$

$$A_1 \cup A_2 := \{x \mid x \in A_1 \ \vee \ x \in A_2\}$$

Disjunkte Vereinigungsmenge von Mengen

Definition 4.3 Mengen mit leerer Schnittmenge heißen disjunkt

Disjunkte Vereinigungsmenge einer ...

- (evtl. leeren) Menge $\mathcal{A}$ paarweise disjunkter Mengen

$$\dot{\bigcup} \mathcal{A} := \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} \, (x \in A)\}$$

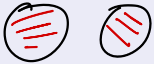
- indizierten Menge paarweise disjunkter Mengen A_i

$$\dot{\bigcup_{i \in I}} A_i := \{x \mid \exists i \in I \, (x \in A_i)\}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1) = \mathbb{R}$$

- Menge von zwei disjunkten Mengen A_1, A_2

$$A_1 \mathbin{\dot\cup} A_2 := \{x \mid x \in A_1 \ \vee \ x \in A_2\}$$

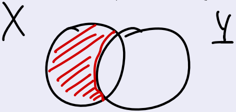


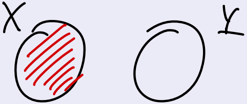
Differenzen von zwei Mengen

Definition 4.4

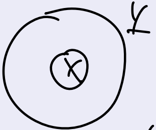
Differenzmenge von Y in X „X ohne Y"

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$$





$X \setminus Y = X$



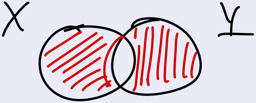
$X \setminus Y = \emptyset$

symmetrische Differenz von X und Y

„Was unterscheidet X und Y?"

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

$$= (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

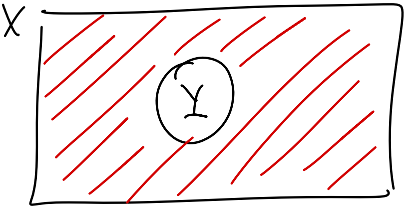


Definition 4.4

Komplement von $\boxed{Y \subseteq X}$ in X:

$$Y^c \coloneqq X \setminus Y = \{x \in X \,|\, x \notin Y\}$$

Die Menge X taucht im Symbol Y^c nicht auf. Sie muss aus dem Zusammenhang klar sein.



$Y^c = X \setminus Y$

Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung

Lemma 4.5

$$X \cap Y = Y \cap X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cap$$
$$X \cup Y = Y \cup X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cup$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cap$$
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cup$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \qquad \textbf{Distributivität}$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \qquad \textbf{Distributivität}$$

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$$

$$X \cap Y = X \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$
$$X \cup Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

jedes Mal ist ^{c} das Komplement in X

Lemma 4.5

Sind Y und Z Teilmengen einer Menge X, bzgl. der wir das Komplement nehmen, so gilt weiter:

$(Y \cap Z)^c = Y^c \cup Z^c$ **De Morgansches Gesetz**

$(Y \cup Z)^c = Y^c \cap Z^c$ **De Morgansches Gesetz**

$(Y^c)^c = Y$ Komplementbildung ist **involutorisch**
selbstinvers

$Y \subseteq Z \quad \Leftrightarrow \quad Z^c \subseteq Y^c$

Bindungsregeln

Es bindet ...

$$\cdot^c \text{ stärker als } \setminus \text{ stärker als } \cap \text{ stärker als } \cup$$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Klammern können jedoch zur Verdeutlichung nicht schaden.

$$(X^c) \cap Y \quad \text{ist dasselbe wie} \quad X^c \cap Y$$

$$X \setminus Y \cup Z \quad \text{ist dasselbe wie} \quad (X \setminus Y) \cup Z$$

Potenzmenge

Definition 4.6

Die Menge aller Teilmengen einer Menge X

$$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$$

heißt die **Potenzmenge** von X.

Beispiel 4.7

(gilt auch, wenn a, b, c nicht paarweise verschieden sind)

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

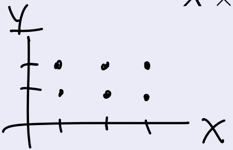
$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

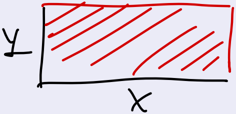
Definition 4.8

nicht verwechseln mit Intervallen $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

kartesisches Produkt von zwei Mengen X, Y:

$$X \times Y := \{\underbrace{(x, y)}_{\textbf{Paar}} \,|\, x \in X \;\wedge\; y \in Y\}$$

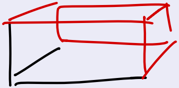




kartesisches Produkt von endlich vielen Mengen $X_1, \ldots, X_n$ für $n \in \mathbb{N}$:

$X_1 \times \cdots \times X_n$

$$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i := \{\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{n\text{-}\textbf{Tupel}} \,|\, x_i \in X_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$



Paare und Tupel sind geordnet!

§ 5 Relationen

Relation

Definition 5.1 $(x,y) \in R$ kurz: $x R y$

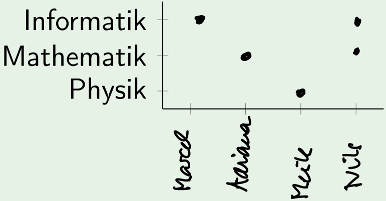
Es seien X und Y Mengen sowie $R \subseteq X \times Y$.
(R, X, Y) heißt eine **Relation** zwischen X und Y mit **Graph** R.

Im Fall $X = Y$ heißt die Relation **homogen**. auf X

Wenn X und Y klar sind, sagt man auch oft, R selbst sei die Relation.

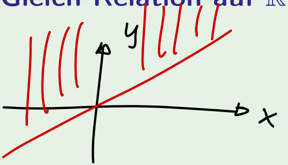
Beispiel 5.2

Relation „studiert das Fach“



Beispiel 5.2 (homogen, $X = Y = \mathbb{R}$)

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$ ist die **Kleiner-Gleich-Relation auf $\mathbb{R}$**.



Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{Z}$ (homogen)

Beispiel 5.2

Die Zahl $x \in \mathbb{Z}$ **teilt** die Zahl $y \in \mathbb{Z}$, kurz: $x \mid y$, wenn eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $y = n\,x$ gilt. y ist ganzzahliges Vielfaches von x

Teilbarkeitsrelation $R := \{(x, y) \mid x \mid y\}$ zwischen $X \subseteq \mathbb{Z}$ und $Y \subseteq \mathbb{Z}$

Ausschnitt

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	•								
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2	•		•		•		•		•
3	•			•			•		
4	•				•				•
5	•					•			
6	•						•		
7	•							•	
8	•								•

weitere homogene Relationen

Beispiel 5.2

Es sei X eine beliebige Menge.

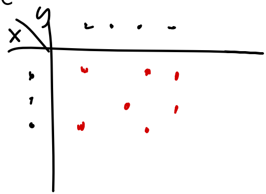
- **Inklusionsrelation** $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \,|\, A \subseteq B\}$ $\boxed{\text{auf } \mathcal{P}(X)}$
  „ist enthalten in", „ist Teilmenge"

- **Gleichheitsrelation** oder **Identitätsrelation** $\boxed{\text{auf } X}$
  $\mathrm{id}_X := (\Delta_X, X, X)$ mit der **Diagonale** in $X \times X$ als Graph:

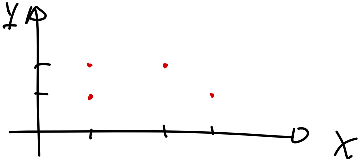
  $$\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X \,|\, x = y\}$$

- **universelle Relation** $\boxed{\text{auf } X}$
  $U_X := (U, X, X)$ mit Graph $U = X \times X$

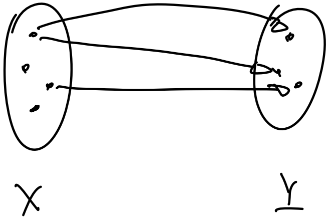
Tabelle



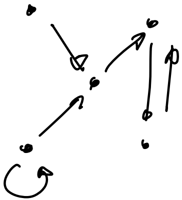
Graph $R \subseteq X \times Y$



Pfeildiagramm $x \to y \;:\Leftrightarrow\; xRy$



gerichteter Graph im Fall $X = Y$ $x \to y \;:\Leftrightarrow\; xRy$



Komposition von Relationen

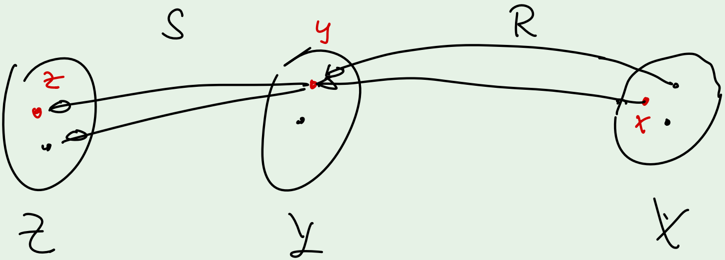
Es seien X, Y und Z Mengen sowie (R, X, Y) und (S, Y, Z) zwei Relationen. Dann heißt die Relation $(S \circ R, X, Z)$ mit

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

„S nach R"

die **Komposition** von R und S.

Beispiel $(x, z) \in S \circ R$

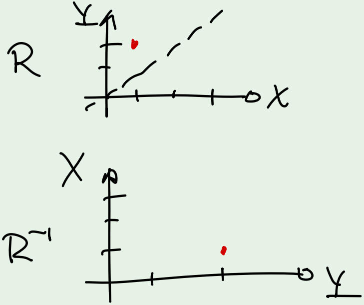


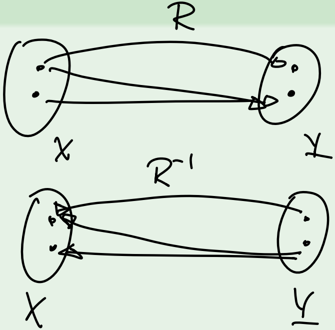
Komposition ist assoziativ: $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Es seien X und Y Mengen und (R, X, Y) eine Relation. Dann heißt (R^{-1}, Y, X) die **Umkehrrelation** oder **inverse Relation** von R mit

$$R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\} \subseteq Y \times X.$$

Beispiel





Potenzen homogener Relationen

Definition 5.8

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X. Wir definieren die **Potenzen** von R für $n \in \mathbb{Z}$ rekursiv durch

$$R^0 := \cancel{\mathrm{id}_X}\ \Delta_X$$

$$R^{n+1} := R^n \circ R \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{oder } R \circ R^n$$

$$R^{-n} := (R^n)^{-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

z.B. R = „ist Elternteil von"

R^2 = „ist Großelternteil von"

R^{-2} = „ist Enkelkind von"

Eigenschaften homogener Relationen

Definition 5.9

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.

R heißt ...	wenn gilt:	
+ **reflexiv**:	$(x, x) \in R$ für alle $x \in X$	$\Delta_X \subseteq R$
− **irreflexiv**:	$(x, x) \notin R$ für alle $x \in X$	$\Delta_X \cap R = \emptyset$
+ **symmetrisch**:	$(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R$	$R^{-1} \subseteq R$
− **antisymmetrisch**:	$(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y$	
+ **transitiv**:	$(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R$	
+ **total**:	$(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ für alle $x, y \in X$	

+ Annahme an die Reichhaltigkeit der Relation

− Nicht-

Eigenschaften homogener Relationen

Beispiel 5.10

Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$ ist

- ✓ reflexiv
- – irreflexiv $1 \mid 1$
- – symmetrisch $2 \mid 4, \; 4 \nmid 2$
- – antisymmetrisch $2 \mid -2, \; -2 \mid 2$
- ✓ transitiv
- – total $2 \nmid 3, \; 3 \nmid 2$

Beispiel 5.10

Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}_0$ ist

- ✓ reflexiv
- – irreflexiv
- – symmetrisch
- ✓ antisymmetrisch
- ✓ transitiv
- – total

Durchschnitt von Relationen

Definition 5.11

Es seien X und Y Mengen und $\mathcal{R}$ eine nichtleere Menge von Relationen zwischen X und Y. Die Relation

$$\bigcap \mathcal{R} := \big\{(x, y) \,\big|\, \forall R \in \mathcal{R} \, ((x, y) \in R)\big\}$$

heißt der **Durchschnitt** der Relationen in $\mathcal{R}$.

Lemma 5.13

Es seien X ~~und Y Mengen~~ eine Menge und $\mathcal{R}$ eine nichtleere Menge von Relationen ~~zwischen X und Y.~~ auf X.

1. Sind alle $R \in \mathcal{R}$ reflexiv, dann auch $\bigcap \mathcal{R}$.
2. Sind alle $R \in \mathcal{R}$ symmetrisch, dann auch $\bigcap \mathcal{R}$.
3. Sind alle $R \in \mathcal{R}$ transitiv, dann auch $\bigcap \mathcal{R}$.

Reflexive Hülle einer homogenen Relation

Definition 5.14

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.
Die **reflexive Hülle** von R ist definiert als

$$R^? := \bigcap \{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

$R \subseteq R^?$ und $R^?$ ist reflexiv

Lemma 5.15

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.
R ist reflexiv genau dann, wenn $R^? = R$ gilt.

Beweis. „$\Rightarrow$": R sei reflexiv, dann ist R Element dieser Menge. Also gilt $R^? = \bigcap\{\cdots\} \subseteq R$. Andererseits gilt auch $R \subseteq R^?$.
„$\Leftarrow$": Es gelte $R^? = R$. Wäre R nicht reflexiv, so gäbe es ein $x \in X$ mit $(x,x) \notin R$. Aber: (x,x) gehört zu jeder reflexiven Oberrelation S von R, also auch zu $R^?$. $\lightning$

Per Konstruktion ist die reflexive Hülle $R^?$ der Relation R die kleinste reflexive Oberrelation von R. Sie hat folgende Darstellung:

Satz 5.17

zu zeigen

klar wegen $R^1 = R$, $R^0 = \Delta_X$

$$R^? = \bigcup_{n \in \{0,1\}} R^n = R \cup \Delta_X$$

Beweis. • $R^? \supseteq R \cup \Delta_X$: Es sei eine beliebige reflexive Oberrelation von R, dann gilt also $R \subseteq S$ und $\Delta_X \subseteq S$, also auch $R \cup \Delta_X \subseteq S$. Durchschnittsbildung zeigt $R \cup \Delta_X \subseteq R^?$.

• $R^? \subseteq R \cup \Delta_X$: $R \cup \Delta_X$ ist eine reflexive Oberrelation von R, kommt also als Menge im $\bigcap \{\cdots\}$ vor. Also gilt $R^? = \bigcap \{\cdots\} \subseteq R \cup \Delta_X$.

Weitere Hüllen homogener Relationen

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.

reflexive Hülle von R

$R^? := \bigcap\{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}$

symmetrische Hülle von R

$R^{\text{sym}} := \bigcap\{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}$

transitive Hülle von R

$R^+ := \bigcap\{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}$

reflexiv-transitive Hülle von R

$R^* := \bigcap\{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv \& transitiv und } R \subseteq S\}$

reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle von R

$R^\sim := \bigcap\{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv, symmetrisch \& transitiv und } R \subseteq S\}$

Weitere Hüllen homogener Relationen

Für alle diese Hüllen $R^?, R^{\mathrm{sym}}, R^+, R^*, R^\sim$ gilt:

Lemma 5.15

Die Hüllenbildung fügt genau dann nichts zu R hinzu, wenn R die gewünschten Eigenschaften bereits besitzt.

Es gelten die Darstellungen:

Satz 5.17

$$R^? = \bigcup_{n\in\{0,1\}} R^n = R \cup \Delta_X \qquad R^{\mathrm{sym}} = \bigcup_{n\in\{-1,1\}} R^n = R \cup R^{-1}$$

$$R^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n \qquad R^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} R^n$$

$$R^\sim = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} (R \cup R^{-1})^n$$

mehr zu Hüllen in Anhang C im Skript