R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 6 (Lösung)

Ausgabedatum: 17. November 2025
Abgabedatum: 24. November 2025

Übungsaufgabe I-6.1. (Homomorphismen)

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Homomorphismen, Endomorphismen, Isomorphismen bzw. Automorphismen sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

  (i) $f\colon (\mathbb{R}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq 2^x$

  (ii) $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $f(x) \coloneqq 2^x$

  (iii) $f\colon (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cup) \to (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cap)$, $f(A) \coloneqq \mathbb{Z} \setminus A$

  (iv) $f\colon (\mathbb{N}, \max(\cdot,\cdot)) \to (\mathbb{N}, +)$, $f(n) \coloneqq 2\,n$

(b) Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei isomorphe Gruppen. Zeigen Sie, dass $(G_1, \star)$ genau dann abelsch ist, wenn $(G_2, \square)$ abelsch ist.

Lösung.

(a) (i) Die Struktur $(\mathbb{R}, \cdot)$ bildet keine Gruppe, sondern nur einen Monoid, wir können also untersuchen, ob es sich hier um einen Monoidhomomorphismus handelt. Die Beziehung

$$f(x \cdot y) = 2^{x \cdot y} = 2^x + 2^y = f(x) + f(y)$$

gilt nicht für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$, denn z. B. für $x = 1$, $y = 2$ erhält man

$$f(1 \cdot 2) = 2^{1 \cdot 2} = 4 \neq 5 = 2^1 + 2^2 = f(1) + f(2).$$

Die multiplikative Struktur links und die additive Struktur rechts wird also von Exponentialfunktionen nicht erhalten. Diese Art von Struktur wird von den Logarithmusfunktionen erhalten (deren Umkehrfunktionen). Es handel sich also **nichtmal** um einen **Halbgruppenhomomorphismus**.

(ii) Die im Vergleich zu Beispiel (i) vertauschten Strukturen links und rechts sind mit der Exponentialfunktion wiederum verträglich, denn es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y).$$

Da sowohl $(\mathbb{R}, +)$ als auch $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ Gruppen sind, handelt es sich also schonmal um einen **Gruppenhomomorphismus**. Da diese verschieden sind, liegt **kein Endomorphismus und damit kein Automorphismus** vor. Da f auf Grund des eingeschränkten Bildbereichs bijektiv ist, handelt es sich allerdings um einen **Gruppenisomorphismus**.

(iii) Bei $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cup)$ und $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cap)$ handelt es sich um zwei verschiedene Monoide (mit den neutralen Elementen $\emptyset$ respektive $\mathbb{Z}$, jedoch nicht um Gruppen. Dass die Komplementbildung strukturerhaltend sind, also, dass

$$\mathbb{Z} \setminus (A \cup B) = (\mathbb{Z} \setminus A) \cap (\mathbb{Z} \setminus B),$$

ist genau die Aussage der de Morganschen Regeln in Lemma 4.5 des Skripts. Hier sehen wir sofort, dass es nicht ausschlaggebend ist, dass die Grundmenge für die Potenzmenge $\mathbb{Z}$ ist. Für Monoide fordern wir zusätzlich, dass die neutralen Elemente aufeinander abgebildet werden, bei den neutralen Elementen $\mathbb{Z}$ und $\emptyset$ unter Komplementbildung genau der Fall ist. Die Komplementbildung von der Potenzmenge in die Potenzmenge ist bijektiv (jede Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist eindeutig über ihr Komplement bestimmt), wir haben also einen **Monoidisomorphismus**.

(iv) Bei $(\mathbb{N}, \max(\cdot,\cdot))$ handelt es sich um eine Halbgruppe, denn die Maximumsbildung in den natürlichen Zahlen ist eine assoziative Verknüpfung. Das neutrale Element bezüglich der Maximumsbildung ist die 1, hier liegt also ein Monoid vor. $(\mathbb{N}, +)$ ist eine bekannte Halbgruppe ohne neutrales Element, uns bleibt also nur zu prüfen, ob wir es mit einem Halbgruppenhomomorphismus (oder -isomorphismus) zu tun haben. Da für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$f(\max(n,m)) = 2\max(n,m) = \max(2n, 2m) \neq 2n + 2m = f(n) + f(m)$$

handelt es sich hier um **keinen Homomorphismus**.

(b) Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ein Isomorphismus und $(G_2, \square)$ abelsch. Es seien weiter $a, b \in (G_1, \star)$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} a \star b &= f^{-1}(f(a \star b)) && \text{(Invertierbarkeit von } f\text{)} \\ &= f^{-1}(f(a) \square f(b)) && \text{(Strukturerhaltung von } f\text{)} \\ &= f^{-1}(f(b) \square f(a)) && \text{(Kommutativität in } (G_2, \square)\text{)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f^{-1}(f(b \star a)) && \text{(Strukturerhaltung von } f\text{)} \\
&= b \star a.
\end{aligned}
$$

Die Gegenrichtung, für kommutatives $(G_1, \star)$, folgt analog mit vertauschten Rollen von $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ für eine entsprechende Bijektion.

Übungsaufgabe I-6.2. (Kern und Bild)

(a) Bestimmen Sie Kern und Bild der Gruppenhomomorphismen in Übungsaufgabe I-6.1 Teilaufgabe (a).

(b) Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ endliche Gruppen. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Gruppen $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ sind genau dann isomorph, wenn ein Gruppenhomomorphismus $f : G_1 \to G_2$ mit trivialem Kern existiert.

Lösung.

(a) Der einzige Gruppenhomomorphismus ist *(ii)*. Der Bildbereich der Exponentialfunktion natürlich $\operatorname{Bild}(f) = \mathbb{R}_{>0}$. Der Kern ist das Urbild des neutralen Elements in der Zielgruppe, also auf Grund der Bijektivität $\operatorname{Kern}(f) = f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$.

Für den Monoidisomorphismus in *(iii)* können wir natürlich Kern und Bild genauso untersuchen. Da es sich hier um einen Isomorphismus handelt sind Bild und Kern trivial.

(b) Die Aussage ist falsch. Das sieht man zum Beispiel wenn man für $(G_1, \star)$ die triviale Gruppe und für $(G_2, \square)$ eine beliebige nicht-triviale Gruppe wählt. Diese Gruppen sind dann natürlich nicht isomorph, aber der triviale Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung wie in der Aussage gefordert.

Übungsaufgabe I-6.3. (Normalteiler und Faktorgruppe)

(a) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ mit $\tilde{\cdot}$ definiert durch $[a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b] \coloneqq [a \cdot b]$ ein kommutatives Monoid mit neutralem Element $[1]$ ergibt, welches isomorph zu dem kommutativen Monoid $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$ aus Beispiel 7.22 ist.

Beachte: Mit der Menge $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ ist die Faktormenge des Normalteilers $(m\mathbb{Z}, +)$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ gemeint. Diese Faktormenge stimmt mit den Restklassen in $\mathbb{Z} / \overset{m}{\equiv} = \{\{a + m\mathbb{Z}\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ überein. Auf dieser Menge soll jetzt statt der Faktorverknüpfung $\tilde{+}$ (siehe Beispiel 8.23 im Skript) das $\tilde{\cdot}$ untersucht werden.

(b) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Zeigen Sie die Aussage von Bemerkung 8.24 im Skript, also dass die Normalteiler von $(G, \star)$ genau die Kerne geeigneter Homomorphismen sind.

(c) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Zeigen Sie Lemma 8.20, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(N_i)_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von Normalteilern von $(G, \star)$, dann ist auch $\bigcap_{i\in I} N_i$ ein Normalteiler von G.

(ii) Ist $\mathcal{N}$ eine nichtleere Menge von Normalteilern von $(G, \star)$, dann ist auch $\bigcap \mathcal{N}$ ein Normalteiler von $(G, \star)$.

Lösung.

(a) Man kann direkt an der Definition von $\tilde{\cdot}$ ablesen, dass $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ der Bildbereich ist, denn die Bilder sind ja genau Klassen aus der Faktormenge. Die Abbildung ist außerdem wohldefiniert (repräsentantenunabhängig), denn für Repräsentanten $a, \tilde{a}$ und $b, \bar{b}$ aus $\mathbb{Z}$ mit $[a] = [\bar{a}]$ und $[b] = [\bar{b}]$ existieren $z_a, z_b \in \mathbb{Z}$, so dass $\bar{a} = a + z_a \cdot m$ und $\bar{b} = b + z_b \cdot m$, also ist

$$\begin{aligned}[\bar{a}] \mathbin{\tilde{\cdot}} [\bar{b}] &= [\bar{a} \cdot \bar{b}] = \bar{a} \cdot \bar{b} + m\mathbb{Z} = (a + z_a \cdot m) \cdot (b + z_b \cdot m) + m\mathbb{Z} = a \cdot b + m\mathbb{Z} \\ &= [a \cdot b] = [a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b].\end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine innere **Verknüpfung** auf $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$.

Die **Assoziativität** von $\tilde{\cdot}$ wird direkt von der Assoziativität von $\cdot$ in den ganzen Zahlen vererbt, denn

$$([a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b]) \mathbin{\tilde{\cdot}} [c] = [a \cdot b] \mathbin{\tilde{\cdot}} [c] = [(a \cdot b) \cdot c] = [a \cdot (b \cdot c)] = [a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b \cdot c] = [a] \mathbin{\tilde{\cdot}} ([b] \mathbin{\tilde{\cdot}} [c]).$$

Analog wird die **Kommutativität** vererbt, denn

$$[a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b] = [a \cdot b] = [b \cdot a] = [b] \mathbin{\tilde{\cdot}} [a].$$

Dass das **neutrale Element** aus der Klasse $[1]$ besteht, wird ebenfalls vererbt, denn es ist

$$[1] \mathbin{\tilde{\cdot}} [a] = [1 \cdot a] = [a] = [a \cdot 1] = [a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [1].$$

Der kanonische Isomorphismus $f\colon (\mathbb{Z}_m, \cdot_m) \to (\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}, \tilde{\cdot})$ ist die Abbildung

$$\{0, \ldots, m-1\} \ni k \mapsto [k] \in \mathbb{Z} / m\mathbb{Z}.$$

Die Bijektivität der Abbildung folgt sofort daraus, dass $k \in \{0, \ldots, m-1\}$. Die Homomorphismuseigenschaft zeigt die Gleichungskette

$$f(a \cdot_m b) = f(a \cdot b \mod m) = [a \cdot b \mod m] = [a \cdot b] = f(a) \mathbin{\tilde{\cdot}} f(b) \quad \forall a, b \in \{0, \ldots, m-1\}.$$

(b) Es sei $(N, \star)$ ein Normalteiler von der Gruppe $(G, \star)$, deren neutrales Element wir e_G nennen werden. Wir suchen eine Gruppe $(\tilde{G}, \square)$ (mit einem neutralen Element $e_{\tilde{G}}$) und einen Homomorphismus $f\colon (G, \star) \to (\tilde{G}, \square)$ mit $\operatorname{Kern}(f) = N$. Naheliegend ist, hier als $(\tilde{G}, \square)$ gerade $(G / N, \tilde{\star})$ zu wählen, denn hier ist das dazugehörige neutrale Element gerade $e_{\tilde{G}} = [e_G] = N$ und die kanonische Surjektion

$$a \to [a] = a \star N$$

ist gerade ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit dem entsprechenden Kern, siehe Satz 8.21.

(c) Die Beweise für Familien und Mengen verlaufen vollständig analog, wir zeigen hier also nur den ersten Fall für Familien. Es sei also $(N_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Normalteilern einer Gruppe $(G, \star)$. Aus der Schnittstabilität für Untergruppen, siehe Lemma 7.47, folgt sofort, dass $\bigcap_{i \in I} N_i$ ebenfalls eine Untergruppe ist. Ist nun $a \in G$ und $b \in \bigcap_{i \in I} N_i$, dann ist $b \in N_i$ für alle $i \in I$, welche alle Normalteiler sind. Entsprechend ist

$$a \star b \in N_i \star a \quad \forall i \in I,$$

und somit $a \star b \in \bigcap_{i \in I} N_i \star a$, also $a \star \bigcap_{i \in I} N_i \subseteq \bigcap_{i \in I} N_i \star a$. Analog zeigt man die andere Inklusion und erhält, dass $\bigcap_{i \in I} N_i$ ein Normalteiler von G ist.

Übungsaufgabe I-6.4. (Homomorphiesatz für Gruppen)

Geben Sie einen Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ nach $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ an, so dass der Homomorphiesatz Ihnen die Isomorphie von $\mathbb{Z}_{12} / 3\mathbb{Z}_{12}$ und $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ liefert.

Lösung.

Damit wir hier den Homomorphiesatz anwenden können, benötigen wir einen Gruppenhomomorphismus $f\colon (\mathbb{Z}_{12}, +_{12}) \to (\mathbb{Z}_3, +_3)$ mit $\ker f = 3\mathbb{Z}_{12} = \{0, 3, 6, 9\}$, also genau jedes Vielfache von 3 in $\mathbb{Z}12$ soll auf 0 abgebildet werden, wofür sich natürlich $f\colon z \mapsto z \mod 3$ anbietet.

Es bleibt zu zeigen, dass dieses f tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist. Das folgt aus den Gleichheiten

$$\begin{aligned}
f(z_1 +_{12} z_2) &= (z_1 + z_2 \mod 12) \mod 3 \\
&= (z_1 + z_2) \mod 3 \\
&= ((z_1 \mod 3) + (z_2 \mod 3)) \mod 3 \\
&= (z_1 \mod 3) +_3 (z_2 \mod 3) \\
&= f(z_1) +_3 f(z_2)
\end{aligned}$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_{12}$.

Hausaufgabe I-6.1 (Homomorphismen) 3.5 + 1.5 = 5 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Homomorphismen, Endomorphismen, Isomorphismen bzw. Automorphismen sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $f\colon (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq \ln(x)$

(ii) $f\colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq 3x + 1$

(iii) $f\colon (\mathbb{Z}_2, +_2) \to (\{\top, \bot\}, \mathrm{XOR})$, $f(z) \coloneqq (x > 0)$

(iv) $f\colon (S_3, \circ) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$, $f(\sigma) \coloneqq [0, -\operatorname{sgn}(\sigma)]$

(b) Es seien $f\colon G_1 \to G_2$ und $g\colon G_2 \to G_3$ (Halbgruppen-, Monoid-, Gruppen-)isomorphismen von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$ bzw. von $(G_2, \square)$ nach $(G_3, \bullet)$. Zeigen Sie, dass dann auch f^{-1} und $g \circ f$ ein solcher Isomorphismus von $(G_2, \square)$ nach $(G_1, \star)$ bzw. von $(G_1, \star)$ nach $(G_3, \bullet)$ sind.

Lösung.

(a) (i) Bei $f\colon (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq \ln(x)$ handelt es sich im (Ur-)Bildbereich um Gruppen. Die Rechenregeln zum Logarithmus liefern dabei direkt, dass $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und damit die Strukturverträglichkeit, also ist f ein Gruppenhomomorphismus. Im (Ur-)Bildbereich liegen nicht die gleichen Gruppen vor, damit kann es sich nicht um einen Endo- oder Automorphismus handeln. Allerdings ist der Logarithmus bijektiv auf den positiven reellen Zahlen mit der Exponentialabbildung als Inverse, daher handelt es sich um einen **Gruppenisomorphismus**. (1 Punkt)

(ii) Bei $f\colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq 3x + 1$ handelt es sich im (Ur-)Bildbereich jeweils um wohlbekannte Gruppen. Durch die Verschiebung der linearen Abbildung um die 1 handelt es sich aber nicht um eine +-verträgliche Abbildung, denn $f(0 + 0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 2 = 3 \cdot 0 + 1 + 3 \cdot 0 + 1 = f(0) + f(0)$. (0.5 Punkte)

(iii) $f\colon (\mathbb{Z}_2, +_2) \to (\{\top, \bot\}, \mathrm{XOR})$, $f(z) \coloneqq (x > 0)$ handelt es sich im Urbildbereich um eine uns wohlbekannte Gruppe. Im Bildbereich ist XOR ein Junktor und damit eine Verknüpfung. Diese ist außerdem assoziativ, denn sowohl $x \,\mathrm{XOR}(y \,\mathrm{XOR}\, z)$ als auch $(x \,\mathrm{XOR}\, y) \,\mathrm{XOR}\, z$ haben genau dann den Wert $\top$, wenn eine ungerade Anzahl der Variablen den Wert $\top$ haben und sonst den Wert $\bot$. Neutral ist das Element $\bot$ und beide Elemente sind selbstinvers, damit handelt es sich um eine Gruppe. Wir erhalten (auf Grund der Kommutativität von XOR und $+_2$) die Gleichung

$$f(x +_2 y) = f(x) \,\mathrm{XOR}\, f(y),$$

da für $x = y$ das Bild $f(x +_2 y) = f(0) = \bot$ gerade das Ergebnis von $\bot$ XOR $\bot$ und $\top$ XOR $\top$ ist, sowie analog für den Fall $x \neq y$, jeweils für alle $x, y \in \mathbb{Z}_2$. Die Bijektivität von f liefert uns sofort einen **Gruppenisomorphismus** nichtgleicher Gruppen. (1 Punkt)

(*iv*) Bei $f\colon (S_3, \circ) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$, $f(\sigma) \coloneqq [0, -\operatorname{sgn}(\sigma)]$ handelt es sich im (Ur-)Bildbereich um Gruppen. Tatsächlich haben wir strukturverträglichkeit, denn es ist:

$$\begin{aligned} f(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= [0, -\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2)] \\ &= [0, -\operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2)] \\ &= \begin{cases} [0,1] & \operatorname{sgn}(\sigma_1) \neq \operatorname{sgn}(\sigma_2) \\ \emptyset & \operatorname{sgn}(\sigma_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_2) \end{cases} \\ &= [0, -\operatorname{sgn}(\sigma_1)] \triangle [0, -\operatorname{sgn}(\sigma_2)] \\ &= f(\sigma_1) \triangle f(\sigma_2). \end{aligned}$$

Es handelt sich aber nur um einen **Gruppenhomomorphismus**, nicht um einen Isomorphismus, denn das Bild besteht aus exakt zwei Elementen, das Urbild aber aus mehr als zwei, damit kann hier keine Bijektion exitieren. (1 Punkt)

(b) Jede bijektive Funktion $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ist natürlich invertierbar und ihre Umkehrfunktion ist bijektiv. Wenn sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich die Halbgruppen-, Monoid- oder Gruppenstruktur hat, dann gilt das auch für die Umkehrfunktion f^{-1}. Für $a, b \in G_2$ ist dann

$$\begin{aligned} f^{-1}(a \square b) &= f^{-1}\big(f(f^{-1}(a)) \square f(f^{-1}(b))\big) \\ &= f^{-1}\big(f(f^{-1}(a) \star f^{-1}(b))\big) \\ &= f^{-1}(a) \star f^{-1}(b). \end{aligned}$$

Für Monoide haben wir zusätzlich gefordert, dass die inversen Elemente aufeinander abgebildet werden, was f nach Voraussetzung erfüllt und f^{-1} auf Grund der Bijektivität ebenfalls.

Die Komposition $g \circ f$ ist nach Lemma 6.19 ebenfalls bijektiv. Die Strukturverträglichkeit folgt aus

$$g \circ f(a \star b) = g(f(a \star b)) = g(f(a) \square f(b)) = g(f(a)) \bullet g(f(b)) = (g \circ f)(a) \bullet (g \circ f)(b)$$

für alle $a, b \in G_1$.

(1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-6.2 (Kern und Bild) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Bestimmen Sie Kern und Bild der Gruppenhomomorphismen in Hausaufgabe I-6.1 Teilaufgabe (a).

(b) Es seien $f\colon G_1 \to G_2$ und $g\colon G_2 \to G_3$ Gruppenhomomorphismen. Bestimmen Sie $\operatorname{Bild}(g \circ f)$ und $\operatorname{Kern}(g \circ f)$ in Abhängigkeit der Kerne und Bilder von g und f.

Lösung.

(a) (*i*) Bei $f\colon (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq \ln(x)$ müssen wir im Grunde keine Bestimmung durchführen, weil wir schon festgestellt haben, dass es sich um einen Gruppenisomorphismus handelt, der daher trivialen Kern ($\operatorname{Kern}(f) = 1$) und volles Bild ($\operatorname{Bild}(f) = \mathbb{R}$) hat. (0.5 Punkte)

(*ii*) Für $f\colon (S_3, \circ) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$, $f(\sigma) \coloneqq [0, -\operatorname{sgn}(\sigma)]$ besteht der Kern aus allen geraden Permutationen $\{\mathrm{id}, \tau(1,2) \circ \tau(2,3), \tau(1,3) \circ \tau(2,3)\}$. Das Bild ist $\{\emptyset, [0,1]\}$. (1 Punkt)

(*iii*) Für $f\colon (\mathcal{P}(\{\mathbb{Q}\}), \triangle) \to (\{\top, \bot\}, \mathrm{XOR})$, $f(A) \coloneqq (A \neq \emptyset)$ haben wir wieder die Gruppenisomorphismuseigenschaft, also trivialen Kern ($\operatorname{Kern}(f) = \{\emptyset\}$) und volles Bild ($\operatorname{Bild}(f) = \{\top, \bot\}$). (0.5 Punkte)

(b) Es ist

$$\operatorname{Kern}(g \circ f) = \{a \in G_1 \mid g \circ f(a) = e_3\} = \{a \in G_1 \mid f(a) \in \operatorname{Kern}(g)\} = f^{-1}(\operatorname{Kern}(g))$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild}(g \circ f) &= \{c \in G_3 \mid \exists a \in G_1 : g \circ f(a) = c\} \\ &= \{c \in G_3 \mid \exists b \in \operatorname{Bild}(f) : g(b) = c\} \\ &= g(\operatorname{Bild}(f)) \\ &= \operatorname{Bild}(g|_{\operatorname{Bild}(f)}).\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Hausaufgabe I-6.3 (Normalteiler und Faktorgruppe) 2 + 1 + 1 + 3 = 7 Punkte

(a) Bestimmen Sie für den Normalteiler $(\mathbb{Z}, +)$ in der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ die Elemente von $(\mathbb{R} / \mathbb{Z}, \tilde{+})$ mit endlicher Ordnung.

(b) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe, $E \subseteq G$ mit $\langle E \rangle = G$ und $(N, \star)$ eine Untergruppe von $(G, \star)$. Zeigen Sie, dass N genau dann ein Normalteiler von $(G, \star)$ ist, wenn $a \star N = N \star a$ für alle $a \in E$ gilt.

(c) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N_1, \star)$ und $(N_2, \star)$ zwei ihrer Normalteiler mit $N_1 \subseteq N_2$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(G / N_2, \tilde{\star})$ eine Untergruppe von $(G / N_1, \tilde{\star})$ ist.

(d) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ einer ihrer Normalteiler. Zeigen Sie, dass G / N genau dann abelsch ist, wenn N die Kommutatorgruppe $K(G) \coloneqq \langle \{a \star b \star a' \star b' \mid a, b \in G\} \rangle$ enthält.

Lösung.

(a) Die Elemente von $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ besteht aus den Klassen $[a] = a + \mathbb{Z}$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also

$$\mathbb{R} / \mathbb{Z} = \{a + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a + \mathbb{Z} \mid a \in [0, 1)\}.$$

Ein Element $[a] \in \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ besitzt genau dann endliche Ordnung bezüglich $\tilde{+}$, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\underbrace{\mathbb{Z} = [0]}_{\text{neutr. Elem. in } \mathbb{R}/\mathbb{Z}} = n[a] = \underbrace{[a] \tilde{+} \cdots \tilde{+} [a]}_{\text{n-mal}} = [na] = na + \mathbb{Z},$$

was genau dann der Fall ist, wenn $na \in \mathbb{Z}$, also wenn ein $m \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass

$$na = m$$

also genau dann, wenn $a \in \mathbb{Q}$, also wenn die Klasse $[a]$ einen Repräsentanten aus $\mathbb{Q}$ besitzt (womit dann gleich alle Repräsentanten aus $\mathbb{Q}$ sind). Die Menge von Elementen aus $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ mit endlicher Ordnung ist also genau $\{[a] \mid a \in \mathbb{Q}\}$. (2 Punkte)

(b) Da $E \subseteq G$ ist die eine Implikation klar, es bleibt also nur zu zeigen, dass $a \star N = N \star a$ für alle $a \in E$ die Normalteilereigenschaft von N impliziert.

Es sei dafür $b \in G$ beliebig. Da E die gesamte Gruppe G erzeugt, können wir auf Grund der Darstellung der erzeugten Gruppe aus Satz 7.50 ein $n \in \mathbb{N}_0$ finden und $a_1, \dots, a_n \in E$ mit $b = a_1 \star \ldots \star a_n$. Entsprechend ist

$$\begin{aligned} b \star N &= a_1 \star \ldots \star a_n \star N \\ &= a_1 \star \ldots \star N \star a_n \\ &= \ldots \\ &= a_1 \star N \star \ldots \star a_n \\ &= N \star a_1 \star \ldots \star a_n \\ &= N \star b. \end{aligned}$$

(1 Punkt) **Beachte:** Ein sauberer Beweis der obigen Eigenschaft benötigt einen Induktionsbeweis, die obige Argumentation zeigt zwar, wie man diesen führen würde, ist aber unsauber.

(c) Um die gestellte Frage zu untersuchen benötigen wir vor allem eine Antwort darauf, wie sich die Mengen $G\,/\,N_1$ und $G\,/\,N_2$ zueinander verhalten. Ohne eine Teilmengeneigenschaft der Grundmengen haben wir keine Möglichkeit, die Faktormengenverknüpfungen (die streng genommen nicht die gleichen sind) als jeweilige Einschränkungen voneinander zu verstehen. Sowohl die Elemente von $G\,/\,N_1$ als auch die von $G\,/\,N_2$ liegen in $\mathcal{P}(G)$, es bleibt also zu prüfen, ob $G\,/\,N_2 \subseteq G\,/\,N_1$ gilt. Dabei sind die Mengen gegeben als

$$G\,/\,N_1 = \{\underbrace{a \star N_1}_{\subseteq a \star N_2} \mid a \in G\} \quad \text{und} \quad G\,/\,N_2 = \{a \star N_2 \mid a \in G\}.$$

Wir haben also erstmal nur eine Teilmengeneigenschaft auf dem Level der Elemente der Faktorgruppen, nicht auf den Faktorgruppen selbst.

Es ist also zu klären, ob für jedes $a \in G$ ein $b \in G$ existiert, so dass

$$a \star N_2 = b \star N_1.$$

Da alle Nebenklassen gleichmächtig zu den jeweiligen Normalteilern sind, ist hier klar, dass eine notwendige Bedingung für die obige Gleichheit sein muss, dass N_1 und N_2 gleichmächtig sind. Die Menge N_2 kann aber deutlich mächtiger sein, als N_1, was von der Wahl eines einzelnen b passend zu a und N_1 und N_2 i. A. nicht kompensiert werden kann. Als Gegenbeispiel kann man die additive Verknüpfung von $G \coloneqq \mathbb{R}$, $N_1 \coloneqq \mathbb{Z}$ und $N_2 \coloneqq \mathbb{Q}$ untersuchen. Hier ist

$$\mathbb{R}\,/\,\mathbb{Q} = \{r + \mathbb{Q} \mid r \in \mathbb{R}\} \not\subseteq \{r + \mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,/\,\mathbb{Z},$$

denn es ist beispielsweise $0 + \mathbb{Q} \neq r + \mathbb{Z}$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Ebenso gilt die umgekehrte Beziehung nicht, es ist also auch $\mathbb{R}\,/\,\mathbb{Q} \not\supseteq \mathbb{R}\,/\,\mathbb{Z}$. (1 Punkt)

(d) „$\Rightarrow$" Ist $G\,/\,N$ abelsch, dann gilt für alle $a, b \in G$, dass

$$[a \star b \star a' \star b'] = [a] \,\tilde{\star}\, [b] \,\tilde{\star}\, [a'] \,\tilde{\star}\, [b'] = [a] \,\tilde{\star}\, [a'] \,\tilde{\star}\, [b] \,\tilde{\star}\, [b'] = [e] \,\tilde{\star}\, [e] = [e] = N.$$

Insbesondere ist damit jeder Kommutator in N. Da N mit $\star$ eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist, welche die Mengen der Kommutatoren beinhaltet, ist die von den Kommutatoren erzeugte Gruppe (die bzgl. der Mengeninklusion kleinste Gruppe) eine Teilmenge von N. (1.5 Punkte)

„$\Leftarrow$" Liegt die Kommutatorengruppe in N, dann ist wegen des Translationsgruppenkriteriums (Lemma 7.25) (konkret der Surjektivität) für beliebige $a, b \in G$, deren Inverse den

Kommutator $b' \star a' \star b \star a \in N$ bilden, schon

$$b' \star a' \star b \star a \star N = N$$

und somit gilt

$$[a] \mathbin{\tilde{\star}} [b] = [a \star b] = a \star b \star N = a \star b \star b' \star a' \star b \star a \star N = b \star a \star N = [b \star a] = [b] \mathbin{\tilde{\star}} [a].$$

(1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-6.4 (Homomorphiesatz für Gruppen) $3 + 1 = 4$ Punkte

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei Gruppen und G_1 endlich. Zeigen Sie:

(a) Ist auch G_2 endlich und $\#G_1$ und $\#G_2$ teilerfremd, dann existiert zwischen $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ nur der triviale Gruppenhomomorphismus.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Lagrange (Satz 7.60 im Skript).

(b) Ist $\#G_1$ eine Primzahl, dann ist jeder Gruppenhomomorphismus von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$ trivial oder injektiv.

Lösung.

(a) Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist nach den Eigenschaften von Bild und Kern von Gruppenhomomorphismen in Lemma 8.11 des Skripts

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(f) &= f(G_1) \quad \text{mit } \square \text{ eine Untergruppe von } (G_2, \square) \\ \operatorname{Kern}(f) &= f^{-1}(e_2) \text{ mit } \star \text{ eine Untergruppe von } (G_1, \star) \end{aligned}$$

Aus dem Satz 7.60 von Lagrange folgt die Teilereigenschaft $\#\operatorname{Bild}(f) \mid \#G_2$. (1 Punkt)

Der Homomorphiesatz für Gruppen (Satz 8.25 des Skripts) besagt nun weiter, dass $G_1 / \operatorname{Kern}(f) \cong \operatorname{Bild}(f)$ ist. Alle Nebenklassen bzgl. $\operatorname{Kern}(f)$ sind aber zu $\operatorname{Kern}(f)$ gleichmächtig, es ist also

$$\#G_1 = \underbrace{\#(G_1 / \operatorname{Kern}(f))}_{\text{Anzahl der Nebenklassen}} \cdot \#\operatorname{Kern}(f) = \#\operatorname{Bild}(f) \cdot \#\operatorname{Kern}(f) \tag{0.1}$$

Das liefert die Teilereigenschaft $\#\operatorname{Bild}(f) \mid \#G_1$. (1 Punkt)

Zusammen haben wir also $\#\operatorname{Bild}(f) \mid \#G_1$ und $\#\operatorname{Bild}(f) \mid \#G_2$ sowie die Teilerfreiheit von $\#G_1$ und $\#G_2$, also muss $\#\operatorname{Bild}(f) = 1$ sein. Da f nach Annahme ein Gruppenhomomorphismus ist, muss $f(e_1) = e_2$ gelten, also $e_2 \in \operatorname{Bild}(f)$ und damit $\{e_2\} = \operatorname{Bild}(f)$, f muss also der triviale Gruppenhomomorphismus sein. (1 Punkt)

(b) Wie zuvor erhalten wir (0.1) und damit die Teilereigenschaft $\#\operatorname{Bild}(f) \mid \#G_1$, und da G_1 prim ist, muss $\#\operatorname{Bild}(f) = 1$ sein und damit $\operatorname{Bild}(f) = \{e_2\}$, also f trivial, oder es muss $\#\operatorname{Bild}(f) = \#G_1$ sein, und f damit surjektiv und wegen der Endlichkeit der Mengen auch injektiv. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.