

ÜBUNG 11

Ausgabedatum: 1. Juli 2022
Abgabedatum: 12. Juli 2022

Hausaufgabe 1. (Zusammenhang allgemeiner Interpolation und Quadratur) 6 Punkt(e)

Es seien Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ gegeben, $\{p_0, \dots, p_n\}$ eine Basis von P_n und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Stellen Sie die Gleichungssysteme für die Bestimmung

(a) der Koeffizienten a_i der Interpolation von f an den Stützstellen x_0, \dots, x_n

(b) der Gewichte w_i der interpolatorischen Quadratur von f auf $[a, b]$ bzgl. der Stützstellen x_0, \dots, x_n

auf.

(ii) Vergleichen Sie die beiden Systeme. Was können Sie bspw. über die Bestimmung der Quadraturgewichte in der Monombasis zu gegebenen Stützstellen schließen?

Hausaufgabe 2.

(Anwendung der Fehlerabschätzungen) 4 Punkt(e)

Nutzen Sie die Fehlerabschätzungen aus dem Skript um eine obere Schranke für die Anzahl der Funktionsauswertungen anzugeben, mit denen das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx \approx 0,54930614\dots$$

mit einem absoluten Fehler, der im Betrag kleiner als 10^{-8} ist

(i) mit Hilfe der summierten Trapezregel,
(ii) mit Hilfe der summierten Simpson-Regel
berechnet werden kann.

Hausaufgabe 3. (Romberg-Quadratur der summierten Trapezregel) 3 Punkt(e)

Zeigen Sie, dass die Romberg-Quadratur für die summierte Trapezregel mit den zwei Schrittweiten $h = (b - a)/n$ und $h/2$ zur Approximation des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ der summierten Simpsonregel mit Intervallbreite h und Schrittweite $h/2$ entspricht.

Hausaufgabe 4. (Numerische Umsetzung der Quadratur) 7 Punkt(e)

(i) Implementieren Sie eine Funktion, die für eine integrierbare Funktion f das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

mit Hilfe der summierten Trapezregel mit n Teilintervallen berechnet, in Python.

(ii) Verwenden Sie die Implementierung aus [Aufgabe \(i\)](#) das Integral von $\sin(x)$ auf $[0, \pi]$ näherungsweise zu bestimmen und verifizieren Sie die Konvergenzordnung aus der Vorlesung.

(iii) Integrieren Sie auf demselben Intervall $[0, \pi]$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

Was können Sie im Vergleich zur Integration des Sinus beobachten?

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.