

ÜBUNG 05

Ausgabedatum: 20. Mai 2022
Abgabedatum: 31. Mai 2022

Hausaufgabe 1. (Stabilitätsanalyse des Innenprodukts) 4 Punkte

Zeigen Sie Beispiele 7.12 und 7.18 für $n = 2$, also die folgende Aussage: Die Auswertung des Innenprodukts $F(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^2 x_i y_i$ für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ über die Bildung der Summanden und anschließende Summation ist

- (i) vorwärtsstabil und
- (ii) rückwärtsstabil

sofern die Eingaben und alle Zwischenergebnisse in \mathbb{D} liegen.

Beachte: Aussage (i) soll dabei ohne Verwendung von Aussage (ii) gezeigt werden.

Hausaufgabe 2. (Stabilitätsanalyse der Polynomauswertung) 4 Punkte

Zeigen Sie Beispiel 7.19, also die folgende Aussage: Die Auswertung eines Polynoms der Form $p(x) = a_1 x + a_2 x^2 = x(a_1 + a_2 x)$ nach der naiven Methode (Bildung der Summanden und anschließende Summation) und nach dem Horner-Schema, vgl. Beispiel 7.7, sind beide rückwärtsstabil, sofern die Eingaben und alle Zwischenergebnisse in \mathbb{D} liegen.

Hausaufgabe 3. (Stabilisierung) 18 Punkte

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = x^3 \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{für } x > 1$$

und das dazu vorgeschlagene Berechnungsschema

$$\begin{aligned} u_1 &= x^2 \\ u_2 &= u_1 - 1 \\ u_3 &= x/u_2 \\ u_4 &= 1/x \\ u_5 &= u_3 - u_4 \\ u_6 &= x \cdot u_1 \\ y = f(x) &= u_6 \cdot u_5 \end{aligned}$$

- (i) Stellen Sie einen Berechnungsgraphen für das vorgeschlagene Schema auf.
- (ii) Untersuchen Sie, ob das Verfahren ohne Einschränkung an den Punkt x vorwärtsstabil ist, sofern die Eingaben und alle Zwischenergebnisse in \mathbb{D} liegen.
- (iii) Werten Sie $f(x)$ im Fließkommasytem $\mathbb{F}(\beta = 10, r = 4)$ mit beliebigen Exponenten und round-to-nearest, ties-to-even Rundung am Punkt $x_0 = 1.4 \cdot 10^2$ nach dem vorgeschlagenen Verfahren aus und untersuchen Sie den relativen Fehler.
- (iv) Entwerfen Sie ein alternatives Verfahren zur Verbesserung der Vorwärtsstabilität für die Auswertung der Funktion f , wiederholen Sie Aufgaben (i) bis (iii) für Ihr Verfahren und vergleichen Sie die Ergebnisse.
- (v) Entscheiden Sie, ob eines der beiden Verfahren in der vorgegebenen Arithmetik am Punkt x_0 rückwärtsstabil sein kann und begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Betrachten Sie den Wertebereich der Funktion f .

Hausaufgabe 4. (Stabile Berechnung der Nullstellen quadratischer Polynome) 6 Punkte

Schreiben Sie ein Python-Programm, das für vorgegebene Fließkommasyteme die Nullstellen quadratischer Polynome der Form $p(x) = x^2 - 2px - q$ "naiv" über die p - q -Formel als

$$x_0 = p + \sqrt{p^2 + q}, \quad x_1 = p - \sqrt{p^2 + q}$$

sowie numerisch günstiger/stabiler mit der Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta berechnet, siehe auch Beispiel 7.6.

Untersuchen Sie sowohl Beispiele, deren Nullstellenberechnung im “naiven” Verfahren ungünstig ist, als auch Beispiele, bei denen das “naive” Verfahren unbedenklich ist und vergleichen Sie den relativen Fehler der “naiv” und der stabil berechneten Wurzeln in Single-Precision bezogen auf Lösungen in höherer Präzision, die Sie mittels des stabileren Auswertungsschemas berechnen.

Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.