

# Plenum 08

## Einführung in die Numerik

### Sommersemester 2022

14.06.2022

Ausgleichsrechnung, QR-Zerlegung

# Was sind die Highlights der Woche?

# Welche Fragen gibt es? I

- Gradient von  $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$
- Beweis von Satz 11.2:  $f(x) > f(0)$  für alle  $x$  mit Idots
- Beweis von Satz 11.2, Aussage (ii): wurde wirklich die Äquivalenz bewiesen?
- $\|Ax\|_2 \geq \sigma_r \|x\|_2$  für alle  $x \in (\ker A)^\perp$
- Ersetzung von  $A$  in place in Algorithmus 12.3

# Gram-Schmidt-Verfahren

Schreiben Sie die ersten Schritte von Alg. 12.3 explizit auf und überzeugen Sie sich davon, dass dieser tatsächlich die normierte QR-Zerlegung erzeugt.

```
1: for  $k = 1, 2, \dots, n$  do
2:   for  $\ell = 1, 2, \dots, k - 1$  do
3:     Berechne  $r_{\ell k} := a_k^T q_\ell$ 
4:   end for
5:   Setze  $q_k := a_k$ 
6:   for  $\ell = 1, 2, \dots, k - 1$  do
7:     Setze  $q_k := q_k - r_{\ell k} q_\ell$ 
8:   end for
9:   Setze  $r_{kk} := \|q_k\|_2$ 
10:  Setze  $q_k := \frac{q_k}{r_{kk}}$ 
11: end for
```

# Givens-Rotation

Wie sieht die Givens-Rotation aus, um das untere der beiden markierten Elemente zu Null zu machen?

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

# Householder-Transformation

Wie sieht die Householder-Transformation aus, um die markierten Einträge auf ein Vielfaches von  $(\cdot, 1, 0, 0)^T$  abzubilden?

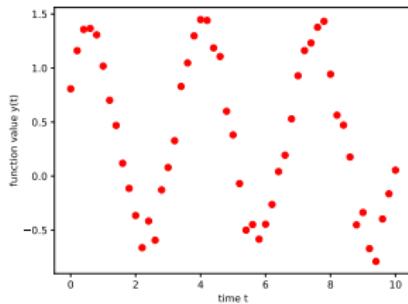
$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & \textcolor{blue}{3} & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

# Kleinste-Quadrat-Aufgabe

Wir wollen die **Parameter** einer Schwingungsgleichung

$$y(t) = y_0 + a \cos(\omega t - \alpha_0)$$

aus Messdaten  $(y_i, t_i)$ ,  
 $i = 1, \dots, m$  bestimmen.



- ① Welche Bedeutung haben die Parameter?
- ② Passt das Modell in Kapitel 5, oder muss es evtl. umformuliert werden?
- ③ Wie sehen die Designmatrix  $A$  und der Messdatenvektor  $b$  aus?
- ④ Was ist, wenn auch  $\omega$  unbekannt ist?

# Fehlerabschätzung für KQ-Aufgaben

Verwenden Sie die Lösungsformel

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^\top b}{\sigma_i} v_i \quad (13.1)$$

aus der Singulärwertzerlegung  $A = U\Sigma V^\top$ , um die Einflüsse des Messfehlers  $\Delta b$  auf den Fehler  $\Delta x$  in der Lösung  $x$  abzuschätzen.

Vergleichen Sie dies mit der allgemeinen Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|A^{-1}\|_{2 \rightarrow 2} \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (3.18)$$

für die Lösung linearer Gleichungssysteme  $Ax = b$ .