Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 06

Link zu diesen Folien

Umfragerückmeldungen

Allgemein

1. Schriftbild, Tempo, Umfang in der Plenarübung
2. Schwierigkeitsgrad der Klausur
3. Mehr Hausaufgabenlösungen in der Plenarübung

Wochenspezifisch

1. Wiederholung Faktorgruppen
2. Kern/Bild der kanonischen Surjektion
3. Bedeutung der Normalteilereigenschaft
4. Normalteiler und die Kommutatorgruppe
5. Homomorphiesatz
   1. Bedeutung des Satzes
   2. Rolle des Kerns
   3. Beispiel der Betragsfunktion
   4. Für andere Strukturen

Wochenüberblick

Wiederholung Normalteiler und Faktorgruppe

Definition

1. Eine Untergruppe $(N, \star)$ heißt **Normalteiler** von $(G, \star)$, wenn gilt:

$$\underbrace{a \star N}_{[a]_{\sim N}} = \underbrace{N \star a}_{[a]_{N\sim}} \quad \text{für alle } a \in G.$$

2. $G \,/\, N := \left\{ [a] = a \star N \,\middle|\, a \in G \right\}$ heißt **Faktormenge**.

3. $(G \,/\, N, \widetilde{\star})$ mit $[a] \,\widetilde{\star}\, [b] := [a \star b]$ ist die **Faktorgruppe**.

4. $\pi\colon G \ni a \mapsto [a] \in G \,/\, N$ heißt **kanonische Surjektion**.

5. Eine strukturverträgliche Abbildung $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ heißt **Homomorphismus**.

6. $\mathrm{Bild}(f) := \{f(x) \in G_2 \,|\, x \in G_1\} = f(G_1)$ heißt **Bild** von f.

7. $\mathrm{Kern}(f) := \{x_1 \in G_1 \,|\, f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\})$ heißt **Kern** von f.

Intuition: Warum eigentlich „ausfaktorisieren“?

Namesgebung

Die Menge

$$G \,/\, N := \left\{ [a] = a \cdot N \,\middle|\, a \in G \right\}$$

(mit dazugehöriger Verknüpfung) ist bekannt unter den Bezeichnungen

- Faktorgruppe
- Quotientengruppe

Nachprüfen der Normalteilereigenschaft

Bemerkung 8.16

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ eine Untergruppe. Dann ist $(N, \star)$ genau dann ein Normalteiler, wenn

$$a \star N \star a' \subseteq N \quad \forall a \in G.$$

Beweis.

Die Bedeutung der Normalteilereigenschaft

Vorschlag:

Wir nehmen eine Untergruppe U, die Verknüpfung $[a] \,\widetilde{\star}\, [b] := [a \star b]$ und untersuchen

- $\left(\{[a]_{\sim U} \,|\, a \in G\}, \widetilde{\star}\right)$ (eine potentielle „Linksfaktorgruppe“),
- $\left(\{[a]_{U\sim} \,|\, a \in G\}, \widetilde{\star}\right)$ (eine potentielle „Rechtsfaktorgruppe“)

Gute Idee?

Die Bedeutung der Normalteilereigenschaft

Satz 8.21

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ ein Normalteiler. Dann gilt:

1. $G \,/\, N = \big\{[a] = a \star N \,\big|\, a \in G\big\}$ ist mit $[a] \mathbin{\widetilde{\star}} [b] \coloneqq [a \star b]$ eine Gruppe mit n.E. $[e] = N$ und $[a]' = [a']$.

2. Die **kanonische Surjektion** $\pi\colon G \ni a \mapsto [a] \in G \,/\, N$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\pi) = N$.

3. Ist U eine UG und ist $\widetilde{\star}$ auf der Menge der LNK $G \,/\, U$ (oder RNK $U \setminus G$) wohldefiniert, dann ist U Normalteiler von G.

Normalteiler in der S_3

(Nichttriviale) Untergruppen der S_3

Siehe Vorlesungsmitschrift: $\{e, d, d^2\}$, $\{e, s_1\}$, $\{e, s_2\}$, $\{e, s_3\}$

Für $U = \{e, d, d^2\}$ (Normalteiler)

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

Für $U = \{e, s_3\}$ (kein Normalteiler)

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

Der Begriff des Kommutators

Definition

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Der zu a und b gehörige Kommutator ist

$$[a, b] := a \star b \star a' \star b' = (a \star b) \star (b \star a)'$$

Die Menge der Kommutatoren erzeugt die Kommutatorgruppe $K(G) = \langle \{a \star b \star a' \star b' \mid a, b \in G\} \rangle$

Was ist ein Kommutator?

In einer Gruppe wird die Frage, „Was“ ein Element der Gruppe ist, dadurch beantwortet, wie es auf die restliche Gruppe wirkt.

Kommutatoren in der S_3

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

Kommutatorgruppe und Kommutativität der Faktorgruppe

Hausaufgabe I-6.3

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe, $K(G) = \langle\{a \star b \star a' \star b' \mid a, b \in G\}\rangle$ die Kommutatorgruppe von G sowie $(N, \star)$ ein Normalteiler. Dann gilt:

1. $G \,/\, N$ ist genau dann abelsch, wenn $K(G) \subseteq N$
2. $K(G)$ ist selbst ein Normalteiler

Beweis.

Motivation Homomorphiesatz

Zerlegen beliebiger Funktionen

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann kann f zerlegt werden in

$$f = E \circ I \circ \pi$$

wobei

- π :
- I :
- E :

Beispiel:

Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $f\colon X \ni x \mapsto x^2 \in Y$.

Die entscheidende Frage:

Die Bedeutung des Kerns

Lemma

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann gilt

$$f^{-1}(\{f(a)\}) = a \star \mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f) \star a,$$

also ist $\mathrm{Kern}(f)$ ein Normalteiler von G_1.

Homomorphiesatz für Gruppen

Satz

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann ist

$$\begin{aligned} I\colon\ G_1 \,/\, \mathrm{Kern}(f) &\quad\longrightarrow\quad \mathrm{Bild}(f) \\ [a] &\quad\longmapsto\quad f(a) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Implikationen für Kardinalitäten (Hausaufgabe I-6.4)

Lemma

Ist $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus und sind $\# G_1$ und $\# G_2$ teilerfremd, dann ist f trivial.

Beweis.

Higher Level View

Faktorstrukturen

Faktorstrukturen sollen einen gröberen Blick auf die Grundmenge ermöglichen. Dafür braucht es

Homomorphismensätze

Homomorphismensätze liefern die (stufenweise strukturverträgliche) Zerlegung von Homomorphismen in Injektion, Bijektion und Surjektion.

Homomorphiesätze auf geringerwertigen Strukturen

Homomorphiesätze für strukturverträgliche f sind also auch für Halbgruppen und Monoide möglich.

Kernprobleme

Der Kern verliert in Halbgruppen und Monoiden an Bedeutung, denn

Beispiel