Lineare Algebra I

Woche 01

14.10.2025 und 16.10.2025

Was ist (lineare) Algebra?

- **Algebra** (von arabisch الجبر, *al-ğabr*, „das Zusammenfügen gebrochener Teile“)
- Ursprung in der Beschreibung von Lösungsverfahren linearer und quadratischer Gleichungen
- In der heutigen Bedeutung geht es um Strukturen, die in ihnen geltenden „Rechenregeln“ und Abbildungen zwischen Strukturen.
- Speziell die **lineare Algebra** befasst sich mit „linearen Strukturen“, das sind vor allem Vektorräume, Abbildungen zwischen Vektorräumen und lineare Gleichungssysteme.

§ 1 Aussagenlogik

Aussagen

Definition 1.1

Eine **Aussage** ist ein Satz (einer Sprache), dem eindeutig

- entweder der **Wahrheitswert wahr** (kurz: W oder $\top$)
- oder der **Wahrheitswert falsch** (kurz: F oder $\perp$)

zugeordnet werden kann.

Der Satz kann dabei der gewöhnlichen Sprache oder der mathematischen Sprache entstammen.

Wir bezeichnen Aussagen in der Regel mit Großbuchstaben wie P, Q usw.

Aussagen?

Aussage hinzuschreiben und WW zu entscheiden

Beispiel 1.2 sind qualitativ verschiedene Dinge

1. P: 9 ist durch 3 teilbar.

   wahre Aussage

2. Q: Am 14.10.2025 ist London die Hauptstadt von Frankreich.

   falsche Aussage

3. R: München ist 781 km von Hamburg entfernt.

   keine Aussage (zu ungenau)

4. S: Das Team des VfL Wolfsburg ist in der Saison 2025/26 deutscher Meister in der Frauen-Fußball-Bundesliga.

   Aussage, Wahrheitswert noch nicht bekannt

5. T: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.

   Aussage, WW noch nicht bekannt

Junktoren

einstelliger zweistelliger Junktor

- Ein **Junktor** verknüpft (eine oder zwei) Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Der Wahrheitswert der neuen Aussage ergibt sich aus den Wahrheitswerten der miteinander verknüpften Aussagen.
- Wir definieren einen Junktor über seine **Wahrheitswerttabelle** oder **Wahrheitstafel**.

Junktor: Negation

einstellig

Definition 1.3

Die Operation $\neg P$ (sprich: „nicht P") heißt **Negation**.

$\neg P$ ist wahr, wenn P falsch ist, und falsch, wenn P wahr ist.

P	$\neg P$
W	F
F	W

Es gibt 4 einstellige Junktoren:

$\top$, $\bot$, id, $\neg$

 zweistellig

Definition 1.3

Die Operation $P \wedge Q$ (sprich: „P **und** Q“) heißt **Konjunktion**.

$P \wedge Q$ ist dann wahr, wenn P und Q beide wahr sind, ansonsten falsch.

P	Q	$P \wedge Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Es gibt $2^4 = 16$ zweistellige Junktoren, darunter

$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Junktor: Disjunktion (Oder-Verknüpfung)

Definition 1.3

Die Operation $P \vee Q$ (sprich: „P **oder** Q“) heißt **Disjunktion**.

$P \vee Q$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen P und Q wahr ist, ansonsten falsch. Das „Oder“ ist also in einem nicht-ausschließenden Sinne gemeint.

P	Q	$P \vee Q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Junktor: Implikation (Wenn-Dann-Verknüpfung)

Konditional

Definition 1.3

Die Aussage $P \to Q$ ist über die Wahrheitswerttabelle unten definiert.
Wir sagen auch:

- „P ist **hinreichend** für Q"
- „Q ist **notwendig** für P"
- „P impliziert Q"
- „Wenn P, dann Q"   ohne kausaler Zusammenhang!

P	Q	$P \to Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Junktor: Äquivalenz (Genau-Dann-Wenn-Verknüpfung)

Bikonditional

Definition 1.3

Die Aussage $P \leftrightarrow Q$ ist wahr, wenn entweder P und Q beide wahr oder beide falsch sind, ansonsten falsch. Wir sagen auch:

- „P ist **notwendig und hinreichend** für Q"
- „P ist äquivalent zu Q"
- „P genau dann, wenn Q"
- „P dann und nur dann, wenn Q"

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Sätze der Umgangssprache

Beispiel 1.4

hier exklusiv gemeint

1. Zum Burger servieren wir Pommes oder Salat.
   P: Zum Burger servieren wir Pommes.
   S: Zum Burger servieren wir Salat.
   - $(P \vee S) \wedge (\neg(P \wedge S))$
   - $(P \wedge (\neg S)) \vee (S \wedge (\neg P))$
   - $\neg(P \leftrightarrow S)$

   gleiche Wahr-tabellen

2. Obwohl Barbara energisch ist, ist sie nicht sportlich. „und"
   E: Barbara ist energisch.
   S: Barbara ist sportlich.
   - $E \wedge (\neg S)$

Sätze der Umgangssprache

Beispiel 1.4

3. Du wirst keine Suppe bekommen, aber dafür den Salat. „und"
   S_1: Du wirst Suppe bekommen.
   S_2: Du wirst Salat bekommen.
   - $(\neg S_1) \wedge S_2$

4. Du wirst Dich erkälten, es sei denn, Du trägst eine Jacke.
   J: Du trägst eine Jacke.
   E: Du wirst Dich erkälten.
   - $(\neg J) \to E$
   - $J \vee E$

   } gleiche Wwtabellen

An den Beispielen sieht man, dass unter der formalen Symbolisierung Nuancen der Sprache zugunsten der Präzision verloren gehen.

angelehnt an Beispiele aus [1, Kapitel 5], genutzt unter der Lizenz CC-BY 4.0

Umschreibung der Implikation $\to$

Lemma 1.5 (Hilfssatz)

Die Aussagen

- $P \to Q$
- $(\neg P) \lor Q$
- $(\neg Q) \to (\neg P)$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

Beweis. Wir stellen die Wahrheitstafeln für die drei Aussagen auf:

P	Q	$P \to Q$	$(\neg P) \lor Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \to (\neg P)$
W	W	W	W	F	F	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Umschreibung der Äquivalenz $\leftrightarrow$

Lemma 1.5

Die Aussagen

- $P \leftrightarrow Q$
- $(P \to Q) \land (Q \to P)$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

Beweis. Übung

Bindungsregeln

Es bindet ...

$$\neg \text{ stärker als } \wedge \text{ stärker als } \vee \text{ stärker als } \rightarrow \text{ stärker als } \leftrightarrow$$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Klammern können jedoch zur Verdeutlichung nicht schaden.

Beispiel

$$(\neg P) \wedge Q \quad \text{ist dasselbe wie} \quad \neg P \wedge Q$$

$$(\neg(P \wedge Q)) \rightarrow (Q \vee (\neg Q)) \quad \text{ist dasselbe wie} \quad \neg(P \wedge Q) \rightarrow Q \vee \neg Q$$

Tautologien

unabh. von den Ww der Aussage-
Variablen P, Q

Eine Aussage heißt eine **Tautologie**, wenn sie immer den Wahrheitswert W hat.

Beispiel 1.6

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

$\boxed{\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q}$ ist also eine Tautologie.

Logische Implikation $\Rightarrow$

Definition 1.7

Die Aussage Q heißt eine **logische Implikation** der Aussage P, wenn $P \to Q$ eine Tautologie ist.

Wir schreiben dann

$$P \;\Rightarrow\; Q \qquad \text{(lies: „}P\text{ impliziert }Q\text{“).}$$

P	Q	$P \to Q$	
W	W	W	
W	F	F	?
F	W	W	
F	F	W	

P→Q kann nur dann eine Tautologie sein, wenn die WW von P und Q zusammenhängen!

Logische Implikation $\Rightarrow$

Beispiel 1.8

$(P \to Q) \land \neg Q \;\Rightarrow\; \neg P$, denn:

P	Q	$(P \to Q) \land \neg Q$	$\neg P$	$(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$
W	W	F	F	W
W	F	F	F	W
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W

Logische Äquivalenz $\Leftrightarrow$

Definition 1.7

Die Aussagen P und Q heißen **logisch äquivalent (zueinander)**, wenn $P \leftrightarrow Q$ eine Tautologie ist.

Wir schreiben dann

$$P \Leftrightarrow Q \qquad \text{(lies: „}P \text{ ist äquivalent zu } Q\text{“).}$$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Beispiel 1.8 $\neg(P \wedge Q) \longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ ist Tautologie

$\neg(P \wedge Q) \;\Leftrightarrow\; \neg P \vee \neg Q$, denn:

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

Sammlung von Implikationen und Äquivalenzen

Für komplexere Aussagen ist das Ausfüllen einer Wahrheitswerttabelle nicht zielführend. Stattdessen sammeln wir einen Katalog von Tautologien, die wir als Schlussregeln in Beweisen anwenden können.

Auszug aus Satz 1.9

$P \wedge (Q \vee R) \;\Leftrightarrow\; (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ Distributivgesetz

$(P \to Q) \wedge P \;\Rightarrow\; Q$ „Modus ponens"

Folie 18 $(P \to Q) \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; \neg P$ „Modus tollens"

$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \;\Rightarrow\; (P \to R)$ Kettenschluss

§ 2 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik erweitert Aussagenlogik

„Wenn n eine gerade ganze Zahl ist, dann ist auch n^2 eine gerade ganze Zahl.“ ist keine Aussage im Sinne der Aussagenlogik.

Definition

Eine **Aussageform** oder ein **Prädikat** ist ein sprachliches Gebilde mit Variablen (Leerstellen), die nach Einsetzen der Variablen in Aussagen übergehen.

Beispiel

$A(y)$: y wohnt in Aachen

$A(x)$: x wohnt in Aachen.

Name der Variable ist unerheblich

$Z(x)$: x ist eine gerade ganze Zahl.

$G(x, y)$: x ist mindestens so groß wie y.

Stelligkeit = Anzahl der Variablen

Quantoren

Definition

$\forall$	„für alle“	**Allquantor**
$\exists$	„es existiert (mindestens) ein“	**Existenzquantor**
$\exists!$	„es existiert genau ein“	**Eindeutigkeitsquantor**

Zu jedem Quantor gehört eine Variable und ein **Grundbereich**.

Beispiel

Der Grundbereich ist wichtig!

$\forall x \in \mathbb{N}\ (x \geqslant 0)$ „Alle natürlichen Zahlen sind nichtnegativ.“

$\forall x \in \mathbb{R}\ (x \geqslant 0)$ „Alle reellen Zahlen sind nichtnegativ.“

Sätze der Umgangssprache mit Quantoren

$$E(x) : x \text{ hat } 100\,000 \text{ oder mehr Einwohner}$$
$$S(x) : x \text{ ist eine Stadt}$$

Als **Grundbereich** verwenden wir
$O :=$ Menge aller Orte in Deutschland.

Beispiel 2.1

- Es gibt mindestens eine Stadt in Deutschland, die 100 000 oder mehr Einwohner hat.

  $\exists x \in O \; (S(x) \wedge E(x))$

  $\exists x \in O : S(x) \wedge E(x)$ andere Schreibweise

- Es gibt genau einen Ort in Deutschland, der 100 000 oder mehr Einwohner hat, aber keine Stadt ist.

  $\exists! x \in O \; (E(x) \wedge \neg S(x))$

Sätze der Umgangssprache mit Quantoren

$E(x)$: x hat 100 000 oder mehr Einwohner

$S(x)$: x ist eine Stadt

Als **Grundbereich** verwenden wir
$O :=$ Menge aller Orte in Deutschland.

Beispiel 2.1

- Alle Städte in Deutschland haben 100 000 oder mehr Einwohner.

$$\forall y \in O \, (S(y) \to E(y))$$

$$\forall y \in O \, (\neg S(y) \vee E(y))$$

- Keine Stadt in Deutschland hat 100 000 oder mehr Einwohner.

$$\forall y \in O \, (\neg (E(y) \wedge S(y)))$$

$$\neg \exists z \in O \, (E(z) \wedge S(z))$$

Sammlung von Implikationen und Äquivalenzen

Auch für Aussageformen mit Quantoren gibt es logische Implikationen und Äquivalenzen:

Satz 2.2

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x\ P(x)) &\quad\Leftrightarrow\quad \exists x\ (\neg P(x)) \\
\neg(\exists x\ P(x)) &\quad\Leftrightarrow\quad \forall x\ (\neg P(x)) \\[1ex]
\forall x\ (P(x) \land Q(x)) &\quad\Leftrightarrow\quad \forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x) \\
\exists x\ (P(x) \lor Q(x)) &\quad\Leftrightarrow\quad \exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)
\end{aligned}$$

Sammlung von Implikationen und Äquivalenzen

Auch für Aussageformen mit Quantoren gibt es logische Implikationen und Äquivalenzen:

Satz 2.2

$$\begin{aligned}
(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x)) &\quad\Rightarrow\quad \forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \\
\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) &\quad\Rightarrow\quad (\exists x\ P(x)) \wedge (\exists x\ Q(x)) \\[1ex]
\forall x\ (P(x) \to Q(x)) &\quad\Rightarrow\quad (\forall x\ P(x)) \to (\forall x\ Q(x)) \\
\exists x\ (P(x) \to Q(x)) &\quad\Leftrightarrow\quad (\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ Q(x))
\end{aligned}$$

§ 3 Beweismuster

Was ist ein Beweis?

- In einem Beweis versuchen wir in der Regel, für gegebene Aussagen P, Q die Implikation $P \Rightarrow Q$ nachzuweisen. Das heißt, wir müssen nachweisen, dass $P \to Q$ eine Tautologie ist.

  Dabei können P und Q nicht unabhängig.

- Meistens besteht die Prämisse P selbst aus einer Konjunktion (Und-Verknüpfung) mehrerer einzelner Prämissen.

- Nicht alle Prämissen werden in der Formulierung eines mathematischen Satzes explizit genannt. Beispielsweise wird man die als wahr geltenden Grundannahmen (Axiome) über die reellen Zahlen nicht jedes Mal explizit erwähnen.

Beweismuster (Teil 1)

- Beim **direkten Beweis** wird $P \Rightarrow Q$, typischerweise unter Verwendung von Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen, direkt mit Hilfe von Schlussregeln hergeleitet.
- Beim **indirekten Beweis** oder **Beweis durch Kontraposition** nutzen wir die Äquivalenz

$$(P \to Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg Q \to \neg P)$$

  aus. Wir führen also einen direkten Beweis für $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- Beim **Widerspruchsbeweis** nutzen wir die Äquivalenz

$$(P \to Q) \quad \Leftrightarrow \quad (P \wedge \neg Q) \to \bot$$

  aus.

Direkter Beweis (ausführliche Variante)

natürliche Zahlen

Satz (vgl. Beispiel 3.1)

Für $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ gelte $m^2 < n^2$, dann gilt auch $m < n$.

Beweis. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$.

$m^2 < n^2$ nach Voraussetzung

$\Rightarrow 0 < n^2 - m^2$ nach Subtraktion von m^2

$\Rightarrow 0 < (n-m)(n+m)$ nach Faktorisierung

$\Rightarrow 0 < n - m$ wegen $n+m > 0$

$\Rightarrow m < n$ nach Add. von m

$\blacksquare$

q.e.d.
quod erat demonstrandum

Es wurden „Rechenregeln" in $\mathbb{N}$ benutzt.

Direkter Beweis (typische Variante)

Satz (vgl. Beispiel 3.1)

Für $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ gelte $m^2 < n^2$, dann gilt auch $m < n$.

Beweis. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m^2 < n^2$. Dann gilt auch $0 < n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Die Division durch die positive Zahl $n + m$ ergibt $0 < n - m$, also auch $m < n$, was zu zeigen war.

Indirekter Beweis (Beweis durch Kontraposition)

Satz (vgl. Beispiel 3.1)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $4^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist notwendig n ungerade.

Kontraposition der Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist $4^n - 1$ keine Primzahl.

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, also $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow 4^n - 1 = 4^{2k} - 1 = \underbrace{(4^k - 1)}_{\geq 3}\underbrace{(4^k + 1)}_{\geq 5},$$

d.h. $4^n - 1$ ist keine Primzahl. $\square$

Beweismuster (Teil 2)

- Beim **Beweis durch Fallunterscheidung** nutzen wir die Äquivalenz

  $$(P \wedge R \to Q) \wedge (P \wedge \neg R \to Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \to Q.$$

  Dabei ist R irgendeine weitere Aussage.

  Wir nehmen also zunächst die Aussagen P und R als wahr an und zeigen, dass dann auch die Aussage Q wahr ist.

  Anschließend nehmen wir die Aussage P weiterhin als wahr aber die Aussage R als falsch an und zeigen, dass dann wiederum die Aussage Q wahr ist.

  Durch Zerlegung von R in weitere Teilaussagen können mehr als die zwei Fälle „R ist wahr" und „R ist falsch" abgebildet werden.

Beweis durch Fallunterscheidung

ganze Zahlen

Satz (vgl. Beispiel 3.1)

Für $n \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ gilt: $n^2 + n$ ist gerade.

Beweis. Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 1: n ist ungerade, d.h. $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n^2 + n = (2k+1)^2 + (2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1$$

$$= 4k^2 + 6k + 2 = 2(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{\in \mathbb{Z}})$$ ist also gerade.

Fall 2: n ist gerade, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

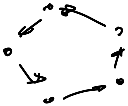
$$n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(\underbrace{2k^2 + k}_{\in \mathbb{Z}})$$ ist also gerade.

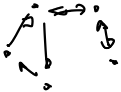
Beweismuster (Teil 3)

- Hat der zu zeigende Satz die Form $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n$, so können wir einen **Beweis durch Ringschluss** nutzen.

  Bei diesem zeigen wir nacheinander die Implikationen $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$ usw. bis $P_{n-1} \Rightarrow P_n$ und $P_n \Rightarrow P_1$. Das erfordert n Beweisschritte.

  Wir können sogar allgemeiner solange verschiedene Implikationen $P_i \Rightarrow P_j$ zeigen, bis wir mittels Kettenschluss von jeder der beteiligten Aussagen zu jeder anderen Aussage gelangen können.





Beweismuster (Teil 4)

- Hat der zu zeigende Satz die Form „$P(n)$ für all $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant n_0$", können wir einen **Beweis durch vollständige Induktion** nutzen.

  In diesem Fall zeigen wir am **Induktionsanfang** die Wahrheit der Aussage $P(n_0)$.

  Induktionsannahme: $P(n)$ sei wahr.

  Im **Induktionsschritt** wird $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ gezeigt.

  Bei Bedarf kann im Induktionsschritt sogar auf alle vorgehenden Aussagen $P(n_0), \ldots, P(n)$ zurückgegriffen werden, also $P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$ gezeigt werden.

Beweis durch vollständige Induktion

Satz (vgl. Beispiel 3.2)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P(n):\ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2} n\,(n+1).$$

Beweis. Ind.anfang bei $n_0 = 1$:

$$P(1):\ \sum_{j=1}^{1} j = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \ \checkmark$$

Es gelte $P(n)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen:

z.z.! $P(n+1):\ \sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = n+1 + \sum_{j=1}^{n} j = \underline{n+1} + \frac{1}{2} n (\underline{n+1})$$

$$= (n+1)\left[1 + \frac{1}{2} n\right] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Literatur

[1] P. D. Magnus; T. Button; J. R. Loftis; R. Trueman; A. Thomas-Bolduc; R. Zach; S. Wimmer. *forall x: Dortmund. Eine Einführung in die formale Logik*. 2023. URL: https://github.com/sbwimmer/forallx-do/.