Lineare Algebra I

Woche 02

21.10.2025 und 23.10.2025

§ 4 Mengenlehre

Was ist eine Menge?

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre, hat 1895 folgenden Versuch der Definition einer Menge angegeben:

Definition

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung X von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von X genannt werden) zu einem Ganzen."

Diese Definition ist aber zu ungenau und lässt zu vieles als Menge zu, siehe Russell-Paradoxon später.

Angabe von Mengen

- Aufzählung endlicher Mengen:

$$X := \{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3, 2\}$$

(Die Elimination doppelter Elemente geschieht bei der Konstruktion. Elemente einer Menge haben keine Reihenfolge.)

- Angabe einiger Elemente und „offensichtliche“ Fortsetzung

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

- **Mengenkomprehension** durch Angabe eines **Grundbereichs** X und einer Aussageform A auf X:

$$Y := \{x \in X \mid A(x)\}$$

(Auswahl der Elemente x von X, für die $A(x)$ wahr ist.)

Zahlbereiche

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	**natürliche Zahlen**
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	**natürliche Zahlen mit Null**
$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$	**ganze Zahlen**
$\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$	**rationale Zahlen** (vorläufig)
$\mathbb{R}$	**reelle Zahlen**
$\mathbb{C} := \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	**komplexe Zahlen**

mehr zur Konstruktion der Zahlen in Anhang A im Skript

Russell-Paradoxon

Die sehr freie Definition einer Menge nach Cantor lässt es zu, X als die Menge aller Mengen zu definieren. Wählen wir dann $A(x)$ als die Aussageform „enthält sich nicht selbst als Element“, so ist

$$R := \{x \in X \mid x \notin x\}$$

die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Enthält R sich selbst?

- Falls R sich selbst enthält ($R \in R$), dann liegt das daran, dass R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ erfüllt.
- Falls R sich nicht selbst enthält ($R \notin R$), dann erfüllt R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ nicht, also gilt $R \in R$.

Ausweg: Axiomatische Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel

- Die Auflösung in der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel (**ZF-Mengenlehre**, 1930) besteht darin, den Mengenbegriff geeignet einzuschränken. Konstruktionen wie die „Menge aller Mengen“ sind dann nicht mehr möglich.

  In dieser Lehrveranstaltung können wir das aber nicht behandeln.

- Die Mengenkomprehension als Konstruktionsprinzip $Y := \{x \in X \mid A(x)\}$ bleibt in der ZF-Mengenlehre erhalten. Der Grundbereich X der Aussageform A muss aber bereits eine Menge sein, damit wieder eine Menge herauskommt.

- Es gibt allgemeinere Objekte als Mengen, sogenannte Klassen, wie zum Beispiel die **Klasse aller Mengen**.

Proseminar „Grundlagen der Mathematik“ geplant für Sommersemester 2026

Intervalle in $\mathbb{R}$

Intervalle werden mittels Mengenkomprehension definiert:

$[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	abgeschlossen
$(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$	links offen, rechts abgeschlossen
$[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$	links abgeschlossen, rechts offen
$(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offen
$[a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$	rechts unendlich, abgeschlossen
$(a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	rechts unendlich, offen
$(-\infty, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$	links unendlich, abgeschlossen
$(-\infty, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	links unendlich, offen
$(-\infty, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \top\} = \mathbb{R}$	beidseitig unendlich
$[\![a, b]\!] \coloneqq [a, b] \cap \mathbb{Z}$	ganzzahliges Intervall

Teilmenge, Obermenge, leere Menge

Definition 4.2

- X ist eine **Teilmenge** von Y, kurz: $X \subseteq Y$,
  wenn jedes Element von X auch ein Element von Y ist:
  $$\forall x \in X \; (x \in Y).$$
  Y ist dann eine **Obermenge** von X, kurz: $Y \supseteq X$.

- X ist eine **echte Teilmenge** von Y, kurz: $X \subsetneq Y$,
  wenn $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$ gilt:
  $$\forall x \in X \; (x \in Y) \quad \wedge \quad \exists y \in Y \; (y \notin X).$$
  Y ist dann eine **echte Obermenge** von X, kurz: $Y \supsetneq X$.

- Die leere Menge $\emptyset$ hat keine Elemente.
  Sie ist Teilmenge jeder Menge.

Schnittmenge von Mengen

Definition 4.3

Schnittmenge einer …

- nichtleeren Menge $\mathcal{A}$ von Mengen

$$\bigcap \mathcal{A} := \big\{ x \,\big|\, \forall A \in \mathcal{A} \; (x \in A) \big\}$$

- indizierten Menge von Mengen A_i

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \big\{ x \,\big|\, \forall i \in I \; (x \in A_i) \big\}$$

- Menge von zwei Mengen A_1, A_2

$$A_1 \cap A_2 := \big\{ x \,\big|\, x \in A_1 \;\wedge\; x \in A_2 \big\}$$

Vereinigungsmenge von Mengen

Definition 4.3

Vereinigungsmenge einer ...

- (evtl. leeren) Menge $\mathcal{A}$ von Mengen

$$\bigcup \mathcal{A} := \left\{x \,\middle|\, \exists A \in \mathcal{A}\ (x \in A)\right\}$$

- indizierten Menge von Mengen A_i

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \left\{x \,\middle|\, \exists i \in I\ (x \in A_i)\right\}$$

- Menge von zwei Mengen A_1, A_2

$$A_1 \cup A_2 := \left\{x \,\middle|\, x \in A_1 \ \vee\ x \in A_2\right\}$$

Disjunkte Vereinigungsmenge von Mengen

Definition 4.3

Disjunkte Vereinigungsmenge einer ...

- (evtl. leeren) Menge $\mathcal{A}$ paarweise disjunkter Mengen

$$\bigcup \mathcal{A} := \big\{ x \,\big|\, \exists A \in \mathcal{A} \; (x \in A) \big\}$$

- indizierten Menge paarweise disjunkter Mengen A_i

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \big\{ x \,\big|\, \exists i \in I \; (x \in A_i) \big\}$$

- Menge von zwei disjunkten Mengen A_1, A_2

$$A_1 \cup A_2 := \big\{ x \,\big|\, x \in A_1 \;\vee\; x \in A_2 \big\}$$

Differenzen von zwei Mengen

Definition 4.4

Differenzmenge von Y in X

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

symmetrische Differenz von X und Y

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

Komplement einer Menge in einer Menge

Definition 4.4

Komplement von $Y \subseteq X$ in X:

$$Y^c \coloneqq X \setminus Y = \{x \in X \,|\, x \notin Y\}$$

Die Menge X taucht im Symbol Y^c nicht auf. Sie muss aus dem Zusammenhang klar sein.

Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung

Lemma 4.5

$X \cap Y = Y \cap X$	**Kommutativität von $\cap$**
$X \cup Y = Y \cup X$	**Kommutativität von $\cup$**
$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$	**Assoziativität von $\cap$**
$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$	**Assoziativität von $\cup$**
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$	**Distributivität**
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	**Distributivität**

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$$

$$X \cap Y = X \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$
$$X \cup Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung

Lemma 4.5

Sind Y und Z Teilmengen einer Menge X, bzgl. der wir das Komplement nehmen, so gilt weiter:

$(Y \cap Z)^c = Y^c \cup Z^c$ **De Morgansches Gesetz**

$(Y \cup Z)^c = Y^c \cap Z^c$ **De Morgansches Gesetz**

$(Y^c)^c = Y$ Komplementbildung ist **involutorisch**

$$Y \subseteq Z \quad \Leftrightarrow \quad Z^c \subseteq Y^c$$

Bindungsregeln

Es bindet ...

$$\cdot^c \text{ stärker als } \setminus \text{ stärker als } \cap \text{ stärker als } \cup$$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Klammern können jedoch zur Verdeutlichung nicht schaden.

$$(X^c) \cap Y \quad \text{ist dasselbe wie} \quad X^c \cap Y$$

$$X \setminus Y \cup Z \quad \text{ist dasselbe wie} \quad (X \setminus Y) \cup Z$$

Potenzmenge

Definition 4.6

Die Menge aller Teilmengen einer Menge X

$$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A \mid A \subseteq X\}$$

heißt die **Potenzmenge** von X.

Beispiel 4.7

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{a\}) = \big\{\emptyset, \{a\}\big\}$

$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$

$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$

Kartesisches Produkt von endlich vielen Mengen

Definition 4.8

kartesisches Produkt von zwei Mengen X, Y:

$$X \times Y := \{\underbrace{(x, y)}_{\textbf{Paar}} \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$$

kartesisches Produkt von endlich vielen Mengen $X_1, \dots, X_n$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i := \{\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{n\text{-}\textbf{Tupel}} \mid x_i \in X_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Paare und Tupel sind geordnet!

§ 5 Relationen

Definition 5.1

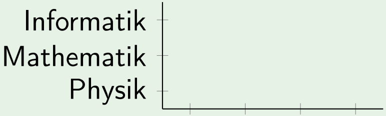
Es seien X und Y Mengen sowie $R \subseteq X \times Y$.
(R, X, Y) heißt eine **Relation** zwischen X und Y mit **Graph** R.

Im Fall $X = Y$ heißt die Relation **homogen**.

Wenn X und Y klar sind, sagt man auch oft, R selbst sei die Relation.

Beispiel 5.2

Relation „studiert das Fach“



Beispiel 5.2

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$ ist die **Kleiner-Gleich-Relation auf $\mathbb{R}$**.

Teilbarkeitsrelation

Beispiel 5.2

Die Zahl $x \in \mathbb{Z}$ **teilt** die Zahl $y \in \mathbb{Z}$, kurz: $x \mid y$, wenn eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $y = n\,x$ gilt.

Teilbarkeitsrelation $R := \big\{(x,y) \,\big|\, x \mid y\big\}$ zwischen $X \subseteq \mathbb{Z}$ und $Y \subseteq \mathbb{Z}$

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

Beispiel 5.2

Es sei X eine beliebige Menge.

- **Inklusionsrelation** $R = \big\{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \,\big|\, A \subseteq B\big\}$

- **Gleichheitsrelation** oder **Identitätsrelation** auf X
  $\mathrm{id}_X := (\Delta_X, X, X)$ mit der **Diagonale** in $X \times X$ als Graph:

  $$\Delta_X := \big\{(x, y) \in X \times X \,\big|\, x = y\big\}$$

- **universelle Relation** auf X
  $U_X := (U, X, X)$ mit Graph $U = X \times X$

Darstellungen von Relationen zwischen endlichen Mengen

Tabelle

Graph

Pfeildiagramm

gerichteter Graph

Komposition von Relationen

Es seien X, Y und Z Mengen sowie (R, X, Y) und (S, Y, Z) zwei Relationen. Dann heißt die Relation $(S \circ R, X, Z)$ mit

$$S \circ R \coloneqq \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

die **Komposition** von R und S.

Beispiel

Umkehrrelation

Es seien X und Y Mengen und (R, X, Y) eine Relation. Dann heißt (R^{-1}, Y, X) die **Umkehrrelation** oder **inverse Relation** von R mit

$$R^{-1} := \left\{(y, x) \in Y \times X \;\middle|\; (x, y) \in R\right\} \subseteq Y \times X.$$

Beispiel

Potenzen homogener Relationen

Definition 5.8

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X. Wir definieren die **Potenzen** von R für $n \in \mathbb{Z}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} R^0 &\coloneqq \mathrm{id}_X \\ R^{n+1} &\coloneqq R^n \circ R \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \\ R^{-n} &\coloneqq (R^n)^{-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Eigenschaften homogener Relationen

Definition 5.9

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.

R heißt ...	wenn gilt:
reflexiv:	$(x,x) \in R \quad$ für alle $x \in X$
irreflexiv:	$(x,x) \notin R \quad$ für alle $x \in X$
symmetrisch:	$(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R$
antisymmetrisch:	$(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y$
transitiv:	$(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R$
total:	$(x,y) \in R$ oder $(y,x) \in R \quad$ für alle $x, y \in X$

Eigenschaften homogener Relationen

Beispiel 5.10

Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$ ist

- ☐ reflexiv
- ☐ irreflexiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch
- ☐ transitiv
- ☐ total

Beispiel 5.10

Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}_0$ ist

- ☐ reflexiv
- ☐ irreflexiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ antisymmetrisch
- ☐ transitiv
- ☐ total

Durchschnitt von Relationen

Definition 5.11

Es seien X und Y Mengen und $\mathcal{R}$ eine nichtleere Menge von Relationen zwischen X und Y. Die Relation

$$\bigcap \mathcal{R} := \big\{(x, y) \,\big|\, \forall R \in \mathcal{R} \; ((x, y) \in R)\big\}$$

heißt der **Durchschnitt** der Relationen in $\mathcal{R}$.

Lemma 5.13

Es seien X und Y Mengen und $\mathcal{R}$ eine nichtleere Menge von Relationen zwischen X und Y.

1. Sind alle $R \in \mathcal{R}$ reflexiv, dann auch $\bigcap \mathcal{R}$.
2. Sind alle $R \in \mathcal{R}$ symmetrisch, dann auch $\bigcap \mathcal{R}$.
3. Sind alle $R \in \mathcal{R}$ transitiv, dann auch $\bigcap \mathcal{R}$.

Reflexive Hülle einer homogenen Relation

Definition 5.14

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.
Die **reflexive Hülle** von R ist definiert als

$$R^? \coloneqq \bigcap \{S \subseteq X \times X \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

Lemma 5.15

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.
R ist reflexiv genau dann, wenn $R^? = R$ gilt.

Beweis.

Weiteres zur reflexiven Hülle

Per Konstruktion ist die reflexive Hülle $R^?$ der Relation R die kleinste reflexive Oberrelation von R. Sie hat folgende Darstellung:

Satz 5.17

$$R^? = \bigcup_{n \in \{0,1\}} R^n = R \cup \Delta_X$$

Beweis.

Weitere Hüllen homogener Relationen

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.

reflexive Hülle von R

$$R^? := \bigcap \{S \subseteq X \times X \,|\, S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}$$

symmetrische Hülle von R

$$R^{\text{sym}} := \bigcap \{S \subseteq X \times X \,|\, S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}$$

transitive Hülle von R

$$R^+ := \bigcap \{S \subseteq X \times X \,|\, S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}$$

reflexiv-transitive Hülle von R

$$R^* := \bigcap \{S \subseteq X \times X \,|\, S \text{ ist reflexiv \& transitiv und } R \subseteq S\}$$

reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle von R

$$R^\sim := \bigcap \{S \subseteq X \times X \,|\, S \text{ ist reflexiv, symmetrisch \& transitiv und } R \subseteq S\}$$

Weitere Hüllen homogener Relationen

Für alle diese Hüllen $R^?, R^{\text{sym}}, R^+, R^*, R^\sim$ gilt:

Lemma 5.15

Die Hüllenbildung fügt genau dann nichts zu R hinzu, wenn R die gewünschten Eigenschaften bereits besitzt.

Es gelten die Darstellungen:

Satz 5.17

$$R^? = \bigcup_{n \in \{0,1\}} R^n = R \cup \Delta_X \qquad R^{\text{sym}} = \bigcup_{n \in \{-1,1\}} R^n = R \cup R^{-1}$$

$$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n \qquad R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} R^n$$

$$R^\sim = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (R \cup R^{-1})^n$$

mehr zu Hüllen in Anhang C im Skript