R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung I - 4 (Lösung)

Ausgabedatum: 3. November 2025
Abgabedatum: 10. November 2025

Übungsaufgabe I-4.1. (Kardinalität)

(a) Bestimmen Sie für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ die Kardinalität der Menge der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage von Satz 6.35 des Skripts für abzählbar unendliche Mengen X, Y i. A. nicht gilt.

(c) Zeigen Sie, dass Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen definiert.

(d) Es seien I eine abzählbar unendliche Indexmenge und für jedes $i \in I$ seien X_i paarweise disjunkte abzählbar unendliche Mengen. Skizzieren Sie einen Beweis für die Aussage, dass $\bigcup_{i \in I} X_i$ eine abzählbar unendliche Menge ist.

Lösung.

(a) Die Menge der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m ist endlich, denn es gibt genau m dieser Restklassen. Die Menge der Restklassen ist durch

$$A \coloneqq \big\{[0], \dots, [m-1]\big\}$$

gegeben, denn keine Klasse kommt zweimal vor und jede weitere Menge $[r]$ für r aus $\mathbb{Z}$ ist bereits vertreten, denn $r \mod m \in \{0, \dots, m-1\}$. Um zu zeigen, dass $\#A = m$ ist geben wir eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ modulo m und $[\![1, m]\!]$ an. Eine Möglichkeit ist die Umkehrfunktion der kanonischen Wahl

$$f \colon [\![1, m]\!] \longrightarrow \mathbb{Z} / \overset{m}{\equiv}$$
$$f(n) = [n]$$

oder die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{Z}/\overset{m}{\equiv} &\to [\![1, m]\!] \\ g([n]) &= (n \mod m) + 1. \end{aligned}$$

(b) Für ein entsprechendes Gegenbeispiel benötigt man nicht einmal überabzählbare Mengen, schon bei abzählbar unendlichen Mengen beobachtet man, dass die Aussage von Satz 6.35 nicht gelten kann, also dass Injektivität und Surjektivität nicht äquivalent sind. Das zeigt zum Beispiel die injektive, aber nicht surjektive, Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ f(n) &= 2n. \end{aligned}$$

(c) Die konkrete Relation auf der Klasse der Mengen, die es zu untersuchen gilt, ist

$$R := \{(X, Y) \mid \exists \text{ Bijektion } f\colon X \to Y\}.$$

Wir prüfen für R die definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nach, also Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Es seien dafür X, Y, Z Mengen. Dann können wir für den Nachweis von XRX (der **Reflexivität** von R) die (natürlich bijektive) Identität $\mathrm{id}\colon X \to X$ angeben.

Für die **Symmetrie** sei nun XRY, d. h. es existiert eine Bijektion $f\colon X \to Y$. Da die Abbildung f bijektiv ist, existiert ihre Inverse $f^{-1}\colon Y \to X$, die ebenfalls bijektiv ist, daher ist YRX.

Für die **Transitivität** sei nun XRY und YRZ, es existieren also Bijektionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$. Dann ist die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$ ebenfalls eine Bijektion, siehe Satz 6.28 des Skripts, und damit XRZ.

(d) Zu zeigen ist, dass eine Bijektion $f\colon \bigcup_{i\in I} X_i \to \mathbb{N}$ existiert. Wir nutzen den Fakt, dass für die Menge I und für die Mengen X_i für $i \in I$ jeweils Bijektionen in die natürlichen Zahlen existieren, das Auswahlaxiom (das uns solche Bijektionen zum Weiterverarbeiten in die Hand gibt) und ein geschicktes Abzählverfahren, um zu zeigen, dass ein solches f existiert.

Wenn man das Auswahlaxiom akzeptiert und es als nicht notwenig erachtet, dessen Nutzung weiter auszuführen, startet man an dieser Stelle für gewöhnlich ohne weitere Bemerkung dazu wie folgt in den Beweis: „Es seien also $g\colon I \to \mathbb{N}$ eine Bijektion und für jedes der $i \in I$ Bijektionen $f_i\colon X_i \to \mathbb{N}$ gegeben. Wir definieren nun die Abbildung…“ und macht weiter mit der Definition der Funktion f in (0.1). An dieser Stelle hat man dann eine abzählbar unendliche Auswahl von Bijektionen getroffen, mit der man weiter arbeitet. Ein g aus der Menge der Bijektionen von I nach $\mathbb{N}$ zu wählen(bzw. zu benennen) ist in Hinsicht auf das Auswahlaxiom unkritisch, dieser endliche Vorgang geht ohne das Auswahlaxiom. Für jedes einzelne $i \in I$ ein f_i zu wählen wäre auch kein Problem, wir benötigen aber abzählbar undendlich viele von ihnen zur gleichen Zeit (weil I abzählbar unendlich ist) – dafür braucht man das Auswahlaxiom. Für eine ausführliche Angabe, wie man das Auswahlaxiom anwendet, würde man entsprechend Mengen von Bijektionen zu definieren, nämlich die Mengen der Bijektion von X_i nach $\mathbb{N}$, also die Mengen

$$B_i \coloneqq \{h \colon X_i \to \mathbb{N} \mid h \text{ bijektiv } \}.$$

Das Auswahlaxiom sichert nun die Existenz einer Auswahlfunktion $F \colon I \to \bigcup_{i \in I} B_i$ mit $F(i) \in B_i$ für alle $i \in I$. Die vorhin angegebenen Bijektionen f_i sind also genau die Funktionswerte $F(i)$ für eine solche Auswahlfunktion. So hat man wieder alles beisammen um die Funktion f aufbauend auf den anderen Bijektionen anzugeben.

Wir definieren nun die Abbildung

$$f \colon \bigcup_{i \in I} X_i \to \mathbb{N} \tag{0.1}$$

$$f\left((f_{g^{-1}(k)})^{-1}(j) \right) \coloneqq \left(\sum_{l=1}^{i+j-2} l \right) + k \qquad \text{für } j, k \in \mathbb{N}. \tag{0.2}$$

Wenn wir zeigen können, dass dies eine Bijektion von $\bigcup_{i \in I} X_i$ nach $\mathbb{N}$ ist, dann zeigt das entsprechend die Abzählbarkeit von $\bigcup_{i \in I} X_i$. Dass die Abbildung f tatsächlich eine Bijektion ist, ist allerdings nicht direkt ersichtlich, wird aber klar, wenn man sich genauer mit ihrer Konstruktion beschäftigt. Die Abbildung f formalisiert nämlich das Vorgehen, die Elemente der X_i jeweils zeilenweise in dem Receckschema

$$\begin{array}{ccccr}
f_{g^{-1}(1)}^{-1}(1) & f_{g^{-1}(1)}^{-1}(2) & f_{g^{-1}(1)}^{-1}(3) & \cdots & (\text{Aufzählung von } X_{g^{-1}(1)}) \\
f_{g^{-1}(2)}^{-1}(1) & f_{g^{-1}(2)}^{-1}(2) & f_{g^{-1}(2)}^{-1}(3) & \cdots & (\text{Aufzählung von } X_{g^{-1}(2)}) \\
f_{g^{-1}(3)}^{-1}(1) & f_{g^{-1}(3)}^{-1}(2) & f_{g^{-1}(3)}^{-1}(3) & \cdots & (\text{Aufzählung von } X_{g^{-1}(3)}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

anzugeben und dieses Schema dann entlang der Diagonalen von oben rechts nach unten links zu traversieren und abzuzählen, also

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}_{g^{-1}(1)}(1) & \rightarrow & f^{-1}_{g^{-1}(1)}(2) & & f^{-1}_{g^{-1}(1)}(3) & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
f^{-1}_{g^{-1}(2)}(1) & & f^{-1}_{g^{-1}(2)}(2) & & f^{-1}_{g^{-1}(2)}(3) & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
f^{-1}_{g^{-1}(3)}(1) & & f^{-1}_{g^{-1}(3)}(2) & & f^{-1}_{g^{-1}(3)}(3) & & \cdots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \swarrow & \ddots & &
\end{array}$$

Die Funktion f ergibt sich dann daraus, dass wir für das Bild des Elements $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j) \in X_{g^{-1}(i)}$ die Anzahl der Elemente bestimmen müssen, die sich im Schema links oben von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ befinden, und dann die Position von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ auf seiner Diagonalen drauf addieren müssen. Das Element $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ steht auf der Diagonalen mit der Nummer $(i+j-1)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat die jeweils k-te Diagonal genau k Elemente, die Anzahl der Elemente links oben von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ ergeben sich also genau zu $\sum_{k=1}^{i+j-2} k$. Die Position von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ auf seiner Diagonalen ist genau i. Damit ist die Injektivität und Surjektivität von f sofort erkenntlich. Dass die Abbildung tatsächlich rechtseindeutig ist, folgt aus der Disjunktheit der X_i, während die Linkstotalität aus der Bijektionseigentschaft der f_i folgt.

Beachte: Wenn die Mengen X_i nicht mehr disjunkt sind, dann gilt die Aussage weiterhin. Die Konstruktion der Bijektion ist aber deutlich schwieriger explizit anzugeben, weil man doppelt vorkommende Elemente überspringen muss.

Übungsaufgabe I-4.2. (Familien und Mächtigkeit)

Es sei Y eine Menge. Zeigen Sie, dass durch

$$(y_i)_{i \in I_1} \preccurlyeq (\tilde{y}_i)_{i \in I_2} :\Leftrightarrow (y_i)_{i \in I_1} \text{ ist Teilfamilie von } (\tilde{y}_i)_{i \in I_2}$$

eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Familien mit Werten in Y definiert ist.

Lösung.

Wir überprüfen die definierenden Eigenschaften einer Ordnungsrelation, also Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität.

Für die **Reflexivität** genügt es festzustellen, dass jede Familie $(y_i)_{i \in I}$ eine Teilfamilie von sich selbst ist, da man als Teilindexmenge die gesamte Menge wählen kann.

Die **Antisymmetrie** folgt, da wenn $(y_i)_{i\in I_1}$ Teilfamilie von $(\tilde{y}_i)_{i\in I_2}$ ist und $(\tilde{y}_i)_{i\in I_2}$ Teilfamilie von $(\tilde{y}_i)_{i\in I_1}$ ist, dann gilt $I_1 \subseteq I_2$ und $I_2 \subseteq I_1$ und damit $I_1 = I_2$, außerdem gilt $y_i = \tilde{y}_i$ für alle $i \in I_1 = I_2$.

Für die **Transitivität** seien $(y_i)_{i\in I_1}$ Teilfamilie von $(\tilde{y}_i)_{i\in I_2}$ und $(\tilde{y}_i)_{i\in I_2}$ Teilfamilie von $(\bar{y}_i)_{i\in I_3}$. Dann gilt $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3$ und $y_i = \tilde{y}_i = \bar{y}_i$ für alle $i \in I_1$ und damit ist $(y_i)_{i\in I_1}$ Teilfamilie von $(\bar{y}_i)_{i\in I_3}$.

Übungsaufgabe I-4.3. (Beispiele von Halbgruppen)

Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Halbgruppen bzw. Monoide sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie für Monoide das jeweilige neutrale Element an.

(i) $(\mathbb{R}^X, \cdot)$

(ii) $\left(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}\right)$

(iii) $(\mathcal{P}(X), \cup)$

(iv) $(\mathcal{P}(X), \setminus)$

Lösung.

Für jedes Paar aus einer Menge und einer Abbildung ist für die Halbgruppeneigenschaft zu prüfen, ob die Abbildung eine Verknüpfung ist und ob diese assoziativ ist. Ob es sich bei einem Paar um ein Monoid handelt, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob ein neutrales Element bzgl. der angegebenen Verknüpfung existiert.

Die Angaben der Abbildungen müssen zu einem gewissen Grad aus dem Kontext interpretiert werden. Z. B. ist mit der „+“ Verknüpfung auf Funktionen die punktweise Addition gemeint, das kann man aber natürlich auch falsch verstehen und argumentieren, dass man in die reelle Addition keine Funktionen stecken kann. Wir versuchen hier immer den „best case“ zu untersuchen, also versuchen alles daran zu setzen, Halbgruppen zu erhalten.

(a) Bei dem Paar $(\mathbb{R}^X, \cdot)$ besteht die Grundmenge, wie im vorherigen Beispiel, aus der Menge aller Funktionen aus der nichtleeren Menge X nach $\mathbb{R}$ wobei „$\cdot$“ die punktweise Multiplikation der Funktionen bzw. ihrer Funktionswerte ist. Für Funktionen f, g aus $\mathbb{R}^X$ liefert die Abbildung $(f, g) \mapsto f \cdot g$ also wieder eine Funktion aus $\mathbb{R}^X$, die Abbildung „$\cdot$“ ist also eine **Verknüpfung** auf $\mathbb{R}^X$. Sie erbt die **Assoziativität** von der Multiplikation in den reellen Zahlen. Bei diesem Beispiel handelt es sich also um eine **Halbgruppe**. Die konstante Einsfunktion ist weiterhin ein **neutrales Element** bzgl. der punktweisen Multiplikation, entsprechend handelt es sich sogar um ein **Monoid**.

(b) Das Paar $\left(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}\right)$ können wir nur sinnvoll interpretieren, wenn wir „$(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$“ als Abbildung in die rationalen Zahlen bzw. die Menge aller Brüche verstehen, womit der Bildbereich der Abbildung die Grundmenge $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ verlässt, da z. B. $(1, 2) \mapsto \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Es handelt sich bei der Abbildung also um **keine Verknüpfung** und damit haben wir keine Halbgruppe und entsprechend kein Monoid vorliegen.

(c) In dem Paar $(\mathcal{P}(X), \cup)$ bildet die Mengenvereinigung zwei Mengen aus $\mathcal{P}(X)$ wieder auf eine Menge in $\mathcal{P}(X)$ ab, es handelt sich also um eine **Verknüpfung** auf $\mathcal{P}(X)$. Dass die Vereinigungsoperation für Mengen assoziativ ist folgt sofort aus der Assoziativität des logischen $\vee$ und ist in dieser Veranstaltung bereits mehrfach thematisiert worden, wir haben haben also eine **Halbgruppe** vorliegen. Das neutrale Element bzgl. der Vereinigung auf $\mathcal{P}(X)$ ist die leere Menge, wir haben also sogar ein **Monoid**.

(d) In dem Paar $(\mathcal{P}(X), \setminus)$ bildet die Mengendifferenz zwar zwei Mengen aus $\mathcal{P}(X)$ wieder auf eine Menge in $\mathcal{P}(X)$ ab und ist damit eine **Verknüpfung** auf $\mathcal{P}(X)$, dass diese Operation jedoch nicht assoziativ ist, wissen wir aus Übungsaufgabe I-2.2 . Hier liegt also **keine Halbgruppe** vor.

Übungsaufgabe I-4.4. (Neutralität in Halbgruppen)

Wir erweitern die Definition 7.6 des Skripts für eine Halbgruppe $(H, \star)$ wie folgt:
Ein Element $e_\ell \in H$ heißt **linksneutrales Element** von $(H, \star)$, wenn $e_\ell \star x = x \; \forall x \in H$ gilt.
Ein Element $e_r \in H$ heißt **rechtsneutrales Element** von $(H, \star)$, wenn $x \star e_r = x \; \forall x \in H$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) I. A. sind linksneutrale Elemente nicht eindeutig. Das Gleiche gilt für rechtsneutrale Elemente.

(b) Wenn in einer Halbgruppe $(H, \star)$ ein linksneutrales Element e_ℓ und ein rechtsneutrales Element e_r existieren, dann stimmen beide überein und sind ein neutrales Element, mit dem $(H, \star)$ ein Monoid ist.

Lösung.

(a) Für jede Menge X mit mindestens zwei Elementen können wir $\star\colon X \times X \to X$ durch $(x, y) \mapsto y$ (die „Rechtsauswahl“) definieren. Diese ist eine Verknüpfung auf X und assoziativ, denn es ist für x, y, z aus X immer

$$(x \star y) \star z = y \star z = z = x \star z = x \star (y \star z).$$

Entsprechend ist das so definierte $(X, \star)$ eine Halbgruppe und da $\forall x, y \in X \; x \star y = y$ gilt ist jedes Element aus X linksneutral. Um zu zeigen, dass rechtsneutrale Elemente nicht eindeutig sind, definiert man analog die Linksauswahl und erhält, dass jedes Element rechtsneutral ist.

(b) Es seien $(H, \star)$ eine Halbgruppe, e_ℓ ein linksneutrales Element und e_r ein rechtsneutrales Element. Dann ist

$$e_\ell \overset{e_r \text{ rechtsneutral}}{=} e_\ell \star e_r \overset{e_\ell \text{ linksneutral}}{=} e_r.$$

Entsprechend ist $e \coloneqq e_\ell = e_r$ ein links- und rechtsneutrales Element und damit ein neutrales Element – welches auf Grund von Lemma 7.7 des Skripts eindeutig ist – und $(H, \star)$ mit e ein Monoid.

Beachte: Dieser Punkt zeigt direkt, dass eine Halbgruppe keine Monoid sein kann, wenn mehrere links- bzw. rechtsinverse Elemente existieren.

Hausaufgabe I-4.1 (Charakterisierung der Injektivität) 3 Punkte

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie die verbleibenden Implikationen für den Beweis von Satz 6.29 des Skripts, also für die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist injektiv.

(ii) Es existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Eine solche Abbildung heißt eine **Linksinverse** (englisch: left inverse) von f. Sie ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $g|_{f(X)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.

(iii) Für beliebige Mengen X_0 und beliebige Abbildungen $f_1, f_2\colon X_0 \to X$ gilt: Aus $f \circ f_1 = f \circ f_2$ folgt $f_1 = f_2$.

Lösung.

Für die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ wurde bereits im Skript eine Konstruktion angegeben.

Für die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ seien entsprechende f_1 und f_2 mit dazugehörigem X_0 gegeben. Dann nutzen wir die Linksinverse g und erhalten

$$f_1 = \mathrm{id}_X \circ f_1 = g \circ f \circ f_1 = g \circ f \circ f_2 = \mathrm{id}_X \circ f_2 = f_2.$$

(1.5 Punkte)

Für die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$ führen wir einen Beweis über Kontraposition und starten also mit nicht-injektivem f. Per Definition existieren in der nichtleeren Menge X also mindestens zwei Elemente $x_1 \neq x_2 \in X$, so dass $f(x_1) = f(x_2)$. Nun wählen wir $X_0 = X$ und $f_1 \equiv x_1$ und $f_2 \equiv x_2$. Dann sind diese Funktionen per Konstruktion nicht gleich, doch es gilt $f \circ f_1(x) = f(x_1) = f(x_2) = f \circ f_2(x)$ für beliebige $x \in X$. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe I-4.2 (Stabilität der Mächtigkeit überabz. Mengen bei Verlust abz. Teilmengen) 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

Es seien X eine überabzählbare Menge und $Y \subsetneq X$ eine abzählbar unendliche Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ überabzählbar ist.
(b) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ eine abzählbar unendliche Teilmenge enthält.
(c) Zeigen Sie, dass X und $X \setminus Y$ gleichmächtig sind.

Lösung.

(a) Es ist $X = X \setminus Y \dot\cup Y$, also darstellbar als die disjunkte Vereinigung. Angenommen $X \setminus Y$ wäre abzählbar unendlich und $f\colon X \setminus Y \to \mathbb{N}$ eine Bijektion sowie $g\colon Y \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann wäre $h\colon X \to \mathbb{N}$

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & x \in X \setminus Y \\ 2g(x) - 1 & x \in Y \end{cases}$$

(die Abbildung, die die Elemente aus $X \setminus Y$ und Y abwechselnd auf die natürlichen Zahlen abbildet) ebenfalls eine Bijektion und damit X abzählbar undendlich, im Widerspruch zur Überabzählbarkeit.

Angenommen $X \setminus Y$ wäre endlich mit $m \in \mathbb{N}$ Elementen und $f\colon X \setminus Y \to [\![1, m]\!]$ eine Bijektion sowie $g\colon Y \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann könnten wir entsprechend die Bijektion $h\colon X \to \mathbb{N}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus Y \\ g(x) + m & x \in Y \end{cases}$$

angeben und entsprechend einen analogen Widerspruch produzieren.

Im Fall $X \setminus Y = \emptyset$ ist $X = Y$ abzählbar im Widerspruch zur Voraussetzung. (2 Punkte)

(b) Wir müssen zeigen, dass es eine Bijektion von einer Teilmenge aus X in die natürlichen Zahlen gibt.

Klar ist, dass wir für jede endliche Menge von genau $n \in \mathbb{N}$ verschiedenen Elementen $S_n \coloneqq \{x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$ ein weiteres Element $x^{(n+1)} \in (X \setminus Y) \setminus S_n$ wählen können, denn sonst wäre $X \setminus Y$ endlich. Wir erhalten also induktiv für jedes beliebige aber feste $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Folge paarweise verschiedener Elemente $x_1, \ldots, x_n$, also das folgende Resultat:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_1, \ldots, x_n\colon i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j. \tag{0.3}$$

Dies ist aber wie schon gesagt ein induktiver Prozess, der uns nicht die Existenz einer unendlichen Folge mit der entsprechenden Eigenschaft liefert. Das Auswahlaxiom sichert uns, dass wir nicht nur eine endliche Folge wählen können, sondern auch eine unendliche, also das eigentlich gewünschte Resultat

$$\exists (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon i \neq j \Rightarrow \tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j. \tag{0.4}$$

Ein sauberer Beweis dieser Tatsache geht wie folgt: Die Existenzaussage (0.3) zeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge von X mit Kardinalität n existiert. Wir können also die Familie nichtleerer Mengen

$$(P_n)_n \coloneqq \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \#A = 2^n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

betrachten. Anwendung des Auswahlaxioms liefert uns eine Familie $(X_n)_n$ von Mengen $X_n \in \mathcal{P}(X)$ mit $\#(X_n) = 2^n$. Aus diesen definieren wir die Familie $(\widetilde{X}_n)_n$ der Mengen

$\widetilde{X}_n \coloneqq X_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k)$. Da $\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$ höchstens $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2$ Elemente hat, sind alle $\widetilde{X}_n$ nichtleer und das Auswahlaxiom liefert aus der Familie $(\widetilde{X}_n)_n$ eine Folge $\tilde{x}_n$ paarweise ungleicher Elemente, also die Aussage (0.4). (2 Punkte)

(c) Wir konstruieren eine Bijektion zwischen X und $X \setminus Y$. Es seien dafür Bijektionen $f\colon F \to \mathbb{N}$ und $g\colon Y \to \mathbb{N}$ gegeben, wobei F wieder die eben konstruierte abzählbar unendliche Teilmenge von $X \setminus Y$ bezeichnet. Wir definieren dann die nach Konstruktion bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} h\colon X &\to X \setminus Y \\ h(x) &= \begin{cases} x & x \in X \setminus (Y \cup F) \\ f^{-1}\big(2f(x) - 1\big) & x \in F \\ f^{-1}\big(2g(x)\big) & x \in Y \end{cases}. \end{aligned}$$

Die Idee bei der Konstruktion dieser Abbildung ist, dass man X in 3 Teile zerlegen kann, nämlich in zwei disjunkte abzählbar unendliche Teilmengen Y und F und den entsprechenden Rest $X \setminus (Y \cup F)$. Für die Konstruktion der Bijektion von X auf $X \setminus Y$ baut man nun eine Bijektion zwischen den abzählbar unendlichen Mengen $Y \cup F$ und F indem man die Abzählung derer Elemente alterniert und dann die Identität auf dem überabzählbaren Rest nimmt. Die abzählbar unendliche Menge in $F \subseteq X \setminus Y$ ist letztendlich ausreichend mächtig, um die Bijektion auf die größere Menge $F \cup Y$ zu erlauben. (2 Punkte)

Hausaufgabe I-4.3 (Konkatenation von Familien) 1.5 + 1.5 + 1 = 4 Punkte

Es sei Y eine Menge. Für zwei Familien $F_1 = (v_j)_{j \in J_1}$ und $F_2 = (\tilde{v}_j)_{j \in J_2}$ ist die Konkatenation der beiden Familien definiert als

$$\begin{aligned} F_1 \parallel F_2 \colon (\{1\} \times J_1) \mathbin{\dot\cup} (\{2\} \times J_2) &\to Y \\ F_1 \parallel F_2(i,j) &\coloneqq \begin{cases} v_j, & i = 1 \\ \tilde{v}_j, & i = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Erklären Sie, weshalb in der obigen Definition die neue Indexmenge $(\{1\} \times J_1) \mathbin{\dot\cup} (\{2\} \times J_2)$ statt der Menge $J_1 \cup J_2$ verwendet wurde.

(b) Verallgemeinern Sie die Definition der Konkatenation zweier Familien für den Fall einer Familie $(F_i)_{i \in I}$ von Familien F_i mit Indexmengen J_i und Werten in Y über einer Indexmenge I. **Beachte:** Eine solche Konkatenation werden wir mit $\big\|_{i \in I} F_i$ bezeichnen.

(c) Evaluieren Sie $\big\|_{i \in I} F_i(15.7, \{-10, 10\})$ für den Fall, dass $Y = \mathbb{N}_0$ und $I = \mathbb{R}$ ist, sowie

$$J_i = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid \max(A) \le i\} \quad \text{und} \quad F_i\colon J_i \ni A \mapsto \#(A \cap \mathbb{R}_>).$$

Lösung.

(a) Bei der simplen Vereinigung der beiden Indexmengen ließe sich für jeden der Indizes, die im Schnitt der Mengen $J_1 \cap J_2$ vorkommen, keine Entscheidung treffen, welches Bild der jeweiligen Familien verwendet werden sollte. (1.5 Punkte)

(b) Wir erweitern die Definition auf beliebige Konkatenationen via

$$\begin{aligned} \big\Vert_{i\in I} F_i \colon \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times J_i) &\to Y \\ \big(\big\Vert_{i\in I} F_i\big)(i, j) &\coloneqq F_i(j). \end{aligned}$$

(1.5 Punkte)

(c) Wir erhalten

$$\big\Vert_{i\in I} F_i(15.7, \{-10, 10\}) = F_{15.7}(\{-10, 10\}) = \#(\{-10, 10\} \cap \mathbb{R}_{>}) = \#(\{10\}) = 1.$$

(1 Punkt)

Hausaufgabe I-4.4 (Beispiele von Halbgruppen) 3 Punkte

Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Halbgruppen bzw. Monoide sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie für Monoide das jeweilige neutrale Element an.

(i) $(\mathbb{R}^X, +)$

(ii) $(\mathcal{P}(X), \cap)$

(iii) $(\mathcal{P}(X), \triangle)$

(iv) $(X^X, \circ)$

(v) $(\mathbb{Z}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 \cdot y_1, x_2 + y_2))$

(vi) $(\mathcal{P}(X), (A, B) \mapsto A^c \cup B^c)$

Lösung.

Für jedes Paar aus einer Menge und einer Abbildung ist für die Halbgruppeneigenschaft zu prüfen, ob die Abbildung eine Verknüpfung ist und ob diese assoziativ ist. Ob es sich bei einem Paar um ein Monoid handelt, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob ein neutrales Element bzgl. der angegebenen Verknüpfung existiert.

Die Angaben der Abbildungen müssen zu einem gewissen Grad aus dem Kontext interpretiert werden. Z. B. ist mit der „+“ Verknüpfung auf Funktionen die punktweise Addition gemeint, das kann man aber natürlich auch falsch verstehen und argumentieren, dass man in die reelle Addition keine Funktionen stecken kann. Wir versuchen hier immer den „best case“ zu untersuchen, also versuchen alles daran zu setzen, Halbgruppen zu erhalten.

(a) Das Paar $(\mathbb{R}^X, +)$ bezeichnet die Menge aller Funktionen aus der nichtleeren Menge X nach $\mathbb{R}$ wobei „+“ die punktweise Addition der Funktionen bzw. ihrer Funktionswerte ist. Für Funktionen f, g aus $\mathbb{R}^X$ liefert die Abbildung $(f, g) \mapsto f + g$ also wieder eine Funktion aus $\mathbb{R}^X$, die Abbildung „+“ ist also eine **Verknüpfung** auf $\mathbb{R}^X$. Sie erbt die **Assoziativität** von der Addition in den reellen Zahlen. Bei diesem Beispiel handelt es sich also um eine **Halbgruppe**. Die konstante Nullfunktion ist weiterhin ein **neutrales Element** bzgl. der punktweisen Addition, entsprechend handelt es sich sogar um ein **Monoid**. (0.5 Punkte)

(b) In dem Paar $(\mathcal{P}(X), \cap)$ bildet der Mengenschnitt zwei Mengen aus $\mathcal{P}(X)$ wieder auf eine Menge in $\mathcal{P}(X)$ ab, es handelt sich also um eine **Verknüpfung** auf $\mathcal{P}(X)$. Dass die Schnittoperation für Mengen assoziativ ist, folgt sofort aus der Assoziativität des logischen $\wedge$ und ist in dieser Veranstaltung bereits mehrfach thematisiert worden, wir haben haben also eine **Halbgruppe** vorliegen. Das neutrale Element bzgl. des Schnitts auf $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge X selbst, wir haben also sogar ein **Monoid**. (0.5 Punkte)

(c) Bei dem Paar $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ bildet die symmetrische Differenz Mengen aus $\mathcal{P}(X)$ auf eine Menge in $\mathcal{P}(X)$ ab, es handelt sich also um eine **Verknüpfung**. Die Verknüpfung ist sogar assoziativ, was wir bisher aber noch nicht gesehen haben, weshalb es hier noch kurz bewiesen wird.

Es seien dafür Mengen A, B, C gegeben. Zur Erinnerung, die symmetrische Differenz war definiert als $A \triangle B \coloneqq A \setminus B \cup B \setminus A$, was uns die folgende Gleichungskette liefert:

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \triangle C &= (A \setminus B \cup B \setminus A) \triangle C && \text{(Definition)} \\
&= (A \setminus B \cup B \setminus A) \setminus C \;\cup\; C \setminus (A \setminus B \cup B \setminus A) && \text{(Definition)} \\
&= A \setminus (B \cup C) \;\cup\; B \setminus (A \cup C) \;\cup\; C \setminus (A \cup B) && \text{(Split der A,B-Teile)} \\
&= A \setminus (B \setminus C \cup C \setminus B) \;\cup\; (B \setminus C \cup C \setminus B) \setminus A && \text{(Gruppieren der B,C Teile)} \\
&= A \setminus (B \triangle C) \;\cup\; (B \triangle C) \setminus A && \text{(Definition)} \\
&= A \triangle (B \triangle C). && \text{(Definition)}
\end{aligned}$$

Das zeigt, dass wir hier tatsächlich eine **Halbgruppe** vorliegen haben. Das neutrale Element ist hier wieder die leere Menge, wir haben also sogar ein **Monoid**. (0.5 Punkte)

(d) Das Paar $(X^X, \circ)$ beschreibt die Menge aller Funktionen $f : X \to X$ mit der Komposition, die eine **Verknüpfung** auf X^X darstellt. Die Assoziativität ist für die Verknüpfung klar, denn für $f, g, h \in X^X$ ist für alle $x \in X$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = f \circ (g \circ h)(x),$$

hier liegt also wieder eine **Halbgruppe** vor und das neutrale Element $\mathrm{id} \in X^X$ zeigt, dass wir sogar ein **Monoid** haben. (0.5 Punkte)

(e) Das Paar $(\mathbb{Z}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 \cdot y_1, x_2 + y_2))$ beschreibt die Menge aller Paare in $\mathbb{Z}$ mit der Abbildung, die für zwei Paare, die ersten Komponenten multiplikativ und die zweite Komponente additiv verknüpft. Es handelt sich also tatsächlich um eine Verknüpfung. Die Assoziativität der Verknüpfung wird von den jeweiligen Operationen auf den ganzen Zahlen vererbt. Hier liegt also wieder eine **Halbgruppe** vor und das neutrale Element $(1, 0)$ zeigt, dass wir sogar ein **Monoid** haben. (0.5 Punkte)

(f) In dem Paar $(\mathcal{P}(X), (A, B) \mapsto A^c \cup B^c)$ werden Teilmengen auf X verknüpft, denn die Abbildung landet wieder in $\mathcal{P}(X)$. Dass keine Assoziativität gilt sieht man z. B. für $A = B = \emptyset, C = X$, dann ist

$$(A^c \cup B^c)^c \cup C^c = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \neq X = X \cup \emptyset = A^c \cup (B^c \cup C^c)^c.$$

Es liegt also keine **Halbgruppe** vor. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe I-4.5 (Invertierbarkeit in Halbgruppen) 2.5 + 1.5 = 4 Punkte

Wir erweitern die Definition 7.14 des Skripts für eine Halbgruppe $(H, \star)$ mit neutralem Element e wie folgt:

Ein Element $a \in H$ heißt **linksinvertierbar**, wenn ein $b_\ell \in H$ existiert mit $b_\ell \star a = e$. In diesem Fall heißt b_ℓ ein **linksinverses Element** zu a.

Ein Element $a \in H$ heißt **rechtsinvertierbar**, wenn ein $b_r \in H$ existiert mit $a \star b_r = e$. In diesem Fall heißt b_r ein **rechtsinverses Element** zu a.

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe. Zeigen Sie:

(a) I. A. sind linksinverse Elemente nicht eindeutig. Das Gleiche gilt für rechtsinverse Elemente.

(b) Wenn a aus H links- und rechtsinvertierbar ist, dann ist a invertierbar und jedes links- oder rechtsinverses Element zu a gleicht dem eindeutigen Inversen von a.

Lösung.

(a) Wir betrachten als Beispiel $(\mathbb{N}^\mathbb{N}, \circ)$, also die Halbgruppe der Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit der Komposition. Diese bildet mit dem neutralen Element id ein Monoid, es ist aber nicht jedes Element invertierbar, denn nicht alle Elemente sind injektiv und surjektiv zugleich. Wir können für eine nicht injektive aber surjektive Funktion verschiedene Rechtsinverse konstruieren, z. B. besitzt die surjektive aber nicht injektive Funktion $f(n) \coloneqq \max(1, n-1)$ die beiden Rechtsinversen

$$f_1^{-R}(n) \coloneqq n+1 \qquad \text{und} \qquad f_2^{-R}(n) \coloneqq \begin{cases} 1 & n = 1 \\ n+1 & n \neq 1 \end{cases}$$

mit $f \circ f_1^{-R} = f \circ f_2^{-R} = \mathrm{id}$.

Außerdem kann man für die nicht surjektive aber injektive Funktion $f(n) \coloneqq n+1$ die abzählbar unendliche Familie von linksinversen Funktionen f_m^{-L} in Abhängigkeit vom Index $m \in \mathbb{N}$ angeben:

$$f_m^{-L}(n) \coloneqq \begin{cases} m & n = 1 \\ n-1 & n \neq 1 \end{cases}.$$

(2.5 Punkte)

(b) Es sei $a \in H$ links- sowie rechtsinvertierbar und $a^{-\ell}$ und a^{-r} ein linksinverses bzw. ein rechtsinverses Element für a. Dann ist

$$a^{-\ell} = a^{-\ell} \star \underbrace{e}_{a \star a^{-r}} = \underbrace{a^{-\ell} \star a}_{e} \star a^{-r} = a^{-r},$$

es stimmen also alle links- und alle rechtsinversen Elemente überein (Eindeutigkeit) und sind damit links- und rechtsinverse von a, also Inverse zu a. (1.5 Punkte)

Beachte: Der obige Beweis unterscheidet sich kaum vom Beweis von Lemma 7.15 des Skripts.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.