

Lineare Algebra I

Woche 06

17.11.2025 und 18.11.2025

§ 8 Homomorphismen von Halbgruppen und Gruppen

Homomorphismen von Halbgruppen

Homomorphismen sind die strukturverträglichen Abbildungen zwischen algebraischen Strukturen.

Definition 8.1

Es seien (H_1, \star) und (H_2, \square) zwei Halbgruppen.

Eine Abbildung $f: H_1 \rightarrow H_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus von Halbgruppen**, wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \square f(b) \quad \text{für alle } a, b \in H_1$$

ist verknüpfen

ist über

dann über

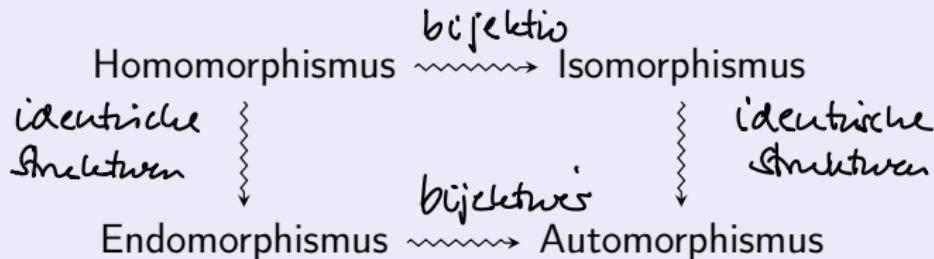
dann verknüpfen

"Funktionen sind die Homomorphismen von Mengen"

Homomorphismen von Halbgruppen

Definition 8.1

Es sei $f: H_1 \rightarrow H_2$ ein Homomorphismus der Halbgruppen (H_1, \star) und (H_2, \square) .



$(H_1, \star) = (H_2, \square)$	f bijektiv	Bezeichnung
Homomorphismus		
✓		Endomorphismus
	✓	Isomorphismus
✓	✓	Automorphismus

Homomorphismen von Halbgruppen

Beispiel

- ① $f: (\mathbb{N}, +) \rightarrow (\mathbb{N}, +)$ mit $f(n) = 2n = n+n$ Endo. von \mathbb{N}

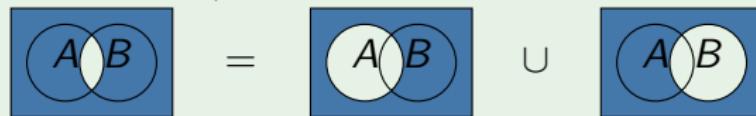
$$\begin{aligned} f(n_1+n_2) &= 2(n_1+n_2) = n_1+n_2+n_1+n_2 \\ f(n_1)+f(n_2) &= 2n_1+2n_2 = n_1+n_1+n_2+n_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} =$$

- ② $f: (\mathcal{P}(X), \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(X), \cup)$ mit $f(A) = X \setminus A$ Homo. von $\mathcal{P}(X)$

$$f(A \cap B) = X \setminus (A \cap B) = (A \cap B)^c$$

$$f(A) \cup f(B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = A^c \cup B^c$$

(de Morgan'sches Gesetz, Lemma 4.5)



Komposition/Inverse von Homo-/Isomorphismen

Satz 8.2

Es seien (H_1, \star) , (H_2, \square) und (H_3, \bullet) drei Halbgruppen.

- ① Sind $f: H_1 \rightarrow H_2$ und $g: H_2 \rightarrow H_3$ Halbgruppenhomomorphismen, dann ist auch $g \circ f: H_1 \rightarrow H_3$ ein Halbgruppenhomomorphismus.
- ② Ist $f: H_1 \rightarrow H_2$ ein Halbgruppenisomorphismus, dann ist auch $f^{-1}: H_2 \rightarrow H_1$ ein Halbgruppenisomorphismus.

Beweis. Übung

Folgerung 8.3

Isomorphie von Halbgruppen ist eine Äquivalenzrelation.

Isomorphe Halbgruppen sind als \cong nicht unterscheidbar!

Homomorphismen von Monoiden

Definition 8.4

Es seien (H_1, \star) und (H_2, \square) zwei Monoide.

Eine Abbildung $f: H_1 \rightarrow H_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus von Monoiden**, wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \square f(b) \quad \text{für alle } a, b \in H_1$$

$$f(e_1) = e_2 \quad \text{Es rückt } f(e_1) \text{ invertierbar}$$

denn: $\underline{f(e_1)} \square f(e_n) = f(e_n \star e_n) = f(e_n) = \underline{f(e_1)} \square e_2$

weiter: $f(e_1) = e_2$.

$$(H_1, \star) = (H_2, \square) \quad f \text{ bijektiv} \quad \text{Bezeichnung}$$

Homomorphismus

✓

Endomorphismus

✓

Isomorphismus

✓

✓

Automorphismus

Homomorphismen von Gruppen

Definition 8.6

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) zwei Gruppen.

Eine Abbildung $f: G_1 \rightarrow G_2$ heißt strukturverträglich oder ein Homomorphismus von ~~Morphismen~~ Gruppen, wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \square f(b) \quad \text{für alle } a, b \in G_1$$

$$f(e_1) = e_2 \quad \leftarrow \text{braucht nicht geprüft werden}$$

$(G_1, \star) = (G_2, \square)$	f bijektiv	Bezeichnung
Homomorphismus		
✓		Endomorphismus
	✓	Isomorphismus
✓	✓	Automorphismus

Inverse werden auf Inverse abgebildet

Lemma 8.8

Es seien (H_1, \star) und (H_2, \square) Monoide.

Weiter sei $f: H_1 \rightarrow H_2$ ein Monoidhomomorphismus.

Ist $a \in H_1$ invertierbar, dann ist auch $f(a) \in H_2$ invertierbar, und es gilt

$$f(a)' = f(a').$$

Beweis. *Inv.bildung in H_2* *Inv. in H_1*

$$\begin{aligned} & f(a') \square f(a) && f(a) \square f(a') \\ &= f(a' \star a) &&= f(a \star a') \\ &= f(e_1) &&= f(e_1) \\ &= e_2 &&= e_2 \end{aligned}$$

Homomorphismen von Halbgruppen, Monoiden und Gruppen

Beispiel 8.7

① $f: (\mathbb{N}, +) \rightarrow (\mathbb{N}, +)$ mit $f(n) = 2n$ Endo von Hg

② $f: (\mathbb{N}_0, +) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +)$ mit $f(n) = 2n$ Endo von Monoiden
 $f(0) = 0 + 0 = 0$

③ $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ mit $f(n) = 2n$ Endo von Gruppen

Homomorphismen von Halbgruppen, Monoiden und Gruppen

Beispiel 8.7

- ④ $f: (\mathcal{P}(X), \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(X), \cup)$ mit $f(A) = X \setminus A$ Homo. von Halbgruppen
- $$f(A \cap B) = f(A) \cup f(B)$$
- $$f(\emptyset) = X \setminus X = \emptyset \quad \text{→ neutrales El. in } (\mathcal{P}(X), \cup)$$
- ↑ neutr. El. in $(\mathcal{P}(X), \cap)$
- ⑤ $f: (\mathcal{P}(X), \cup) \rightarrow (\mathcal{P}(X), \cap)$ mit $f(A) = X \setminus A$ Homo. von Monoiden

Homomorphismen von Halbgruppen, Monoiden und Gruppen

Beispiel 8.7

- ⑥ Es seien X eine Menge und (Y, \star) eine Halbgruppe.

Dann ist die Abbildung

$$\Phi: (Y^X, \star) \ni f \mapsto f(x_0) \in (Y, \star),$$

die eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ an einer festen Stelle $x_0 \in X$ auswertet, ein Homomorphismus von Halbgruppen:

$$\Phi(f * g) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } Y^X, \star}}{(f * g)(x_0)} = f(x_0) * g(x_0)$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } Y, \star}}{\Phi(f) * \Phi(g)}$$

Falls Y Monoid oder Gruppe ist,
dann ist Φ sogar Homo.
von Monoiden bzw. Gruppen.

Beispiel 8.7

- 7 Es sei (H, \star) ein Monoid und $a \in H$ invertierbar. Dann ist die **Konjugation mit a**

$$H \ni h \mapsto a \star h \star a' \in H$$

ein Endomorphismus des Monoids (H, \star) .

Ist (G, \star) eine Gruppe, dann ist die Konjugation mit $a \in G$

$$G \ni g \mapsto a \star g \star a' \in G$$

sogar ein Gruppen**automorphismus**.

Homomorphismen von Halbgruppen, Monoiden und Gruppen

Beispiel 8.7

- ⑧ Es sei $a > 0$, $a \neq 1$.

Iso von Gruppen

$$\log_a: (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \forall x, y > 0$$

- ⑨ $\text{sgn}: (S_n, \circ) \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$

Homo von Gruppen

$$\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (\text{sgn } \sigma_1) \cdot (\text{sgn } \sigma_2)$$

↑
Satz 7.40

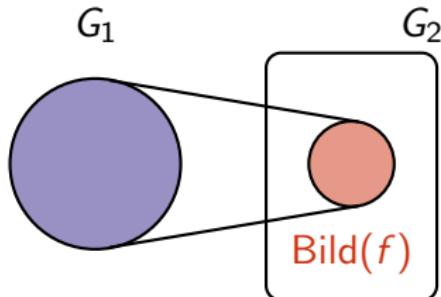
Bild eines Gruppenhomomorphismus

Definition 8.10

Es sei $f: (G_1, \star) \rightarrow (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Das **Bild** von f ist definiert als

$$\begin{aligned}\text{Bild}(f) &:= \{f(a_1) \in G_2 \mid a_1 \in G_1\} \\ &= f(G_1) \subseteq G_2\end{aligned}$$



Lemma 8.11

$\text{Bild}(f)$ ist eine Untergruppe von (G_2, \square) .

Beweis. mit UG-Krit.: $\text{Bild}(f) \neq \emptyset$, denn $e_2 = f(e_1) \in \text{Bild}(f)$.

Sind $a_2, b_2 \in \text{Bild}(f)$, dann ist $a_2 \square b_2^{-1} \in \text{Bild}(f)$ z.z.

Es gibt $a_1, b_1 \in G_1$ mit $a_2 = f(a_1)$ und $b_2 = f(b_1)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_2 \square b_2^{-1} &= f(a_1) \square f(b_1)^{-1} = f(a_1) \square f(b_1') = f(a_1 \star b_1') \\ &\in \text{Bild}(f)\end{aligned}$$

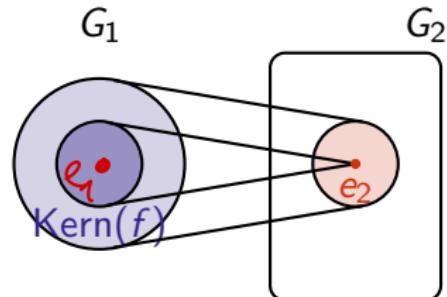
Kern eines Gruppenhomomorphismus

Definition 8.10

Es sei $f: (G_1, \star) \rightarrow (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Der **Kern** von f ist definiert als

$$\begin{aligned}\text{Kern}(f) &:= \{a_1 \in G_1 \mid f(a_1) = e_2\} \\ &= f^{-1}(\{e_2\})\end{aligned}$$



Lemma 8.11

$\text{Kern}(f)$ ist eine Untergruppe von (G_1, \star) .

Beweis. mit Leg-Krit.: $\text{Kern}(f) \neq \emptyset$, dann $e_1 \in \text{Kern}(f)$.
Sind $a_1, b_1 \in \text{Kern}(f)$, dann ist z.B. $a_1 \star b_1' \in \text{Kern}(f)$.

$$\begin{aligned}f(a_1 \star b_1') &= f(a_1) \square f(b_1') = f(a_1) \square f(b_1)' \\ &= e_2 \square e_2' = e_2\end{aligned}$$

Bild und Kern eines Gruppenhomomorphismus

Beispiel 8.12

① $f: (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot) \ni x \mapsto x^2 \in (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$

Endo. von Gruppen

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2 = f(x) \cdot f(y)$$

$$\text{Bild}(f) = \mathbb{R}_{>0} \quad \text{UG}$$

$$\text{Kern}(f) = \{\pm 1\} \quad \text{UG}$$

② $\text{sgn}: (S_n, \circ) \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$

Homom. von Gruppen

$$n \in \{0, 1\}: \text{Bild}(\text{sgn}) = \{1\}, \quad \text{Kern}(\text{sgn}) = S_n = A_n$$

$$n > 2: \text{Bild}(\text{sgn}) = \{\pm 1\}$$

$$\text{Kern}(\text{sgn}) = A_n \leftarrow \text{alternierende UG}$$

Injektivität eines Gruppenhomomorphismus

Lemma 8.13

Es seien (G_1, \star) , (G_2, \square) Gruppen mit neutralen Elementen e_1 bzw. e_2 .

Für einen Homomorphismus $f: G_1 \rightarrow G_2$ sind äquivalent:

- ① f ist injektiv.
- ② $\text{Kern}(f) = \{e_1\}$.
- ③ Die einzige Lösung der Gleichung $f(a) = e_2$ ist $a = e_1$.

Beweis. ① \rightarrow ② $f(e_1) = e_2$, d.h. $e_1 \in \text{Kern}(f)$.

f ist injektiv, d.h. kein weiteres El. von G_1 hat e_2 als Bild.

② \rightarrow ① Für $a, b \in G_1$ gelte $f(a) = f(b)$. Z.z. $a = b$.

$f(a \star b') = f(a) \square f(b') = f(a) \square \underline{f(b')}^{\text{=f(a)}} = f(a) \square f(a) = e_2$. Nach vor: ist $a \star b' \in \text{Kern}(f) = \{e_1\}$,

d.h. $a \star b' = e_1$, also $a = b$.

Eindeutigkeitssatz für Gruppenhomomorphismen

Satz 8.14

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen. Weiter seien $f, g: G_1 \rightarrow G_2$ Homomorphismen, und für ein Erzeugendensystem $E \subseteq G_1$ gelte $f(e) = g(e)$ für alle $e \in E$. Dann ist $f = g$.

§ 8.1 Normalteiler und Faktorgruppen

Normalteiler

Jede Untergruppe U einer Gruppe (G, \star) induziert zwei i. A. verschiedene Äquivalenzrelationen

\sim^U mit Äquivalenzklassen $a \star U$ (Linksnebenklassen)

$U\sim$ mit Äquivalenzklassen $U \star a$ (Rechtsnebenklassen)

Wann stimmen diese beiden Äquivalenzrelationen überein?

Definition 8.15

Es sei (G, \star) eine Gruppe. Eine Untergruppe N heißt eine **normale Untergruppe** oder ein **Normalteiler** von (G, \star) , wenn gilt:

$$a \star N = N \star a, \text{ für alle } a \in G.$$

Gleichheit zweier Mengen!

Das ist äquivalent zu

$$a \star N \star a^{-1} \subseteq N \quad \forall a \in G$$

N ist invariant unter Konj.

Manchmal notiert man die Eigenschaft, dass (N, \star) ein Normalteiler der Gruppe (G, \star) ist, als $(N, \star) \trianglelefteq (G, \star)$.

Normalteiler

Beispiel 8.17

- ① In jeder Gruppe (G, \star) sind die trivialen Untergruppen $\{e\}$ und G Normalteiler.

$$a * \{e\} = \{e\} * a \quad \forall a \in G$$

$$a * G = G * a \quad \forall a \in G$$

- ② In einer abelschen Gruppe (G, \star) ist **jede** Untergruppe U ein Normalteiler.

$$a * U = U * a \quad \forall a \in G \quad \forall u \in U$$

$$\Rightarrow a * U = U * a \quad \forall a \in G$$

Normalteiler

Beispiel 8.17

③ Das Zentrum

*alle El., die mit allen El. der Gruppe
kommutieren*

$$Z := \{z \in G \mid a * z = z * a \text{ für alle } a \in G\}$$

einer Gruppe $(G, *)$ ist ein Normalteiler.

Normalteiler

Beispiel 8.17

- ④ Der **Kommutator** der Elemente a, b einer Gruppe (G, \star) ist definiert als

$$[a, b] = e \Leftrightarrow a \star b = b \star a$$

$$[b, a] = [a, b]'$$

$$[a, b] := a \star b \star a' \star b' = (a \star b) \star (b \star a)'$$

Die **Kommutator(unter)gruppe** der Gruppe (G, \star) ist die von den Kommutatoren von G erzeugte Untergruppe, also

$$\langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle \quad \begin{matrix} \text{endliche Verknüpfungen} \\ \text{von } [a_j, b_j] \end{matrix}$$

Die Kommutatorgruppe ist ein Normalteiler von (G, \star) .

„Normalteiler sein“ ist **keine** Ordnungsrelation

Die Relation „ist Normalteiler von“ ist reflexiv und antisymmetrisch, aber i. A. **nicht transitiv**.

Im Gegensatz zur Untergruppenrelation ist die Normalteilerrelation also i. A. **keine Ordnungsrelation**.

Beispiel

$$H_4 \trianglelefteq K_4 \trianglelefteq A_4, \quad \text{aber } H_4 \not\trianglelefteq A_4$$

K_4 ist die zur Kleinschen Vierergruppe isomorphe Untergruppe

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=H_4} \right\}$$

der alternierenden Gruppe A_4 vom Grad 4 (Beispiel 7.45).

Kerne von Gruppenhomomorphismen sind Normalteiler

Lemma 8.18

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen und $f: G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

- ① Die Elemente von G_1 , die denselben Funktionswert wie $a \in G_1$ haben, sind genau die Elemente der Nebenklasse von $\text{Kern}(f)$ zu a :

$$f^{-1}(\{f(a)\}) = a \star \text{Kern}(f) = \text{Kern}(f) \star a.$$

- ② $\text{Kern}(f)$ ist ein Normalteiler von G_1 .

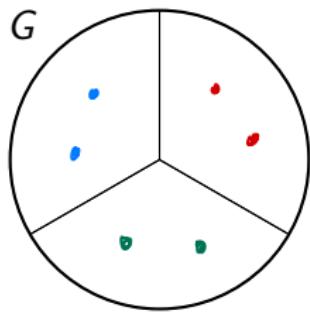
Beweis.

$$\begin{aligned} \text{① } b \in f^{-1}(\{f(a)\}) &\Leftrightarrow f(b) = f(a) \\ \Leftrightarrow f(b) \square f(a)^{-1} = e_2 &\Leftrightarrow f(b) \square f(a') = e_2 \\ \Leftrightarrow f(b \star a') = e_2 &\Leftrightarrow b \star a' \in \text{Kern}(f) \\ \Leftrightarrow b \in \text{Kern}(f) \star a \end{aligned}$$

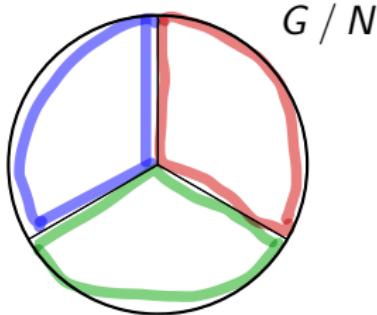
Analog: $b \in a \star \text{Kern}(f)$

Faktormenge bzgl. durch Normalteiler induzierten Relation

$$\text{Faktormenge } G / N := G / \sim = \{ [a] = a * N \mid a \in G \}$$



π kan. surj.
Vergroßerung
 $\pi(a) = [a]$
 $= a * N$



Die Nebenklassen von N partitionieren G .

Können wir in der Faktormenge G / N auch „rechnen“?

Vielleicht so: $[a] \tilde{*} [b] := [a * b]$?

Faktorgruppe bzgl. durch Normalteiler induzierten Relation

Satz 8.21

Es sei (G, \star) eine Gruppe und (N, \star) ein Normalteiler. Dann gilt:

- ① Die Faktormenge $G / N = \{[a] = a \star N \mid a \in G\}$ mit

$$[a] \tilde{\star} [b] := [a \star b] \quad \text{Strukturvorschrift - (idem)}$$

ist eine Gruppe, genannt die **Faktorgruppe von G nach N** .

Neutrales Element ist $[e] = N$. Für die Inversen gilt $[a]' = [a']$.
 $= e \star N$

- ② Die **kanonische Surjektion** von G auf G / N

$$\pi: G \ni a \mapsto [a] \in G / N$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Es gilt $\text{Kern}(\pi) = N$.

- ③ Wenn (G, \star) abelsch ist, dann auch $(G / N, \tilde{\star})$.

Satz 8.21

Es sei (G, \star) eine Gruppe. Dann gilt:

- ④ Ist U irgendeine Untergruppe und ist die Verknüpfung $\tilde{\star}$ auf der Menge der Linksnebenklassen G / U (oder auf der Menge der Rechtsnebenklassen $U \setminus G$) wohldefiniert, dann ist U notwendigerweise ein Normalteiler von G .

Faktorgruppe

Beispiel 8.23

- ① Ausfaktorisieren des trivialen Normalteilers $\{e\}$ einer Gruppe (G, \star) :

$$G / \{e\} \cong G$$

$$[a] = \{ab\}$$

- ② Ausfaktorisieren des trivialen Normalteilers G einer Gruppe (G, \star) :

$$G / G \cong \{e\}$$

$$[a] = a * G = G$$

Faktorgruppe

Beispiel 8.23

- ③ In der abelschen Gruppe $(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \cdot)$ ist die Untergruppe $(\{\pm 1\}, \cdot)$ ein Normalteiler.

Die Elemente der Faktorgruppe sind die Nebenklassen

$$[a] = a \cdot \{\pm 1\} = \{a, -a\} \quad \text{für } a \in \mathbb{Q}_{\neq 0}.$$

Ein mögliches Repräsentantensystem sind die positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_{>0}$.

Beim Übergang von $\mathbb{Q}_{\neq 0}$ zu $\mathbb{Q}_{\neq 0} / \{\pm 1\}$ wird also „das Vorzeichen ausfaktorisiert“.

$$[2] \approx [\frac{2}{3}] = [\frac{6}{5}]$$

$$[2] \approx [-\frac{2}{3}] = [-\frac{6}{5}] = [\frac{6}{5}]$$

Faktorgruppe

Beispiel 8.23

$\supseteq N$

- ④ In $(\mathbb{Z}, +)$ ist $m\mathbb{Z}$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ ein Normalteiler.

Die Elemente der Faktorgruppe $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ sind $[a] = a + m\mathbb{Z}$. $= a + N$

In der Faktorgruppe rechnen wir $[a] \tilde{+} [b] = [a + b]$.

$$\text{in } (\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z}, \tilde{+}): \quad [-21] \tilde{+} [9] = [-12]$$

$$\begin{array}{c} \text{naturlicher} \\ \text{Repräsentant} \\ \text{mit Iso!} \end{array} \quad \begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 4 & +_5 & 4 & = 3 \end{matrix}$$

$$\text{in } (\mathbb{Z}_5, +_5):$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{matrix}$$

Beispiel 8.23

5 Es sei (G, \star) eine Gruppe und K die Kommutatoruntergruppe.

Dann ist die Faktorgruppe $(G / K, \tilde{\star})$ kommutativ.

Tatsächlich ist $(G / N, \tilde{\star})$ genau dann kommutativ, wenn der ausfaktorierte Normalteiler N die Kommutatoruntergruppe K von G enthält ($K \leq N$).

§ 8.2 Der Homomorphiesatz für Gruppen

Homomorphiesatz für Gruppen

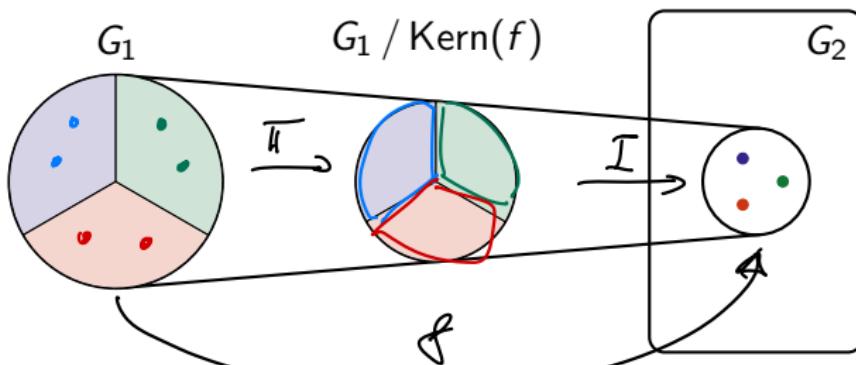
Satz 8.25

Es sei $f: (G_1, \star) \rightarrow (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann ist

$$\begin{aligned} I: G_1 / \text{Kern}(f) &\longrightarrow \text{Bild}(f) \\ [a] &\longmapsto f(a) \quad f(a) = I(\pi(a)) \\ &= I([a]) \end{aligned}$$

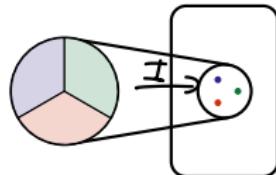
ein Gruppen**isomorphismus**.



f arbeitet nebenklassenweise

Homomorphiesatz für Gruppen

$$\begin{aligned} I: G_1 / \text{Kern}(f) &\longrightarrow \text{Bild}(f) \\ [a] &\longmapsto f(a) \quad \text{Isomorphismus} \end{aligned}$$



Beweis.

- I ist wohldefiniert: Es sei $a + \text{Kern}(f) = b + \text{Kern}(f)$.

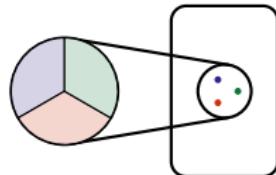
$$\begin{aligned} f(a + \text{Kern}(f)) &= f(a) \sqcup f(\text{Kern}(f)) \\ &= f(a) \sqcup \{e_2\} = \{f(a)\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Nach Vors., } f(a) = f(b) \\ \text{Analog: } f(b + \text{Kern}(f)) &= \{f(b)\} \end{aligned}$$

- I ist Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} I([a] \tilde{*} [b]) &= I([a+b]) = f(a+b) \\ &\stackrel{\text{P nach Def. von }\tilde{*}}{=} f(a) \sqcup f(b) = I([a]) \sqcup I([b]) \end{aligned}$$

Homomorphiesatz für Gruppen

$$\begin{aligned} I: G_1 / \text{Kern}(f) &\longrightarrow \text{Bild}(f) \\ [a] &\longmapsto f(a) \quad \text{Isomorphismus} \end{aligned}$$



Beweis.

- I ist surjektiv: $a_2 \in \text{Bild}(f)$, d.h. $a_2 = f(a_1)$
 $= I(\underbrace{[a_1]}_{\in G_1 / \text{Kern}(f)})$
- I ist injektiv: zu zeigen nach Lemma P.13:
 $\text{Kern}(I) = \{\text{neutr. El. von } G_1 / \text{Kern}(f)\} = \{\text{Kern } f\}$.
Es sei $I([a]) = e_2$, also $f(a) = e_2 = f(e_1)$,
also $[a] = a * \text{Kern}(f) = e_1 * \text{Kern}(f) = \text{Kern}(f)$.

Homomorphiesatz für Gruppen

Beispiel 8.27

① $f: (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot) \ni x \mapsto x^2 \in (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$

ist ein Endomorphismus der Gruppe $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$.

$$\text{Ker}(f) = \{\pm 1\}$$

$$I: \mathbb{R}_{\neq 0} / \{\pm 1\} \longrightarrow \text{Bild}(f) = \mathbb{R}_{>0}$$
$$[x] = \{ \pm x \} \mapsto x^2$$

„ f röhrt das Vorzeichen von x nicht“

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}_{\neq 0}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad 0 \quad [1] \quad [2] \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\neq 0} / \{\pm 1\}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad 0 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \xrightarrow{I} \mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R}_{\neq 0}$$

Homomorphiesatz für Gruppen

Beispiel 8.27

- ② $\text{sgn}: (S_n, \circ) \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$ für $n \geq 2$
ist ein (surjektiver) Gruppenhomomorphismus.

$$\text{Ker}(\text{sgn}) = A_n$$

$$\begin{aligned} I: S_n / \text{Ker}(\text{sgn}) &\longrightarrow \text{Bild}(\text{sgn}) = \{\pm 1\} \\ [\sigma] &= \sigma \circ A_n \mapsto \text{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

