

ÜBUNG 06

Ausgabedatum: 27. Mai 2022
Abgabedatum: 7. Juni 2022

Hausaufgabe 1. (Eigenschaften von Frobeniusmatrizen) 5 Punkte

Es sei $G^{(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine k -Frobeniusmatrix, $k = 1, \dots, n$. Weiter sei $G'^{(k)} := G^{(k)} - \text{Id}$. Zeigen Sie Lemma 8.1 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen:

(i) $(G^{(k)})^{-1} = \text{Id} - G'^{(k)}$.

(ii) $G^{(1)}G^{(2)} \cdots G^{(n)} = \text{Id} + \sum_{j=1}^n G'^{(j)}$, ist also eine untere Dreiecksmatrix.

(iii) $(G^{(1)})^{-1}(G^{(2)})^{-1} \cdots (G^{(n)})^{-1} = \text{Id} - \sum_{j=1}^n G'^{(j)}$, ist also eine untere Dreiecksmatrix.

Hausaufgabe 2. (Eindeutigkeit der LR -Zerlegung ohne Pivotisierung) 3 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie Lemma 8.2, also dass, wenn A die beiden LR -Zerlegungen $A = L_1 R_1 = L_2 R_2$ besitzt, die Gleichheiten $L_1 = L_2$ und $R_1 = R_2$ gelten.

Hausaufgabe 3. (Lösen transponierter Gleichungssysteme) 5 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix mit einer gegebenen LR -Zerlegung der Form $PA = LR$.

- (i) Erklären Sie, weshalb Sie aus der LR -Zerlegung von A i. A. nicht direkt eine LR -Zerlegung von A^\top ablesen können.

- (ii) Geben Sie an, wie Sie aus der *LR*-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche von A eine *LR*-Zerlegung mit Zeilenpivotsuche für A^T mit asymptotisch geringerem Aufwand als eine Neuberechnung der Zerlegung berechnen können.
- (iii) Erklären Sie, wie Sie die gegebene *LR*-Zerlegung von A mit Spaltenpivotsuche ohne die Modifikationen aus [Aufgabe \(ii\)](#) direkt zum effizienten Lösen linearer Gleichungssysteme der Form

$$A^T x = b$$

verwenden können.

Hausaufgabe 4. (Implementierung der *LR*-Zerlegung ohne Pivotsuche) 6 Punkte

Implementieren Sie einen Löser für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ in Python, der mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens ohne Pivotsuche in-place eine *LR*-Zerlegung von A berechnet und die Lösung des Gleichungssystems durch vorwärts-rückwärts Lösen bestimmt.

Testen Sie Ihre Implementierung auf Korrektheit. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab.

Beachte: Aufgaben auf dem nachfolgenden Übungsblatt basieren auf dieser Aufgabe. Insbesondere sollen verschiedene Pivotsuchen implementiert werden. Stellen Sie also möglichst sicher, dass Ihr Code ein einfaches Austauschen der Pivotsuche im Verfahren erlaubt.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.