

# Plenum 05

## Grundlagen der Optimierung

### Wintersemester 2021

19.11.2021 und 22.11.2021

Das Simplex-Verfahren

# Was sind die Highlights der Woche?

- das Simplex-Verfahren

# Welche Fragen gibt es?

- Finden einer weiteren optimalen Ecke
- Wieviele Schritte braucht man im Phase-I-Problem mindestens, um zu einer Basis in  $\{1, \dots, n\}$  zu gelangen?
- Implementierung eines Simplex-Schrittes in Python („lange“ vs. „kurze“ Vektoren)
- Warum verwendet das Simplex-Verfahren nur benachbarte Ecken?
- Erkennen eines unbeschränkten LPs (Lemma 7.2)
- schlechteste Laufzeit des Simplex? exponentiell oder faktoriell in  $n$ ?

# Bemerkungen zum Simplex-Verfahren

Polyeder in Normalform mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

- ① Warum ist  $\text{rank}(A) = m$  zur Durchführung des Simplex-Verfahrens wichtig?
- ② Was bedeutet diese Bedingung?
- ③ Wie/wo/wann wird die Unzulässigkeit eines LP festgestellt?

# Kurze und lange Vektoren

Wie implementieren wir folgende Operationen in Python?

①  $x_B := A_B^{-1} b$

②  $\tilde{c}_N := c_N - A_N^T A_B^{-\top} c_B$

`x[B] = np.linalg.solve(A[:,B], b)`

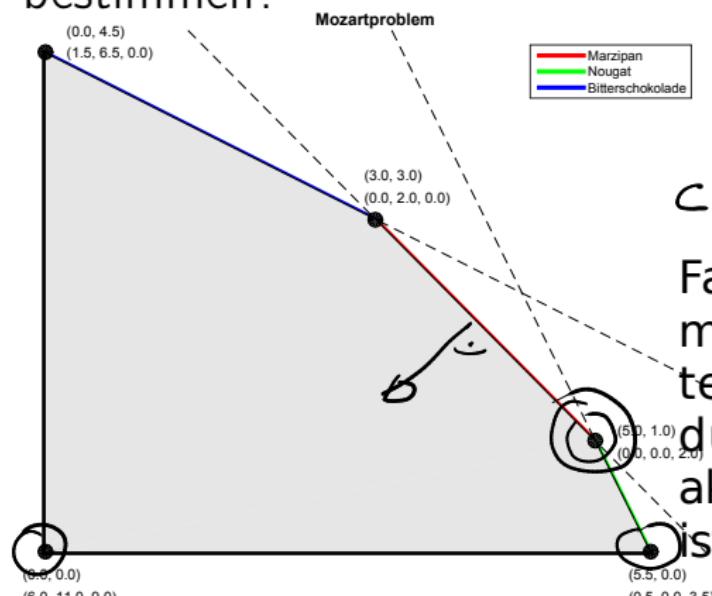
`reducedCost[N] = \`  
`c[N] - A[:,N].T @ np.linalg.solve(A[:,B].T, c[B])`

# Simplex-Schritt

Wir wollen den Simplex-Schritt aus Beispiel 7.5 in Python nachvollziehen.

# Finden weiterer optimaler Basisvektoren

Das Simplex-Verfahren stoppt mit dem Finden der ersten optimalen Ecke. Angenommen, es gibt weitere optimale Ecken. Wie könnte man eine solche bestimmen?



$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$c = \begin{pmatrix} -\delta \\ -\delta \end{pmatrix}$$

Falls  $\tilde{c}_r = 0$  gilt, so kann man einfach einen weiteren Simplex-Schritt durchführen, obwohl der aktuelle BV bereits optimal ist.

# Reduzierte Kosten und optimale Ecken

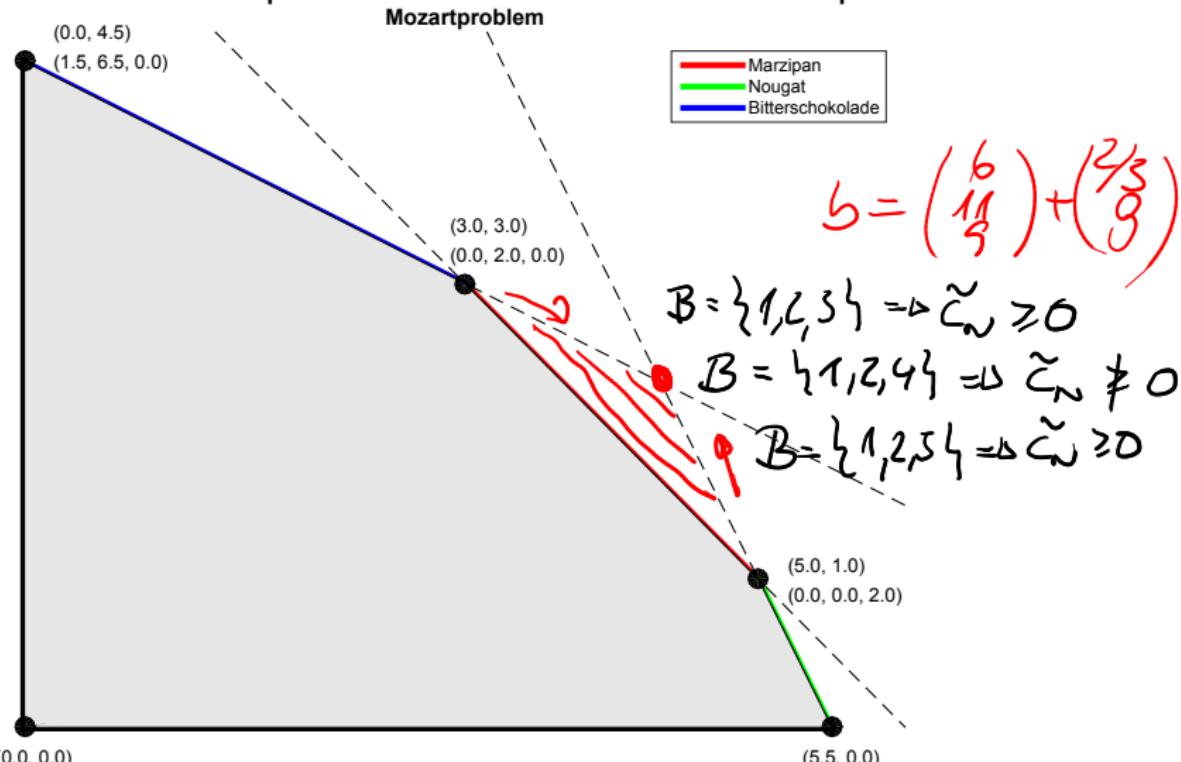
Lemma 7.1 besagt: Ist  $x$  eine zulässiger Basisvektor und sind die reduzierten Kosten  $\tilde{c}_N \geq 0$ , dann ist diese Ecke optimal.

Gilt auch die Umkehrung?

Es gilt: Ist  $x$  ein optimaler BV, dann gibt es eine Basis, sodass die reduzierten Kosten  $\geq 0$  sind. Falls  $x$  degeneriert ist, so gilt diese Aussage aber ggf. nicht für jede mögliche Basis.

# Reduzierte Kosten und optimale Ecken

Hier als Beispiel das modizierte Mozartproblem:



# Welche Fragen gibt es?