

Plenum 05

Grundlagen der Optimierung

Wintersemester 2022

21.11.2022 und 22.11.2022

Das Simplex-Verfahren

Was sind die Highlights der Woche?

- Besonderheiten degenerierter Ecken
- Neue Iterierte ist Basisvektor
- Regel von Bland/Endlichkeit
- Phase I (Simplex kann seine größte Schwäche selbst beheben)
- Klee-Minty-Problematik
- Simplex detektiert Unbeschränktheit

Welche Fragen gibt es?

- Bedeutung des Kostenvektors
- Funktion und Interpretation des Phase-I-Problems
- Sind lokale Minimierer immer globale Minimierer?
- Quizfrage 7.3 (Implementiert man lange oder kurze Vektoren?)
- Ansatz von Innere-Punkte-Verfahren
- Quizfrage 7.6 (Ist das Simplex V. ein Abstiegsverfahren?)
- Beweis Satz 6.17 (i) - wie Vektor mit minimaler Anzahl von positiven Komponenten wählen?

Bemerkungen zum Simplex-Verfahren

Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

- ① Warum ist $\text{rank}(A) = m$ zur Durchführung des Simplex-Verfahrens wichtig?
- ② Was bedeutet diese Bedingung?
- ③ Wie/wo/wann wird die Unzulässigkeit eines LP festgestellt?

Bemerkungen zum Simplex-Verfahren

Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

An welchen Stellen eines Simplex-Schritts wird sichergestellt, dass die nächste Iterierte

- ① die Gleichungsnebenbedingung erfüllt?
- ② die Ungleichungsnebenbedingung erfüllt?
- ③ keinen größeren Funktionswert als die aktuelle hat?
- ④ eine Ecke ist?

Die reduzierten Kosten

Wir können die reduzierten Kosten als Kostenvektor einer reduzierten Aufgabe verstehen, bei der die Basis-Variablen mit Hilfe von

$$x_B(x_N) := A_B^{-1}(b - A_N x_N)$$

eliminiert worden sind.

- Wie sieht diese reduzierte Aufgabe genau aus?
- Welcher Ableitung entspricht der Term \tilde{c}_r ?

Kurze und lange Vektoren

Wie implementieren wir folgende Operationen in Python?

$$① \quad x_B := A_B^{-1} b$$

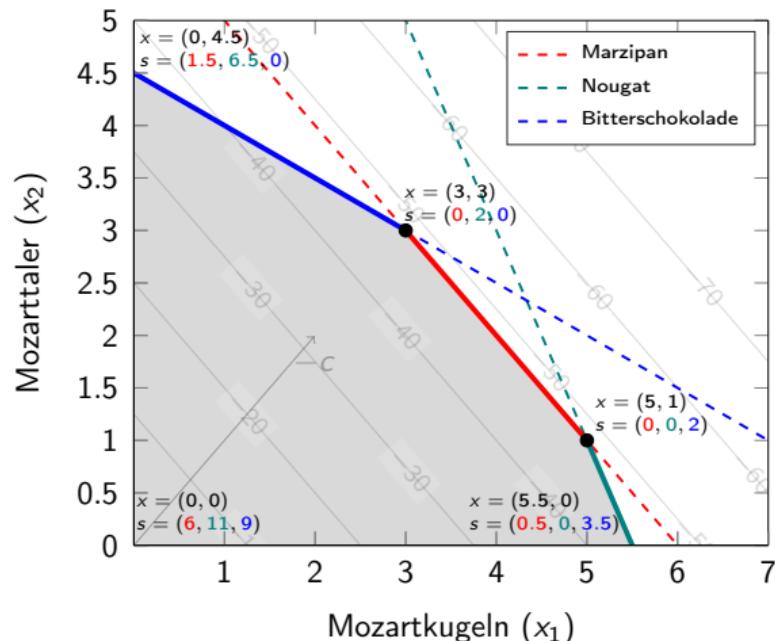
$$② \quad \tilde{c}_N := c_N - A_N^T A_B^{-\top} c_B$$

Simplex-Schritt

Wir wollen den Simplex-Schritt aus Beispiel 7.5 in Python nachvollziehen.

Finden weiterer optimaler Basisvektoren

Das Simplex-Verfahren stoppt mit dem Finden der ersten optimalen Ecke. Angenommen, es gibt weitere optimale Ecken. Wie könnte man eine solche bestimmen?



Reduzierte Kosten und optimale Ecken

Lemma 7.1 besagt: Ist x eine zulässiger Basisvektor und sind die reduzierten Kosten $\tilde{c}_N \geq 0$, dann ist diese Ecke optimal.

Gilt auch die Umkehrung?

Reduzierte Kosten und optimale Ecken

Hier als Beispiel das modifizierte Mozartproblem:

