

# Lineare Algebra I

## Woche 08

02.12.2025 und 04.12.2025

# § 11 Vektorräume

## Definition 11.1

Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper.

Ein **Vektorraum**  $(V, \oplus, \odot)$  über  $K$  ist eine Menge  $V$  mit

- einer inneren Verknüpfung  $\oplus: V \times V \rightarrow V$
- einer **äußeren** Verknüpfung  $\odot: K \times V \rightarrow V$

①  $(V, \oplus)$  ist eine abelsche Gruppe

② Es gilt das **Assoziativgesetz**

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$$

# Vektorraum

## Definition 11.1

Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper.

Ein **Vektorraum**  $(V, \oplus, \odot)$  über  $K$  ist eine Menge  $V$  mit

- einer inneren Verknüpfung  $\oplus: V \times V \rightarrow V$
- einer **äußeren** Verknüpfung  $\odot: K \times V \rightarrow V$

- ③ Es gelten die **Distributivgesetze**

$$\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$$

$$(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$$

- ④ Das neutrale Element  $1_K$  bzgl.  $\cdot$  in  $K$  ist auch neutral bzgl.  $\odot$ :

$$1_K \odot v = v$$

## Beispiel 11.3

- ① Jeder Körper  $(K, +, \cdot)$ , ausgestattet mit den Verknüpfungen  $\oplus := +$  und  $\odot := \cdot$ , ist ein Vektorraum über sich selbst.
- ② Allgemeiner ist jeder Körper  $(K, +, \cdot)$  ein Vektorraum über jedem seinem Unterkörper  $(U, +, \cdot)$ .  
 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Vektorraum über  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ .  
 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist ein Vektorraum über  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ .

## Beispiel 11.3

- ③ Über jedem Körper  $(K, +, \cdot)$  gibt es „den“ (bis auf Isomorphie eindeutigen) Vektorraum  $(V, \oplus, \odot)$  mit nur einem einzigen Element,  $V = \{0_V\}$ .

Die Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$  sind dann eindeutig festgelegt:

Dieser Raum heißt „der“ **Nullraum** über  $K$ .

# Vektorraum

## Beispiel 11.3

- ④ Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Menge

$$K_n := \{(x_1 \quad \cdots \quad x_n) \mid x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

mit der **komponentenweisen Addition**

$$(x_1 \quad \cdots \quad x_n) \oplus (y_1 \quad \cdots \quad y_n) :=$$

und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation**

$$\alpha \odot (x_1 \quad \cdots \quad x_n) :=$$

heißt der **Vektorraum der Zeilenvektoren über  $K$**  der Dimension  $n$ .

# Vektorraum

## Beispiel 11.3

- ⑤ Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Menge

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

mit der **komponentenweisen Addition** und der  
**komponentenweisen skalaren Multiplikation**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \quad \text{und} \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=$$

heißt der **Vektorraum der Spaltenvektoren** über  $K$  der Dimension  $n$ .

# Vektorraum

## Beispiel 11.3

- ⑥ Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und  $X$  eine Menge.

Die Menge  $K^X = \{f \mid f: X \rightarrow K\}$  mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) :=$$

$$(\alpha \odot f)(x) :=$$

ist ein Vektorraum über  $K$ .

Insbesondere ist die Menge der Folgen  $K^{\mathbb{N}}$  mit Werten in  $K$  ein  $K$ -Vektorraum, genannt der **Folgenraum über  $K$** .

## Beispiel 11.3

7 Allgemeiner sei  $(V, \oplus, \odot)$  ein  $K$ -Vektorraum und  $X$  eine Menge.

Die Menge  $V^X = \{f \mid f: X \rightarrow V\}$  mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) := f(x) \oplus g(x)$$

$$(\alpha \odot f)(x) := \alpha \odot f(x)$$

ist ein Vektorraum über  $K$ .

Insbesondere ist die Menge der Folgen  $V^{\mathbb{N}}$  mit Werten in  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, genannt der **Folgenraum über  $V$** .

# kartesisches Produkt von Vektorräumen

## Definition 11.4

- ❶ Sind  $(V_1, \oplus_1, \odot_1)$  und  $(V_2, \oplus_2, \odot_2)$  zwei  $K$ -Vektorräume, dann ist das **kartesische Produkt**

$$V_1 \times V_2 := \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

ebenfalls ein  $K$ -Vektorraum mit den punktweisen Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) &:= (v_1 \oplus_1 w_1, v_2 \oplus_2 w_2) \\ \alpha \odot (v_1, v_2) &:= (\alpha \odot_1 v_1, \alpha \odot_2 v_2)\end{aligned}$$

- ❷ Allgemeiner:  $V_1 \times \cdots \times V_n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$

# kartesisches Produkt von Vektorräumen

## Definition 11.4

- ③ Noch allgemeiner: Das **kartesische Produkt** der  $K$ -Vektorräume  $(V_i, \oplus_i, \odot_i)$  für  $i \in I$

$$W := \bigtimes_{i \in I} V_i := \left\{ F: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \mid F(i) \in V_i \text{ für alle } i \in I \right\}$$

mit der punktweisen Addition  $\oplus$  und S-Multiplikation  $\odot$

$$\oplus: W \times W \rightarrow W \quad \text{mit } (F \oplus G)(i) := F(i) \oplus_i G(i)$$

$$\odot: K \times W \rightarrow W \quad \text{mit } (\alpha \cdot F)(i) := \alpha \odot_i F(i)$$

ist ein  $K$ -Vektorraum.

## Lemma 11.5

①  $0_K \odot v = 0_V$

②  $\alpha \odot 0_V = 0_V$

Beweis.

# Rechenregeln in Vektorräumen

## Lemma 11.5

③  $\alpha \odot (\ominus v) = \ominus(\alpha \odot v) = (-\alpha) \odot v$

Insbesondere:  $\ominus v = (-1_K) \odot v$

Beweis.

# Rechenregeln in Vektorräumen

## Lemma 11.5

- ④  $(-\alpha) \odot (\ominus v) = \alpha \odot v$
  
- ⑤  $\alpha \odot v = 0_V \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0_K \text{ oder } v = 0_V.$

Beweis.

# Mengen und Familien in Vektorräumen

Die Definitionen und Resultate bis zum Ende von § 14 sind im Skript jeweils in zwei Versionen angegeben: für **Mengen** und für **Familien**. Die Aussagen sind konzeptionell gleich, unterscheiden sich jedoch im Detail (vgl. Bemerkung 6.40 zu den Unterschieden von Mengen und Familien).

Wir arbeiten **bevorzugt** mit **Familien**, weil wir später (vor allem bei der Darstellung linearer Abbildungen in Form von Matrizen, ab § 19) **geordnete Familien** von Vektoren benötigen.

Menge  $E \subseteq V$

z. B.  $E = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Familie  $F = (v_i)_{i \in I}$  in  $V$

z. B.  $F = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

# Linearkombination

## Definition 11.7

Es sei  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie im  $K$ -Vektorraum  $(V, \oplus, \odot)$ .

Ist  $F_0 = (v_i)_{i \in I_0}$  eine **endliche Teilstammfamilie** und sind  $\alpha_i \in K$ , dann heißt

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i \odot v_i$$

eine **Linearkombination (von Vektoren) der Familie  $F$** .

Eine Linearkombination heißt **trivial**, wenn alle  $\alpha_i = 0_K$  sind.

# Linearkombination: alternative Notation

Es sei  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren und  $I_0 \subseteq I$  endlich.

bevorzugte Notation

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i \odot v_i$$

alternative Notation

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \odot v_{i_j}$$

# Linearkombination

## Beispiel 11.9

- ①  $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$  ist eine Linearkombination der Familie  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{Q}^2$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ②  $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$  ist eine Linearkombination der Familie  $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{Q}^2$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \odot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 11.9

### ③ Die Funktion

ist eine Linearkombination der Familie  $(\sin, \cos)$  im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ .

# Unterraum

## Definition 11.10

Es sei  $(V, \oplus, \odot)$  ein Vektorraum über dem Körper  $(K, +, \cdot)$ .

- ① Eine bzgl.  $\oplus$  und  $\odot$  abgeschlossene Teilmenge  $U \subseteq V$  heißt ein **Unter(vektor)raum** von  $(V, \oplus, \odot)$ , wenn  $(U, \oplus, \odot)$  selbst wieder ein  $K$ -Vektorraum ist.
- ② Ein Unterraum  $(U, \oplus, \odot)$  von  $(V, \oplus, \odot)$  heißt **echt**, wenn  $U \subsetneq V$  gilt.

# Unterraumkriterium

## Satz 11.11

Es sei  $(V, \oplus, \odot)$  ein Vektorraum über dem Körper  $(K, +, \cdot)$  und  $U \subseteq V$ .

Dann sind äquivalent:

- ①  $(U, \oplus, \odot)$  ist ein Unterraum von  $(V, \oplus, \odot)$ .
- ②  $U \neq \emptyset$ , und es gilt  $U \oplus U \subseteq U$  sowie  $K \odot U \subseteq U$ .
- ③  $U \neq \emptyset$ , und es gilt  $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$ .

Beweis.

# Unterraumkriterium

## Satz 11.11

Es sei  $(V, \oplus, \odot)$  ein Vektorraum über dem Körper  $(K, +, \cdot)$  und  $U \subseteq V$ .

Dann sind äquivalent:

- ①  $(U, \oplus, \odot)$  ist ein Unterraum von  $(V, \oplus, \odot)$ .
- ②  $U \neq \emptyset$ , und es gilt  $U \oplus U \subseteq U$  sowie  $K \odot U \subseteq U$ .
- ③  $U \neq \emptyset$ , und es gilt  $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$ .

Beweis.

# Unterraumkriterium

## Satz 11.11

Es sei  $(V, \oplus, \odot)$  ein Vektorraum über dem Körper  $(K, +, \cdot)$  und  $U \subseteq V$ .

Dann sind äquivalent:

- ①  $(U, \oplus, \odot)$  ist ein Unterraum von  $(V, \oplus, \odot)$ .
- ②  $U \neq \emptyset$ , und es gilt  $U \oplus U \subseteq U$  sowie  $K \odot U \subseteq U$ .
- ③  $U \neq \emptyset$ , und es gilt  $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$ .

Beweis.

# Unterraum

## Beispiel 11.12

- ① Es sei  $(V, \oplus, \odot)$  ein Vektorraum über dem Körper  $(K, +, \cdot)$ .  
Dann sind  $(\{0_V\}, \oplus, \odot)$  und  $(V, \oplus, \odot)$  die **trivialen Unterräume** von  $(V, \oplus, \odot)$ .

②

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$$

ist Unterraum des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\mathbb{Q}^2$

# Unterraum

## Beispiel 11.12

3

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 = 1 \right\}$$

ist Unterraum des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\mathbb{Q}^2$

4

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

ist Unterraum des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\mathbb{Q}^2$

## Beispiel 11.12

5

$$U := \{a + b i \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{R}, a - 2b = 0\}$$

ist Unterraum des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$

ist Unterraum des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$

## Beispiel 11.12

- ⑥ Es sei  $K$  ein Körper und  $K^{\mathbb{N}}$  der Folgenraum über  $K$ .

Der **Träger** einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist

$$\text{supp}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0_K\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Die **Folgen mit endlichem Träger**

$$(K^{\mathbb{N}})_{00} := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{supp}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist endlich}\}$$

bilden einen echten Unterraum von  $(K^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ .

# Vereinfachung der Notation

## Bemerkung 11.13

- ① Wir schreiben  $+$  an Stelle von  $\oplus$ .
- ② Wir schreiben  $\cdot$  an Stelle von  $\odot$  oder lassen es sogar weg.
- ③ Wir schreiben  $0$  an Stelle von  $0_K$  und auch an Stelle von  $0_V$ .
- ④ Wir schreiben  $1$  an Stelle von  $1_K$ .
- ⑤ Wir nennen den zugrundeliegenden Körper eines Vektorraumes nur bei Bedarf.

# erzeugter Unterraum

## Definition 11.15

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum und  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren in  $V$ .

- ①  $\langle F \rangle := \bigcap \{ U \mid U \text{ ist Unterraum von } V \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U\}$  heißt
  - der von  $F$  **erzeugte Unterraum**
  - oder die **lineare Hülle**  $\text{Lin}(F)$  von  $F$
  - oder der **Spann**  $\text{Span}(F)$  von  $F$
- ② Gilt  $\langle F \rangle = V$ , dann heißt  $F$  eine **erzeugende Familie** oder ein **Erzeugendensystem** von  $V$ .
- ③ Falls eine endliche erzeugende Familie von  $V$  existiert, so heißt  $V$  **endlich erzeugt**.

# Darstellung des erzeugten Unterraumes

## Satz 11.16

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum und  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren in  $V$ .

Dann gilt für den von  $F$  erzeugten Unterraum:

$$\langle F \rangle = \left\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist endlich und } \alpha_i \in K \text{ für alle } i \in I_0 \right\}$$

# Darstellung des erzeugten Unterraumes

$$\langle F \rangle := \bigcap \{ U \mid U \text{ ist Unterraum von } V \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U \}$$

$$M := \left\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist endlich und } \alpha_i \in K \text{ f\"ur alle } i \in I_0 \right\}$$

Beweis.

# Darstellung des erzeugten Unterraumes

$$\langle F \rangle := \bigcap \{ U \mid U \text{ ist Unterraum von } V \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U \}$$

$$M := \left\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist endlich und } \alpha_i \in K \text{ f\"ur alle } i \in I_0 \right\}$$

Beweis.

# erzeugter Unterraum (lineare Hülle)

## Beispiel 11.17

- 1 In einem Vektorraum  $V$  heißt die lineare Hülle

$$\langle v \rangle = \{ \alpha v \mid \alpha \in K \}$$

eines einzelnen Vektors  $v \neq 0$  eine **Gerade** durch 0 und  $v$ .

Die lineare Hülle

$$\langle v, w \rangle = \{ \alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in K \}$$

von zwei Vektoren  $v, w \neq 0$  mit  $w \notin \langle v \rangle$  heißt eine **Ebene** durch 0,  $v$  und  $w$ .

# erzeugter Unterraum (lineare Hülle)

## Beispiel 11.17

- ② Es sei  $K$  ein Körper und  $K^{\mathbb{N}}$  der Folgenraum über  $K$ .

Eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$  heißt die  $j$ -te **Standardfolge** für  $j \in \mathbb{N}$ , wenn  $y_j = 1$  und  $y_n = 0$  für alle  $n \neq j$  gilt.

Wir bezeichnen die  $j$ -te Standardfolge mit dem Symbol  $e_j \in K^{\mathbb{N}}$ .

Die Familie  $F = (e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  aller Standardfolgen erzeugt den Unterraum der endlich getragenen Folgen, also  $\langle F \rangle = (K^{\mathbb{N}})_{00}$ .

Die endliche Familie  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , erzeugt den Unterraum der Folgen, deren Träger in  $\llbracket 1, n \rrbracket$  liegt.

# lineare Hülle von Vereinigung und Schnitt

## Folgerung 11.18

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum und  $F_1, F_2$  Familien von Vektoren in  $V$ . Dann gilt

$$\langle F_1 \cup F_2 \rangle = \langle \langle F_1 \rangle \cup \langle F_2 \rangle \rangle$$

$$\langle F_1 \cap F_2 \rangle \subseteq \langle \langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle \rangle = \langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle$$

# § 12 Lineare Unabhängigkeit

# lineare Unabhängigkeit

## Definition 12.1

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum.

- ① Eine Familie  $F$  von Vektoren in  $V$  heißt **linear unabhängig**, wenn in jeder Linearkombination von Vektoren aus  $F$ , die den Nullvektor ergibt, notwendig alle Koeffizienten gleich 0 sind, also:

Für jede endliche Teilmenge  $I_0 \subseteq I$  der Indizes gilt:

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \text{ für alle } i \in I_0$$

- ② Wenn dagegen eine Linearkombination von Vektoren aus  $F$  möglich ist, die den Nullvektor ergibt, wobei nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind, dann heißt die Familie  $F$  **linear abhängig**.

# lineare Unabhängigkeit

## Beispiel 12.2

①  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$

②  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$

# lineare Unabhängigkeit

## Beispiel 12.2

- ③ Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und  $X$  eine Menge.

Im  $K$ -Vektorraum  $K^X$  der Funktionen  $X \rightarrow K$  definieren wir für  $y \in X$  die **charakteristische Funktion**  $e_y: X \rightarrow K$  durch

$$x \mapsto e_y(x) := \delta_{xy} := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Die Familie der charakteristischen Funktionen  $(e_y)_{y \in X}$  ist linear unabhängig.

# lineare (Un-)abhängigkeit

## Bemerkung 12.3

- ① Die lineare (Un-)abhängigkeit ist eine Eigenschaft, die sich auf eine Familie (oder eine Menge) von Vektoren bezieht.

Sprechweisen wie „Der Vektor  $v$  ist linear unabhängig von  $(v_1, v_2)$ .“ sind nicht korrekt.

Man kann aber beispielsweise sagen: „Die Familie  $(v) \parallel (v_1, v_2)$  ist linear unabhängig.“

- ② Die Familie  $(v)$ , bestehend aus einem einzigen Vektor, ist genau dann linear unabhängig, wenn  $v \neq 0$  ist.
- ③ Eine Familie von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist stets linear abhängig.
- ④ Die leere Familie von Vektoren ist per Definition linear unabhängig.

# lineare (Un-)abhängigkeit von Teil- und Oberfamilien

## Lemma 12.4

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum und  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren in  $V$ .

- ① Ist  $F$  linear unabhängig, dann auch jede Teilstrecke von  $F$ .
- ② Ist jede endliche Teilstrecke von  $F$  linear unabhängig, dann auch  $F$ .
- ③ Ist  $F$  linear abhängig, dann auch jede Oberstrecke von  $F$ .

# lineare Abhängigkeit bedeutet Kombinierbarkeit

## Lemma 12.5

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum und  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren in  $V$ .

Dann sind äquivalent:

- ①  $F$  ist linear abhängig.
- ② Es gibt einen Index  $i^* \in I$ , sodass  $v_{i^*}$  als Linearkombination der Teilfamilie  $(v_i)_{i \in I \setminus \{i^*\}}$  darstellbar ist.

# lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz

## Folgerung 12.6

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum und  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren in  $V$ .

Dann sind äquivalent:

- ①  $F$  ist linear abhängig.
- ② Es gibt einen Index  $i^* \in I$ , sodass gilt:

$$\langle (v_i)_{i \in I \setminus \{i^*\}} \rangle = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$$

# lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz

- ①  $F$  ist linear abhängig.
- ② Es gibt einen Index  $i^* \in I$ , sodass gilt:  $\langle(v_i)_{i \in I \setminus \{i^*\}}\rangle = \langle(v_i)_{i \in I}\rangle$ .

Beweis.

# lineare Unabhängigkeit bedeutet eindeutige Darstellung

## Lemma 12.7

Es sei  $(V, +, \cdot)$  ein Vektorraum und  $F = (v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektoren in  $V$ .

Dann sind äquivalent:

- ①  $F$  ist linear unabhängig.
- ② Jeder Vektor  $v \in \langle(v_i)_{i \in I}\rangle$  lässt sich in i. W. eindeutiger Weise aus Vektoren der Familie  $F$  linearkombinieren. Sind also

$$v = \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \sum_{i \in I_1} \beta_i v_i$$

zwei Darstellungen von  $v$  mit endlichen Mengen  $I_0, I_1 \subseteq I$ , dann gilt

$$\alpha_i = \beta_i \quad \text{für } i \in I_0 \cap I_1 \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \alpha_i &= 0 && \text{für } i \in I_1 \setminus I_0 \\ \beta_i &= 0 && \text{für } i \in I_0 \setminus I_1 \end{aligned}$$

# lineare Unabhängigkeit bedeutet eindeutige Darstellung

## Lemma 12.7

- ①  $F$  ist linear unabhängig.
- ② Jeder Vektor  $v \in \langle(v_i)_{i \in I}\rangle$  lässt sich in i. W. eindeutiger Weise aus Vektoren der Familie  $F$  linearkombinieren.

Beweis.

# lineare Unabhängigkeit bedeutet eindeutige Darstellung

## Lemma 12.7

- ①  $F$  ist linear unabhängig.
- ② Jeder Vektor  $v \in \langle(v_i)_{i \in I}\rangle$  lässt sich in i. W. eindeutiger Weise aus Vektoren der Familie  $F$  linearkombinieren.

Beweis.