

Plenarübung LA II

(Inhalts)-Woche 01



Link zu diesen Folien

Ziele und Komponenten der Plenarübungen

Ziele

- (1) Einordnen neuer Inhalte
- (2) Nachbearbeitung der Vorlesungen
- (3) Ergänzung zu den Übungen
- (4) Ansprechen weiterführender Themen

Typische Komponenten

- (1) Wochenüberblick zu den Beziehungen der Inhalte
- (2) (Grafische) Veranschaulichung von Inhalten
- (3) Beweise einfacher Aussagen, Arbeiten mit den Begriffen
- (4) (Wahr/Falsch) Aufgaben in Eigenregie

Ihre Mitgestaltungsmöglichkeiten

- (1) Fragen und Mitarbeit während der Plenarübung.
- (2) Umfragen während der Inhaltswochen

Die Plenarübung markiert das Ende unserer Inhaltswochen und liegt nach dem Abgabezeitpunkt der Hausaufgaben. Sie ist also die beste Gelegenheit, verbliebene Unklarheiten aus dem Weg zu schaffen. Um sicher zu stellen, dass Sie den größten Mehrwert aus der relativ frei gestaltbaren Plenarübung ziehen können, haben wir die unten stehenden (sehr kurzen) anonymisierten Abfragen erstellt, in denen Sie uns bitte mitteilen sollen, worauf Sie in den jeweiligen Plenarübungen den Fokus sehen möchten.

- [Umfrage Plenarübung Woche II-01](#)

In der Plenarübung wird kein zusätzliches prüfungsrelevantes Material eingeführt. Die Teilnahme und aktive Mitgestaltung über die Umfragen und vor Ort wird jedoch empfohlen.

Diese Woche → Sehr konkretes Feedback zur
Zielgruppengestaltung der Plenarübung
Im Grunde: Tempo runter, weniger weiterführende Themen

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01 Q02			
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?			
Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz	
Wiederholung von Skriptinhalten	Ansehen	10	9.62%
Erklärungen zu Skriptbeispielen	Ansehen	5	4.81%
Lösungen der Hausaufgaben	Ansehen	7	6.73%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	85	81.73%	
Gesamt(Brutto)	107	100.00%	

Zusammenfassung für G01 Q01			
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?			
Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz	
Antwort	Ansehen	5	4.81%
Keine Antwort	14	13.46%	
Nicht beendet oder nicht gezeigt	85	81.73%	
Gesamt(Brutto)	104	100.00%	

Gehäuftes Interesse an:

- (1) Wiederholung von Kapitel 20 (v.a. Basiswechsel)
- (2) Wiederholung und Vertiefung zu dualen Größen (v.a. Basen)
- (3) Identifikation $(K^n)^*$ mit K^n (Lemma 21.15)
- (4) Verständnisvertiefung Annihilatoren (Bspl. 21.22)

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

- (1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen
- (2) Anknüpfung an Kapitel 20 herstellen
- (3) Duale Größen und Darstellung dualer Basen wiederholen

Arbeitsplan

- (1) LA-I Rückblick und Wochenüberblick
- (2) Wiederholung Isomorphie, Koordinatendarstellung, Basiswechsel, Rangnormalform/Eigenwerte
- (3) Wiederholung dualer Konzepte
 - (1) Überblick dualer Größen
 - (2) Duale Basis
 - (3) Basisabhängigkeit von Dualraumisomorphismen
 - (4) Darstellung dualer Basen
 - (5) Beispiel und ÜA Erklärungen zu (Prä-)Annihilatoren

LA-I Rückblick und Wochenüberblick

Isomorphie von Vektorräumen

Isomorphe/Äquivalente Vektorräume

Isomorphie von Vektorräumen (\cong) definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der Vektorräume.

Ein besonders nützlicher Isomorphismus

Satz 18.3

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Dann sind äquivalent:

- (1) V und W sind isomorphe Vektorräume.
- (2) Es gibt eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V und eine Basis $(w_j)_{j \in J}$ von W , die gleichmächtig sind.

Koordinatendarstellungen und Matrixdarstellungen

Sätze 19.7 und 19.8 sagen uns, dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{f} & V \\ \Phi_{BW} \uparrow & & \downarrow \Phi_{BV}^{-1} \\ K^n & \xleftarrow{f_A} & K^m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} W & \xleftarrow{f \circ g} & U & & \\ \Phi_{BW}^{-1} \downarrow & f \searrow & \nearrow g & \Phi_{BU} \uparrow & \\ V & & K^m & & \\ \Phi_{BV} \uparrow & & \downarrow \Phi_{BV}^{-1} & & \\ K^n & \xleftarrow{f_A} & f_{AB} & \xleftarrow{f_B} & K^k \end{array}$$

Was nützt uns das?

Basiswechsel

Was muss ich tun, wenn ich andere Basen nutzen möchte?

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{f} & V \\ \Phi_{B_W} \uparrow & & \downarrow \Phi_{B_V}^{-1} \\ K^n & \xleftarrow{f_A} & K^m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\text{id}} & V \\ \Phi_{\widehat{B}} \uparrow & & \downarrow \Phi_B^{-1} \\ K^m & \xleftarrow{\mathcal{T}_{\widehat{B}}^B} & K^m \end{array}$$

Normalformen und Eigenwerte

Folgerung 20.11 (Rangnormalform, Äquivalenztransformationen)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$ mit $\text{Rang}(A) = r$. Dann existieren reguläre Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$, sodass gilt:

$$S A T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \in K^{n \times m}.$$

Normalformen und Eigenwerte

Satz 20.17

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $N \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

- (1) Es existieren f -invariante Unterräume U_1, \dots, U_N der Dimensionen $\dim(U_j) = n_j \in \mathbb{N}_0$, sodass $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_L$.
- (2) Es existiert eine Basis B_V von V , sodass die Darstellungsmatrix von f die Blockdiagonalgestalt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ & A_{22} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{N_L N_L} & & \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_L \end{matrix}$$

besitzt, wobei für die Blöcke $A_{jj} \in K^{n_j \times n_j}$, $j = 1, \dots, N$ gilt.

Duale Größen

Definition 21.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Der Vektorraum

$$V^* := \text{Hom}(V, K) = \{f: V \rightarrow K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \rightarrow K$ heißt der **Dualraum** von V .

Duale Basis(elemente)

Ist V ein VR mit Basis $B := (v_i)_{i \in I}$, dann ist die Menge der dualen Menge $B^* := (v_i^*)_{i \in I}$ mit

$$v_i^*(v_j) := \delta_{ij}$$

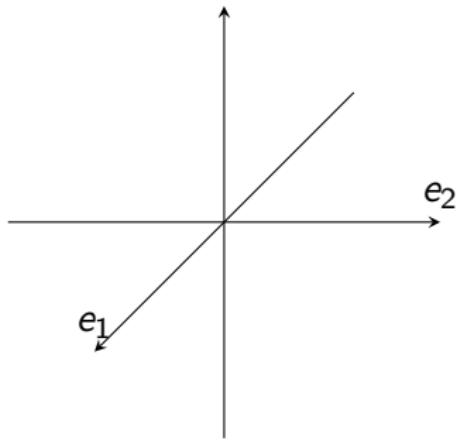
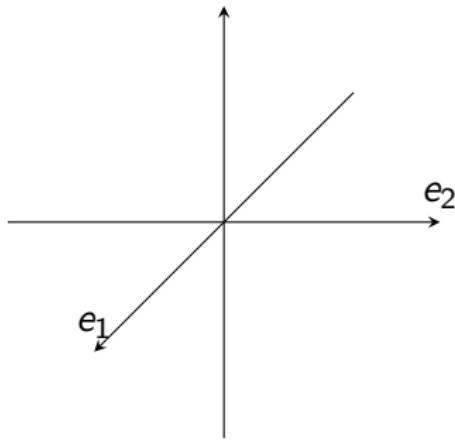
linear unabhängig in V^* .

B^* ist genau dann erzeugend (und damit Basis), wenn I endlich ist.

Dualraumisomorphie ist nicht kanonisch

Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von \mathbb{R}^2 .
Die dualen Basen sind

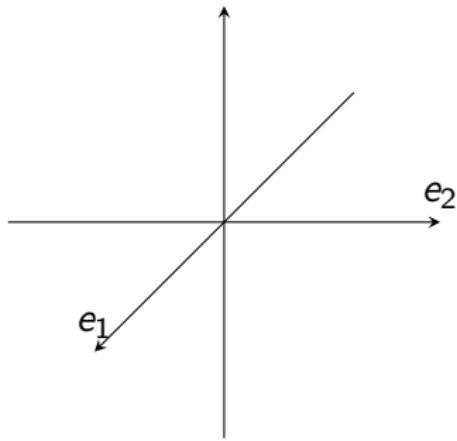
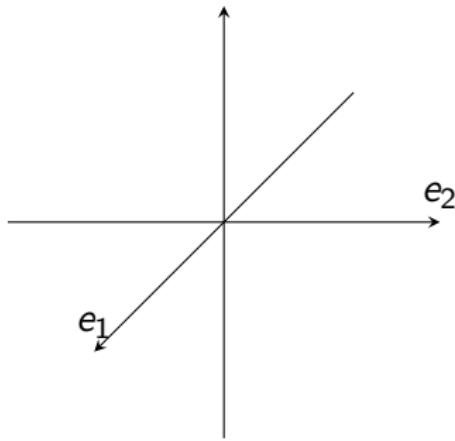
$$B^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right), \quad \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right)$$



Dualraumisomorphie ist nicht kanonisch

Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von \mathbb{R}^2 .
Die dualen Basen sind

$$B^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right), \quad \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right)$$



Dualraumisomorphie ist nicht kanonisch (2)

Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von \mathbb{R}^2 .
Die dualen Basen sind

$$B^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right), \quad \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right)$$

Wie bestimmt man diese Größen?

Darstellung dualer Basen

Wie stellt man eigentlich duale Basen dar?

Wir betrachten $K_n[t]$ mit der Monombasis $(1, t, \dots, t^n)$ (Beispiel 21.16). Die duale Basis $B^* = (v_0^*, \dots, v_n^*)$ hat die Darstellung

$$v_i^* = \frac{1}{i!} \frac{d}{dt^i}(0).$$

Wir betrachten $(\mathcal{P}(\{x_1, \dots, x_4\}), \Delta, \cdot)$ mit der Basis $B = (\{x_1\}, \dots, \{x_4\})$. Die duale Basis B^* hat die Darstellung

Braucht es immer solch eine geschlossene Form?

Identifikation $(K^n)^* \cong K^n$

In K^n mit der Standardbasis $B = (e_1, \dots, e_n)$ stimmen Vektoren v mit ihren Koordinatenvektoren x überein.

Eine Linearform v^* in $(K^n)^*$ können wir durch ihren Koeffizientenvektor $\xi \in K^n$ bzgl. der dualen Basis darstellen. Die Zuordnung $v^* \mapsto \xi$ ist ein Isomorphismus, daher können wir auch direkt $(K^n)^*$ mit K^n identifizieren.

Die duale Paarung ist dann $\xi^T x$.

Prä-(Annihilatoren)

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

(1) Für $M \subseteq V$ heißt

$$\begin{aligned} M^0 &:= \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\} \\ &= \{v^* \in V^* \mid M \subseteq \text{Kern}(v^*)\} \subseteq V^* \end{aligned}$$

der **Anniliator** von M .

(2) Für $F \subseteq V^*$ heißt

$$\begin{aligned} {}^0F &:= \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\ &= \bigcap_{v^* \in F} \text{Kern}(v^*) \subseteq V \end{aligned}$$

der **Prä-Anniliator** von F .

(Prä-)Annihilatoren

Beispiel 21.22

Es sei $V := \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $U := \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \subseteq V$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{12} - a_{21} = 0 \right\}.$$

Unterräume sind Prä-Annihilatoren

Beispiel 21.22

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum von V . Dann gilt

$$U = {}^0(U^0).$$

Duale Unterräume sind (nicht immer) Annihilatoren

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U^* ein Unterraum von V^* . Dann gilt

$$U^* = (^0 U^*)^0$$

genau dann, wenn V (und V^*) endlichdimensional ist.

Weitere Beispiele für (Prä-)Annihilatoren

Hausaufgabe ??

- Bestimmen Sie eine Basis von $\{(0, 1, 2)\}^0$ in \mathbb{R}_3^* über \mathbb{R} .
- Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{p \mapsto p(1) - p(0)\}$ in $(\mathbb{R}_1[t])^*$ über \mathbb{R} .