

Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 01



Link zu diesen Folien

Umfragerückmeldungen

Allgemein

- ① Organisatorisches (bereits geklärt)
- ② Positive Rückmeldung zu Veranstaltungskonzept und Lerntempo
- ③ Kritik an Gesamtanspruch der Hausaufgaben
- ④ IT-Frage zur Rechnerbedienung: Schlagworte unter Ubuntu sind Bash und FZF (command-line-fuzzy-finder)

Wünsche für die Plenarübung

- ① Symbolisieren mit Aussageformen und Quantoren (ÜA/HA I-1.5)
- ② Negation mit Aussageformen (HA I-1.6)

Heutige Ziele

- ① Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen
- ② Verständnis von Aussagen und (logischen) Verknüpfungen festigen
- ③ Zeichensatz erweitern
- ④ Zusammenspiel von Negation und Quantoren in Aussageformen wiederholen
- ⑤ Zusammenspiel von Definitionen, Sätzen und Beweisen klären
- ⑥ Beweistechniken an Beispielen wiederholen

Wochenüberblick

Mathematik vs Logik

Aussagen vs Aussagen über Wahrheitsgehalt von Aussagen

Es sei „ P “ eine Aussage. Welche Beziehung gilt zwischen den Aussagen

- „ P “
- „ P ist wahr“



- ① Sie sind material äquivalent.
- ② Sie sind logisch äquivalent.
- ③ Sie sind auf unterschiedlichen Ebenen, es gibt keine Beziehung.
- ④ „ P “ ist die schwächere Aussage.

<https://partici.fi/06765060>

Aussagen vs Aussagen über Wahrheitsgehalt von Aussagen

Satz

Es sei P eine Aussage. Dann

Aussagen vs Aussagen über Wahrheitsgehalt von Aussagen

Es sei „ P “ eine Aussage. Welche Beziehung gilt zwischen den Aussagen

- „ P “
- „ P ist falsch“



<https://partici.fi/06765060>

- ① Sie sind material äquivalent.
- ② Sie sind nicht logisch äquivalent.
- ③ Sie sind auf unterschiedlichen Ebenen, es gibt keine Beziehung.
- ④ „ $\neg P$ “ ist logisch äquivalent zu „ P ist falsch“.

Negierte logische Verknüpfungen

Als Erweiterung des Schriftsatzes bieten sich an

- $(A \not\Rightarrow B)$ definiert als $\neg(A \Rightarrow B)$, also $A \rightarrow B$ keine Tautologie
- $(A \not\Leftrightarrow B)$ definiert als $\neg(A \Leftrightarrow B)$, also $A \leftrightarrow B$ keine Tautologie
- $\nexists x (A(x))$ definiert als $\neg(\exists x (A(x)))$

Werden im Skript vermieden, können in den Übungsaufgaben vorkommen.

Negation von Aussageformen

Es seien $A(x, z)$, $B(x, y)$, $C(z)$ Aussageformen für x, y, z aus der gleichen Grundmenge. Was ist die Negation von

$$\forall x \exists z (A(x, z) \wedge C(z) \vee \forall y B(x, y))?$$



- ① $\exists x \exists z \forall y (A(x, z) \wedge C(z) \vee B(x, y))$
- ② $\exists x \exists z \forall y (\neg A(x, z) \wedge \neg C(z) \vee \neg B(x, y))$
- ③ $\exists x \exists y \forall z ((\neg A(x, z) \vee \neg C(z)) \wedge \neg B(x, y))$
- ④ $\exists x \exists y \forall z (\neg A(x, z) \vee \neg C(z) \wedge \neg B(x, y))$

<https://partici.fi/06765060>

Übungsaufgabe I-1.5

Aussage: $\forall x \exists y \forall z ((C(x, y, z) \vee A(z)) \wedge B(x, y))$

Schrittweise Negation und Vereinfachung:

$$\begin{aligned} & \neg (\forall x \exists y \forall z ((C(x, y, z) \vee A(z)) \wedge B(x, y))) \\ \Leftrightarrow & \exists x \neg (\exists y \forall z ((C(x, y, z) \vee A(z)) \wedge B(x, y))) \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg (\forall z ((C(x, y, z) \vee A(z)) \wedge B(x, y))) \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \exists z \neg ((C(x, y, z) \vee A(z)) \wedge B(x, y)) \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \exists z (\neg(C(x, y, z) \vee A(z)) \vee \neg B(x, y)) \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \exists z (\neg C(x, y, z) \wedge \neg A(z) \vee \neg B(x, y)). \end{aligned}$$

All-at-once Negation:

Hausaufgabe I-1.5

Symbolisieren Sie für die Grundmenge aller Häuser mithilfe von

$B(x) : x$ ist bewohnt

$H(x, y) : x$ ist mindestens so hoch wie y

$S(x, y) : x$ und y stehen in der gleichen Stadt

- 1 Das höchste Haus jeder Stadt ist unbewohnt.

Hausaufgabe I-1.5

Symbolisieren Sie für die Grundmenge aller Häuser mithilfe von

$B(x) : x$ ist bewohnt

$H(x, y) : x$ ist mindestens so hoch wie y

$S(x, y) : x$ und y stehen in der gleichen Stadt

- ② Es gibt g.e. Stadt, in der alle bewohnten Häuser gleich hoch sind.

Zusammenhang der mathematischen Bausteine

Beispiel: Widerspruchsbeweis

Satz

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist \sqrt{n} entweder eine natürliche oder eine irrationale Zahl.

Beispiel: Induktionsbeweis (mit Schwächen)

Satz

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $P(n)$ eine Menge von n Pferden. Dann haben alle Pferde in $P(n)$ die gleiche Farbe.

Beispiel: Ringschluss

Satz

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind paarweise äquivalent:

- ① Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ ($f(x) = a$).
- ② Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = f(y)$.
- ③ Es ist $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(y)$.