

Lineare Algebra I

Woche 08

02.12.2025 und 04.12.2025

§ 11 Vektorräume

Definition 11.1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Ein **Vektorraum** (V, \oplus, \odot) **über** K ist eine Menge V mit

- einer inneren Verknüpfung $\oplus: V \times V \rightarrow V$
- einer **äußeren** Verknüpfung $\odot: K \times V \rightarrow V$

① (V, \oplus) ist eine abelsche Gruppe

② Es gilt das **Assoziativgesetz**

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$$

Definition 11.1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Ein **Vektorraum** (V, \oplus, \odot) **über** K ist eine Menge V mit

- einer inneren Verknüpfung $\oplus: V \times V \rightarrow V$
- einer **äußeren** Verknüpfung $\odot: K \times V \rightarrow V$

③ Es gelten die **Distributivgesetze**

$$\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$$

$$(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$$

④ Das neutrale Element 1_K bzgl. \cdot in K ist auch neutral bzgl. \odot :

$$1_K \odot v = v$$

Beispiel 11.3

- ① Jeder Körper $(K, +, \cdot)$, ausgestattet mit den Verknüpfungen $\oplus := +$ und $\odot := \cdot$, ist ein Vektorraum über sich selbst.

- ② Allgemeiner ist jeder Körper $(K, +, \cdot)$ ein Vektorraum über jedem seinem Unterkörper $(U, +, \cdot)$.
 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Beispiel 11.3

- ③ Über jedem Körper $(K, +, \cdot)$ gibt es „den“ (bis auf Isomorphie eindeutigen) Vektorraum (V, \oplus, \odot) mit nur einem einzigen Element, $V = \{0_V\}$.

Die Verknüpfungen \oplus und \odot sind dann eindeutig festgelegt:

Dieser Raum heißt „der“ **Nullraum** über K .

Beispiel 11.3

- ④ Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

Die Menge

$$K_n := \{ (x_1 \ \cdots \ x_n) \mid x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n \}$$

mit der **komponentenweisen Addition**

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \oplus (y_1 \ \cdots \ y_n) :=$$

und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation**

$$\alpha \odot (x_1 \ \cdots \ x_n) :=$$

heißt der **Vektorraum der Zeilenvektoren** über K der Dimension n .

Beispiel 11.3

5 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

Die Menge

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

mit der **komponentenweisen Addition** und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \quad \text{und} \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=$$

heißt der **Vektorraum der Spaltenvektoren** über K der Dimension n .

Beispiel 11.3

- ⑥ Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine Menge.

Die Menge $K^X = \{f \mid f: X \rightarrow K\}$ mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) :=$$

$$(\alpha \odot f)(x) :=$$

ist ein Vektorraum über K .

Insbesondere ist die Menge der Folgen $K^{\mathbb{N}}$ mit Werten in K ein K -Vektorraum, genannt der **Folgenraum über K** .

Beispiel 11.3

- ⑦ Allgemeiner sei (V, \oplus, \odot) ein K -Vektorraum und X eine Menge.

Die Menge $V^X = \{f \mid f: X \rightarrow V\}$ mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) := f(x) \oplus g(x)$$

$$(\alpha \odot f)(x) := \alpha \odot f(x)$$

ist ein Vektorraum über K .

Insbesondere ist die Menge der Folgen $V^{\mathbb{N}}$ mit Werten in V ein K -Vektorraum, genannt der **Folgenraum über V** .

Definition 11.4

- ① Sind (V_1, \oplus_1, \odot_1) und (V_2, \oplus_2, \odot_2) zwei K -Vektorräume, dann ist das **kartesische Produkt**

$$V_1 \times V_2 := \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

ebenfalls ein K -Vektorraum mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) := (v_1 \oplus_1 w_1, v_2 \oplus_2 w_2)$$

$$\alpha \odot (v_1, v_2) := (\alpha \odot_1 v_1, \alpha \odot_2 v_2)$$

- ② Allgemeiner: $V_1 \times \cdots \times V_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Definition 11.4

- ③ Noch allgemeiner: Das **kartesische Produkt** der K -Vektorräume (V_i, \oplus_i, \odot_i) für $i \in I$

$$W := \prod_{i \in I} V_i := \left\{ F: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \mid F(i) \in V_i \text{ für alle } i \in I \right\}$$

mit der punktweisen Addition \oplus und S-Multiplikation \odot

$$\oplus: W \times W \rightarrow W \quad \text{mit} \quad (F \oplus G)(i) := F(i) \oplus_i G(i)$$

$$\odot: K \times W \rightarrow W \quad \text{mit} \quad (\alpha \cdot F)(i) := \alpha \odot_i F(i)$$

ist ein K -Vektorraum.

Lemma 11.5

$$\textcircled{1} \quad 0_K \odot v = 0_V$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha \odot 0_V = 0_V$$

Beweis.

Lemma 11.5

$$\textcircled{3} \quad \alpha \odot (\ominus v) = \ominus(\alpha \odot v) = (-\alpha) \odot v$$

Insbesondere: $\ominus v = (-1_K) \odot v$

Beweis.

Lemma 11.5

$$\textcircled{4} \quad (-\alpha) \odot (\ominus v) = \alpha \odot v$$

$$\textcircled{5} \quad \alpha \odot v = 0_V \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0_K \text{ oder } v = 0_V.$$

Beweis.

Mengen und Familien in Vektorräumen

Die Definitionen und Resultate bis zum Ende von § 14 sind im Skript jeweils in zwei Versionen angegeben: für **Mengen** und für **Familien**. Die Aussagen sind konzeptionell gleich, unterscheiden sich jedoch im Detail (vgl. Bemerkung 6.40 zu den Unterschieden von Mengen und Familien).

Wir arbeiten **bevorzugt** mit **Familien**, weil wir später (vor allem bei der Darstellung linearer Abbildungen in Form von Matrizen, ab § 19) **geordnete Familien** von Vektoren benötigen.

Menge $E \subseteq V$

z. B. $E = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Familie $F = (v_i)_{i \in I}$ in V

z. B. $F = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Definition 11.7

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie im K -Vektorraum (V, \oplus, \odot) .

Ist $F_0 = (v_i)_{i \in I_0}$ eine **endliche Teilfamilie** und sind $\alpha_i \in K$, dann heißt

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i \odot v_i$$

eine **Linearkombination (von Vektoren) der Familie F** .

Eine Linearkombination heißt **trivial**, wenn alle $\alpha_i = 0_K$ sind.

Linearkombination: alternative Notation

Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren und $I_0 \subseteq I$ endlich.

bevorzugte Notation

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i \odot v_i$$

alternative Notation

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \odot v_{i_j}$$

Beispiel 11.9

- ① $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Familie $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ im \mathbb{Q} -Vektorraum \mathbb{Q}^2 :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ② $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Familie $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ im \mathbb{Q} -Vektorraum \mathbb{Q}^2 :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \odot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.9

3 Die Funktion

ist eine Linearkombination der Familie (\sin, \cos) im \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$.

Definition 11.10

Es sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

- 1 Eine bzgl. \oplus und \odot abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Unter(vektor)raum** von (V, \oplus, \odot) , wenn (U, \oplus, \odot) selbst wieder ein K -Vektorraum ist.
- 2 Ein Unterraum (U, \oplus, \odot) von (V, \oplus, \odot) heißt **echt**, wenn $U \subsetneq V$ gilt.

Satz 11.11

Es sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

- ① (U, \oplus, \odot) ist ein Unterraum von (V, \oplus, \odot) .
- ② $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
- ③ $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.

Beweis.

Satz 11.11

Es sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

- ❶ (U, \oplus, \odot) ist ein Unterraum von (V, \oplus, \odot) .
- ❷ $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
- ❸ $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.

Beweis.

Satz 11.11

Es sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind äquivalent:

- ① (U, \oplus, \odot) ist ein Unterraum von (V, \oplus, \odot) .
- ② $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.
- ③ $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.

Beweis.

Beispiel 11.12

- ① Es sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$.

Dann sind $(\{0_V\}, \oplus, \odot)$ und (V, \oplus, \odot) die **trivialen Unterräume** von (V, \oplus, \odot) .

②

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$$

ist Unterraum des \mathbb{Q} -Vektorraums \mathbb{Q}^2

Beispiel 11.12

3

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 = 1 \right\}$$

ist Unterraum des \mathbb{Q} -Vektorraums \mathbb{Q}^2

4

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

ist Unterraum des \mathbb{Q} -Vektorraums \mathbb{Q}^2

Beispiel 11.12

5

$$U := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{R}, a - 2b = 0\}$$

ist Unterraum des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{C}

ist Unterraum des \mathbb{C} -Vektorraums \mathbb{C}

Beispiel 11.12

- ⑥ Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der Folgenraum über K .

Der **Träger** einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist

$$\text{supp}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0_K\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Die **Folgen mit endlichem Träger**

$$(K^{\mathbb{N}})_{00} := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{supp}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist endlich}\}$$

bilden einen echten Unterraum von $(K^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$.

Bemerkung 11.13

- 1 Wir schreiben $+$ an Stelle von \oplus .
- 2 Wir schreiben \cdot an Stelle von \odot oder lassen es sogar weg.
- 3 Wir schreiben 0 an Stelle von 0_K und auch an Stelle von 0_V .
- 4 Wir schreiben 1 an Stelle von 1_K .
- 5 Wir nennen den zugrundeliegenden Körper eines Vektorraumes nur bei Bedarf.

Definition 11.15

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

- ① $\langle F \rangle := \bigcap \{ U \mid U \text{ ist Unterraum von } V \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U \}$ heißt
 - der von F **erzeugte Unterraum**
 - oder die **lineare Hülle** $\text{Lin}(F)$ von F
 - oder der **Spann** $\text{Span}(F)$ von F
- ② Gilt $\langle F \rangle = V$, dann heißt F eine **erzeugende Familie** oder ein **Erzeugendensystem** von V .
- ③ Falls eine endliche erzeugende Familie von V existiert, so heißt V **endlich erzeugt**.

Satz 11.16

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

Dann gilt für den von F erzeugten Unterraum:

$$\langle F \rangle = \left\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist endlich und } \alpha_i \in K \text{ für alle } i \in I_0 \right\}$$

Darstellung des erzeugten Unterraumes

$$\langle F \rangle := \bigcap \{ U \mid U \text{ ist Unterraum von } V \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U \}$$

$$M := \left\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist endlich und } \alpha_i \in K \text{ für alle } i \in I_0 \right\}$$

Beweis.

Darstellung des erzeugten Unterraumes

$$\langle F \rangle := \bigcap \{ U \mid U \text{ ist Unterraum von } V \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U \}$$

$$M := \left\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist endlich und } \alpha_i \in K \text{ für alle } i \in I_0 \right\}$$

Beweis.

Beispiel 11.17

- ① In einem Vektorraum V heißt die lineare Hülle

$$\langle v \rangle = \{ \alpha v \mid \alpha \in K \}$$

eines einzelnen Vektors $v \neq 0$ eine **Gerade** durch 0 und v .

Die lineare Hülle

$$\langle v, w \rangle = \{ \alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in K \}$$

von zwei Vektoren $v, w \neq 0$ mit $w \notin \langle v \rangle$ heißt eine **Ebene** durch 0, v und w .

Beispiel 11.17

② Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der Folgenraum über K .

Eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ heißt die j -te **Standardfolge** für $j \in \mathbb{N}$, wenn $y_j = 1$ und $y_n = 0$ für alle $n \neq j$ gilt.

Wir bezeichnen die j -te Standardfolge mit dem Symbol $e_j \in K^{\mathbb{N}}$.

Die Familie $F = (e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ aller Standardfolgen erzeugt den Unterraum der endlich getragenen Folgen, also $\langle F \rangle = (K^{\mathbb{N}})_{00}$.

Die endliche Familie (e_1, \dots, e_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, erzeugt den Unterraum der Folgen, deren Träger in $\llbracket 1, n \rrbracket$ liegt.

Folgerung 11.18

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und F_1, F_2 Familien von Vektoren in V .
Dann gilt

$$\langle F_1 \cup F_2 \rangle = \langle \langle F_1 \rangle \cup \langle F_2 \rangle \rangle$$

$$\langle F_1 \cap F_2 \rangle \subseteq \langle \langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle \rangle = \langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle$$

§ 12 Lineare Unabhängigkeit

Definition 12.1

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum.

- 1 Eine Familie F von Vektoren in V heißt **linear unabhängig**, wenn in jeder Linearkombination von Vektoren aus F , die den Nullvektor ergibt, notwendig alle Koeffizienten gleich 0 sind, also:

Für jede endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ der Indizes gilt also:

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \text{ für alle } i \in I_0$$

- 2 Wenn dagegen eine Linearkombination von Vektoren aus F möglich ist, die den Nullvektor ergibt, wobei nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind, dann heißt die Familie F **linear abhängig**.

Beispiel 12.2

① $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ im \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2

② $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ im \mathbb{Q} -Vektorraum \mathbb{R}^2

Beispiel 12.2

- ③ Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine Menge.

Im K -Vektorraum K^X der Funktionen $X \rightarrow K$ definieren wir für $y \in X$ die **charakteristische Funktion** $e_y: X \rightarrow K$ durch

$$x \mapsto e_y(x) := \delta_{xy} := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Die Familie der charakteristischen Funktionen $(e_y)_{y \in X}$ ist linear unabhängig.

Bemerkung 12.3

- 1 Die lineare (Un-)abhängigkeit ist eine Eigenschaft, die sich auf eine Familie (oder eine Menge) von Vektoren bezieht.

Sprechweisen wie „Der Vektor v ist linear unabhängig von (v_1, v_2) .“ sind nicht korrekt.

Man kann aber beispielsweise sagen: „Die Familie $(v) \parallel (v_1, v_2)$ ist linear unabhängig.“

- 2 Die Familie (v) , bestehend aus einem einzigen Vektor, ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
- 3 Eine Familie von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist stets linear abhängig.
- 4 Die leere Familie von Vektoren ist per Definition linear unabhängig.

lineare (Un-)abhängigkeit von Teil- und Oberfamilien

Lemma 12.4

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

- ❶ Ist F linear unabhängig, dann auch jede Teilfamilie von F .
- ❷ Ist jede endliche Teilfamilie von F linear unabhängig, dann auch F .
- ❸ Ist F linear abhängig, dann auch jede Oberfamilie von F .

lineare Abhängigkeit bedeutet Kombinierbarkeit

Lemma 12.5

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

Dann sind äquivalent:

- ① Ist F linear abhängig.
- ② Es gibt einen Index $i^* \in I$, sodass v_{i^*} als Linearkombination der Teilfamilie $(v_i)_{i \in I \setminus \{i^*\}}$ darstellbar ist.

Folgerung 12.6

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

Dann sind äquivalent:

- ① Ist F linear abhängig.
- ② Es gibt einen Index $i^* \in I$, sodass gilt:

$$\langle (v_i)_{i \in I \setminus \{i^*\}} \rangle = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$$

lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz

- 1 Ist F linear abhängig.
- 2 Es gibt einen Index $i^* \in I$, sodass gilt: $\langle (v_i)_{i \in I \setminus \{i^*\}} \rangle = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$.

Beweis.

lineare Unabhängigkeit bedeutet eindeutige Darstellung

Lemma 12.7

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

Dann sind äquivalent:

- 1 Ist F linear unabhängig.
- 2 Jeder Vektor $v \in \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$ lässt sich in i. W. eindeutiger Weise aus Vektoren der Familie F linearkombinieren. Sind also

$$v = \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \sum_{i \in I_1} \beta_i v_i$$

zwei Darstellungen von v mit endlichen Mengen $I_0, I_1 \subseteq I$, dann gilt

$$\alpha_i = \beta_i \quad \text{für } i \in I_0 \cap I_1 \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \alpha_i &= 0 & \text{für } i \in I_1 \setminus I_0 \\ \beta_i &= 0 & \text{für } i \in I_0 \setminus I_1 \end{aligned}$$

lineare Unabhängigkeit bedeutet eindeutige Darstellung

Lemma 12.7

- 1 Ist F linear unabhängig.
- 2 Jeder Vektor $v \in \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$ lässt sich in i. W. eindeutiger Weise aus Vektoren der Familie F linearkombinieren.

Beweis.