

ÜBUNG 12

Ausgabedatum: 26. Januar 2022
Abgabedatum: 4. Februar 2022

Hausaufgabe 1. (Monotonie des Subdifferentials) 5 Punkte

Es seien $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

(i) Zeigen Sie, dass das Subdifferential ein (mengenwertiger) monotoner Operator ist, also dass

$$(s_1 - s_2)^\top (x_1 - x_2) \geq 0 \quad (\text{o.1})$$

für alle $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$.

(ii) Zeigen Sie, dass Aussage (i) für strikt konvexes f und $x_1 \neq x_2$ mit echter Ungleichheit in (o.1) gilt.

(iii) Zeigen Sie für strikt konvexes f und $x_1, x_2 \in \text{rel int}(\text{dom } f)$ die Beziehung

$$\partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset \iff x_1 = x_2.$$

Hausaufgabe 2. (Richtungsableitungen von Normen) 6 Punkte

Verifizieren Sie Beispiel 16.11, also die folgenden Aussagen für $d \in \mathbb{R}^n$:

(i) Für $f(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ist

$$f'(x; d) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i > 0}}^n d_i - \sum_{\substack{i=1 \\ x_i < 0}}^n d_i + \sum_{\substack{i=1 \\ x_i = 0}}^n |d_i|.$$

(ii) Für $f(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ ist

$$f'(x; d) = \begin{cases} \frac{x^\top d}{\|x\|_2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \|d\|_2, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(iii) Für $f(x) = \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ und $x \neq 0$ ist

$$f'(x; d) = \max\{(\operatorname{sgn} x_i) d_i \mid i = 1, \dots, n, |x_i| = \|x\|_\infty\}$$

sowie

$$f'(0; d) = \|d\|_\infty.$$

Hausaufgabe 3. (Kettenregel für die Richtungsableitungen)

4 Punkte

- (i) Geben Sie ein Beispiel für Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in \operatorname{dom} g$ und $d \in \mathbb{R}$ an, das zeigt, dass i. A. keine Kettenregel für die Richtungsableitung gilt.
- (ii) Wir können die [Definition 16.10](#) der Richtungsableitung direkt auf vektorwertige Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ übertragen, indem wir fordern, dass der Grenzwert existieren muss, aber in jeder Komponente endlich ist.

Es seien $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben, so dass

- die Richtungsableitung von g an x_0 in Richtung d existiert (und endlich ist),
- die Richtungsableitung von f an $g(x_0)$ in Richtung $g'(x_0; d)$ existiert (und endlich ist) und
- die Funktion f in einer Umgebung von $g(x_0)$ Lipschitz-stetig ist.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Richtungsableitung von $f \circ g$ an x_0 in Richtung d existiert, und dass

$$f \circ g'(x_0; d) = f'(g(x_0); g'(x_0, d)) \quad \text{für alle } d \in \mathbb{R}^n. \quad (o.2)$$

Hausaufgabe 4. (Richtungsableitung und Subdifferential für max diffbarer Funktionen) 6 Punkte

Es seien $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $f_i: C \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, konvexe und stetig differenzierbare Funktionen sowie für $x \in C$

$$f(x) := \max_{i=1,\dots,m} f_i(x)$$

und $A(x) := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i(x) = f(x)\}$. Zeigen Sie:

- (i) Die Funktion f besitzt für alle Richtungen $d \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung

$$f'(x, d) = \max_{i \in A(x)} f'_i(x)d.$$

- (ii) Das Subdifferential der Funktion f ist

$$\partial f(x) = \text{conv}\{f'_i(x)^\top \mid i \in A(x)\}.$$

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.