Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 07

Link zu diesen Folien

Umfragerückmeldungen

Allgemein

1. Positive Rückmeldung zu Statistiken Übungspunkte/Klausurpunkte

Wochenspezifisch

1. Ideale und Faktorverknüpfungen
2. Erzeugte Ideale und deren Bestimmung
3. Geordnete Ringe

Wochenüberblick

Ring

Definition 9.1

Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R, sodass

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.
3. Es gelten die **Distributivgesetze**

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt **kommutativ**, wenn $(R, \cdot)$ kommutativ ist.

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt ein **Ring mit Eins**, wenn $(R, \cdot)$ ein Monoid ist.

Fragen zu Ringen

Warum fordern wir Kommutativität von $(R, +)$?

Kann ich jede abelsche Gruppe $(R, +)$ zu einem Ring ergänzen?

Fragen zu Ringen

Müssen wir Distributivität wirklich beidseitig prüfen?

Gibt es eigentlich ...

- Ringe mit/ohne 1?
- Nichtkommutative Ringe?
- (un)-endliche Ringe?

Nullteiler, Integritätsring

Definition 9.7

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

1. $a \in R$ heißt **Linksnullteiler**, wenn es $b \neq 0_R$ gibt mit $a \cdot b = 0_R$.
2. $b \in R$ heißt **Rechtsnullteiler**, wenn es $a \neq 0_R$ gibt mit $a \cdot b = 0_R$.
3. $(R, +, \cdot)$ heißt **nullteilerfrei**, wenn es außer 0_R keine weiteren Links- oder Rechtsnullteiler gibt, wenn also gilt:
4. Ist $(R, +, \cdot)$
   - ein kommutativer Ring mit Eins
   - nullteilerfrei
   - und ungleich dem Nullring

   dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein **Integritätsring** oder **Integritätsbereich**.

Gibt es eigentlich...

- Ringe mit/ohne Nullteiler?
- Integritätsringe, die keine Körper sind?

Charakteristik eines Ringes

Definition 9.4

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1_R.

Wenn $n1_R = 0_R$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann heißt

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid n1_R = 0_R\}$$

die **Chakteristik** von R, kurz $\mathrm{char}(R)$. Andernfalls $\mathrm{char}(R) = 0$.

Was heißt das für die restlichen Elemente in R?

Unterring

Definition 9.12

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

1. Eine bzgl. $+$ und $\cdot$ abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq R$ heißt ein **Unterring** von $(R, +, \cdot)$, wenn $(U, +, \cdot)$ selbst wieder ein Ring ist.
2. Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1_R, dann fordern wir für einen **Unterring mit Eins** $(U, +, \cdot)$ zusätzlich, dass $1_R \in U$ liegt.

Tritt der ausgeschlossene Fall aus Punkt 2 überhaupt auf?

Ein spannender Unterring

Beobachtung:

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit 1. Ein Element $e \in R$ ist genau dann das multiplikativ neutrale Element eines Unterrings von R, wenn $e^2 = e$. Außerdem gilt dann:

1.
2.

Homomorphismus von Ringen

Definition 9.17

Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe. Ein $f\colon R_1 \to R_2$ heißt **strukturverträglich**, wenn gilt:

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1$$
$$f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1$$

Besitzen beide Ringe ein Einselement 1_{R_1} bzw. 1_{R_2}, so wird für einen **Homomorphismus von Ringen mit Eins** zusätzlich $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ gefordert.

Können wir auf $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ verzichten?

Ideal

Definition 9.25

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

1. Eine Teilmenge $J \subseteq R$ heißt ein **Ideal** von $(R, +, \cdot)$, wenn J ein Unterring von R ist und zusätzlich gilt:

$$R \cdot J \subseteq J \quad \text{und} \quad J \cdot R \subseteq J$$

2. Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt**, wenn $J \subsetneq R$ gilt.

Faktorring bzgl. eines Ideals

Satz 9.30

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und J ein Ideal. Dann gilt:

1. Die Faktormenge $R \,/\, J = \big\{[a] = a + J \,\big|\, a \in R\big\}$ formt mit $[a] \mathbin{\tilde{+}} [b] := [a + b]$ und $[a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b]$ einen Ring.

2. Die **kanonische Surjektion** $\pi \colon R \ni a \mapsto [a] \in R \,/\, J$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\operatorname{Kern}(\pi) = J$.

3. Ist U Unterring und $\tilde{\cdot}$ auf $R \,/\, U$ wohldefiniert, dann ist U R-Ideal.

Darstellung des erzeugten Ideals

Satz 9.36

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; \begin{array}{r} \big(a_i \in E \;\cup\; -E \;\cup\; R\,E \\ \cup\; E\,R \;\cup\; R\,E\,R\big) \end{array} \right\}$$

Diese Darstellungen können vereinfacht werden, wenn R ein Einselement besitzt oder kommutativ ist.

Bestimmung erzeugter Ideale in einem Endomorphismenring

Gegeben sei $(\mathbb{Z}_4, +)$. Wie sehen die Abbildungen in $\operatorname{End}(\mathbb{Z}_4, +)$ aus?

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
$f_0(x)$				
$f_1(x)$				
$f_2(x)$				
$f_3(x)$				.

Wie sehen die Hauptideale in $\operatorname{End}(\mathbb{Z}_4, +, \circ)$ aus?

Bisher erzeugte Objekte

In Gruppen

In Ringen

Vergleich der Gruppen-/Ringkommutatoren

Definition

Es sei $(G, +)$ eine Gruppe. Der zu a und b gehörige Kommutator ist

$$[a, b] := a + b - a - b = (a + b) - (b + a)$$

Die Menge der Kommutatoren erzeugt die Kommutatorgruppe
$K(G) := \langle \{a + b - a - b \mid a, b \in G\} \rangle$

Definition

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Der zu a und b gehörige Kommutator ist

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$$

Die Menge der Kommutatoren erzeugt das Kommutatorideal
$K(R) := (\{a \cdot b - b \cdot a \mid a, b \in R\})$

Wie kommt man auf Kommutatoren?

Die richtige (oder zumindest bessere) Frage

Was sind die richtigen Objekte, die ausfaktorisiert werden müssen, damit die Faktorstruktur kommutiert?

In Gruppen

In Ringen

In Monoiden

Einschub: Vogelperspektive auf Faktorstrukturen

Faktorstrukturen

Faktorstrukturen sollen einen gröberen Blick auf die Grundmenge ermöglichen. Dafür braucht es

Homomorphismensätze

Homomorphismensätze liefern die (stufenweise strukturverträgliche) Zerlegung von Homomorphismen in Injektion, Bijektion und Surjektion.

Einschub: Homomorphiesätze auf geringerwertigen Strukturen

Homomorphiesätze für strukturverträgliche f sind also auch für Halbgruppen und Monoide möglich.

Kernprobleme

Der Kern verliert in Halbgruppen und Monoiden an Bedeutung, denn

Beispiel

geordneter Körper

Definition 10.19

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit dem Nullelement 0_K und $\leqslant$ eine Totalordnung auf K.

1. Der Körper heißt **geordnet** bzgl. der Totalordnung $\leqslant$, wenn

$$\alpha \leqslant \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

$$\alpha \geqslant 0_K \text{ und } \beta \geqslant 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \geqslant 0_K$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt.

Rechenregeln in geordneten Körpern

Lemma 10.20

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.
Dann gilt für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$:

1. $\alpha \geqslant 0_K \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leqslant 0_K$
2. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$
3. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \geqslant 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \gamma$
4. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma \geqslant \beta \cdot \gamma$
5. $\alpha^2 \geqslant 0_K$
6. $\alpha \neq 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 > 0_K$. Insbesondere gilt $1_K > 0_K$.
7. $\alpha > 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1} > 0_K$
8. $\beta > \alpha > 0_K \quad \Rightarrow \quad \alpha^{-1} > \beta^{-1} > 0_K$
9. $n 1_K > 0_K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Insbesondere gilt notwendigerweise $\operatorname{char}(K) = 0_K$.

Wie groß ist eigentlich die kleinste/nächstkleinste Struktur?

1. Halbgruppe
2. Monoid
3. Gruppe
4. Ring
5. Ring mit Eins
6. Körper

Gibt es einen Körper mit vier Elementen?

Schauen wir mal...

$+$	0	1		
0				
1				

$\cdot$	0	1		
0				
1				

Gibt es für alle unsere Strukturen Default Homomorphismen?

1. Halbgruppen
2. Monoide
3. Gruppen
4. Ringe
5. Ringe mit Eins
6. Körper