

Plenum 03

Grundlagen der Optimierung

Wintersemester 2022

07.11.2022 und 08.11.2022

Newton-Verfahren

Was sind die Highlights der Woche?

Welche Fragen gibt es?

- Quizfrage 5.1: Abschätzung in Lemma 5.6
- Bedingung (5.7) im globalisierten Newton-Verfahren
- Nutzen quadratischer Modelle in der Optimierung
- Bemerkung 5.12, Begründung für $\sigma < 1/2$
- Quizfrage 5.2: Stabilität superlinearer Konvergenz bei Wechsel der Norm
- Quizfrage 5.4: affine Transformationen beim Gradienten- und Newton-Verfahren

Fragen von letzter Woche

- Abbruchbedingungen (Bemerkung 4.7)
- Schwierigkeiten bei der exakten Liniensuche (Quizfrage 4.3)

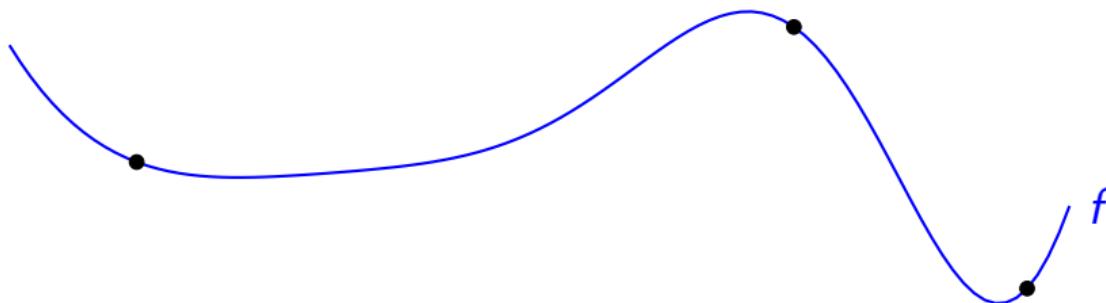
Zwei Motivationen des Newton-Verfahrens

Wie waren nochmal die zwei Herleitungen des Newton-Verfahrens zur Lösung der unrestringierten Aufgabe

Minimiere $f(x)$ über $x \in \mathbb{R}^n$?

Illustration des Newton-Verfahrens

Illustrieren Sie unter Verwendung des Taylorpolynoms 2. Ordnung die Newton-Richtungen der dargestellten Funktion an den markierten Punkten.



Ist die Newton-Richtung Abstiegsrichtung?

Was können wir anhand der Erkenntnisse von der vorherigen Folie darüber aussagen, ob die Newton-Richtung eine Abstiegsrichtung ist? (Auch an die mehrdimensionalen Situation denken.)

Vergleich Gradienten-/Newton-Verfahren

- ① Was sind Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Gradientenverfahren und Newton-Verfahren zur Lösung der unrestringierten Aufgabe

Minimiere $f(x)$ über $x \in \mathbb{R}^n$?

- ② Welche Rolle spielt jeweils das Skalarprodukt M , das man im \mathbb{R}^n wählt?

Vereinfachtes Newton-Verfahren

- ① Was war nochmal das vereinfachte Newton-Verfahren?
(für die Nullstellensuche von F)
- ② Welche lokale Konvergenzeigenschaft hat es?

Vereinfachtes Newton-Verfahren

Satz

Es sei F eine C^1 -Funktion und $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $F(x^*) = 0$ und $F'(x^*)$ regulär. Dann existiert eine Umgebung $B_\delta(x^*)$ von x^* , sodass für jedes $x^{(0)} \in B_\delta(x^*)$ gilt:

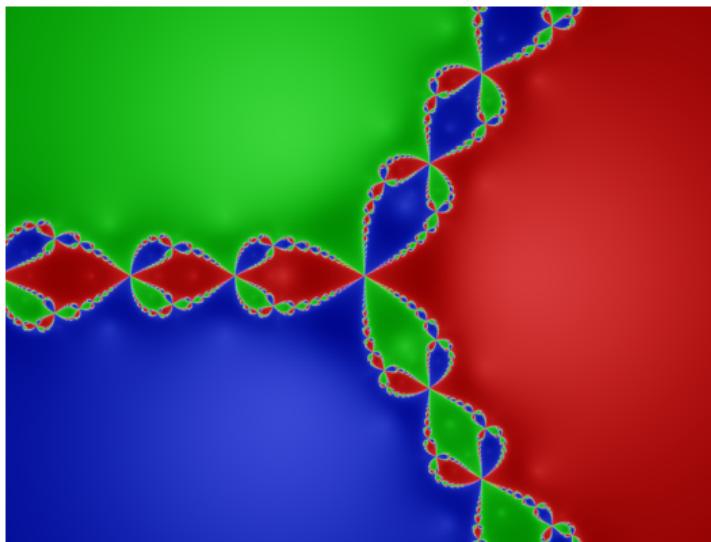
- ① Das vereinfachte Newton-Verfahren ist wohldefiniert und erzeugt eine Folge $x^{(k)}$, die gegen x^* konvergiert.
- ② Die Konvergenzrate ist ***Q-linear***.

Vereinfachtes Newton-Verfahren

Was unterscheidet ein vereinfachtes Newton-Verfahren dann überhaupt noch vom Gradientenverfahren in der Optimierung?

Lokales Newton-Verfahren

Das lokale Newton-Verfahren zur Berechnung der **komplexen** Nullstellen von $F(z) := z^n - 1$ verhält sich in bestimmten Bereichen chaotisch:



https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_fractal

<https://scipython.com/book2/chapter-8-scipy/examples/the-newton-fractal/>