

# Plenum 02

Einführung in die Numerik  
Sommersemester 2022

03.05.2022 und 05.05.2022

Kondition

# Was sind die Highlights der Woche?

- Satz 3.16 von Kahan
- Konditionszahlen der Grundoperationen (Lemma 3.9)
- Definition partieller Ableitungen und partieller Konditionszahlen
- anschauliche Bedeutung der Konditionszahlen und ihrer physikalischen Einheiten

# Welche Fragen gibt es? I

- Definition der echten Addition und echten Subtraktion (Mittlerweile wurde dazu im Skript auch ein Beispiel nachgetragen.)
- Bedeutung der Formel (3.1), also

$$F(x + \Delta x) \in F(x) + F'(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|) :$$

Auf der rechten Seite steht eine Funktion, nämlich  $\Delta x \mapsto F(x) + F'(x) \Delta x$ , plus eine Menge von Funktionen, nämlich  $o(\|\Delta x\|)$ . Die rechte Seite ist zu verstehen als die feste Funktion plus eine beliebige Funktion aus der Menge. (Erklärung wird auch im Skript ergänzt.)

# Welche Fragen gibt es? II

- Erklärung zur schlechte Konditionierung der echten Subtraktion
- Frage zum Beweis des Satzes 3.16 von Kahan
- Grund der Verwendung der  $\|\cdot\|_{\infty \rightarrow \infty}$ -Norm im Falle der relativen Kondition
- Quizfrage nach (3.26): Wie würde dieser Ausdruck aussehen, wenn wir statt der  $\infty$ -Normen überall die 2-Normen verwenden würden?  
In dem Fall erhalten wir in (3.16) an Stelle der  $\|\cdot\|_{\infty \rightarrow \infty}$ -Norm die  $\|\cdot\|_{2 \rightarrow 2}$ -Norm.

# Konditionierung von Aufgaben I

Welche Beispiele für schlecht konditionierte Aufgaben fallen Ihnen ein?

- „Messerspitze“ im Kochrezept
- Bestimmung des Erdradius von der Erde aus
- Verzerrung auf Karten (nahe Nordpol)
- Vorhersage des Aktienkurses
- Vorhersage der Wurfbahn eines weit geworfenen Balles
- Systeme mit chaotischer Dynamik wie das Doppelpendel
- Billiard

# Konditionierung von Aufgaben II

- nicht oder nicht eindeutig lösbare Gleichungssysteme (z. B. bei der Rekonstruktion eines 3D-Körpers aus seinem Schattenwurf)
- Klassifikationsergebnis eines trainierten neuronalen Netzes bei einem adversarial attack
- Wettervorhersage über einen langen Zeitraum
- Deformation von Metallstangen, die bis knapp über ihre Fließgrenze belastet worden sind

# Abs. Konditionszahlen bei Einheitenwechsel

Im Beispiel 3.4 haben wir die Jacobimatrix der Fkt.

$$s(t, v_0, a) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

an der Stelle  $a = 5 \text{ m s}^{-2}$ ,  $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$  und  $t = 10 \text{ s}$  bestimmt:

$$\begin{bmatrix} v_0 + a t & t & \frac{1}{2} t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \text{ m s}^{-1} & 10 \text{ s} & 50 \text{ s}^2 \end{bmatrix}$$

- 1 Wie ändern sich diese absoluten partiellen Konditionszahlen, wenn man den Funktionswert  $s$  in mm misst statt wie oben in m?
- 2 Und was ändert sich, wenn man  $v_0$  in  $\text{km h}^{-1}$  misst statt in  $\text{m s}^{-1}$ ?

# Rel. Konditionszahlen bei Einheitenwechsel

- 1 Wie ändern sich die relativen partiellen Konditionszahlen

$$\left[ 50 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{10 \text{ s}}{250 \text{ m}} \quad 10 \text{ s} \cdot \frac{0 \text{ m s}^{-1}}{250 \text{ m}} \quad 50 \text{ s}^2 \cdot \frac{5 \text{ m s}^{-2}}{250 \text{ m}} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wenn man den Funktionswert  $s$  in mm misst statt in m?

- 2 Und was ändert sich, wenn man  $v_0$  in  $\text{km h}^{-1}$  misst statt in  $\text{m s}^{-1}$ ?



# Konditionszahlen von Grundoperationen

Bestätigen Sie die relativen Konditionszahlen aus Lemma 3.9, insbesondere

Operation	$k(x)$
$x_1 + x_2$	$\frac{ x_1  +  x_2 }{ x_1 + x_2 }$
$x_1 \cdot x_2$	2
$\frac{x_1}{x_2}$	2

# Bedeutung der Kondition

Wir wollen die Zahlen

$$x_1 = 1.234\,568\,9?$$

$$x_2 = 1.234\,567\,8?,$$

subtrahieren, wobei das ? für eine Unsicherheit in der 9. Dezimalziffer steht.

- 1 Welche absolute bzw. relative Genauigkeit hat das Ergebnis bei einer Störung von  $\Delta x_1 = 10^{-8}$ ?
- 2 Wie hängt das mit der absoluten und relativen Kondition der Aufgabe  $x_1 - x_2$  zusammen?

[aus Bornemann, 2018, S.44]

# Kondition des Skalarprodukts

Bestimmen Sie die relative Konditionszahl der Berechnung des Innenprodukts  $x^T y$  von zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

# Kondition von Gleichungssystemen

Wie groß ist die Konditionszahl der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{für kleine } \varepsilon > 0,$$

und wie wirkt sich diese auf die Lösung der Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

aus?

# Einstellung der Wassertemperatur

Wir wollen eine angenehme Wassertemperatur von etwa  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$  aus **Kaltwasser** ( $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) und **Heißwasser** ( $65\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) mischen.



Bild: stevepb, Pixnio

- 1 Welche Regler (**kalt** oder **warm**) eignet sich besser für die Feinjustierung der Temperatur?
- 2 Was hat das mit partiellen Konditionszahlen zu tun?