Übung I - 6

Ausgabedatum: 17. November 2025
Abgabedatum: 24. November 2025

Übungsaufgabe I-6.1. (Homomorphismen)

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Homomorphismen, Endomorphismen, Isomorphismen bzw. Automorphismen sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $f\colon (\mathbb{R}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq 2^x$

(ii) $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $f(x) \coloneqq 2^x$

(iii) $f\colon (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cup) \to (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cap)$, $f(A) \coloneqq \mathbb{Z} \setminus A$

(iv) $f\colon (\mathbb{N}, \max(\cdot,\cdot)) \to (\mathbb{N}, +)$, $f(n) \coloneqq 2\,n$

(b) Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei isomorphe Gruppen. Zeigen Sie, dass $(G_1, \star)$ genau dann abelsch ist, wenn $(G_2, \square)$ abelsch ist.

Übungsaufgabe I-6.2. (Kern und Bild)

(a) Bestimmen Sie Kern und Bild der Gruppenhomomorphismen in Übungsaufgabe I-6.1 Teilaufgabe (a).

(b) Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ endliche Gruppen. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Gruppen $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ sind genau dann isomorph, wenn ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$ mit trivialem Kern existiert.

Übungsaufgabe I-6.3. (Normalteiler und Faktorgruppe)

(a) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z} / m\,\mathbb{Z}$ mit $\tilde{\cdot}$ definiert durch $[a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b] \coloneqq [a \cdot b]$ ein kommutatives Monoid mit neutralem Element $[1]$ ergibt, welches isomorph zu dem kommutativen Monoid $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$ aus Beispiel 7.22 ist.

Beachte: Mit der Menge $\mathbb{Z} / m\,\mathbb{Z}$ ist die Faktormenge des Normalteilers $(m\mathbb{Z}, +)$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ gemeint. Diese Faktormenge stimmt mit den Restklassen in $\mathbb{Z} / \overset{m}{\equiv} = \{\{a + m\mathbb{Z}\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ überein. Auf dieser Menge soll jetzt statt der Faktorverknüpfung $\tilde{+}$ (siehe Beispiel 8.23 im Skript) das $\tilde{\cdot}$ untersucht werden.

(b) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Zeigen Sie die Aussage von Bemerkung 8.24 im Skript, also dass die Normalteiler von $(G, \star)$ genau die Kerne geeigneter Homomorphismen sind.

(c) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Zeigen Sie Lemma 8.20, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(N_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Normalteilern von $(G, \star)$, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} N_i$ ein Normalteiler von G.

(ii) Ist $\mathcal{N}$ eine nichtleere Menge von Normalteilern von $(G, \star)$, dann ist auch $\bigcap \mathcal{N}$ ein Normalteiler von $(G, \star)$.

Übungsaufgabe I-6.4. (Homomorphiesatz für Gruppen)

Geben Sie einen Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ nach $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ an, so dass der Homomorphiesatz Ihnen die Isomorphie von $\mathbb{Z}_{12} \,/\, 3\mathbb{Z}_{12}$ und $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ liefert.

Hausaufgabe I-6.1 (Homomorphismen) 3.5 + 1.5 = 5 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Homomorphismen, Endomorphismen, Isomorphismen bzw. Automorphismen sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $f\colon (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq \ln(x)$

(ii) $f\colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq 3x + 1$

(iii) $f\colon (\mathbb{Z}_2, +_2) \to (\{\top, \bot\}, \mathrm{XOR})$, $f(z) \coloneqq (x > 0)$

(iv) $f\colon (S_3, \circ) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$, $f(\sigma) \coloneqq [0, -\operatorname{sgn}(\sigma)]$

(b) Es seien $f\colon G_1 \to G_2$ und $g\colon G_2 \to G_3$ (Halbgruppen-, Monoid-, Gruppen-)isomorphismen von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$ bzw. von $(G_2, \square)$ nach $(G_3, \bullet)$. Zeigen Sie, dass dann auch f^{-1} und $g \circ f$ ein solcher Isomorphismus von $(G_2, \square)$ nach $(G_1, \star)$ bzw. von $(G_1, \star)$ nach $(G_3, \bullet)$ sind.

Hausaufgabe I-6.2 (Kern und Bild) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Bestimmen Sie Kern und Bild der Gruppenhomomorphismen in Hausaufgabe I-6.1 Teilaufgabe (a).

(b) Es seien $f\colon G_1 \to G_2$ und $g\colon G_2 \to G_3$ Gruppenhomomorphismen. Bestimmen Sie $\operatorname{Bild}(g \circ f)$ und $\operatorname{Kern}(g \circ f)$ in Abhängigkeit der Kerne und Bilder von g und f.

Hausaufgabe I-6.3 (Normalteiler und Faktorgruppe) 2 + 1 + 1 + 3 = 7 Punkte

(a) Bestimmen Sie für den Normalteiler $(\mathbb{Z}, +)$ in der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ die Elemente von $(\mathbb{R} / \mathbb{Z}, \tilde{+})$ mit endlicher Ordnung.

(b) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe, $E \subseteq G$ mit $\langle E \rangle = G$ und $(N, \star)$ eine Untergruppe von $(G, \star)$. Zeigen Sie, dass N genau dann ein Normalteiler von $(G, \star)$ ist, wenn $a \star N = N \star a$ für alle $a \in E$ gilt.

(c) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N_1, \star)$ und $(N_2, \star)$ zwei ihrer Normalteiler mit $N_1 \subseteq N_2$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(G / N_2, \tilde{\star})$ eine Untergruppe von $(G / N_1, \tilde{\star})$ ist.

(d) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ einer ihrer Normalteiler. Zeigen Sie, dass G / N genau dann abelsch ist, wenn N die Kommutatorgruppe $K(G) \coloneqq \langle \{a \star b \star a' \star b' \mid a, b \in G\} \rangle$ enthält.

Hausaufgabe I-6.4 (Homomorphiesatz für Gruppen) 3 + 1 = 4 Punkte

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei Gruppen und G_1 endlich. Zeigen Sie:

(a) Ist auch G_2 endlich und $\#G_1$ und $\#G_2$ teilerfremd, dann existiert zwischen $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ nur der triviale Gruppenhomomorphismus.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Lagrange (Satz 7.60 im Skript).

(b) Ist $\#G_1$ eine Primzahl, dann ist jeder Gruppenhomomorphismus von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$ trivial oder injektiv.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.