Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Semestrul 2

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

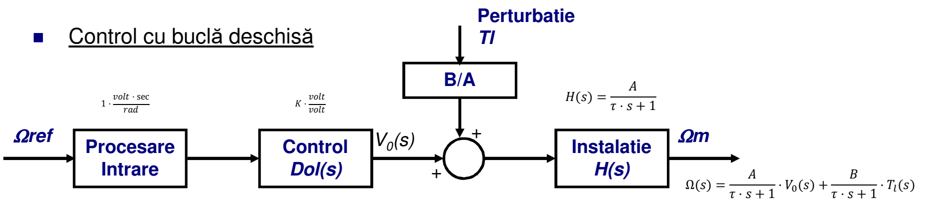
- Modul 09 = Caracteristicile unui control cu reacție
- Modul 10 = Control clasic P, I, D
- Modul 11 = Urmărirea unei referințe variabile.
- Modul 12 = Control digital. Efectele digitizării.

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

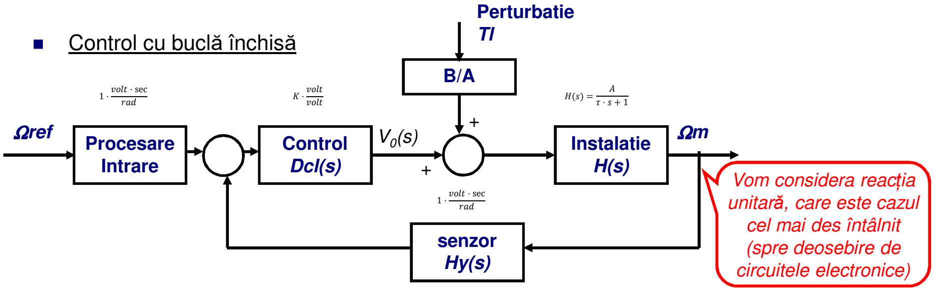
- Modul 09 = Caracteristicile unui control cu reacție

Reprezentarea cu scheme bloc a sistemelor dinamice

- Exemplu simplificat de control al vitezei unui sistem în mișcare caracterizat de o funcție de transfer cu un pol și reacție printr-un câștig constant (proporțional).
- Control cu buclă deschisă



- Control cu buclă închisă



Reprezentarea cu scheme bloc – Funcția de transfer intrare-ieșire

- Control în buclă deschisă

$$\Omega ref \longrightarrow \boxed{H_{ol}(s) = \frac{\Omega_m}{\Omega_{ref}} = K_{ol} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}} \longrightarrow \Omega m$$

  - Câștigul controlului în buclă deschisă se calculează pentru perturbație T_l=0, la s=0

$$K_{ol} = \frac{1}{A}$$

- Control în buclă închisă

$$\Omega ref \longrightarrow \boxed{H_{cl}(s) = \frac{\Omega_m}{\Omega_{ref}} = \frac{K_{cl} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}}{1 + K_{cl} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}}} \longrightarrow \Omega m$$

  - Câștigul controlului în buclă închisă se calculează pentru T_l=0, la s=0, deci este unitar pentru $K_{cl} \uparrow \Rightarrow A \cdot K_{cl} \rangle\rangle 1$

Efectul reacției asupra - rejectiei unei perturbații

- *Cât de bine menține sistemul o referință în prezența unei perturbații în sistemul controlat?* (în exemplu: perturbația de cuplu de sarcină Tl la o acționare cu motor electric)
  - Calculele anterioare au fost facute cu Tl = 0.
  - Să vedem ce se întâmplă dacă avem Tl ≠ 0.

$$\Omega(s) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot V_0(s) + \frac{B}{\tau \cdot s + 1} \cdot T_l(s)$$

  - Buclă deschisă, regim staționar

$$v_{ss} = v_{ref} + B \cdot T_l$$

  - Buclă închisă, regim staționar $\quad v_{ss} = \frac{A \cdot K_{cl}}{1 + A \cdot K_{cl}} \cdot v_{ref} + \boxed{\frac{B}{1 + A \cdot K_{cl}}} \cdot T_l$

    - Cu proiectarea anterioară, $K_{cl} \uparrow \rightarrow AK_{cl} >> 1$
    - Dacă (*în plus*), $AK_{cl} >> B$

$$v_{ss} - v_{ref} \sim 0$$

Concluzie – Eroarea sistemului la o perturbație constantă poate fi redusă cu un factor de ***1+AKcl*** în buclă închisă față de cazul buclei deschise.

Efectul reacției asupra – sensibilității sistemului la variația parametrilor din modelul sistemului controlat (1)

- Variația parametrilor (cauze)
  - Diferite componente ale sistemului pot avea parametri variabili în timp îndelungat, depinzănd de mediul extern (cum ar fi temperatura, îmbătrânirea componentelor),
  - Datele originale din model pot fi ușor eronate.
- Vom studia efectul unor astfel de variații asupra câștigului funcției de transfer, la *s=0*.

$A \to A + \delta A$

$$\frac{\delta H_{ol}}{H_{ol}} = (coeficient\_de\_sensibilitate) \cdot \frac{\delta A}{A} = S \cdot \frac{\delta A}{A}$$

  - **Buclă deschisă**

$$K_{ol} \cdot A \to K_{ol} \cdot (A + \delta A) = K_{ol} \cdot A + K_{ol} \cdot \delta A \Rightarrow \frac{\delta H_{ol}}{H_{ol}} = \frac{\delta A}{A} \Rightarrow S = 1$$

    - Exemplu = O variație de 10% în modelul sarcinii ("*plant*"), produce o eroare de 10% în transferul intrare-ieșire.
  - **Buclă închisă (sistem cu reacție):**

$$S = \frac{\frac{\delta H_{cl}}{H_{cl}}}{\frac{\delta A}{A}} = \frac{A}{\frac{A \cdot K_{cl}}{1 + A \cdot K_{cl}}} \cdot \left(\frac{dH_{cl}}{dA}\right) = \frac{A}{\frac{A \cdot K_{cl}}{1 + A \cdot K_{cl}}} \cdot \frac{(1 + A \cdot K_{cl}) \cdot K_{cl} - K_{cl} \cdot A \cdot K_{cl}}{(1 + A \cdot K_{cl})^2} = \frac{1}{1 + A \cdot K_{cl}}$$

Concluzie – Variația câștigului sistemului în buclă închisă la ***s=0*** este mai puțin sensibilă la variații ale parametrilor, cu un factor de ***1+AK*** față de cazul buclei deschise.

Efectul reacției asupra – Sensibilității sistemului la variația parametrilor din modelul sistemului controlat (2)

Observație pentru perturbații sinusoidale

- Rezultate similare se obțin dacă perturbațiile de sarcină sau de model sunt sinusoidale în locul unor valori constante.
- Această observație se poate extinde și la alte semnale complexe, ce pot fi descompuse într-o sumă de semnale sinusoidale.

Efectul reacției asupra - Răspunsului în timp al sistemelor

- Deoarece sistemele sunt caracterizate de proprietăți dinamice, modul în care sunt urmărite referințele variabile este important.
  - Funcția de transfer pentru control în buclă deschisă

$$H_{ol}(s) = \frac{\Omega_m}{\Omega_{ref}} = K_{ol} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}$$

    - Se observă constanta de timp τ
  - Funcția de transfer pentru control în buclă închisă

$$H_{cl}(s) = \frac{\Omega_m}{\Omega_{ref}} = \frac{K_{cl} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}}{1 + K_{cl} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}} = \frac{K_{cl} \cdot A}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A}$$

    - Noua constantă de timp este $\boxed{\tau_{cl} = \frac{\tau}{1 + A \cdot K_{cl}}}$
  - **Observații**
    - Sistemele de control în buclă închisă au un ***răspuns mai rapid***, cu atât mai rapid cu cât crește câștigul pe bucla de reacție.
    - La sistemele de ordin mare, ***creșterea câștigului pe bucla de reacție reduce amortizarea***, și poate produce oscilații neamortizate.
    - Proiectarea rezolvă conflictul dintre viteza de răspuns mare și stabilitate.

Concluzie = Sistemele de control cu reacție pot face sistemul mai rapid și mai puțin stabil.

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (1)

- Să considerăm pentru început, cazul general al unei funcții cu variație în timp *y(t)*.
- Sensibilitatea acestei funcții față de variația unui parametru de interes θ

$$y(t, \theta + \delta\theta) = y(t, \theta) + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \delta\theta + \ldots \Rightarrow \delta y = \left[\frac{\partial y}{\partial \theta}\right] \cdot \delta\theta$$

- Să revenim la exemplul simplificat, și să explorăm sensibilitatea răspunsului în timp (la semnal treaptă) la variația câștigului în buclă închisă K_{cl}.
  - Funcția Laplace pentru semnalul de ieșire la aplicarea unei trepte

$$Y(s) = H_{cl}(s) \cdot R(s) = \frac{K_{cl} \cdot A}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A} \cdot R(s) = \frac{K_{cl} \cdot A}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A} \cdot \frac{1}{s} = \left(\frac{-K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A}\right) \cdot \left(\frac{\tau}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A} - \frac{1}{s}\right)$$

  - Cu echivalentul în domeniul timp

$$y(t) = \left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A}\right)\left(1 - e^{-\frac{1 + K_{cl} \cdot A}{\tau} t}\right)$$

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (2)

- De pe pagina precedentă

$$y(t) = \left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A}\right)\left(1 - e^{-\frac{1+K_{cl}\cdot A}{\tau}t}\right)$$

- Derivata parțială pentru studiul sensibilității

$$\frac{\partial y}{\partial K_{cl}} = \left(\frac{A}{(1 + K_{cl} \cdot A)^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{1+K_{cl}\cdot A}{\tau}t}\right) + \left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A}\right)\left(\left(\frac{A}{\tau} \cdot t\right) e^{-\frac{1+K_{cl}\cdot A}{\tau}t}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial K_{cl}} = \left(\frac{1}{(1 + K_{cl} \cdot A)}\right)\left(\frac{y}{K_{cl}}\right) + \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A}\right)\left(1 - \frac{y}{\left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A}\right)}\right) = \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A}\right) + \left(\frac{1}{1 + K_{cl} \cdot A} - \frac{AK_{cl}}{\tau} \cdot t\right) \cdot \left(\frac{y}{K_{cl}}\right)$$

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (3)

$$\frac{\partial y}{\partial K_{cl}} = \left(\frac{1}{(1 + K_{cl} \cdot A)}\right)\left(\frac{y}{K_{cl}}\right) + \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A}\right)\left(1 - \frac{y}{\left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A}\right)}\right) = \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A}\right) + \left(\frac{1}{1 + K_{cl} \cdot A} - \frac{AK_{cl}}{\tau} \cdot t\right) \cdot \left(\frac{y}{K_{cl}}\right)$$

Considerând

$$K_{cl} \uparrow \Rightarrow A \cdot K_{cl} \rangle\rangle 1$$

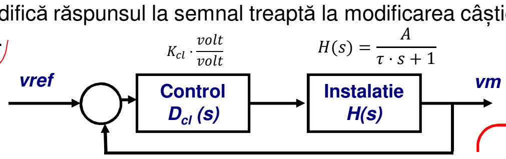
se obține:

$$\frac{\partial y}{\partial K_{cl}} \approx \left(\frac{A}{\tau} \cdot t\right) + \left(-\frac{A}{\tau} \cdot t\right) \cdot (y(t)) \Rightarrow y^*(t) = y(t) + \left[\left(\frac{A}{\tau} \cdot t\right) + \left(-\frac{A}{\tau} \cdot t\right) \cdot (y(t))\right] \cdot \delta K_{cl}$$
$$= y(t) + \left[\frac{A}{\tau} \cdot (1 - y(t)) \cdot \delta K_{cl}\right] \cdot t$$

$$y^*(t) = y(t) + \left[\frac{A}{\tau} \cdot (1 - y(t)) \cdot \delta K_{cl}\right] \cdot t$$

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (4)

- Observați cum se modifică răspunsul la semnal treaptă la modificarea câștigului pe buclă închisă cu 10%.

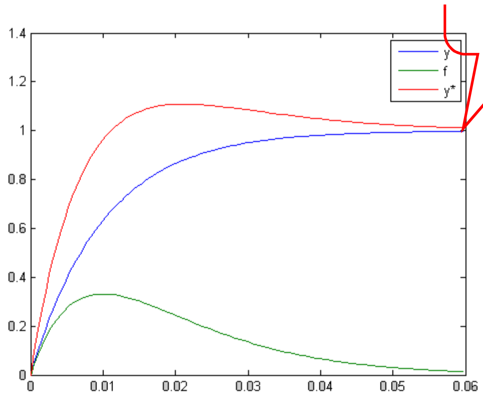


Aprox. același pol

$$\tau_{cl} = \frac{\tau}{1 + A \cdot K_{cl}} \approx \frac{\tau}{1 + A \cdot 0.9 \cdot K_{cl}}$$

același timp de stabilizare "t_s"

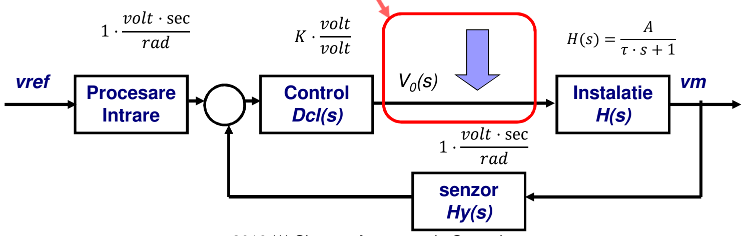
```
clear;
A=1;         % rad/volt*sec
tau=0.01;  % sec
Kcl=9;
dKcl=0.9;

Hol=tf(A,[tau 1]);
[y,t]=step(Hol);
sz=size(t);
for i=1:sz
   f(i)=((A*dKcl/tau)*t(i)) * (1-y(i));
end
plot(t,[y f' y+f']);
legend('y', 'f', 'y*');
```



Efortul de control (1)

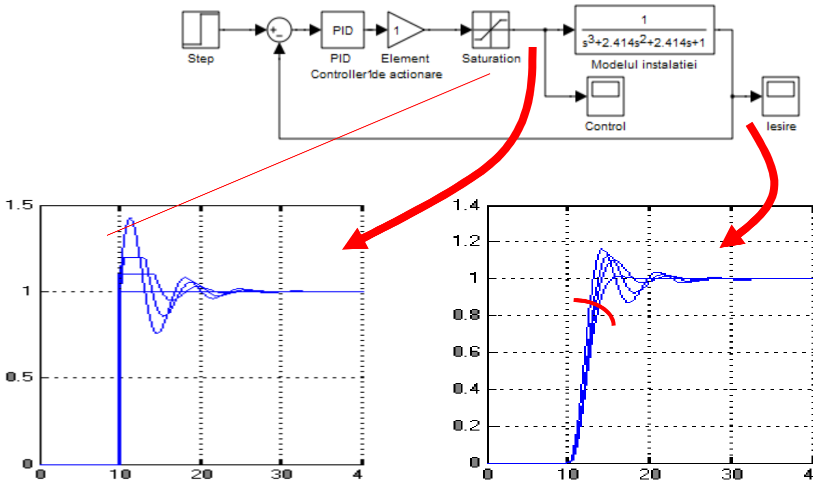
- Se introduce un termen nou, foarte legat de implementarea practică.
  - ***Efortul de control*** este mărimea aplicată instalației ca urmare a legii de control.
  - Proiectantul trebuie să se întrebe - *Poate sistemul fizic genera efortul de control aşteptat de proiectant? Sistemele fizice sunt de putere limitată şi efortul de control poate fi sub cel aşteptat (puterea motorului unui autoturism, debitul de gaz într-o centrală termică, s.a.m.d.)*
  - Cum variază efortul de control pe durata funcţionării?
    - La erori mari, *efortul de control* va fi mare.
    - La erori mici, *efortul de control* va fi redus.

- In exemplul de control al vitezei, "*cruise control*", ***efortul de control*** va fi forţa motorului aplicată la un moment dat pentru schimbarea vitezei.
  - Limitarea puterii motorului va introduce erori mai mari ale controlului.
  - Un vehicol cu un motor de 600CP va răspunde mai ferm decât un motor de 55CP.



Efortul de control (2) = Exemplu numeric

Limitarea efortului de control produce răspuns mai lent:



Efortul de control limitat la 2.0; 1,2; 1,1; 1.0

Semnalul de ieșire ca răspuns la semnal treaptă

Observații finale

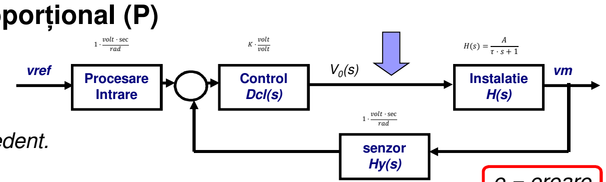
- Spre deosebire de controlul în buclă deschisă, sistemele de control cu reacție pot fi utilizate pentru
  - reducerea erorii staționare la diverse perturbații,
  - reducerea dependenței funcției de transfer la variația parametrilor,
  - îmbunătățirea regimului tranzitoriu,
  - reducerea dependenței semnalului dinamic de ieșire la variația parametrilor.
- Creșterea câștigului buclei de reacție îmbunătățește viteza răspunsului, dar poate crea probleme de stabilitate.

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 10 = Control clasic P, I, D

Control cu câștig proporțional (P)

Corespunde exemplului
și analizei din modulul precedent.



e = eroare

- Ieșirea sistemului de control poate fi caracterizată de relația $u = K_p * e$
- Un astfel de sistem are o eroare staționară nenulă (*"offset" față de referința constantă*), care scade cu creșterea câștigului K_p.

- Am văzut că sistemele de ordinul întâi sunt stabile întotdeauna.
- Pentru sisteme de ordin superior, controlul proporțional poate conduce la instabilitate și există întotdeauna o valoare pentru câștigul K_p de la care avem instabilitate.
  - Dar ... o valoare redusă a lui K_p poate produce o valoare ridicată a erorii staționare și un răspuns tranzitoriu nesatisfăcător.

- Soluția standard pentru reducerea erorii staționare este adăugarea unei componente integrale (***Control P-I***).

Observație: - Rețelele de reacție studiate în acest capitol și proiectarea lor fac parte din ***controlul clasic***, care și-a găsit succesul în automatizarea unor procese industriale, în special în industria chimică.

Control cu câștig proporțional-integrator PI (1)

- Ieșirea modulului de control va produce semnalul (exprimare în domeniul timp)

$$u(t) = k_p \cdot e + k_I \cdot \int_{t_o}^{t} e(\tau)\,d\tau$$

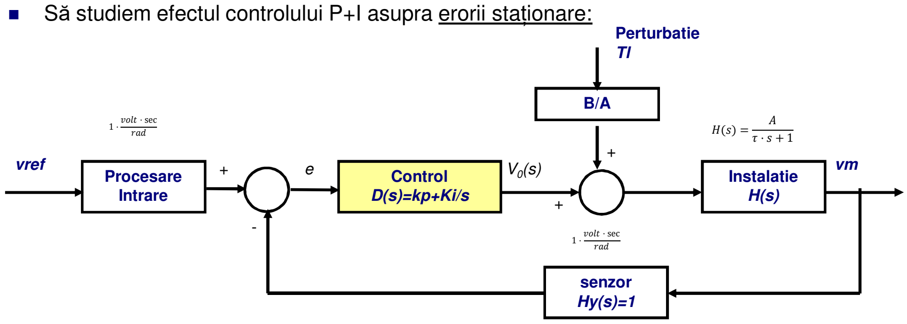
e = eroare

- Termenul de integrală poate fi privit ca o sumare a tuturor valorilor anterioare ale erorii.
  - Aceasta înseamnă că o perturbație constantă poate fi anihilată de termenul de integrare chiar dacă eroarea este zero.
- Funcția de transfer a controlului devine:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_I}{s}$$

Control cu câștig proporțional-integrator PI (2)

- Să studiem efectul controlului P+I asupra erorii staționare:



$$v_m = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(V_0 + \frac{B}{A} \cdot T_l\right) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(\left(k_p + \frac{k_I}{s}\right) \cdot (v_{ref} - v_m) + \frac{B}{A} \cdot T_l\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot \left(k_p + \frac{k_I}{s}\right) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot T_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \cdot (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot (s \cdot k_p + k_I) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot s \cdot T_l$$

$$v_m = \frac{A \cdot (s \cdot k_p + k_I)}{\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot v_{ref} + \frac{B \cdot s}{\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot T_l$$

Control cu câștig proporțional-integrator PI (3)

- Calculăm <u>eroarea staționară</u> la semnal treaptă, prin ***Teorema valorii finale***
  - Considerăm $v_{ref} = 0$ *(pentru a izola eroarea staționară)*, $T_l = T_o/s$ *(semnal treaptă).*

$$v_m = \frac{A\cdot(s\cdot k_p + k_I)}{\tau\cdot s^2 + (A\cdot k_p + 1)\cdot s + A\cdot k_I}\cdot v_{ref} + \frac{B\cdot s}{\tau\cdot s^2 + (A\cdot k_p + 1)\cdot s + A\cdot k_I}\cdot T_l$$

$$\lim_{t\to\infty} V_m(t) = \lim_{s\to 0}(s\cdot v_m(s)) = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{B\cdot s}{\tau\cdot s^2 + (A\cdot k_p + 1)\cdot s + A\cdot k_I}\cdot\frac{T_o}{s}\right] = 0$$

  - Deci valoarea finală la aplicarea unei perturbații ca semnal treaptă va fi nulă.

- Calcularea <u>erorii staționare</u> prin ***s=0*** pentru semnale de intrare constante.
  - Se obține $v_m = v_{ref}$, care implică o eroare staționară nulă independent de valoarea câștigului ***A*** sau de câștigurile ***kp*** si ***ki*** ale controlului (cu condiția ca ***ki*** să fie nenul).

- Deoarece legea de control conține un termen în "***s***", controlul va <u>modifica dinamica sistemului</u> într-un mod mai profund decât simpla modificare a câștigului în cazul controlului proporțional.
  - Rădăcinile ecuației caracteristice: $\tau\cdot s^2 + (A\cdot k_p + 1)\cdot s + A\cdot k_I = 0$

  depind de proiectarea controlului, și pot conduce la răspuns necorespunzător.

Control cu câștig proporțional-integrator-derivativ PID (1)

- Ieșirea blocului de control va produce semnalul

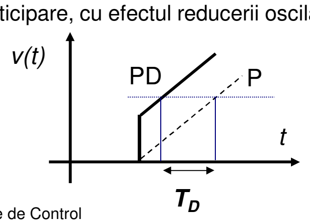
$$u(t) = k_p\cdot e(t) + k_I\cdot\int_{t_o}^{t} e(\tau)\,d\tau + k_D\cdot\frac{de(t)}{dt}$$

- Funcția de transfer

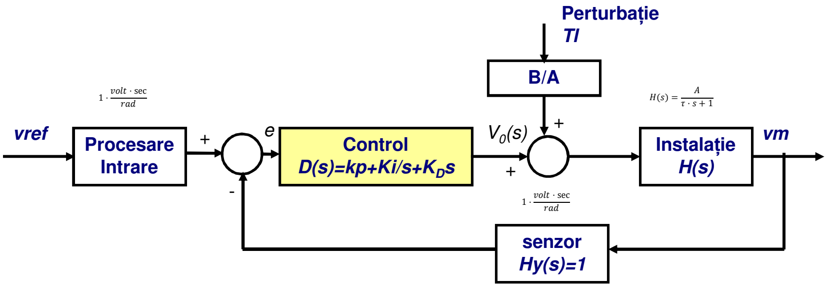
$$\frac{U(s)}{E(s)} = \underbrace{k_p + \frac{k_I}{s} + k_D\cdot s}_{\text{Forma paralelă}} = \underbrace{k_P\cdot\left(1 + \frac{1}{T_I\cdot s} + T_D\cdot s\right)}_{\text{Forma standard}}$$

- Forma a doua este folosită în reglarea proceselor de control industriale, unde constanta de resetare (T_I) și cea de derivare (T_D) capătă pentru operator un sens fizic, de constante de timp, exprimate în secunde.

- Sensul componentei derivative este acela de anticipare, cu efectul reducerii oscilațiilor.



Control cu câștig proporțional-integrator-derivativ PID (2)



$$v_m = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(V_0 + \frac{B}{A} \cdot T_l\right) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(\left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s\right) \cdot (v_{ref} - v_m) + \frac{B}{A} \cdot T_l\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s\right) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot T_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \cdot (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot (k_D \cdot s^2 + s \cdot k_p + k_I) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot s \cdot T_l$$

$$v_m = \frac{A \cdot (s^2 \cdot k_D + s \cdot k_p + k_I)}{(\tau + A \cdot k_D) \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot v_{ref} + \frac{B \cdot s}{(\tau + A \cdot k_D) \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot T_l$$

Efectul termenului derivativ este mai important în sisteme de ordin superior.

Efectul controlului PID

- Creșterea controlului proporțional reduce eroarea staționară, dar pune în pericol stabilitatea sistemului.
- Componența integrală se folosește pentru reducerea erorii staționare.
- Componenta derivativă îmbunătățește atenuarea ("*damping*") sistemului de control și îmbunătățește stabilitatea.
- Cele trei componente formează controlul PID clasic.

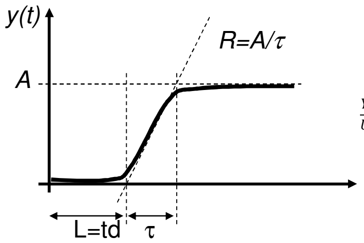
	Timp de creștere	*Supraregiare*	*Timp de stabilizare*	*Eroare staționară*
Kp crește	*scade*	*crește*	*crește puțin*	*scade*
Ki crește	*scade puțin*	*crește*	*crește*	*eliminată*
Kd crește	*scade puțin*	*scade*	*scade*	*schimbare*

Ajustarea controlului prin metoda Ziegler-Nichols (1)

- Există metode de proiectare pe calculator (în domeniul timp) pentru satisfacerea condițiilor de eroare staționară și răspuns tranzitoriu, fie pentru urmărirea unei referințe, fie pentru eliminarea unei perturbații.
  - Se bazează pe disponibilitatea unui model precis al sistemului controlat.
- Vom analiza mai târziu metode de proiectare în domeniul frecvență.

- Vom prezenta aici o metodă simplificată, parte din controlul clasic (1942), <u>bazată pe simple experimente</u> cu rezultate în domeniul timp.

<u>Criteriul 1:</u> Răspunsul multor sisteme la un semnal treaptă la intrare este ca cel din figură:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A \cdot e^{-st_d}}{\tau \cdot s + 1}$$

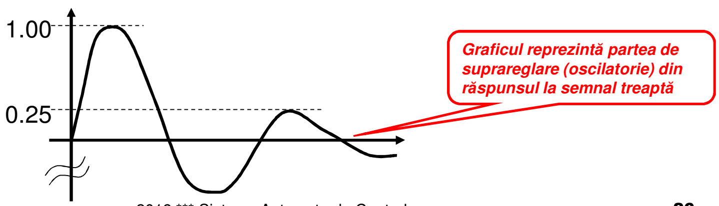
- Constantele din funcția de transfer aproximativă se pot determina din figură, pentru sistemul în buclă deschisă.

Ajustarea controlului prin metoda Ziegler-Nichols (2)

- **<u>Criteriul 1</u>**: După determinarea constantelor ***R*** și ***L*** din răspunsul la semnal treaptă al sistemului în buclă deschisă, se proiectează un control cu coeficienții din tabel...

Control	Coeficienti din legea de control
Proportional (P)	$k_P = \dfrac{1}{R \cdot L}$
Proportional-Integral (PI)	$\begin{cases} k_P = \dfrac{0.9}{R \cdot L} \\ T_I = \dfrac{L}{0.3} \end{cases}$
Proportional-Integral-Derivativ (PID)	$\begin{cases} k_P = \dfrac{1.2}{R \cdot L} \\ T_I = 2 \cdot L \\ T_D = 0.5 \cdot L \end{cases}$

- ... pentru a garanta un răspuns în buclă închisă cu o rată de amortizare de 25% (al doilea vârf).



Ajustarea controlului prin metoda Ziegler-Nichols (3)

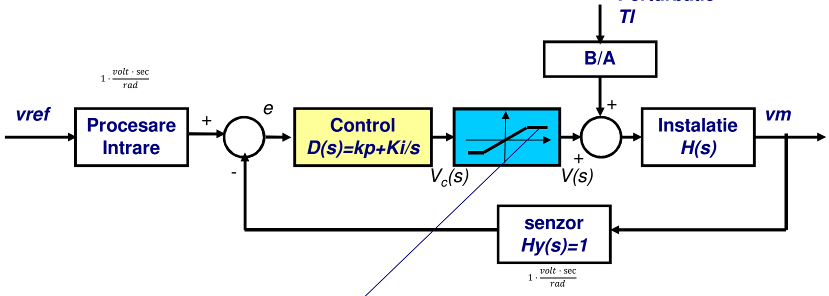
- <u>**Criteriul 2**</u>: Acordarea la limita de stabilitate ("*ultimate sensitivity method*") constă în evaluarea amplitudinii și frecvenței oscilațiilor la limita de stabilitate.
  - Se închide bucla de reacție.
  - Se crește câștigul proporțional până apar oscilații la ieșirea sistemului.
  - Se determină k_u ("*ultimate gain*") și P_u ("*ultimate period*").

Control	Coeficienti din legea de control
Proportional (P)	$k_P = 0.5 \cdot K_u$
Proportional-Integral (PI)	$\begin{cases} k_P = 0.45 \cdot K_u \\ T_I = \dfrac{P_u}{1.2} \end{cases}$
Proportional-Integral-Derivativ (PID)	$\begin{cases} k_P = 0.6 \cdot K_u \\ T_I = \dfrac{1}{2} \cdot P_u \\ T_D = \dfrac{1}{8} \cdot P_u \end{cases}$

- <u>Observație</u>: - In multe cazuri practice, ***kp*** trebuie redus (față de aceste rezultate) pentru a reduce suprareglarea ("*overshoot*").

Saturarea ieșirii circuitului de control ="*integrator anti-windup*" (1)

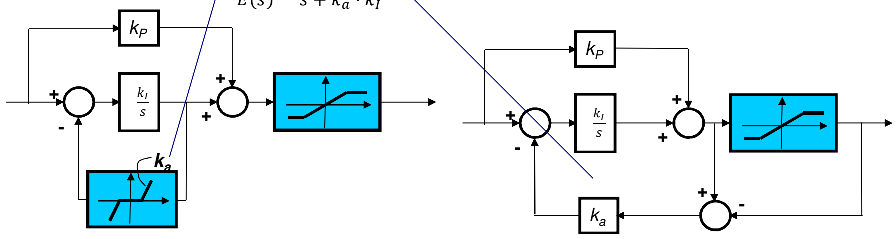
- In realitate, regimul dinamic al oricarui circuit de control este limitat, ceea ce înseamnă că ieșirea controlului se poate satura.
- Această limită poate fi ***+/-15V*** la amplificatoare operaționale sau lărgimea *bus*-ului de date (8,16 biți la microcontrolere).



- Semnalul ***V(s)*** este limitat la V_{max} (sau $-V_{max}$), integratorul continuă să răspundă la eroare și să crească semnalul $V_c(s)$.
  - La ieșirea sistemului din saturație, este nevoie de o eroare negativă imensă pentru a reduce semnalul V_c la valori mai mici decât V_{max}.
    - Altfel, saturația la V_{max} se menține pentru mult timp și controlul sistemului este pierdut.

Saturarea ieșirii circuitului de control =“*integrator anti-windup*” (*2*)

- Soluția (“***integrator anti-windup***”) constă în întreruperea acțiunii de integrare la saturarea circuitului de control.
  - In controlul digital => “*if v=Vmax, Ki=0*”
  - In control analog (sau ca metode de principiu), se poate folosi una dintre configurațiile din figură.
    - Coeficientul k_a se alege destul de mare pentru ca intrarea în circuitul de control să rămână mică la orice valoare a semnalului de eroare.
    - Pe durata în care circuitul de desaturare (“*anti-windup*”) este activ, întregul control se manifestă ca o întârziere (“*lag*”), care poate fi descrisă de legea de control: $\frac{V_c(s)}{E(s)} = \frac{k_P \cdot s + k_I}{s + k_a \cdot k_I}$

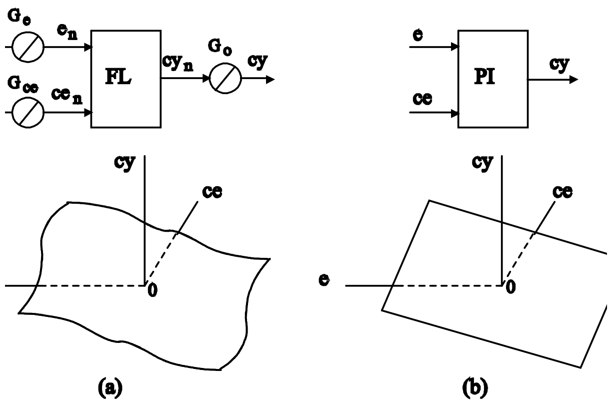


Observații finale

- Sistemele de control cu reacție se folosesc pentru
  - Reducerea erorii staționare la perturbații,
  - Reducerea sensibilității funcției de transfer la variația parametrilor,
  - Îmbunătățirea regimului tranzitoriu,
  - Reducerea sensibilității ieșirii sistemului de control la variația parametrilor din sistemul controlat.
- Creșterea controlului proporțional reduce eroarea staționară, dar pune în pericol stabilitatea sistemului.
  - Componența integrală se folosește pentru reducerea erorii staționare.
  - Componenta derivativă îmbunătățește atenuarea (“***damping***”) sistemului de control și îmbunătățește stabilitatea.
  - Cele trei componente formează controlul PID clasic.
- Recomandări pentru proiectarea controlului clasic PID au fost date pe baza măsurării performanței sistemului controlat.
- Circuitul de desaturare (“***anti-windup***”) are rolul de a introduce o reacție locală pentru a face sistemul de control stabil atunci când saturația ieșirii se produce în interiorul sistemului principal de control (PID).

Anexă:

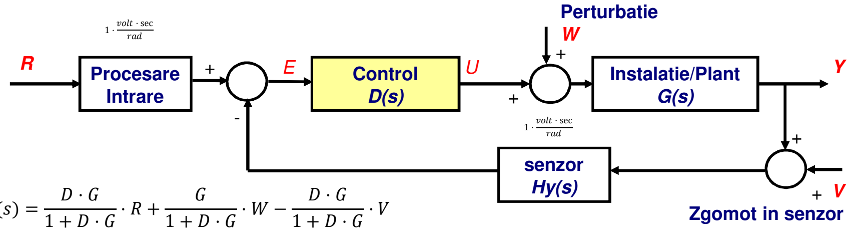
- Majoritatea implementărilor unei metode de control din clasa P-I-D, se fac prin definirea unei “*variații în marimea de ieșire*” (cy) în funcție de eroare (e) și “*variația erorii*” (ce).
- Controlul clasic P-I conduce la o suprafață de control plană (figura b).
- În unele cazuri se poate folosi
  - Control PI neliniar = coeficienții de control Kp, Ki se modifică pe intervale de variație a erorii.
  - Control “*fuzzy logic*” = inferență (interpolare) între puncte ale suprafeței de control pre-definite.



Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 11 = Urmărirea unei referințe variabile.

Recapitularea ecuațiilor unui sistem de control cu reacție



$$Y(s) = \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot R + \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W - \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V$$

$$E(s) = R - \left[\frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot R + \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W - \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V\right] = \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R - \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W + \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V$$

$$= \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R - \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W + \left[1 - \frac{1}{1 + D \cdot G}\right] \cdot V$$

- Scopul unui sistem de control este acela de a menține eroarea mică pentru orice referință și în prezența oricărei perturbații sau zgomot în circuitul de măsură.
  - Vom proiecta funcţia de control ***D(s)*** pentru a atinge acest obiectiv, desi se pot face și schimbări sau adaptări în modelul instalației ("*plant*").
  - Pentru proiectarea controlului ***D(s),*** se poate considera că variația referinței ***(R)*** și a perturbațiilor ***(W)*** au loc la frecvențe scazute, iar zgomotul de măsurare ***(V)*** este la frecvențe înalte, în domenii de frecvență diferite.
  - Deci ***[1/(1+DG)]*** trebuie să fie scăzut la frecvențe joase, și aproape de **1** la frecvențe înalte => Comportarea ca un filtru trece-jos a produsului DG.

Urmărirea unei referințe variabile ("*tracking*", 1)

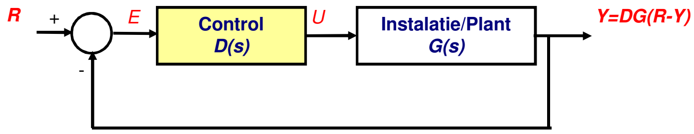
- In multe cazuri, semnalul de intrare (referință) nu este constant.
  - Să presupunem că acest semnal poate fi aproximat cu o funcție cu variație polinomială pentru un interval de timp destul de lung pentru ca sistemul să atingă regim staționar (avem variație polinomială până când suntem în regim staționar).
  - Pentru un sistem dat (instalație, "***plant"***), eroarea va fi zero pentru referințe exprimate ca funcție polinomială de un grad mai mic decât o anumită valoare, și va fi nelimitată pentru funcții polinomiale de grad ridicat.
  - **Vom defini tipul sistemului ca fiind egal cu gradul polinomului utilizat ca referință care produce o eroare finită nenulă.**
- Exemplu – Sistemul de ordin întâi (din ora precedentă) cu modelul sarcinii (instalație, plant)

$$G(s) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1}$$

  - Control proporțional (***P***) produce o eroare finită nenulă (offset) la o referință constantă (*v. modulul 9*)
  - Control integral (***I***) sau ***P+I*** produce o eroare nulă la o referință constantă (*modulul 9*).
  - Control integral (***I***) sau ***P+I*** produce o eroare nenulă finită la o referință cu o variație în rampă (*vom demonstra*)

Urmarirea unei referințe variabile ("*tracking*", 2)

- Vom considera cazul simplificat al unei reacții unitare și vom neglija prezența zgomotului în senzor, și a altor perturbații (*W = V = 0*).



- Eroarea va fi dată de:

$$E(s) = \left[\frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R\right]$$

- Pentru semnale de referință polinomiale, vom considera cazul simplificat:

Semnal treaptă pentru a arăta când începe răspunsul

$$r(t) = t^k \cdot 1(t) \qquad R(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

k = 0 => referință de tip "***poziție***" (*treaptă*)
k = 1 => referință de tip "***viteză***" (*rampă*)
k = 2 => referință de tip "***accelerație***" (*parabolă*)

- Aplicarea **teoremei valorii finale** (*v. modul 05*) conduce la

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s=0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R(s)\right] = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right]$$

Urmărirea unei referințe variabile (*"tracking", 3)*

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s=0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R(s)\right] = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right]$$

Să rescriem funcția de transfer prin punerea în evidență a polilor în origine și a unei alte funcții Laplace ***$G_0(s)$*** pentru care ***$G_0(0)$*** are o valoare finită ***Kn***.

$$DG(s) = \frac{G_0(s)}{s^n}$$

Obținem

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right] = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_0(s)}{s^n}} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right] = \lim_{s \to 0} \left[\frac{s^n}{s^n + K_n} \cdot \frac{1}{s^k}\right] = \begin{cases} 0 \leftarrow n > k \\ \frac{1}{1 + K_0} \leftarrow n = k = 0 \\ \frac{1}{K_n} \leftarrow n = k \neq 0 \\ \infty \leftarrow n < k \end{cases}$$

Exemplu:
Cazul unei funcții de transfer de ordinul întâi, la care aplicăm un semnal treaptă. Am văzut că valoarea finală este diferită pentru orice ***K_o*** din funcția de transfer, ceea ce coincide cu ***n=k=0***.

Urmărirea unei referințe variabile (“*tracking*”, 4)

$$e_{ss} = \begin{cases} 0 \leftarrow n > k \\ \dfrac{1}{1+K_0} \leftarrow n = k = 0 \\ \dfrac{1}{K_n} \leftarrow n = k \neq 0 \\ \infty \leftarrow n < k \end{cases}$$

Calcularea erorilor staţionare
ca o funcție de tipul sistemului:

k=

Câți “1/s” sunt în DG?

n

	Semnal de intrare (“Referinta”)		
	0	1	2
	Treapta (“Pozitie”)	Rampa (“Viteza”)	Parabola (“Acceleratie”)
	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t \cdot 1(t)$	$r(t) = t^2 \cdot 1(t)$
Tipul “0”	$\dfrac{1}{1+K_p}$	∞	∞
Tipul “1”	0	$\dfrac{1}{K_v}$	∞
Tipul “2”	0	0	$\dfrac{1}{K_a}$

Concluzii

- Tipul sistemului este dat de numărul de poli în ***s = 0***.
- In funcție de tipul sistemului, putem estima capabilitatea unui sistem de a urmări semnale de referință cu o variație polinomială.
- Se observă că într-un sistem de control cu reacție unitară, variația parametrilor nu modifică tipul erorii staționare.
- Fără demonstrație: *Pentru orice sistem în buclă închisă, deplasarea polilor catre (–∞) determină creșterea Kp,Kv,Ka și scăderea erorii staționare.*

Urmărirea unei referințe variabile (“*tracking*”, 5)

Cazul general al unei reacții ne-unitare *H(s)*

- Funcția de transfer intrare-ieșire devine

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G} \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G}$$

- Aplicarea **teoremei valorii finale** (v. ora05) conduce la

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s=0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \left(1 - \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G}\right) \cdot R(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \left(1 - \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G}\right) \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right]$$

- Eroarea staționară e_{ss} poate fi
  - O constantă nenulă => sistemul este de tipul k
  - Zero (0)
  - Infinită

Tipul unui sistem în cazul perturbațiilor cu reprezentare polinomială

- Să reluăm ecuația generală

$$Y(s) = \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot R + \boxed{\frac{G}{1 + D \cdot G}} \cdot W - \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V$$

- Am studiat cazul unei referințe ***R*** variabile în timp, cu reprezentare printr-o funcție polinomială.
- Vom efectua o analiză similară pentru cazul unei perturbații variabile în timp ***W***, cu reprezentare printr-o funcție polinomială.
  - Analiza este oarecum identică cu cea precedentă și putem defini tipul unui sistem în privința oricărei variații polinomiale a perturbațiilor.
  - Legatura dintre perturbație și eroare (consider R=0, V=0)

$$T_w(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-Y(s)}{W(s)}$$

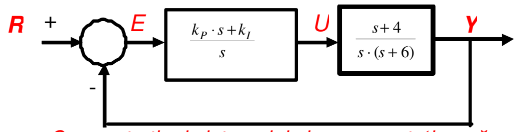
  - Aplicarea **teoremei valorii finale** (*v. modul 05*) conduce la

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s=0}[s \cdot E(s)] = \lim_{s\to 0}[s \cdot T_w(s) \cdot W(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \boxed{\left(s^n \cdot T_{w0}\right)} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right] \leftarrow T_{w0}(0) = \frac{1}{K_{nw}} = cons\tan t$$

- Eroarea staționară e_{ss} la perturbațiile cu reprezentare polinomială de ordin k, poate fi
  - O constantă nenulă => Sistemul este de tipul k când n = k
  - Zero (0) când n > k
  - Infinită când n < k

Exemplu de calculare a erorii staționare

Se consideră sistemul



$$D(s) \cdot G(s) = \frac{k_p \cdot s + k_i}{s} \cdot \frac{s + 4}{s \cdot (s + 6)}$$

(a) *Care este tipul sistemului și eroarea staționară pentru urmarirea unei referințe variabile?*

Sistemul este de tipul 2, eroarea staționară va depinde de semnalul de intrare

- = 0 pentru semnal treapta
- = 0 pentru semnal rampa
- = o constanta (***1/Ka***) pentru semnal parabolic (***1/s²***), adica inversa pentru

$$K_a = \left.\frac{D_o(s)G_o(s)}{}\right|_{s=0} = \left.\frac{(s+4)\cdot(k_p \cdot s + k_I)}{(s+6)}\right|_{s=0} = \frac{4 \cdot k_I}{6} = \frac{2 \cdot k_I}{3}$$

(b) *Care este tipul sistemului și eroarea staționară pentru rejectia unei perturbații?*

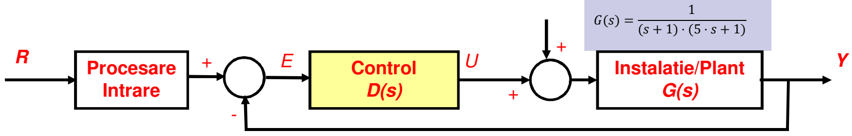
$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s=0}[s \cdot E(s)] = \lim_{s\to 0}[s \cdot T_w(s) \cdot W(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{G(s)}{1 + D(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right]$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[s \cdot \frac{\frac{Go(s)}{s}}{1 + \frac{Do(s)Go(s)}{s^2}} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{\frac{4}{6}}{1 + \frac{\frac{4k_i}{6}}{s^2}} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}\right] = \boxed{\begin{cases} 0, k = 0 \\ 1/k_i, k = 1 \\ \infty, k > 1 \end{cases}}$$

Exemplu de control de tip P, PI, PID (generalizare)

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)\cdot(5\cdot s+1)}$$



Se consideră sistemul cu funcția de transfer a instalației (“***plant***”):

Să se determine tipul sistemului și eroarea staționară pentru semnale de intrare cu variație polinomială, pentru legi de control de tip P, PI, PID, cu $k_P = 19$, $k_I = 0.5$, $k_D = 4/19$.

Soluție

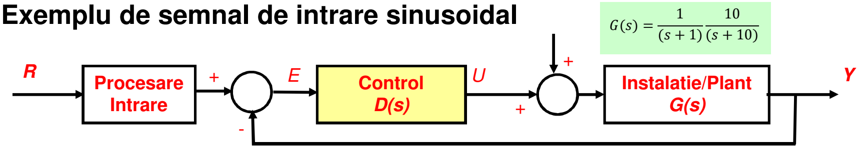
$$D(s)=k_P+\frac{k_I}{s}+k_D\cdot s=\frac{k_D\cdot s^2+k_P\cdot s+k_I}{s}$$

$$D(s)\cdot G(s)=\begin{cases}\dfrac{DG_0(s)}{s}\leftarrow DG_0(0)=k_I=const\,ant\,,PID\\ \dfrac{DG_0(s)}{s}\leftarrow DG_0(0)=k_I=const\,ant\,,PI\\ \dfrac{DG_0(s)}{s^0}\leftarrow DG_0(0)=k_P=const\,ant\,,P\end{cases}$$

		Semnal de intrare (“Referinta”)		
		Treapta (“Pozitie”)	Rampa (“Viteza”)	Parabola (“Acceleratie”)
		$r(t)=1(t)$	$r(t)=t\cdot 1(t)$	$r(t)=t^2\cdot 1(t)$
P	Tipul “0”	$\frac{1}{1+k_p}$	∞	∞
PI, PID	Tipul “1”	0	$\frac{1}{k_I}$	∞

Exemplu de semnal de intrare sinusoidal

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)}\frac{10}{(s+10)}$$

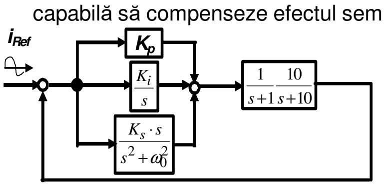


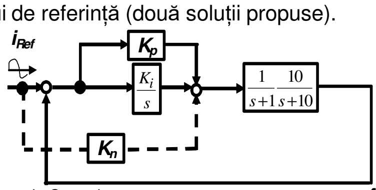
Să se studieze capabilitatea sistemului de a urmări o referință sinusoidală.

Soluție

- Considerăm semnalul de intrare de tipul $i_R = I_R\cdot\cos(\omega_0 t)$ cu transformata Laplace

  $I_R(s)=\dfrac{I_R\cdot s}{s^2+{\omega_0}^2}$ deci $E(s)=\dfrac{I_R(s)}{1+DG(s)}=\dfrac{I_R\cdot s}{s^2+\omega_0^2}\cdot\dfrac{1}{1+DG(s)}$
- Pentru intervale mici de timp, putem considera că sinusoida se aproximează cu un semnal rampă de pantă variabilă.
- Fiecare astfel de semnal rampă va conduce la o eroare staționară dacă sistemul de control este de tip PI (v. problema precedentă). Această eroare va fi ***1/Ki.***
- Pentru a rezolva această problemă, se adaugă o componentă la legea de control, capabilă să compenseze efectul semnalului de referință (două soluții propuse).





Observații finale

- Clasificarea unui sistem ca fiind de ***tipul k,*** definește capabilitatea sistemului de a atinge eroare staționară nulă la semnale de intrare (referințe) definite prin funcții polinomiale de un ordin mai mic decât ***k***.
- Un sistem cu reacție unitară este de ***tipul k*** relativ la semnalul de referință dacă funcția de transfer a sistemului în buclă închisă are ***k*** poli în origine (s=0).
- Erorile staționare pentru diverse sisteme de tipul 0,1, sau 2 la diverse semnale de intrare cu reprezentare polinomială este dată.
- O clasificare și rezultate similare pot fi făcute pentru perturbații.

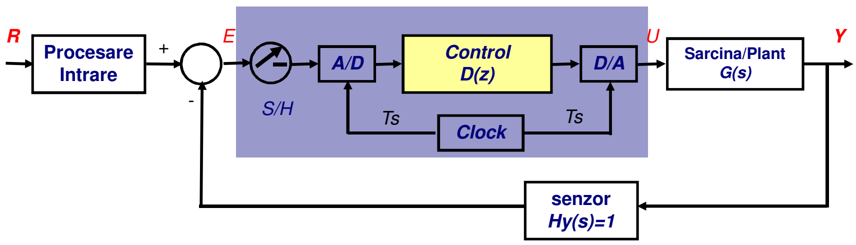
Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 12 = Control digital. Efectele digitizării.

Avantajele controlului digital

- Dezvoltarea platformelor digitale de tip microprocesor, microcontroller, sau FPGA/ASIC recomandă implementarea legilor de control în format digital.
- Legile de control pot fi implementate în hardware sau software.
  - Soluțiile software oferă flexibilitate foarte mare la schimbarea și/sau adaptarea parametrilor sau chiar a legilor de control.
  - Ambele soluții de implementare digitală (HW, SW) oferă posibilitatea integrării unor logici binare, de decizie, privind considerarea mai multor legi de control pe diverse domenii de operare.
- Proiectarea controlului în domeniul digital se poate face prin:
  - Proiectarea în domeniul analog și conversia legilor de control din analog în digital,
  - Prin aplicarea transformatei ***z*** și proiectarea cu această metodă,
  - Prin alte metode specifice controlului digital.

Structura unui sistem de control digital



- Caracteristica de bază a unui sistem de control digital constă în eșantionarea și digitizarea semnalului înainte de folosire.
  - Semnalele eșantionate se numesc discrete.
  - Semnalele eșantionate și digitizate (cuantizate) se numesc digitale.
- Procesul de eșantionare introduce limite în viteza de răspuns a sistemului, exprimate prin limitări ale lărgimii de bandă.
  - O regulă empirică de proiectare spune că perioada semnalului de eșantionare trebuie aleasă astfel încât pe durata timpului de creștere al răspunsului la semnal treaptă (*rising time*), să avem aproximativ 6 eșantioane ale semnalului de intrare (alte surse, 5-10 eșantioane).
  - Prin metode specifice controlului digital, se poate compensa efectul eșantionării și permite perioadei de eșantionare să fie de 2-3 ori mai mică decât timpul de creștere.

Metodă de determinare a echivalentului discret (dar nu cuantizat) pentru un control analog cunoscut

- Să considerăm perioada de eșantionare T_s, foarte mică pentru aproximarea semnalelor analogice.
- Vom ignora procesul de cuantizare (să considerăm destui biți în conversia A/D).
- Legea cunoscută, de control analog

$$U(s) = \left(k_P + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s\right) \cdot E(s)$$

are expresia în domeniul timp

$$u(t) = k_P \cdot e(t) + k_I \cdot \int_0^t e(\tau)d\tau + k_D \cdot \frac{de}{dt} = u_P + u_I + u_D$$

unde putem separa termenii pe baza liniarității, și exprima pe baza eșantioanelor

$$u_P(k \cdot T_s + T_s) = k_P \cdot e(k \cdot T_s + T_s)$$

$$u_I(k \cdot T_s + T_s) = k_I \cdot \int_0^{k \cdot T_s + T_s} e(\tau)d\tau = k_I \cdot \left(\int_0^{kT_s} e(\tau)d\tau + \int_{kT_s}^{kT_s+T_s} e(\tau)d\tau\right) = u_I(k \cdot T_s) + [area\_under\_e(t)] \approx$$
$$u_I(k \cdot T_s) + k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \{e(kT_s + T_s) + e(kT_s)\}$$

$$\frac{T_s}{2} \cdot \{u_D(k \cdot T_s + T_s) + u_D(k \cdot T_s)\} = k_D \cdot \{e(k \cdot T_s + T_s) - e(k \cdot T_s)\}$$

Recapitulare: Transformata z

- Cu aplicații în matematică și procesarea de semnal, transformata ***z*** convertește un semnal discret (o secvență de numere reale sau complexe), din domeniul timp într-o reprezentare în domeniul frecvență.
- In acest scop, definim un operator $z = e^{s \cdot T_s}$, pentru care:

$$u(k \cdot T_s) \leftrightarrow U(z)$$
$$u(k \cdot T_s + T_s) \leftrightarrow z \cdot U(z)$$

- Cu această definiție, putem rescrie termenii din legea de control
  - Termenul integral

$$z \cdot U_I(z) = U_I(z) + k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot [z \cdot E(z) + E(z)] \Rightarrow U_I(z) = k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot E(z)$$

  - Termenul derivativ (prin inversarea rolurilor pentru ***U*** și ***E***)

$$U_D(z) = k_D \cdot \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot E(z)$$

  - Obținem legea de control

$$U(z) = \left(k_P + k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + k_D \cdot \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot\right) E(z)$$

- <u>Observație</u>: Aceste rezultate se puteau obtine și prin înlocuirea formală a operatorului ***s***

printr-un echivalent $\frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ (metoda Tustin) în relația $U(s) = \left(k_P + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s\right) \cdot E(s)$

Exemplu de conversie în format discret

- Să găsim implementarea digitală pentru funcția Laplace

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{11 \cdot s + 1}{3 \cdot s + 1}$$

- Vom utiliza operatorul discret

Metoda Tustin sau regula trapezoidală de aproximare a echivalentului digital

$$D_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$

- Obținem pentru o perioadă de eșantionare ***T_s= 1 (doar în acest caz, pentru demonstrație)***

$$D_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{11 \cdot \frac{2 \cdot (z-1)}{z+1} + 1}{3 \cdot \frac{2 \cdot (z-1)}{z+1} + 1} = \frac{23 \cdot z - 21}{7 \cdot z - 5}$$

- Să continuăm conversia în eșantioane, pentru implementarea în software

$$(7 \cdot z - 5) \cdot U(z) = (23 \cdot z - 21) \cdot E(z) \Rightarrow 7 \cdot u(k+1) - 5 \cdot u(k) = 23 \cdot e(k+1) - 21 \cdot e(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(k+1) = \frac{5}{7} \cdot u(k) + \frac{23}{7} \cdot e(k+1) - \frac{21}{7} \cdot e(k)$$

Observație: Toate aceste rezultate se referă la semnale eșantionate (discrete), dar NU cuantizate. Operația de scriere a acestor rezultate în format binar, pe un anumit număr de biți se numește cuantizare și reprezintă o altă sursă de erori sau limitări.

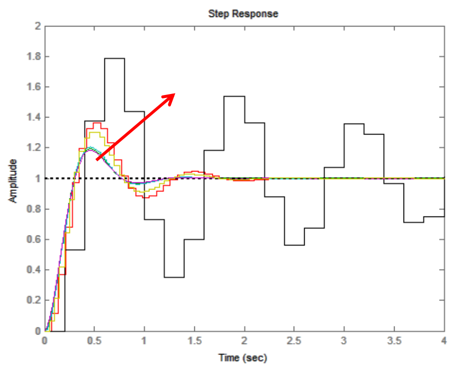
Efectele conversiei în format digital

- Vom utiliza un exemplu dezvoltat în MATLAB pentru o comparație directă între răspunsul în timp al soluției analogice și a celei echivalente digitale.

$$G(s) = \frac{45}{(s+9)\cdot(s+5)} \qquad D(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = 1.4 + \frac{8.4}{s} = \frac{1.4 \cdot (s+6)}{s}$$

```
clear;
numG=45;
den1=[1 9];
den2=[1 5];
denG=conv(den1,den2);
sysG=tf(numG,denG);
numD=1.4*[1 6];
denD=[1 0];
sysD=tf(numD,denD);
DG=sysD*sysG;
DGF=feedback(DG,1);
step(DGF); hold on;
Dd=c2d(sysD,0.07);
Gd=c2d(sysG,0.07);
DGd=Dd*Gd;
DGD=feedback(DGd,1);
step(DGD);
```

Forma de undă fără eșantionare, Ts=0.001, 0.005, 0.050, 0.070, 0.250



- Se observă o întârziere de jumătate de perioadă (Ts/2).
- In alte cazuri, este posibilă apariția unui aliasing.

***Notă:** Pentru simplificarea exemplului, am convertit aici modelul întregii bucle, incluzând instalația. De obicei, în practică, doar compensarea este digitală.*

Metode de proiectare în format digital – Metoda emulației (1)

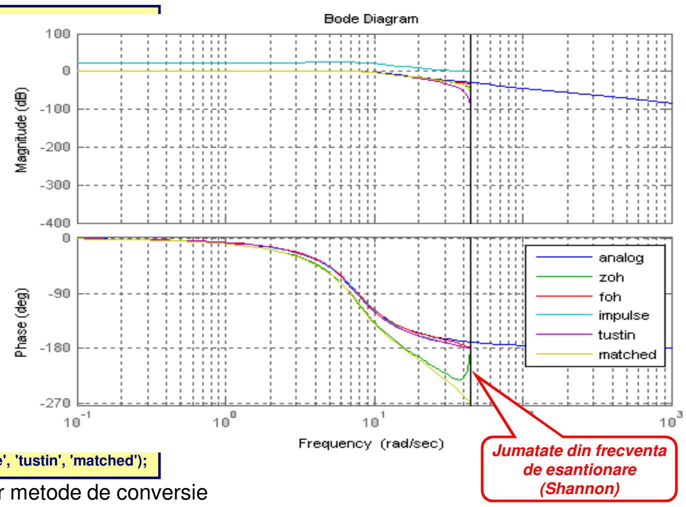
- Metoda emulației ("*emulation*") constă în găsirea unei soluții de compensație în analog ***D(s),*** urmată de aproximarea acelei soluții printr-un operator.
- Aproximarea integralei printr-o reprezentare trapezoidală (*Tustin*), conducând la operatorul formal:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

- Alte aproximații sunt posibile:
  - Aproximarea derivatelor prin metoda Euler.
  - Pe baza definiției, aplicând direct z=exp(sT)→ metoda "*matched pole-zero MPZ*"
  - O versiune denumită "*modified MPK*" (MMPK), evită eșantioanele e(k+1) în calcularea lui y(k+1)

Metode de proiectare în format digital – Metoda emulației (2)

```
clear;
numG=45;
den1=[1 9];
den2=[1 5];
denG=conv(den1,den2);
sysG=tf(numG,denG);
numD=1.4*[1 6];
denD=[1 0];
sysD=tf(numD,denD);
DG=sysD*sysG;
DGF=feedback(DG,1);

Dd1=c2d(DGF,0.07, 'zoh');
Dd2=c2d(DGF,0.07, 'foh');
Dd3=c2d(DGF,0.07, 'impulse');
Dd4=c2d(DGF,0.07, 'tustin');
Dd5=c2d(DGF,0.07, 'matched');

bode(DGF); hold on;
bode(Dd1); hold on;
bode(Dd2); hold on;
bode(Dd3); hold on;
bode(Dd4); hold on;
bode(Dd5); hold on;
grid on;
legend('analog', 'zoh', 'foh', 'impulse', 'tustin', 'matched');
```



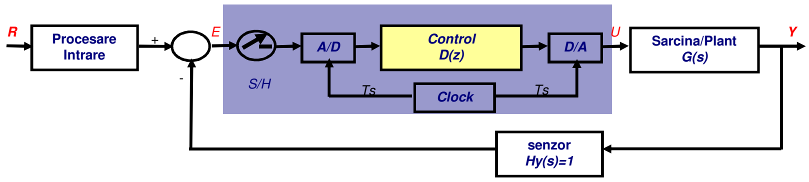
- Comparația acestor metode de conversie
  - Răspuns identic la frecvențe joase (sub ¼ din frecvența de eșantionare)
  - MMPZ ("*matched pole-zero*") și Tustin prezintă un "*notch*" la frecvențe aproximativ jumatate din frecvența de eșantionare, deoarece aceste metode au un ***zero*** inerent la z=-1, din termenul z+1.

Metode de proiectare in format digital – Metoda directă

- Această metodă se bazează pe determinarea funcției de transfer a sistemului în digital, înainte de proiectarea legii de control.
- Aceleași reguli pe care le vom demonstra prin metoda locului rădăcinilor rămân valabile și pentru funcțiile de transfer exprimate în digital (***z***), dar interpretarea rezultatelor este diferită.
- Detalii ale acestor metode pur digitale depășesc cadrul acestui curs.

Observații finale

- O reprezentare în format digital a unei legi de control se poate obține prin înlocuirea directă a operatorului ***s*** cu: $\frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$
- Există mai multe versiuni de implementare și partiție între software și hardware a resurselor din figura de la pagina 3.



- Proiectarea se reduce la
  - Determinarea adecvată a perioadei de eșantionare
  - Determinarea rezoluției adecvate (număr de biți pentru cuantizare)
  - Adoptarea unei aproximații a soluției din analog. Mai multe opțiuni sunt posibile.
- Metode de proiectare directă în digital există, dar depășesc cadrul acestui curs.

TEMA DE CASĂ #3

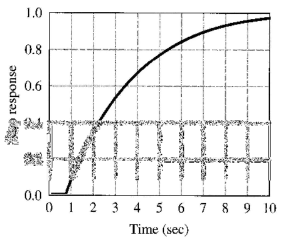
Tema de casă numărul 3 trebuie adusă la laboratorul din 29 martie.

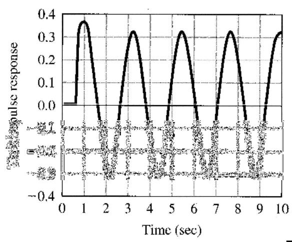
Problema 1

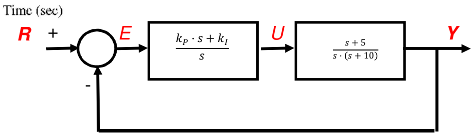
Răspunsul la semnal treaptă a unui sistem este dat în figură. Intarzierea și răspunsul tranzitoriu se pot determina din figura din stânga.

(a) Proiectati sisteme de control P, PI, și respectiv PID, folosind metoda Ziegler-Nichols bazată pe răspuns tranzitoriu.

(b) Utilizând un control simplu proporțional P, se obține răspunsul la impuls din figura din dreapta. Pentru un câștig proporțional Ku = 8,559, sistemul este la limita stabilitații (oscilații întreținute). Proiectați sisteme de control P, PI, și respectiv PID, folosind metoda Ziegler-Nichols pentru sensibilitate.







Problema 2

Considerați sistemul din figură, controlat cu PI.

(a) Determinați funcția de transfer R->Y.

(b) Folosiți criteriul Routh pentru a determina domeniul (kp, ki) pentru care sistemul este stabil.

(c) Care este tipul sistemului și eroarea stationară pentru urmarirea unei referințe variabile?

(d) Care este tipul sistemului și eroarea staționară pentru rejecția unei perturbații?