

LABORATORUL #6

REPREZENTAREA SISTEMELOR DINAMICE CU ECUAȚII DE STARE. ECHIVALENȚE ÎNTRE ECUAȚII DIFERENȚIALE, ECUAȚII DE STARE ȘI FUNCTII DE TRANSFER.

1. Scopul laboratorului.
2. Descrierea sistemelor dinamice cu ecuații diferențiale (ODE).
3. Diagrame în forme canonice de reprezentare a sistemelor.
4. Echivalarea funcțiilor de transfer cu ecuații de stare.
5. Echivalarea ecuațiilor de stare cu funcții de transfer.
6. Ecuația caracteristică a unui sistem.
7. Controlul unui sistem de bandă magnetică, reprezentat cu ecuații de stare.

1. Scopul laboratorului.

Metodele de analiză și proiectare prezentate până acum fac parte din controlul clasic, dezvoltat în prima parte a secolului 20 pe baza transformatei Laplace. În ultimii ani, beneficiind de aportul calculatoarelor, s-au dezvoltat metode noi de analiză și proiectare. Dintre acestea, cele mai importante sunt metodele bazate pe caracterizarea sistemelor prin ecuații de stare.

Variabilele de stare permit descrierea ecuațiilor diferențiale de orice fel printr-un set de ecuații diferențiale de primul ordin, scrise într-o formă matriceală care ușurează rezolvarea lor cu ajutorul calculatoarelor.

În acest laborator, vom insista pe înțelegerea conceptului și avantajelor ecuațiilor de stare, precum și a echivalențelor între ecuațiile de stare, ecuații diferențiale și transformata Laplace. În laboratorul următor (#7), vom continua cu exemple de proiectare a sistemelor de control pe baza variabilelor și ecuațiilor de stare.

2. Descrierea sistemelor dinamice cu ecuații diferențiale (ODE).

Ecuațiile diferențiale ce descriu funcționarea unui sistem dinamic pot fi scrise sub forma următorului sistem de ecuații scrise în formă matriceală:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

În care $x(t)$ reprezintă un vector de variabile de stare, $u(t)$ reprezintă un vector al mărimilor de intrare (de comandă), $y(t)$ este un vector al mărimilor de ieșire. Prima relație reprezintă un sistem de ecuații diferențiale de primul ordin și se numește ecuație de stare. A doua relație se mai numește ecuație de ieșire și reprezintă un sistem de ecuații ce leagă variabilele de ieșire de cele de stare și de cele de intrare. În cazul cel mai des întâlnit în practică, al sistemelor SISO (o singură intrare, o singură ieșire sau „*single input – single output*”), vom avea doar o ecuație de ieșire. Matricea A se mai numește matrice de stare, matricea B este matrice de intrare, matricea C este matrice de ieșire, iar matricea D este numită matrice de tranziție directă.

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

Un exemplu de reprezentare cu ecuații de stare este o rețea de componente pasive (L, C, R) în care curenții prin inductanțe și tensiunile pe condensatori pot fi variabile de stare.

Un avantaj al reprezentării cu ecuații de stare este acela că se pretează la rezolvarea ușoară pe un calculator, fie digital, fie analogic. În plus, această metodă se poate extinde foarte ușor la analiza unor sisteme neliniare.

Deși reprezentarea cu ecuații de stare presupune ecuații diferențiale ordinare (de ordinul întâi), acesta nu este cazul de obicei în practică. Diverse sisteme dinamice au o funcționare fizică descrisă prin ecuații diferențiale de ordin superior. De exemplu, fie instalația cu o funcționare descrisă printr-o relație intrare-ieșire ($u(t) \rightarrow y(t)$) dată de ecuația:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_2 \cdot \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_n \cdot y = u(t)$$

Alegerea variabilelor de stare nu este unică și depinde de experiența proiectantului. În acest caz, să considerăm o alegere simplă a variabilelor de stare, astfel încât:

$$\begin{cases} x_n = y \\ \vdots \\ x_{n-1} = \dot{y} \\ \vdots \\ x_{n-2} = \ddot{y} \\ \vdots \\ x_1 = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{cases}$$

Se pot scrie astfel ecuațiile de stare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

și ecuația de ieșire:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot [x]$$

Să considerăm un exemplu numeric pe care să-l investigăm apoi în MATLAB.

Să se scrie ecuațiile de stare pentru sistemul dinamic descris de ecuația diferențială de ordinul al 3-lea:

$$2 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \cdot \frac{dy}{dt} + 8 \cdot y = 10 \cdot u(t)$$

Soluție: Vom avea 3 variabile de stare: $x_3=y$, $x_2=dy/dt$, $x_1=d^2y/dt^2$.

$$\begin{aligned} \text{Primele derivate sunt: } d(x_3)/dt &= x_2, \quad d(x_2)/dt = x_1, \\ 2d(x_1)/dt + 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 10u \Rightarrow d(x_1)/dt = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5u \end{aligned}$$

Ecuațiile de stare devin:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Limbajul MATLAB ne poate ajuta să automatizăm transformarea între ecuațiile de ordin superior și o formă a ecuațiilor de stare. Programul MATLAB în acest caz este (a_i =coeficienții ecuației diferențiale de ordin superior, k =coeficientul mărimii de intrare):

```
clear;
ai = [2 4 6 8];
k = 10;
%
n=length(ai)-1;
I=eye(n-1);
z=zeros(n-1,1);
zi=[I,z];
for m=1:n
    an(m)=-ai(m+1)/ai(1);
end
%
A=[an;zi]
B=[k/ai(1);z]
C=[1 z']
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de activitate la laborator):

1. Scrieți ecuațiile de stare pentru ecuația diferențială:

$$7 \cdot \frac{d^4 y}{dt^4} + 3 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} = 6 \cdot u(t)$$

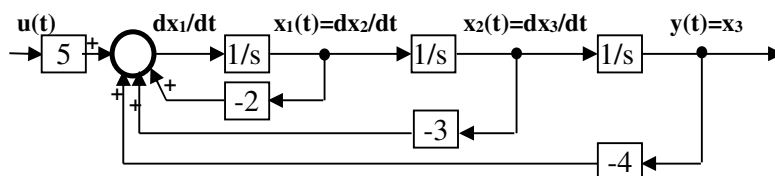
Puteți folosi direct programul MATLAB de mai sus, prin înlocuirea primelor două linii de program cu noile valori.

3. Diagrame în forma canonică de reprezentare a sistemelor.

În vederea simulării acestor sisteme, construim o reprezentare grafică a ecuațiilor numai pe baza semnelui de integrare. Pentru exemplul considerat:

$$2 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \cdot \frac{dy}{dt} + 8 \cdot y = 10 \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dy}{dt} + 4 \cdot y = 5 \cdot u(t)$$

schema bloc în forma canonică de control este dată în figura următoare.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

2. Desenați forma canonică de control a ecuației de stare pentru exemplul considerat la (1).

Rolul și avantajele utilizării acestei reprezentări se vor vedea mai târziu, în proiectarea sistemelor de control pe baza reprezentării cu ecuații de stare. Să menționăm acum că forma canonică de control nu este unica reprezentare a unui sistem de ecuații de stare. Cum am spus, ecuațiile de stare ce descriu un anumit sistem nu sunt unice, sau exprimarea cu ecuații de stare nu este unică. Două alte forme prezintă importanță și ele se referă la forma canonică modală (pune în evidență polii funcției de transfer), și forma canonică de observare (toate stările sunt calculate din ieșiri).

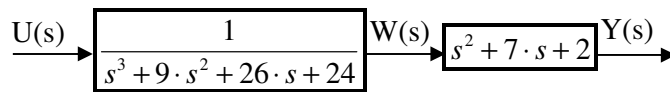
După cum vă amintiți de la studiul matricelor, în anumite condiții se pot defini transformări liniare între matrice de același ordin. În același mod, se pot defini transformări liniare (ca niște schimbări de variabilă) între ecuațiile de stare exprimate în aceste forme.

4. Echivalarea funcțiilor de transfer cu ecuații de stare.

Am văzut în numeroase exemple desfășurate în lucrările de laborator precedente că reprezentarea sistemelor dinamice cu funcții de transfer prezintă numeroase avantaje. Să vedem cum putem echivala cele două reprezentări – funcția de transfer și ecuațiile de stare. Să considerăm un sistem cu o singură intrare și o singură ieșire caracterizat prin funcția de transfer:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7 \cdot s + 2}{s^3 + 9 \cdot s^2 + 26 \cdot s + 24}$$

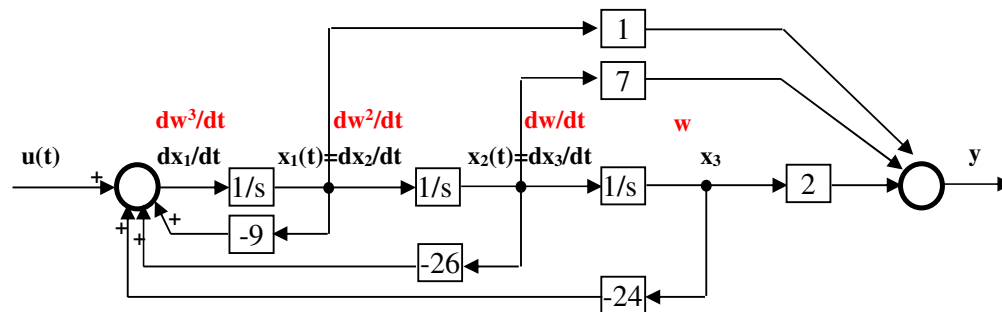
Putem considera o reprezentare bloc echivalentă (prin descompunere):



Ecuațiile se pot rescrie:

$$\begin{cases} s^3 \cdot W(s) = -9 \cdot s^2 \cdot W(s) - 26 \cdot s \cdot W(s) - 24 \cdot W(s) + U(s) \\ Y(s) = s^2 \cdot W(s) + 7 \cdot s \cdot W(s) + 2 \cdot W(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dddot{w}(t) = -9 \cdot \ddot{w}(t) - 26 \cdot \dot{w}(t) - 24 \cdot w(t) + u(t) \\ y(t) = \ddot{w}(t) + 7 \cdot \dot{w}(t) + 2 \cdot w(t) \end{cases}$$

Putem folosi aceste ecuații să desenăm forma canonică de control.



Se observă că această reprezentare grafică este asemănătoare cu cea derivată din ecuațiile de stare. Putem așadar scrie prin identificare ecuațiile matriceale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Această echivalență/reprezentare nu este unică, existând mai multe posibilități de alegere a variabilelor de stare.

MATLAB poate ajuta și în acest caz cu instrucțiunea: `[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)`
 În acest scop, puteți verifica programul următor:

```
clear;
num=[1 7 2]; den=[1 9 26 24];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

3. Determinați reprezentarea cu variabile de stare a unui sistem dinamic caracterizat prin următoarea funcție de transfer intrare-ieșire:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 1}$$

5. Echivalarea ecuațiilor de stare cu funcții de transfer.

Să investigăm acum posibilitatea conversiei inverse, de la ecuațiile de stare la funcția de transfer. Vom aplica transformata Laplace ecuației de stare generice.

$$\begin{cases} s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \Rightarrow (s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s) \\ Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$$

MATLAB poate și de această dată să ne ajute cu instrucțiunile:

```
[num, den] = ss2tf(A,B,C,D,i)
[z, p, k] = ss2zp(A,B,C,D,i)
```

care ne oferă o funcție de transfer pentru cea de a i -a intrare și, respectiv, reprezentarea cu poli și zerouri a funcției de transfer. În cazul sistemelor cu o singură intrare și o singură ieșire, $i=1$.

Să verificăm secvența de program:

```
clear;
A=[-9 -26 -24; 1 0 0; 0 1 0]; B=[1 0 0]'; C=[1 7 2]; D=0;
[num, den] = ss2tf(A,B,C,D,1)
H=tf(num,den)
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

4. Determinați cu ajutorul MATLAB, funcția de transfer $u(t) \rightarrow y(t)$ ce corespunde sistemului de ecuații de stare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

6. Ecuația caracteristică a unui sistem.

Să privim cu atenție echivalența între funcția de transfer

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7 \cdot s + 2}{s^3 + 9 \cdot s^2 + 26 \cdot s + 24}$$

și ecuațiile de stare scrise în forma canonică de control:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Am văzut la studiul răspunsului în frecvență că rădăcinile numitorului funcției de transfer a unui sistem ne dau informații despre stabilitatea sistemului. Numeam aceste valori **poli (frecvențe naturale)** și doream să avem toți polii în partea stângă a planului complex pentru stabilitatea sistemului.

Se poate demonstra că polii din funcția de transfer a sistemului sunt valori proprii ale matricei de stare, deci:

$$\det(p_i \cdot I - A) = 0$$

Ecuația ce rezultă din calcularea acestui determinant se numește **ecuația caracteristică a sistemului**, care este identică cu ecuația derivată din numitorul funcției de transfer. Să calculăm acest lucru pentru exemplul considerat:

$$\det \begin{vmatrix} s+9 & 26 & 24 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (s+9) \cdot s^2 + 24 + 26 \cdot s = 0 \Leftrightarrow s^3 + 9 \cdot s^2 + 26 \cdot s + 24 = 0$$

Instrucțiunea **eig(A)** din programul MATLAB ne ajută să determinăm **polii** din funcția de transfer (rădăcinile ecuației caracteristice) fără a scrie formal funcția de transfer. Să verificăm secvența de program:

```
clear;
A=[-9 -26 -24; 1 0 0; 0 1 0]; B=[1 0 0]'; C=[1 7 2]; D=0;
p=eig(A)
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

5. Demonstrați că polii lui $G(s)$ de la punctul 3 „lucru în clasă” (rădăcinile numitorului) sunt aceiași cu valorile proprii ale matricii de tip „A” gasite de voi. Valorile proprii se pot gasi cu instrucțiunea $\text{eig}(A)$ și reprezintă soluțiile ecuației caracteristice $\det(sI-A)=0$. Comparați cu rezultatele instrucțiunii $\text{roots}(P)$, unde P este un polinom cu forma dată de numitorul funcției de transfer $G(s)$.

Să privim acum numărătorul funcției de transfer. Rădăcinile ecuației derivate din polinomul de la numărător se numesc **zero**-uri. Coeficienții polinomului de la numărătorul funcției de transfer se regăsesc în matricea de tip „C” (de ieșire) din ecuațiile de stare – dacă ecuațiile de stare sunt în forma canonică de control.

Instrucțiunea **tzzero** din programul MATLAB ne ajută să determinăm **zero**-urile din funcția de transfer fără a scrie formal funcția de transfer, direct din ecuațiile de stare. Să verificăm secvența de program:

```
clear;
A=[-9 -26 -24; 1 0 0; 0 1 0]; B=[1 0 0]'; C=[1 7 2]; D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
z=tzzero(sys)
```

Se obține:

```
z =
-6.7016
-0.2984
```

care sunt rădăcinile lui $s^2+7s+2=0$.

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

6. Utilizați MATLAB pentru a determina explicit polii și zerourile din funcția de transfer corespunzătoare ecuațiilor de stare de la **punctul 4 „lucru în clasă”**, fără a scrie formal funcția de transfer. Observăm că ecuațiile de stare NU sunt scrise în forma canonică de control care permite echivalarea directă a ecuațiilor de stare cu funcții de transfer. Pentru acest exemplu, inversăm ordinea variabilelor de stare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

și avem forma canonică de control. Vom arăta o formulă generală de transformare de la orice matrice de stare la forma canonică de control.

7. Comparați cu rezultatele găsite la punctul 4 pentru funcția de transfer.

Ecuațiile de stare ce descriu un anumit sistem nu sunt unice sau exprimarea cu ecuații de stare nu este unică. Să vedem acum două alte forme ce prezintă importanță: forma canonică modală (pune în evidență polii funcției de transfer) și forma canonică de observare (toate stările sunt calculate din ieșiri). La curs, am demonstrat formulele necesare pentru transformarea între diferite forme canonice. MATLAB poate ajuta în acest scop.

Pentru ecuațiile de stare exprimate mai sus avem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Să rulăm secvența de program:

```
clear;
A=[0 1; -6 -5]; B=[0 1]'; C=[8 1]; D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
z=canon(sys,'modal')
```

Obținem rezultatele pentru matricele de stare în forma canonică modală:

```
=====
a =
      x1  x2
x1  -2    0
x2   0   -3
      Polii sistemului = Rădăcinile ecuației caracteristice

b =
      u1
x1  5.657
x2  7.211

c =
      x1  x2
y1  1.061 -0.6934

d =
      u1
y1  0
=====
```

Pentru a găsi forma canonică de control pentru un sistem oarecare, se calculează matricea de controlabilitate, pe baza căreia se definește o transformare matriceală.

- Matricea de controlabilitate pentru un sistem de ordinul III

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & A^2 \cdot B \end{bmatrix}$$

- Ultima linie a matricei de transformare liniară

$$t_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [C]^{-1}$$

- Matricea de transformare liniară

$$T = \begin{bmatrix} t_n \cdot A \\ t_n \end{bmatrix}$$

- Operarea transformării

$$A_o = T^{-1} \cdot A \cdot T \quad B_o = T \cdot B$$

$$C_o = C \quad D_o = D$$

Următorul program MATLAB transformă matricele de stare de mai sus în forma canonică de control.

```
clear;
A=[0 1; -6 -5]; B=[0 1]'; C=[8 1]; D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
co=ctrb(A,B);
tn=[0 1]*inv(co);
Ti=[tn*A; tn];
z=ss2ss(sys,inv(Ti))
```

Obținem rezultatele pentru matricele de stare în forma canonică de control:

```
=====
a =
      x1 x2
x1 -5 -6
x2  1  0
      Coeficienții
      numitorului

b =
      u1
x1  1
x2  0

c =
      x1 x2
y1  1  8
      Coeficienții
      numărătorului

d =
      u1
y1  0
=====
```

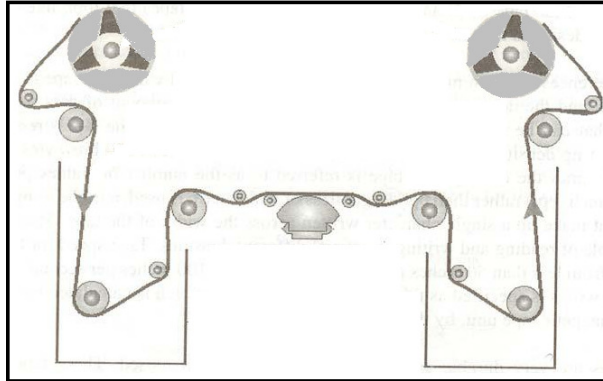
În final, să observăm că funcția de transfer derivată din ecuațiile de stare în forma canonică de control are numărătorul dependent de ecuația de ieșire $y(t)=Cx(t)$. La alegerea altei variabile de ieșire, vom avea o altă funcție de transfer dar cu același numitor. Deci orice dinamică a sistemului este legată de numitor, numărătorul având doar rolul de a defini ieșirea.

De exemplu, un sistem poate avea două mărimi de interes pe care dorim să le urmărim ca variabile de ieșire. Fiecare astfel de variabilă de ieșire se va exprima în funcție de variabilele de stare în mod unic printr-o ecuație de ieșire cu coeficienții matricei de tip „C” diferiți. La fiecare astfel de variabilă de ieșire (și respectiv la fiecare astfel de matrice „C”) va corespunde altă funcție de transfer.

Ambele (sau toate) funcții(le) de transfer vor avea același numitor deoarece numitorul este dat de matricea de tip „A” care rămâne aceeași pentru orice variabilă de ieșire considerată. Deci studiul stabilității sistemului nu depinde de variabila de ieșire considerată ci de matricea de stare A (sau de numitorul comun al tuturor funcțiilor de transfer). În concluzie, matricea de tip „A” conține informații despre polii și stabilitatea sistemului, iar matricea de tip „C” despre zerourile sistemului.

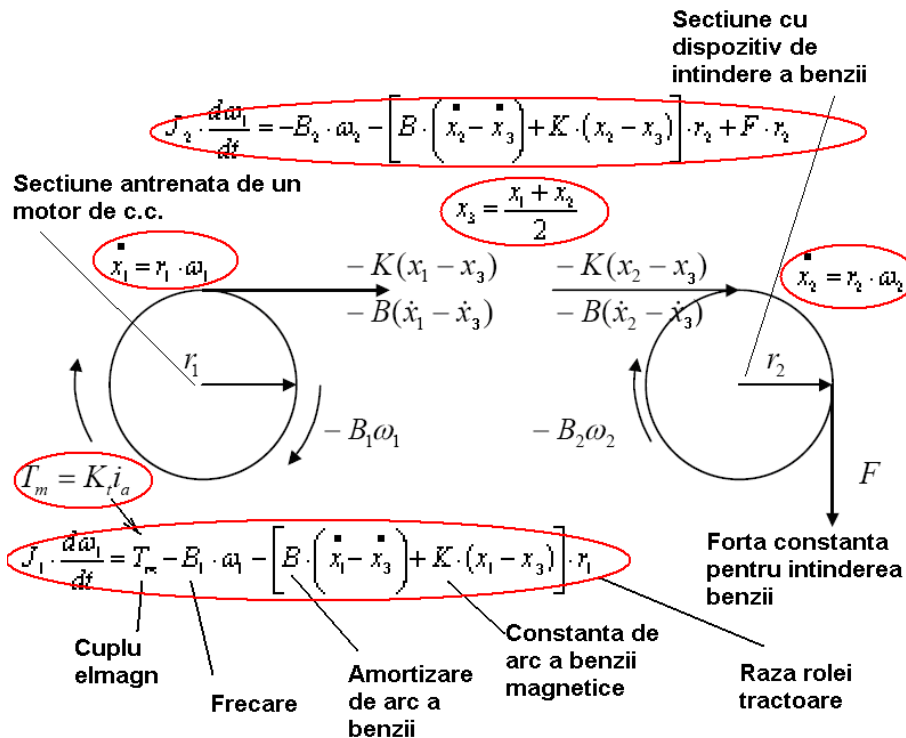
7. Controlul unui sistem de bandă magnetică reprezentat cu ecuații de stare.

Ne vom întoarce la exemplul din **Laboratorul #1**, privind un sistem de stocare de date pe bandă magnetică. Figura următoare explică funcționarea și ecuațiile ce caracterizează acest sistem.



Ecuatiile diferențiale de mișcare devin:

$$\begin{aligned} \text{Cuplu} \quad J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} &= T_m - B_1 \cdot \omega_1 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_3 \right) + K \cdot (x_1 - x_3) \right] \cdot r_1 \\ \text{Cuplu} \quad J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} &= -B_2 \cdot \omega_2 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_3 \right) + K \cdot (x_2 - x_3) \right] \cdot r_2 + F \cdot r_2 \\ \text{Motor} \quad T_m &= K_t \cdot i_a \\ \text{Geometrie} \quad \dot{x}_1 &= r_1 \cdot \dot{\omega}_1 \\ \text{Geometrie} \quad \dot{x}_2 &= r_2 \cdot \dot{\omega}_2 \\ x_3 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$



Parametrii ce descriu sistemul practic sunt (unele date numerice au fost schimbate din primul laborator):

- Momentul de inerție $J_1=4 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$
- Amortizarea benzii $B_1=1 \cdot 10^{-2} \text{ N m sec}$
- Raza discului $r_1=2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
- Constanta cuplului $K_t=3 \cdot 10^{-2} \text{ N m / A}$
- Constanta de deformare a fiecarui arc de suspensie $K=2 \cdot 10^4 \text{ N/m}$
- Dispozitiv de absorbție a șocului, într-un model asemănător cu frecarea $b=20 \text{ N/m sec}$
- Raza celui de al doilea disc $r_2=2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
- Momentul de inerție $J=10^{-5} \text{ kg m}^2$
- Amortizarea benzii $B_2=1 \cdot 10^{-2} \text{ N m sec}$
- Forța constantă $F=6 \text{ N}$

O astfel de bandă trebuie să se deplaseze cu viteze de până la 5m/secundă, cu o pornire cât mai rapid posibilă. Într-o mișcare staționară a benzii, putem presupune că toate cele trei dimensiuni (x_1, x_2, x_3) evoluează la fel. Nu același lucru putem spune la pornirile și opririle repetate cauzate de căutarea unor date pe banda magnetică, la diferite locații. Dinamica roții tractoare va determina deplasări diferite în x_1, x_2, x_3 , precum și tensiune (*stress*) în banda magnetică. Aceste cerințe se transformă în date de proiectare cerând timp de stabilizare la un semnal treaptă de intrare sub 10msec, și cu o suprareglare sub 10% pentru dimensiunea măsurabilă x_2 . Putem de asemeni urmări tensiunea în bandă și cere o variație minimală la semnal treaptă, urmată de o valoare staționară nulă.

Se observă că avem 5 derivate independente în ecuațiile ce descriu funcționarea sistemului, deci putem spune că sistemul este de ordinul al 5-lea. Vom re-scrie aceste ecuații în forma ecuațiilor de stare, pentru un model unitar și pentru mai multe posibilități de proiectare a sistemului de compensare. Variabilele de stare (urmărim derivatele de primul ordin sau scriem derivatele de ordin superior ca derivate de primul ordin) vor fi:

$$x = [x_1 \quad \omega_1 \quad x_2 \quad \omega_2 \quad i_a]^T$$

Mărimea de intrare este tensiunea aplicată motorului de c.c.

$$u(t) = e$$

Sistemul ecuațiilor de stare devine:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K \cdot r_1}{2 \cdot J_1} & -\frac{B_1}{J_1} - B \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{2 \cdot J_1} & K \cdot \frac{r_1}{2 \cdot J_1} & \frac{B \cdot r_1 \cdot r_2}{2 \cdot J_1} & \frac{K_1}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & r_2 & 0 \\ \frac{K \cdot r_2}{2 \cdot J_2} & \frac{B \cdot r_1 \cdot r_2}{2 \cdot J_2} & -\frac{K \cdot r_2}{2 \cdot J_2} & -\frac{B \cdot r_2^2}{2 \cdot J_2} - \frac{B_2}{J_2} & 0 \\ 0 & -K_e & 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \omega_1 \\ x_2 \\ \omega_2 \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [e]$$

Ne interesează deplasarea uniformă a benzii lângă capul de citire. Am considerat această deplasare a benzii lângă capul de citire ca fiind media celor două deplasări la roțile tractoare și respectiv de întindere. Această mărime (x_3) poate fi considerată ca mărime de ieșire, îndeplinind scopul controlului nostru de a obține o deplasare uniformă a benzii în dreptul capului de citire.

Putem scrie ecuația de ieșire:

$$H_3 = [0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0]$$

Proiectarea unei legi de compensare după această mărime de ieșire pare logică, dar este greu de realizat pentru că nu putem măsura ușor deplasarea x_3 (lângă capul de citire), pentru a închide bucla de reacție. Din acest motiv, vom evalua performanțele pentru x_3 , dar vom închide bucla de reacție după x_2 , deplasarea de lângă motorul de c.c., care poate fi ușor evaluată cu un traductor de tip encoder.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

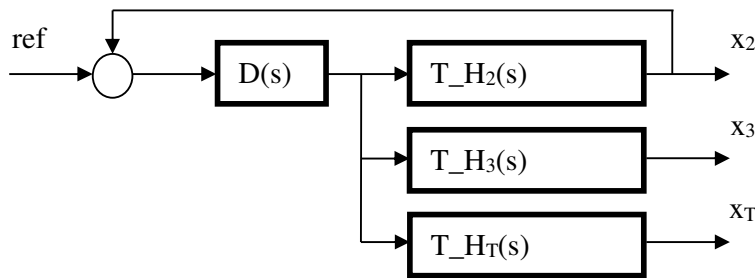
O altă mărime de interes poate fi considerată tensiunea benzii (notată cu T , **atenție la deosebirea față de T_m =cuplul electromagnetic**) care trebuie menținută sub un anumit nivel pe toată durata funcționării, astfel încât să nu distrugem banda magnetică.

$$T = K \cdot (x_3 - x_1) + B \cdot \left(\dot{x}_3 - \dot{x}_1 \right) = K \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 \right) + B \cdot \left(\frac{r_1 \cdot \omega_1 + r_2 \cdot \omega_2}{2} - r_1 \cdot \omega_1 \right) =$$

$$= \left(-\frac{K}{2} \right) \cdot x_1 + \left(-\frac{B \cdot r_1}{2} \right) \cdot \omega_1 + \left(\frac{K}{2} \right) \cdot x_2 + \left(\frac{B \cdot r_2}{2} \right) \cdot \omega_2 + 0 \cdot i_a$$

De unde

$$H_T = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \text{ pentru } T = H_T \cdot x$$



La exprimarea valorilor numerice pentru ecuațiile de stare și funcțiile de transfer, vom observa diferențele mari între coeficienți, care ne-ar sugera o scalare a variabilelor de stare. Vom face o **scalare a timpului**, prin considerarea unei unități de timp egală cu milisecunde. În acest scop, modificăm ecuația de stare prin:

$$\frac{dx}{dt} = F \cdot x + G \cdot u \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{W} \cdot F \cdot x + \frac{1}{W} \cdot G \cdot u \\ W = 1000 \end{cases}$$

Dorim de asemeni să **scalăm distanțele** $x_{1,2,3}$ pentru a considera unități de măsură de ordinul zecilor de micrometri. În acest scop trebuie să modificăm matricele de stare printr-o transformare liniară caracterizată prin matricea:

$$S = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_s = S^{-1} \cdot F \cdot S \\ G_s = S^{-1} \cdot G \end{cases}$$

Programul MATLAB va include cele două relații pentru scalarea timpului și a distanțelor.

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

Vom observa că aplicarea metodelor clasice de proiectare a controlului pe baza transformatei Laplace este anevoios, conduce la o formă complicată a legii de compensare, și conduce la rezultate care ar putea fi și mai bune. Laboratorul viitor vom utiliza modelul dezvoltat cu ecuații de stare pentru a dezvolta o lege de control dedusă explicit prin ecuațiile de stare, fără utilizarea transformatei Laplace.

Acum puteți lansa programul *L6_Tapex.m*.

```
clear;
echo on;
%-----
% Componentele sistemului
J1=4*1e-5;    % [kg m2]
J2=1*1e-5;    % [kg m2 ]
%
B1=0.01;      % [N m sec]
B2=0.01;      % [N m sec]
%
K=4e4;        % [N/ m]
B=20;         % [N/m sec]
%
r1=2*1e-2;    % [ m]
r2=2*1e-2;    % [ m]
%
F=6;          % [ N]
Kt=0.03;
Ke=0.03*1000;
R=1;          % [Ohm]
L=1*1e-3;     % [H]
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Matricile de stare F, G
%
a1=[0 r1 0 0 0];
a2=[-K*r1/(2*J1) -(B1/J1)-(B*r1*r2/(2*J1)) K*r1/(2*J1) B*r1*r2/(2*J1) Kt/J1];
a3=[0 0 0 r2 0];
a4=[K*r2/(2*J2) B*r1*r2/(2*J2) -K*r2/(2*J2) -(B2/J2)-(B*r2*r2/(2*J2)) 0];
a5=[0 -Ke 0 0 -R/L];
F=[a1' a2' a3' a4' a5']'
%
g1=[0 0 0 0 1];
G=[g1']
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
%
% Observam ca nu ne place modul in care sunt afisati coeficientii,
% datorita diferentelor mari intre valori.
%
% Ar fi avantajos sa scalam timpul si deplasarea.
% Prin conventie vom lucra cu zeci de micrometri si cu milisecunde.
```

```
%  
% Scalarea timpului (timpul apare doar in derivate):  
Fst=F/1000; Gst=G;  
% Scalarea distantelor (scrise dupa scalarea timpului):  
t1=[1e-5 0 0 0 0];  
t2=[0 1 0 0 0];  
t3=[0 0 1e-5 0 0];  
t4=[0 0 0 1 0];  
t5=[0 0 0 0 1];  
T=[t1' t2' t3' t4' t5'];  
Fs=inv(T)*Fst*T;  
Gs=inv(T)*Gst;  
%  
% Dupa scalare, matricile de stare sunt Fs, Gs  
Fs  
Gs  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Matricile de iesire:  
% deplasarea x2  
H2=[0 0 1 0 0];  
% deplasarea x3  
H3=[0.5 0 0.5 0 0];  
% tensiunea in banda  
HT=[-0.2 -0.2 0.2 0.2 0];  
% Se observa ca putem avea una sau mai multe marimi de iesire.  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Oricare functie de transfer de la intrarea "e" (care este o tensiune  
% electrica de control) la oricare dintre aceste iesiri, va avea la numitor  
% un polinom cu coeficienti dependenti de coeficientii matricei de stare F.  
%  
% Sa verificam acest lucru:  
[num,den]=ss2tf(Fs,Gs,H2,0,1);  
num=round(10000*num)/10000; den=round(10000*den)/10000;  
T_H2=tf(num,den)  
%  
[num,den]=ss2tf(Fs,Gs,H3,0,1);  
num=round(10000*num)/10000; den=round(10000*den)/10000;  
T_H3=tf(num,den)  
%  
[num,den]=ss2tf(Fs,Gs,HT,0,1);  
num=round(10000*num)/10000; den=round(10000*den)/10000;  
T_HT=tf(num,den)  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Stabilitatea sistemului in bucla deschisa (modelul instalatiei)  
% depinde de radacinile acestui polinom de la numitor (polii fdt).
```

```
% Aceste valori se pot determina direct din matricea F.  
eig(Fs)  
% care se pot compara cu polii fdt T_H2.  
pole(T_H2)  
% Se observa ca cele trei functii de transfer deduse mai sus au acelasi  
% numitor, deci aceeasi poli.  
% Se observa ca polii acestor functii de transfer sunt aceeasi cu valorile  
% proprii ale matricelor, valori proprii determinate cu instructiunea eig.  
% Avem un pol in origine, si 4 poli in partea stanga a planului complex.  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Conditile de proiectare cer un timp de stabilizare de 12msec la semnal  
% rampa aplicat semnalului x2 si o suprareglare minimala la semnal treapta.  
%  
% Verificam ce am obtine fara nici o compensatie.  
s=tf('s');  
figure; step(T_H2/s); xlabel('msec');  
title('raspunsul lui x2 la semnal rampa'); grid on;  
figure; step(T_HT); xlabel('msec');  
title('raspunsul tensiunii T la semnal treapta'); grid on;  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Fdt pentru HT poate fi simplificata printr-un termen "s".  
% Verificam si aceasta forma a lui HT.  
%  
num2=num(1:5); den2=den(1:5); T_HT=tf(num2,den2);  
figure; step(T_HT); xlabel('msec');  
title('raspunsul tensiunii la semnal treapta (2)'); grid on;  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Vom considera un control in bucla inchisa dupa deplasarea din vecinatatea  
% motorului electric de c.c. (x2), care este mai usor de masurat.  
% Sa analizam fdt T_H2 pentru a proiecta compensarea pe baza metodelor  
% traditionale legate de transformata Laplace.  
%  
figure; rlocus(T_H2);  
title('Locul radacinilor pentru H2'); sgrid;  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Vom considera o compensare dubla cu avans de faza la  $z=0.75$ ,  $p=5$ ,  
% cu obiectivul deplasarii polilor sistemului catre valori mai negative.  
% Zero-ul dublu la 0.75 ar trebui sa corespunda polilor H2 in  $s=0$  si  $-0.5$ .  
%  
Dc=(500/75)*tf([1 0.75],[1 5]); Ds=series(Dc,Dc);  
OL=Ds*T_H2;  
figure; rlocus(OL);
```

```

title('Locul radacinilor pentru H2 + compensatia Ds'); sgrid;
%
% Este recomandabil sa faceti "zoom" langa originea planului complex
% pentru a vedea in detaliu pozitia polilor si zerourilor.
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Putem incerca sa imbunatatim rezultatele printr-o compensare notch langa
% polii complex conjugati -0.6371+/-0.6669i, apropiati de axa imaginara.
%
Dn=100*tf([1 1],[1 2*10 100]);
D=series(Ds,Dn);
OL=D*T_H2;
figure; rlocus(OL);
title('Locul radacinilor pentru H2 + compensarea (Ds+Dn)'); sgrid;
%
% Este recomandabil sa faceti "zoom" langa originea planului complex
% pentru a vedea in detaliu pozitia polilor si zerourilor.
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Citim de pe grafic -> putem folosi un castig K<3.1. Consideram K=1.
%
% Am dori sa verificam ce am obtine cu aceasta compensatie.
%
% Dar nu stim cum vor evolua tensiunea benzii "T" si cu deplasarea "x3"
% daca controlam doar deplasarea "x2".
%
% Pentru analiza, trebuie sa consideram o referinta pentru x2.
%
% Bucla de reactie unitara este inchisa in jurul compensarii proiectate
% si a fdt H2 (pentru dependenta "e" -> x2), producand fdt in
% bucla inchisa CL.
%
%-----
%
CL=feedback(D*T_H2,1);
figure; step(CL/s); hold on; plot(1:10000,1:10000,':'); xlabel('msec');
title('raspunsul lui x2 la semnal rampa'); axis([0, 10, 0, 10]); grid on;
figure; step(CL); xlabel('msec');
title('raspunsul lui x2 la semnal treapta'); grid on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Tensiunea electrica "e" (care este elementul de actionare dintre
% sistemul de control D si fdt a instalatiei H2) se calculeaza cu:
% 
$$e = D \cdot \text{error} = D \cdot (R - x_2) = D \cdot \{ R - [DH_2 / (1 + DH_2)] \cdot R \} = D \cdot R \cdot [1 / (1 + D \cdot H_2)]$$

%
% Tensiunea (stress) in banda se calculeaza cu:
% 
$$T = HT \cdot D \cdot R \cdot \{ 1 / [1 + D \cdot H_2] \} = (HT / H_2) \cdot [DH_2 / (1 + DH_2)] \cdot R = (HT / H_2) \cdot CL \cdot R$$

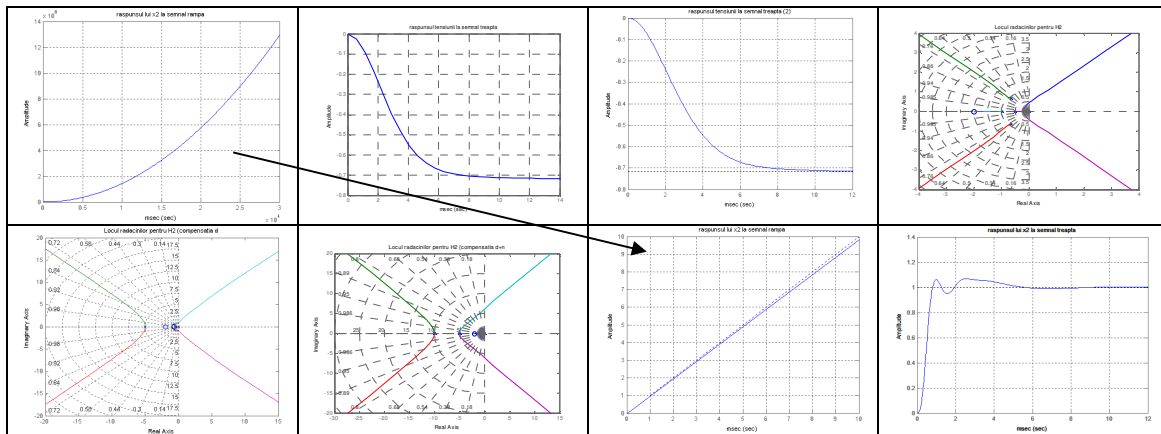
% si reprezinta modul in care se modifica tensiunea (stress) in banda

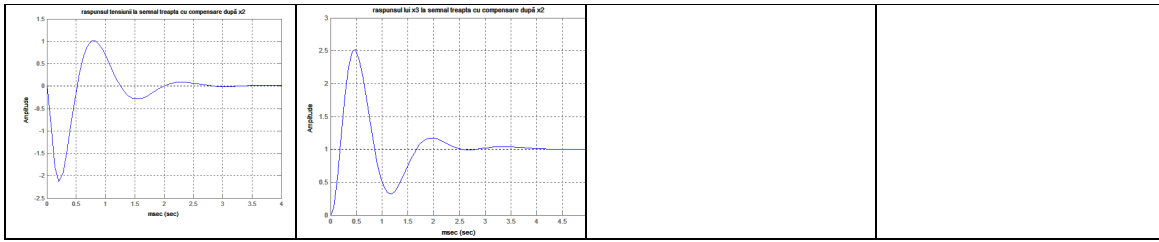
```



```
% atunci cand se aplica o modificarea treapta ca referinta pentru
% deplasarea x2.
%
% Afisam raspunsul tensiunii T la aplicarea unui semnal treapta pentru x2
%
% In acest scop trebuie sa simplificam functia de transfer CL*T_HT/T_H2
% ... dupa versiunea MATLAB 2014, aceasta se poate face cu instructiunea
% simplifyFraction(..)
%
% Aici vom prezenta un program care face asta.
%
Zero_HT=setdiff(zero(T_HT),intersect(zero(T_HT),zero(T_H2)));
Pole_HT=setdiff(pole(T_HT),intersect(pole(T_HT),pole(T_H2)));
Zero_H2=setdiff(zero(T_H2),intersect(zero(T_HT),zero(T_H2)));
Pole_H2=setdiff(pole(T_H2),intersect(pole(T_HT),pole(T_H2)));
[z,p,k_HT]=zpkdata(T_HT); [z,p,k_H2]=zpkdata(T_H2);
TMP=(k_HT/k_H2)*CL*zpk(Zero_HT,Zero_H2,1)/zpk(Pole_HT,Pole_H2,1);
% Simplificat CL*T_HT/T_H2
figure; step(TMP); xlabel('msec');
title('raspunsul tensiunii la semnal treapta cu compensare după x2');
grid on;
%
% Afisam raspunsul deplasarii x3 la aplicarea unui semnal treapta pentru x2
Zero_H3=setdiff(zero(T_H3),intersect(zero(T_H3),zero(T_H2)));
Pole_H3=setdiff(pole(T_H3),intersect(pole(T_H3),pole(T_H2)));
Zero_H2=setdiff(zero(T_H2),intersect(zero(T_H3),zero(T_H2)));
Pole_H2=setdiff(pole(T_H2),intersect(pole(T_H3),pole(T_H2)));
[z,p,k_H3]=zpkdata(T_H3); [z,p,k_H2]=zpkdata(T_H2);
% Simplificat CL*T_H3/T_H2
TMP=(k_H3/k_H2)*CL*zpk(Zero_H3,Zero_H2,1)/zpk(Pole_H3,Pole_H2,1);
figure; step(TMP); xlabel('msec');
title('raspunsul lui x3 la semnal treapta cu compensare după x2');
grid on;
%-----
```

Prin rularea programului se obțin următoarele figuri.





ATENȚIE: Toate graficele în timp sunt scalate în milisecunde.

ATENȚIE: Toate dimensiunile x_1 , x_2 , x_3 sunt scalate în zeci de micrometri.

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

8. Urmăriți funcțiile de transfer determinate pentru x_2 (T_{H2}), x_3 (T_{H3}), și tensiunea T (T_{HT}). Ce corelații puteți face cu ecuațiile de stare date?
 9. Care este ecuația caracteristică a acestui sistem?
 10. Ce puteți spune despre răspunsul ieșirii x_3 la semnal rampă, și despre răspunsul tensiunii T la semnal treaptă, fără nici un sistem de compensație (figurile 1 și 3)?
 11. Cum s-a putut corecta răspunsul oferit de MATLAB pentru funcția de transfer T_{HT} ce conține și *zero* și *pol* în origine? (comparați figurile 2 și 3).
 12. Care este sensul fizic al rezultatului din figura 3 (acesta este un răspuns la semnal treaptă)?
 13. Recunoscând că modelul instalației este destul de complex și varianta prezentată de proiectare a compensării este oarecum laborioasă, cum ați povesti în cuvinte simple strategia de compensare pe baza locului rădăcinilor, cu rezultatele din figurile 4, 5 și 6? Cum evoluează locul rădăcinilor de la figura 4 la figura 5, apoi la figura 6?
- Observație:** Locul rădăcinilor prezentat în figura 6 devine instabil pentru $K=3$. Am considerat $K=1$ pentru graficele prezentate în figurile 7,8,9.
14. Care este sensul reprezentării grafice din figura 7? Cum ați denumi distanța dintre cele două linii?
 15. Comparați rezultatele din figurile 7,8 (după compensație) cu răspunsurile din figurile 1,3 (înainte de compensație). Care este sensul valorii finale din figura 8?
 16. Confirmați pe figura 8 valoarea suprareglării pentru controlul după x_2 , și comparați acest rezultat cu valoarea cerută în enunțul problemei de proiectare. De asemenea determinați timpul de stabilizare și comparați cu datele de proiectare.
 17. Cum ați putea reduce oscilația de la începutul răspunsului din figura 9 (care ar putea reprezenta o forță - rezultatul este în Newtons - peste rezistența benzii)?