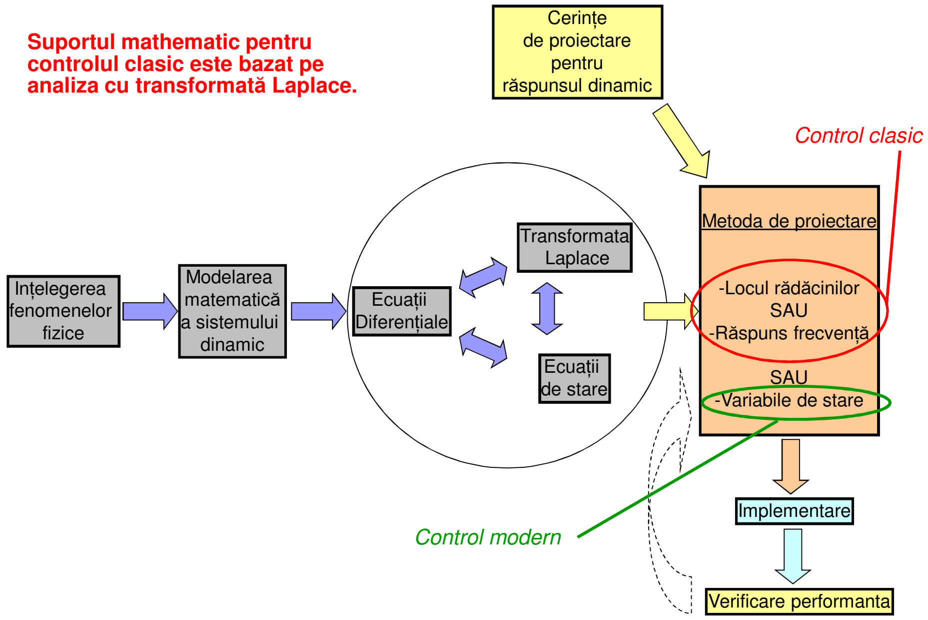
Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 05 = Rolul transformatei Laplace
- Ora 06 = Efectul locației polilor în planul complex
- Ora 07 = Stabilitatea sistemelor
- Ora 08 = Analiza pe calculator. Metode de proiectare asistata de calculator.

Suportul mathematic pentru controlul clasic este bazat pe analiza cu transformată Laplace.



Recapitulare: Transformata Laplace

- Definiție

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

- Se mai numește **transformată Laplace unilaterală** –
  - … pe care o vom considera în continuare
- O funcție de timp are transformata *Laplace* dacă există un număr real $\boldsymbol{\sigma}$ pentru care

$$\lim_{t \to \infty} |f(t) \cdot e^{-\sigma t}| = 0$$

- Transformata *Laplace* poate fi utilizată pentru analiza răspunsului sistemelor, incluzând răspunsul tranzitoriu.
  - Deosebire față de transformata *Fourier* care permite doar analiza regimului staționar.

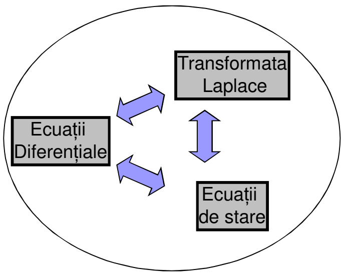
Transformata Laplace– Proprietăți

Proprietate	
Definitie	$f(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s)$ $F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
Liniaritate	$Af_1(t) + Bf_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} AF_1(s) + BF_2(s)$
Derivata	$\frac{df(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sF(s) - f(0^-)$
Derivata de ordinul al 2-lea	$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$
Derivata de ordinul al n-lea	$\frac{d^nf(t)}{dt^n} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}f^{(i-1)}(0^-)$
Integrala	$\int_0^t f(\lambda)d\lambda \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}F(s)$
Multiplicarea cu timp	$tf(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} -\frac{dF(s)}{ds}$
Scalarea timpului	$f(t-a)\gamma(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{-as}F(s)$ $\gamma(t) = \text{unit step}$
Adunarea unei constante in complex	$f(t)e^{-at} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F(s+a)$
Intarzierea	$f\left(\frac{t}{a}\right) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} aF(as)$
Convolutie	$f_1(t) * f_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} F_1(s)F_2(s)$
Teorema valorii initiale	$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
! Teorema valorii finale	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

Denumirea funcției	Funcția original $f(t)$	Transformata Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$
Impuls unitar Dirrac Test semnal impuls	$\delta(t)$	1
Funcția Heaviside Test semnal treapta	$h(t),\ h(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
Semnal polinomial	t	$\frac{1}{s^2}$
	$t^n,\ n \in N$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{t^n}{n!},\ n \in N$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
	$\frac{t^n}{n!}e^{-at},\ n \in N$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
Exponențială	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
Semnale armonice	$\sin t$	$\frac{1}{s^2+1}$
	$\cos t$	$\frac{s}{s^2+1}$
	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Semnale armonice modulate în amplitudine	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Rolul transformatei Laplace

Transformata *Laplace* are rolul de a transforma ecuațiile diferențiale într-o formă algebrică mai ușor de manipulat.



- **Din polii și zerourile transformatei *Laplace* putem determina caracteristicile sistemului, incluzând răspunsul în frecvență sau răspunsul tranzitoriu.**
- Exemplu de analiză: După adăugarea unei reacții pentru îmbunătățirea caracteristicilor dinamice, sistemul poate deveni instabil.

Specificul analizei sistemelor automate de control

Metodele de analiză se aplică unor sisteme simplificate, ce pot fi definite ca fiind **sisteme liniare și invariabile în timp**.

- Un sistem liniar are proprietatea de suprapunere ("*superposition*").
- **Răspunsul unui sistem liniar și invariabil în timp poate fi exprimat ca o convoluție între semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului.**

Suprapunere ("*superposition*")

- Dacă semnalul de intrare se poate descompune într-o sumă de semnale, atunci răspunsul sistemului va fi dat de suma răspunsurilor individuale la fiecare dintre componentele semnalului de intrare.
- Dacă cunoaștem răspunsul sistemului la semnale elementare, putem descompune oricare semnal de intrare într-o sumă de astfel de semnale elementare.

Răspunsul la impuls – Consecință a proprietății de suprapunere

- Conceptul matematic de impuls (***Dirac***) se exprimă prin faptul că impulsul este atât de scurt și atât de intens încât nici o altă valoare a funcției ***u(t)*** nu contează în afara unui domeniu restrâns lângă momentul în care impulsul este aplicat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau = u(t)$$

- Integrala fiind la limită o sumă, se poate spune ca funcția ***u(t)*** se poate reprezenta ca o sumă de impulsuri de intensitate ***u(t-τ).***
  - **Deci, răspunsul la orice intrare arbitrară *u(t)* poate fi aflat dacă știm răspunsul la impuls al sistemului.**
    - Răspunsul unui sistem liniar și invariabil în timp poate fi exprimat ca o convoluție între semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului.

- Dacă știm răspunsul la un impuls, răspunsul la o intrare arbitrară ***u(t)*** se poate afla din răspunsul la un impuls ***h(t,τ)*** :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot h(t,\tau)d\tau$$

unde răspunsul la impuls ***h(t,τ)*** reprezintă răspunsul în momentul de timp ***t***, la impulsul aplicat la momentul ***τ***.

- Dacă sistemul este invariabil în timp, răspunsul la impuls este dat de diferența momentelor de timp ***h(t-τ).***
- Se obține

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot h(t,\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\cdot h(\tau)d\tau$$

- Această relație se numește **integrala de convoluție**
  - Ieșirea unui sistem în domeniul timp, este dată de convoluția între semnalul de intrare și răspunsul la impuls unitar al sistemului.

Exemplu

- Să considerăm un sistem de ordinul întâi, și să calculăm răspunsul la impuls.
  - Deoarece ***δ(t)*** are efect doar lângă zero, considerăm integrala în vecinătatea lui 0.

$$\begin{cases} \dot{y} + k \cdot y = u(t) = \delta(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{0-}^{0+} \dot{y}\, dt + k \cdot \int_{0-}^{0+} y\, dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\, dt \Rightarrow y(0^+) - y(0^-) = 1 \Rightarrow y(0^+) = 1$$

unde integrala lui ***y*** pe un domeniu îngust lângă zero, este "0"; iar integrala lui ***δ(t)*** este "1".

- Deci efectul imediat al impulsului este să modifice brusc ieșirea din "0" la "1".
- Pentru momente de timp după ***0+***, presupunem soluția ***y(t)=Ae^st***.

$$\begin{cases} \dot{y} + k \cdot y = 0 \\ y(0^+) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot s \cdot e^{st} + k \cdot A \cdot e^{st} = 0 \Rightarrow s = -k \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow y(t) \stackrel{\text{def}}{=} h(t) = e^{-kt}, t > 0$$

- Putem defini funcția unitară (*Heaviside*) ***1(t):*** $1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$

  care ne ajută să rescriem răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul întâi:

$$\boxed{h(t) = e^{-kt} \cdot 1(t)}$$

- Folosind integrala de convoluție, determinăm răspunsul sistemului la orice alt semnal de intrare ***u(t):***

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-k\tau} \cdot u(t-\tau) d\tau$$

Funcția de transfer a unui sistem exprimată cu transformata Laplace

- O consecință a convoluției este că aplicarea unui semnal de intrare ***e^st***, semnalul de ieșire va fi dat de ***H(s)*e^st***.
- ***H(s)*** se numește **funcție de transfer a sistemului**, unde ***s*** este un număr complex.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \longleftarrow \textit{Din definiția Laplace (pag.4)}$$

  unde ***h(t)* reprezintă răspunsul sistemului la impuls (*răspuns natural*).**

- O altă consecință este legată de **analiza în frecvență** a unui sistem.
  - Să considerăm aplicarea unui semnal sinusoidal la intrarea unui sistem liniar și invariabil în timp.

$$A \cdot \cos(\omega t) = \frac{A}{2} \cdot \left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right]$$

  - Răspunsul sistemului la cele două exponențiale care formează semnalul ***cos*** este

$$y(t) = \frac{A}{2} \cdot \left[H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} + H(-j\omega) \cdot e^{-j\omega t}\right]$$

  - Funcția de transfer ***H(jω)*** a sistemului este un număr complex care poate fi exprimat cu amplitudine și fază ***(M, φ).*** Semnalul de ieșire va rezulta:

$$y(t) = \frac{A}{2} \cdot \left[M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} \cdot e^{j\omega t} + M(\omega) \cdot e^{-j\phi(\omega)} \cdot e^{-j\omega t}\right] = A \cdot M \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Răspunsul în frecvență exprimat cu transformata Laplace. Exemplu.

- Să se determine răspunsul în frecvență al unui sistem cu funcția de transfer (k=1)

$$H(s) = \frac{1}{s+k} = \frac{1}{s+1}$$

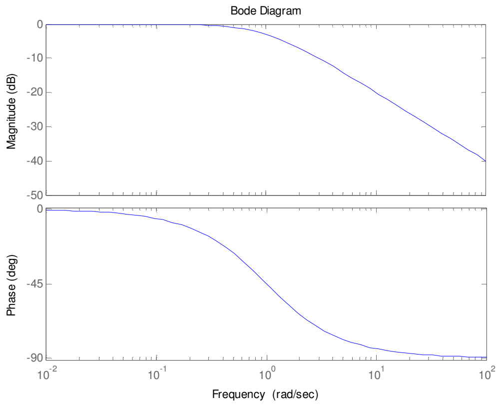
- La fiecare frecvență de interes, putem calcula amplitudinea și faza

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \\ \phi = -\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{k}\right) = -\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{1}\right) \end{cases}$$

- Răspunsul va fi dat de

$$y(t) = A \cdot M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

```
clear;
k=1;
num=1;
den=[1 k];
sysH=tf(num,den);
w=logspace(-2,2);
bode(sysH,w);
```



Transformata Laplace inversă. Exprimarea prin fracții parțiale.

- In multe aplicații este nevoie de determinarea inversei transformatei Laplace, adică determinarea semnalului în domeniul timp ***f(t)*** din transformata Laplace ***F(s).***
- Dacă funcția Laplace ***F(s)*** este rațională, se poate scrie desfășurarea în funcții parțiale:

$$F(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

- Pentru determinarea constantelor C_i, se multiplică fiecare termen cu $s\text{-}p_i$:

$$(s - p_1) \cdot F(s) = C_1 + C_2 \cdot \frac{s - p_1}{s - p_2} + \ldots + C_n \cdot \frac{s - p_1}{s - p_n} \Rightarrow C_1 = \left[(s - p_1) \cdot F(s)\right]\Big|_{s = p_1}$$

- Se obține (*revedeți răspunsul unei funcții de ordinul întâi, la pagina 8*)

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t)$$

Exemplu

$$Y(s) = \frac{(s+2)\cdot(s+4)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+3} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{8}{3}\cdot 1(t) - \frac{3}{2}\cdot e^{-t}\cdot 1(t) - \frac{1}{6}\cdot e^{-3t}\cdot 1(t)$$

Teorema valorii finale

Important

- Proprietate a transformatei Laplace, utilizată în controlul sistemelor automate.
- Cunoscând valoarea finală, putem calcula eroarea staționară.
  - **Ne permite calcularea erorii staționare direct din transformata Laplace.**
- Pentru un caz general caracterizat de o transformată Laplace ***Y(s)*** a unui semnal ***y(t),*** limita la (timp) infinit poate fi constantă, nedefinită, sau infinită.
  - Dacă ***Y(s)*** are poli în partea dreaptă a planului ***s***, atunci ***y(t)*** va crește către o valoare (limită) nelimitată.
  - Dacă ***Y(s)*** are o pereche de poli pe axa imaginară a planului ***s***, atunci ***y(t)*** va conține o sinusoidă care va persista la infinit, determinând o valoare nedeterminată pentru valoarea finală.
  - Dacă ***Y(s)*** nu îndeplinește niciuna dintre aceste două condiții, atunci vom avea o valoare finală constantă la infinit.
- **Teorema valorii finale** se poate enunța: *Dacă toți polii lui **s*Y(s)** sunt în partea stângă a planului complex (sistemul este stabil), atunci valorea finală se poate calcula cu*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s)}$$

Important

Exemplu

$$Y(s) = \frac{3\cdot(s+2)}{s\cdot(s^2+2\cdot s+10)} \Rightarrow y(\infty) = s\cdot Y(s)\Big|_{s=0} = \frac{3\cdot 2}{10} = 0.6$$

Observații finale

- Transformata Laplace poate fi utilizată pentru analiza răspunsului sistemelor, incluzând răspunsul tranzitoriu.
  - Un sistem liniar are proprietatea de suprapunere (“*superposition*”).
- Răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp poate fi exprimat ca o convoluție între semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului.
  - O consecință a convoluției este că la aplicarea unui semnal de intrare e^{st}, semnalul de ieșire va fi dat de ***H(s)**** e^{st}.
    - ***H(s)*** se numește **funcție de transfer a sistemului.**
- Transformata inversă de la funcția de transfer a sistemului în domeniul timp reprezintă **răspunsul la semnal impuls (răspuns natural).**

1
  - **Răspunsul la semnal impuls oferă informații despre stabilitatea sistemului.**

Important

2
- **O alta consecință este legată de analiza în frecvență (*Bode*)**
- **Teorema valorii finale permite calcularea erorii staționare direct din transformata Laplace.**

3
  - Teorema valorii finale se poate enunța:
    - Dacă toți polii lui ***s*Y(s)*** sunt în partea stângă a planului complex, atunci

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s)$$

Important

  - **Teorema valorii finale se folosește la determinarea erorii staționare.**

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 06 = Efectul locației polilor în planul complex

Poli și zerouri în funcția de transfer

- O funcție de transfer rațională poate fi scrisă ca un raport de două expresii polinomiale:

$$H(s) = \frac{b_1 \cdot s^m + b_2 \cdot s^{m-1} + \ldots + b_{m+1}}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \ldots + a_n} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

  sau într-o formă factorială

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

- Rădăcinile numărătorului se numesc ***zero-uri.***
  - ***Zero***-urile sunt locații din planul complex unde funcția de transfer este nulă.
    - **Sistemul are capabilitatea de a bloca frecvențele ce coincid cu zerourile.**
    - Dacă la intrarea unui sistem se aplică un semnal $u(t) = u_0 \cdot e^{s_0 \cdot t}$

    unde $\boldsymbol{s_0}$ este ***zero*** al sistemului (dar nu este și ***pol)***, atunci semnalul de ieșire devine egal cu 0.
- *Vom studia mai târziu efectul zerourilor în regimul tranzitoriu.*

Poli și zerouri în funcția de transfer

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

- Rădăcinile numitorului se numesc ***poli (engleza: "poles").***
- ***Polii*** sunt locații în planul complex unde funcția de transfer capătă o valoare infinită.
  - Se observă că polii unui sistem determină stabilitatea sistemului:

  La frecvențe egale cu frecvența polilor, sistemul devine instabil.

Alte observații

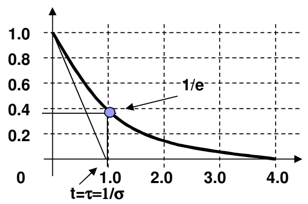
- Orice funcție de transfer descriind un sistem fizic va avea mai mulți poli decât zerouri (***n > m)***, altfel va tinde la infinit la frecvențe mari.
- Un sistem are ***n-m*** zero-uri la infinit, deoarece funcția de transfer se apropie de "***0***" când "***s"*** tinde la infinit.

Răspunsul la impuls = răspunsul natural al sistemului

- Să considerăm funcția de transfer a unui sistem dată de un raport între două expresii polinomiale.
- Răspunsul la o funcție de intrare impuls va fi o funcție de timp ce corespunde echivalentului în domeniul timp al funcției de transfer.
  - Răspunsul la impuls se mai numește ***răspuns natural*** al sistemului.
  - Polii funcției de transfer determină componentele în domeniul timp, după descompunerea în funcții de primul ordin.
- Să considerăm cazul simplificat al unei funcții de transfer de primul ordin (pag.9)

$$H(s) = \frac{1}{s+\sigma} \Rightarrow h(t) = e^{-\sigma \cdot t} \cdot 1(t)$$

  - Dacă ***σ > 0***, funcția exponențială este descrescătoare, și sistemul este stabil.
  - Dacă ***σ < 0***, funcția exponențială este crescătoare, și sistemul este instabil.
- Răspunsul la impuls



Constanta de timp ***τ***= momentul în care funcția devine ***1/e (= e^-1^)***, și reprezintă o măsură a ratei de scădere a funcției.

Reprezentarea polilor și zerourilor în planul complex. Exemplu.

- Să revenim la locația în planul complex a polilor și zerourilor.
- Considerăm un **exemplu**:

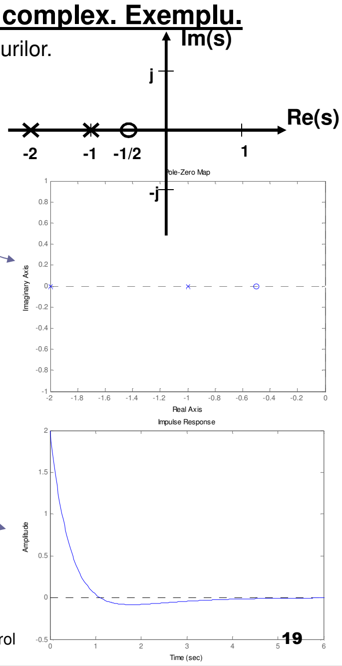
$$H(s)=\frac{2\cdot s+1}{s^2+3\cdot s+2}=2\cdot\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+1)\cdot(s+2)}=-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

```
num=[2 1];
den=[1 3 2];
pzmap(num,den);
```

- Din tabelul funcțiilor *Laplace*, determinăm echivalentul în domeniul timp (răspuns la impuls):

$$h(t)=\begin{cases}-e^{-t}+3\cdot e^{-2t}, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}=\left(-e^{-t}+3\cdot e^{-2t}\right)\cdot 1(t)$$

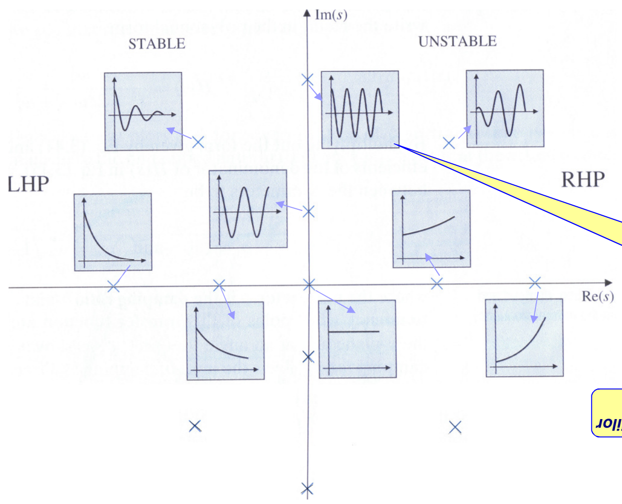
```
numH=[2 1];
denH=[1 3 2];
sysH=tf(numH,denH);
impulse(sysH);
```



Funcții de timp asociate cu poli în planul complex ("*fast poles*" și "*slow poles*")

- Forma răspunsului natural (răspunsul la impuls) este dată de locația polilor din funcția de transfer.
- **Răspunsul la impuls ne dă informații despre stabilitatea sistemului.**

Important



De ce este mai avantajos răspunsul la impuls față de răspunsul la semnal treaptă pentru analiza unui oscilator?

Amplitudinea oscilațiilor este 1/ω

Poli dominanți versus poli nesemnificativi

- Polii situați cel mai aproape de axa imaginară determină un timp de răspuns mare (evoluție lentă a sistemului)
- Polii situați la frecvențe mari determină un răspuns rapid al sistemului.
- Dacă sistemul este compus din poli cu răspuns lent și poli cu răspuns rapid, răspunsul sistemului compus va fi determinat de polii lenți, pe care îi vom denumi **poli dominanți**.
  - **Într-un sistem compus, putem neglija efectul polilor foarte rapizi în fața polilor cu răspuns lent (dominanți), deoarece răspunsul sistemului va fi similar.**

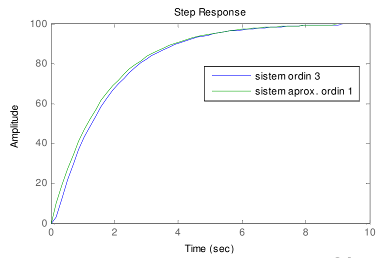
Exemplu

$$H(s) = \frac{K}{(s+p)\cdot(s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2)}$$

Dacă polii complex conjugați sunt mult mai rapizi decât polul simplu ***p*** (***ζω >> 10p***), sistemul ***H(s)*** se va comporta similar unui sistem de primul ordin, cu polul dominant ***p***.

$$H(s) = \frac{6000}{(s+0.6)\cdot(s^2+12\cdot s+100)} \approx \frac{6000/100}{s+0.6}$$

```
pol1=[1 0.6];
pol2=[1 12 100];
den=conv(pol1,pol2);
H=6000*tf(1,den);
Hd=60*tf(1,pol1);
step(H); hold on; step(Hd);
```



Similar pentru poli dominanți complex conjugați.

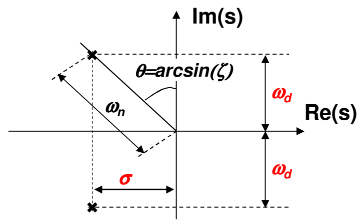
Amortizarea în domeniul timp, legată de polii complex conjugați (1).

- **Un caz special îl reprezintă perechile de poli complex conjugați:** $\boxed{s = -\sigma \pm j\cdot\omega_d}$
- Numitorul funcției de transfer va avea un termen

  $a(s) = (s+\sigma-j\cdot\omega_d)\cdot(s+\sigma+j\cdot\omega_d) = (s+\sigma)^2+\omega_d^2$
- In general, expresia funcției de transfer cu doi poli

  $$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\cdot\varsigma\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\varsigma\cdot\omega_n)^2+\omega_n^2\cdot(1-\varsigma^2)}$$
- Prin echivalare între cele două forme, obținem partea reală și imaginară:

  $\mathrm{Re}: \sigma = \varsigma\cdot\omega_n \quad \mathrm{Im}: \omega_d = \omega_n\cdot\sqrt{1-\varsigma^2}$
  - unde ζ reprezintă factorul de amortizare, iar ω_n este frecvența naturală (egală cu frecvența de oscilație doar în cazul $\zeta = 0$).
- Reprezentarea grafică în planul complex:



- Răspunsul în domeniul timp corespunzător funcției de transfer ***H(s)***

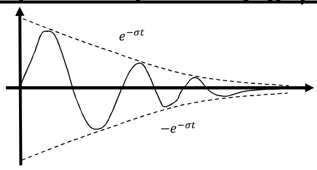
  $$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\cdot e^{-\sigma t}\cdot(\sin\omega_d\cdot t)\cdot 1(t)$$

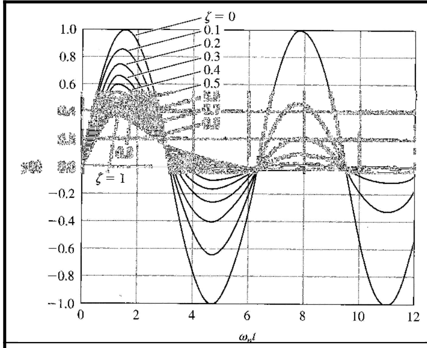
Amortizarea în domeniul timp, legată de polii complex conjugați (2).

Răspunsul la semnal impuls

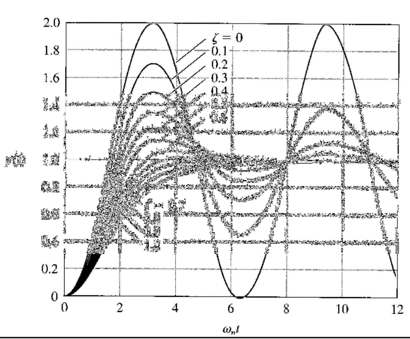
$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}} \cdot e^{-\sigma t} \cdot (\sin \omega_d \cdot t) \cdot 1(t)$$

$$\sigma = \varsigma \cdot \omega_n \quad \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1-\varsigma^2}$$





Răspunsul la impuls



Răspunsul la treaptă

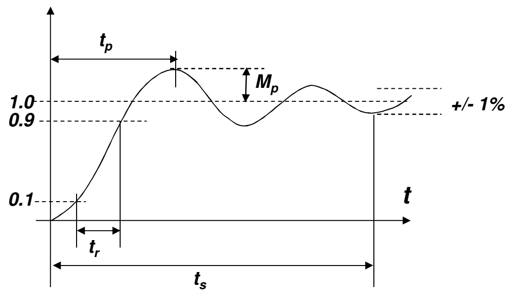
Important

Specificații de proiectare în domeniul timp (1).

- Caracterizarea regimului dinamic ca o cerință de proiectare se face în domeniul timp.
- De obicei, aceste cerinte sunt derivate din **răspunsul la semnal treaptă** (formulele de calcul sunt date aici pentru cazul unei perechi de poli complex conjugați și sunt formule aproximative).
- Vom furniza formule matematice pentru cazul unui **sistem de ordinul doi, fără *zero*-uri**.

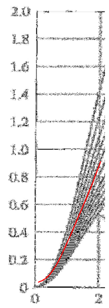
(multe sisteme se pot reduce la doi poli dominanți complex conjugați).

- Timpul de creștere ***(rise time, t_r)***
- Timpul de atingere regim staționar 1% ***(settling time, ts)***
- Suprareglare ***(Overshoot, Mp)***
- Timpul de atingere vârf (***Peak time, tp)***



Specificații de proiectare în domeniul timp (2).

- Timpul de creștere ***(rise time, t_r)***
  - Observăm că timpii de creștere sunt comparabili (pag.23)



  - Considerăm o valoare medie pentru cazul ***ζ = 0.5 → 1.8*** (*pe grafic, pag.23*)

$$\boxed{t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n}}$$

- Timpul de atingere regim staționar 1% ***(settling time, ts)***
  - Se calculează pentru o eroare sub 1% → termenul exponențial

$$e^{-\varsigma\cdot\omega_n\cdot t_s} = 0.01 \Rightarrow \varsigma\cdot\omega_n\cdot t_s = 4.6 \Rightarrow t_s = \frac{4.6}{\sigma}$$

- Suprareglare ***(Overshoot, M_p) și timp de atingere vârf (t_p)***

Specificații de proiectare în domeniul timp (3).

- Soluție analitică pentru atingerea maximului (*la suprareglare*):

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma\cdot t}\cdot\left[\cos(\omega_d\cdot t) + \frac{\sigma}{\omega_d}\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right] = 1 - e^{-\sigma\cdot t}\cdot\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega_d^2}}\cdot\cos(\omega_d\cdot t - \beta)$$

unde

$$\beta = \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)$$

- In momentul de atingere a maximului, derivata va fi nulă.

$$\dot{y}(t) = \sigma\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot\left[\cos(\omega_d\cdot t) + \frac{\sigma}{\omega_d}\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right] - e^{-\sigma\cdot t}\cdot[-\omega_d\cdot\sin(\omega_d\cdot t) + \sigma\cdot\cos(\omega_d\cdot t)] =$$

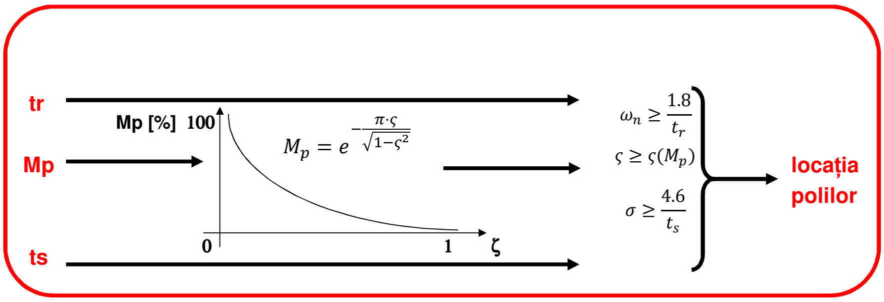
$$= e^{-\sigma\cdot t}\cdot\left[\frac{\sigma^2}{\omega_d}\cdot\sin(\omega_d\cdot t) + \omega_d\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right] = 0 \Rightarrow \sin(\omega_d\cdot t) = 0 \Rightarrow (\omega_d\cdot t_p) = \pi \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\cdot\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}$$

Specificații de proiectare în domeniul timp (4).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad\qquad M_p = e^{-\frac{\pi \cdot \varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}$$

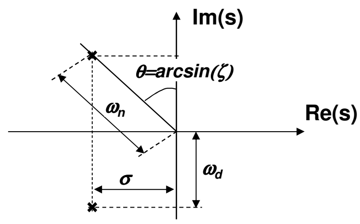
- De obicei, se construiesc tabele cu aceste corespondențe neliniare.
- Cerințele de proiectare includ ***tr, Mp, tp, ts,*** pe baza cărora se determină locația polilor pentru ca răspunsul în timp să fie mai bun decât aceste cerințe.



Specificații de proiectare în domeniul timp (5).

Exemplu: Să se găsească regiunea din planul complex în care trebuie să se afle rădăcinile numitorului unei funcții de transfer de ordinul doi (poli de forma $s = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$) pentru a obține următoarele performanțe:

$t_r \leq 0.6\text{sec}$
$M_p \leq 10\%$
$t_s \leq 3\text{sec}$

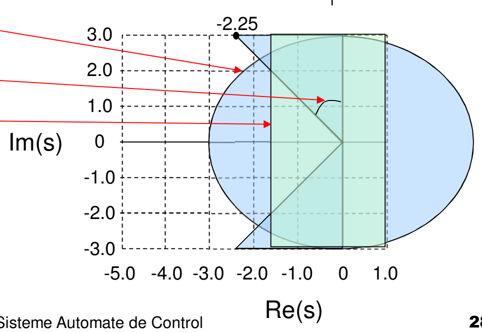


- Aplicând formulele precedente, se obține:

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} = 3.0 rad/\text{sec}$$

$$e^{-\frac{\pi \cdot \varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}} \leq 0.1 \Rightarrow \varsigma \geq 0.6 \Rightarrow \theta \geq 36.86^0$$

$$\sigma \geq \frac{4.6}{3} = 1.5\text{sec}$$



Observație:
*Zonele colorate **NU** satisfac condițiile de proiectare*

Efectul adăugarii unor zerouri (1)

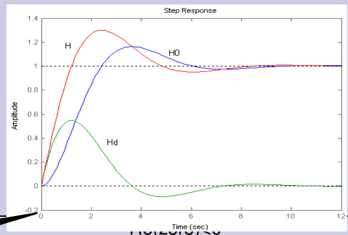
- Să considerăm un ***zero*** atașat la aceeași funcție de transfer de ordinul doi.
  - Vom considera un caz general ce depinde de un parametru α.

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\cdot\varsigma\cdot\omega_n+\omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\cdot\varsigma\cdot\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1} \to H(s) = \frac{\left(\frac{s}{\alpha\cdot\varsigma\cdot\omega_n}\right)+1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\cdot\varsigma\cdot\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1}$$

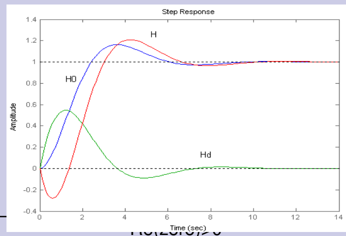
- H_d este echivalentă cu funcția originală plus derivata funcției originale.

$$H(s) = \frac{\left(\frac{s}{\alpha\cdot\varsigma\cdot\omega_n}\right)+1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\cdot\varsigma\cdot\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\cdot\varsigma\cdot\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1} + \frac{\left(\frac{s}{\alpha\cdot\varsigma\cdot\omega_n}\right)}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\cdot\varsigma\cdot\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1} = H_0(s) + \left(\frac{1}{\alpha\cdot\varsigma\cdot\omega_n}\right)\cdot s\cdot H_0(s)$$

```
clear;
numH0=[1];
numHd=[1 0];
denH0=[1 1 1];
H0=tf(numH0,denH0);
Hd=tf(numHd,denH0);
step(H0); gtext('H0');
pause; hold on;
step(Hd); gtext('Hd');
pause; hold on;
H=H0-Hd;
step(H); gtext('H');
```



α>0



α<0 ("*non-minimum phase zero*")

Grafice pentru ***$\omega_n = 1$; $\zeta = 0.5$, $\alpha = \pm 2$***

Efectul adaugării unor zerouri (2)

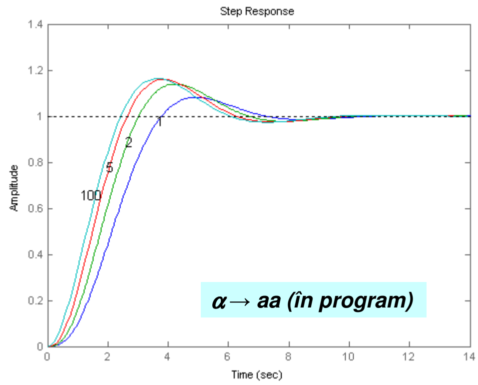
- Se observă câteva cazuri
  - Dacă ***zero***-ul este apropiat de partea reală a polilor (număr real negativ).
    - Efectul major este acela de a crește suprareglarea ***Mp*** ("***overshoot"***), dar nu are influență în timpul de atingere a regimului staționar.
  - Dacă ***zero***-ul are $\alpha \to \infty$, și este departe față de partea reală a polilor
    - Nu avem o influență majoră în răspunsul în timp.
  - Dacă ***zero***-ul are $\alpha < 0$, zero este în partea dreaptă a planului complex
    - Sistem cu fază neminimă ("***non-minimum phase zero"***),
    - Răspunsul la semnal treaptă, în domeniul timp, parcurge un domeniu negativ, la început, apoi revine la valori pozitive și urcă la valoarea dorită de treaptă.
    - Acest caz trebuie privit în particular.

Efectul unor poli adiționali

- Să considerăm adăugarea unui nou pol la funcția de transfer de ordinul doi.

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\alpha \cdot \varsigma \cdot \omega_n} + 1\right) \cdot \left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \varsigma \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right]}$$

```
clear;
numG=[1];
denG=[1 1 1];
sysG=tf(numG,denG);
step(sysG); hold on;
aa=[1 2 5 100];
for i=1:4
  numH=[1];
  A=[1 1 1]; B=[1/aa(i) 1];
  denH=conv(A,B);
  sysH=tf(numH,denH);
  step(sysH); hold on;
end
gtext('1');
gtext('2');
gtext('5');
gtext('100');
```



- Un pol apropiat de cei existenți va crește timpul de răspuns (“*va încetini creșterea formei de undă*”).
- Răspunsul pentru ***α = 100*** se suprapune pe cel original (un pol adițional departe de cei inițiali nu influențează răspunsul: “*departe*”= frecvențe de 10-100 de ori mai mari).

Observații finale

- Forma răspunsului natural este determinată de locația polilor din funcția de transfer.

- Legătura dintre locația polilor și parametrii răspunsului tranzitoriu se pot aproxima cu (<u>*formule date pentru sisteme de ordinul 2*</u>):

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} \qquad \varsigma \geq \varsigma(M_p) \qquad \sigma \geq \frac{4.6}{t_s} \quad \Leftrightarrow \quad M_p = \begin{cases} 5\% \\ 10\% \\ 15\% \\ 20\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 35\% \\ 40\% \\ 45\% \\ 50\% \end{cases} \Rightarrow \varsigma \cong \begin{cases} 0.690 \\ 0.591 \\ 0.517 \\ 0.456 \\ 0.404 \\ 0.358 \\ 0.317 \\ 0.280 \\ 0.242 \\ 0.216 \end{cases}$$

<u>**Efectul unui *zero* adițional**</u>:

- Un ***zero*** în stânga planului complex va crește suprareglarea (“***overshoot***”, Mp) dacă zero-ul este foarte aproape de partea reală a polilor complecsi (până la un ordin de 4).
- Un ***zero*** în partea dreaptă a planului complex va relaxa suprareglarea și va determina o mică excursie în domeniul negativ a răspunsului în domeniul timp.

<u>**Efectul unui *pol* adițional:**</u>

- Adăugarea de poli în partea stângă a planului complex, va crește timpul de creștere (va încetini răspunsul) dacă noul pol este foarte aproape de partea reală a polilor complecsi (până la un ordin de 4).

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 07 = Stabilitatea sistemelor

Stabilitatea sistemelor. Definiții.

- Un sistem este stabil dacă condițiile inițiale converg către zero (regimul tranzitoriu scade), și este instabil dacă în timp semnalul de ieșire devine divergent.
- Vom studia stabilitatea pentru sisteme liniare și invariante în timp:
  - Este mai dificil de studiat stabilitatea pentru sisteme neliniare și/sau cu model variabil în timp.
  - **Un sistem liniar și invariabil în timp este stabil dacă toate rădăcinile numitorului polinomial al funcției de transfer (*polii*) au părți reale negative.**
    - Altă exprimare – toți polii sunt în partea stângă a planului complex.
  - Dacă un pol este în partea dreaptă a planului complex, sistemul este instabil; iar daca $\boldsymbol{\sigma = 0}$ sistemul prezintă oscilații întreținute.
- **Vom prezenta o metodă de studiu a stabilității unui sistem liniar, invariabil în timp (*Criteriul Routh*).**
- Alte metode de analiză a stabilității:
  - Metoda Nyquist bazată pe răspunsul în frecvență *(reluat în cursul 5, modulul 18)*
  - Metoda Lyapunov derivată din ecuațiile de stare *(nu se predă în acest curs)*

Stabilitatea sistemelor liniare și invariante în timp. Teorie.

- Să considerăm cazul general $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$

în care definim <u>ecuația caracteristică</u> $s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$

- Considerând ***s*** ca un operator de derivare, forma generală a soluției ecuației diferențiale ce corespunde acestei ecuații caracteristice va fi:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot e^{p_i \cdot t}$$

unde p_i sunt rădăcinile ecuației (***polii*** funcției de transfer).

- Se observă că sistemul este stabil dacă și numai dacă fiecare termen din soluția ***y(t)*** converge la zero când timpul converge la infinit, ceea ce se întamplă dacă toate soluțiile au partea reală negativă (toți polii sunt in LHP).

$$\mathrm{Re}(p_i) < 0$$

- Această definiție a stabilității se mai numește **<u>stabilitate internă</u>**.
- Se observă că axa imaginară ***<jω>*** reprezintă frontiera între regiunea de stabilitate și cea de instabillitate.
  - Un sistem cu soluții simple pe această axă are **<u>stabilitate neutră</u>** (oscilații întreținute, de amplitudine constantă).
  - Dacă există soluții multiple pe axa ***jω***, sistemul este instabil.

Stabilitatea sistemelor. Criteriul Routh (1).

- Dacă locația polilor nu este evidentă din funcția de transfer, se poate utiliza

criteriul de stabilitate Routh –

permite obținerea de informații despre rădăcini <u>fără rezolvarea</u> ecuației caracteristice.

$$a(s) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + a_n$$

- O <u>condiție necesară</u> pentru stabilitate este ca toate rădăcinile să aibă părți reale negative, ceea ce este echivalent cu cerința ca toți coeficienții a_i să fie pozitivi.
  - Dacă această condiție este îndeplinită, avem nevoie de un test mai puternic.

- Criteriul Routh cere calcularea unei matrici triunghiulare care este o funcție de coeficienții polinomiali $\{a_i\}$.
  - O <u>condiție necesară și suficientă</u> de stabilitate este dacă toate elementele din prima coloană a acestei matrici Routh sunt pozitive.

Stabilitatea sistemelor. Criteriul Routh (2).

O condiție necesară și suficientă de stabilitate este dacă toate elementele din prima coloană a acestei matrici Routh sunt pozitive.

Calcularea matricei Routh:

1. Aranjăm coeficienții pe două rânduri:

$$\begin{array}{lllll} s^n & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \end{array}$$

2. Adaugăm rânduri succesive să completăm matricea triunghiulară Routh:

$$\begin{array}{llccccc} Row\_n & s^n & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ Row\_n-1 & s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ Row\_n-2 & s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ Row\_n-3 & s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Row\_2 & s^2 & * & * & * & \\ Row\_1 & s^1 & * & * & & \\ Row\_0 & s^0 & * & & & \end{array}$$

unde

$$b_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_3}{a_1}$$

$$b_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_5}{a_1}$$

$$b_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_7}{a_1}$$

$$c_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_3 - b_2 \cdot a_1}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_5 - b_3 \cdot a_1}{b_1}$$

$$c_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_7 - b_4 \cdot a_1}{b_1}$$

Stabilitatea sistemelor. Criteriul Routh. Exemplu (3).

- Să considerăm un exemplu numeric. Fie ecuația caracteristică:

$$a(s) = s^6 + 4 \cdot s^5 + 3 \cdot s^4 + 2 \cdot s^3 + s^2 + 4 \cdot s + 4$$

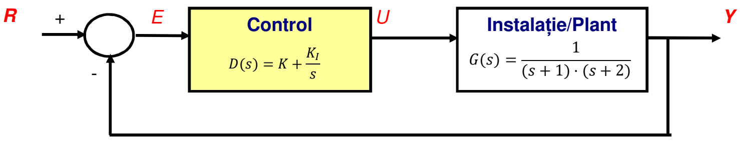
- Condiția necesară este îndeplinită deoarece toți coeficienții sunt pozitivi.
- Să calculăm matricea Routh :

$$\begin{array}{lcccc} s^6 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ s^5 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ s^4 & \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2} & \frac{4 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{4} = 0 & \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 0}{4} = 4 & \\ s^3 & \frac{{}^5/_2 \cdot 2 - 4 \cdot 0}{{}^5/_2} = 2 & \frac{{}^5/_2 \cdot 4 - 4 \cdot 4}{{}^5/_2} = \frac{-12}{5} & 0 & \\ s^2 & \frac{2 \cdot 0 - {}^5/_2 \cdot \left({}^{-12}/_5\right)}{2} = 3 & \frac{2 \cdot 4 - \left({}^5/_2 \cdot 0\right)}{2} = 4 & & \\ s^1 & \frac{3 \cdot \left({}^{-12}/_5\right) - 8}{3} = \boxed{\frac{-76}{15}} & 0 & & \\ s^0 & \frac{\left({}^{-76}/_{15}\right) \cdot 4 - 0}{\left({}^{-76}/_{15}\right)} = 4 & & & \end{array}$$

- Elementele din prima coloană nu sunt toate pozitive, deci avem rădăcini în partea dreaptă a planului complex, deci <u>sistemul NU este stabil</u>.

Stabilitate versus domeniul de variație al parametrilor

- De multe ori problema de proiectare se referă la determinarea domeniului permis de variație a unor parametri pentru a avea stabilitate.
- Fie exemplul din figură la care se cere domeniul de variație a constantelor ***K, Ki*** pentru stabilitate.



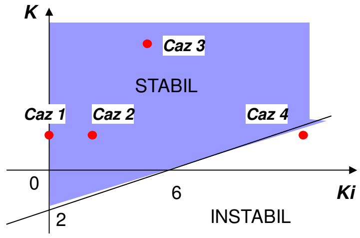
- Ecuația caracteristică (numitorul) a sistemului în buclă închisă este

$$1 + D(s)\cdot G(s) = 1 + \left(K + \frac{K_i}{s}\right)\cdot\frac{1}{(s+1)\cdot(s+2)} = 0$$

$$s\cdot(s+1)\cdot(s+2) + (s\cdot K + K_i) = 0 \Rightarrow\ s^3 + 3\cdot s^2 + (2+K)\cdot s + K_i = 0$$

- Matricea Routh se calculează

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2+K \\ s^2 & 3 & K_i \\ s^1 & \dfrac{(6+3\cdot K - K_i)}{3} & \\ s^0 & K_i & \end{array}$$

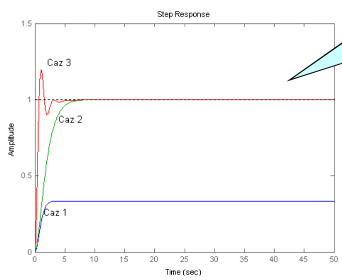


- Condițiile de stabilitate devin ***Ki>0*** și ***K>(1/3)Ki-2*** ***=>***
- Alegem câteva seturi de valori pentru analiză.

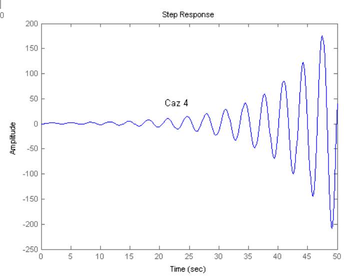
Stabilitate versus domeniul de variație al parametrilor (2 parameteri)

- Răspuns la semnal treaptă

```
clear;
K=1; Ki=0;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 1'); hold on;
axis([0 50 0.0 1.5]);

K=1; Ki=1;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 2'); hold on;

K=10; Ki=5;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 3'); hold on;

figure;

K=1; Ki=12;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 4');
axis([0 50 0.0 15]);
```



Zero-ul (***Ki/K***) mai aproape de origine (-0.5 @ Caz3 față de -1.0 @ Caz2) produce o scădere substanțială a t_r ***(răspuns mai rapid)***



Cazuri speciale la aplicarea criteriului Routh (1)

- Dacă un element pe prima poziție dintr-un rând este zero, atunci putem înlocui acest zero cu o valoare mică $\boldsymbol{\varepsilon}$ și calcula apoi limita $\boldsymbol{\varepsilon \to 0}$.
- Exemplu:
  $a(s) = s^5 + 3 \cdot s^4 + 2 \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 + 6 \cdot s + 9$
- Matricea Routh:

$$\begin{array}{cccc}
s^5 & 1 & 2 & 6 \\
s^4 & 3 & 6 & 9 \\
s^3 & 0 & 3 & 0 \\
s^3 & \boxed{\varepsilon} & 3 & 0 \\
\hline
s^2 & \dfrac{2 \cdot \varepsilon - 3}{\varepsilon} & 3 & 0 \\
s^1 & 3 - \dfrac{3 \cdot \varepsilon^2}{2 \cdot \varepsilon - 3} & 0 & 0 \\
s^0 & 3 & 0 &
\end{array}$$

- Aplicând limita, se observă două schimbări de semn, deci vor fi două rădăcini cu partea reală pozitivă - instabilitate.

Cazuri speciale la aplicarea criteriului Routh (2)

- Alt caz special atunci când un întreg șir de valori este zero.
- Aceasta indică existența unor (sau unei) perechi de rădăcini complex conjugate, pe axa imaginară sau simetrice față de axa imaginară.
- Vom forma o ecuație auxiliară cu coeficienții rândului precedent din matrice, și plasăm coeficienții derivatei acestei noi ecuații pe rândul următor.

Exemplu: $a(s) = s^5 + 5 \cdot s^4 + 11 \cdot s^3 + 23 \cdot s^2 + 28 \cdot s + 12$

- Calculăm matricea Routh:

$$\begin{array}{cccc}
s^5 & 1 & 11 & 28 \\
s^4 & 5 & 23 & 12 \\
s^3 & \dfrac{5 \cdot 11 - 23}{5} = 6.4 & \dfrac{5 \cdot 28 - 12}{5} = 25.6 & 0 \\
s^2 & 3 & 12 & \leftarrow a_1(s) = 3 \cdot s^2 + 12 \\
s^1 & 0 & 0 & \\
s^1 & 6 & 0 & \leftarrow \dfrac{da(s)}{dt} = 6 \cdot s \\
s^0 & 12 & &
\end{array}$$

- Nu avem schimbare de semn în prima coloană, deci toate rădăcinile au părți reale negative cu excepția unei perechi pe axa imaginară.

Observații finale

- Un sistem stabil are toți polii funcției de transfer situați în partea stângă a planului complex.
- **Un sistem este stabil dacă și numai dacă toate elementele din prima coloană a matricei Routh sunt pozitive.**
  - Metoda de determinare a matricei Routh a fost prezentată.

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 08 = Analiza pe calculator. Metode de proiectare asistata de calculator.

Analiza pe calculator. Metode de proiectare.

Dezvoltarea calculatoarelor a permis automatizarea tuturor fazelor procesului de proiectare:

- Modelarea sistemelor pe baza datelor experimentale
  - Folosirea datelor din măsurarea directă a răspunsului tranzitoriu.
  - Folosirea datelor din măsurarea directă a răspunsului in frecvență.
  - Colectarea de date stocastice pentru regimul staționar.
  - Folosirea datelor din măsurarea directă a răspunsului la injectarea unui zgomot pseudo-aleatoriu.
- Simularea în domeniul timp a comportării sistemelor, prin rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale
  - Ecuații diferențiale neliniare
    - Metoda de integrare Euler
    - Metoda de integrare Runge-Kutta
  - Ecuații diferențiale liniare
    - Metoda ecuațiilor de stare.
- Proiectare asistată de calculator
  - Utilizarea mediului MATLAB pentru proiectarea pe baza unor metode cunoscute.
    - Metoda răspunsului in frecvență
    - Metoda locului rădăcinilor
    - Metoda ecuațiilor de stare
  - Dezvoltarea unor ***GUI*** pentru automatizarea proiectării în MATLAB.

Modelarea sistemelor pe baza datelor experimentale

Se recomandă construirea modelelor din date experimentale deoarece:

- De multe ori, informații despre modelul (comportarea) sistemului nu sunt disponibile
  - Fenomenele fizice nu sunt înțelese bine
  - Sistemul este foarte complex, greu de definit matematic
  - Nu avem acces complet la structura internă a sistemului pentru a construi un model teoretic
  - Modelul este în continuă schimbare și depinde de parametrii de operare, deci trebuie actualizat periodic.
- Orice model teoretic este (de fapt) o aproximare a realitații și trebuie comparat sau verificat cu rezultatele experimentale.

Modelarea sistemelor pe baza datelor experimentale

Metoda	Avantaje	Dezavantaje
Răspuns tranzitoriu	- Usor de obținut - Dezvoltă modele fiabile	- Trebuie aplicată o treaptă destul de mare (S/N) - Nu întotdeauna aproximează operația normală a sistemului - Rezultatele nu sunt ușor de convertit in modele ***poli-zero***-uri
Răspuns în frecvență	- Usor de obținut - Avem direct modelul in frecvență	- Poate lua mult timp - Trebuie aplicat un semnal destul de mare (S/N)
Răspuns staționar stocastic (colectarea de date de operare, fără teste speciale)	- Atractiv, deoarece nu trebuie să aplicăm semnale speciale	- Calitatea informației poate fi inconsistentă - Poate ascunde anumite aspecte, sau anumite dinamici. - Necesită algoritmi complecsi de deducere a modelului.
Aplicarea de zgomot pseudo-aleatoriu	- Zgomot construit prin metode digitale, cum ar fi PRBS (***pseudo-random binary signal***).	- Modelul poate fi creat doar de un calculator puternic.

- Construirea modelelor sistemelor din date experimentale fac parte din **identificarea sistemelor**, o disciplină de sine-stătătoare.

Modelarea sistemelor de baza datelor experimentale

- **Identificarea sistemelor** se bazează pe metode statistice pentru construirea modelelor matematice ale sistemelor dinamice.

- Pentru reducerea efortului de colectare de date, este necesară proiectarea optimala a procesului de colectare de date – proiectarea optimală a experimentelor (“*design of experiments*”).

Simularea în domeniul timp a comportării sistemelor, prin rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale

- Ecuații diferențiale neliniare = ecuațiile pot fi scrise doar ca
  $\dot{x} = f(x,u)$
  - Metoda de integrare Euler
    $$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = f(x_i, u_i) \Rightarrow x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot f(x_i, u_i)$$
  - Metoda de integrare Runge-Kutta
    - Mai multe forme posibile, discutăm aici metoda de ordinul al doilea
    - Determină o valoare aproximativă a lui x(i+1) cu ajutorul metodei Euler
    - Estimează derivata în acest punct, apoi recalculeaza x(i+1) cu o medie a derivatelor

    $$k_1 = f(x_i, u_i)$$
    $$k_2 = f(x_i + k_i \cdot \Delta t, u_{i+1})$$
    $$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot (k_1 + k_2)$$
- Ecuații diferențiale liniare
  - Metoda ecuațiilor de stare.
    - Ecuațiile diferențiale se pot rescrie ca un sistem de ecuații de primul ordin

    $$\dot{x} = F \cdot x + G \cdot u$$
    - Pentru care avem mecanisme automate de rezolvare.

Proiectare asistată de calculator

- Analiza se face cu programe dedicate analizei sistemelor dinamice.
- Un astfel de program este MATLAB
  - Oferă facilități de analiză de sistem, și raportare grafică a rezultatelor
  - Lucrează împreună cu *Control Systems Toolbox*
    - Construiește și manipulează modele liniare și invariabile în timp
      - Funcții de transfer definite prin poli-zerouri sau fracție
      - Ecuații de stare (ecuații diferențiale de primul ordin în variabilă de stare)
      - Ecuații diferențiale
      - Modele pe baza unor date experimentale
      - Oferă optimizarea modelelor LTI prin reducerea ordinului
    - Analizează aceste modele și desenează răspunsurile lor în frecvență.
    - Proiectează compensare folosind metoda locului rădăcinilor și tehnici de plasare optimă a polilor.
  - Oferă diverse GUI (*Graphical user Interface*) pentru proiectarea asistată de calculator.
    - Vizualizarea răspunsului în timp al sistemelor ***ltiview***
    - Proiectarea structurilor de compensare tipice ***pidtool***
    - Proiectarea rețelelor de compensare în mod interactiv ***sisotool***
  - Oferă conversie automată a modelelor LTI în modele digitale, pentru implementare pe microcontroler.

Proiectare asistata de calculator

- MATLAB-SIMULINK
  - Conține o bibliotecă de modele utilizabile ca blocuri în construcția sistemului de analizat.
  - Reprezentarea grafică intuitivă a sistemelor, la nivel de bloc/module
  - Oferă o modalitate de simulare a comportării sistemelor dinamice în domeniul timp
  - Analiza în domeniul timp, cu vizualizarea tuturor formelor de undă, precum și posibilități de salvare date, pentru post-procesare în mediul MATLAB
  - Mod de interacțiune cu mediul hardware (*microcontroler*) pentru testări on-line și/sau scrierea asistată a programului de control.

Observații finale

Calculatoarele ne ajută prin:

- Identificarea și modelarea sistemelor dinamice
- Simularea funcționării pentru analiza performanțelor
- Proiectarea asistată de calculator a compensării sistemelor dinamice

TEMA DE CASĂ #2

Tema de casă numărul 2 trebuie adusă la laboratorul din 29 martie.

Problema 1

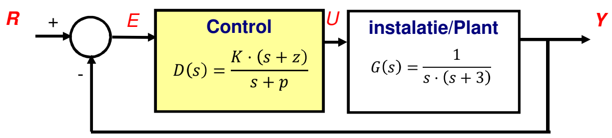
Găsiți transformata Laplace pentru funcția în timp: $f(t) = t^2 + e^{-2t} \cdot \sin(3t)$

Problema 2

Găsiți echivalentul în domeniul timp pentru funcția Laplace: $F(s) = \dfrac{2 \cdot (s^2 + s + 1)}{s \cdot (s+1)^2}$

Problema 3

Pentru sistemul cu reacție unitară prezentat în figură, determinați ***K***, ***p*** și ***z***, pentru a obține un răspuns la semnal treaptă caracterizat de suprareglare ("***overshoot***")<10%, timp de stabilizare la 1% ("***settling time***") < 1.5sec. [Optional: Puteți verifica rezultatul în MATLAB].



Problema 4

Folosiți criteriul de stabilitate Routh pentru a verifica stabilitatea sistemului în buclă închisă, cu reacție unitară, aplicată unui sistem în buclă deschisă caracterizat de:

$$KG(s) = \frac{2 \cdot (s+4)}{s^2 \cdot (s+1)}$$