## SOLUTII PENTRU TEMA DE CASA NUMARUL 2

*Temele au fost notate cu 4x2 +2baza.*

### Problema 1

Gasiti transformata Laplace pentru functia in timp:

$$f(t) = t^2 + e^{-2t} \cdot sin(3t)$$

### Solutie

Pe baza proprietăților de liniaritate și translație în frecvență:

$$L(sin(3t)) = \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow L(e^{-2t} \cdot sin(3t)) = \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{(s+2)^2+9} = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2+4\cdot s+13} = \frac{3\cdot s^3 + 2\cdot s^2 + 8\cdot s + 26}{s^3\cdot(s^2+4\cdot s+13)}$$

### Problema 2

Gasiti echivalentul in domeniul timp pentru functia Laplace:

$$F(s) = \frac{2\cdot(s^2+s+1)}{s\cdot(s+1)^2}$$

### Solutie

$$F(s) = \frac{2\cdot(s^2+s+1)}{s\cdot(s+1)^2} \Rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B\cdot s + C}{s^2+2\cdot s+1}$$

$$= \frac{A\cdot s^2 + 2\cdot A\cdot s + A + B\cdot s^2 + C\cdot s}{s\cdot(s+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)\cdot s^2 + (2\cdot A + C)\cdot s + A}{s\cdot(s+1)^2} = \frac{2\cdot(s^2+s+1)}{s\cdot(s+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2\cdot A + C = 2 \\ A = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

Din tabel și prin proprietatea de liniaritate, obținem:

$$f(t) = 2\cdot 1(t) - 2\cdot t\cdot e^{-t} = 2\cdot(1 - t\cdot e^{-t})\cdot 1(t)$$

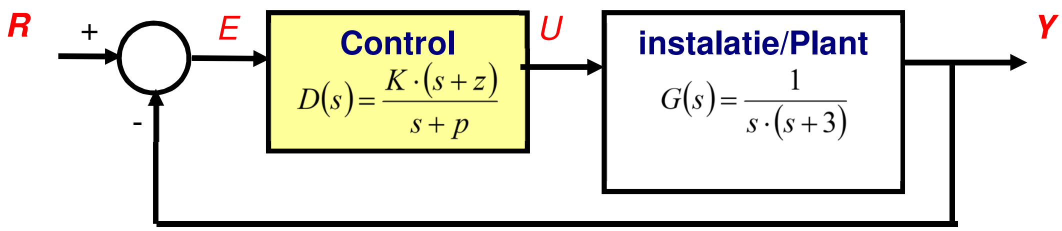
unde

$$1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

este funcția treaptă unitară (Heaviside) cu sensul unui semnal aplicat începând din momentul t=0.

## Problema 3

Pentru sistemul cu reacție unitară prezentat în figură, determinați $K$, $p$ și $z$, pentru a obține un răspuns la semnal treaptă caracterizat de suprareglare ("*overshoot*")<10%, timp de stabilizare la 1% ("*settling time*") <1.5sec.
[Optional: Puteți verifica rezultatul în MATLAB].




## Solutie

*) studiul stabilitatii nu a fost (de)punctat.

### I. Funcții de transfer

$$D(s) = \frac{K\cdot(s+z)}{s+p} \Rightarrow D(s)G(s) = \frac{K\cdot(s+z)}{s+p}\cdot\frac{1}{s\cdot(s+3)} = \frac{K\cdot(s+z)}{s\cdot(s+3)\cdot(s+p)}$$

Sistemul în bucla închisă are funcția de transfer:

$$H_c(s) = \frac{D(s)\cdot G(s)}{1+D(s)\cdot G(s)} = \frac{\frac{K\cdot(s+z)}{s\cdot(s+3)\cdot(s+p)}}{1+\frac{K\cdot(s+z)}{s\cdot(s+3)\cdot(s+p)}}$$

### II. Analiză Stabilitate (studiul stabilitatii nu a fost punctat)

Ecuația caracteristică a funcției de transfer în bucla închisă se obține (numitorul lui Hc):

$$s^3 + (3+p)\cdot s^2 + (3\cdot p + K)\cdot s + K\cdot z = 0$$

Aplicam criteriul Routh pentru stabilitate:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 3\cdot p + K \\ s^2 & 3+p & K \\ s^1 & \dfrac{(3+p)\cdot(3\cdot p+K)-K}{3+p} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

Pentru stabilitate, trebuie indeplinite condițiile:

$$\begin{cases} K>0 \\ 3+p>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K>0 \\ p>-2 \leftarrow p>0 \end{cases}$$

In orice condiții (K,p,z numere reale pozitive), avem un sistem stabil cu o radacină reală și două rădăcini complex conjugate, toate în partea negativă a planului complex.

## III. Proiectare control

**ATENȚIE: NU EXISTĂ SOLUȚIE UNICĂ !!! MAI MULTE SETURI DE VALORI PENTRU (K,z,p) pot satisface condițiile de proiectare!**

Cea mai rapidă proiectare a compensării se poate face prin reducerea ordinului sistemului, la o aproximare z=3. Va rămâne o funcție de transfer de ordinul doi și se pot aplica formulele din curs.

**ATENTIE**: z=3 este o idealizare, nu vom putea realiza niciodată în microcontroler (sistemul de control) o valoare EXACT egală cu polul din modelul instalației. Un model mai corect ar fi z=3,05 (orice ***zero*** LÂNGĂ 3).

(*)

Vom prezenta acum o metodă diferită de proiectare.

Putem considera analiza ca un sistem cu doi poli conjugati la care adaugam un pol real negativ (pagina 29, curs 2).

- Am vazut ca daca polul real este la distanta mare de polii complecsi, putem neglija efectul său.
- Dacă este în vecinătatea părții reale a polilor complex conjugați, acesta va înceti răspunsul la semnal treaptă.
- Un alt efect va fi acela de a produce o valoare mai scazută a suprareglarii ***Mp***. Deoarece aceasta ultima observatie nu este argumentata printr-o formula, vom considera in proiectare o condiție mai stringentă la considerarea suprareglarii ***Mp*** (de exemplu 5% sau 7% in loc de 10%).

Deci, putem considera cazul cel mai defavorabil ca fiind situația cu polul real negativ situat la mare departare de cei doi poli complex conjugați. În alte cuvinte, considerăm cazul în care putem neglija efectul acestui pol real negativ.

O astfel de aproximare reduce analiza la un sistem de ordinul doi.

Un sistem ce produce suprareglare (“*overshoot*”)<10% si timp de stabilizare la 1% (“*settling time*”) <1.5sec, poate fi descris de ecuatia caracteristica:

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{4.6}{ts} = \dfrac{4.6}{1.5} \\ \zeta > 0.591 \leftarrow M_p = 10\% \\ \zeta > 0.690 \leftarrow M_p = 5\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \dfrac{4.6}{ts} = \dfrac{4.6}{1.5} > 3.07 \approx 3.25 \\ \\ \zeta = 0.65 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \omega_n = \dfrac{3.25}{0.65} = 5 \right.$$

$$\Rightarrow s^2 + 6.5 \cdot s + 25 = 0$$

unde am considerat o valoare mai mare pentru $\zeta$ in vederea pre-intampinarii unei suprareglari prea mari (ca o rezerva in proiectare).

Notăm polul real negativ cu Q, atunci Q>10*σ~33 (de 10 ori mai mare decât partea reală a celor două rădăcini complex conjugate) .

Apoi:

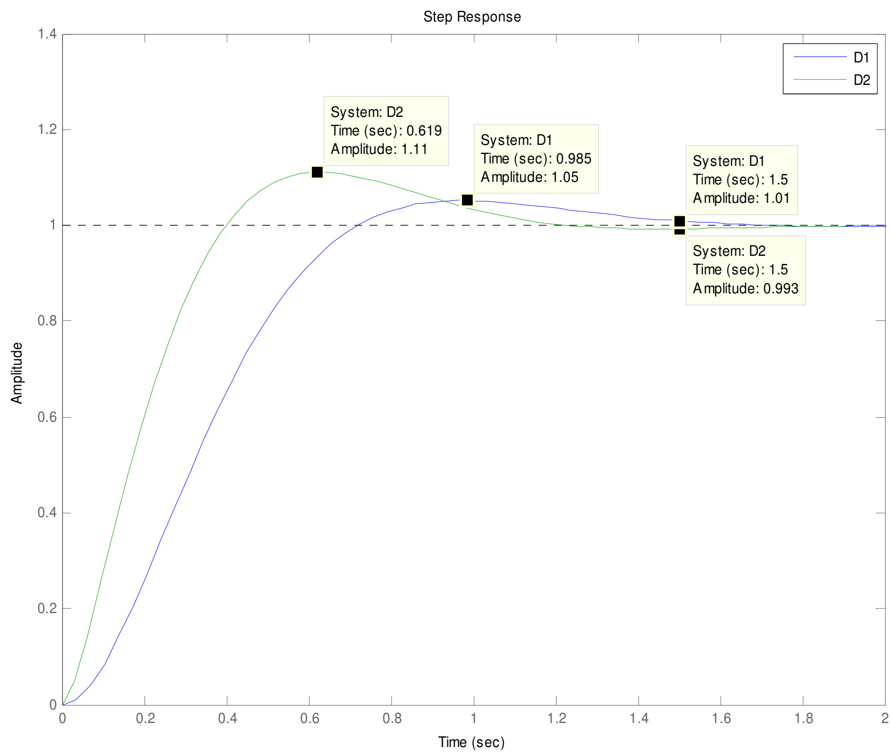
$$(s+Q)\cdot(s^2+6.5\cdot s+25)=s^3+(Q+6.5)s^2+(25+6.5\cdot Q)\cdot s+25\cdot Q=$$
$$=s^3+39.5\cdot s^2+239.5\cdot s+825\equiv s^3+(3+p)\cdot s^2+(3\cdot p+K)\cdot s+K\cdot z$$

De unde:

$$\begin{cases} p=36.5 \\ 3\cdot 36.5+K=239.5 \\ K\cdot z=825 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=36.5 \\ K=130 \\ z=6.35 \end{cases} \Rightarrow D_2(s)=\frac{130\cdot(s+6.35)}{s+36.5} \qquad (**)$$

Pentru o imagine completă a rezultatelor, figura următoare prezintă răspunsul MATLAB la semnal treaptă pentru cazurile legilor de control (*) sau (**).

$D_1(s)=\frac{20\cdot(s+3.05)}{s+6.25}$ (*) $\qquad D_2(s)=\frac{130\cdot(s+6.35)}{s+36.5}$ (**)




```
G=tf([1],[1 3 0])
D1=20*tf([1 3.05],[1 6.25])
D2=130*tf([1 6.35],[1 36.50])
S1=feedback(D1*G,1)
S2=feedback(D2*G,1)
step(S1); hold on; step(S2);
legend('D1','D2');
```

## Problema 4

Folosiți criteriul de stabilitate Routh pentru a verifica stabilitatea sistemului în buclă închisă, cu reacție unitară, aplicată unui sistem în buclă deschisă caracterizat de:

$$KG(s) = \frac{2 \cdot (s+4)}{s^2 \cdot (s+1)}$$

## Solutie:

$$H_c(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{\dfrac{2 \cdot (s+4)}{s^2 \cdot (s+1)}}{1+\dfrac{2 \cdot (s+4)}{s^2 \cdot (s+1)}} = \frac{2 \cdot (s+4)}{s^3 + s^2 + 2 \cdot s + 8}$$

Ecuatia caracteristica devine:

$$s^3 + s^2 + 2 \cdot s + 8 = 0$$

Criteriul Routh are forma simplă:

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 8 \\ s^1 & -6 & \\ s^0 & 8 & \end{array}$$

Sistemul NU este stabil.