Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2

Cursul #05

Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 17 = Recapitulare - Răspunsul în frecvență al sistemelor și diagramele Bode.
- Ora 18 = Stabilitatea sistemelor automate de control (*Nyquist, limite*)
- Ora 19 = Observații finale stabilitate
- Ora 20 = Proiectarea sistemelor PD + Proiectarea sistemelor cu avans de fază.

Recapitulare – Răspunsul în frecvență (1)

- Studiul legăturii între ***poli-zero*** și răspunsul în frecvență
- Metodele de studiu includ diagramele Bode și criteriul Nyquist de stabilitate

- **Avantaje**
  - Permit rezultate bune fără cunoașterea exactă a modelului,
  - Permit includerea unor date experimentale în model,
  - **Cea mai ușoară și mai directă metodă pentru proiectarea compensării.**

- **Proiectarea cu metoda analizei în frecvență poate fi folosită doar pentru *sisteme liniare și invariabile in timp.***
- Răspunsul unui sistem liniar și invariabil în timp, la semnale de intrare sinusoidale poate fi determinat din locația polilor și zero-urilor.
  - Fie un sistem caracterizat de funcția de transfer $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$
  - Unde semnalul de intrare este sinusoidal $u(t)=A\cdot\sin(\omega_o\cdot t)\cdot 1(t)\Rightarrow U(s)=\dfrac{A\cdot\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$
  - Transformata Laplace a semnalului de ieșire

$$Y(s)=G(s)\cdot\boxed{\frac{A\cdot\omega_o}{s^2+\omega_o^2}}=\frac{\alpha_1}{s-p_1}+\frac{\alpha_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{s-p_n}+\boxed{\frac{\alpha_o}{s+j\cdot\omega_o}+\frac{\alpha_o^*}{s-j\cdot\omega_o}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\alpha_1\cdot e^{p_1\cdot t}+\alpha_2\cdot e^{p_2\cdot t}+\ldots+\alpha_n\cdot e^{p_n\cdot t}+\boxed{2\cdot|\alpha_o|\cdot\sin(\omega_o\cdot t+\phi)}$$

Recapitulare – Răspunsul în frecvență (2)

$$y(t)=\alpha_1\cdot e^{p_1\cdot t}+\alpha_2\cdot e^{p_2\cdot t}+\ldots+\alpha_n\cdot e^{p_n\cdot t}+\boxed{2\cdot|\alpha_o|\cdot\sin(\omega_o\cdot t+\phi)}$$

- Dacă toți polii p_i din funcția de transfer a sistemului reprezintă răspuns stabil (partea lor reală este negativă), atunci toți termenii exponențiali în p_i se vor atenua în timp și răspunsul staționar va depinde doar de semnalul sinusoidal de la intrare.

$$y(t)=A\cdot M\cdot\sin(\omega_o\cdot t+\phi)$$

$$\begin{cases} M=|G(j\omega_o)|=|G(s)|_{s=j\omega_o}=\sqrt{[\mathrm{Re}(G(j\omega_o))]^2+[\mathrm{Im}(G(j\omega_o))]^2} \\ \phi=\tan^{-1}\left[\dfrac{\mathrm{Im}(G(j\omega_o))}{\mathrm{Re}(G(j\omega_o))}\right] \end{cases}$$

- Răspunsul în frecvență al unui sistem va fi determinat în forma de mai sus pentru tot domeniul de frecvențe $\boldsymbol{\omega_o}$.

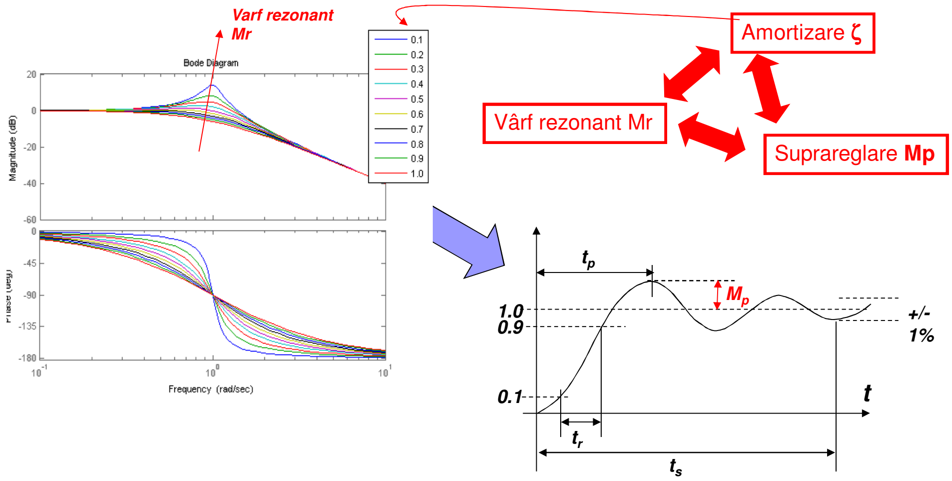
Consecință: Dacă nu avem un model precis al unui sistem ***("plant"),*** putem aplica la intrare semnale sinusoidale de frecvență variabilă și măsura semnalul de la ieșire.

Consecință: Putem stabili o legatură între răspunsul la semnal treaptă și răspunsul în frecvență al unui sistem:
  - Vârful rezonant al unei caracteristici în frecvență corespunde la amortizare și corespunde răspunsului tranzitoriu la semnal treaptă (prin suprareglare).

Recapitulare – Răspunsul în frecvență (3)

Consecință: Putem stabili o legatură între răspunsul la semnal treaptă și răspunsul în frecvență al unui sistem:

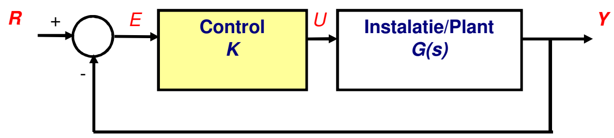
- **Vârful rezonant** al unei caracteristici în frecvență corespunde la amortizare și corespunde răspunsului tranzitoriu la semnal treaptă (prin suprareglare).



Recapitulare: Lărgime de bandă (“*bandwidth*”) și vârf rezonant (“*resonant peak*”)

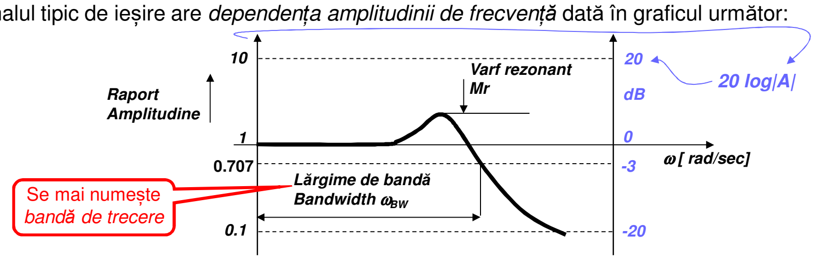
- **Lărgimea de bandă** – Frecvența maximă la care ieșirea unui sistem va urmări o intrare sinusoidală într-un mod corespunzător (de obicei cu o atenuare peste ***0.707***).

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$



- In majoritatea sistemelor fizice, un sistem se comportă ca un filtru trece-jos:
  - Ieșirea urmează semnalul de intrare ***Y/R = 1*** la frecvențe joase,
  - Semnalul de ieșire nu mai urmărește fidel intrarea la frecvențe înalte.

Semnalul tipic de ieșire are *dependența amplitudinii de frecvență* dată în graficul următor:



Recapitulare: Metoda diagramelor Bode (1)

- Un mod de reprezentare a răspunsului în frecvență - posibil de desenat fără calculator.
- Metodă dezvoltată de Bode (1932-1942)
  - Desenarea caracteristicii de amplitudine pe o scară logaritmică și a caracteristicii de fază pe o scară liniară.
  - **Permite adunarea grafică a termenilor funcției de transfer !**

$$G(j\omega)=\frac{\left(r_1\cdot e^{j\theta_1}\right)\cdot\left(r_{12}\cdot e^{j\theta_2}\right)}{\left(r_3\cdot e^{j\theta_3}\right)\cdot\left(r_4\cdot e^{j\theta_4}\right)\cdot\left(r_5\cdot e^{j\theta_5}\right)}=\left(\frac{r_1\cdot r_2}{r_3\cdot r_4\cdot r_5}\right)\cdot e^{j\cdot(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|G(j\omega)|=\dfrac{r_1\cdot r_2}{r_3\cdot r_4\cdot r_5}\\ \angle G(j\omega)=\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5\end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow\begin{cases}\log_{10}|G(j\omega)|=\log_{10}r_1+\log_{10}r_2-\log_{10}r_3-\log_{10}r_4-\log_{10}r_5\\ \angle G(j\omega)=\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5\end{cases}}$$

  - Amplitudinea se măsoară în decibeli

$$|G|_{dB}=20\cdot\log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Recapitulare: Metoda diagramelor Bode (2)

- **Avantajele diagramelor Bode**
  - **Compensarea dinamică poate fi proiectată în totalitate pe diagramele Bode.**
  - Foarte ușor de desenat "*de mână*" (fără calculator), simplificând proiectarea compensării dinamice.
  - Diagramele Bode pot fi determinate experimental în cazul în care sistemul nu este definit matematic.
  - Diagramele Bode a sistemelor în cascadă (serie) se adună pe graficul logaritmic în amplitudine și pe graficul liniar în fază.
  - Folosirea unei coordonate logaritmice permite un domeniu larg de variație.

Recapitulare: Metoda diagramelor Bode (3)

- Avem 3 clase de termeni elementari posibili în funcțiile de transfer:
  - Termeni singulari în origine

    $K_o \cdot (j\omega)^n$

    $\log\left[K_o \cdot (j\omega)^n\right] = \log K_o + n \cdot \log|j\omega|$

    Diagrama de amplitudine este o linie dreaptă cu o pantă de ***n * 20dB/decada.***
    Diagrama de fază este o linie orizontală la ***n* 90º***.

  - Termeni de primul ordin

    $j \cdot \omega\tau + 1$

    - Diagrama de amplitudine urmarește două asimptote (la joasă și înaltă frecvență) $\omega \cdot \tau << 1 \Rightarrow j \cdot \omega \cdot \tau + 1 \cong 1$

      $\omega \cdot \tau >> 1 \Rightarrow j \cdot \omega \cdot \tau + 1 \cong j \cdot \omega \cdot \tau$

      cele două asimptote se intersectează în punctul ***ω = 1/τ***, și curba trece la 3dB de acest punct de intersecție.
    - Diagrama de fază $\omega \cdot \tau << 1 \Rightarrow \angle 1 = 0^0$

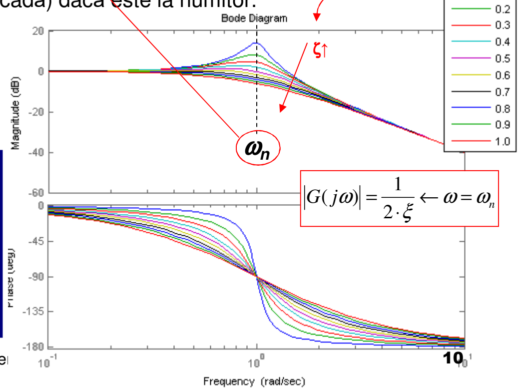
      $\omega \cdot \tau >> 1 \Rightarrow \angle j \cdot \omega \cdot \tau = 90^0$

      $\omega \cdot \tau \cong 1 \Rightarrow \angle(j \cdot \omega \cdot \tau + 1) = 45^0$

    trece la 11º de punctele de intersecție a asimptotelor de ***0*** și ***inf*** cu o secantă desfașurată pe o decadă în jurul frecvenței ***ω=1/τ.***

Recapitulare: Metoda diagramelor Bode (4)

- Termeni de ordinul doi $\left[\left(\frac{j \cdot \omega}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \xi \cdot \left(\frac{j \cdot \omega}{\omega_n}\right) + 1\right]^{\pm 1}$
  - Punctul de curbură (“*breakpoint”)* este la ***ω = ω_n*** .
  - Lărgimea de bandă (“***Bandwidth***”) se poate aproxima cu frecvența ***ω_n*** (vom reveni, p.48-49)
  - Tranziția prin punctul de curbură depinde de **amortizare *ζ*** (vom reveni, p.48-49)
  - Amplitudinea își schimbă panta cu 40dB (notat “+2”) pe decadă, dacă termenul este la numărător, și cu “-2” (-40dB/decadă) dacă este la numitor.
  - Faza se schimbă cu ***+/-180***.




```
clear;
numT=[1];
for zeta=0.1:0.1:1
  denT=[1 2*zeta 1];
  sysT=tf(numT,denT);
  bode(sysT,{1e-1,1e1});
  hold on;
end
 legend('0.1','0.2','0.3','0.4','0.5','0.6','0.7','0.8','0.9','1.0');
```

Recapitulare: Metoda diagramelor Bode (5). Exemplu.

- Desenati diagrama Bode pentru functia de transfer:

$$KG(s) = \frac{2000 \cdot (s+0.5)}{s \cdot (s+10) \cdot (s+50)}$$

- Pasul 1: Re-aranjăm f.d.t. în forma canonică (Bode)

$$K \cdot G(s) = \frac{2 \cdot \left[\left(\frac{j\omega}{0.5}\right)+1\right]}{j\omega \cdot \left[\left(\frac{j\omega}{10}\right)+1\right] \cdot \left[\left(\frac{j\omega}{50}\right)+1\right]}$$

- Pasul 2:

Termenul ***(jω)*** este de ordinul întâi și este la numitor, deci asimptota de frecvență foarte joasă este data de ***(2/jω)*** cu panta de 20dB/decadă, trece prin punctul ***(ω=1, M=2).***

- Pasul 3:

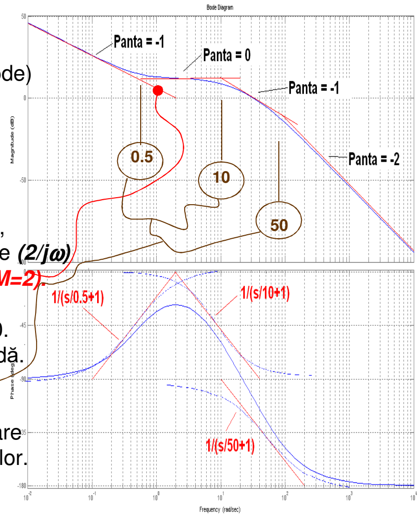
Identificăm celelalte puncte de curbură la 0.5, 10, 50. Desenăm celelalte asimptote, fiecare cu 20dB/decadă. Asimptotele se intersectează la **0.5, 10, 50.**

- Pasul 4:

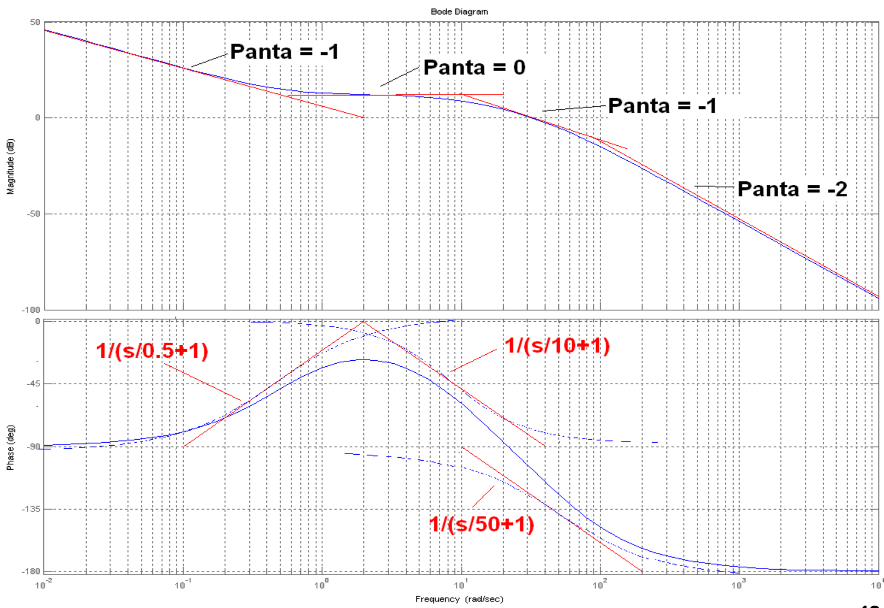
Desenăm diagrama de amplitudine, trecând de fiecare dată la 3dB de punctele de intersecție ale asimptotelor.

- Pasul 5:

Faza la joasă frecvență este -90, apoi desenăm contribuția fiecărul termen și le adunăm.



Recapitulare: Metoda diagramelor Bode (5). Exemplu.



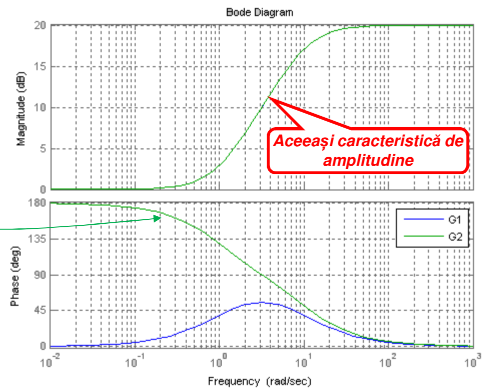
Caz special - Sisteme cu *zero* pozitiv (“*Non-minimum Phase*”)

- Un sistem cu un ***zero*** în partea dreaptă a planului complex prezintă o schimbare importantă a fazei la modificarea frecvenței între ***0*** și ***infinit***.
- O astfel de schimbare de fază este mai mare decât cea obținută dacă toți polii și zero-urile ar fi în partea stângă a planului complex.
- Să considerăm funcțiile următoare, cu amplitudine egală, dar fază diferită.

$$G_1(s) = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10}$$

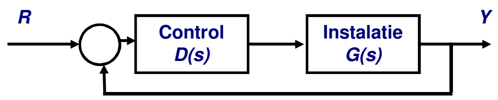
$$G_2(s) = 10 \cdot \frac{s-1}{s+10}$$

```
clear;
numG1=[1 1];
denG1=[1 10];
sysG1=tf(10*numG1,denG1);
bode(sysG1,{1e-2,1e3}); hold on;
numG2=[1 -1];
denG2=[1 10];
sysG2=tf(10*numG2,denG2);
bode(sysG2,{1e-2,1e3});
legend('G1','G2');
grid on;
```



Proiectarea sistemelor de control cu răspunsul în frecvență - Eroarea staționară (1)

- **Eroarea staționară a sistemului în buclă închisă scade cu creșterea câștigului funcției de transfer în buclă deschisă**
  - Ne interesează câștigul în buclă deschisă la frecvențe joase (*functia DG*), deci cu cât asimptota de frecvență joasă este mai mare, cu atât eroarea staționară este mai redusă.



  - F.d.t. în buclă închisă

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s) \cdot G(s)}{1 + D(s) \cdot G(s)}$$

  - Repetăm tabelul (*vezi curs 3, p.37*) cu relația dintre eroarea staționară și f.d.t. în buclă deschisă (***DG*** in exemplu).

Urmărirea unei referințe variabile (“*tracking*”)

Calcularea erorilor staţionare ca o funcție de tipul sistemului:

$$e_{ss}=\begin{cases}0 \leftarrow n>k\\ \dfrac{1}{1+K_0}\leftarrow n=k=0\\ \dfrac{1}{K_n}\leftarrow n=k\neq 0\\ \infty\leftarrow n<k\end{cases}$$

k=

n	0	1	2
	Semnal de intrare (“Referinta”)		
	Treapta (“Pozitie”)	Rampa (“Viteza”)	Parabola (“Acceleratie”)
	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t\cdot 1(t)$	$r(t)=t^2\cdot 1(t)$
Tipul “0”	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
Tipul “1”	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipul “2”	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Câți “1/s” sunt în DG?

Concluzii

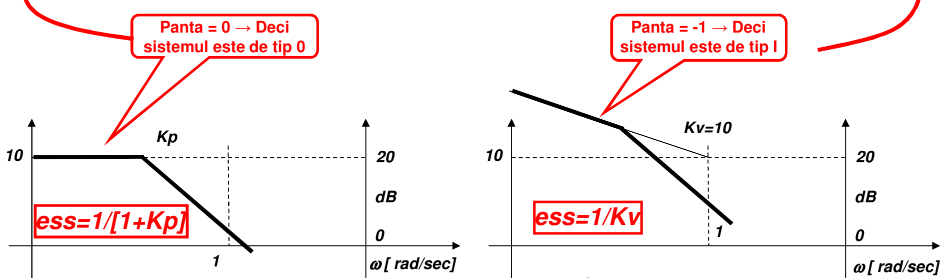
- Tipul sistemului este dat de numărul de poli în ***s=0***.
- In funcție de tipul sistemului, putem estima capabilitatea unui sistem de a urmări semnale de referință cu o variație polinomială.
- Se observă că într-un sistem de control cu reacție unitară, variația parametrilor nu modifică tipul erorii staționare.
- Fără demonstrație: *Pentru orice sistem în buclă închisă, deplasarea polilor catre (–∞) determină creșterea Kp,Kv,Ka și scăderea erorii staționare.*

Proiectarea sistemelor de control cu răspunsul în frecvență - Eroarea staționară (3)

- **Eroarea staționară scade cu creșterea câștigului funcției de transfer în buclă deschisă →** Ne interesează **câștigul în buclă deschisă la frecvențe joase (*funcția DG*)**, deci cu cât asimptota de frecvență joasă este mai mare, cu atât eroarea staționară este mai redusă.

Observație folosită la proiectarea compensării.

- Pentru un **sistem de tipul 0**, eroarea staționară a sistemului în buclă închisă, la semnal de intrare treaptă este dată de ***ess = 1/[1+Kp]*** (*vezi cursul 3, p.37*)
- Pentru un **sistem de tipul I**, eroarea staționară a sistemului în buclă închisă, la semnal de intrare rampă sau sinusoidal este dată de ***ess = 1/Kv***, unde ***Kv*** se determină prin citire directă de pe grafic, pentru ***ω = 1rad/sec*** (*vezi cursul 3, p.37*)



Diagramele Bode sunt pentru funcția de transfer în buclă deschisă (funcția DG).

Observații finale

Desenarea manuală a diagramelor Bode presupune urmarea pașilor:

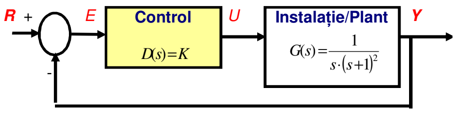
- Manipulați funcția de transfer în forma factorială.
- Determinați puterea ***n*** a termenului de tip singularitate. Desenați această componentă a amplitudinii cu o pantă ***n*20dB***.
- Desenați asimptotele pe baza adunării sau scăderii cu ***20dB*** pentru fiecare termen de ordinul întâi.
- Desenați diagrama de amplitudine aproximativă, cu deplasări de maximum ***3 dB*** lângă punctele de curbură.
- Desenați asimptota de frecvență joasă a diagramei de fază, la ***n*90***.
- Desenați asimptotele pentru fiecare termen individual.
- Adunați grafic componentele de fază pentru fiecare termen.

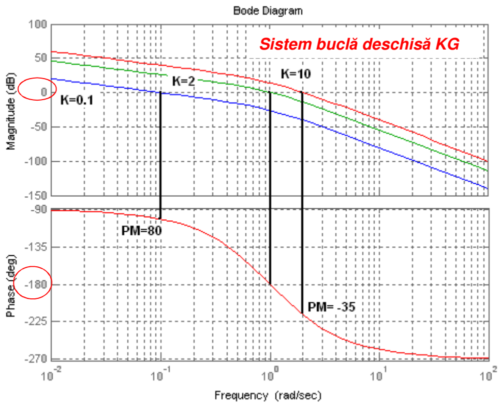
Cursul #05
Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 18 = Stabilitatea sistemelor automate de control (*Nyquist, limite*)

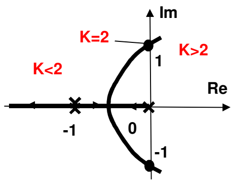
Definiții – Legătura dintre stabilitate și răspunsul în frecvență (1)

- Dorim analiza stabilității prin metoda răspunsului în frecvență.
- **Determinăm stabilitatea sistemului în buclă închisă prin analiza în frecvență a sistemului în buclă deschisă *D(s)G(s) = KG(s)*.**
- Să considerăm un exemplu (știm funcția de transfer în buclă deschisă și studiem stabilitatea sistemului în buclă închisă):





- Locul rădăcinilor se va obține (dat aici fără demonstrație):



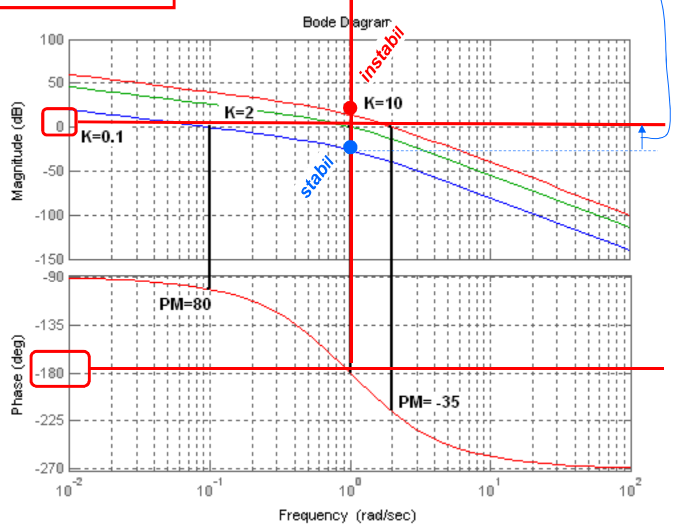
- Punctele de stabilitate neutră ("*la limită*") se găsesc pe axa imaginară (***K = 2***).
- Orice punct de pe locul rădăcinilor satisface *1+KG=0* : $|KG(s)|=1 \quad \angle G(s)=180^0$

Definiții – Legătura dintre stabilitate și răspunsul în frecvență (2)

$\boxed{|KG(j\omega)|<1 \quad pentru \quad \angle G(j\omega)=-180^0}$

Rezerva de amplitudine vom reveni, p.38-39

Observație = Putem transla graficul de amplificare în sus sau jos, prin intermediul lui K.



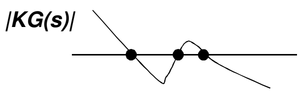
Definiții – Legatura dintre stabilitate și răspunsul în frecvență (3)

- Analiza *locului rădăcinilor*
  - Observăm că orice valoare a lui ***K > 2*** determină instabilitate.
  - Observăm că orice valoare a lui ***K < 2*** determină un sistem stabil.
- Enunțăm următorul criteriu de stabilitate:

$$\boxed{|KG(j\omega)|<1 \quad pentru \quad \angle G(j\omega)=-180^0}$$

- Acest criteriu este adevărat pentru orice sistem la care:
  - (1) Creșterea amplificării ***K*** conduce la instabilitate, și ***NU*** avem situațiile arătate pentru sistemele cu stabilitate condițională (***v.cursul 4, p.50***)
  - (2) Modulul produsului ***KG(s)*** intersectează axa de câștig unitar doar o singură dată.

- O situație ambiguă se obține când graficul amplitudinii din răspunsul în frecvență trece prin valoarea "***1***" de mai multe ori.



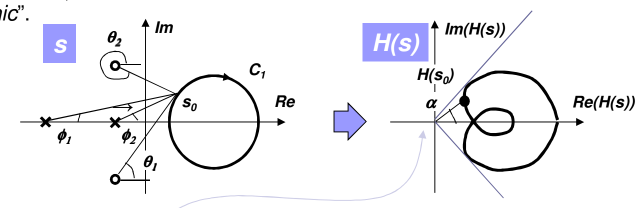
  - In astfel de cazuri, este nevoie să schițăm locul rădăcinilor.
  - O altă metodă echivalentă de eliminare a acestei ambiguitați, este ***criteriu de stabilitate Nyquist***.
    - Demonstrația criteriului Nyquist pleacă de la principiul argumentului Cauchy.

Principiul argumentului (Cauchy)

- Să considerăm (ca exemplu) o funcție de transfer

$$H(s)=\frac{s^2+2\cdot s+5}{(s+1)\cdot(s+3)}$$

- Dorim să evaluăm această funcție pentru valori ale lui "***s***" de pe un contur ***C_1***, parcurs "*în sensul acelor de ceasornic*".



- Argumentul (faza) lui ***$H(s_0)$*** se obține:

$$\alpha=\underbrace{\theta_1+\theta_2}_{\text{Zero-uri}}\underbrace{-\phi_1-\phi_2}_{\text{Poli}}$$

- Când ***s*** parcurge ***C_1***, unghiul ***α*** se va schimba, dar nu va parcurge ***360^0*** ("*nu se dă peste cap*") dacă nici un ***pol*** sau ***zero*** nu este în interiorul lui ***C_1***.
- Echivalent cu a observa că noul contur pentru ***$H(s_0)$*** nu încercuiește originea.

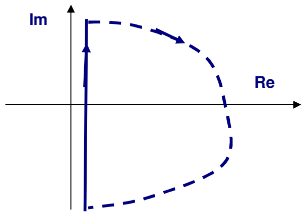
Principiul argumentului (Cauchy):

Conturul unei funcții complexe va înconjura originea planului complex de (Z-P) ori, unde Z este numărul de zerouri și P numărul de poli din interiorul conturului.

Aplicație la proiectarea sistemelor de control

- Alegem C_1 să acopere întreaga parte dreaptă a planului complex, regiune în care un pol ar produce un sistem instabil.
- Funcția de transfer în buclă închisă:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)}$$



Aplicăm principiul argumentului funcției *1 + KG(s)=0.*

- Dacă conturul de evaluare pentru ***s*** - ce înconjoară întreaga parte dreaptă a planului complex - va conține un *pol* sau *zero*, atunci conturul pentru ***1 + KG(s)*** va înconjura originea.
- Dacă ***1 + KG(s)*** înconjoară originea, atunci ***KG(s)*** va înconjura punctul ***-1***.
- O astfel de reprezentare se numește ***diagrama Nyquist ("Nyquist plot"*** sau "***polar plot")***.
- Mai trebuie să determinăm dacă o încercuire a lui ***-1*** este datorată unui *pol* sau unui *zero*.
  - Orice pol pentru ***1 + KG(s)*** este pol și pentru ***G(s).***
    - Dacă ***G(s)*** nu are poli în partea dreaptă a planului complex, atunci orice înconjurare a lui ***-1***, arată un ***zero*** al funcției de transfer ***1+KG(s)***

      → ... care este un *pol* al funcției de transfer în buclă închisă, deci instabilitate.

Procedură pentru desenarea unei diagrame Nyquist.

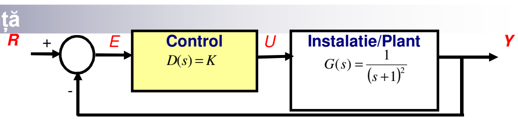
- Evaluați $KG(j\omega)$ pentru un interval de la $\omega = 0$ la $\omega = \omega_h >> 0$.
  - Amplitudinea lui $KG(j\omega_h)$ va rezulta foarte mică pentru orice sistem fizic.
- Completați desenul prin simetrie (oglindă) față de axa reală
  - Noua curbă va reprezenta funcția pentru $-\infty < \omega < \infty$.
- *Determinați numărul de încercuiri în sens pozitiv (în sensul acelor de ceasornic) a lui **-1**. Notați acel număr cu **N**.*
- *Determinați numărul de poli în partea dreaptă a planului complex a lui **G(s)** prin simpla inspecție a funcției de transfer. Notați acel numar cu **P**.*
- *Numărul de rădăcini ce determină instabilitate va fi dat de **Z = N + P**.*

- Pentru a avea un sistem stabil, ne am dori ca ***Z = 0***.

- Observăm că toată această analiză se face pentru o valoare prestabilită a lui ***K***.
- De obicei ne interesează determinarea unui interval de valori pentru ***K*** astfel încât să avem stabilitate.
- Se poate transla această metodă astfel încât să analizăm încercuirea unui punct ***-1/K*** de către funcția ***G(s).***
- Putem calcula numărul de rădăcini instabile ale sistemului în bucla închisă, prin ***Z =N+P***, unde ***N***=numărul de încercuiri, ***P***=numărul de poli RHP ai sistemului în bucla deschisă.

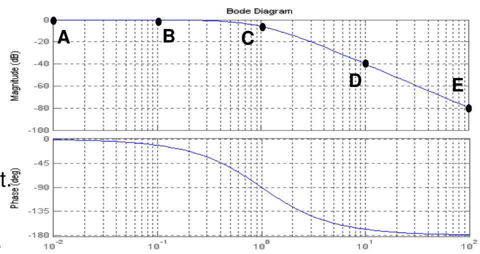
Acronim pentru partea dreapta a planului complex

Diagrama Nyquist. Exemplul 1



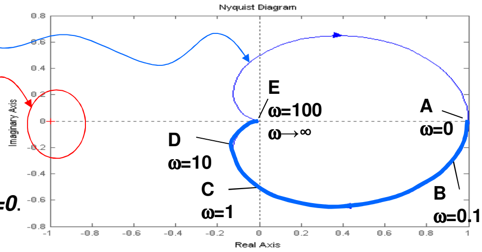
- In acest caz cunoaștem funcția de transfer în bucla deschisă G(s).
- Desenăm diagrama Bode pentru ***G(s).***

```
clear;
numG=1;
denG=[1 2 1];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w);
grid on;
```



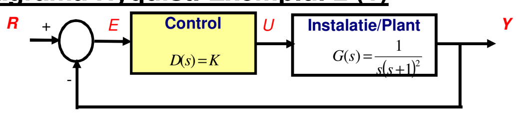
- Translăm diagrama Bode în diagrama Nyquist.
- In acest scop, alegem punctele A,B,C,D,E.
- Diagrama Nyquist este o reprezentare polară.
- Construim prin simetrie, pentru $\omega < 0$

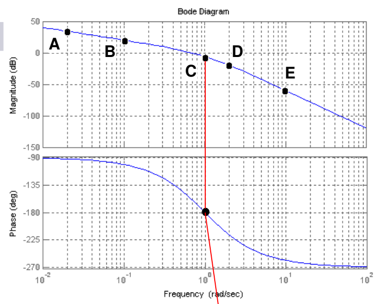
```
numG=1;
denG=[1 2 1];
sysG=tf(numG,denG);
nyquist(sysG);
```



- Observăm că ***(-1/K)*** nu este încercuit de diagramă, pentru nici un ***K>0 => N=0***.
- ***G(s)*** nu are poli în RHP, deci ***P=0 => Z=N+P=0***.
  => Sistem stabil pentru orice ***K>0***.

Diagrama Nyquist. Exemplul 2 (1)



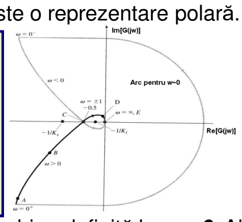


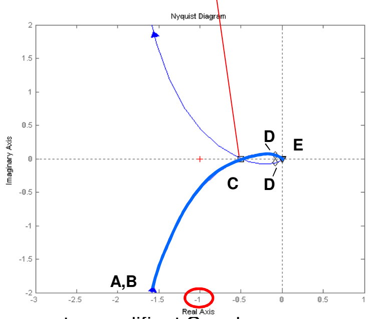
- Cunoaștem funcția de transfer în buclă deschisă ***G(s).***
- Desenăm diagrama Bode pentru ***G(s).***

```
clear;
numG=1;
denG=[1 2 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w); grid on;
```

- Translăm această diagramă în diagrama Nyquist.
  - In acest scop, alegem punctele A, B, C, D, E.
  - Diagrama Nyquist este o reprezentare polară.

```
clear;
numG=1;
denG=[1 2 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
nyquist(sysG,{1e-3,1e2}); hold on;
nyquist(sysG,1,'ks'); hold on;
nyquist(sysG,2,'kd'); hold on;
nyquist(sysG,10,'kv');
axis([-3,1,-2,2]);
```





- Diagrama Nyquist nu este bine definită la $\omega = 0$. Alegem un contur modificat Cauchy.

Diagrama Nyquist. Exemplul 2 (2)

- Diagrama Nyquist nu este bine definită la $\omega = 0$.
  - Alegem un *contur modificat Cauchy*, capabil să ocolească $\omega = 0$.

Pentru a analiza stabilitatea unui sistem cu poli pe axa imaginară, conturul Cauchy poate fi modificat pentru a nu trece prin acel punct. Se construieşte un arc semicircular de rază r→0 în jurul polului, care merge invers acelor de ceasornic. Fazorul funcției G(s) va merge pe un arc de rază infinită, pe un arc (–k π)., unde k este multiplicitatea polului.

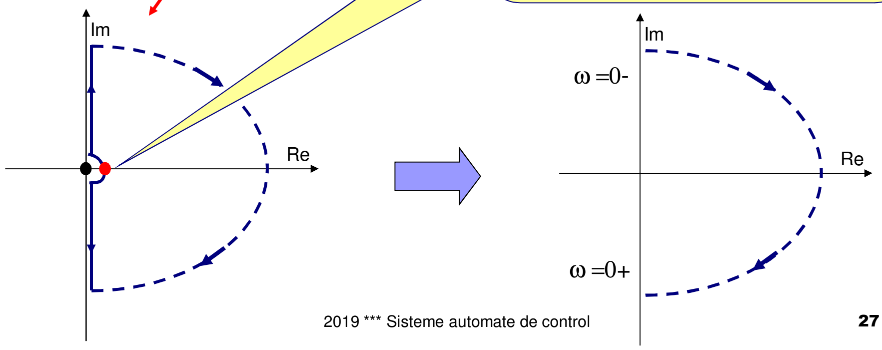
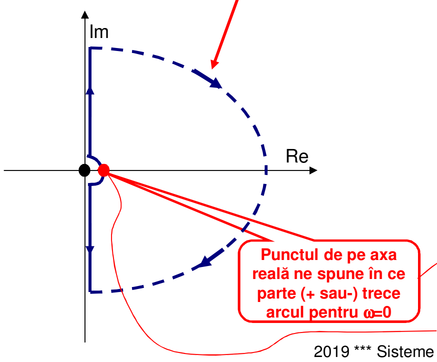


Diagrama Nyquist. Exemplul 2 (3)

- Diagrama Nyquist nu este bine definită la $\omega = 0$.
  - Alegem un *contur modificat Cauchy*, capabil să ocolească $\omega = 0$.

- Sistemul în buclă deschisă (***G(s)***) nu are poli în RHP, deci ***P = 0***.
- Se observă că sunt două posibilități pentru locația lui ***(-1/K)***:
  - *Pentru **K > 2**: In două bucle, deci **N = 2** => **Z= 2** => sistemul în buclă închisă este instabil.*
  - *Pentru **K < 2**: In nici o buclă, deci **N = 0** => **Z = 0** => sistemul în buclă închisă este stabil.*



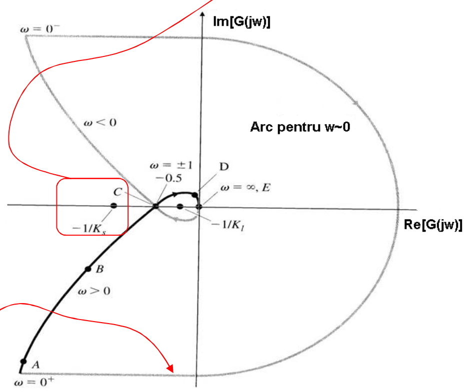
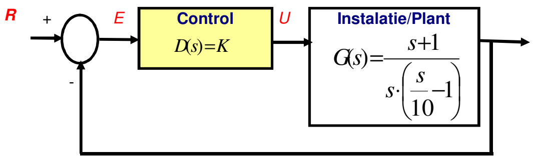


Diagrama Nyquist. Exemplul 3 (1)

- Să considerăm un exemplu cu un sistem în buclă deschisă instabil (***P = 1***).



- Cunoaștem funcția de transfer în buclă deschisă ***G(s).***
- Desenăm diagrama Bode pentru ***G(s).***

```
clear;
numG=[1 1];
denG=[0.1 -1 0];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w); grid on;
```

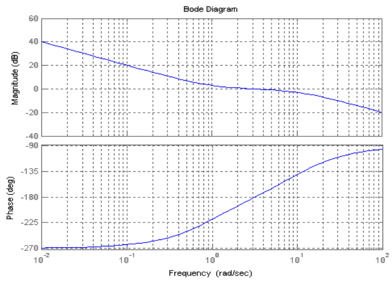
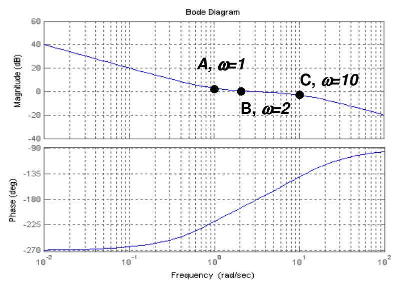


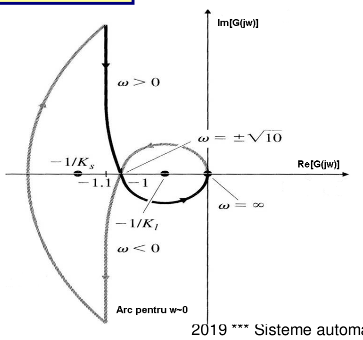
Diagrama Nyquist. Exemplul 3 (2)

- Translăm diagrama Bode în diagrama Nyquist.
  - In acest scop, alegem punctele A,B,C.
  - Diagrama Nyquist este o reprezentare polară.

```
numG=[1 1];
denG=[0.1 -1 0];
sysG=tf(numG,denG);
nyquist(sysG,{1e-2,1e2});
hold on;
nyquist(sysG,1,'ks'); hold on;
nyquist(sysG,2,'kd'); hold on;
nyquist(sysG,10,'kv');
axis([-3,1,-2,2]);
```

Fără această scalare a axelor nu am vedea detalii lângă origine





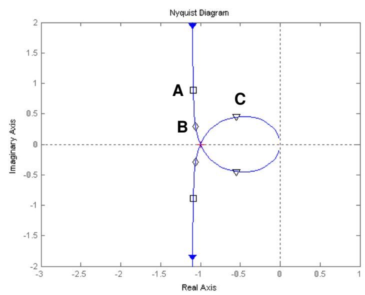
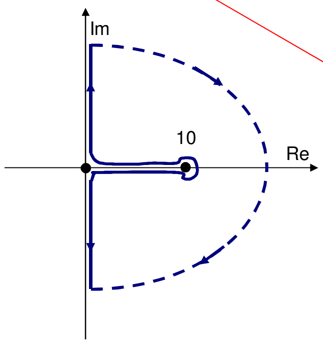
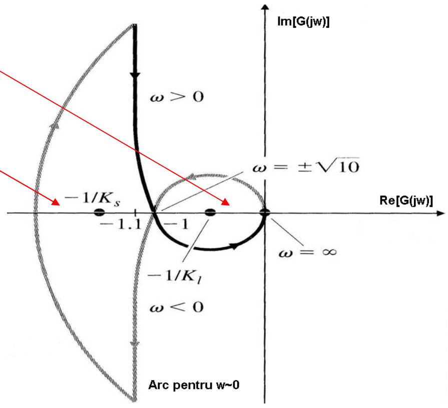


Diagrama Nyquist. Exemplul 3 (3)

- Și în acest caz avem o incertitudine lângă $\omega = 0$, deci lucrăm cu conturul modificat Cauchy.
- Pentru $K > 1$, avem o încercuire posibilă a lui ***(-1/K),*** în direcție inversă acelor de ceasornic (***ccw***), deci $N = -1$ => $Z = N+P = -1+1 = 0$ => sistem stabil.
- Pentru $0 < K < 1$, avem o încercuire posibilă a lui ***(-1/K)*** în direcția acelor de ceasornic (***cw***), deci $N=1$ => $Z=N+P=1+1=2$ => sistem instabil.





Observații finale privind determinarea stabilității din răspunsul în frecvență

- Desenarea sau transformarea diagramelor Bode în diagrama Nyquist

- Evaluați $KG(j\omega)$ pentru un interval de la $\omega = 0$ la $\omega = \omega_h >> 0$.
  - Amplitudinea lui $KG(j\omega_h)$ va rezulta foarte mică pentru orice sistem fizic.
- Completați desenul printr-o "*oglindă*" față de axa reală.
- Determinați numărul de încercuiri în sens pozitiv (în sensul acelor de ceasornic) a lui ***-1/K***. Notați acel număr cu ***N.***
- Determinați numărul de poli în partea dreaptă a planului complex a lui ***G(s)*** prin simpla inspecție a funcției de transfer. Notați acel număr cu ***P***.
- Numărul de rădăcini ce determină instabilitate va fi dat de $Z = N+P$.

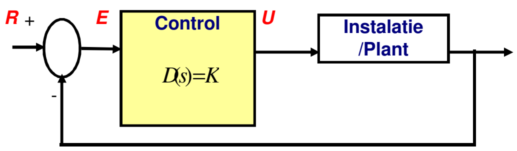
- Pentru a avea un sistem stabil, ne-am dori ca $Z = 0$.
  - Ne interesează determinarea unui interval de valori pentru ***K*** astfel încât să avem stabilitate.

Cursul #05

Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 19 = Observații finale stabilitate

Rezervele domeniului de stabilitate (1)

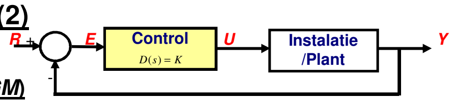


Observație

Larga majoritate a sistemelor automate de control sunt stabile pentru o valoare mică a câștigului ***K*** și devin instabile pentru o valoare mare a câștigului ***K***.

- Deoarece modelul sistemului controlat poate fi definit aproximativ și considerând posibila variație a parametrilor, devine foarte importantă măsurarea marginilor (rezervelor) până la instabilitate.
  - Rezerva de amplificare/amplitudine ("*Gain margin*")
  - Rezerva de fază ("*Phase margin*")

Rezervele domeniului de stabilitate (2)



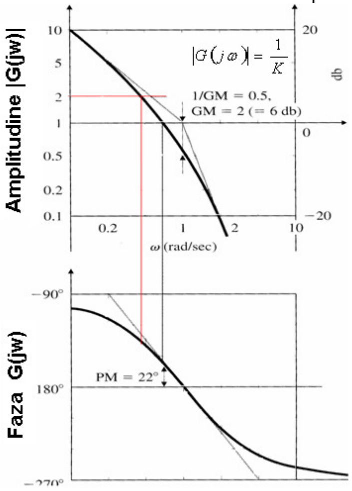
- **Rezerva de amplificare ("*Gain margin*", *GM*)**
  - Definiție = intervalul cu care câștigul poate fi crescut până la instabilitate.
  - Poate fi citit direct de pe diagrama Bode = Distanța verticală între caracteristica amplitudinii semnalului de ieșire și valoarea unitară, măsurată în punctul în care faza este 180^0.
  - Practic, arată cu cât poate fi crescut ***K*** până la instabilitate.
  - Orice sistem de primul ordin (un singur pol real negativ) are ***GM = ∞***, deoarece faza nu ajunge niciodată la -180^0.

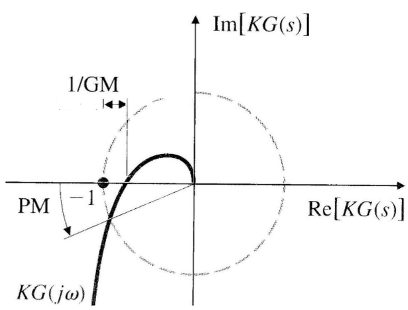
- **Rezerva de fază ("*Phase margin*", *PM*)**
  - Definiție = arată cât de departe de instabilitate este condiția de fază.
  - Poate fi citit direct de pe diagrama Bode = cu cât este faza deasupra lui -180^0, când câștigul este egal cu 1.
  - Practic, arată cu cât poate fi faza scăzută până la instabilitate.
  - **Vom arăta că rezerva de fază se alege din condițiile de proiectare pentru răspunsul tranzitoriu (suprareglare, apoi amortizare).**

- Rezervele de fază și amplificare pot fi reprezentate și pe diagrama Nyquist ca un *vector*.

Rezervele domeniului de stabilitate (3)

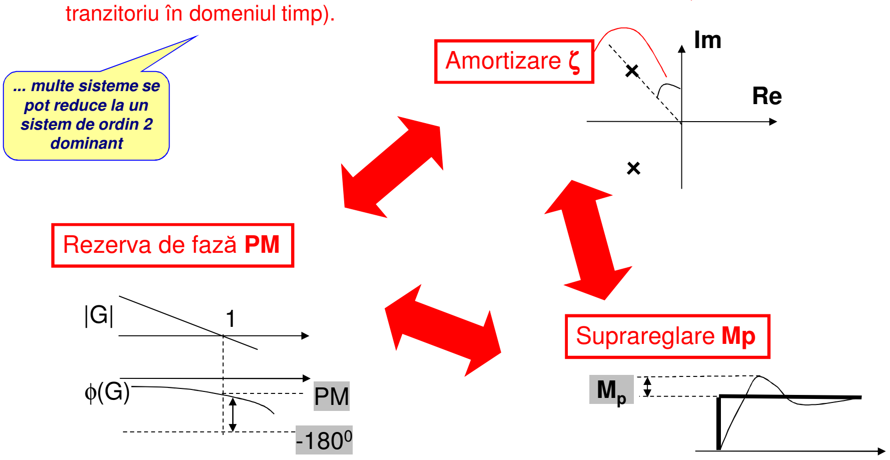
- Se folosește termenul de frecvență de tăiere ("*crossover frequency*") pentru frecvența la care amplificarea este unitară (denumire venită din studiul filtrelor).
- Se observă ușurința cu care se poate analiza orice schimbare a valorii amplificării ***K*** prin translarea caracteristicii de amplitudine.





Rezerva de fază si amortizarea (1)

- Pentru sisteme de ordinul doi, există o legătură directă între rezerva de fază (diagrama Bode pentru G, din bucla deschisă), amortizare (planul complex), și suprareglare (răspuns tranzitoriu în domeniul timp).



- In general, dacă adăugăm fază prin compensare → vom îmbunătăți rezerva de fază ↔ vom crește amortizarea ↔ vom scade suprareglarea.
- Discuție pentru caz particular – poli real negativi.

Rezerva de fază și amortizarea (2)

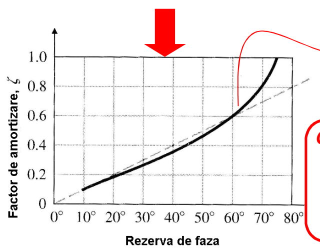
- Fie sistemul cu reacție unitară:

$$\begin{cases} bucla\_deschisa & G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s\cdot(s+2\cdot\xi\cdot\omega_n)} \\ bucla\_inchisa & T(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2} \end{cases}$$

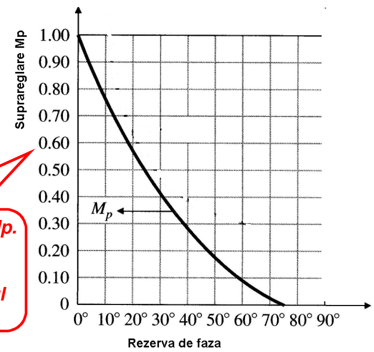
- Se obține pentru rezerva de fază PM (fără demonstrație):

$$PM=\tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\cdot\xi^4}-2\cdot\xi^2}}\right)$$

$$\boxed{\xi\cong\frac{PM}{100} \quad PM<70^0}$$



O relație neliniară lega ζ de Mp. (vezi modul 06)
Cumulând cele două dependențe obținem graficul acesta.

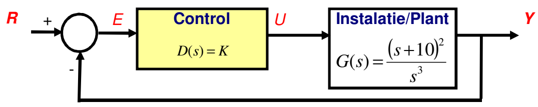


- Deși această relație aproximativă este adevarată doar pentru sisteme de ordinul doi, este folosită de multe ori ca un punct de plecare pentru proiectarea oricărui sistem.
- Relații de proiectare aproximative se obțin pentru suprareglare (*overshoot*) ***Mp***, și vârful rezonant, ***Mr*** (*vezi modul 06*)

Cazuri speciale - Sisteme cu stabilitate condițională (1)

- Am văzut că în majoritatea cazurilor, un sistem este stabil pentru valori reduse a lui ***K***, și devine instabil la valori mari ale lui ***K***.
- Există și situații în care creșterea lui ***K*** determină stabilitatea, iar valorile reduse ale lui ***K*** determină instabilitate.
  - Astfel de sisteme se numesc sisteme cu stabilitate condițională (“*conditionally stable systems*”).
- Exemplu (*v.modul 16, p.2*):

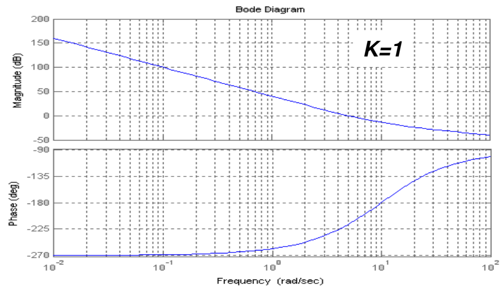
$$G(s)=\frac{(s+10)^2}{s^3}$$



- Dorim sa studiem proprietățile de stabilitate în funcție de ***K***.

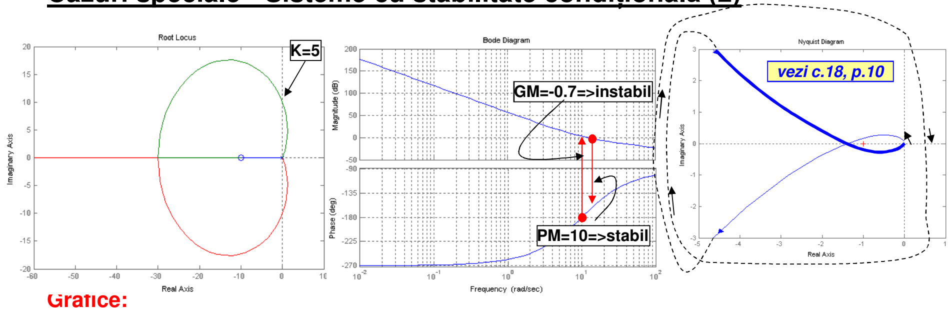
```
clear;
numG=[1 20 100];
denG=[1 0 0 0];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w); grid on;

figure; rlocus(sysG);
figure; bode(7*sysG,w); grid on;
figure; nyquist(7*sysG,{1e-2,1e2});
axis([-5,1,-3,3]);
```



$$G(s)=\frac{(s+10)^2}{s^3}$$

Cazuri speciale - Sisteme cu stabilitate condițională (2)



Grafice:

Locul radacinilor **Răspuns în frecvență(K=7)** **Nyquist (K=7)**

- Locul rădăcinilor = Arată că sistemul este stabil pentru ***K>5*** și instabil pentru ***K<5***.
- Determinarea marginilor de pe diagrama Bode pentru ***K=7***, ar arăta ***PM=10⁰, GM= -0.7***, deci un sistem instabil.
- Aplicarea criteriului Nyquist, arată o încercuire ***CW*** (sensul acelor de ceasornic, și una ***CCW*** (invers acelor de ceasornic), deci ***N=0***, și se confirmă că sistemul este stabil (Z=N+P=0+0=0) pentru ***K=7***.

- **Concluzie: Utilizarea diagramelor Bode pentru determinarea stabilității sistemelor cu stabilitate condițională NU este recomandată.**

Cazuri speciale - Sisteme cu stabilitate condițională (3)

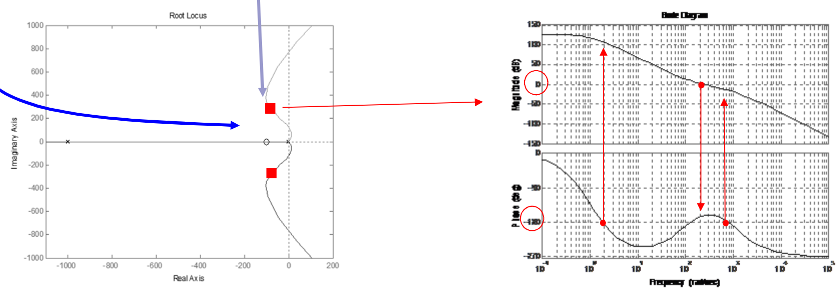
Un alt exemplu (poli și zero-uri multipli, alternanți):

$$G(s)=\frac{100\cdot(s+100)^2}{(s+1)^3\cdot(s+1000)^2}$$

Din locul rădăcinilor stabilitatea depinde de valoarea lui K.

Reprezentăm Bode pentru $\boxed{K=2*10^6}$.

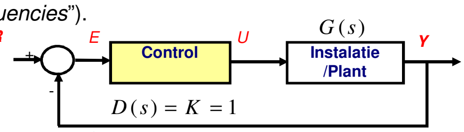
Observație *O astfel de diagramă Bode se obţine uneori la controlul tensiunii unei surse de tensiune continue, când faza scade abrupt în jurul frecvenţei de rezonanță a filtrului, apoi creşte prin efectul unor zero-uri din sistemul de compensare.*



Concluzie: Utilizarea diagramelor Bode pentru determinarea stabilității sistemelor cu stabilitate condițională NU este recomandată.

Cazuri speciale - Sisteme cu intersectări multiple ale axei */G/=1* (1)

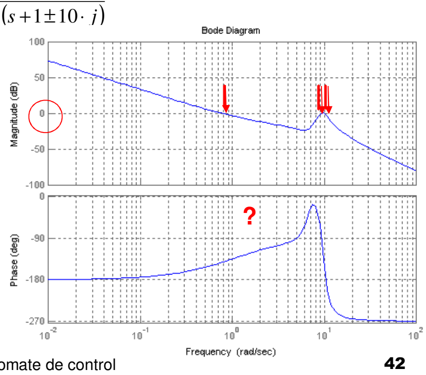
- Observațiile de determinare a stabilității și rezervelor de fază sau amplificare sunt valabile pentru sisteme cu o singură intersecție a axei unitare, în diagrama Bode de amplitudine.
- Trebuie să fim atenți în interpretarea rezultatelor dacă avem mai multe puncte de intersecție a axei ("*multiple crossover frequencies*").
- Exemplu:



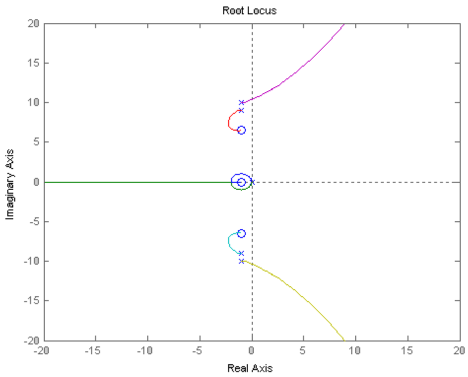
$$G(s)=\frac{85\cdot(s+1)\cdot(s^2+2\cdot s+43.25)}{s^2\cdot(s^2+2\cdot s+82)\cdot(s^2+2\cdot s+101)}=\frac{85\cdot(s+1)\cdot(s+1\pm 6.5\cdot j)}{s^2\cdot(s+1\pm 9\cdot j)\cdot(s+1\pm 10\cdot j)}$$

- Dorim să studiem proprietățile de stabilitate.

```
clear;
numG=85*conv([1 1],[1 2 43.25]);
denG=conv([1 2 82 0 0],[1 2 101]);
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2,100);
bode(sysG,w); grid on;
figure; rlocus(sysG);
axis([-20,20,-20,20]);
figure; nyquist(sysG ,{1e-2,1e2});
axis([-2,2,-2,2]);
figure;bode(0.6*sysG,w); grid on;
```

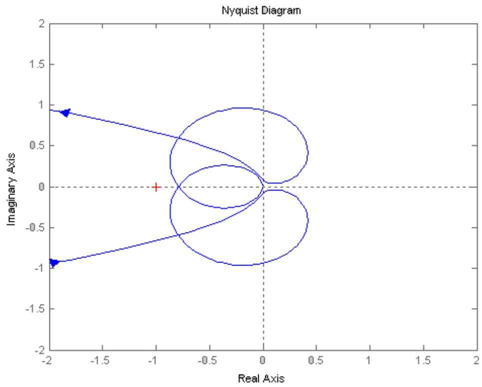


Cazuri speciale - Sisteme cu intersectări multiple ale axei |G|=1 (2)



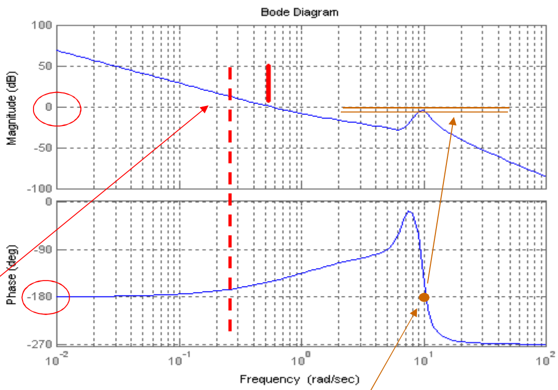
Grafice:
Locul rădăcinilor

Nyquist



Cazuri speciale - Sisteme cu intersectări multiple ale axei |G|=1 (3)

Răspuns în frecvență (K=0.6)



- Diagramele Nyquist sau Bode arată că avem 3 frecvențe de trecere a axei unitare, pentru care se pot calcula rezervele de fază individuale.
- Rezerva de amplitudine se determină la 10.4rad/sec, și este de 1.26.

Soluție **Stabilitatea acestui sistem s-ar îmbunătăți dacă am scade câștigul *K*, astfel încât să avem o singură trecere a axei unitare și o determinare mai clară a rezervelor de amplitudine și fază.**

Relația Bode între amplitudine și fază (1)

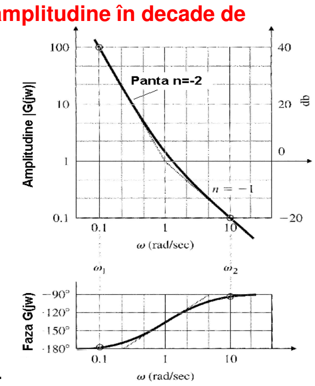
Teoremă: Pentru orice sistem stabil, de fază minimă (fără poli sau zerouri în partea dreaptă a planului complex), faza lui ***G(jω)*** este într-o relație unică cu amplitudinea lui ***G(jω).***

Consecintele sunt mai importante decat teorema:

- **Dacă graficul amplitudinii are aceeași pantă pentru cel puțin o decadă de variație a frecvenței, atunci faza este dată de**

$\boxed{\angle G(j\omega) \cong n \cdot 90^0}$ **unde *n* reflectă panta caracteristicii de amplitudine în decade de amplitudine pe decade de frecvență.**

- Exemplu:

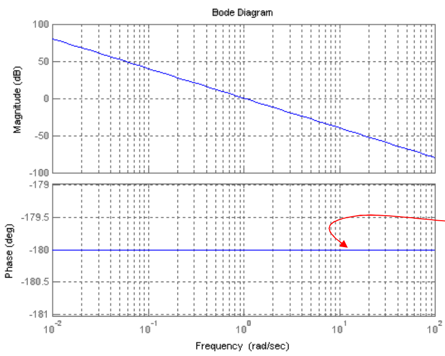


Aplicație în proiectarea unui sistem de control

- Pentru stabilitate, dorim ca faza > -180^0 astfel încât ***PM > 0***.
- Putem ajusta ***|KG(jw)|*** astfel încât să avem o pantă ***n = -1*** la frecvența de tăiere.
- ***Dacă n = -1 pentru o decadă înainte și o decadă după ω_c, atunci PM = 90^0, iar dacă avem o decadă în jurul lui ω_c, atunci PM este suficientă.***

Relația Bode între amplitudine și faza (2). Exemplu.

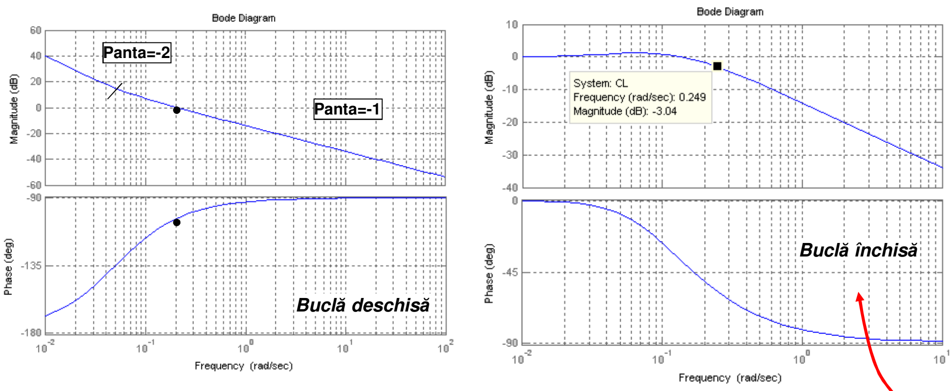
- Pentru a ilustra proiectarea pe baza relației amplitudine-fază, să considerăm un sistem cu funcția de transfer: $G(s) = \dfrac{1}{s^2}$
- Se dorește proiectarea care să asigure o lărgime de bandă ***BW = 0.2rad/sec***, pentru sistemul în buclă închisă.
- Etapele de proiectare sunt:
  1. Desenați |G(s)|. Se observă o panta = -2, care nu asigură destulă rezervă de fază.



Relația Bode între amplitudine și faza (3). Exemplu.

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

2. Modificați desenul să includă o lege de compensare PD *|D(s)|,* cu frecvența de cel puțin 4 ori mai mică decât ***BW = 0.20rad/sec***.
   - Deci $\omega_1 = 0.05 rad/sec$ ($T_D = 20$), astfel încât panta să fie $n = -1$ la $\omega = 0.20 rad/sec$.



3. Deoarece *T = DG/(1+DG)* în buclă închisă, dorim ca *|DG| = 100* la frecvența de tăiere, astfel încât *|T(s)|~1*. Deci *D(s)=0.01*(20*s+1)*.
4. La implementarea practică, mai trebuie să adăugăm un pol la frecvențe foarte mari.
5. Verificați rezultatele.

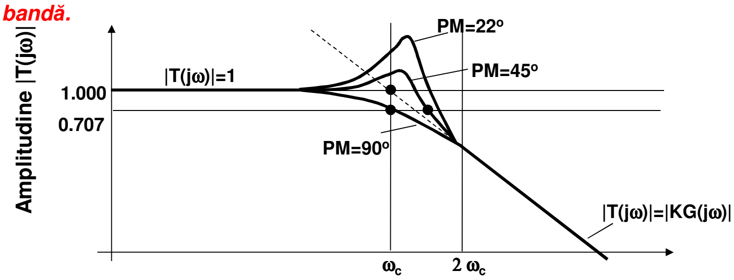
Răspunsul în frecvență al sistemului în buclă închisă (1)

- Vom încerca să stabilim o legatură între frecvența de tăiere a sistemului în buclă deschisă ω_c și lărgimea de bandă (***BW***) a sistemului în buclă închisă.

$$|T(j\omega)| = \left|\frac{K \cdot G(j\omega)}{1 + K \cdot G(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} 1, \omega << \omega_c \\ |KG|, \omega >> \omega_c \end{cases}$$

- Știm că în vecinătatea frecvenței de tăiere, avem prin definiție ***|KG|~1***, și ***|T|*** depinde puternic de rezerva de fază a sistemului în buclă deschisă.
  - O rezervă de fază ***PM=90º***, înseamnă că ***|T|=0.707***
  - O rezervă de fază ***PM=45º***, înseamnă că ***|T|=1.310***.
- Concluzie: $\boxed{\omega_c \le BW \le 2 \cdot \omega_c}$

Condițiile pentru BW a sistemului în buclă închisă se convertesc în condiții pentru rezerva de fază PM a sistemului în buclă deschisă ←*Putem proiecta după lărgimea de bandă.*

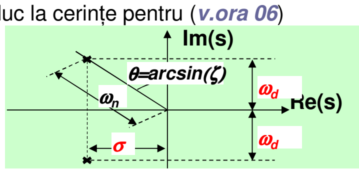


Răspunsul în frecvență al sistemului în buclă închisă (2)

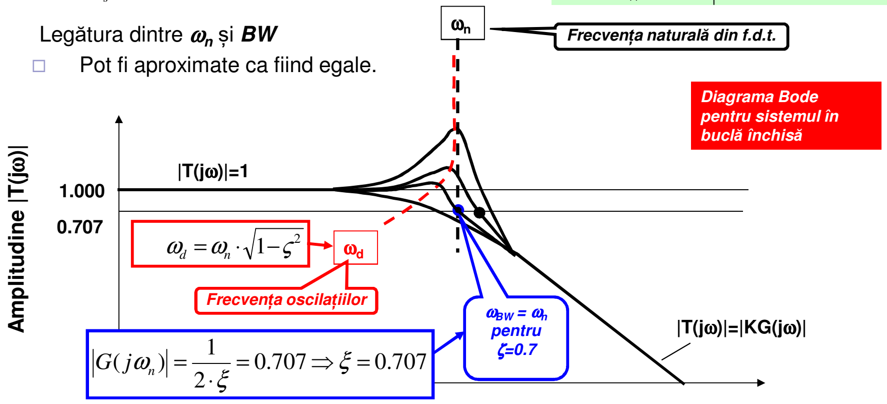
Condițiile pentru BW (bucla închisă) se convertesc în condiții pentru PM (bucla deschisă).

- Datele de proiectare pentru răspunsul tranzitoriu conduc la cerințe pentru (*v.ora 06*)

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r}$$
$$\varsigma \geq \varsigma(M_p)$$
$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_s}$$



- Legătura dintre ω_n și ***BW***
  - Pot fi aproximate ca fiind egale.



Observații finale

- Rezerva de amplificare ("*Gain margin*")
  - Definiție = factorul cu care amplificarea poate fi crescută până la instabilitate.
  - Poate fi citită direct de pe diagrama Bode = Distanța verticală între caracteristica amplificării și un câștig egal cu 1, măsurat în punctul în care faza este 180⁰.
  - Practic, arată cu cât poate fi crescut ***K*** până la instabilitate.
  - Orice sistem de primul ordin are ***GM* = ∞**

- Rezerva de fază ("*Phase margin*")
  - Definiție = Cât de departe de instabilitate este condiția de fază.
  - Poate fi citit direct de pe diagrama Bode = cu cât este faza deasupra lui -180⁰, când câștigul este egal cu 1.
  - Practic, arată cu cât poate fi faza scazută până la instabilitate.

- Situații speciale
  - Sisteme cu stabilitate condițională
  - Sisteme cu intersectări multiple ale axei unitare.

Teorema (legatura amplitudine-fază):

Pentru orice sistem stabil și de fază minimă (fără poli sau zerouri în partea dreapta a planului complex), faza lui *G(jω)* este într-o relație unică cu amplitudinea lui *G(jω)*.

Cursul #05
Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 20 = Proiectarea sistemelor PD + Proiectarea sistemelor cu avans de fază.

Compensarea dinamică

- Am discutat metode de analiză în frecvență pentru cazul unui control proporțional (***K***).
- De multe ori este necesar să adăugăm componente dinamice (de compensare) pentru a îndeplini cerințele de proiectare.

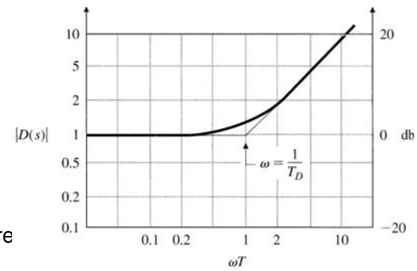
Compensarea PD

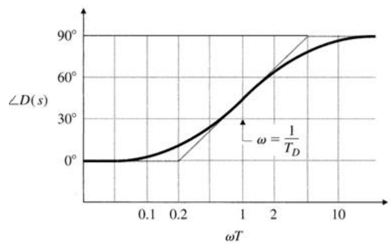
- Considerăm:

$$D(s) = (T_D \cdot s + 1)$$

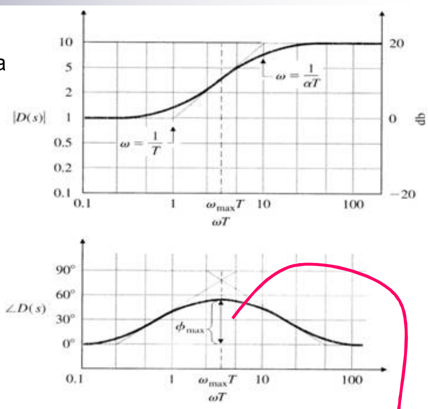
- Efectele acestui control se văd deasupra frecvenței (***1/T_D***):
  - Adaugă fază
  - Adaugă +1 la panta caracteristicii de amplificare
- Scopul este de a îmbunătăți stabilitatea

<u>Repetăm consecința teoremei amplitudine-fază</u>
Dacă n = -1 pentru o decadă înainte și o decadă după ω_c, atunci PM=90^0, iar dacă avem o decadă în jurul lui ω_c, atunci PM este suficientă.





Compensarea cu avans de fază



- Pentru a limita amplificarea de frecvență înaltă a compensării PD, se adaugă un pol la o frecvență mult mai înaltă decât ***zero***-ul caracteristic compensării PD.
- De asemeni, în caz practic, este imposibil de implementat un diferențiator ideal.
- Legea de control este data de:

$$\boxed{D(s)=\frac{T\cdot s+1}{\alpha\cdot T\cdot s+1} \qquad \alpha<1}$$

- Rolul este același, de a adăuga fază, dar cu amplificare mai redusă la frecvențe înalte.

Adăugarea de fază este utilă pentru o îmbunătățire a amortizării (*Remember* ζ ~ PM/100*).

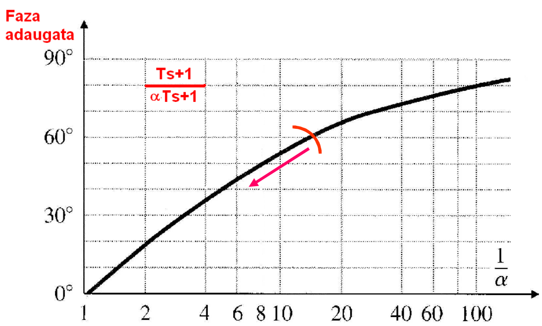
- Faza adăugată de o compensare cu avans de fază este: $\phi=\tan^{-1}(T\omega)-\tan^{-1}(\alpha T\omega)$

cu valoarea maximă $\sin\phi_{\max}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ @ $\omega_{\max}=\frac{1}{T\cdot\sqrt{\alpha}}$ (*între cele două frecvențe*)

- Dacă compensarea este exprimată ca $D(s)=\frac{s+z}{s+p}$ atunci $\omega_{\max}=\sqrt{|z|\cdot|p|}$

Soluții alternative și proiectare optimală

- Valoarea lui ***α*** determină faza maximă adăugată de compensarea cu avans de fază.



$$\boxed{D(s)=\frac{T\cdot s+1}{\alpha\cdot T\cdot s+1} \qquad \alpha<1}$$

- Totuși adăugarea unei faze mari poate produce amplificare mare la frecvențe înalte, compromițând sensibilitatea la zgomot.
- Se consideră un compromis optim la adăugarea unei faze maxime de ***60⁰***.
- Pentru adăugarea unei faze mai mari decât ***60⁰***, se poate considera un compensator cu avans de fază dublu.

$$D(s)=\left(\frac{T\cdot s+1}{\alpha\cdot T\cdot s+1}\right)^2$$

Etape de proiectare

1. Determinați câștigul de buclă deschisă ***K*** din condiția de eroare staționară sau de lărgime de bandă (BW).
   1. Condiția de eroare staționară se transformă în condiții pentru constantele de eroare în funcție de tipul sistemului și de semnalul de intrare considerat (***v. Curs 5, pag.15***)
   2. Pentru îndeplinirea condițiilor de lărgime de bandă (***BW***), considerați ***K*** astfel încât frecvența de tăiere (amplificare unitară) a sistemului în buclă deschisă este lărgimea de bandă dorită (***v. Curs 5, pag. 49***).
2. Evaluați rezerva de fază (PM) a sistemului fără compensație, folosind valoarea lui ***K*** dedusă anterior.
3. Adăugați o rezervă adițională de aproximativ 10^0 și determinați faza necesară.
4. Determinați α din figura de la pagina 4 (***v. Curs 5, pag. 54***).
5. Incepeți o serie de încercări ("***trial and error***") plecând de la alegerea lui ω_{max} la frecvența de tăiere, deci alegeți un pol la $(1/T) = \omega_{max}\sqrt{\alpha}$, și un zero la $(1/\alpha T) = \omega_{max}/\sqrt{\alpha}$.
6. Desenați răspunsul în frecvență al sistemului compensat și verificați rezerva de fază (***PM***). Dacă nu este suficientă, iterați proiectarea de la pasul 5.

<u>**Notă**</u> = Dacă condițiile par imposibil de satisfăcut, considerați un compensator dublu.

ω_{max} = frecvența la care vrem să adaugăm cea mai multă fază.

Exemplul 1 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (1)

- Să considerăm sistemul dat de legea:

$$G(s) = \frac{1}{s\cdot(s+1)}$$

și cerințele de proiectare: eroare staționară mai mică decât ***0.1*** pentru un semnal de intrare de tip rampă, și o suprareglare (la semnal treaptă) ***Mp < 25%.***

Soluție:

- Adoptăm o compensare cu avans de fază de forma: $D(s) = \dfrac{T\cdot s+1}{\alpha\cdot T\cdot s+1} \quad \alpha<1$
- Eroarea staționară la semnal rampă pentru cazul unui sistem stabil, cu compensare cu avans de fază ***D(s)*** și reacție unitară este:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{1+K\cdot D(s)\cdot G(s)}\cdot R(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{1+K\cdot D(s)\cdot\dfrac{1}{s\cdot(s+1)}}\cdot\frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{K\cdot D(0)} = \frac{1}{K}$$

- Deci ***KD(0) ≥ 10***. Adoptăm ***K = 10***, și presupunem un câștig unitar pentru ***D(s).***
- Am reprezentat relația neliniară între suprareglare și rezerva de fază (***v. Curs 5, pag.15***). ***Mp < 25% → PM = 45⁰.***

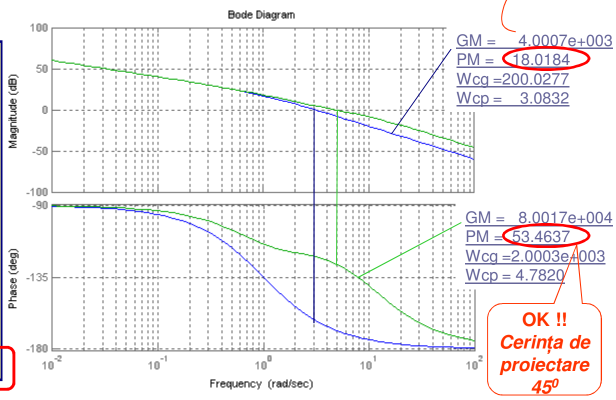
Exemplul 1 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (2)

- Reprezentăm diagramele Bode pentru sistemul ***G(s)*** în bucla deschisă ***(ALBASTRU).***
- Avem PM=20^0; deci am avea nevoie de o diferență de 25^0.
- Deoarece polul lui ***G(s)*** este aproape de frecvența de tăiere (~ 3rad/sec), trebuie să plănuim o diferență de fază mai mare. De exemplu ***40^0***. Din graficul de la pagina 54, ***$1/\alpha$=5***.
- Prin încercări, considerăm un ***zero*** la 2rad/sec și un ***pol*** la 10rad/sec.
  - Teoria ne-ar fi sugerat ***zero*** la 1.34 rad/sec (3/sqrt(5)) și ***pol*** la 6.5 rad/sec.

```
clear;
numG=10;
denG=[1 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w); grid on; hold on;
[mag,phase,w]=bode(sysG);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)

numD=5*[1 2]; denD=[1 10];
sysD=tf(numD,denD);
OL=sysD*sysG;
w=logspace(-2,2);
bode(OL,w);
[mag,phase,w]=bode(OL);

[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
```



Exemplul 2 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (1)

Să considerăm instalația (sistemul) dat de legea:

$$K \cdot G(s) = K \cdot \frac{10}{s \cdot \left(\frac{s}{2.5}+1\right) \cdot \left(\frac{s}{6}+1\right)}$$

Să se proiecteze o lege de compensare care să conducă la un sistem în buclă închisă, cu reacție unitară, cu rezerva de fază ***PM=45^0*** și cu ***K_v=10*** (de exemplu, provenite din date de proiectare pentru suprareglare – *v.curs 5, pag.38* ; și, respectiv, eroare staționară –*v.curs5, pag.15*)

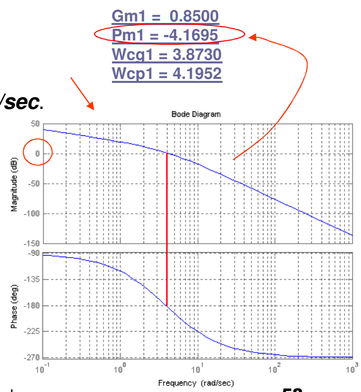
$$D(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \qquad \alpha < 1$$

Soluție:

1. Pentru ***K=1*** ↔ avem ***K_v=10***.
2. Desenăm diagrama Bode (1*G(s)). ***PM = -4^0*** la ***ω_c = 4rad/sec***.
3. Calculăm faza dorită ***F = 45^0+10^0-(-4^0)=59^0***.
4. Din figura de la pagina 4, citim ***$\alpha \sim$ 0.07***.
5. Noua frecvență de tăiere ar fi puțin mai mare decât cea pentru ***G(s), ω_c=4rad/sec***.
   Putem începe iterația cu ***ω_{zero}=2*** și ***ω_{pol}=30***.
6. Diagrama ***Bode*** pentru această compensație.

$$D(s) = \frac{\frac{s}{2}+1}{\frac{s}{30}+1}$$

7. Produce o rezervă de fază ***PM=28^0*** - insuficient.



Exemplul 2 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (2)

8. Considerăm un compensator dublu

$$D(s)=\frac{\frac{s}{2}+1}{\frac{s}{30}+1}\cdot\frac{\frac{s}{3}+1}{\frac{s}{45}+1}$$

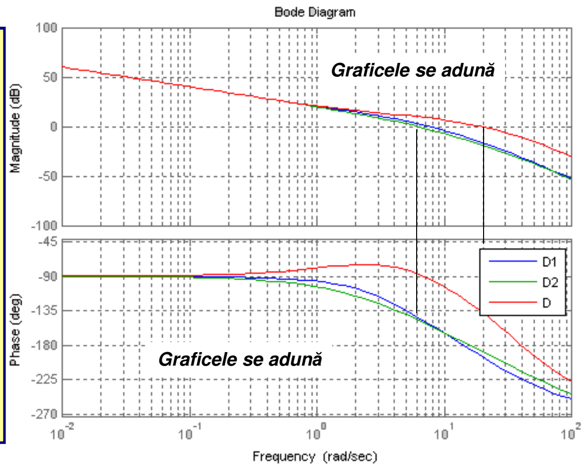
OK !

Pm1 = 28.3528
Pm2 = 33.3608
Pm = 45.4019

```
clear;
numG=150;
denG=conv([1 2.5 0],[1 6]);
sysG=tf(numG,denG);
numD1=[0.5 1];
denD1=[1/30 1];
sysD1=tf(numD1,denD1);
numD2=[1/3 1];
denD2=[1/45 1];
sysD2=tf(numD2,denD2);

OL1=sysD1*sysG;
OL2=sysD2*sysG;
OL3=sysD1*sysD2*sysG;
w=logspace(-2,2);
bode(OL1,OL2,OL3, w); grid on; hold on;
legend('D1','D2','D');

[Gm1,Pm1,Wcg1,Wcp1] = MARGIN(OL1,w);
[Gm2,Pm2,Wcg2,Wcp2] = MARGIN(OL2,w);
[Gm3,Pm3,Wcg3,Wcp3] = MARGIN(OL3,w);
```



Exemplul 3 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (1)

Se consideră instalația cu funcția de transfer $G(s)=\frac{100}{s\cdot(s+1)\cdot(s+10)}$

Proiectați folosind diagramele Bode un compensator cu avans de fază ***KD(s)*** pentru care obținem o rezervă de fază ***PM > 50⁰*** iar sistemul în buclă închisă are o lărgime de bandă (bandwidth) ***w_{BW} > 2 rad/sec***.

""""""""""""""""""""""""""""""

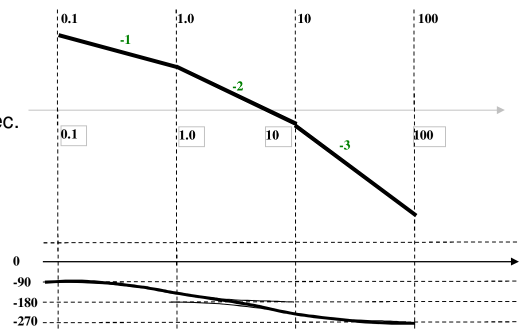
Desenăm diagrama Bode pentru sistemul fără compensație.

$$G(s)=\frac{10}{s\cdot(s+1)\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

Frecvențele de interes 0, 1 și 10 rad/sec.

s = 10*j→ Câștig ~ ***0.707 (-3dB).***

s = 50*j→ Câștig ~ ***-41 dB.***



Exemplul 3 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (2)

(1) Lărgimea de bandă a sistemului în buclă închisă w_{BW} > 2rad/sec se poate aproxima cu frecvența de taiere w_c a sistemului KDG în buclă deschisă.

Trebuie estimat câștigul legii de compensare KD(s) astfel încât wc = 2rad/sec.

$$|G(j\cdot 2)| = \left|\frac{100}{j2\cdot(j\cdot 2+1)\cdot(j\cdot 2+10)}\right| = \frac{100}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{104}} = \frac{50}{\sqrt{520}} = 2.192 \approx 6.81dB$$

Adoptăm KD(j2) = 0.456 (astfel încât 0.456*2.192=1).

(2) Să adăugăm fază la această frecvență w_c = 2 rad/sec.

Funcția de transfer G(s) are faza aproximativ -180^0 la w_c = 2 rad/sec.

Ne propunem să adăugăm 50^0+10^0=60^0 (deoarece vrem să fim siguri că obținem PM>50^o, considerăm și o rezervă de 10^o). Din tabel, citim α = 0.05.

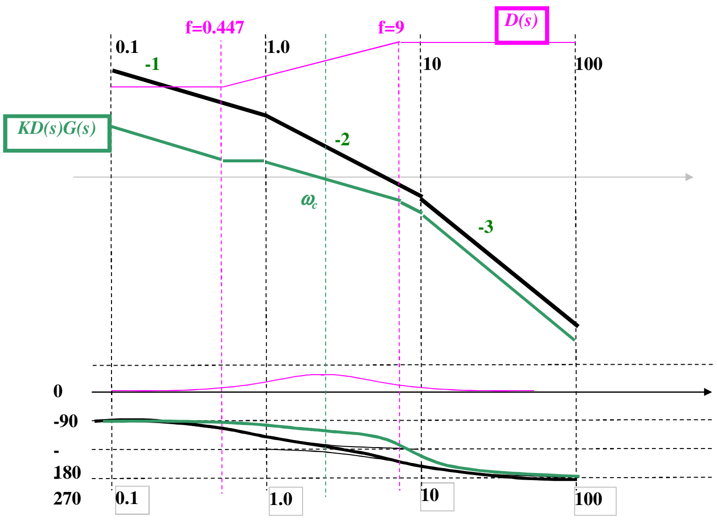
Deci $$D(s) = \frac{T\cdot s+1}{\alpha\cdot T\cdot s+1} \qquad \omega_{\max} = \frac{1}{T\cdot\sqrt{\alpha}} \approx \omega_c \Rightarrow T\cdot\sqrt{0.05} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{T} = 0.447 \Rightarrow \frac{1}{\alpha T} = 9$$

$$D(s) = 20\cdot\frac{s+0.447}{s+9} \Rightarrow |D(j2)| = 20\cdot\frac{\sqrt{4+0.445\cdot 0.445}}{\sqrt{4+81}} = \frac{20\cdot 2.04}{9.21} = 4.44 \Rightarrow K = 0.1$$

(3) Trebuie să desenăm diagrama Bode pentru

$$K\cdot D(s)\cdot G(s) = 0.1\cdot 20\cdot\frac{s+0.447}{s+9}\cdot\frac{100}{s\cdot(s+1)\cdot(s+10)}$$

Exemplul 3 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (3)



Observații finale – Recapitulare etape de proiectare

1. Determinați câștigul de buclă deschisă ***K*** din condiția de eroare staționară sau de lărgime de bandă (***BW***).
   1. Condiția de eroare staționară se transformă în condiții pentru constantele de eroare în funcție de tipul sistemului și de semnalul de intrare considerat.
   2. Pentru îndeplinirea condițiilor de lărgime de bandă (***BW***), considerați ***K*** astfel încât frecvența de tăiere a sistemului în buclă deschisă este de două ori mai mică decât lărgimea de bandă dorită pentru sistemul în buclă închisă.
2. Evaluați rezerva de fază (***PM***), a sistemului fără compensație, folosind valoarea lui ***K*** dedusă anterior.
3. Adăugați o rezervă/margine de aproximativ 10^0 și determinați faza necesară.
4. Determinați α din figura de la pagina 4.
5. Incepeți o serie de încercări ("***trial and error***") plecând de la alegerea lui ω_{max} la frecvența de tăiere, deci alegeți un ***zero*** la $(1/T)=\omega_{max}\sqrt{\alpha}$, și un ***pol*** la $(1/\alpha T)=\omega_{max}/\sqrt{\alpha}$.
6. Desenați raspunsul în frecvență al sistemului compensat și verificați rezerva de fază (PM). Dacă nu este suficientă, iterați proiectarea de la pasul 5.

- Dacă condițiile par imposibil de satisfăcut, considerați un compensator dublu.

TEMA DE CASĂ #5

Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 17 mai.

Problema 1

Determinati domeniul de variatie a lui ***K*** pentru care urmatorul sistem este stabil. In acest scop desenati diagramele Bode pentru ***K=1*** si imaginati-va ca graficul de amplitudine se deplaseaza in sus sau jos cu valoarea lui ***K***.

Verificati raspunsul printr-un desen rapid al locului radacinilor.

$$KG(s) = \frac{K}{(s+10)\cdot(s+1)^2}$$

Problema 2

Proiectati un compensator cu avans de faza astfel incat ***PM>50***, si largimea de banda (bandwidth) ω_{BW} ***>20rad/sec***, folosind diagramele Bode, pentru functia de transfer in bucla deschisa:

$$G(s) = \frac{50{,}000}{s\cdot(s+10)\cdot(s+50)}$$