Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2

Saptamana 01 = Introducere in sisteme automate de reglaj (1 ora)

- Ora 01 = Introducere si definitii.

Saptamana 01 = Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 02 = Modelarea sistemelor mecanice plecand de la ecuatia de miscare.
- Ora 03 = Modelarea sistemelor electrice, electromecanice, termice sau de curgere.
- Ora 04 = Linearizarea si scalarea sistemelor

Definiții

- **Control manual** vs. **control automat**
  - O persoană conducând un autovehicol = control manual
  - Temperatura controlată de un termostat = control automat

- Sistemele proiectate să mențină o ieșire la o valoare prescrisă se numesc **regulatoare**
  - ***Exemple***: controlul temperaturii prin termostat, controlul volumului unui amplificator audio, controlul altitudinii unui satelit, ș.a.m.d.

- Sistemele proiectate să urmarească o referință variabilă se numesc **sisteme servo** sau **de urmărire**.
  - ***Exemple***: Circuite PLL, sisteme de automatizări cu motoare electrice și operare dupa un profil, mașini unelte, ș.a.m.d.

- Vom adresa **sisteme liniare și invariabile în timp**.
  - Sistemul este descris prin ecuații diferențiale liniare
  - Aceste ecuații sunt invariabile în timp, coeficienții lor nu variază cu condițiile de mediu (temperatură, umiditate), condițiile de circuit, sau uzura fizică a componentelor.

Definiții

Sisteme de control în **buclă deschisă** sau **buclă închisă**.

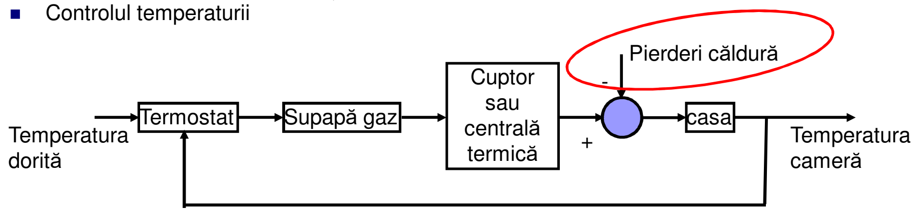
- Sistemele în buclă închisă folosesc o măsurare a mărimii de ieșire
- Se mai numesc sisteme cu reacție (***feedback control***).

Feed-back versus feed-forward:

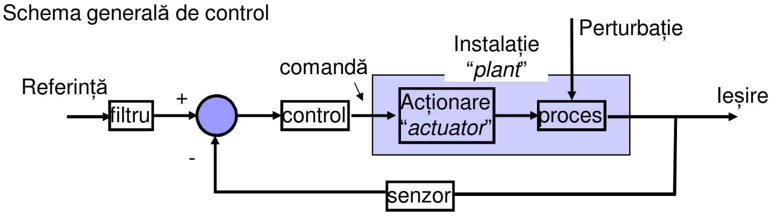
- Dacă un senzor din sistem poate furniza informație despre traiectoria ieșirii sistemului, la un moment din viitor, vom incerca să folosim această informație printr-un control predictiv.
  - O formă specială este ***feedforward control.***
  - ***Examplu:*** Controlul presiunii aburului unei centrale termo-electrice – prin măsurarea cerinței de energie electrică se poate anticipa o creștere iminentă a presiunii.

Exemple de sisteme cu reacție:

- Controlul temperaturii



- Schema generală de control



- Orice control în buclă deschisă nu ar ține cont de perturbații sau de variația parametrilor.
- Ideal ar fi să proiectăm procesul controlat și controlul deodată, pentru a ține cont de particularitățile fiecăruia (pentru a avea un sistem liniar și invariabil în timp, "*LTI*").
  - Dar … de obicei controlul se proiectează după ce instalația este construită.

Ce urmărim la proiectarea unui sistem de control? (1)

- Ne punem problema proiectării controlului pentru satisfacerea unor performanțe legate de funcționarea sistemului controlat, în condițiile cunoașterii modelului sistemului controlat (instalație, "*plant*").

1. **Indici de performanță de regim staționar**
   - **Eroarea staționară** – deviația permanentă de la valoarea dorită, în regim staționar
2. **Indici de performanță de regim dinamic (tranzitoriu)**
   - **Răspunsul la semnal treaptă**, **semnal impuls**, sau **semnal rampă** pentru o caracterizare a comportării la semnale variabile (mai cunoscute din analiza în frecvență).
   - **Timpul de răspuns** – *Cât de repede sistemul ajunge la referința dorită?*
3. **Stabilitatea sistemului**
   - Pentru o valoare de intrare, ieșirea rămâne într-un domeniu finit de valori.

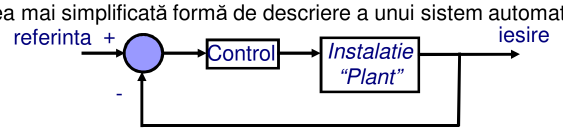
Ce urmărim la proiectarea unui sistem de control? (2)

- Vom analiza răspunsul dinamic al sistemelor pentru o mai bună înțelegere a cerințelor de proiectare.
  - Dacă răspunsul dinamic nu este satisfăcător, vom introduce controlul în buclă închisă (= vom introduce o reacție după una sau mai multe variabile de ieșire).
  - Dacă o reacție printr-un circuit proporțional (câștig fără modificarea fazei) nu este suficient, vom folosi o <u>compensare în frecvență</u>, ce va ajusta <u>faza și amplitudinea</u> diferit, la frecvențe diferite.

- Proiectarea unui control în buclă închisă, cu <u>câștig mare</u>, ar îmbunătăți regimul dinamic (ar reduce rapid erorile), dar există limite pentru valoarea maximă a câștigului.
  - <u>Exemplu</u>: O instalație de amplificare de la microfon la difuzor cu câștig prea mare produce zgomote nedorite (oscilații).

Structura unui sistem automat de control

- Cea mai simplificată formă de descriere a unui sistem automat de control



MODELARE

- Avem nevoie de descrierea matematică a sistemului ce urmează a fi controlat.
  - Această activitate se numește ***<u>modelare</u>***.
  - Modelarea sistemelor bazate pe circuite electrice
  - Modelarea sistemelor mecanice bazate pe ecuații de mișcare
  - Modelarea sistemelor electromecanice (o combinație de circuit electric și dispozitiv mecanic).
  - Modelarea sistemelor termice sau hidraulice.
  - De cele mai multe ori avem sisteme multi-disciplinare ("*multi-physics*").

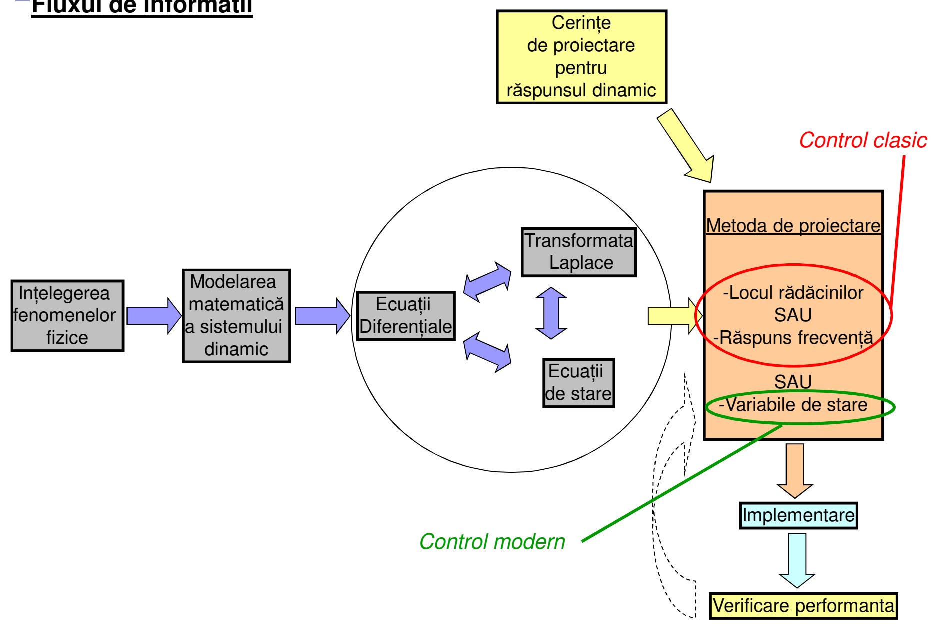
PROIECTARE

- Pe baza modelului se proiectează **<u>legea de control (compensarea sistemului):</u>**
  - Metoda de proiectare prin analiza locului rădăcinilor
  - Metoda de proiectare prin analiza in frecvență
  - Metoda de proiectare prin utilizarea variabilelor de stare (sau ecuații diferențiale)

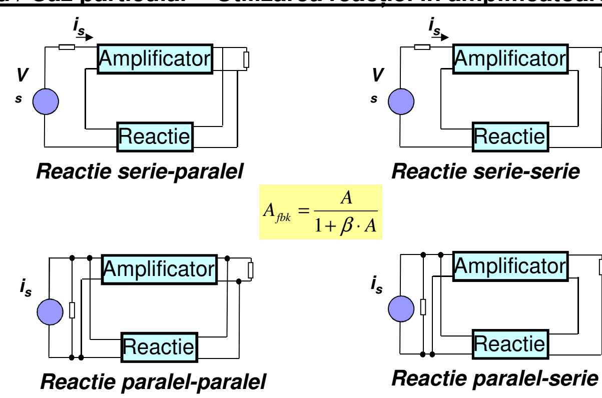
IMPLEMENTARE

- <u>Implementarea</u> legilor de control se poate face cu un circuit electronic analog sau digital:
  - Multe metode de proiectare vor fi inerent analogice
  - Implementarea în digital va presupune emularea legilor analogice sau lucrul cu metode specifice digitale.

Fluxul de informatii

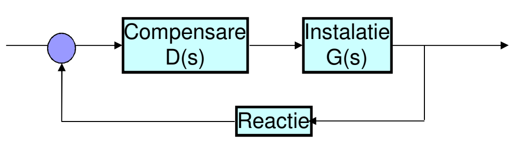


Exemplu / Caz particular – Utilizarea reacției în amplificatoare electronice



$$A_{fbk} = \frac{A}{1+\beta \cdot A}$$

Comparați cu topologia considerată într-un sistem în buclă închisă, cu compensare



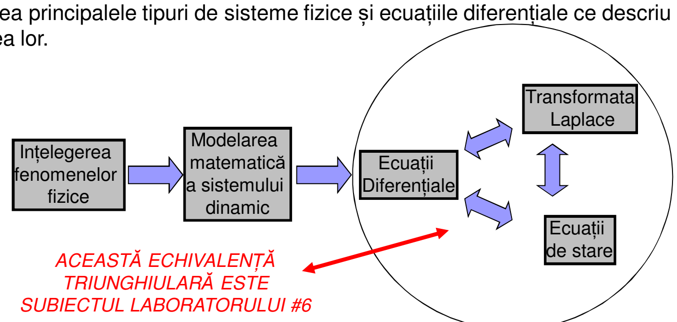
$$A_{fbk}(s) = \frac{D(s) \cdot G(s)}{1+\beta \cdot D(s) \cdot G(s)}$$

Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 02 = Modelarea sistemelor mecanice plecand de la ecuatia de miscare.

Modelarea sistemelor

- Proiectarea sistemelor de control se face printr-o secvență de pași, plecând de la un model dinamic al sistemului.
  - Prin model înțelegem o descriere matematică a sistemului printr-un set de ecuații diferențiale.
- Dezvoltarea unui model poate fi un efort complex.
  - Vom analiza pe scurt dezvoltarea unor modele simple, ca un punct de plecare în descrierea principiilor modelării.
  - Vom revedea principalele tipuri de sisteme fizice și ecuațiile diferențiale ce descriu funcționarea lor.



Modelarea matematică a sistemelor fizice

Tipul sistemului	Legi importante ale fizicii	Ecuații
Mecanice	Mișcare de translație	$F=ma$
	Mișcare de rotație	$M=J\alpha$
	Mișcarea unor corpuri flexibile	$F=mx''+bx'+kx$
Electrice	Ecuațiile Kirchhoff	
Electromecanice	Legea motoarelor	$F=Bli$ $T=Ki$
	Legea generatoarelor	$E=Blv$ $E=K\theta'$
Transfer termic	Puterea termică	$Q=(1/Rth)*(T1-T2)$
	Căldura specifică	$C=mc_v$
Curgerea lichidelor	Forța unui fluid acționând asupra unui piston	$F=pA$
	Efectul de resistență împotriva curgerii	$W=(1/R)*(p1-p2)^{1/\alpha}$

Modul 02

Modul 03

Notă – Toate aceste ecuații reprezintă sisteme dinamice (termeni cu variație în timp).

Modelarea sistemelor mecanice – Ecuația de mișcare (Newton)

- Ecuația pentru mișcarea de translație este legea Newton:

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

- Aplicarea acestei legi, de obicei, presupune definirea unor coordonate capabile de a ține cont de mișcarea corpului (poziție, viteză, accelerație), determinând forțele ce se aplică fără a ține cont de dimensiunile sau forma corpului (“*body-free diagram*”).

<u>Exemplu de sistem în mișcare – “*cruise control*”</u>

- Să descriem matematic mișcarea unui vehicol în scopul dezvoltării unui sistem de control automat al vitezei.
- Ipoteze simplificatoare:
  - Neglijăm mișcarea de rotație inerțială a roților.
  - Considerăm frecarea ca fiind proporțională cu viteza mașinii.
  - Neglijăm forma caroseriei mașinii, pe baza principiului diagramei forțelor asociate unui corp fără dimensiuni (“*body-free diagram*”).
- Alegem un sistem de coordonate astfel încât *poziția* este pe direcția de deplasare.
- Relația forțelor (considerând **<u>forța aplicată</u>** ***u(t),*** *m* = masa, *b* = coeficientul de frecare):

$$u - b\cdot\dot{x} = m\cdot\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + b\cdot\dot{x} = \frac{u}{m}$$

se poate rescrie astfel încât să avem o relație pentru **<u>viteza</u>** ***v*** (variabilă de control):

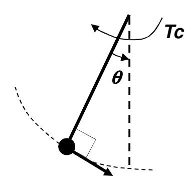
$$\dot{v} + \frac{b}{m}\cdot v = \frac{u}{m}$$

- Vom presupune o soluție de forma $v(t) = V\cdot e^{s\cdot t}$ când se aplică o forță $u(t) = U\cdot e^{s\cdot t}$
Se obține:

$$\left(s+\frac{b}{m}\right)\cdot V_o\cdot e^{st} = \frac{1}{m}\cdot U_0\cdot e^{st} \Rightarrow \frac{V_0}{U_0} = \frac{\frac{1}{m}}{s+\frac{b}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s+\frac{b}{m}}}$$

Funcția de transfer a instalației in forma Laplace

<u>Ecuațiile mișcării de rotație – Pendul (“*pendulum*”).</u>



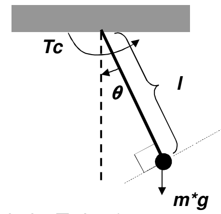
- In acest caz, mișcarea este permisă doar pe o direcție perpendiculară pe obiect (ca o tangentă la un cerc).
- Se consideră un sistem de referință într-un punct în care nu avem accelerație unghiulară (poate fi centrul unui cerc dacă traiectoria este circulară).
- Ecuația de mișcare este dată în acest caz sub forma unei relații pentru cuplu
  (legea a 2-a, a lui Newton):

$$F_c\cdot d + M_D = J\cdot\ddot{\theta}$$

unde ***Fc*** este forța aplicată, ***d*** este lungimea până la punctul de referință, M_D este un cuplu inerțial (de rezistență), ***J*** este momentul de inerție al instalației, iar ***theta*** este coordonata unghiulară instantanee.

- Se observă că avem un sistem dinamic de ordinul 2 (= ne trebuie o dublă integrare pentru rezolvarea ecuației diferențiale).

Exemplu de sistem în rotație – Pendul ("*pendulum*"). Funcția de transfer (1)



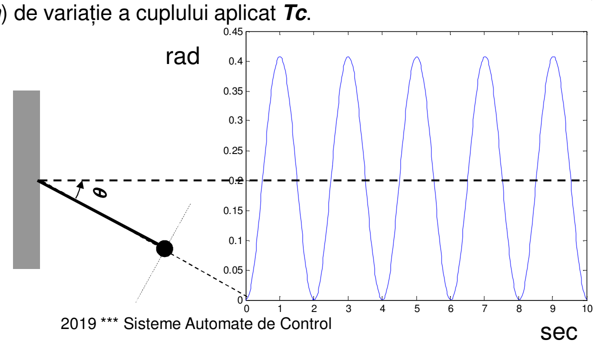
- Se consideră sistemul din figură
- Date numerice: *l=1m, m=0.5kg, g=9.81m/sec²*.
- Dorim să găsim ecuația de mișcare la aplicarea unui cuplu ***Tc.***
  - Prin definiție, cuplul măsoară cât de mult se rotește un obiect sub acțiunea unei forțe. In acest caz, cuplul ***Tc*** reprezintă gestul de a deplasa tija de la poziția verticală până la un unghi dat.
  - Când se eliberează tija, este echivalent cu un semnal treaptă (de la ***Tc*** la ***0***).
  - Vom considera această nouă poziție ca originea deplasării unghiulare.
- In general, ecuatia Newton pentru o miscare de rotatie:
  $M = J \cdot \alpha = J \cdot \ddot{\theta}$
  unde *M=cuplul [Nm], J=momentul de inertie [kg m²], α=acceleratia unghiulară in rad/sec²*.
- Considerăm toate componentele derivate din cuplul aplicat ***Tc*** și greutatea pendulului:
  $T_c - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = J \cdot \ddot{\theta}$
- ... care se poate rescrie dacă considerăm $J = ml^2$:
  $m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = T_c$
- Această ecuație diferențială este evident neliniară. Se aproximează ***sinθ ~ θ***.
- Se obține:
  $$\left.\begin{array}{l} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \\ Notam\_\_\omega_m = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_m^2 \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{\frac{1}{m \cdot l^2}}{s^2 + \frac{g}{l}}}$$

Funcția de transfer a instalației în forma Laplace

Exemplu de sistem în rotație – Pendul ("*pendulum*"). Funcția de transfer (2)

- Vom folosi intensiv MATLAB pentru calcularea diferitelor rezultate.
- Să determinăm istoria variației coordonatei ***θ***, pentru datele numerice date.
- Să reconsiderăm funcția de transfer:
  $$\frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{\frac{1}{m \cdot l^2}}{s^2 + \frac{g}{l}} = \frac{2}{s^2 + 9.81}$$
- Variația în timp a coordonatei unghiulare se poate determina prin folosirea unei funcții treaptă unitară (***1 Nm***) de variație a cuplului aplicat ***Tc***.

```
t=0:0.02:10;
num=2;
den=[1 0 9.81];
sys=tf(num,den);
y=step(sys,t);
plot(t,y);
```



Modelarea sistemelor flexibile (*cu arcuri*). Teorie (1)

Pentru mai rapida înțelegere a acestui caz, să considerăm ca exemplu, un sistem de suspensie a unui automobil.

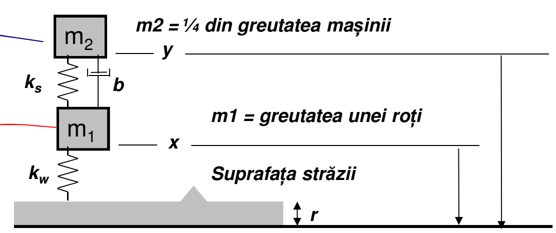
- Considerăm greutatea egal distribuită pe cele 4 roți.
- Măsurând constanta de deformare a fiecarui arc de suspensie, determinăm k_s ***= 130,000 N/m.***
- Măsurând deformarea fiecarei roți la aplicarea unei greutăți, determinăm k_w ***= 1,000,000 N/m****.*
- Considerăm un dispozitiv de absorbție a șocului, cu un model asemănător cu frecarea (notăm ***b***).
- Forța aplicată dispozitivului de absorbție a șocului este direct proporțională cu diferența ratei de schimbare a deplasării celor două mase (arcul de absorbție și roata).

Modelarea sistemelor flexibile (*cu arcuri*). Teorie (2)

- Modelul fizic, compus din două mase simbolice în diagramă:

<u>Legea Hooke pentru arcuri</u>
F = - K*x

unde
F= forta aplicata
K = constanta arcului
x = deplasarea.



- Ecuațiile următoare arată ce forțe acționează asupra fiecărei mase:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x} = b \cdot \left(\dot{y} - \dot{x}\right) + k_s \cdot (y - x) - k_w \cdot (x - r) \\ m_2 \cdot \ddot{y} = -k_s \cdot (y - x) - b \cdot \left(\dot{y} - \dot{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{x} - \dot{y}\right) + \dfrac{k_s}{m_1} \cdot (x - y) = \dfrac{k_w}{m_1} \cdot (x - r) \\ \ddot{y} + \dfrac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{y} - \dot{x}\right) + \dfrac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = 0 \end{cases}$$

Modelarea sistemelor flexibile (*cu arcuri*).
Exemplu - Suspensie pentru automobile.

- Inlocuim ***s*** pentru ***d/dt*** și obținem:

$$\begin{cases} \ddot{x}+\frac{b}{m_1}\cdot\left(\dot{x}-\dot{y}\right)+\frac{k_s}{m_1}\cdot(x-y)=\frac{k_w}{m_1}\cdot(x-r) \\ \ddot{y}+\frac{b}{m_1}\cdot\left(\dot{y}-\dot{x}\right)+\frac{k_s}{m_1}\cdot(y-x)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2\cdot X(s)+s\cdot\frac{b}{m_1}\cdot\left(X(s)-Y(s)\right)+\frac{k_s}{m_1}\cdot\left(X(s)-Y(s)\right)=\frac{k_w}{m_1}\cdot\left(X(s)-R(s)\right) \\ s^2\cdot Y(s)+s\cdot\frac{b}{m_1}\cdot\left(Y(s)-X(s)\right)+\frac{k_s}{m_1}\cdot\left(Y(s)-X(s)\right)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k_w\cdot b}{m_1\cdot m_2}\cdot\left(s+\frac{k_s}{b}\right)}{s^4+\left(\frac{b}{m_1}+\frac{b}{m_2}\right)\cdot s^3+\left(\frac{k_s}{m_1}+\frac{k_s}{m_2}+\frac{k_w}{m_1}\right)\cdot s^2+\left(\frac{k_w\cdot b}{m_1\cdot m_2}\right)\cdot s+\left(\frac{k_w\cdot k_s}{m_1\cdot m_2}\right)}}$$

Funcția de transfer a Instalației în forma Laplace

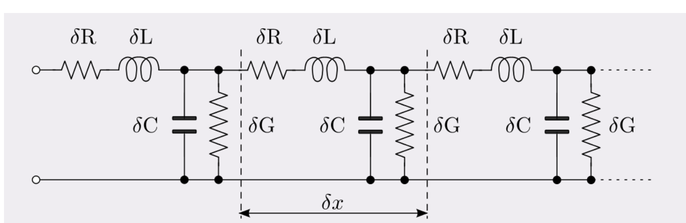
- Această relație reprezintă dependența deplasării caroseriei mașinii (și eventual a pasagerului) pe o axă perpendiculară pe stradă la întâlnirea unei denivelări în astfalt.

Sisteme cu parametri distribuiți.

- Exemplele precedente se bazează pe una sau mai multe mase bine-definite, și modelate ca și corpuri fără dimensiuni ("*body-free diagram*")
- Există multe aplicații în care nu putem neglija forma și dimensiunea corpurilor.
  - De exemplu, există corpuri care se deformează sub forța aplicată ("*se îndoaie*").
- Putem considera masa egal distribuită de-a lungul unei dimensiuni, cu un anume grad de flexibilitate între aceste mase => ***sistem cu parametrii distribuiți***.
  - Cazuri rare, devine prea complicat…

Exemplu 1 – Un cilindru de cauciuc = Aproximare cu corpuri solide conectate cu arcuri.

Exemplu 2 – O linie de transmisie = caracteristicile circuitului sunt distribuite uniform prin material.



Observații finale

- Modelarea matematică a unui sistem este primul pas în proiectarea unui sistem automat de control.
  - Exemple au fost discutate pentru diverse sisteme mecanice
    - Mișcare de translație
    - Mișcare de rotație
    - Sistem cu arcuri
  - Exemplele dezvoltă modele exprimate cu Funcții Laplace
  - Similar, se pot dezvolta modele exprimate cu ecuații de stare
- Gradul de complexitate a modelului depinde de cerințele de performanță – deoarece putem controla doar ce apare în model.

Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 03 = Modelarea sistemelor electrice, electromecanice, termice sau de curgere.

Sisteme de control cu circuite electrice
(fie pentru control, fie ca instalație)

- Circuitele electrice sunt foarte folosite în control datorită ușurinței procesării semnalelor electrice. Există implementări în circuite analogice sau în circuite digitale.
- In implementarea analogică, amplificatorul operațional este o componentă foarte folosită, iar in implementarea digitală, microprocesorul este foarte folosit.
- Multe concepte ale teoriei controlului automat au fost inițial dezvoltate pentru amplificatoarele electronice cu reacție (Bell Labs, 1925-1940).

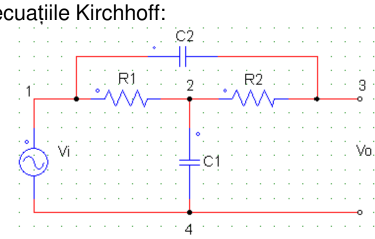
Legile Kirchhoff de analiză a unui circuit electric

- **Legea K pentru curenți**: Suma algebrică a curenților ce pleacă dintr-un nod este egală cu suma algebrică a curenților ce intră în acel nod.
- **Legea K pentru tensiuni**: Suma algebrică a tuturor tensiunilor în jurul unui ochi de circuit este nulă.
- Pentru circuite complexe este important să scriem ecuațiile într-un mod organizat.
  - O metodă capabilă pentru scrierea organizată a ecuațiilor este ***metoda de analiză în noduri.***

Ecuațiile de circuit Kirchhoff. Exemplu - Circuit în punte.

- Fie circuitul din figură. Să se scrie ecuațiile diferențiale intrare/ieșire.
- Alegem nodul 4 ca referință și vom folosi ecuațiile Kirchhoff:

$$v_1 = v_i$$
$$-\frac{v_1 - v_2}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \cdot \frac{dv_2}{dt} = 0$$
$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} + C_2 \cdot \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0$$



- Rearanjăm, să punem în evidență ecuațiile diferențiale de primul ordin:

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot v_{C1} - \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) \cdot v_{C2} + \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot v_i$$
$$\frac{dv_{C2}}{dt} = -\frac{v_{C1}}{C_2 \cdot R_2} - \frac{v_{C2}}{C_2 \cdot R_2} + \frac{v_i}{C_2 \cdot R_2}$$

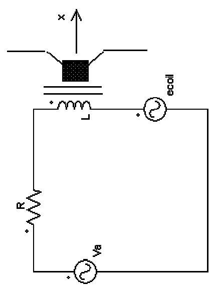
Observație: Putem aplica transformata Laplace și lucra cu funcția de transfer.

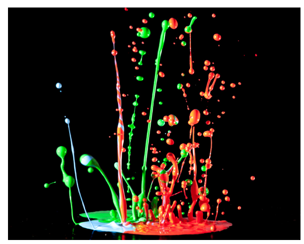
$$\boxed{\frac{df}{dt} = s \cdot F(s) - f(0^-)}$$

Observație: Vom vedea mai târziu că o astfel de aranjare a ecuațiilor diferențiale corespunde metodei de analiză pe baza ecuațiilor de stare.

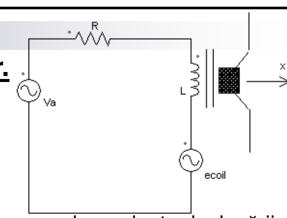
Modelarea sistemelor electromecanice. Difuzor.

- Acest exemplu arată cum putem cupla ecuațiile unui circuit electric cu efectele produse într-un sistem mecanic.
- Să considerăm sistemul din figură, ca o problemă în care se cere dependența deplasării ***x*** de tensiunea de intrare v_a (ecuații diferențiale pentru regim dinamic).





Modelarea sistemelor electromecanice. Difuzor.



- Să considerăm sistemul din figură, ca o problemă în care se cere dependența deplasării ***x*** de tensiunea de intrare v_a (ecuații diferențiale pentru regim dinamic).
  - Se presupune ca magnetul stabilește un câmp magnetic B=0.5T, iar bobina are 20 de ture, la un diametru de 2 cm.
  - Calculăm lungimea conductorului (*în metri*)

    $$l = 20 \cdot \frac{2}{100} \cdot \pi = 1.26m$$
  - Forța produsă (***F =BIL***) asupra unui conductor de lungime ***L***, parcurs de curentul ***i*** și aflat într-un câmp magnetic de inducție ***B*** $F = B \cdot i \cdot l = 0.5 \cdot i \cdot 1.26 = 0.63 \cdot i[N]$
  - Ecuația de mișcare (Newton), considerând și frecarea ***b***: $m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} = 0.63 \cdot i$
  - Difuzorul va produce o tensiune electrică $\boxed{\boldsymbol{e=Blv=Blx'}}$ în circuitul electric, cu relația Kirchhoff: $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = v_a - \boxed{0.63 \cdot \dot{x}}$
  - Rezultă sistemul de ecuații diferențiale:

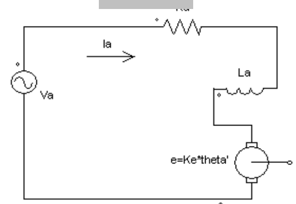
$$\boxed{\begin{cases} L \cdot \dot{i} + R \cdot i = v_a - 0.63 \cdot \dot{x} \\ m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} = 0.63 \cdot i \end{cases} \Rightarrow \frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0.63}{s \cdot \left[(m \cdot s + b) \cdot (L \cdot s + R) + (0.63)^2\right]}}$$

Modelarea sistemelor electromecanice. Motor de c.c.

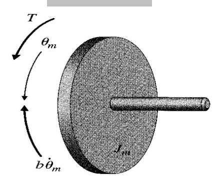
- O foarte utilizată componentă în sistemele de acționare electrică, este motorul de c.c.
  - Partea exterioară a motorului (stator) are un grup de magneți (permanenti sau electromagneți), capabil să mențină un câmp magnetic asupra înfășurării rotorice.
  - Infășurarea rotorică este alimentată de la un circuit electric de current continuu, prin intermediul unor perii.
  - Interacțiunea dintre câmpul magnetic produs de stator și conductorul parcurs de curent electric situat pe rotor produce cuplul mecanic.
- Fără a intra în detaliile constructive, să scriem ecuațiile circuitului electric și mișcării mecanice de rotație produse de câmpul magnetic.
  - Cuplul produs de curentul electric din rotor sub influența unui camp magnetic constant este: $T = K_t \cdot i_a$
  - Miscarea rotorului produce o tensiune electromagnetică in circuitul electric al rotorului.

$$e = K_e \cdot \dot{\theta}_m$$

electric



mecanic



Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea sistemelor electromecanice. Motor de c.c.

- Aplicarea legii Newton de mișcare (diagrama mecanică a rotorului):

$$J_m \cdot \ddot{\theta}_m + b \cdot \dot{\theta}_m = K_t \cdot i_a$$

- Analiza circuitului electric conținând tensiunea contraelectromotoare (***e***) produce ecuația:

$$L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a = v_a - K_e \cdot \dot{\theta}_m$$

- Dacă notăm derivata coordonatei unghiulare cu ***x***, obținem sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = & x \\ \dfrac{dx}{dt} = & -\dfrac{b}{J_m} \cdot x \quad \dfrac{K_t}{J_m} \cdot i_a \\ \dfrac{di_a}{dt} = & -\dfrac{K_e}{L_a} \cdot x \quad -\dfrac{R_a}{L_a} \cdot i_a + \dfrac{1}{L_a} \cdot v_a \end{cases}$$

- Din aceste ecuații, se poate determina sistemul ecuațiilor de stare, sau funcția de transfer Laplace.

Modelarea sistemelor termice

- Unele sisteme automate de control se referă la controlul temperaturii.
- Modelele dinamice pentru reglajul temperaturii implică transferul și stocarea energiei termice.
- Energia termică circulă printr-un material cu un debit proporțional cu diferența de temperatura:

$$q = \frac{1}{R} \cdot (T_1 - T_2)$$

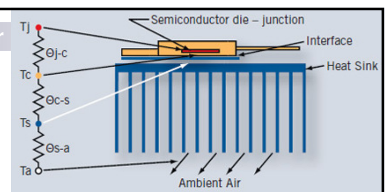
unde: *q = puterea termică transferată (~ ca un curent într-un circuit electric) [J/sec] or [BTU/sec];*
R = resistența termică *[C/J*sec];*
T = temperatura [C] sau [F] (ca o tensiune într-un circuit electric).

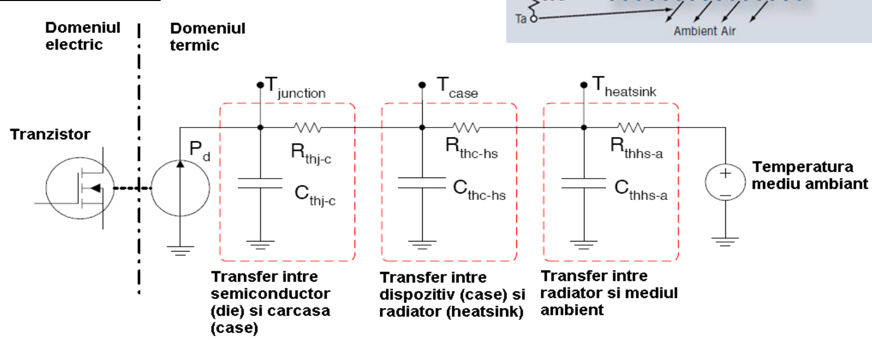
- Transferul net de energie termică într-o substanță influențează temperatura pe baza relației dinamice (ce se poate rescrie și ca funcție de transfer):

$$\dot{T} = \frac{1}{C} \cdot q$$

unde ***C = capacitatea termică.***

Modelarea sistemelor termice. Exemplu – radiatorul unui dispozitiv semiconductor.





Observație - La fel ca în cazul unui circuit electric, putem face o analiză în regim staționar, și o analiză de regim dinamic.

- *Aparent, am fi tentați să analizăm doar un regim staționar ("să vedem cât de fierbinte devine radiatorul sau componenta")*
- *Regimul termic dinamic produce fenomene de uzură mecanică (contracții și relaxări repetate la contactul între materiale cu proprietăți diferite), determinând reducerea duratei de viață a componentei.*

Modelarea sistemelor de curgere a fluidelor.

- Multe aplicații implică sisteme hidraulice, în care curgerea unui lichid poate furniza o forță mare, cu o inerție redusă și o greutate redusă.
- Pe baza conservării materiei, relația de bază este: $\boxed{\dot{m} = \omega_{in} - \omega_{out}}$

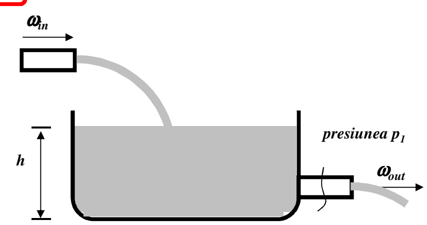
unde **m** = masa fluidului într-o porțiune a sistemului

ω_{in} este debitul (rata de curgere) a masei la intrarea sistemului, iar **ω_{out}** este rata de curgere a masei la ieșirea sistemului.

Exemplu: Inalțimea apei într-un vas

- Se consideră debitele de intrare și ieșire din vas, dimensiunile geometrice ***(h,A);*** precum și densitatea apei **ρ** (calculăm masa $\boxed{m = \rho \cdot h \cdot A}$)

$$\dot{h} = \frac{1}{A \cdot \rho} \cdot (\omega_{in} - \omega_{out})$$

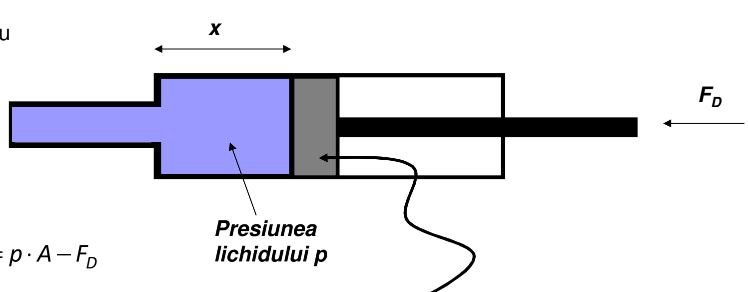


Modelarea acțiunii fluidelor asupra unor pistoane (hidraulică) (1)

- Dacă o coloană de apă aplică o forță unui piston, atunci intervine o nouă mărime denumită presiune (**p**):

$$F = p \cdot A$$

- Exemplu



$$M \cdot \dot{x} = p \cdot A - F_D$$

unde M = *masa pistonului* și A = *aria secțiunii pistonului.*

Modelarea acțiunii fluidelor asupra unor pistoane (hidraulică) (2)

- Dacă curgerea este restricționată de frecare (sau de o alta restricție similară, de exemplu o îngustare a căii de curgere), aceasta este caracterizată de constantele ***(R α):***

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot (p_1 - p_2)^{\alpha}$$

unde

ω este debitul în unități de masă (*mass flow rate*);

$\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ sunt presiunile la cele două capete ale porțiunii analizate;

(R,α) sunt constante specifice restricțiilor de pe calea de curgere.

Observatii finale

- Modelarea matematică a unui sistem este primul pas în proiectarea unui sistem automat de control.
  - Exemple au fost discutate pentru diverse sisteme electrice, electromecanice, termice, sau de curgere a lichidelor.

Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 04 = Linearizarea si scalarea sistemelor

Liniarizarea și scalarea sistemelor – Noțiuni generale

- Ecuațiile diferențiale ce descriu funcționarea multor instalații sunt neliniare.
- Teoriile de analiză și proiectare sunt dezvoltate mai ușor pentru sisteme liniare.
  - In acest curs vom prezenta doar metode de control liniar.
- **Liniarizarea** este procesul prin care se găsește un model liniar care aproximează un sistem neliniar.

- **Lyapunov**: *Dacă un model de semnal mic este liniar lângă un punct de echilibru, și modelul este stabil, atunci există o regiune lângă acel punct de echilibru unde sistemul neliniar este stabil.*
  - **Consecință**: Dacă avem un model de semnal mic, liniar, ca o aproximare a unui sistem neliniar, atunci putem proiecta un sistem de control cu reacție, pe baza acestui model (***liniarizare de semnal mic***).
    - Acest principiu a fost folosit la analiza amplificatoarelor cu reacție.

- **Alternative**:
  - Să încercăm întâi să anulăm (compensăm) toate neliniaritățile în afara controlului propriu-zis – fie prin re-proiectarea instalației, fie prin introducerea unor elemente neliniare (de compensare) lângă sensor sau actuator (*o neliniaritate inversă*).
  - Să folosim o parte a efortului de control pentru liniarizare (*liniarizare prin reacție*).

- In unele cazuri este necesar să scalăm sistemul = ***scalare în amplitudine sau în timp***.

Liniarizarea de semnal mic. Teorie.

- O **ecuație diferențială neliniară** este una în care derivatele au o relație neliniară cu variabilele sau cu semnalele de intrare.
  - Deci, o ecuație care nu se poate scrie într-o formă de genul (exemplu ultra-simplificat, pentru un sistem cu o variabilă și o singură intrare):

    $$\frac{dx}{dt} = a_1 \cdot x + b_1 \cdot u$$

    și trebuie lăsată în forma: $\frac{dx}{dt} = f(x,u)$

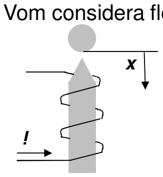
- Pentru a determina modelul de semnal mic ("*small signal linearization*"), trebuie să parcurgem câțiva pași:
  - Identificăm un *punct de echilibru*, unde $\frac{dx_o}{dt} = 0 = f(x_0, u_0)$
  - Căutăm o aproximare a ecuației neliniare prin aplicarea unei variații mici în jurul punctului de echilibru $\boldsymbol{x = x_0 + \delta x}$, $\boldsymbol{u = u_0 + \delta u}$.
  - Ecuația devine: $\dot{x}_0 + \delta \dot{x} \cong f(x_0, u_0) + F \cdot \delta x + G \cdot \delta u$

    unde ***F*** și ***G*** sunt aproximările liniare cele mai bune pentru variația de lângă punctul de echilibru.

Observații - *Practic folosim aproximația Euler (sau primii doi termeni din desfășurarea Taylor).*
- *Cel mai cunoscut exemplu de liniarizare de semnal mic vă este cunoscut din analiza circuitelor electronice.*

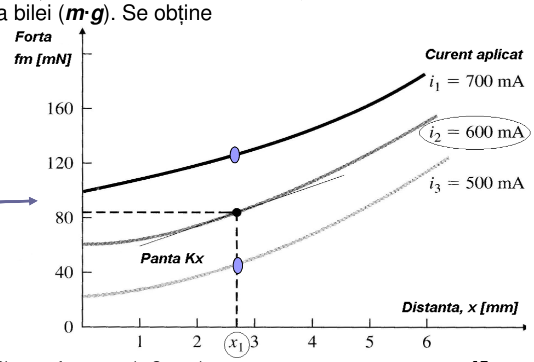
Liniarizarea de semnal mic. Exemplu (1)

- Vom considera flotația unei bile metalice într-un câmp magnetic (~ *levitație*).



- Ecuația de mișcare este dată de legea Newton scrisă pentru forța măsurată experimental pentru diverse distanțe ***x*** și diferite valori ale intensității curentului electric ***i,*** precum și pentru forța de greutate a bilei (***m·g***). Se obține

$$m \cdot \ddot{x} = \boxed{f_m(x,i)} - m \cdot g$$



Liniarizarea de semnal mic. Exemplu (2)

- …
- Forța electromagnetică determinată experimental.
  - Bila are *8.4 mg*, considerăm $g = 9.8\ m/sec^2$;
  - Determinăm din experiment forța pentru cazul $x_1 = 2.7\ mm$, $i_2 = 600\ mA$.

- Scriem desfașurarea lui $\boldsymbol{f_m()}$ pentru $\boldsymbol{x = x_1+\delta x}$, $\boldsymbol{i = i_2+\delta\iota}$:

$$f_m(x_1 + \delta x, i_2 + \delta i) \cong f_m(x_1, i_2) + K_x \cdot \delta x + K_i \cdot \delta i$$

  - $\boldsymbol{K_x}$ este panta caracteristicii în punctul $\boldsymbol{x_1}$ (aproximativ *14 N/m*), cititǎ direct de pe graficul precedent.
  - Determinăm constanta $\boldsymbol{Ki}$ după curent
    - Citim de pe grafic $\boldsymbol{f_m}$ pentru $\boldsymbol{x_1}$, atunci când $i = 500mA$ și $i = 700mA$.
    - Calculăm panta caracteristicii:

$$K_i = \frac{f_m(x_1, 700\,mA) - f_m(x_1, 500\,mA)}{700\,mA - 500\,mA} = \frac{122 - 42}{700 - 500} \cong 400 \cdot 10^{-3}\, N/A$$

  - In final, expresia matematică pentru modelul regimului dinamic devine

$$f_m(x,i) \cong 82 \cdot 10^{-3} + 14 \cdot \delta x + 0.4 \cdot \delta i \Rightarrow m \cdot \ddot{x} = 82 \cdot 10^{-3} + 14 \cdot \delta x + 0.4 \cdot \delta i - 82 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow m \cdot \delta \ddot{x} = 14 \cdot \delta x + 0.4 \cdot \delta i$$

Liniarizarea prin reacție. Teorie.

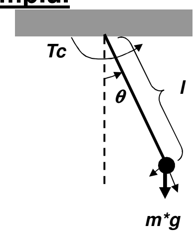
- **Liniarizarea prin reacție** se realizează prin reducerea (eliminarea) termenilor neliniari din ecuația instalației și adăugarea lor la control.

- Dacă se realizează pe un calculator de control, atunci acesta trebuie să calculeze compensarea foarte rapid.

Liniarizarea prin reacţie (schimbare de variabilă). Exemplu.

Se consideră pendulul din figura alăturată:

- *Tc* este mărimea de control.
- *θ* este mărimea controlată.



- In general, ecuația Newton pentru o mișcare de rotație:

  $$M = J \cdot \alpha = J \cdot \ddot{\theta}$$

  unde M=cuplul [Nm], J=momentul de inerție [kg m^2], α=accelerația unghiulară, în rad/sec^2.

- Considerăm toate componentele derivate din cuplul aplicat inițial *Tc* și greutatea pendulului:

  $$T_c - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = J \cdot \ddot{\theta}$$

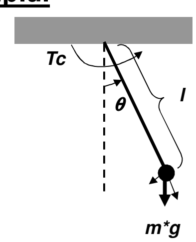
  - Care se rescrie (*J=ml²*):

    $$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = T_c$$ *(ca la pag. 16-18).*

- Această ecuație diferențială este evident neliniară.
- La pag.17, am aproximat ***sinθ ~ θ*** pentru a elimina neliniaritatea. Să încercăm altă soluție.

Liniarizarea prin reacţie (schimbare de variabilă). Exemplu.

Se consideră pendulul din figura alăturată:



- Dacă notăm:

  $$T_c = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta + u \Rightarrow u = T_c - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta$$

  în care ***u*** este noua mărime de intrare, iar ***θ*** este ultima coordonată unghiulară, măsurată în mod instantaneu.

- Ecuația de control devine liniară:

  $$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} = u$$

- Rezolvarea problemei urmează următoarele etape
  - Se consideră modelul ***Laplace*** al instalației ca ***Θ(s)/u(s)***.
  - Sistemul de control va determina "***u***" cu care să controlăm instalația pentru o anumită comportare a lui ***θ***
  - Se recalculează ***Tc*** din notația de mai sus, pe baza coordonatei unghiulare măsurate.
  - ***Tc*** se trimite la echipamentul de control al instalației.

Scalarea Amplitudinii

- Scalarea amplitudinii se face de multe ori involuntar, prin adoptarea unui set de mărimi care are sens în cazul aplicației respective.
  - Pentru bila suspendată, are sens să folosim “***mm***” și “***mA***”.
  - Pentru un satelit trimis pe o orbită staționară, folosirea “***km***” are sens.
- Problema scalării amplitudinii devine foarte importantă la implementarea propriu-zisă a controlului.
  - în sisteme analogice de control, avem domenii de variație de câțiva volți ce corespund mărimilor măsurate.
  - în sisteme digitale de control, avem domenii digitale de genul 2^n, ce trebuie atribuite unor tensiuni analogice de intrare.
    - De obicei se lucrează normalizat la un domeniu ***[-1, 1].***
- Scalarea amplitudinii este în esență liniară și are – în schema bloc – un efect similar modificării unui câștig.

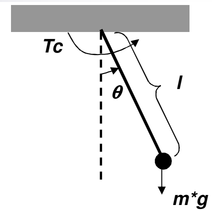
Scalarea Timpului

- Scalarea timpului este un fel de schimbare de co-ordonate în domeniul timp.
- Dacă ecuațiile sunt dezvoltate în secunde, iar măsurătorile de sistem se fac în milisecunde, are sens să schimbăm toate ecuațiile în milisecunde.

$$\tau = \omega \cdot t \leftarrow \omega = 1000$$

- **Atenție:** Majoritatea ecuațiilor diferențiale sunt exprimate ca o evoluție în timp, deci scalarea timpului va rezulta în modificarea ecuației printr-un factor.

Scalarea Timpului. Exemplu – oscilator.



- Să reconsiderăm exemplul unui pendul (oscilator) la care se folosește aproximația ***sinθ ~ θ***.

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\cdot\sin\theta=\frac{T_c}{m\cdot l^2}\\ \sin\theta\cong\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\cdot\theta=\frac{T_c}{m\cdot l^2}\Leftrightarrow\ddot{\theta}+\omega_n^2\cdot\theta=\frac{T_c}{m\cdot l^2}$$

- Să luam cazul numeric al unei frecvențe naturale de ***10 Hz*** (foarte rapid, 10 balansări pe secundă),

m = 1 gram, g = 9.81m/sec².

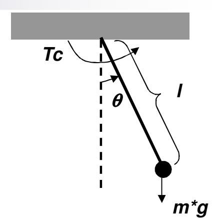
$$Notam\_\_\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\begin{cases}\omega_n=2\cdot\pi\cdot 10=62{,}832 rad/\sec=\sqrt{\frac{g}{l}}\Rightarrow l=9{,}81/62{,}832^2=0{,}0025m=2{,}5mm\\ \frac{1}{m\cdot l^2}=\frac{1}{0.001\cdot[0.0025]^2}=161{,}95\cdot 10^6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\{\ddot{\vartheta}+3947{,}86\cdot\vartheta=161{,}95\cdot 10^6\cdot T_c$$

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Scalarea Timpului. Exemplu – oscilator.



- Se cere să lucrăm în ***milisecunde.***

Deci, cum trebuie scalată ecuația de mișcare inițială, pentru a utiliza datele direct în milisecunde?

- Considerăm (notăm ***ω*** ca un câștig, iar ***τ*** este noua variabilă de timp)

$$\tau=\omega\cdot t\leftarrow\omega=1000\Rightarrow\begin{cases}\frac{d^2\theta}{d\tau^2}=10^{-6}\cdot\ddot{\theta}\\ \frac{d\theta}{d\tau}=10^{-3}\cdot\dot{\theta}\\ \tau=1000\cdot t\end{cases}$$

$$10^6\cdot\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}+3947{,}86\cdot\vartheta=161{,}95\cdot 10^6\cdot T_c$$

- Dupa rezolvarea ecuației, vom avea graficul direct în ***msec***.

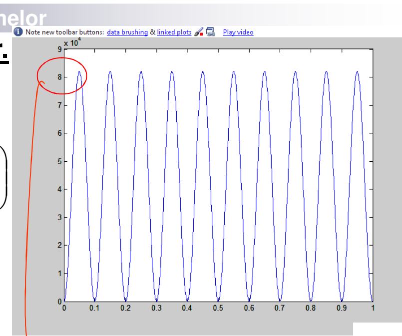
Scalarea Timpului. Exemplu – oscilator.

Ecuația în secunde

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+3947{,}86\cdot\vartheta=161.95\cdot10^6\cdot T_c$$

```
t=0:0.001:1;
num=161.95*1e6;
den=[1 0 3947.86];
sys=tf(num,den);
y=step(sys,t);
plot(t,y);
```

$$step\left(\frac{\Theta(s)}{T_c(s)}\right)$$



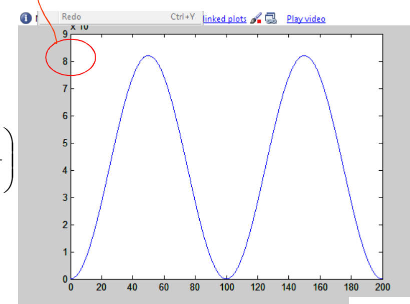
sec

Ecuația în milisecunde

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+3947{,}86\cdot10^{-6}\cdot\theta=161.95\cdot T_c$$

```
t=0:0.1:200;
num=161.95;
den=[1 0 3947.86*1e-6];
sys=tf(num,den);
y=step(sys,t);
plot(t,y);
```

$$step\left(\frac{\Theta(s)}{T_c(s)}\right)$$



msec

Observații finale

- Liniarizarea și scalarea ecuațiilor diferențiale ce caracterizează instalația au rolul de a facilita lucrul cu aceste ecuații într-un sistem liniar și într-o manieră mai ușoară.
- Dacă avem un model de semnal mic liniar, ca o aproximare a unui sistem neliniar, atunci putem proiecta un sistem de control cu reacție pe baza acestui model (după o liniarizare de semnal mic).
    - ***Atenție –*** liniarizarea de semnal mic este valabilă doar în vecinătatea unui punct de operare.
- **Alternative**:
    - Să încercăm întâi să anulăm (compensăm) toate neliniaritațile, în afara controlului propriu-zis – fie prin re-proiectarea instalației, fie prin introducerea unor elemente neliniare lângă sensor sau actuator (*o neliniaritate inversă*).
    - Să folosim a parte a efortului de control pentru liniarizare (*liniarizare prin reacție*).
- In unele cazuri este necesar să scalăm sistemul, fie în amplitudine, fie în timp.

TEMA DE CASĂ #1

Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 15 martie.

Problema 1

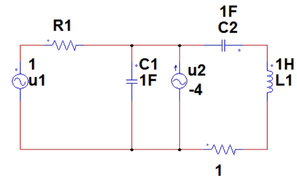
Sistemele de control cu reactie necesita masurarea variabilelor ce urmeaza a fi controlate. Deoarece semnalele electrice pot fi transmise, amplificate si procesate mai usor, se prefera ca iesirea din senzorul de masura sa fie o tensiune sau un curent proportional cu variabila masurata.

Descrieti senzori care ar putea furniza o marime electrica proportionala cu:

(a) Temperatura
(b) Presiune
(c) Nivelul unui lichid
(d) Curgerea unui lichid printr-o conducta
(e) Pozitia liniara a unui mecanism in miscare liniara
(f) Pozitia unui mecanism in miscare de rotatie
(g) Viteza unui vehicol
(h) Acceleratia unui vehicol
(i) Cuplul aplicat.

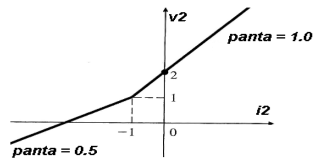
Problema 2

Se consideră circuitul din figură, în care u1, u2 sunt surse de tensiune si respectiv curent, iar R1 si R2 sunt rezistențe neliniare cu caracteristicile:



R1: $i_1 = G(v_1) = v_1^2$

R2: $v_2 = r(i_2)$ dată de figura alaturată.



(a) Arătați ca ecuațiile circuitului pot fi scrise ca:

$$\dot{x}_1 = G(u_1 - x_1) + u_2 - x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - r(x_3)$$

Identificați variabilele $\boldsymbol{x_i}$.
(b) Pentru u_1 = 1V, u_2 = -4A, determinați starea de echilibru [x_1^0 x_2^0 x_3^0].
(c) Desenați diagrama circuitului ce corespunde unui model liniarizat.