

LABORATORUL #1

INTRODUCERE IN MATLAB. MODELAREA SISTEMELOR CU MATLAB.

1. Introducere în MATLAB
 - a. Vectori.
 - b. Funcții.
 - c. Grafice.
 - d. Polinoame.
 - e. Matrici.
2. Modelarea unui motor de c.c. pentru analiza în frecvență.
3. Modelarea unui sistem de control “cruise control”.
4. Modelarea unei suspensii pentru un vehicul.
5. Mini-Proiect.

Anexă : Tabel de funcții MATLAB.

1. Introducere în MATLAB

MATLAB este un program interactiv pentru calcularea și vizualizarea unor date numerice. MATLAB este folosit foarte mult la rezolvarea unor probleme ingineresti, în special la analiza și proiectarea sistemelor de control. În acest scop, au fost create numeroase pachete de instrucțiuni (*toolboxes*) care definesc funcții speciale pentru diverse clase de aplicații. Lucrul în MATLAB este posibil:

- direct, prin scrierea secvențială a instrucțiunilor pe ecran urmată de execuția lor imediată,
sau
- prin intermediul unui fișier de comenzi “*.m” care este apelat din același ecran de comenzi.

Următoarea secvență de instrucțiuni este disponibilă în fișierul MATLAB L1_intro.m.

```
% _____  
clear;  
echo on  
% VECTORI  
% Sa incepem prin definirea unui vector. Sa alegem « a » ca numele acestei variabile in format  
vectorial  
% si sa definim aceasta variabila ca fiind egala cu elementele vectorului scrise intre doua paranteze  
% patrate.  
a=[1 2 3 4 5 6]  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
  
% Acum sa cream automat un vector cu elemente intre 1 si 15, distantate in incrementi de 3 unitati.  
t=0:3:15  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
  
% Operatiile cu vectori sunt la fel de simple ca si crearea lor.  
% Adunarea unei constante scalare  
y=t+2  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
  
% adunarea a doi vectori
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
c=y+a  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

% FUNCTII

```
% La fel ca in matematica, putem defini functii pe baza unui set de functii de baza, definit deja in  
% MATLAB. Exemple de astfel de functii predefinit, includ functiile trigonometrice.  
% Constante des folosite in problemele matematice, sau in programare sunt de asemenei pre-definite  
% in MATLAB.  
% Exemplul urmator ne ajuta sa intelegem utilizarea unei functii predefinite si folosirea unei  
% constante.  
% Simpla apelare a functiei ne va da rezultatul.  
sin(pi/4)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Daca dorim sa captam rezultatul in alta variabila pentru o folosire ulterioara,  
% atunci atribuim direct:  
d=sin(pi/4)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Daca dorim mai tarziu sa apelam aceeasi variabila, aceasta va deveni disponibila prin  
% simpla utilizare  
d  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Daca nu sunteți siguri de folosirea unei functii, puteți la orice moment să utilizați help de la  
% consola MATLAB. De exemplu :  
help sin  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

% GRAFICE

```
% Probabil cel mai mare avantaj în folosirea pachetului MATLAB pentru rezolvarea  
% problemelor ingineresti, îl reprezintă capacitatea grafică.  
% Vom ilustra acest lucru prin folosirea catorva dintre concepții invătate deja.  
% Sa reprezentam functia sinus pe un interval egal cu 6.4 radiani (pi=3.14rad, o perioada este 2pi)  
t=0:0.2:6.4;  
y=sin(t);  
plot(t,y)
```

```
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Împreună cu comanda plot, avem o multitudine de posibilități pentru definirea axelor,  
% sau pentru re-aranjarea în pagina a graficelor. Observați cum se schimbă graficul după  
% executarea fiecărei comenzi.  
axis([1 10 -2 2])  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
subplot(3,1,1); plot(t,y)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

% POLINOAME

```
% Polinoamele sunt definite în MATLAB pe baza unor vectori care contin coeficienții  
% în ordine descrescătoare (vector al coeficienților).
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% de exemplu polinomul f(x)=(s^4)+(s^3)-(s^2)-7*s+1
x=[1 1 -1 -7 1]
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Un mare avantaj al utilizarii programului MATLAB in locul calculelor manuale
% este dat de posibilitatea rezolvării soluțiilor unei ecuații polinomiale.
roots([1 1 -1 -7 1])
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% sau se poate folosi direct
roots(x)
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
% Putem de asemenea să considerăm operații cu polinoame.
% De exemplu multiplicarea a două polinoame, se face cu instrucțiunea conv
y=[1 2]
conv(x,y)
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% aceasta proprietate de înmulțire a două polinoame se folosește cîteodată la definirea
% unor funcții de transfer (Laplace), sau la multiplicarea între două funcții de transfer
%
% Impartirea a două polinoame se face prin instrucțiunea deconv, care ne va furniza catul
% și restul împărțirii.
% Vom folosi aceleasi polinoame pentru exemplu :
[Q,R] = deconv(x,y)
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% operații simple, de adunare sau scadere a polinoamelor se fac direct ca operații între vectori.
%
%
% MATRICI
% Matricile sunt elemente foarte importante, des utilizate în sistemele de control automat.
% Introducerea matricilor în MATLAB se face foarte asemănător cu introducerea vectorilor,
% fiecare rand fiind despartit prin ";" de celelalte.
% exemplu
A=[1 2 3; 4 5 6]
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
B=[7 8; 7 9; 7 1]
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% operațiile cu matrici cele mai utilizate sunt
% transpusa
B'
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% adunarea
A+B'
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% înmulțirea
A*B'
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% Observati cu atentie deosebirea intre AB si BA  
B*A  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Inversa unei matrici  
E=inv(A*B)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% valorile proprii ale unei matrici  
eig(E)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Sa ne aducem aminte ca o matrice patratica E (nxn), poate fi caracterizata printr-o ecuatie  
polinomiala  
% denumita ecuatie caracteristica, care se obtine prin calcularea det(sI-E)=0  
% Putem determina coeficientii unei ecuatii caracteristice ce corespunde unei matrici.  
% Aceasta va fi definita sub forma unui vector, dupa cum am vazut anterior.  
p=poly(E)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
% Radacinile acestei ecuatii caracteristice sunt de asemenei valorile proprii ale matricei initiale E.  
% Urmatoarele doua instructiuni trebuie sa dea acelasi rezultat.  
roots(p)  
eig(E)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.
```

```
%  
%  
% Fisierele de tip *.m  
% Pentru a simplifica lucrul cu MATLAB, seturi de instructiuni se pot grupa in mici programe  
% si salva ca fisiere *.m.  
% Aceste fisiere pot fi apelate si executate de la consola MATLAB, prin  
% simpla apelare a numelui fisierului.  
% Se poate folosi un editor special pentru scrierea sau modificarea acestor instructiuni MATLAB.  
%
```

■ Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator)

Rulați programul "L1_intro.m" în mediul MATLAB și urmăriți utilizarea fiecărei instrucțiuni. Răspundeți la următoarele instrucțiuni după parcurgerea întregului program.

- Reprezentați un sistem trifazat sinusoidal cu ajutorul instructiunilor subplot și plot, pe trei grafice diferite, în aceeași figură.
- Verificați existența în spațiul MATLAB a variabilelor x și y . Demonstrați că rădăcinile lui x se află printre rădăcinile produsului $x*y$. Folosiți instructiunile **conv** și **roots** pentru aceasta.

2. Modelarea unui motor de c.c. pentru analiza în frecvență.

Multe sisteme electromecanice au în componență un motor de curent continuu (c.c.), capabil să producă mișcare de rotație și să transmită cuplu la un arbore rotitor. Modelarea unui motor de c.c. are două componente: una electrică și una mecanică.

In circuitul electric avem reprezentarea înfășurării printr-o inductanță și o rezistență de pierderi, urmată de o tensiune contra-electromotoare a cărei valoare este data de o relație de proporționalitate cu turația (viteza unghiulară) a motorului la un moment dat. Viteza unghiulară se poate calcula prin derivata coordonatei unghiulare, notată de obicei cu **theta**.

In circuitul mecanic avem o diagramă a forțelor, într-un sistem fără masă, caracterizat prin momentul de inerție J, constanta de frecare dinamică b, și constanta de dependență a cuplului de curentul electric aplicat.

In exemplul considerat în laborator, avem următoarele date numerice:

- moment de inerție $J = 0.01 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2$
- constanta de frecare dinamică $b = 0.1 \text{ Nms}$
- Constanta cuplului $K_t = 0.01 \text{ NM/Amp}$
- Constanta electrică $K_e = 0.01 \text{ Nm/Amp}$
- Rezistență electrică $R = 1 \text{ ohm}$
- Inductanță electrică $L = 0.5 \text{ H}$
- Tensiunea de intrare V variabilă
- Poziția sau coordonata unghiulară de rotație **theta**
- Viteza și accelerația unghiulară vor rezulta ca derivate de primul și al doilea ordin a acestei coordonate unghiulare.

Relațiile matematice care caracterizează modelul motorului de c.c. sunt

- Cuplul este dat de $T = K_t * i$
 - Tensiunea electrică este $e = K_e * \dot{\theta}$ (' reprezintă aici derivata)
 - Circuitul electric este caracterizat de relația Kirchhoff
- $$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = v - K_e \cdot \frac{d\theta}{dt}$$
- Circuitul mecanic este caracterizat prin relația Newton de mișcare de rotație
- $$J \cdot \ddot{\theta} + b \cdot \dot{\theta} = K_t \cdot i$$

Modelarea dinamică se face prin definirea unei funcții de transfer Laplace, bazată pe ecuațiile:

$$\begin{cases} s \cdot (J \cdot s + b) \cdot \Theta(s) = K_t \cdot I(s) \\ (L \cdot s + R) \cdot I(s) = V(s) - K_e \cdot s \cdot \Theta(s) \end{cases}$$

Dacă eliminăm curentul, putem scrie funcția de transfer intrare-iesire (tensiune electrică \rightarrow viteza).

$$\frac{s \cdot \Theta(s)}{V(s)} = \frac{K_t}{(J \cdot s + b) \cdot (L \cdot s + R) + K_t \cdot K_e}$$

Să scriem această funcție de transfer în MATLAB.

Lansați aici programul L1_motor.m

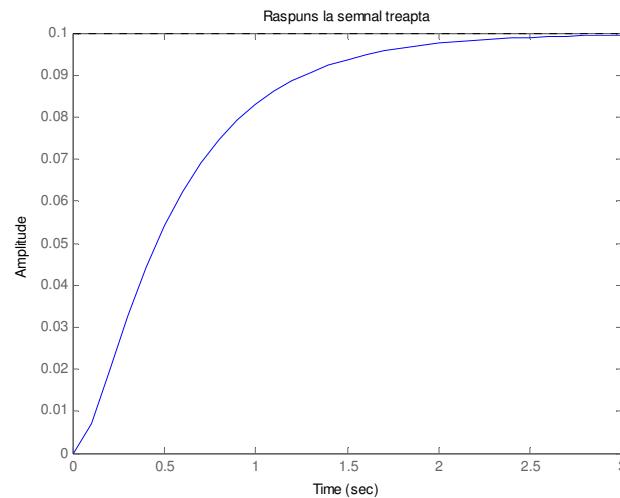
```
% _____
clear;
echo on;
% initializam valorile numerice
J=0.01;
b=0.1;
Kt=0.01;
Ke=0.01;
R=1;
L=0.5;
% definim functia de transfer ca un raport de doua polinoame
num=Kt
den=[(J*L) ((J*R)+(L*b)) ((b*R)+Kt*Ke)]
pause % apasati orice tasta pentru a continua.

M=tf(num,den)
pause % apasati orice tasta pentru a continua.

% Sa observam acum functionarea acestui motor ca un sistem in bucla deschisa
% In acest scop, sa observam un raspuns la un semnal treapta
step(M, 0:0.1:3)
title('Raspuns la semnal treapta')
pause % apasati orice tasta pentru a continua.

% Aceasta se poate interpreta ca la aplicarea unei tensiuni de 1 volt,
% se obtine o turatie maxima de 0.1rad/sec.
%
%
%
echo off;
```

Execuția programului produce figura alăturată.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator)

Putem salva fișierul cu un nume nou și modifica parametrii, pentru a observa cum se schimbă funcția de transfer și răspunsul sistemului la semnal treaptă. În acest scop, putem folosi comanda „hold on” în fereastra MATLAB pentru a reține imaginea răspunsului la semnal treaptă original, peste care vom suprapune noile rezultate.

- (c) Modificați momentul de inerție (J), considerând o valoare de 10 ori mai mare ($J=0.1$). Observați cum se schimbă coeficienții funcției de transfer, și cum se schimbă răspunsul sistemului la semnal treaptă.
- (d) Reveniți la valoarea inițială a momentului de inerție. Modificați acum valoarea inductanței armăturii, considerând o inductanță de 5 ori mai mică ($L=0.1$). Observați cum se schimbă coeficienții funcției de transfer, și cum se schimbă răspunsul sistemului la semnal treaptă.

3. Modelarea unui sistem de control “cruise control”.

In vederea proiectării și implementării unui sistem automat de menținere constantă a vitezei unui autovehicul, trebuie să avem un model matematic capabil să descrie mișcarea vehiculului. În acest scop, se consideră o serie de ipoteze simplificatoare:

- Se consideră un vehicul fără formă sau greutate distribuită,
- Se neglijăază inerția roților,
- Se consideră doar frecare pe direcția de deplasare a vehiculului, ca fiind proporțională cu viteza vehiculului prin intermediul unei constante „ b ”.

Vom începe modelarea prin considerarea legii de mișcare Newton pentru un vehicul de masa m , ce se deplasează cu viteza v , sub acțiunea unei forțe dată de motor F , care se poate considera ca semnal de intrare în sistemul nostru.

$$m \cdot a = F - b \cdot v \Leftrightarrow m \cdot \dot{v} + b \cdot v = u \Leftrightarrow m \cdot s \cdot V(s) + b \cdot V(s) = U(s) \Leftrightarrow \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{m \cdot s + b}$$

În exemplul considerat în laborator, avem următoarele date numerice:

- Masa vehiculului $m = 1000\text{kg}$,
- Constanta de frecare dinamică $b = 50\text{Nsec/m}$,
- Forța aplicată de vehicul (considerată ca mărime de intrare) $u = 500\text{N}$.

Ce ar presupune o problemă de proiectare a unui sistem automat de control?

Vom vedea prin executarea programului MATLAB că la aplicarea acestei forțe maxime de 500N, vehiculul poate ajunge la o viteză staționară de 10m/sec. Un autoturism ar trebui să fie capabil să accelereze până la acea viteză în mai puțin de 5 secunde. Schimbarea vitezei de la starea de repaus la această viteză s-ar putea produce cu o oarecare supra-creștere (supra-reglare). Dorim să limităm aceasta la doar 10% pentru a nu produce prea mari oscilații în operarea vehiculului. De asemenei, s-ar putea să nu putem menține viteza finală la o valoare extrem de precisă, să zicem că putem tolera o eroare staționară de 2%.

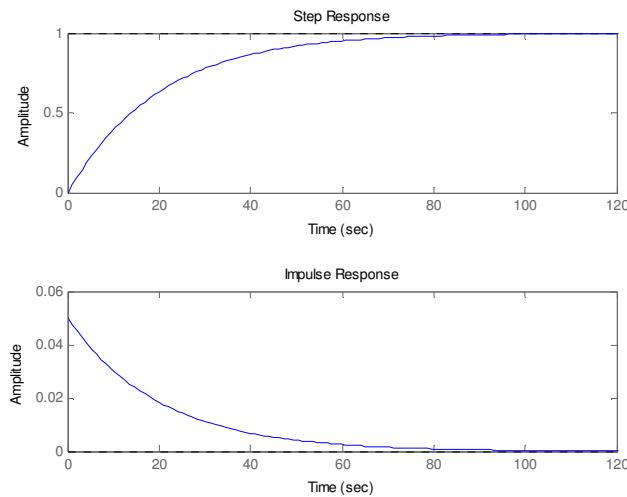
Toate aceste date numerice reprezintă cerințe de proiectare din considerente practice.

Vom rula acum un program MATLAB să vedem cum se comportă sistemul fără nici o buclă de control și cât de departe ar fi față de aceste cerințe de proiectare.

Lansati aici programul L1_cruise.m

```
%  
clear;  
echo on;  
% Initializam valorile numerice (atentie la unitatile de masura)  
m=1000  
b=50  
u=500  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
%  
% Definim functia de transfer  
num=[1];  
den=[m b];  
sys=tf(num,den)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
%  
% Sa analizam raspunsul sistemului la un semnal treapta  
% In acest caz ar corespunde aplicarii fortei u=F=500, la momentul initial  
% Se observa ca functia „step” reprezinta aplicarea unei trepte unitare,  
% iar noi avem nevoie de o treapta de 500N  
subplot(2,1,1)  
step(u*sys);  
%  
% Observam ca sistemul este mult mai lent decat se cere in datele de proiectare  
% Acest lucru va justifica folosirea unui control in bucla inchisa, si a unei compensari dinamice.  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
subplot(2,1,2)  
%  
% De multe ori in descrierea sistemelor dinamice, ne punem problema stabilitatii sistemelor.  
% Practic ne intereseaza daca sistemul nu va oscila singur din cauza unor vibratii sau oscilatii interne.  
% Fara a intra in detalii aici, sa retinem ca o informatie simpla despre stabilitatea unui sistem  
% poate fi data de raspunsul la impuls.  
% In MATLAB, putem determina raspunsul la impuls prin instructiunea 'impulse'.  
impulse(u*sys);  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
%
```

Prin execuția programului, se obține figura următoare.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator)

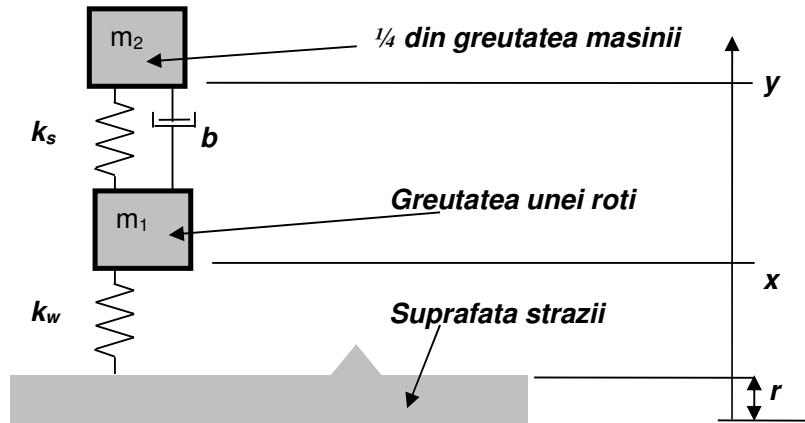
Putem salva fișierul cu un nume nou și modifica parametrii pentru a observa cum se schimbă funcția de transfer și răspunsul sistemului la semnalele treaptă și rampă. În acest caz, nu mai putem folosi comanda „*hold on*” deoarece avem două figuri la fiecare execuție a programului. De asemenei, observăm ca nu am definit noi numele fiecărei figuri, ci am lăsat MATLAB să ne ofere nume în limba engleză.

Observați cum se modifică funcția de transfer, răspunsul la treaptă și răspunsul la impuls, dacă se modifică

- (e) forță aplicată la $u=50$,
- (f) reveniți la o forță aplicată de $u=500$ și modificați masa la $m=2000$.

4. Modelarea unei suspensii pentru un vehicul.

Vom considera un alt exemplu de sistem dinamic: suspensia unui vehicul. Un posibil model este dat în figură.



Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

Datele numerice ce caracterizează sistemul sunt:

- Masa mașinii $m_1 = 1580 \text{ kg}$
- Masa roții și cauciucului $m_2 = 20 \text{ kg}$
- Constanta arcului din compoziția sistemului de suspensie $k_s = 130,000 \text{ N/m}$
- Constanta de tip arc a cauciucului $k_w = 1,000,000 \text{ N/m}$
- Constanta de amortizare (fixă) din compoziția sistemului de suspensie $b = 9800 \text{ Ns/m}$
- Forța aplicată (mărime de intrare în sistem) u .

Ecuațiile bazate pe legea Hooke pentru arcuri ($F = -Kx$, sau cu amortizare $F = -Kx - Bv$) și pe prima lege a lui Newton pentru mișcare ("Orice corp își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează alte forțe sau suma forțelor care acționează asupra sa este nulă.") sunt:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x} = b \cdot \left(\dot{y} - \dot{x} \right) + k_s \cdot (y - x) - k_w \cdot (x - r) \\ m_2 \cdot \ddot{y} = -k_s \cdot (y - x) - b \cdot \left(\dot{y} - \dot{x} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{y} - \dot{x} \right) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = \frac{k_w}{m_1} \cdot (x - r) \\ \ddot{y} + \frac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{y} - \dot{x} \right) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = 0 \end{cases}$$

Aceste ecuații pot conduce la un model bazat pe funcția de transfer Laplace:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{y} - \dot{x} \right) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = \frac{k_w}{m_1} \cdot (x - r) \\ \ddot{y} + \frac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{y} - \dot{x} \right) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s^2 \cdot X(s) + s \cdot \frac{b}{m_1} \cdot (X(s) - Y(s)) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (X(s) - Y(s)) = \frac{k_w}{m_1} \cdot (X(s) - R(s)) \\ s^2 \cdot Y(s) + s \cdot \frac{b}{m_1} \cdot (Y(s) - X(s)) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (Y(s) - X(s)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_w \cdot b}{m_1 \cdot m_2} \cdot \left(s + \frac{k_s}{b} \right)}{s^4 + \left(\frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2} \right) \cdot s^3 + \left(\frac{k_s}{m_1} + \frac{k_s}{m_2} + \frac{k_w}{m_1} \right) \cdot s^2 + \left(\frac{k_w \cdot b}{m_1 \cdot m_2} \right) \cdot s + \left(\frac{k_w \cdot k_s}{m_1 \cdot m_2} \right)}$$

Aceasta reprezintă o funcție de transfer de la o perturbație în suprafața străzii la deplasarea cabinei resimțită de pasageri (ambele mărimi sunt dimensiuni). Să vedem ce date de proiectare ar avea sens în acest caz:

- Să considerăm o supra-creștere de doar 5% pentru a nu resimți şocuri puternice,
- Să considerăm un timp de stabilizare (atingere a regimului staționar) mai mic de 5 secunde.

O exprimare numerică a acestor date de proiectare ar însemna că o denivelare în stradă de 10cm ar produce o mică oscilație de doar 5mm, urmată de o revenire la regimul staționar în 5 secunde.

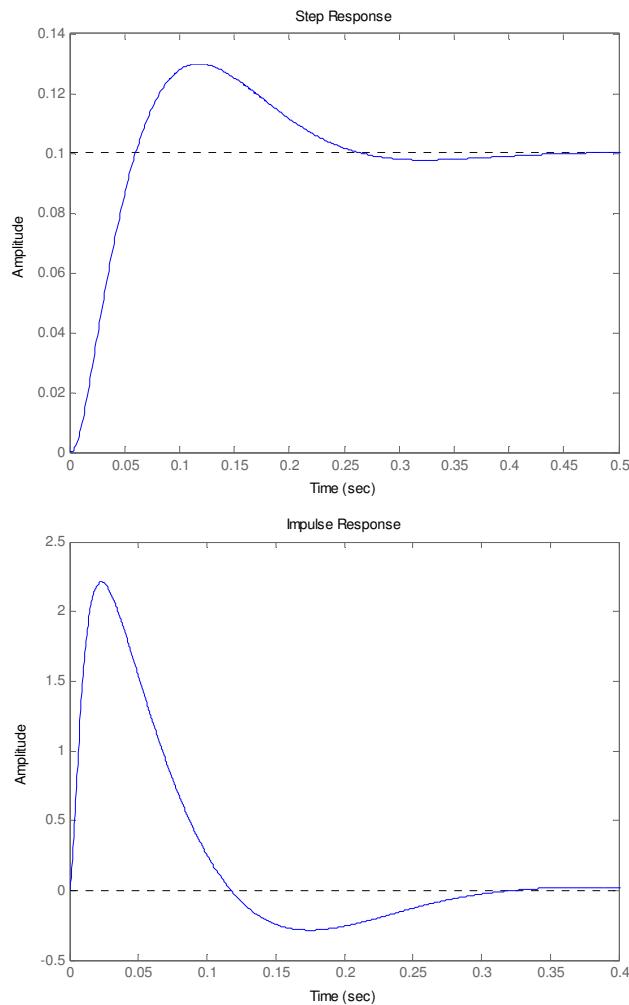
Un program scris pe baza modelului matematic ne va putea spune cât de departe suntem de aceste date de proiectare la folosirea sistemului în buclă deschisă.

Lansati aici programul MATLAB L1_suspen.m

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% _____  
clear;  
echo on;  
% initializam valorile numerice  
m1=20;  
m2=(1580-80)/4;  
ks=130000;  
kw=1000000;  
b=9800;  
%  
% Sa scriem functia de transfer definita anterior pe baza unor coeficienti  
% polinomiali  
K=(kw*b)/(m1*m2);  
a= ks/b;  
b3=(b/m1)+(b/m2);  
b2=(ks/m1)+(ks/m2)+(kw/m1);  
b1=(kw*b)/(m1*m2);  
b0=(kw*ks)/(m1*m2);  
num=K*[1 a];  
den=[1 b3 b2 b1 b0];  
sys=tf(num,den)  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
%  
% Sa analizam raspunsul sistemului la un semnal treapta  
% Acest caz ar corespunde aplicarii unei perturbatii u=10cm=0.1m,  
% la momentul initial  
% Se observa ca functia „step” reprezinta aplicarea unei trepte unitare,  
% iar noi avem nevoie de o treapta de 0.1m  
u=0.1;  
step(u*sys);  
% Observam ca sistemul arata oscilatii amortizate,  
% pana la atingerea regimului stationar.  
% Se spune ca sistemul are raspuns oscillatoriu amortizat.  
% Acest lucru va justifica folosirea unui control in bucla inchisa,  
% si a unei compensari dinamice.  
%  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
%  
% De multe ori in descrierea sistemelor dinamice, ne punem problema  
% stabilitatii sistemelor.  
% Practic ne intereseaza daca sistemul nu va oscila singur din cauza unor  
% vibratii sau oscilatii interne.  
% fara a intra in detalii aici, sa retinem ca o informatie simpla despre  
% stabilitatea unui sistem  
% poate fi data de raspunsul la impuls.  
% In MATLAB, putem determina raspunsul la impuls prin instructiunea impuls.  
impulse(u*sys);  
pause % apasati orice tasta pentru a continua.  
%  
%
```

Execuția programului produce următoarele figuri.



Se observă că avem un răspuns oscilatoriu amortizat.

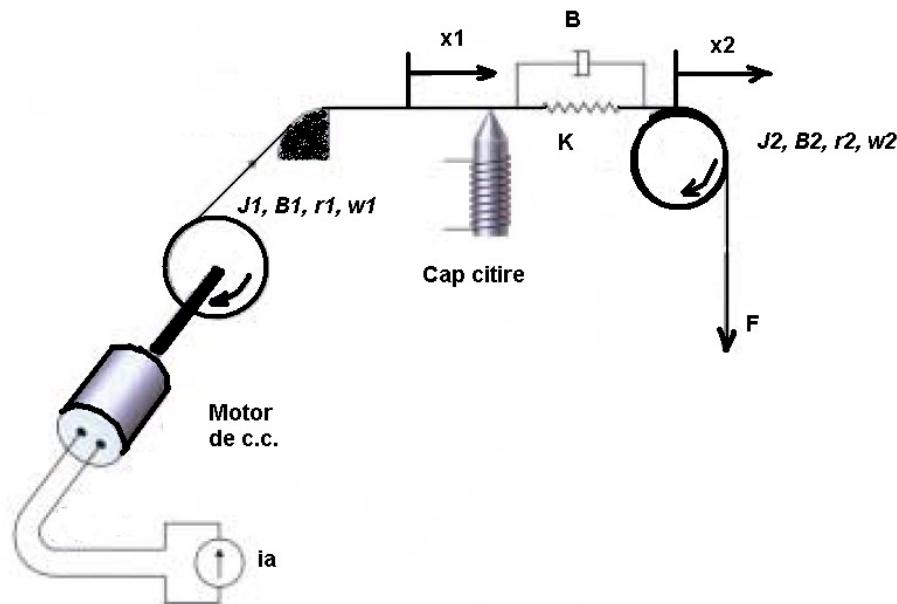
Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator)

Putem salva fișierul cu un nume nou și modifica parametrii pentru a observa cum se schimbă funcția de transfer și răspunsul sistemului la semnalele treaptă și rampă.

- (g) micșorați constantele arcurilor (k_s , k_w) de 10 ori ($F=kX$, deci vom avea o deplasare mai mare la aceeași forță aplicată)
- (h) reveniți la valorile originale pentru k_s , k_w și modificați greutatea vehiculului, crescând de 2 ori masa, la $m=3160\text{kg}$.

5. Mini-Proiect.

Să considerăm cazul unui sistem de stocare de date pe banda magnetică („*tape driver*”), sistem utilizat într-un calculator (*entry-level servers sau workstations*). Același sistem poate descrie o casetă audio, cu banda magnetică. O reprezentare schematică a sistemului este dată în figura următoare.



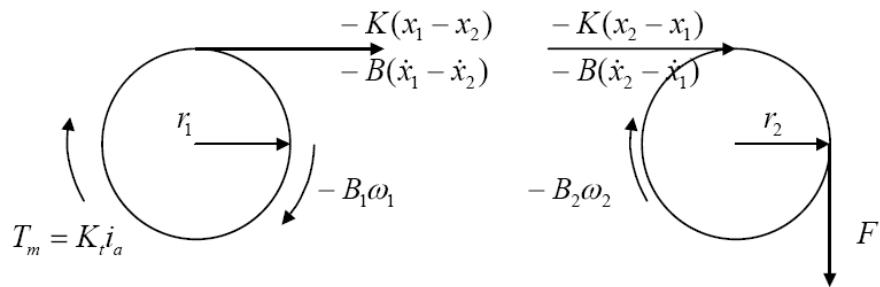
Un motor de c.c. va furniza cuplu unui arbore capabil să miște banda magnetică. Aplicarea unui curent pozitiv va determina rotația roții $r1$ în sensul acelor de ceasornic. Banda magnetică este întinsă de un dispozitiv caracterizat de constanta de tip arc K și de amortizarea de tip frecare B . Întinderea benzii este compensată de o forță constantă F .

Să scriem ecuațiile de mișcare în funcție de parametrii ce descriu sistemul practic:

- Raza primului disc $r1 = 2 \cdot 10^{-2}$ m
- Momentul de inerție la primul disc $J1 = 5 \cdot 10^{-5}$ kg m²
- Frecarea la primul disc $B1 = 1 \cdot 10^{-2}$ N m sec
- Constanta cuplului $Kt = 3 \cdot 10^{-2}$ N m /A
- Constanta de deformare a benzii (ca un arc de suspensie) $K = 2 \cdot 10^4$ N/m
- Dispozitiv de absorbție a şocului aplicat benzii $B = 20$ N/m sec
- Raza celui de al doilea disc $r2 = 2 \cdot 10^{-2}$ m
- Momentul de inerție la al doilea disc $J2 = 2 \cdot 10^{-5}$ kg m²
- Frecarea la al doilea disc $B2 = 2 \cdot 10^{-2}$ N m sec
- Forță constantă $F = 6$ N

Indicații pentru scrierea ecuațiilor ce caracterizează acest sistem:

- Mărimea de intrare este curentul aplicat, iar mărimea de ieșire este deplasarea x_1 .
- Descompuneți sistemul în subsisteme a căror funcționare poate fi foarte ușor înțeleasă (figura următoare).



Ecuațiile diferențiale de mișcare devin:

$$\begin{aligned}
 & \text{Cuplul la roata r1} \quad J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = T_m - B_1 \cdot \omega_1 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 \right) + K \cdot (x_1 - x_2) \right] \cdot r_1 \\
 & \text{Cuplul la roata r2} \quad J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = -B_2 \cdot \omega_2 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \right) + K \cdot (x_2 - x_1) \right] \cdot r_2 + F \cdot r_2 \\
 & \text{Cuplul Motor} \quad T_m = K_t \cdot i_a \\
 & \text{Viteza benzii la roata r1} \quad v = \dot{x}_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{T} = r_1 \cdot \omega_1 \\
 & \text{Viteza benzii la roata r2} \quad v = \dot{x}_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2}{T} = r_2 \cdot \omega_2
 \end{aligned}$$

Aceste ecuații pot fi re-scrisă în funcție de mărimele de intrare (currentul i_a) și ieșire (x_1), prin înlocuirea derivatei vitezei benzii în ecuațiile pentru cuplu.

$$\begin{aligned}
 J_1 \cdot \frac{1}{r_1} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= K_t \cdot i_a - B_1 \cdot \frac{1}{r_1} \dot{x}_1 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 \right) + K \cdot (x_1 - x_2) \right] \cdot r_1 \\
 J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \dot{x}_2 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \right) + K \cdot (x_2 - x_1) \right] \cdot r_2 + F \cdot r_2
 \end{aligned}$$

Mărimele de intrare care pot produce variații în sistem sunt currentul i_a și forța F . Determinarea unui model dinamic (de semnal mic) în jurul unui punct de echilibru, folosind acest set de ecuații, ar presupune înlocuirea formală a fiecărei mărimi cu termeni de genul $x=x_0+\delta x$. Deoarece forța F se consideră constantă, aceasta nu va interveni în regimul dinamic ($\delta F=0$).

Pentru analiza de semnal mic în frecvență, vom cauta descrierea acestui sistem de ecuații cu forma Laplace, în funcție de variabila „s”. În acest sens, i_a va reprezenta doar componenta dinamică a curentului. Cu menținerea că transformata Laplace se poate aplica pentru valori initiale nule, obținem:

$$\begin{aligned}
 J_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s^2 \cdot x_1(s) &= K_t \cdot i_a(s) - B_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s \cdot x_1(s) - [(B \cdot s + K) \cdot (x_1(s) - x_2(s))] \cdot r_1 \\
 J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 \cdot x_2(s) &= -B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s \cdot x_2(s) - [(B \cdot s + K) \cdot (x_2(s) - x_1(s))] \cdot r_2
 \end{aligned}$$

Din care punem în evidență dependența lui x_1 de curentul i_a .

$$\begin{aligned}
 \left(J_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s^2 + B_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_1 \right) \cdot x_1(s) &= K_t \cdot i_a(s) + [(B \cdot s + K) \cdot r_1] \cdot x_2(s) \\
 \left(J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 + B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_2 \right) \cdot x_2(s) &= [(B \cdot s + K) \cdot r_2] \cdot x_1(s)
 \end{aligned}$$

=>

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

$$\left(J_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s^2 + B_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_1 \right) \cdot x_1(s) = K_t \cdot i_a(s) + [(B \cdot s + K) \cdot r_1] \cdot x_2(s)$$

$$x_2(s) = \frac{[(B \cdot s + K) \cdot r_2] \cdot x_1(s)}{\left(J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 + B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_2 \right)}$$

=>

$$\left(J_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s^2 + B_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_1 - \frac{[(B \cdot s + K) \cdot r_1] \cdot [(B \cdot s + K) \cdot r_2]}{\left(J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 + B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_2 \right)} \right) \cdot x_1(s) = K_t \cdot i_a(s)$$

=>

$$\left(\frac{\left(J_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s^2 + B_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_1 \right) \cdot \left(J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 + B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_2 \right) - [(B \cdot s + K) \cdot r_1] \cdot [(B \cdot s + K) \cdot r_2]}{\left(J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 + B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_2 \right)} \right) \cdot x_1(s) = K_t \cdot i_a(s)$$

=>

$$H(s) = \frac{x_1(s)}{i_a(s)} = \frac{K_t \cdot \left(J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 + B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_2 \right)}{\left(J_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s^2 + B_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_1 \right) \cdot \left(J_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s^2 + B_2 \cdot \frac{1}{r_2} \cdot s + (B \cdot s + K) \cdot r_2 \right) - [(B \cdot s + K) \cdot r_1] \cdot [(B \cdot s + K) \cdot r_2]}$$

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

- (i) Simplificați (sau re-aranjați) această expresie cu termeni polinomiali pentru a facilita scrierea programului MATLAB corespunzător funcției de transfer $H(s)$. Înlocuiți valorile numerice în program.
- (j) Determinați grafic răspunsul la semnal treaptă și la semnal impuls.
- (k) Comentați rezultatele.

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

Anexă : Tabel de funcții/instrucțiuni MATLAB.

```
>> help elmat
Elementary matrices and matrix manipulation.

Elementary matrices.
zeros      - Zeros matrix.
ones       - Ones matrix.
eye        - Identity matrix.
rand       - Uniformly distributed random numbers.
randn      - Normally distributed random numbers.
linspace   - Linearly spaced vector.
logspace   - Logarithmically spaced vector.
meshgrid   - X and Y arrays for 3-D plots.
:          - Regularly spaced vector.

Special variables and constants.
ans        - Most recent answer.
eps        - Floating point relative accuracy.
realmax    - Largest floating point number.
realmin    - Smallest positive floating point
             number.
pi          - 3.1415926535897....
i, j        - Imaginary unit.
inf        - Infinity.
NaN        - Not-a-Number.
flops      - Count of floating point operations.
 nargin     - Number of function input arguments.
nargout    - Number of function output arguments.
computer   - Computer type.
isieee     - True for computers with IEEE
             arithmetic.
isstudent   - True for the Student Edition.
why        - Succinct answer.
version    - MATLAB version number.

Time and dates.
clock      - Wall clock.
cputime    - Elapsed CPU time.
date       - Calendar.
etime      - Elapsed time function.
tic, toc    - Stopwatch timer functions.

Matrix manipulation.
diag       - Create or extract diagonals.
fliplr     - Flip matrix in the left/right
             direction.
fliptud    - Flip matrix in the up/down direction.
reshape    - Change size.
rot90     - Rotate matrix 90 degrees.
tril       - Extract lower triangular part.
triu       - Extract upper triangular part.
:          - Index into matrix, rearrange matrix.

>> help specmat
Specialized matrices.

compan     - Companion matrix.
gallery    - Several small test matrices.
hadamard   - Hadamard matrix.
hankel     - Hankel matrix.
hilb       - Hilbert matrix.
invhilb   - Inverse Hilbert matrix.
kron       - Kronecker tensor product.
magic      - Magic square.
pascal     - Pascal matrix.
rosser     - Classic symmetric eigenvalue test
             problem.
toeplitz   - Toeplitz matrix.
vander     - Vandermonde matrix.
wilkinson - Wilkinson's eigenvalue test matrix.

>> help elfun
Elementary math functions.

Trigonometric.
sin         - Sine.
sinh        - Hyperbolic sine.
asin        - Inverse sine.
asinh       - Inverse hyperbolic sine.
cos         - Cosine.
cosh        - Hyperbolic cosine.
acos        - Inverse cosine.
acosh       - Inverse hyperbolic cosine.
tan         - Tangent.
tanh        - Hyperbolic tangent.
atan        - Inverse tangent.
atan2       - Four quadrant inverse tangent.
atanh       - Inverse hyperbolic tangent.
sec         - Secant.
sech        - Hyperbolic secant.
asec        - Inverse secant.
asech       - Inverse hyperbolic secant.
csc         - Cosecant.
csch        - Hyperbolic cosecant.
acsc        - Inverse cosecant.
acsch       - Inverse hyperbolic cosecant.
cot         - Cotangent.
coth        - Hyperbolic cotangent.
acot        - Inverse cotangent.
acoth       - Inverse hyperbolic cotangent.

Exponential.
exp         - Exponential.
log         - Natural logarithm.
log10      - Common logarithm.
sqrt        - Square root.

Complex.
abs         - Absolute value.
angle       - Phase angle.
conj        - Complex conjugate.
imag        - Complex imaginary part.
real        - Complex real part.

Numeric.
fix         - Round towards zero.
floor       - Round towards minus infinity.
ceil        - Round towards plus infinity.
round       - Round towards nearest integer.
rem         - Remainder after division.
sign        - Signum function.

>> help specfun
Specialized math functions.

besselj     - Bessel function of the first kind.
bessely     - Bessel function of the second kind.
besseli     - Modified Bessel function of the first
             kind.
besselk     - Modified Bessel function of the second
             kind.
beta        - Beta function.
betainc    - Incomplete beta function.
betainc    - Logarithm of beta function.
ellipj     - Jacobi elliptic functions.
ellipke    - Complete elliptic integral.
erf         - Error function.
erfc        - Complementary error function.
erfcx       - Scaled complementary error function.
erfinv     - Inverse error function.
expint     - Exponential integral function.
gamma       - Gamma function.
gcd         - Greatest common divisor.
gammaintc - Incomplete gamma function.
lcm         - Least common multiple.
legendre   - Associated Legendre function.
gammaln    - Logarithm of gamma function.
log2        - Dissect floating point numbers.
pow2        - Scale floating point numbers.
rat         - Rational approximation.
rats        - Rational output.
cart2sph   - Transform from Cartesian to spherical
             coordinates.
cart2pol   - Transform from Cartesian to polar
             coordinates.
pol2cart   - Transform from polar to Cartesian
             coordinates.
sph2cart   - Transform from spherical to Cartesian
             coordinates.

>> help matfun
Matrix functions - numerical linear algebra.
```

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

<p>Matrix analysis.</p> <pre> cond - Matrix condition number. norm - Matrix or vector norm. rcond - LINPACK reciprocal condition estimator. rank - Number of linearly independent rows or columns. det - Determinant. trace - Sum of diagonal elements. null - Null space. orth - Orthogonalization. rref - Reduced row echelon form. </pre> <p>Linear equations.</p> <pre> \ and / - Linear equation solution; use "help slash". chol - Cholesky factorization. lu - Factors from Gaussian elimination. inv - Matrix inverse. qr - Orthogonal-triangular decomposition. qrdelete - Delete a column from the QR factorization. qrinsert - Insert a column in the QR factorization. nnls - Non-negative least-squares. pinv - Pseudoinverse. lscov - Least squares in the presence of known covariance. </pre> <p>Eigenvalues and singular values.</p> <pre> eig - Eigenvalues and eigenvectors. poly - Characteristic polynomial. polyeig - Polynomial eigenvalue problem. hess - Hessenberg form. qz - Generalized eigenvalues. rsf2csf - Real block diagonal form to complex diagonal form. cdf2rdf - Complex diagonal form to real block diagonal form. schur - Schur decomposition. balance - Diagonal scaling to improve eigenvalue accuracy. svd - Singular value decomposition. </pre> <p>Matrix functions.</p> <pre> expm - Matrix exponential. expml - M-file implementation of expm. expm2 - Matrix exponential via Taylor series. expm3 - Matrix exponential via eigenvalues and eigenvectors. logm - Matrix logarithm. sqrtm - Matrix square root. funm - Evaluate general matrix function. </pre> <p>>> help general General purpose commands. MATLAB Toolbox Version 4.2a 25-Jul-94</p> <p>Managing commands and functions.</p> <pre> help - On-line documentation. doc - Load hypertext documentation. what - Directory listing of M-, MAT- and MEX- files. type - List M-file. lookfor - Keyword search through the HELP entries. which - Locate functions and files. demo - Run demos. path - Control MATLAB's search path. </pre> <p>Managing variables and the workspace.</p> <pre> who - List current variables. whos - List current variables, long form. load - Retrieve variables from disk. save - Save workspace variables to disk. clear - Clear variables and functions from memory. pack - Consolidate workspace memory. size - Size of matrix. length - Length of vector. disp - Display matrix or text. </pre> <p>Working with files and the operating system.</p> <pre> cd - Change current working directory. </pre>	<p>dir - Directory listing. delete - Delete file. getenv ! - Get environment value. - Execute operating system command. unix - Execute operating system command & return result. diary - Save text of MATLAB session.</p> <p>Controlling the command window.</p> <pre> redit - Set command line edit/recall facility parameters. clc - Clear command window. home - Send cursor home. format - Set output format. echo - Echo commands inside script files. more - Control paged output in command window. </pre> <p>Starting and quitting from MATLAB.</p> <pre> quit - Terminate MATLAB. startup - M-file executed when MATLAB is invoked. matlabrc - Master startup M-file. </pre> <p>General information.</p> <pre> info - Information about MATLAB and The MathWorks, Inc. subscribe - Become subscribing user of MATLAB. hostid - MATLAB server host identification number. whatsnew - Information about new features not yet documented. ver - MATLAB, SIMULINK, and TOOLBOX version information. </pre> <p>>> help funfun Function functions - nonlinear numerical methods.</p> <pre> ode23 - Solve differential equations, low order method. ode23p - Solve and plot solutions. ode45 - Solve differential equations, high order method. quad - Numerically evaluate integral, low order method. quad8 - Numerically evaluate integral, high order method. fmin - Minimize function of one variable. fmins - Minimize function of several variables. fzero - Find zero of function of one variable. fplot - Plot function. </pre> <p>See also The Optimization Toolbox, which has a comprehensive set of function functions for optimizing and minimizing functions.</p> <p>>> help polyfun Polynomial and interpolation functions.</p> <p>Polynomials.</p> <pre> roots - Find polynomial roots. poly - Construct polynomial with specified roots. polyval - Evaluate polynomial. polyvalm - Evaluate polynomial with matrix argument. residue - Partial-fraction expansion (residues). polyfit - Fit polynomial to data. polyder - Differentiate polynomial. conv - Multiply polynomials. deconv - Divide polynomials. </pre> <p>Data interpolation.</p> <pre> interp1 - 1-D interpolation (1-D table lookup). interp2 - 2-D interpolation (2-D table lookup). interpft - 1-D interpolation using FFT method. griddata - Data gridding. </pre> <p>Spline interpolation.</p> <pre> spline - Cubic spline data interpolation. ppval - Evaluate piecewise polynomial. </pre> <p>>> help ops Operators and special characters.</p> <table border="0"> <thead> <tr> <th>Char</th> <th>Name</th> <th>HELP topic</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>+</td> <td>Plus</td> <td>arith</td> </tr> </tbody> </table>	Char	Name	HELP topic	+	Plus	arith
Char	Name	HELP topic					
+	Plus	arith					

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

- Minus
 * Matrix multiplication
 .* Array multiplication
 ^ Matrix power
 .^ Array power

\ Backslash or left division
 / Slash or right division
 ./ Array division
 kron Kronecker tensor product

:

() Parentheses
 [] Brackets

. Decimal point
 .. Parent directory
 ... Continuation
 , Comma
 ; Semicolon
 % Comment
 ! Exclamation point
 ' Transpose and quote
 = Assignment

== Equality
 <,> Relational operators
 & Logical AND
 | Logical OR
 ~ Logical NOT
 xor Logical EXCLUSIVE OR

Logical characteristics.

exist - Check if variables or functions are defined.
 any - True if any element of vector is true.
 all - True if all elements of vector are true.
 find - Find indices of non-zero elements.
 isnan - True for Not-A-Number.
 isninf - True for infinite elements.
 infinite - True for finite elements.
 isempty - True for empty matrix.
 isreal - True for real matrix.
 ssparse - True for sparse matrix.
 sstr - True for text string.
 sglobals - True for global variables.

> help lang

Language constructs and debugging.

MATLAB as a programming language.

script - About MATLAB scripts and M-files.
 function - Add new function.
 eval - Execute string with MATLAB expression.
 feval - Execute function specified by string.
 global - Define global variable.
 nargchk - Validate number of input arguments.
 lasterr - Last error message.

Control flow.

if - Conditionally execute statements.
 else - Used with IF.
 elseif - Used with IF.
 end - Terminate the scope of FOR, WHILE and IF statements.
 for - Repeat statements a specific number of times.
 while - Repeat statements an indefinite number of times.
 break - Terminate execution of loop.
 return - Return to invoking function.
 error - Display message and abort function.

Interactive input.

input - Prompt for user input.
 keyboard - Invoke keyboard as if it were a Script-file.
 menu - Generate menu of choices for user input.
 pause - Wait for user response.
 uimenu - Create user interface menu.
 uicontrol - Create user interface control.

arith

arith

arith

arith

slash

slash

slash

kron

colon

paren

paren

punct

punct

punct

punct

punct

punct

punct

punct

punct

relop

relop

relop

relop

relop

xor

Check if variables or functions are defined.
 True if any element of vector is true.
 True if all elements of vector are true.
 Find indices of non-zero elements.
 True for Not-A-Number.
 True for infinite elements.
 True for finite elements.
 True for empty matrix.
 True for real matrix.
 True for sparse matrix.
 True for text string.
 True for global variables.

Debugging commands.

dbstop - Set breakpoint.
 dbclear - Remove breakpoint.
 dbcont - Resume execution.
 dbdown - Change local workspace context.
 dbstack - List who called whom.
 dbstatus - List all breakpoints.
 dbstep - Execute one or more lines.
 dbtype - List M-file with line numbers.
 dbup - Change local workspace context.
 dbquit - Quit debug mode.
 mexdebug - Debug MEX-files.

>> help plotxy

Two dimensional graphics.

Elementary X-Y graphs.

plot - Linear plot.
 loglog - Log-log scale plot.
 semilogx - Semi-log scale plot.
 semilogy - Semi-log scale plot.
 fill - Draw filled 2-D polygons.

Specialized X-Y graphs.

polar - Polar coordinate plot.
 bar - Bar graph.
 stem - Discrete sequence or "stem" plot.
 stairs - Stairstep plot.
 errorbar - Error bar plot.
 hist - Histogram plot.
 rose - Angle histogram plot.
 compass - Compass plot.
 feather - Feather plot.
 fplot - Plot function.
 comet - Comet-like trajectory.

Graph annotation.

title - Graph title.
 xlabel - X-axis label.
 ylabel - Y-axis label.
 text - Text annotation.
 gtext - Mouse placement of text.
 grid - Grid lines.

See also PLOTEXY, GRAPHICS.

>> help plotxyz

Three dimensional graphics.

Line and area fill commands.

plot3 - Plot lines and points in 3-D space.
 fill3 - Draw filled 3-D polygons in 3-D space.
 comet3 - 3-D comet-like trajectories.

Contour and other 2-D plots of 3-D data.

contour - Contour plot.
 contour3 - 3-D contour plot.
 clabel - Contour plot elevation labels.
 contourc - Contour plot computation (used by contour).
 pcolor - Pseudocolor (checkerboard) plot.
 quiver - Quiver plot.

Surface and mesh plots.

mesh - 3-D mesh surface.
 meshc - Combination mesh/contour plot.
 meshz - 3-D Mesh with zero plane.
 surf - 3-D shaded surface.
 surfcc - Combination surf/contour plot.
 surfl - 3-D shaded surface with lighting.
 waterfall - Waterfall plot.

Volume visualization.

slice - Volumetric visualization plots.

Graph appearance.

view - 3-D graph viewpoint specification.
 viewmtx - View transformation matrices.
 hidden - Mesh hidden line removal mode.
 shading - Color shading mode.
 axis - Axis scaling and appearance.
 caxis - Pseudocolor axis scaling.
 colormap - Color look-up table.

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

Graph annotation.

```
title      - Graph title.  
xlabel     - X-axis label.  
ylabel     - Y-axis label.  
zlabel     - Z-axis label for 3-D plots.  
text       - Text annotation.  
gtext      - Mouse placement of text.  
grid       - Grid lines.
```

3-D objects.

```
cylinder  - Generate cylinder.  
sphere     - Generate sphere.
```

See also COLOR, PLOTXY, GRAPHICS.

>> help strfun

Character string functions.

General.

```
strings    - About character strings in MATLAB.  
abs        - Convert string to numeric values.  
setstr     - Convert numeric values to string.  
isstr      - True for string.  
blanks     - String of blanks.  
deblank   - Remove trailing blanks.  
str2mat    - Form text matrix from individual  
              strings.  
eval       - Execute string with MATLAB expression.
```

String comparison.

```
strcmp     - Compare strings.  
findstr   - Find one string within another.  
upper      - Convert string to uppercase.  
lower      - Convert string to lowercase.  
isletter   - True for letters of the alphabet.  
isspace    - True for white space characters.  
strrep     - Replace a string with another.  
strtok     - Find a token in a string.
```

String to number conversion.

```
num2str    - Convert number to string.  
int2str    - Convert integer to string.  
str2num    - Convert string to number.  
mat2str    - Convert matrix to string.  
sprintf    - Convert number to string under format  
              control.  
sscanf     - Convert string to number under format  
              control.
```

Hexadecimal to number conversion.

```
hex2num   - Convert hex string to IEEE floating  
              point number.  
hex2dec   - Convert hex string to decimal integer.  
dec2hex   - Convert decimal integer to hex string.
```

LABORATORUL #2 RĂSPUNSUL DINAMIC AL SISTEMELOR.

1. Scopul laboratorului.
2. Instrucțiuni MATLAB pentru reprezentarea graficelor în domeniul timp și frecvență.
 - a) Sisteme de ordinul întâi
 - b) Sisteme de ordin superior cu poli reali
 - c) Reducerea ordinului sistemelor complexe.
3. Sisteme de ordinul doi.
 - a) Reprezentare generală.
 - b) Specificarea amortizării în planul complex.
 - c) Efectul adăugării unui zero.
4. Sisteme în buclă închisă.
5. Stabilitate.
6. Mini-proiect.

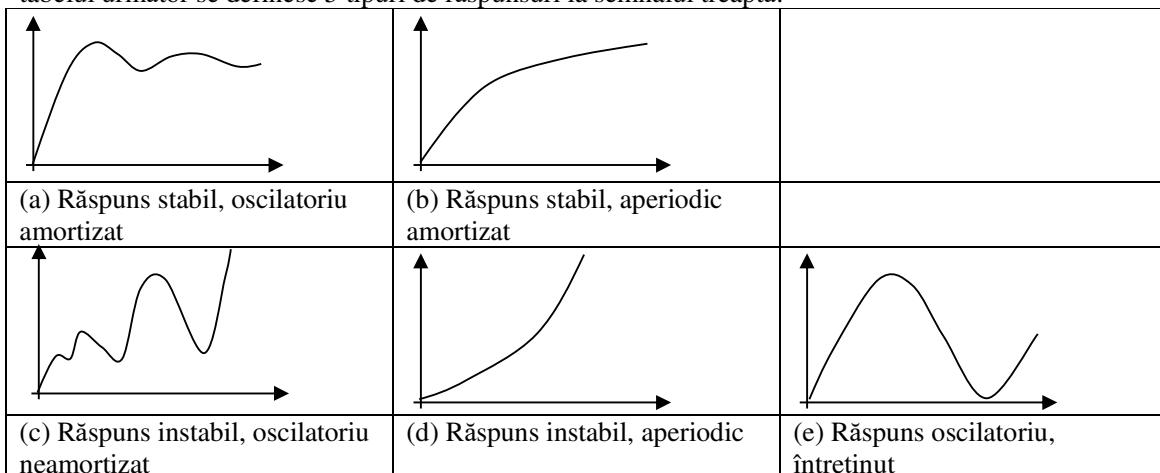
1. Scopul laboratorului

Vom analiza diferite sisteme dinamice în MATLAB pentru a dezvolta o intuiție asupra relațiilor dintre locația polilor și zerourilor în planul complex și răspunsul dinamic al sistemelor. Indicii de performanță utilizați pentru evaluarea sistemelor dinamice sau pentru prescrierea datelor de proiectare a sistemelor dinamice sunt prezentați. O atenție specială se va acorda sistemelor de ordinul doi, cât și posibilității reducerii sistemelor de ordin ridicat la analiza unor sisteme de ordin redus. În final, vom defini stabilitatea sistemelor și vom exemplifica problemele legate de determinarea stabilității.

2. Instrucțiuni MATLAB pentru reprezentarea graficelor în domeniul timp și frecvență.

- a. Sisteme de ordinul întâi
- b. Sisteme de ordin superior cu poli reali
- c. Reducerea ordinului sistemelor complexe.

După cum am vazut în laboratorul precedent, aplicarea unor semnale de tip treaptă sau impuls la intrarea sistemelor dinamice servește la observarea unor proprietăți specifice fiecărui sistem. În tabelul următor se definesc 5 tipuri de răspunsuri la semnalul treaptă.



**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

Să revedem răspunsul la semnale de test (treaptă și impuls) al sistemelor de ordinul întâi și legătura dintre locația polilor și răspunsul în domeniul timp. Sistemele cu un model caracterizat de un singur pol trebuie să aibă acest pol număr real pentru că funcția de transfer este întotdeauna un raport de polinoame cu coeficienți reali. În alte cuvinte, dacă avem un pol număr complex, atunci vom avea de fapt o pereche de poli numere complexe.

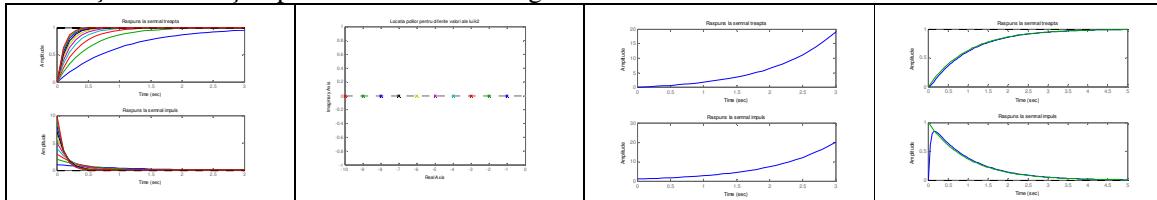
Acum puteți lansa programul *L2_intro.m*.

```
clear;
echo on;
%-----
%
% Studiem o functie de ordinul intai, cu o locatie variabila a polului
% si cu un castig de c.c. constant, egal cu 1.
% Alegem polii ca fiind egal cu -1, -2, ..., respectiv -10.
% Cu cat sunt polul situati mai departe de axa reala,
% catre -infinit, cu atat mai repede sistemul ajunge la regim stationar.
% Identificati valoarea polului ce corespunde fiecarui raspuns.
%
pause % Apasati orice tastă pentru raspunsul la semnale treapta si impuls
%-----
echo off;
subplot(2,1,1);
for k2=1:10
    % definim functia de transfer ca un raport de doua polinoame
    num=k2;
    den=[1 k2];
    M=tf(num,den);
    %
    % Sa observam un raspuns la un semnal treapta
    step(M, 0:0.1:3); hold on;
end
title('Raspuns la semnal treapta');
%
subplot(2,1,2);
for k2=1:10
    % definim functia de transfer ca un raport de doua polinoame
    num=k2;
    den=[1 k2];
    M=tf(num,den)
    %
    % Sa observam un raspuns la un semnal impuls
    impulse(M, 0:0.1:3); hold on;
end
title('Raspuns la semnal impuls');
%
echo on;
% Introducem comanda pzmap(M), cu care reprezentam polii si zerourile
% in planul complex.
pause % Apasati orice tastă pentru a reprezenta polii in planul complex
echo off;
figure;
for k2=1:10
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
num=k2;
den=[1 k2];
M=tf(num,den);
pzmap(M); hold on;
end
title('Locatia polilor pentru diferite valori ale lui k2');
%
echo on;
pause % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Am studiat efectul unor poli reali si negativi.
% Daca avem un singur pol, real si pozitiv
%
clear;
figure;
num=1;
den=[1 -1];
M=tf(num,den)
subplot(2,1,1);
step(M, 0:0.1:3);
title('Raspuns la semnal treapta');
subplot(2,1,2);
impulse(M, 0:0.1:3);
title('Raspuns la semnal impuls');
pause % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Sa studiem prezenta a doi poli reali si negativi, in functia de transfer
% Vom alege cei 2 poli la distanta mare unul de celalalt.
% Vom defini functia de transfer incat sa aiba acelasi castig unitar,
% la frecventa nula (s=0).
%
% Numim pol dominant, polul cel mai apropiat de originea planului complex.
% Vom compara raspunsul sistemului cu 2 poli,
% cu cel al unui singur pol dominat.
%
clear;
figure;
num=[1]; den=[1 1]; B=tf(num,den)
k1=1;
k2=20;
num=k1*k2;
den1=[1 k1]; den2=[1 k2]; den=conv(den1,den2);
M=tf(num,den)
subplot(2,1,1);
step(M, 0:0.05:5); hold on;
step(B, 0:0.05:5);
title('Raspuns la semnal treapta');
subplot(2,1,2);
impulse(M, 0:0.05:5); hold on;
impulse(B, 0:0.05:5);
title('Raspuns la semnal impuls');
```

Execuția acestui fișier produce următoarele figuri.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

1. După execuția programului *L2_intro.m*, răspundeți la următoarele întrebări:
 - a) Atribuiți o clasificare răspunsului la semnal treaptă pentru sistemul de ordinul întâi, cu pol real și negativ, pe baza tabelului de pe prima pagină.
 - b) Ce fel de răspuns avem pentru un pol real pozitiv?
 - c) Cum se compară răspunsurile la semnale treaptă și impuls ale funcției de transfer cu doi poli cu răspunsurile funcției cu un singur pol dominant? Poate constitui această rezultat o premişă pentru aproximarea sistemelor complexe cu sisteme caracterizate de funcții de transfer mai simple?
 - d) Care este legătura între polul unui sistem de ordinul întâi și stabilitatea sistemului?

3. Sisteme de ordinul doi.

- a. Reprezentare generală.
- b. Specificarea amortizării în planul complex.
- c. Efectul adăugării unui zero. Efectul adăugării unui pol.

Un caz aparte de sistem dinamic este dat de sistemele de ordinul doi cu cei doi poli numere complexe. Vom considera un caz general pentru a studia efectul coeficienților polinomului de ordinul doi de la numitorul expresiei. Vom exemplifica folosirea unor instrucțiuni MATLAB specifice analizei sistemelor dinamice.

Aceeași descriere a laboratorului este disponibilă în fișierul MATLAB *L2_ordinul2.m*.

```
clear;
echo on;
%-----
% Forma generală a unui sistem de ordinul doi este:
%  $H(s) = \frac{C}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$ 
% Se preferă această formă pentru a pune în evidență
% -  $\omega_n$  = frecvența proprie de oscilație
% -  $\zeta$  = factorul de amortizare
%
% Dacă stim că un sistem este de ordinul al doilea, putem identifica
% funcția de transfer din răspunsul la semnal treaptă, care va avea
% întotdeauna o suprareglare (supracrestere, overshoot).
% - Timpul de creștere este legat de frecvența proprie de oscilație  $\omega_n$ .
% - Suprareglarea este legată de amortizare.
% - timpul de stabilizare este legat de partea reală a polilor.
%
% La curs, am văzut formulele:
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% wn = 1.8/Tr      Tr - (timp de crestere)
% zeta = 0.6(1 - Mp) Mp - (suprareglare in procente)
% zeta*wn = 4.6/Ts   Ts - (timp de stabilizare)
% C = ssm/wn^2      ssm - (castig regim stationar: out/in)
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua.
%-----
% (1) Sa vedem intai, un oscilator pur pentru care zeta=0
%
% P(s) = wn^2/(s^2 + wn^2),
%
% Vom vizualiza locatia polilor si
% legatura cu raspunsul la semnale treapta si impuls.
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua.Asteptati apoi pentru grafic.
%-----
echo off;
subplot(2,1,1);
for wn=1:3:10
    % definim functia de transfer ca un raport de doua polinoame
    num=wn*wn;
    den=[1 0 wn*wn];
    M=tf(num,den);
    %
    % Sa observam un raspuns la un semnal treapta
    step(M, 0:0.05:3); hold on;
end
legend('1', '4', '7', '10');
title('Raspuns la semnal treapta');
%
subplot(2,1,2);
for wn=1:3:10
    % definim functia de transfer ca un raport de doua polinoame
    num=wn*wn;
    den=[1 0 wn*wn];
    M=tf(num,den);
    %
    % Sa observam un raspuns la un semnal impuls
    impulse(M, 0:0.05:3); hold on;
end
legend('1', '4', '7', '10');
title('Raspuns la semnal impuls');
%
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a reprezenta polii in planul complex
%-----
echo off;
figure;
for wn=1:3:10
    num=wn*wn;
    den=[1 0 wn*wn];
    M=tf(num,den);
    pzmap(M); hold on;
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
end
legend('1', '4', '7', '10');
title('Locatia polilor pentru diferite valori ale lui k2');
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua.
%-
%
% (2) Sa introducem acum amortizarea zeta.
% Puteti inchide toate ferestrele windows pentru figurile precedente.
% Forma considerata:
%
% H(s) = wn^2
%           (s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2)
%
echo off;
clear;
wn=4;
figure;
subplot(2,1,1)
for i=1:3:10
    zeta=0.1*i;
    num=wn*wn;
    den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
    M=tf(num,den);
    step(M, 0:0.05:3); hold on;
end
legend('0.1', '0.4', '0.7', '1.0');
title('Raspuns la semnal treapta');
%
subplot(2,1,2)
for i=1:3:10
    zeta=0.1*i;
    num=wn*wn;
    den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
    M=tf(num,den);
    impulse(M, 0:0.05:3); hold on;
end
legend('0.1', '0.4', '0.7', '1.0');
title('Raspuns la semnal impuls');
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a reprezenta polii in planul complex
%-
echo off;
figure;
for i=1:3:10
    zeta=0.1*i;
    num=wn*wn;
    den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
    M=tf(num,den);
    pzmap(M); hold on;
end
legend('0.1', '0.4', '0.7', '1.0');
title('Locatia polilor pentru diferite valori ale lui zeta');
```

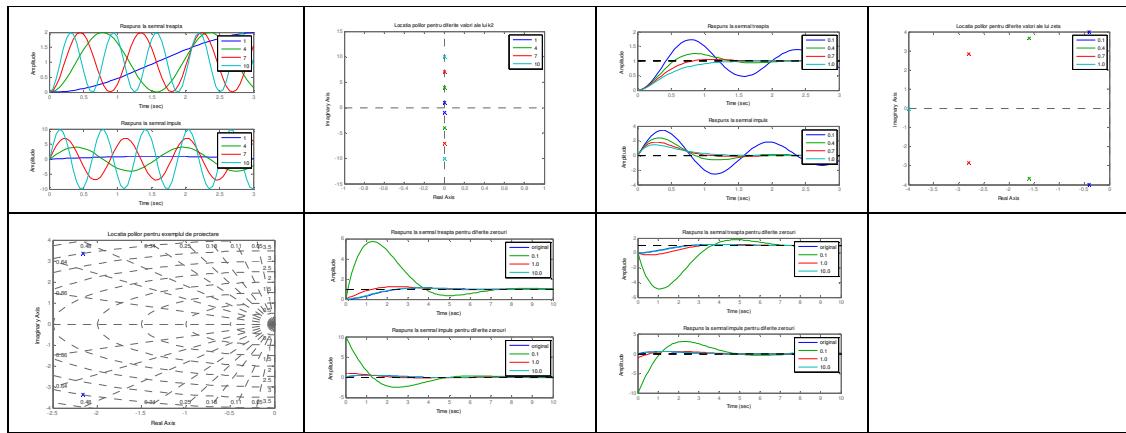
**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua.
%
%
% (3) Sa discutam linia de amortizare constanta in planul complex.
% Multe date de proiectare includ suprareglarea.
% Din aceasta valoare se poate calcula amortizarea.
% Exista o legatura intre amortizare si pozitia unghiulara a polilor.
% Dpdv al proiectarii, problema se pune invers:
% - daca se cere suprareglarea, sa se calculeze pozitia polilor.
% Exemplu:
% zeta = 0.6(1 - Mp)   Mp - (suprareglare in procente)
% Mp = 10% (procente)    => zeta=0.6*0.9=0.54 =>
% theta = arcsin(zeta) = 0.57 rad = 32 grade.
%
%
%
clear; figure;
wn=4;
zeta=0.54;
num=wn*wn;
den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
M=tf(num,den);
pzmap(M); hold on;
title('Locatia polilor pentru exemplul de proiectare');
% Comanda urmatoare deseneaza liniile de amortizare constante si radacinile
% pentru simplificarea proiectarii.
sgrid;
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua.
%
%
% (4) Sa discutam adaugarea unui zero real negativ,
% la o functie de transfer de ordinul al doilea.
%
echo off;
clear;
figure;
wn=1;
zeta=0.54;
num=wn*wn;
den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
M=tf(num,den);
%
subplot(2,1,1)
step(M, 0:0.1:10); hold on;
% Sa studiem efectul asupra raspunsului pentru diferite zerouri
for zl=1:3
    kl=10^(-2+zl);
    zz=[1 kl];
    num1=num*zz/kl;
    N=tf(num1,den)
    step(N, 0:0.1:10); hold on;
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
end
legend('original', '0.1', '1.0', '10.0');
title('Raspuns la semnal treapta pentru diferite zerouri');
subplot(2,1,2)
impulse(M, 0:0.1:10); hold on;
for zl=1:3
    kl=10^(-2+zl);
    zz=[1 kl];
    num1=num*zz/kl;
    N=tf(num1,den);
    impulse(N, 0:0.1:10); hold on;
end
legend('original', '0.1', '1.0', '10.0');
title('Raspuns la semnal impuls pentru diferite zerouri');
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua.
%-----
%
% Repetam analiza pentru un zero real, pozitiv.
echo off;
clear;
figure;
wn=1;
zeta=0.54;
num=wn*wn;
den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
M=tf(num,den);
%
subplot(2,1,1)
step(M, 0:0.1:10); hold on;
% Sa studiem efectul asupra raspunsului pentru diferite zerouri
for zl=1:3
    kl=10^(-2+zl);
    zz=[1 -kl];
    num1=num*zz/(-kl);
    N=tf(num1,den)
    step(N, 0:0.1:10); hold on;
end
legend('original', '0.1', '1.0', '10.0');
title('Raspuns la semnal treapta pentru diferite zerouri');
subplot(2,1,2)
impulse(M, 0:0.1:10); hold on;
for zl=1:3
    kl=10^(-2+zl);
    zz=[1 -kl];
    num1=num*zz/(-kl);
    N=tf(num1,den);
    impulse(N, 0:0.1:10); hold on;
end
legend('original', '0.1', '1.0', '10.0');
title('Raspuns la semnal impuls pentru diferite zerouri');
```

Execuția acestui fișier produce succesiv următoarele figură:



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

Dupa execuția programului *L2_ordinul2.m*, răspundeți la următoarele întrebări:

2. Primul set de întrebări se referă la modelarea oscilațiilor.

- e) Identificați legătura dintre fiecare reprezentare grafică a răspunsului și valoarea fiecărei frecvențe ω_n . Ce reprezintă valoarea maximă a răspunsului la semnal treaptă în domeniul timp (amplitudinea oscilațiilor întreținute)?
- f) De ce răspunsul la semnal impuls este mai util decât răspunsul la semnal treaptă pentru un oscilator? Comentati pe baza răspunsurilor obținute în laborator.
- g) Comentați asupra aplicării (particularizării) formulelor de legătură între răspunsul în domeniul timp și reprezentarea prin funcție de transfer în cazul unui oscilator (timp de răspuns, suprareglare, timp de stabilizare). Aceste formule se pot găsi la curs, în *listing*-ul programului sau pe paginile următoare.

3. Al doilea set de întrebări se referă la cazul care include amortizarea oscilațiilor.

- h) Care este efectul amortizării ***zeta*** asupra răspunsului la semnale treaptă sau impuls? La ce valori ale lui ***zeta*** acest lucru este mai evident?
- i) Se poate spune că pentru orice ***zeta*** pozitiv, polii (rădăcinile numitorului) vor fi numere complexe?
- j) Cum se modifică locația în planul complex a perechilor de poli la modificarea amortizării ***zeta***?
- k) Pentru ***zeta*** = 0,4 și ω_n = 4, determinați prin măsurare de pe grafic timpul de răspuns, suprareglarea, timpul de stabilizare și comparați rezultatele ce se obțin cu formulele aproximative date.

4. Întrebări legate de partea a 4-a din fișier, privind adăugarea unui *zero* la o funcție de transfer de ordinul al doilea.

- l) Cum se modifică parametrii răspunsului în timp (timp de răspuns, suprareglare, timp de stabilizare) pentru *zero*-ul real pozitiv adăugat (0.1=mult mai mic decât polii existenți, 1.0=lângă polii existenți, 10=mult mai mare decât polii existenți)?
- m) Cum se modifică parametrii răspunsului în timp (timp de răspuns, suprareglare, timp de stabilizare) pentru *zero*-ul real negativ adăugat (0.1=mult mai mic decât polii existenți, 1.0=lângă polii existenți, 10=mult mai mare decât polii existenți).

4. Sisteme în buclă închisă.

Vom introduce aici câteva comenzi MATLAB specifice lucrului cu sisteme în buclă închisă. Proiectarea sistemelor în buclă închisă va fi considerată în laboratorul următor.

Acum puteți lansa programul *L2_BuclInch.m*.

```

clear;
echo on;
%-----
% Exemplele precedente au analizat sisteme in bucla deschisa.
% Sistemele in bucla inchisa se utilizeaza pentru a schimba
% raspunsul sistemului. Vom vedea instructiunile MATLAB specifice lucrului
% in bucla inchisa.
%
% Vom defini o functie pentru instalatia analizata.
k=90;
w0 = 10;
zeta = 0.1;
% Functia de transfer in bucla deschisa o vom considera ca exemplu
% 
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(s^2 + 2*zeta*w0*s + w0^2)}$$

%
num = [0 0 k];
den = [1 2*zeta*w0 w0^2]
H=tf(num,den)
% Vom considera o bucla de reactie unitara, printr-un bloc de control
% C(s) proportional (kp).
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Diagrama sistemului in bucla inchisa este
%
% 
%
Kp = 10;
%
% Functia de transfer in bucla inchisa este:
%
% 
$$G(s) = \frac{Y}{ref.} = \frac{H(s) * C(s)}{1 + H(s) * C(s)}$$

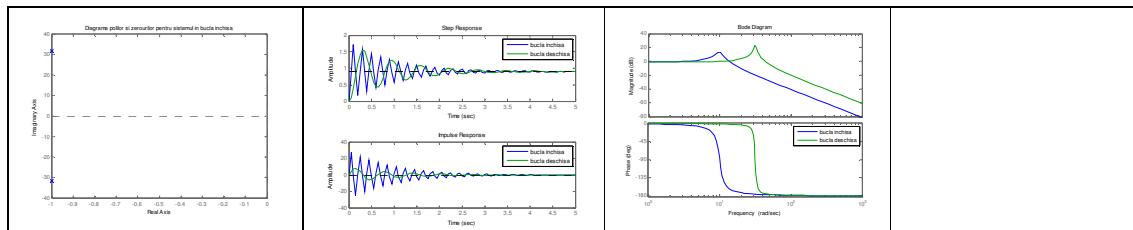
%
%
% putem folosi direct instructiunea FEEDBACK
M1=Kp*H;
G=feedback(M1,1)
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua

```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
 Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
 Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
%-----%
%
% Sa observam noua functie de transfer prin analiza polilor si zerourilor
% Vom introduce aici instructiuni specifice definirii unei noi functii de
% transfer pe baza polilor si zerourilor.
P=pole(G)
Z=zero(G)
pzmap(G)
title('Diagrama polilor si zerourilor pentru sistemul in bucla inchisa');
%
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Sa revedem efectul reactiei in raspunsul la semnal treapta si impuls
echo off;
figure;
subplot(2,1,1);
step(G, 0:0.05:5); hold on;
step(H, 0:0.05:5);
legend('bucla inchisa', 'bucla deschisa');
subplot(2,1,2);
impulse(G, 0:0.05:5); hold on;
impulse(H, 0:0.05:5);
legend('bucla inchisa', 'bucla deschisa');
figure;
bode(H); hold on;
bode(G); legend('bucla inchisa', 'bucla deschisa');
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Acest controller proportional nu este bun.
% Vom analiza diverse structuri de control ora viitoare.
```

Execuția acestui fișier produce succesiv următoarele figuri.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

5. După execuția programului *L2_BuclInch.m*, răspundeți la următoarele întrebări:
- Cum a schimbat reacția prin **Kp** funcția de transfer în acest caz?
 - Identificați prin măsurare directă frecvența oscilațiilor prezente în răspunsul la semnal treapta și impuls, pentru sistemele în buclă deschisă și buclă închisă.
 - Identificați de pe caracteristicile Bode de amplitudine, vârful rezonant. Cum se modifică această frecvență la închiderea buclei de reacție? (recapitulare).

6. Stabilitate

Un sistem liniar și invariabil în timp este stabil dacă toate rădăcinile numitorului au partea reală negativă și instabil în orice alt caz. La curs am analizat criteriul Routh pentru investigarea stabilității FĂRĂ rezolvarea rădăcinilor ecuației polinomiale de la numitorul funcției de transfer.

In mediul MATLAB, stabilitatea se poate analiza mai ușor pentru că avem o posibilitate de calcul direct a rădăcinilor unei ecuații polinomiale prin instrucțiunea `roots(den)`.

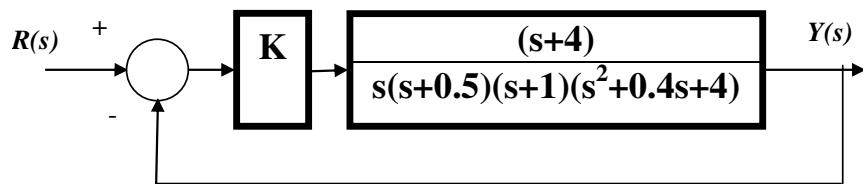
De asemenei, instrucțiunea

`isstable(G)`

va lista valoarea „1” dacă sistemul este stabil și „0” dacă sistemul este instabil.

Să considerăm următoarea problemă de stabilitate: Să se determine domeniul de variație a lui K din figura următoare astfel încât sistemul în buclă închisă să fie stabil. Sistemul în buclă deschisă cu funcția de transfer dată în figură, reprezintă un model pentru o unitate de bandă magnetică. Am văzut în primul laborator că un astfel de sistem va produce un semnal crescător la aplicarea unui semnal treaptă. Deci sistemul în buclă deschisă este instabil.

****) datele numerice sunt puțin schimbate față de cele din primul laborator.*



Funcția de transfer în buclă închisă este data de:

$$G(s) = \frac{K \cdot \frac{s+4}{s \cdot (s+0.5) \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 0.4 \cdot s + 4)}}{1 + K \cdot \frac{s+4}{s \cdot (s+0.5) \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 0.4 \cdot s + 4)}} = \frac{K \cdot s + 4 \cdot K}{s \cdot (s+0.5) \cdot (s+1) \cdot (s^2 + 0.4 \cdot s + 4) + K \cdot s + 4 \cdot K}$$

se obține:

$$G(s) = \frac{K \cdot s + 4 \cdot K}{s^5 + 1.9 \cdot s^4 + 5.1 \cdot s^3 + 6.2 \cdot s^2 + (2 + K) \cdot s + 4 \cdot K}$$

Acum puteți lansa programul *L2_Stabil.m*.

```
% Consideram o valoare K=0.2 și investigam radacinile numitorului.
%
clear;
echo on;
%-----
K=0.2;
num=[K 4*K];
den=[1 1.9 5.1 6.2 2+K 4*K];
G=tf(num,den);
x=roots(den);
y=isstable(G)
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% Consideram o valoarea K=2 si investigam radacinile numitorului.  
%  
clear;  
echo on;  
K=2;  
num=[K 4*K];  
den=[1 1.9 5.1 6.2 2+K 4*K];  
G=tf(num,den)  
x=roots(den);  
y=isstable(G)  
%  
% Observam ca sistemul este stabil pentru K=0.2 si instabil pentru K=2.  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Vom incerca sa vedem cum se modifica radacinile pentru  
% un interval de variație a lui K.  
%  
% Vom scrie un program capabil sa calculeze partea reala a radacinilor.  
%  
% In majoritatea sistemelor,  
% instabilitatea se produce la valori mari ale lui K.  
%  
% Observati urmatoarele rezultate si determinati domeniul de variație  
% a lui K pentru care avem stabilitate.  
%  
% Atentie - Vor urma 30 de grupuri de rezultate.  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
echo off;  
for K=0:0.1:3  
    clear x,y;  
    num=[K 4*K];  
    den=[1 1.9 5.1 6.2 2+K 4*K];  
    G=tf(num,den);  
    K  
    x=roots(den)  
    y=isstable(G)  
end  
%
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

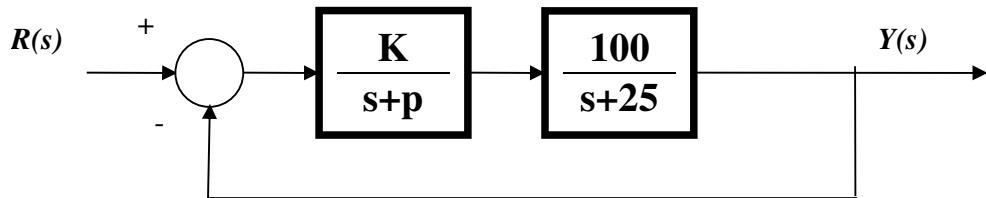
6. După execuția programului *L2_Stabil.m*, răspundeți la următoarele întrebări:
- q) De la ce valoare a lui **K** sistemul devine instabil?
 - r) Cât sunt rădăcinile polinomului caracteristic (a numitorului funcției de transfer în buclă închisă) pentru acest caz? Comparați rădăcinile de la ultima valoare a lui **K** care produce stabilitate și de la prima ce conduce la instabilitate.

- s) Determinați răspunsurile la semnal treaptă și impuls pentru un sistem în buclă închisă determinat pentru $K=0.5 \cdot K_{critic}$ (valoarea de tranziție între buclă închisă și buclă deschisă).

7. Mini-proiect

Vom considera următoarea problemă de proiectare:

Se consideră sistemul cu reacție unitară reprezentat în figura următoare:



Să se determine câștigul K și locația polului p , astfel încât sistemul în buclă închisă din figură să prezinte o suprareglare de 25% și un timp de stabilizare la 1% sub 0.1 secunde.
 Verificați proiectarea în MATLAB.

Sugestii pentru rezolvare:

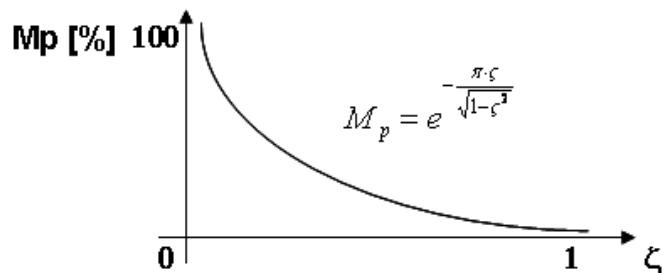
Puteți utiliza ecuațiile de legătură între funcția de transfer de ordinul doi și răspunsul la semnal treaptă.

- Notăm rădăcinile cu: $s = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$

- Funcția de transfer în format general $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta \cdot \omega_n)^2 + \omega_n^2 \cdot (1 - \zeta^2)}$
 - Prin echivalare, obținem $\sigma = \zeta \cdot \omega_n$ $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$
 - Ecuațiile de proiectare (date aici fără demonstrație detaliată):

$$\begin{aligned} \omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} \\ \zeta &\geq \zeta(M_p) \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{t_s} \end{aligned}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



La $M_p=25\%$, se citește de pe grafic o valoare a amortizării $\zeta = 0.4$.

La $t_s=0.1$ sec $\Rightarrow \sigma > 46$. $\Rightarrow \omega_n = \sigma/\zeta = 115$.

Scrieti $H(s)$ dedus din datele de proiectare (reprezentat hașurat) și echivalați cu sistemul dat în figura din enunțul problemei, după aplicarea reacției unitare. Tineți cont că datele de proiectare pentru răspuns tranzistoriu sunt independente de câștigul sistemului.

Nu uitați să verificați rezultatele în MATLAB. Ajustați proiectarea, dacă este nevoie, pentru obținerea rezultatelor dorite.

LABORATORUL #3 COMPENSAREA PID.

1. Scopul laboratorului.
2. Efectul unor termeni P, I, D asupra unor sisteme în buclă închisă.
3. Utilizarea unei interfețe MATLAB GUI pentru proiectarea PID
4. Procedeul Ziegler-Nichols de proiectare pe baza unor experimente.
5. Conversia în digital, pentru implementarea legii de control pe un microcontroler.
6. Mini-proiect.

1. Scopul laboratorului.

Vom studia efectul diversilor termenii P, PI, PD, PID asupra sistemelor în buclă închisă. În acest scop vom lua trei exemple de sisteme dinamice asupra cărora vom aplica astfel de legi de control, fără a avea valorile coeficienților din legea de reglaj optimizate în prealabil.

Apoi, vom utiliza programul de interfață GUI din MATLAB, pentru acordarea regulatoarelor PID considerate ca exemple. Vom utiliza MATLAB și pentru a imita procesul de acordare experimentală bazat pe metoda Ziegler-Nichols de acordare pe baza sensibilității (limita de instabilitate).

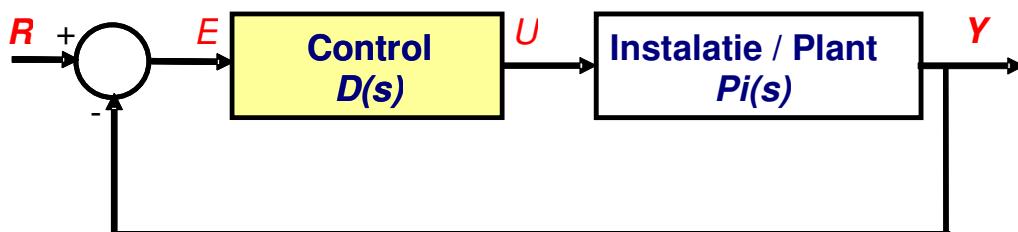
In final, vom utiliza MATLAB pentru obținerea legii de control digitale ce urmează să fie implementată pe microcontroler. Vom observa că această conversie nu este unică și vom încerca să reținem efectul fiecărei metode posibile de conversie analog-digital (din model Laplace „s” în model cu eșantioane la momente $t[kJ]$). Vom vizualiza efectul acestor conversii în SIMULINK, unde vom avea și o confirmare a programului ce urmează să fie scris într-un microcontroler.

Deși ne vom referi la expresii Laplace pentru legile de control, de fapt proiectarea se face direct în domeniul timp, unde observăm efectul diferențelor valori ale coeficienților proporțional-integrativ-derivativ. Aceasta este deosebit de laboratoarele următoare (metoda locului rădăcinilor, sau metoda proiectării în frecvență), la care considerăm doar reprezentarea în domeniul s.

2. Efectul termenilor P, I, D asupra unor sisteme în buclă închisă.

Vom considera 3 sisteme dinamice, ca exemple pentru câteva clase mai importante de sisteme:

$$P_1(s) = \frac{5}{s+15} \quad P_2(s) = \frac{30}{s^2 + 2 \cdot s + 10} \quad P_3(s) = \frac{1}{s^3 + 2.414 \cdot s^2 + 2.414 \cdot s + 1}$$



Pentru fiecare astfel de sistem, vom aplica succesiv control cu o lege de compensare P, PI, PD, sau PID. Legea generală de control poate fi scrisă într-o formă standard (clasică):

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1} = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d \cdot s}{\frac{s}{\beta} + 1}$$

sau într-o formă paralelă:

$$C(s) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{1}{s} + \frac{T_d \cdot s}{N \cdot s + 1} \right)$$

Ambele forme sunt echivalente. Exprimarea cu constante de timp (T_i, T_d) are o semnificație istorică și un sens mai practic. T_i poate fi considerată ca o „constantă de timp de resetare” („reset rate”), iar T_d ca o „constantă de timp de derivare” („derivative rate”). Multi tehnicieni fac setarea coeficientilor legilor de control din familia PID pe baza acestui concept de câștig și constantă de timp, care este mai aproape de un sens fizic.

Controlul proporțional este ușor de înțeles împreună cu principiul controlului cu reacție. Controlul de tip PI are avantajul că elimină eroarea staționară. Dacă sistemul ar avea eroare staționară, această eroare ar fi integrată în controlul PI și ieșirea controlului ar continua să se schimbe în direcția scăderii erorii staționare. În ciuda acestui avantaj, controlul PI încetinește răspunsul sistemului. Controlul PD are rolul de a răspunde mai rapid la orice schimbare a sistemului. Componenta derivativă acționează ca un impuls (sau imbold) pentru a accelera operarea sistemului. Din motive practice, nu se poate implementa componenta derivativă direct, și se consideră o lege P-D echivalentă, de tipul:

$$C(s) = \frac{K_p \cdot \left(\frac{s}{\beta} + 1 \right) + K_d \cdot s}{\left(\frac{s}{\beta} + 1 \right)}$$

unde β este foarte mare (100 în exemplele noastre).

Vom selecta doar un număr limitat de valori pentru fiecare caz, cu scopul evaluării clare a sensului variației fiecărui coeficient. Trebuie să fim capabili să răspundem la întrebări de genul „*Ce se întâmplă dacă creștem k_p la un control proporțional pentru un sistem de ordinul întâi?*”

Programul următor are următoarele date de test:

- Control Proporțional

$$Test_1: K_{p1} = 0.1 \quad K_{i1} = 0 \quad K_{d1} = 0$$

$$Test_2: K_{p2} = 1.0 \quad K_{i2} = 0 \quad K_{d2} = 0$$

$$Test_3: K_{p3} = 10 \quad K_{i3} = 0 \quad K_{d3} = 0$$

$$Test_4: \quad K_{p4} = 100 \quad K_{i3} = 0 \quad K_{d3} = 0$$

- Control PI

$$Test_1: K_{p2} = 1.0 \quad K_{i1} = 0.1 \quad K_{d1} = 0$$

$$Test_2: K_{p2} = 1.0 \quad K_{i2} = 1.0 \quad K_{d2} = 0$$

$$Test_3: K_{p1} = 0.1 \quad K_{i3} = 2.0 \quad K_{d3} = 0$$

- Control PD
 $Test_1: K_{p2} = 1.0 \quad K_{i1} = 0 \quad K_{d1} = 0.1$
 $Test_2: K_{p2} = 1.0 \quad K_{i2} = 0 \quad K_{d2} = 0.5$
 $Test_3: K_{p1} = 1.0 \quad K_{i3} = 0 \quad K_{d3} = 2.0$
- Control PID
 $Test_1 \quad K_p = 3.0 \quad K_i = 1.0 \quad K_d = 2.0$

Acum puteți lansa programul *L3_Intro.m*.

```

clear;
echo on
%
% Vom ilustra grafic efectul compensarii de tip P, PI, PD, PID
% Vom considera o structura in bucla inchisa, cu reactie unitara
%
%          Y      |      |      |      error      ref.
% <-----o----| instal |<----| C (s) |<----- (+)<-----
%           |      |      |      |      ^ -       |
%           |      |      |      |      |       |
%           |      |      |      |      |       |
%
% Compensarea C(s) se proiecteaza astfel incat iesirea sistemului sa aiba
% o valoare apropiata de cea a intrarii.
% Functiile de transfer considerate pentru compensare sunt:
%
%   C1(s) = Kp          (P)
%   C2(s) = Kp + Ki/s    (PI)
%   C3(s) = Kp + Kd*s/(s/beta + 1) (PD)
%   C4(s) = Kp + Ki/s + Kd*s/(s/beta + 1) (PID)
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Vom exemplifica proiectarea acestor retele de compensare,
% pentru 3 exemple:
%   P1(s) = A/(s+B)
%   P2(s) = C/(S^2 + 2*z*wn*s + wn^2)
%   P3(s) = 1/((s + 1)(s^2 + 1.4142*s + 1))
%
%
% Proiectarea acestor retele de compensare in sisteme de control, se
% bazeaza pe incercari si depind de simtul sistemului dezvoltat de inginer
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
num = [0 5];
den = [1 15];
P1 = tf(num,den)
num = [0 0 90];
den = [1 2 100];

```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
P2 = tf(num,den)
P3 = (tf(1,[1 1]))*(tf(1,[1 sqrt(2) 1]))
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%-----
% Vom atribui diferite valori coeficientilor din legea de compensare
% si vom observa efectul lor in raspunsul la semnal treapta.
%
% Sa retinem parametrii:
% P
Kp1 = 0.1;
Kp2 = 1.0;
Kp3 = 10.0;
Kp4 =100.0;
% I
Ki1 = 0.1;
Ki2 = 1.0;
Ki3 = 2.0;
% D
Kd1 = 0.1;
Kd2 = 0.5;
Kd3 = 2.0;
beta = 100;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
echo off;
subplot(3,1,1);
step(P1);
title('Raspunsul sistemului P1 in bucla deschisa');
subplot(3,1,2);
step(P2);
title('Raspunsul sistemului P2 in bucla deschisa');
subplot(3,1,3);
step(P3);
title('Raspunsul sistemului P3 in bucla deschisa');
echo on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Ne fixam ca obiectiv sa imbunatatim fiecare dintre cele 3 raspunsuri,
% fara a specifica cerinte numerice de performanta.
%
%
% Ne dorim sa avem raspuns cat mai rapid, cu suprareglarea
% mica, stabilizarea rapida, si fara eroare stationara.
%
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% CONTROL PROPORTIONAL
% Kp1, Kp2, Kp3 & Kp4.
figure;
echo off;
CL1=feedback(Kp1*P1, 1);
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
CL2=feedback(Kp2*P1, 1);
CL3=feedback(Kp3*P1, 1);
CL4=feedback(Kp4*P1, 1);
subplot(3,1,1);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
step(CL4); hold on;
legend('kp=0.1','kp=1.0','kp=10','kp=100');
title('Raspunsul sistemului P1 in bucla inchisa prin kp');
%
CL1=feedback(Kp1*P2, 1);
CL2=feedback(Kp2*P2, 1);
CL3=feedback(Kp3*P2, 1);
CL4=feedback(Kp4*P2, 1);
subplot(3,1,2);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
step(CL4); hold on;
legend('kp=0.1','kp=1.0','kp=10','kp=100');
title('Raspunsul sistemului P2 in bucla inchisa prin kp');
%
CL1=feedback(Kp1*P3, 1);
CL2=feedback(Kp2*P3, 1);
CL3=feedback(Kp3*P3, 1);
CL4=feedback(Kp4*P3, 1);
subplot(3,1,3);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
step(CL4); hold on;
legend('kp=0.1','kp=1.0','kp=10','kp=100');
title('Raspunsul sistemului P3 in bucla inchisa prin kp');
echo on;
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
% CONTROL PROPORTIONAL-INTEGRAL
% [Kp2 Ki1], [Kp2 Ki2], [Kp1 Ki3].
echo off;
figure;
CC1=tf([Kp2 Ki1],[1 0]);
CC2=tf([Kp2 Ki2],[1 0]);
CC3=tf([Kp1 Ki3],[1 0]);
%
CL1=feedback(CC1*P1, 1);
CL2=feedback(CC2*P1, 1);
CL3=feedback(CC3*P1, 1);
subplot(3,1,1);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
axis([0 50 0 2]);
legend('kp=1.0&ki=0.1','kp=1.0&ki=1.0','kp=0.1&ki=2.0');
title('Raspunsul sistemului P1 in bucla inchisa prin PI');
%
CL1=feedback(CC1*P2, 1);
CL2=feedback(CC2*P2, 1);
CL3=feedback(CC3*P2, 1);
subplot(3,1,2);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
axis([0 50 0 2]);
legend('kp=1.0&ki=0.1','kp=1.0&ki=1.0','kp=0.1&ki=2.0');
title('Raspunsul sistemului P2 in bucla inchisa prin PI');
%
CL1=feedback(CC1*P3, 1);
CL2=feedback(CC2*P3, 1);
CL3=feedback(CC3*P3, 1);
subplot(3,1,3);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
axis([0 50 0 2]);
legend('kp=1.0&ki=0.1','kp=1.0&ki=1.0');
title('Raspunsul sistemului P3 in bucla inchisa prin PI');
echo on;
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----%
% CONTROL PROPORTIONAL-DERIVATIV
echo off;
figure;
CC1=Kp2+tf([Kd1,0],[1/beta,1]);
CC2=Kp2+tf([Kd2,0],[1/beta,1]);
CC3=Kp2+tf([Kd3,0],[1/beta,1]);
CC4=5+tf([Kd3,0],[1/beta,1]);
%
CL1=feedback(CC1*P1, 1);
CL2=feedback(CC2*P1, 1);
CL3=feedback(CC3*P1, 1);
CL4=feedback(CC4*P1, 1);
subplot(3,1,1);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
step(CL4); hold on;
legend('kp=1.0&kd=0.1','kp=1.0&kd=0.5','kp=1.0&kd=2.0','kp=5.0&kd=2.0');
title('Raspunsul sistemului P1 in bucla inchisa prin PD');
%
CL1=feedback(CC1*P2, 1);
CL2=feedback(CC2*P2, 1);
CL3=feedback(CC3*P2, 1);
CL4=feedback(CC4*P2, 1);
subplot(3,1,2);
```

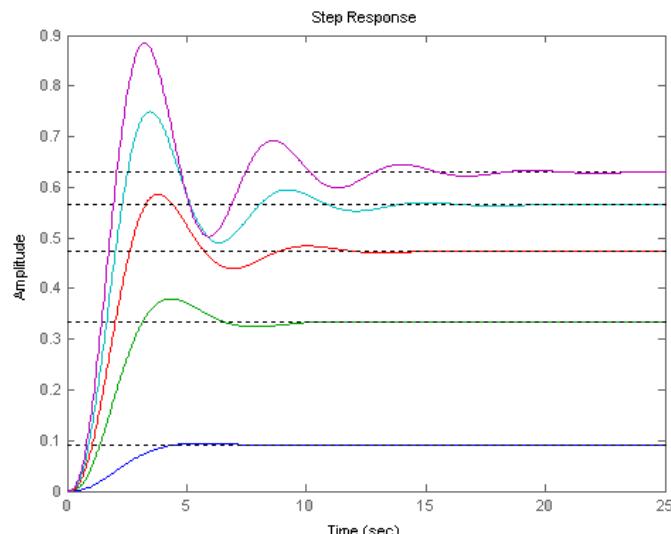
**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
step(CL4); hold on;
legend('kp=1.0&kd=0.1','kp=1.0&kd=0.5','kp=1.0&kd=2.0','kp=5.0&kd=2.0');
title('Raspunsul sistemului P2 in bucla inchisa prin PD');
%
CL1=feedback(CC1*P3, 1);
CL2=feedback(CC2*P3, 1);
CL3=feedback(CC3*P3, 1);
CL3=feedback(CC4*P3, 1);
subplot(3,1,3);
step(CL1); hold on;
step(CL2); hold on;
step(CL3); hold on;
step(CL4); hold on;
legend('kp=1.0&kd=0.1','kp=1.0&kd=0.5','kp=1.0&kd=2.0','kp=5.0&kd=2.0');
title('Raspunsul sistemului P3 in bucla inchisa prin PD');
echo on;
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
% CONTROL PROPORTIONAL-INTEGRATIV-DERIVATIV
echo off;
figure;
Kp=3;
CC1=tf([Kp Ki2],[1 0])+tf([Kd3,0],[1/beta,1]);
%
CL1=feedback(CC1*P1, 1);
subplot(3,1,1);
step(CL1); hold on;
legend('kp=3.0&ki=1.0&kd=2.0');
title('Raspunsul sistemului P1 in bucla inchisa prin PID');
%
CL1=feedback(CC1*P2, 1);
subplot(3,1,2);
step(CL1); hold on;
legend('kp=3.0&ki=1.0&kd=2.0');
title('Raspunsul sistemului P2 in bucla inchisa prin PID');
%
CL1=feedback(CC1*P3, 1);
subplot(3,1,3);
step(CL1); hold on;
legend('kp=3.0&ki=1.0&kd=2.0');
title('Raspunsul sistemului P3 in bucla inchisa prin PID');
%-----
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

Dupa execuția programului *L3_Intro.m*, răspundeți la următoarele întrebări.

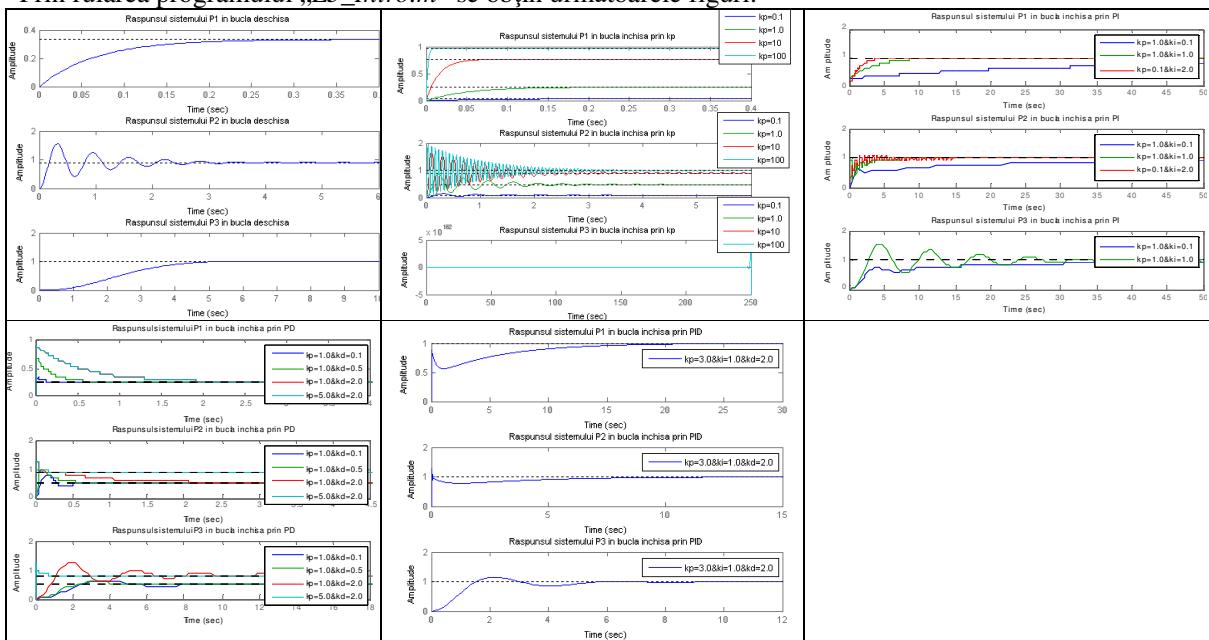
1. Funcția P1, control proporțional
 - a) Cum se modifică valoarea staționară după aplicarea unui semnal treaptă, în funcție de valoarea k_p ?
 - b) Cum putem caracteriza suprareglarea în funcție de valorile lui k_p ?
2. Funcția P2, control proporțional
 - a) Cum se modifică valoarea staționară după aplicarea unui semnal treaptă, în funcție de valoarea k_p ?
 - b) Cum putem caracteriza frecvența oscilațiilor în funcție de valorile lui k_p ?
 - c) Care este relația între suprareglare și k_p ?
3. Funcția P3, control proporțional
 - a) Cum puteți caracteriza răspunsul sistemului în acest caz?
 - b) Graficul prezentat în figură este dat pentru 4 valori ale lui K_p . Este posibil ca doar unele să conducă la sistem instabil. Figura următoare s-a obținut pentru $K_p=0.1, 0.5, 0.9, 1.3$ și respectiv 1.7. Această metodă de a utiliza încercări pentru valoarea lui K_p nu pare productivă. Cum altfel ați putea determina valoarea maximă a lui K_p pentru care încă mai avem stabilitate?



4. Funcția P1, control proporțional-integral
 - a) Cum se modifică valoarea staționară după aplicarea unui semnal treaptă, în funcție de valorile $k_p&k_i$?
 - b) Cum putem caracteriza timpul de creștere și timpul de răspuns (stabilizare) în comparație cu cele două cazuri precedente (buclă deschisă și control proporțional)?
5. Funcția P2, control proporțional-integral
 - a) Cum se modifică valoarea staționară după aplicarea unui semnal treaptă, în funcție de valorile $k_p&k_i$?
 - b) Cum putem caracteriza timpul de creștere și timpul de răspuns (stabilizare) în comparație cu cele două cazuri precedente (buclă deschisă și control proporțional)?
 - c) Cum se modifică frecvența micilor oscilații în funcție de valorile $k_p&k_i$? Cine dă această frecvență?
- In concluzie încă mai avem oscilații.
6. Funcția P3, control proporțional-integral

- a) Cum se modifică valoarea staționară după aplicarea unui semnal treaptă, în funcție de valorile $kp\&ki$?
 b) Ce credeți că se va întâmpla dacă creștem ki în continuare?
In concluzie încă mai avem posibilitatea de instabilitate.
7. Funcția P1, control proporțional-derivativ
- a) Cum se modifică valoarea staționară după aplicarea unui semnal treaptă, în funcție de valorile $kp\&kd$?
 b) Pentru ce valori ale lui kd , avem un imbold inițial mai mare (o suprereglerare mai mare în răspunsul sistemului la semnal treaptă)?
8. Funcția P2, control proporțional-derivativ
- a) Cum se modifică valoarea staționară după aplicarea unui semnal treaptă, în funcție de valorile $kp\&kd$?
 b) Pentru ce valori ale lui kd , avem un imbold inițial mai mare (o suprereglerare mai mare în răspunsul sistemului la semnal treaptă)?
 c) Ce se întâmplă cu oscilațiile pe care le-am vazut în cazul sistemului în buclă deschisă și în cazurile controlului cu lege P sau PI? Pentru ce valori ale lui kd dispar oscilațiile?
9. Funcția P3, control proporțional-derivativ
- a) Cum ați caracterizat efectul componentei derivative în acest caz? Este impulsul inițial tot așa de evident ca în cazurile precedente (celelalte două funcții de transfer)?
 b) Pentru ce valori ale lui kd avem răspuns mai rapid?
 c) Observați cazul $kp=5$ care era instabil la controlul simplu proporțional și devine stabil prin adăugarea componentei kd .
10. Analizați toate funcțiile cu control PID, utilizând coeficienții $kp=3$, $ki=1$, $kd=2$.
 Bineînțeles că aceeași lege de control nu poate oferi răspunsuri optimale pentru orice funcție de transfer în buclă deschisă. Optimizarea controlului pentru fiecare caz în parte este posibilă.
 a) Cum ați compara aceste răspunsuri la semnal treaptă cu cele ale sistemului în buclă deschisă (sistemul inițial)?

Prin rularea programului „L3_Intro.m” se obțin următoarele figuri.



3. Utilizarea unei interfețe MATLAB GUI pentru proiectarea PID

De la consola MATLAB introduceți comanda « *pidtool* », după ce în prealabil ați rulat programul *L5_intro.m*, pentru a avea funcțiile de transfer P1, P2, și P3, în mediul de lucru MATLAB. Sau re scrieți aceste funcții în MATLAB.

Încărcați pe rând funcțiile P1, P2, și P3, și vizualizați efectul utilizării diferitelor câștiguri pentru legea de control, cu scopul familiarizării cu acest « *pidtool* ». Încărcarea fiecărei funcții de transfer se face din colțul stânga-sus, prin funcția « *import* ». Selectați:

- Design Mode = Basic
- Form = Standard
- Type = P

Selectați „*show parameters*” în dreapta ecranului pentru a vedea câștigurile legilor de control PID.

Pentru selecția graficului urmăriți tabelul de mai jos. Practic, veți selecta « *reference tracking* » pentru a vedea răspunsul la semnal treaptă a funcției de transfer în buclă închisă. Observați că toate aceste rezultate de proiectare sunt arătate pentru timpul de răspuns ca un criteriu optimal.

Dacă schimbați

• Design Mode = Extended, proiectarea se va face prin utilizarea directă a lărgimii de banda (BW) și a fazei ca cerințe de proiectare. Vom analiza acest caz în detaliu în săptămâna a 5-a.

Alte semnale ce pot fi analizate sunt:

Response	Plotted System
Reference tracking	$\frac{C * sys}{1 + C * sys}$ (from r to y)
Controller effort	$\frac{C}{1 + C * sys}$ (from r to u)
Input disturbance Rejection	$\frac{sys}{1 + C * sys}$ (from d_1 to y)
Output disturbance Rejection	$\frac{1}{1 + C * sys}$ (from d_2 to y)
Open-loop	$C * sys$
Plant	sys

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

11. Încercați diferite combinații de control pentru cele trei funcții de transfer. Încercați să aveți în vedere următoarele întrebări:

- a) Este vreun caz în care sistemul bazat pe P1 devine instabil, atunci când este controlat cu control de tip P sau PI? În acest scop încercați să studiați timpul de creștere. Acest lucru va crește cerințele pentru lărgimea de bandă și va determina o creștere a coeficienților *kp* sau *ki*. Coeficientul *ki* nu este dat direct în legea de control, noi definind termenul integrativ prin *I/Ti*. Deci *Ti* ar putea să scadă pentru creșterea lărgimii de bandă.
- b) În cazul sistemului în buclă deschisă P2, comentați asupra stabilității sistemului în buclă închisă dacă avem control de tip P sau de tip PI.

4. Procedeul Ziegler-Nichols de proiectare pe baza unor experimente.

4.1 Sisteme cu model liniar și invariabil în timp

Vom exemplifica procedeele de acordare pe bază de experimente Ziegler-Nichols. Aceste procedee se folosesc în cazurile în care avem instalația ca hardware, cu modelul nedefinit, sau fără posibilitatea de a face analiza pe calculator. Teoria sistemelor liniare și invariabile în timp ne sugerează utilizarea acestei metode la sisteme în buclă deschisă ce sunt caracterizate de o funcție de transfer de ordin mare, atunci când corespondența dintre răspunsul în timp și funcția de transfer studiată pentru funcțiile de ordinul întâi și doi nu este direct aplicabilă, iar aceste sisteme de ordin mare pot prezenta instabilitate. Pentru sistemele simple, am putea aplica un semnal treaptă și identifica funcția de transfer din forma de undă obținută în domeniul timp (t_r, M_p, t_s => ζ, ω_n).

In fine, metodele Ziegler-Nichols propun o optimizare capabilă să ofere o reducere a efectului perturbațiilor, care poate rezulta într-o suprareglare excesivă la urmărirea referinței de intrare. De obicei, aplicarea directă a metodei conduce la o suprareglare în jurul la 25%. Din acest motiv, în multe cazuri practice, câștigurile derivate prin această metodă sunt micșorate înainte de a fi folosite.

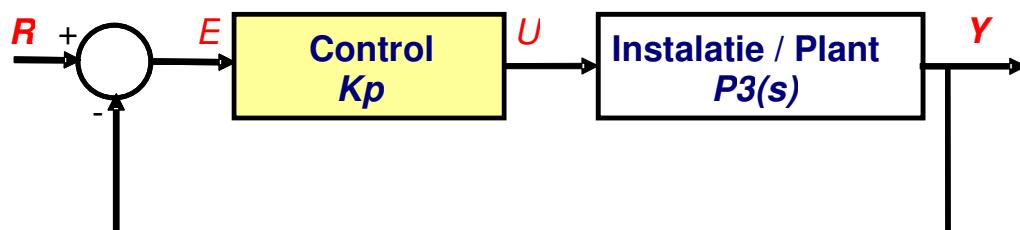
Vom considera în laborator metoda a două Ziegler-Nichols, denumită **metoda sensibilității ultimative**, aplicată funcției de transfer P3. Acest procedeu se bazează pe determinarea limitei de stabilitate pentru control proporțional, prin observarea ieșirii sistemului la variația parametrilor legii de control.

Vom asuma că, *de fapt*, nu cunoaștem funcția de transfer, și vom emula un test experimental.

Scriem secvența de program MATLAB:

```
P3 = (tf(1,[1 1]))*(tf(1,[1 sqrt(2) 1]));
for K=1:2:7, CL=feedback(P3,K); stepplot(CL,20); hold on; end
legend('1','3','5','7');
```

Conform metodei Ziegler-Nichols, ar trebui să creștem coeficientul ***kp*** până ce sistemul este la limita între stabilitate și instabilitate, cu oscilații. Oscilații în formă de undă a ieșirii apar datorită termenului ***1+kpP3(s)*** de la numitorul funcției de transfer în buclă închisă, și sunt independente de valoarea referinței constante aplicate la intrare. Va exista o valoare ***kp*** pentru care funcționarea sistemului va fi la limita de instabilitate, cu o operație cu oscilații întreținute în semnalul de ieșire. Chiar dacă procesul de căutare ia mult timp, este de ajuns să găsiți valorile ***kp*** pentru care oscilațiile sunt bine conturate (sistem stabil, aproape de instabilitate).



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

12. Rulați programul sugerat și determinați valoarea lui ***kp*** pentru limita aproximativă de instabilitate. Notați această valoare cu ***Ku***.
13. Măsurăți perioada oscilațiilor din semnalul de ieșire, și notați-o cu ***Pu***.
14. Calculați un set de valori de control pe baza tabelului dat (legea extinsă de control).
15. Scrieți un program MATLAB pentru a vizualiza rezultatele utilizării acestor valori în sistemul în buclă inchisă.

Control	Câștig optimal
P	$K_p = 0.5 \cdot K_u$
PI	$\begin{cases} K_p = 0.45 \cdot K \\ T_I = \frac{P_u}{1.2} \end{cases}$
PID	$\begin{cases} K_p = 0.6 \cdot K_u \\ T_I = \frac{P_u}{2} \\ T_D = \frac{P_u}{8} \end{cases}$

4.2 Observații asupra unor sisteme neliniare

Metoda Ziegler-Nichols se poate aplica sistemelor care au o funcție de transfer ce produce instabilitate pentru anumite valori ale lui k_p . În contextul sistemelor liniare și invariabile în timp, acest lucru este garantat pentru funcții de transfer cu $n-m>2$ (unde n este gradul polinomului de la numitor, iar m este gradul polinomului de la numărătorul funcției de transfer), deci de cel puțin ordinul 3. Alte funcții de transfer pot de asemenea produce instabilitate.

Majoritatea cazurilor de implementare reală prezintă neliniaritate determinată de limitarea operației elementului de acționare ce aplică ieșirea legii de control la sistemul controlat sau de operarea instalației la valori mari ale mărimii de acționare. În astfel de cazuri particulare, există posibilitatea de a observa instabilitatea chiar dacă modelul considerat inițial era de ordin redus și stabil în teorie pentru orice k_p .

5. Conversia în digital, pentru implementarea legii de control pe un microcontroler

Toate legile de control P, PI, PD, PID considerate anterior, au fost analizate cu modele analogice, prin intermediul funcției de transfer Laplace. Ne propunem acum să găsim un echivalent digital pentru fiecare caz și să parcurgem pașii necesari implementării acestei legi de control pe o structură digitală de tip microcontroler. Vom lucra cu funcția de transfer P3, cu rezultatele pe care le-am obținut la primă analiză a funcției P3 ($k_p=2$, $k_i=1$, $k_d=3$). Dacă s-ar dori implementarea unui control PI, aceasta s-ar face prin eliminarea termenului D, și respectarea noilor valori a coeficientilor corespunzători controlului PI.

Pentru găsirea echivalentului discret al legii de control în format Laplace (s), trebuie să selectăm o valoare pentru perioada de eşantionare. O regulă empirică de proiectare spune că perioada semnalului de eşantionare trebuie aleasă astfel încât pe durata timpului de creștere al răspunsului la semnal treaptă (*rising time*), să avem cel puțin 6 eşantioane ale semnalului de intrare (alta sugestie este de a considera 5-10 esantioane). Timpul de creștere se definește ca intervalul de timp parcurs între 0.1 și 0.9 din nivelul final al semnalului de ieșire. În cazuri speciale, prin metode specifice controlului digital, se poate compensa efectul eşantionării, și permite perioadei de eşantionare să fie doar de 2-3 ori mai mică decât timpul de creștere. Astfel de metode sunt în afara scopului acestui laborator.

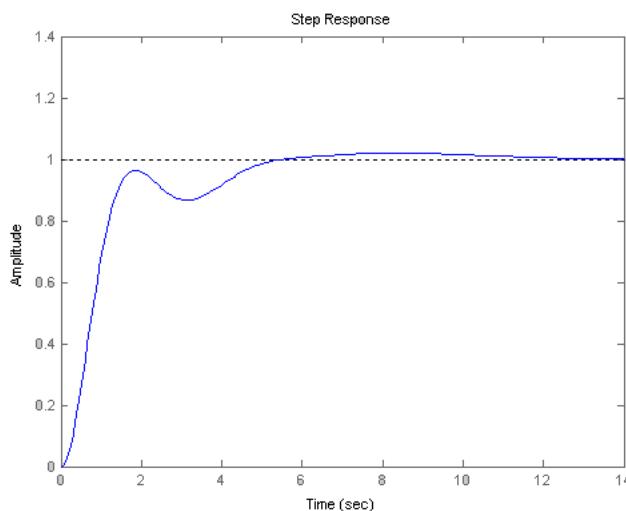
Vom considera aici 6 eşantioane. Din răspunsul la semnal treaptă (obținut cu programul MATLAB dat mai jos) și aplicat sistemului în buclă deschisă P3, observăm un timp de creștere (timp de răspuns) de aproximativ 3 secunde. Alegem timpul de eşantionare $ts=0.5$ sec.

```
clear;
Kp=2 ; Ki=1 ; Kd=3; beta=100;
Ts=0.5;
P3 = (tf(1,[ 1 ]))*(tf(1,[ 1 sqrt(2) 1 ]));
CC=tf([Kp Ki],[1 0])+tf([Kd,0],[1/beta,1]);
CCd=c2d(CC,Ts,'tustin');
CL=feedback(CC*P3, 1);
step(CL);
```

Se folosește echivalența dată de formula Tustin

$$s \leftrightarrow \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

Execuția acestei secvențe de program MATLAB produce figura următoare:



Funcția de transfer **CCd** a legii de control, exprimată în transformata z prin instrucțiunea de conversie **c2d**, cu metoda Tustin va fi:

$$\frac{13.79 z^2 - 22.75 z + 9.923}{z^2 - 0.07692 z - 0.9231}$$

$$z^2 - 0.07692 z - 0.9231$$

iar prin metoda „*matched pole-zeros*”

$$\frac{7.153 z^2 - 11.78 z + 5.128}{z^2 - z + 1.929e-022}$$

$$z^2 - z + 1.929e-022$$

Legea de control va utiliza eșantioanele calculate ale erorii marimii de controlat ($e[k-2]$, $e[k-1]$, $e[k]$), iar ca ieșire va avea eșantionul următor al mărimii de control ($y[k]$). Instrucțiunile „**c2d**” din MATLAB oferă o conversie a funcției de transfer din Laplace în domeniul z . Această conversie trebuie urmată de o scriere a legii de control ca o ecuație cu diferențe finite în eșantioanele k , interpretând z ca un operator de întârziere („*shift*”). Legea de control scrisă cu eșantioane la momente k de timp poate fi scrisă direct în programul microcontrolerului.

In cazul nostru, obținem legea de control cu diferențe finite pentru metoda Tustin:

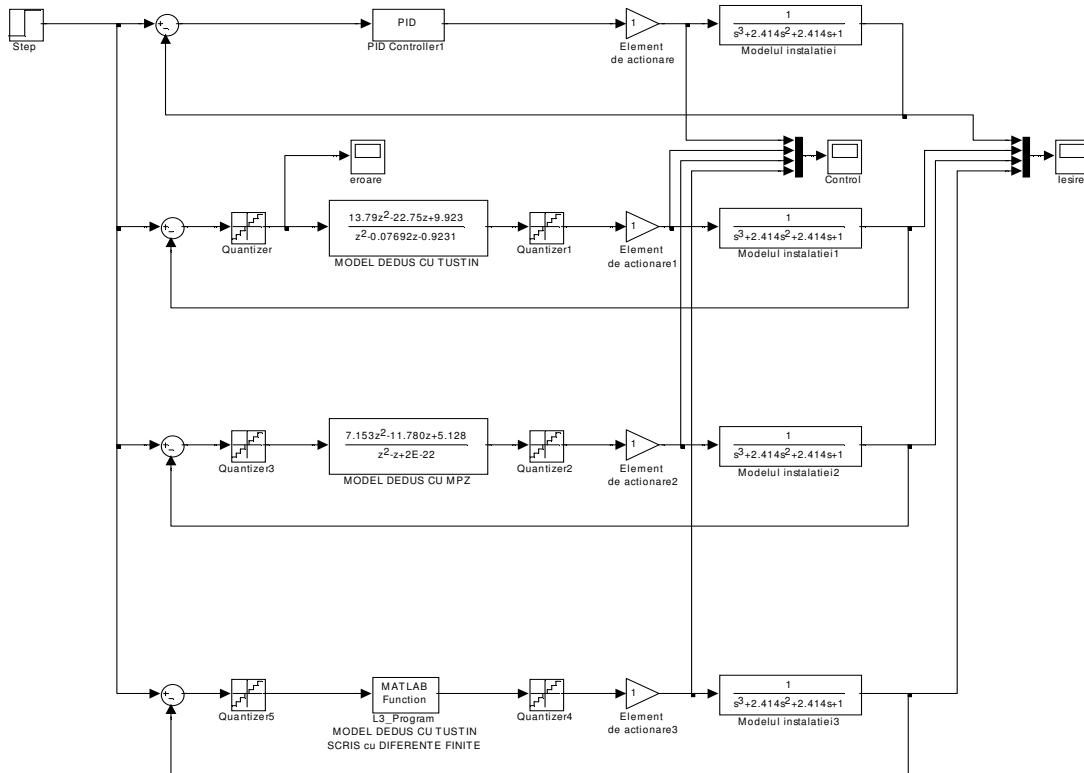
Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

$$y[k] = 0.07672 \cdot y[k-1] + 0.92310 \cdot y[k-2] + 13.790 \cdot e[k] - 22.750 \cdot e[k-1] + 9.923 \cdot e[k-2]$$

Sau pentru metoda „matched pole-zeros”

$$y[k] = y[k-1] + 7.153 \cdot e[k] - 11.780 \cdot e[k-1] + 5.128 \cdot e[k-2]$$

Se observă că cele două legi de control sunt diferite.

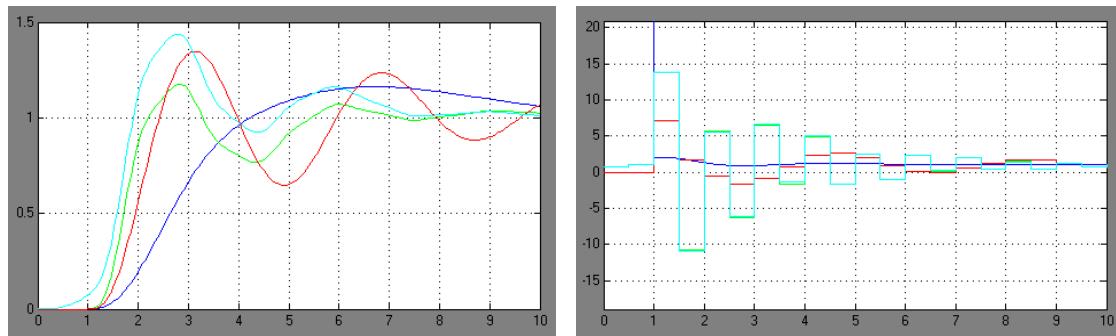


In fine, mediul MATLAB nu oferă direct o posibilitate de simulare a efectului acestei legi de control scrisă în eșanțioane k ale mărimilor de intrare-ieșire sau de analiză mixtă în digital și analog. Din fericire, SIMULINK are capabilitatea de a analiza sisteme digitale (transformata z) și analogice (transformata Laplace) în aceeași simulare. Vom utiliza SIMULINK pentru acest tip de investigație.

Vom rula programul SIMULINK, după ce în prealabil am introdus parametrii simulării în mediul MATLAB:

L3_Initial;
simulink;

Vom încărca modelul „L3_c2d” în mediul **simulink**. Similar, putem rula L3_c2d direct la consola MATLAB. Vom obține rezultatele din figurile următoare:



Pentru a verifica programul scris în limbaj MATLAB sau în limbaj C, ar trebui să folosim un model bazat pe „*s*-function” în MATLAB. În plus, programul implementat pe o platformă de tip microcontroler trebuie să conțină protecția *anti-wind-up* și limitarea domeniului de variație. Există câteva platforme de control în timp real care se cuplează cu MATLAB-SIMULINK, pentru a rula programul direct pe microcontroler. Oricum, codul verificat cu ecuația de control poate fi copiat direct în programul din interiorul microcontrolerului. Același procedeu este valabil pentru orice lege de compensare vom învăța în săptămânilile viitoare.

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

16. Identificați formele de undă din figurile precedente. Scrieți în raportul de laborator la ce model din fișierul *simulink (L3_C2D)* corespunde fiecare formă de undă (sau culoare).
17. Repetați acest procedeu de scriere a unui program de control digital pentru funcția P3, considerând un timp de eşantionare de 5 ori mai rapid ($T_s=0.10\text{sec}$). Notați în referatul de laborator transformata z și scrieți legea de control cu diferențe finite (eșantioanele k).
18. Modificați programul MATLAB-SIMULINK pentru noua lege de control și vizualizați funcționarea prin simulare în MATLAB-SIMULINK.

	Rise Time	Overshoot	Settling Time	Steady State Error
<i>Kp crește</i>	<i>scade</i>	<i>crește</i>	<i>crește puțin</i>	<i>scade</i>
<i>Ki crește</i>	<i>scade puțin</i>	<i>crește</i>	<i>crește</i>	<i>eliminată</i>
<i>Kd crește</i>	<i>scade puțin</i>	<i>scade</i>	<i>scade</i>	<i>schimbare</i>

LABORATORUL #4

PROIECTAREA SISTEMELOR AUTOMATE DE CONTROL CU METODA LOCULUI RĂDĂCINILOR

1. Scopul laboratorului.
2. Metoda Evans de desenare a locului rădăcinilor.
3. Elemente de compensare: *lead, lag, notch*.
4. Exemplu de utilizare MATLAB pentru proiectarea cu ajutorul metodei locului rădăcinilor.
5. Mini-proiect 1.
6. Mini-proiect 2.

1. Scopul laboratorului.

Ne propunem să învățăm aspectele practice ale utilizării metodei locului rădăcinilor pentru proiectarea sistemelor automate de control. În acest scop, vom considera un model al instalației, liniar și invariabil în timp, reprezentat de o funcție de transfer Laplace. Pentru simplitate, vom considera funcția de transfer dată deja ca un raport de polinoame.

Pentru început, vom considera sistemul în buclă închisă depinzând de un parametru (**K**), iar ecuația caracteristică (din numitorul funcției de transfer în buclă închisă):

$$a(s) + K \cdot b(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot L(s) = 0$$

Reprezentarea grafică a tuturor rădăcinilor pentru variația lui **K** între 0 și infinit se numește **locul rădăcinilor**. Problema de proiectare se reduce la determinarea câștigului **K** pentru a obține o anumită locație dorită a polilor funcției de transfer în buclă inchisă.

Vom discuta diverse cazuri de compensare, apoi vom lua un exemplu pentru a exersa utilizarea instrucțiunilor MATLAB corespunzătoare locului rădăcinilor. Deoarece cunoștințele despre sisteme de control se bazează în mare măsură pe practică și exercițiu, vom considera două mini-proiecte care necesită scrierea programelor de proiectare în MATLAB. Laboratorul de săptămâna aceasta are un caracter mai aplicativ, permitându-vă exercitarea tuturor cunoștințelor dobândite până acum.

2. Metoda Evans de desenare a locului rădăcinilor.

Evans a propus câteva reguli pentru reprezentarea grafică a rădăcinilor. Detalii teoretice despre aplicarea metodei la desenarea manuală a locului rădăcinilor sunt prezentate la curs. Vom considera în laborator utilizarea MATLAB pentru desenarea locului. Fără demonstrație, regulile de desenare sunt:

Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv sau negativ

- **REGULA 1:** Cele n ramuri ale locului radacinilor pleaca intotdeauna din polii lui $L(s)$, iar m ramuri se termină în zerourile lui $L(s)$.
- **REGULA 2:** Toate ramurile locului radacinilor se situează pe axa reală, la stanga unui număr impar (**par**) de poli sau zero.
- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui s și K , $n-m$ ramuri ale locului sunt asymptote după unghiurile ϕ_l ce pleacă dintr-un punctul a de pe axa reală unde

$$\phi_l = 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$\alpha = \frac{n-m}{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^{n-m} z_i}$$

$$\phi_l = 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$\alpha = \frac{n-m}{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^{n-m} z_i}$$

- **REGULA 4 (consecinta a definitiiei):**

Unghiul de plecare a unei ramuri a locului dintr-un pol multiplu este dat de:

$$q \cdot \phi_{k,dep} = \sum_{i=1}^q \psi_i - \sum_{i=1}^q \phi_i - 180^\circ - 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$q \cdot \phi_{k,dep} = \sum_{i=1}^q \psi_i - \sum_{i=1}^q \phi_i - 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$q \cdot \psi_{k,dep} = \sum_{i=1}^q \phi_i - \sum_{i=1}^q \psi_i + 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$q \cdot \psi_{k,dep} = \sum_{i=1}^q \phi_i - \sum_{i=1}^q \psi_i + 360^\circ \cdot (l-1)$$

- **REGULA 5:** Locul radacinilor traversează axa imaginara în puncte unde criteriul Routh arată o tranziție de la radaciini în stanga planului complex către radaciini în partea dreapta a planului complex.

- **REGULA 6:** Locul va avea radaciini multiple în puncte de pe locul radacinilor unde

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0$$

$$\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{q}$$

Ramurile vor sosi într-un punct cu q radaciini la unghiuri separate de $\frac{360^\circ \cdot (l-1)}{q}$ și vor pleca cu aceeași separație între unghiuri.

3. Elemente de compensare: lead, lag, notch.

Proiectarea unei legi de compensare a unei instalații se face pe baza cerințelor referitoare la răspunsul staționar și dinamic. Obiectivul este acela de a rearanja polii sistemului în buclă închisă pentru a satisface anumite condiții de proiectare. De obicei, fiecare dintre polii ce trebuie mutați se adresează pe rând, prin aplicarea unor termeni în legea de control capabili să producă schimbarea dorită. În acest scop, trei legi de compensare s-au impus:

Compensarea cu avans de fază („lead compensation”)

$$D(s) = \frac{s+z}{s+p}, |z| < |p|$$

- 1) Aproximează o lege de control PD, cu avantaje în scăderea timpului de creștere și a suprareglării.
- 2) Efectul **zero**-ului din funcția de transfer a compensării cu avans de fază produce o deplasare a locului rădăcinilor către stânga, către regiuni mai stabile ale planului complex.
- 3) Alegerea valorilor pentru z și p se face empiric, prin încercări, și se bazează pe experiență.
- 4) De obicei, **zero**-ul se plasează în apropierea polului (sau polilor) din funcția de transfer în buclă închisă, asupra căror dorim să acționăm. Alegerea polului se face dintr-o serie de compromisuri, dar în general este mult la stânga **zero**-ului.
- 5) La analiza în frecvență a acestei metode de compensare, vom vedea că se adaugă fază la frecvențe imediat mai mari decât **zero**-ul introdus. În plus, amplificarea este redusă la frecvențe înalte.
- 6) Proiectarea se face din datele de proiectare pentru regimul dinamic al sistemului în buclă închisă.

Compensarea cu întârziere de fază („lag compensation”)

$$D(s) = \frac{s+z}{s+p}, |p| < |z|$$

- 1) Aproximează o lege de control PI, cu avantaje la îmbunătățirea performanțelor de regim staționar.
- 2) Are ca efect scăderea de fază la frecvențe înalte.

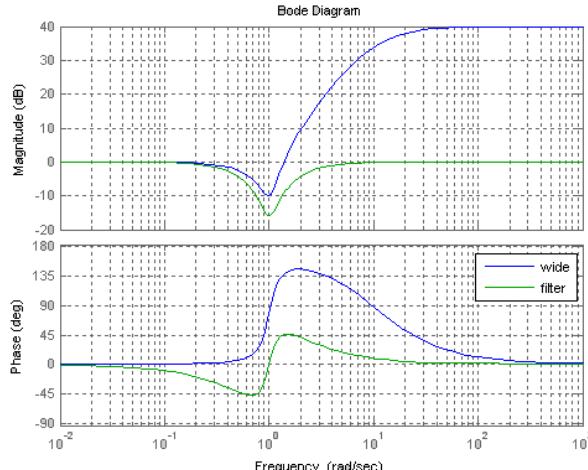
- 3) Proiectarea se face pentru a obține un anumit câștig (mai mare) la frecvență joasă, ce va influența eroarea staționară.

Compensarea notch

- 1) Se folosește pentru a obține stabilitate în sistemele cu amortizare redusă, și posibile oscilații.
- 2) Dacă se dorește deplasarea unor poli imaginari complex conjugați și apropiati de axa imaginară, la poziții mai îndepărtate de axa imaginară (la stânga), am putea folosi două compensări cu avans de fază.

$$D(s) = \frac{(s + z_{c1}) \cdot (s + z_{c2})}{(s + p)^2} = \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}{(s + p)^2}, |z| < |p|$$

- a. „*Două compensări*” pentru că avem efectul a doi poli.
- b. Efectul ar fi de a adăuga câte un *zero* lângă (sau pentru) fiecare pol.
- c. Adăugarea de fază se obține imediat după frecvența compensării ω_n .
- d. De obicei, se alege frecvența compensării notch ω_n la o valoare mai mică decât frecvența polilor rezonanți din funcția de transfer a instalației, pentru a se obține anularea oscilațiilor prin adăugare de fază la frecvența polilor rezonanți. O altă alternativă de proiectare este dată de urmărirea direcției de plecare a locului din polii rezonanți.
- e. Legea de compensare se poate modifica în cea a unui filtru **notch**, în care numitorul compensării are aceeași poli cu zero-urile, pentru a influența cât mai puțin restul sistemului.
- 3) Deși nu ne propunem analiza în frecvență a acestor metode, figura următoare ne-ar putea ajuta să înțelegem mai multe despre compensarea **notch**. Figura dă o comparație cu filtrul convențional **notch**.



4. Exemplu de utilizare MATLAB pentru proiectarea cu ajutorul metodei locului rădăcinilor.

Acum puteți lansa programul *L4_Intro.m*.

```
clear; clc;
echo on;
%
% Vom considera un sistem de ordinul doi
P1 = tf(1,[1,0.2,1])
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% Dorim reprezentarea in planul complex a tuturor radacinilor
% ecuatiei caracteristice 1+K*P1(s)=0, unde K este variabil pozitiv.
%
% In acest scop, vom folosi instructiunea rlocus(sys)
echo off;
rlocus(P1); % Deseneaza figura 1
axis([-8,2,-5,5]);
sgrid;
echo on;
%
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
% Vom observa raspunsul sistemului in bucla inchisa la semnal treapta
% pentru trei valori ale lui K (5, 10, 15)
%
echo off;
CL1=feedback(5*P1,1);
CL2=feedback(10*P1,1);
CL3=feedback(15*P1,1);
figure; step(CL1, CL2, CL3); % Deseneaza figura 2
legend('K=5','K=10','K=15');
echo on;
%
% Observam in 'Figure 2' ca raspunsul la semnal treapta este oscilant.
%
% Putem folosi reprezentarea locului radacinilor pentru a gasi un
% control mai bun decat cel proportional prin K (= 5,10, sau 15).
%
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
%
%
% Inainte de a descrie regulile de desenare a locului radacinilor, putem
% considera cateva remarci intuitive:
% - Daca adaugam un zero in functia de transfer, putem spera o deplasarea
% a locului radacinilor catre stanga.
% - Creste amortizarea in raspunsul la semnal treapta.
%
%
%
% Adaugarea unui zero (s=-1) ne obliga sa adaugam un pol (s=-10), pentru
% a respecta definitia unei functii de transfer corespunzatoare unui
% sistem real, acea de a avea n>=m (n=gradul numitorului, m=gradul
% numeratorului). Mai mult, vom introduce un castig egal cu raportul
% pol/zero, pentru a avea castig unitar la frecventa zero.
%
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
echo off;
figure;
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
D=10*tf([1 1],[1 10])
rlocus(D*P1); % deseneaza figura 3
axis([-11,2,-5,5]);
sgrid; hold on; rlocus(D*P1,3);
plot(rlocus(D*P1,[3]),'ks');
echo on;
%
% Se observa ca datorita existentei polului din legea de compensare,
% locul radacinilor plecand din cei doi poli ai functiei de transfer
% originale P1 se deplaseaza catre stanga.
%
% Fiecare punct de pe loc, reprezinta o posibila solutie pentru ecuatia
% caracteristica (care este data de expresia de la numitorul functiei
% de transfer in bucla inchisa), pentru un anumit K.
%
% De exemplu, pentru K = 3, am obtine radacinile marcate cu patrate albe
% pe 'Figure 3', cu o amortizare z=0.94 pentru perechea complex conjugata.
%
%
%
pause;    % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
% Raspunsul sistemului in bucla inchisa la semnal treapta pentru K=3
% este redat in noua figura.
echo off;
CL=feedback(3*D*P1,1);
figure; step(CL); % Deseneaza figura 4
echo on;
%
%
%
pause;    % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
% Rezultatele cele mai bune in privinta formei raspunsului la semnal
% treapta s-ar obtine prin selectia unui castig K corespunzator punctului
% cel mai aproape de axa reala, de pe locul radacinilor (curbura joasa a
% desenului).
%
%
% Pentru a determina K, facem click pe grafic in punctul respectiv, si
% gasim aproximativ K=3.26.
%
%
%
pause;    % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
% Sa analizam rezultatele prin determinarea polilor si
% desenarea raspunsului la semnal treapta.
echo off;
CLx=feedback(3.26*D*P1,1);
hold on; step(CLx); grid on; legend('K=3.00','K=3.26');
pole(CLx)
echo on;
% Daca am face proiectare in domeniul timp, am obtine:
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% Amortizare z=0.96
% Eroare stationara ess=1-0.7655=0.2347
% Timpul de crestere tr=0.27 sec.
% Timpul de stabilizare ts=2.50sec.
%
% Singura problema ramane eroarea stationara.
%
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Sa reluam problema initiala, considerand sistemul P1.
%
% - vom sterge toate figurile.
close all;
%
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Sa incepem acum proiectarea prin eliminarea erorii stationare.
% Putem face asta printr-un control PI (proportional-integrativ)
echo off;
figure;
DI=0.1*tf([1 10],[1 0]);
rlocus(DI*P1); % Deseneaza figura
axis([-11.2,-5,5]);
sgrid;
echo on;
%
% Observam ca pentru K > 0.2, locul radacinilor trece in dreapta planului
% complex, determinand instabilitate.
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Sa vedem raspunsul sistemului in bucla inchisa la semnal treapta.
%
echo off;
CL1=feedback(0.1*D*P1,1);
figure; step(CL1); % Deseneaza figura
echo on;
%
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% - Observam acum ca eroarea stationara este zero, si valoarea finala a
% raspunsului la semnal treapta este 1.
% - Ne deranjeaza micile oscilatii din raspuns. Putem masura perioada lor
% la aproximativ 6 secunde.
```

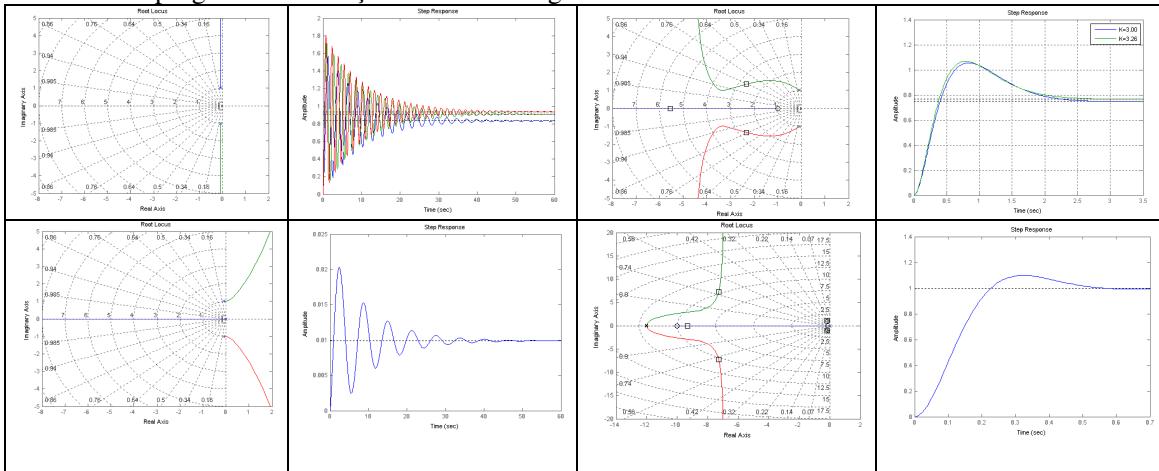
**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
 Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
 Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```

%
% Ar trebui sa eliminam aceste oscilatii din raspuns, prin compensarea
% fazei sistemului in bucla inchisa, prin adaugarea de zerouri.
% Putem incerca adaugarea unui singura zero, ca la prima metoda de
% compensare, dar probabil noul pol din origine s-ar deplasa catre acest
% zero introdus, inainte ca polii nostri pereche sa faca acest lucru.
%
% Vom face la fel ca in electronica analogica: vom cauta sa definim un fel
% de filtru pe frecventa oscilatiilor.
% In loc de 'filtru notch' vom folosi termenul de 'compensare notch'.
%
% In plus, vom folosi o forma modificata a functiei de transfer,
% considerand o comportare asemanatoare cu o dubla
% compensare (vezi figura din referat).
%
%
pause; % apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
%
echo off;
figure;
DI=0.1*tf([1 10],[1 0]);
DN=144*tf([1 2*0.12*1 1],[1 24 144]);
rlocus(DI*DN*P1); % Deseneaza figura
grid;
echo on;
% Observam ca locul radacinilor include o mica inchidere de la polii
% resonanti la noile zerouri introduse.
%
% Putem presupune ca sistemul este stabil pentru orice K.
% De exemplu, observam radacinile pentru K=10.
% Sa vedem raspunsul in domeniul timp, pentru K=10.
echo off;
CLn=feedback(10*DI*DN*P1,1);
figure; step(CLn); grid on; % Deseneaza figura

```

Prin rularea programului se obțin următoarele figuri.



5. Mini-proiect 1.

Se consideră vasul *Tampa* al US Coast Guard, o ambarcațiune de 90 metri arătată în figură.



Experimente pe mare au permis identificarea coeficienții hidrodinamici de deplasare și exprimarea legilor de mișcare printr-un model Laplace dat de următoarele funcții de transfer:

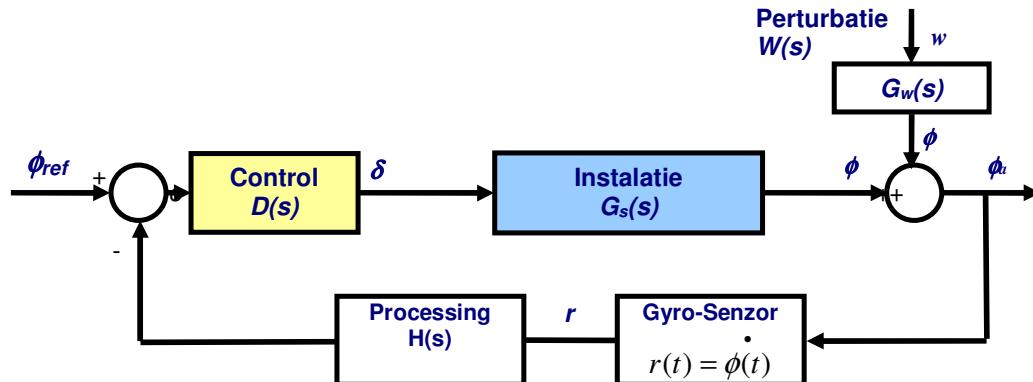
- unghiul de deplasare $\phi(s)$ în funcție de unghiul cârmei $\delta(s)$ (se consideră ca lege intrare- ieșire):

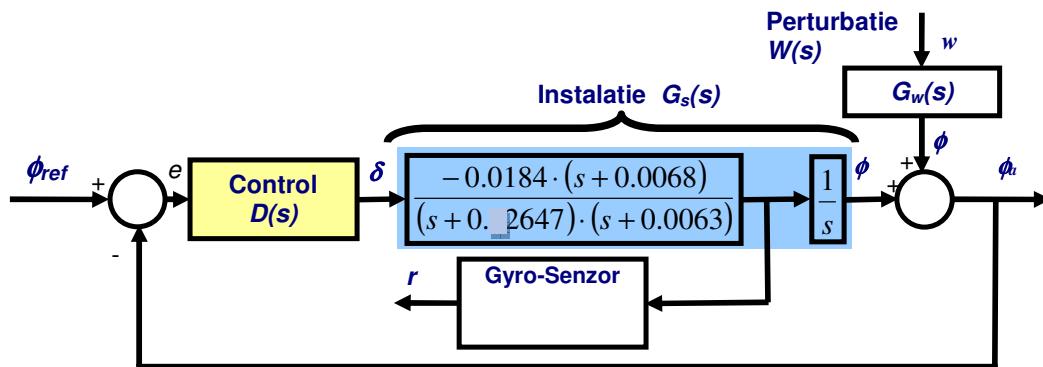
$$G_s(s) = \frac{\phi(s)}{\delta(s)} = \frac{-0.0184 \cdot (s + 0.0068)}{s \cdot (s + 0.2647) \cdot (s + 0.0063)}$$

- unghiul de deplasare $\phi(s)$ în funcție de viteza vântului $w(s)$ (vântul se consideră ca perturbație):

$$G_w(s) = \frac{\phi(s)}{w(s)} = \frac{0.0000064}{s \cdot (s + 0.2647) \cdot (s + 0.0063)}$$

Datele numerice sunt reale. Orice alta perturbație se neglijăză. Figurile următoare sunt echivalente.





Se folosesc notațiile specifice deplasării unei ambarcațiuni:

- ϕ = unghiul de deplasare [rad];
- ϕ_{ref} = referința unghiului de deplasare [rad];
- $r = d\phi/dt$ (derivata unghiului de deplasare [rad/sec])
- δ = unghiul dat de poziția cârmelui [rad]
- w = viteza vântului [m/sec].

Pentru a proiecta o lege de control pentru unghiul de deplasare, am avea nevoie de măsurarea valorii curente a unghiului de deplasare. Acest lucru se face prin intermediul unui giroscop, un dispozitiv capabil să ne ofere derivata unghiului de deplasare, (r). Se consideră căstig unitar prin acest senzor. Se cere proiectarea pentru un timp de stabilizare mai bun decât 50 secunde și un timp de creștere mai bun decât 18 secunde.

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

1. Observați cele două funcții de transfer. De ce valorile numerice sunt numere foarte mici?
2. Care este sensul semnului negativ din prima funcție de transfer? Cum ar trebui completată figura de mai sus în ce privește semnul căstigului legii de compensare?
3. Dacă nu am folosi nici o reacție și nici o compensație, operând în buclă deschisă cu o comandă directă a unghiului de deplasare prin prescrierea unui unghi de comandă la cârmă, la ce eroare staționară ne putem aștepta? Calculați întâi valoarea finală a lui G_s și G_w , cu teorema valorii finale, la aplicarea unei funcții treaptă. Cum este această valoare față de valoarea unitară a treptei aplicate? Avem nevoie de control în buclă închisă?
4. Să analizăm un control în buclă închisă printr-un căstig proporțional K (=Kp). Pentru a simplifica analiza, vom neglija efectul vântului, și vom discuta doar $G_s(s)$. Inițializați un fișier MATLAB de tip *.m, în care veți scrie programul vostru de analiză. Să începem prin observarea locului rădăcinilor pentru controlul în buclă închisă cu control proporțional. Deoarece funcția de transfer a instalației are un căstig negativ, ar trebui să reprezentăm un loc al rădăcinilor negativ, pentru un $K < 0$. Alternativ, putem defini $G_{sp} = -G_s$, și lucră cu un K pozitiv. Câte ramuri are locul rădăcinilor? Încercați să înțelegeți posibilele procese de compensare a polilor cu zero-uri, și traiectoriile ce pleacă din poli și merg asimptotic către infinit.
5. Alegeți arbitrar o valoare K de pe loc, și obțineți un răspuns la semnal treaptă.
 - a. Ce puteți spune despre eroarea staționară în acest caz?
 - b. Cum se compara timpul de creștere și timpul de stabilizare cu cerințele de proiectare?
 - c. Salvați rezultatele în referat.

6. Acum să facem proiectarea propriu-zisă. Deoarece un pol este compensat automat de un zero din funcția de transfer a instalației, undeva la frecvențe foarte joase, ne interesează efectul celorlalți doi poli cu traiectorii ce converg către infinit la creșterea lui K . Timpul de stabilizare va fi dictat deci de partea reală a acestor doi poli. Se obține:

$$\sigma > \frac{4.6}{ts} = \frac{4.6}{50} = 0.092$$

Tot ce trebuie să facem este să găsim punctele de pe locul rădăcinilor pentru care avem rădăcini cu modulul părții reale mai mare decât 0.092 (la stânga lui -0.092 pe axa reală). Specificați valoarea minimă a lui K cu această proprietate.

7. Acum să ne uitam la timpul de creștere. Pentru că ne interesează un răspuns relativ rapid al sistemului, înseamnă că ne vom uita la puncte de pe locul rădăcinilor ce corespund unor rădăcini complexe, pentru care locul a plecat de pe axa reală, iar existența unei amortizări subunitare va forța o creștere mai rapidă, cu o posibilă suprareglare. Din condițiile de proiectare pentru numitor de ordinul doi știm că:

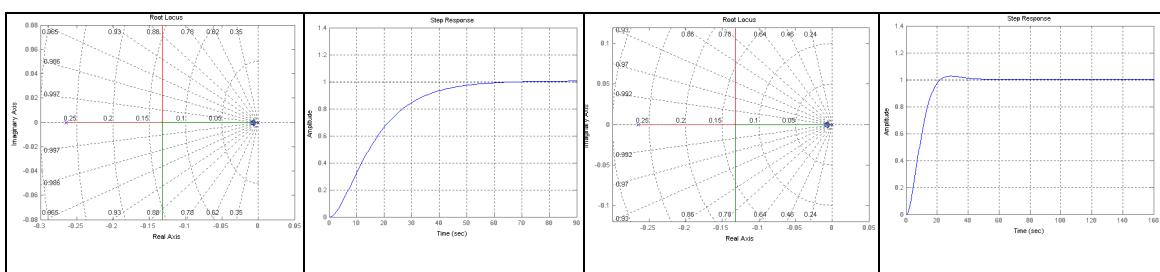
$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n} < 18 \Rightarrow \omega_n > 0.10$$

Deci vom căuta puncte de pe locul rădăcinilor pentru care componenta imaginară este deasupra lui 0.10. S-ar putea să trebuie să re-desenați locul rădăcinilor pentru o reprezentare grafică ce va conține aceste valori. Poate vă ajută:

`rlocus(Gsp); axis([-0.30, 0.05, -0.12 0.12]);`

8. În fine, specificați valoarea lui K . Obțineți răspunsul la semnal treaptă pentru K optimă. *Dacă rezultatele dorite se obțin cu control proporțional K , atunci nu este nevoie să introducem termeni de compensare dinamică.*
9. Considerați sistemul de control proporțional proiectat de voi și determinați răspunsul ambarcațiunii la o rafală de vânt de 10m/sec (modelată ca un semnal treaptă). Cum influențează această rafală de vânt unghiul de deplasare? Sau, dacă preferați: *Care este valoarea staționară a unghiului de deplasare ϕ dacă referința este constantă, și se aplică o perturbație W de tip semnal treaptă?*

Proiectarea unui control automat nu conduce la soluții unice. Următoarele figuri sunt posibile soluții, dar nu vă obligă la obținerea acelorași rezultate.



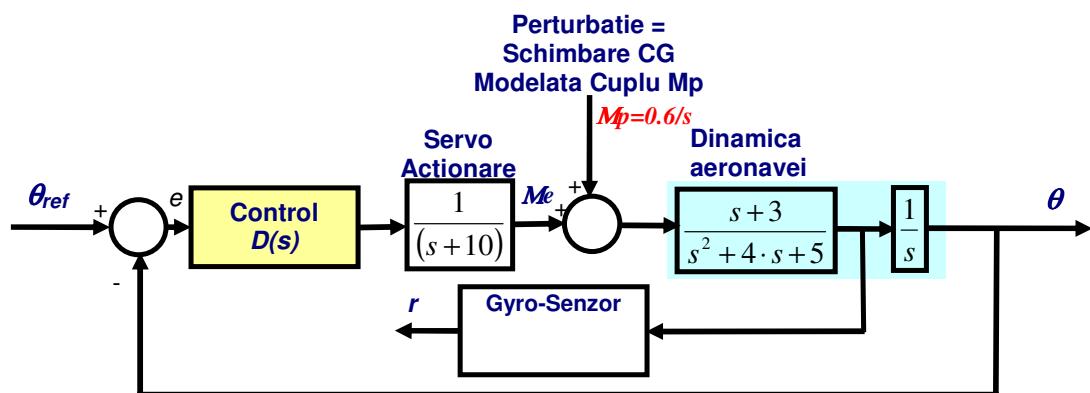
6. Mini-proiect 2

Compania **The Flying Frog Airlines** consideră introducerea unui bar gratuit în spatele fiecarei aeronave pentru a atrage mai mulți pasageri. În scopul compensării automate a șocului produs de schimbarea centrului de greutate a aeronavei la deschiderea barului - când toți pasagerii se grăbesc să ia ceva de la bar - compania introduce un pilot automat.



Un specialist în aeronave vă explică principiul de control al altitudinii. Scopul activității de pilotaj este de a menține o altitudine constantă, indiferent de acțiunea diferenților factori perturbatori. În acest scop, mărimea controlată este direcția de deplasare exprimată ca un unghi față de orizontală. Vom nota acest unghi cu θ . Pentru a obține corecția direcției de zbor, pilotul acționează asupra părții din spate a fiecarei aripi denumită ascensor („elevator”). Mărimea de acțiune este unghiul de liftare δ . Fiecare poziție a aripii determină aplicarea unui cuplu electromecanic asupra aeronavei, M_e , și eventual schimbarea direcției de zbor.

Pentru proiectarea acestui control automat se consideră figura de mai jos, incluzând modelul aeronavei, perturbația, și giroscopul utilizat pentru măsurarea poziției.



Se consideră următoarele cerințe de proiectare:

- valoarea staționară la aplicarea şocului treaptă $M_p=0.6$, mai mică decât 0.025.
- determinați valorile lui K pentru stabilitate la control proporțional.
- Obțineți cel mai rapid răspuns posibil la semnalul treaptă $M_p=0.6$. Ne dorim ca valoarea finală (regim staționar) să fie cât mai mică (ideal nulă), deci să aibă cât mai puțină influență în operarea aeronavei. În plus, nu încurajam oscilații în răspuns care ar fi simțite neplăcut de către pasageri.

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

Să considerăm controlul fără nici un termen de compensare dinamică, adică $D(s)=K$.

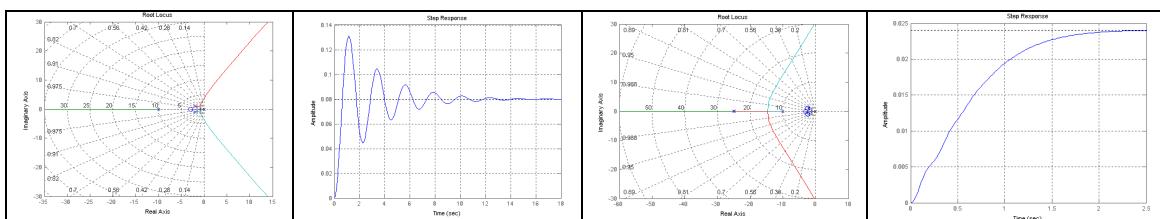
1. Scrieți funcțiile de transfer în buclă deschisă și buclă închisă, pentru dependența **theta** funcție de **theta-ref**, dacă neglijăm efectul perturbației M_p .
2. Calculați valoarea finală/staționară (și eroarea staționară) la aplicarea unui semnal treaptă la intrarea **theta-ref**, pe baza funcției de transfer determinate.
3. Deoarece (sau dacă...) aceasta eroare staționară este nulă, putem considera efectul perturbației M_p la fiecare referință aplicată lui **theta-ref**. În acest scop, să scriem funcțiile de transfer în buclă deschisă și buclă închisă, de la perturbația M_p la mărimea de ieșire **theta**, considerând lipsa oricarei dinamici la intrarea **theta-ref** (formal, **theta-ref=0**).
4. *** Calculați eroarea staționară la aplicarea perturbației ca semnal treaptă [0.6/s], cu ajutorul teoremei valorii finale și a funcției de transfer determinate în funcție de valoarea lui K .
5. *** Calculați valoarea numerică a lui K pentru o eroare staționară mai mică decât 0.025.
6. Desenați locul rădăcinilor pentru orice $K>0$.
7. Citiți de pe grafic valoarea lui K pentru limita de instabilitate.
8. Pentru $K=0.5*Kinstabilitate$, citiți de pe locul rădăcinilor valoarea coeficientului de amortizare. Reprezentați grafic răspunsul la semnal treaptă $M_p=0.6$ pentru acest K și confirmați valoarea coeficientului de amortizare.
9. Ne-ar interesa cât mai mare a lui K astfel încât să reducem valoarea finală (staționară) la aplicarea M_p . Considerați o compensare dinamică pentru îmbunătățirea rezultatelor dinamice. Principala grija este perechea de poli rezonanți. Să încercăm reducerea efectului lor printr-o compensare **notch**, dată de termenul ($z=0.91$, $wn=2.5$)

$$D_n(s) = 100 \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot 0.91 \cdot 2.5 + 6.25}{(s + 25)^2}$$

Desenați locul rădăcinilor. La ce valoare a lui K se obține acum instabilitatea?

10. Reprezentați răspunsul la semnalul treaptă $M_p=0.6$, pentru $K=250$. Citiți de pe grafic la cât se reduce valoarea finală.
11. ***Comentați dacă am fi putut reduce valoarea finală și mai mult prin utilizarea unui termen integral.

Proiectarea unui control automat nu conduce la soluții unice. Următoarele figuri sunt posibile soluții, dar nu vă obligă la obținerea acelorași rezultate.



LABORATORUL #5

PROIECTAREA SISTEMELOR AUTOMATE DE CONTROL CU AJUTORUL ANALIZEI ÎN FRECVENȚĂ.

1. Scopul laboratorului.
2. Utilizarea MATLAB pentru analiza în frecvență a sistemelor.
 - a. Diagrame Bode și Nyquist
 - b. Fișier de comenzi.
3. Compensarea sistemelor
 - a. Analiza în frecvență a rețelelor de compensare.
 - b. *Exemplu:* Compensarea unui motor de c.c.
 - c. Mini-proiect.
4. Proiectarea cu incertitudinea modelului („loopshapping”)
 - a. Descrierea metodei
 - b. *Exemplu:* Analiza amestecului combustibil-aer în motoarele termice

1. Scopul laboratorului.

Metoda de analiză a sistemelor pe baza răspunsului în frecvență ne ajută la proiectarea sistemelor de compensare dinamică. Vom aprofunda cu ajutorul unor exemple instrucțiunile MATLAB specifice analizei în frecvență. Apoi vom rezolva un mini-proiect tipic pentru astfel de situații.

Proiectarea unui sistem cu parametri variabili se face prin asocierea unor incertitudini în model. Vom exemplifica acest lucru prin studiul controlului amestecului combustibil-aer la motoarele cu ardere internă.

In final, vom considera un proiect.

2. Utilizarea MATLAB pentru analiza în frecvență a sistemelor.

a. Diagrame Bode și Nyquist

Lucrul cu diagrame Bode este cunoscut de la alte discipline. Practic, avem o reprezentare a modulului și fazei funcției de transfer în funcție de frecvență unui semnal aplicat la intrarea sistemului. În cazul proiectării sistemelor de control, diagramele Bode se folosesc pentru determinarea grafică a rezervelor de amplitudine și fază până la trecerea la instabilitate.

Diagramale Nyquist se folosesc pentru reprezentarea grafică a condițiilor de stabilitate. Aceeași informație din cazul diagramelor Bode este acum reprezentată în coordonate *imaginär-real* în loc de reprezentarea pe două grafice separate a amplitudinii și fazei. Stabilitatea se determină prin determinarea numărului de încercuiri ale punctului -1 de pe axa reală.

b. Fișier de comenzi

Vom lua un exemplu simplu pentru exersarea instrucțiunilor MATLAB folosite la analiza răspunsului în frecvență a sistemelor.

Acum puteți lansa programul *L5_Intro.m*.

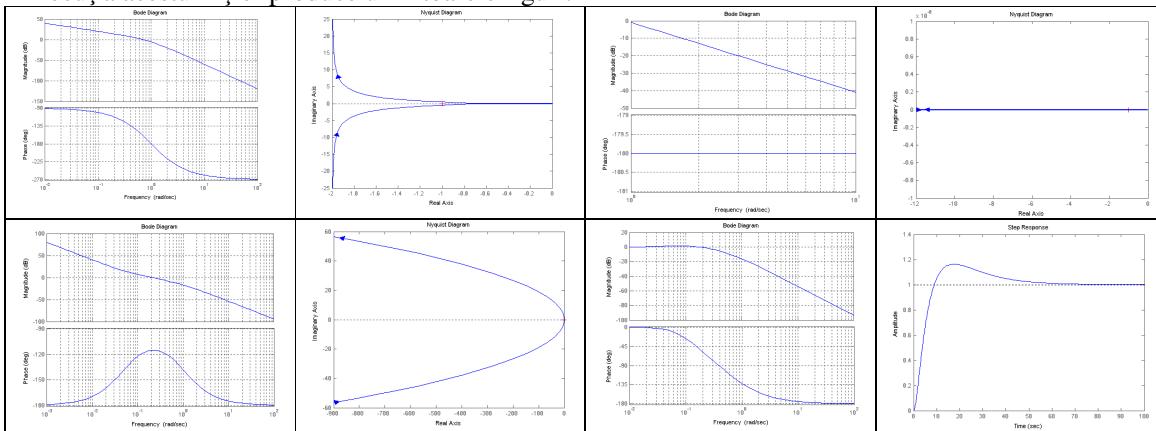
**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
clear;
echo on;
%
% Vom incepe cu un exemplu simplu pentru a ne aminti despre amplificarea si
% faza unui sistem in bucla inchisa.
%
P1=tf(1,[1 2 1 0]);
% Vom reprezenta diagrama Bode
bode(P1); grid on; title('bode(P1)');
% si diagrama Nyquist, cu punctul -1 indicat pe figura.
figure;
nyquist(P1); axis([-2,2,-2,2]); title('Nyquist(P1)');
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Am dori sa determinam de pe aceste grafice, punctele in care amplitudinea
% este unitara, si unde faza este -180. Apoi, sa obtinem rezervele de
% amplitudine si faza.
%
% In exemplul considerat, acest lucru se intampla o singura data.
%
% Putem determina aceste puncte direct de pe grafic, facand click in
% punctul dorit, sau putem folosi in mediul MATLAB, instructiunea margin,
% dupa ce in prealabil am salvat datele diagramei Bode ca variabile in
% spatiul MATLAB.
%
[mag,phase,w]=bode(P1);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
% Merita notat ca aceste valori sunt aproximatii deduse in functie de
% resolutia cu care am calculate raspunsul in frecventa (diagrama Bode).
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Sa repetam acest proces pentru o alta functie de transfer,
close(1); close(2);
figure;
K=1.11;
P2=tf(1/K,[1 0 0]);
bode(P2); grid on; title('bode(P2)');
figure; nyquist(P2); axis([-2,2,-2,2]); title('Nyquist(P2)');
[mag,phase,w]=bode(P2);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
% Acest sistem va fi instabil in bucla inchisa. Diagrama Nyquist trece prin
% punctul -1. Deci inchiderea unei bucle simple, printr-un control
% proportional in jurul acestei functii de transfer P2, nu poate fi
% o optiune.
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Se observa ca panta diagramei Bode pentru amplitudine este -40dB/dec.
% Pentru a muta faza din valoarea -180, ar trebui sa reducem panta
% diagramei de amplitudine.
% Putem utiliza un control cu avans de faza:
```

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

```
%           K(1 + Td*s)
%   C(s) = -----, unde beta << Td
%           (1 + beta*s)
%
% Sa consideram ca date de proiectare, o largime de banda ceruta de
% 0.2rad/sec. In plus - din motivele aratare - dorim ca diagrama de
% amplitudine sa aiba o panta de -20dB/dec la aceasta frecventa.
%
% Legea de compensare trebuie sa desfasoare o panta crescatoare a diagramei
% de amplitudine, mult inainte de 0.2rad/sec. Sa consideram un zero la
% 0.05rad/sec si un pol la 1rad/sec.
%
%           1 + 20*s
%   C(s) = K -----
%           1 + s
%
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Proiectarea se reduce acum la determinarea castigului K astfel incat:
%   |C(s)P2(s)| = 1      pentru s = 0.2*j
%   |K*C1(s)*P2(s)| = 1  pentru s = 0.2*j
%   K = 1/|C1(s)*P2(s)|  pentru s = 0.2*j
%
% Vom face un calcul direct:
C1=tf([20 1],[1 1]);
[mag,phase,w]=bode(C1*P2, 0.2);
K=1/mag
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Legea de compensatie devine:
C=K*C1;
figure;
bode(C*P2); grid on; title('Bode(C*P2)');
figure; nyquist(C*P2); title('Nyquist(C*P2)');
axis([-6,1,-5,1]);
[mag,phase,w]=bode(C*P2);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
%
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%
%
% Aceste rezultate numerice arata ca sistemul de compensare este bun.
% Sa confirmam acest lucru prin analiza sistemului de control in bucla
% inchisa.
%
CL=feedback(C*P2,1);
%
% Polii sistemului in bucla inchisa sunt la:
pole(CL)
%
% Raspunsul in frecventa a sistemului in bucla inchisa:
figure; bode(CL); grid on; title('Bode(CL)');
%
% Raspunsul la semnal treapta:
figure; step(CL);
%
```

Execuția acestui fișier produce următoarele figuri.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

1. Determinați grafic de pe prima figură („Bode(P1)”) rezerva de amplitudine și rezerva de fază. Comparați rezultatele cu cele afișate în fereastra MATLAB prin instrucțiunea „margin”.
2. Ce reprezintă cele două ramuri simetrice față de axa reală din graficul Nyquist arătat în figura a 2-a („Nyquist(P1)”)?
3. Ce puteți spune despre rezervele de amplitudine și fază pentru sistemul al 2-lea? Putem defini aceste rezerve în diagrama Bode din figura a 3-a?
4. Cum este confirmată stabilitatea în figura a 4-a („Nyquist(P2)”? Faceți *zoom* pe figură pentru a confirma dacă conturul Nyquist trece sau nu prin -1 și stabiliți de câte ori înconjoară -1.
5. Determinați rezervele de fază și amplitudine de pe graficul Bode din figura a 5-a („Bode(C*P2)”).
6. Verificați pe figura 7-a („Bode(CL)”) condițiile inițiale de proiectare (*o lărgime de bandă cerută de 0.2rad/sec*).

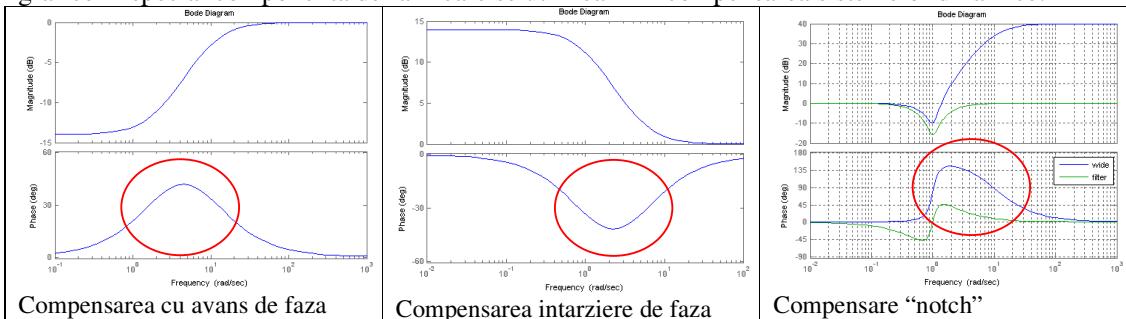
3. Compensarea sistemelor

a. Analiza în frecvență a sistemelor de compensare.

Am discutat în laboratorul precedent avantajele utilizării sistemelor de compensare pentru îmbunătățirea performanțelor dinamice. Am văzut atunci cele trei tipuri de compensare:

- compensare cu avans de fază
- compensare cu întârziere de fază
- compensare „notch”
-

Vom da aici - fără comentarii - diagramele Bode generice pentru fiecare astfel de caz. Urmăriți pe grafice în special componenta de fază care se utilizează în compensarea sistemelor dinamice.



b. Exemplu: Compensarea unui motor de c.c.

Vom considera un exemplu pentru a înțelege cum ne ajută analiza în frecvență la proiectarea sistemelor de compensare. Vom considera un motor de curent continuu și vom încerca o compensare cu avans de fază pentru îmbunătățirea performanțelor dinamice.

Să considerăm modelul instalației (în exemplu, un motor de curent continuu):

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 5)}$$

Se dau datele de proiectare:

- Eroarea staționară mai mică decât 0.1 pentru un semnal de intrare de tip rampă.
- O suprareglare $M_p < 10\%$.

Se cere să determinați compensarea cu avans de fază ce satisface aceste condiții.

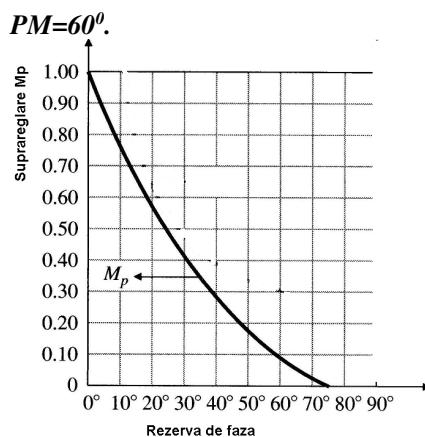
Vom considera o lege de compensare de forma:

$$KD(s) = K \cdot \frac{s + z}{s + p}$$

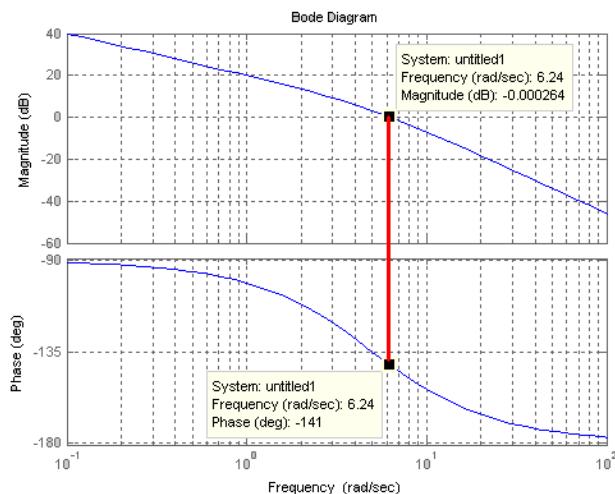
folosindă într-un sistem în buclă închisă. Vom începe prin a determina eroarea staționară a sistemului în buclă închisă la aplicarea unui semnal rampă:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + KD(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+5)}} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{K \cdot \frac{z}{5 \cdot p}} < 0.1 \Rightarrow K \cdot \frac{z}{5 \cdot p} > 10$$

Am studiat la curs - și vom da aici fără demonstrație – relația între suprareglare/amortizare și rezerva de fază. Din reprezentarea grafică a acestei dependențe, determinăm o rezervă de fază de 60° pentru cerința unei suprareglări de 10% (*cu cât vrem o suprareglare mai mică, cu atât ne trebuie mai multă rezervă de fază la frecvența de trecere*).



Trebuie să vedem diagrama de fază pentru un control proporțional fără termeni de compensare dinamică. În acest scop, considerăm arbitrar $K=50$, și reprezentăm diagrama Bode pentru funcția de transfer în buclă deschisă $KG(s)$.

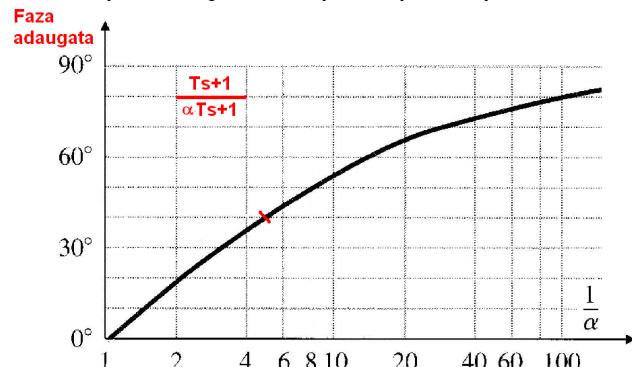


Citim de pe grafic, $PM=39^\circ$.

Dacă ar fi posibil, am adăuga o fază de $60^\circ - 39^\circ = 21^\circ$ la frecvența de $\omega=6.24\text{rad/sec}$.

Am putea încerca să obținem această fază cu ajutorul unui *zero* dintr-un compensator cu avans de fază. Din pacate, noul sistem va schimba valoarea frecvenței de trecere. Deci trebuie să proiectăm pentru adăugarea unei faze mai mari decât cea calculată mai sus (21°).

Cu un raport $1/\alpha=p/z=5$ am putea spera să producem o fază adițională maximă de 40° .



Am dori să obținem adaosul de fază maxim în jurul și puțin la dreapta lui 6.24rad/sec, unde este frecvența de tâiere a graficul Bode dat. Știm că maximum adaos de fază se obține la o frecvență egală cu media geometrică a frecvenței *pole*-ului și a *zero*-ului.

Putem considera *zero*-ul la 4rad/sec și polul la 20rad/sec. Aceasta este un proces iterativ și alegerea nu este unică. Legea de compensație rezultă (introducem un câștig =5 pentru a nu avea amplificare la $s=0$):

$$D(s) = 5 \cdot \frac{s + 4}{s + 20}$$

Funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă:

$$KD(s)G(s) = 50 \cdot \left(5 \cdot \frac{s + 4}{s + 20} \right) \cdot \left(\frac{1}{s \cdot (s + 5)} \right)$$

Acum puteți lansa programul *L5_Compren.m* pentru analiza acestui rezultat.

```
clear;
echo off;
%
num=1;
den=[1 5 0];
G=tf(num,den);
bode(50*G); grid on;
figure;
D=5*tf([1 4],[1 20]);
bode(50*G, 50*D*G); grid on;
legend('KG', 'KDG');
[mag,phase,w]=bode(50*D*G);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(50*D*G)
figure;
nyquist(50*D*G);
%
```

Execuția acestui fișier produce următoarele rezultatele în fereastra MATLAB:

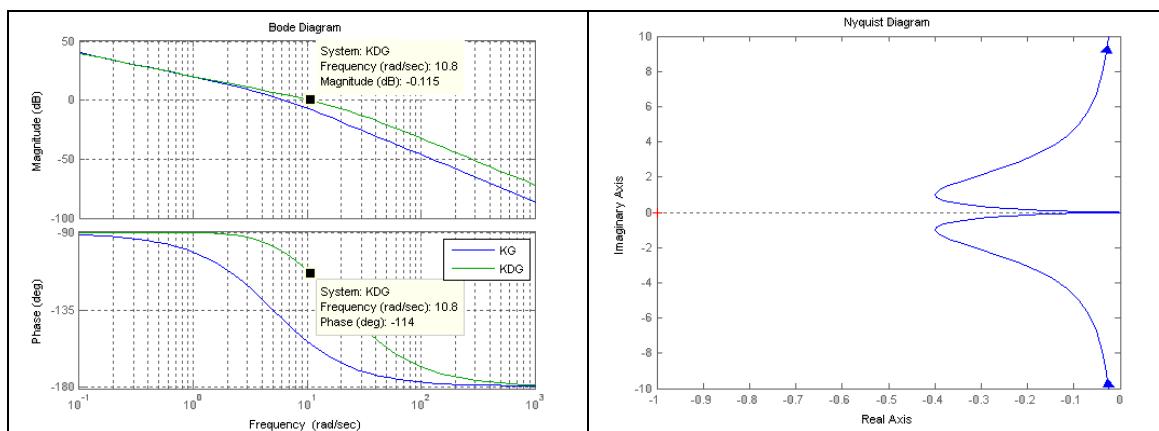
GM = 2.3573e+004

PM = 66.4813

Wcg = 2.4279e+003

Wcp = 10.6584

cât și următoarele figuri.



De pe diagrama Bode citim o rezervă de fază de $180^0 - 114^0 = 66^0$, puțin mai mare decât cerințele de proiectare ($PM=60^0$).

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

7. Refaceți programul de analiză pentru o nouă funcție de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(s+1) \cdot (s+6)}$$

Proiectați o compensare cu avans de fază, capabilă de a furniza următoarele performanțe:

- eroare staționară la aplicarea unui semnal treaptă mai mică decât 0.01.
- suprareglare mai mică decât 25%.

6. Proiectarea cu incertitudinea modelului („loopshaping”)

c. Descrierea metodei

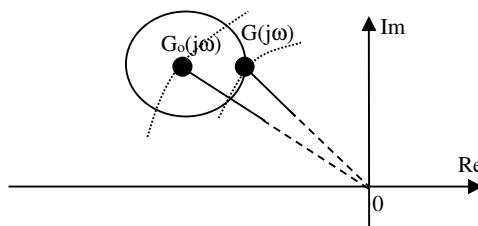
Toate analizele dezvoltate în acest laborator, cât și în cele precedente, s-au bazat pe condiții ideale, atât în ce privește semnalul de intrare (treaptă sau rampă), cât și modelul instalației. În realitate:

- semnalul de intrare poate avea o variație aleatorie,
- funcția de transfer poate fi schimbată de factori cum ar fi variația parametrilor de construcție, îmbătrânirea componentelor, efectul temperaturii și umidității mediului ambiant asupra parametrilor, s.a.m.d.

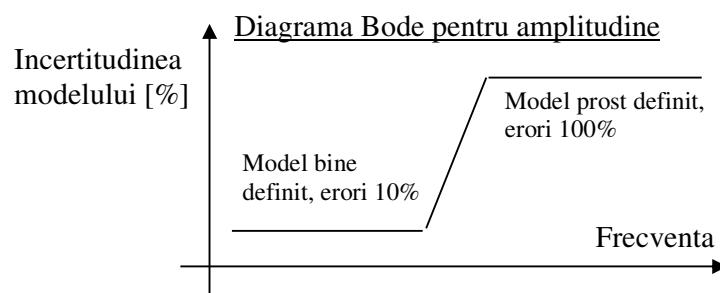
Vom încerca acum să modelăm și să discutăm proiectarea legii de compensare pentru variația parametrilor legii de transfer a instalației. Vom considera existența unei incertitudini în definirea modelului. Pentru orice valoare de interes „ s ”, funcția de transfer este un număr complex, o locație în planul complex. Vom exprima incertitudinea modelului ca o posibilă variație în amplitudine a acestei locații și o posibilă variație în fază (vezi figura).

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) \cdot [1 + W_{inc}(\omega) \cdot \Delta(j\omega)]$$

unde $G_0(j\omega)$ este modelul nominal considerat în proiectare, $W_{inc}(\omega)$ exprimă posibila variație în amplitudine ca o funcție egală cu un număr pur real, iar $\Delta(j\omega)$ exprimă posibila variație în fază, ca o funcție caracterizată de o fază dependentă de locație, având un modul subunitar (deci $|\Delta(j\omega)| < 1$).



De obicei, W_{inc} este foarte redus la frecvențe joase unde modelul este mai bine cunoscut și nu avem o variație atât de mare a parametrilor și este mai mare la frecvențe înalte unde modelul original s-ar putea să nu fi fost prea bine definit („efecți sau componente parazite”, vibrații, zgomote, s.a.m.d.) și unde variația parametrilor este mai importantă în operație (mediu ambiant, îmbătrânire).



Să presupunem că am proiectat o lege de compensație pentru modelul nominal $G_0(j\omega)$ și că sistemul în buclă închisă este stabil, deci $1+DG_0 \neq 0$. Am dorit să păstrăm stabilitatea pentru orice variație a lui $G(s)$ conform figurii (considerăm $D(s)$ ca fiind legea de compensație):

$$1 + D \cdot G \neq 0 \Leftrightarrow 1 + D \cdot G_0 \cdot [1 + W_{inc} \cdot \Delta] \neq 0 \Leftrightarrow (1 + D \cdot G_0) \cdot [1 + T \cdot W_{inc} \cdot \Delta] \neq 0 \Rightarrow |T \cdot W_{inc} \cdot \Delta| < 1$$

$$\text{unde } T(s) = \frac{DG_0}{1 + DG_0} = \text{Functie_de_sensibilitate}$$

Deoarece am considerat prin definiție $|\Delta| < 1$, obținem:

$$|T \cdot W_{inc}| < 1 \Leftrightarrow |T| \cdot W_{inc} < 1 \Leftrightarrow |T| < \frac{1}{W_{inc}} \Leftrightarrow \left| \frac{DG_o}{1 + DG_o} \right| < \frac{1}{W_{inc}}$$

Dacă această condiție este îndeplinită, sistemul rămâne stabil la variația modelului. Dacă DG este mică, atunci $|T| \sim |DG_0|$.

$$|DG_o| < \frac{1}{W_{inc}} @ \text{frecvențe_înalte}$$

Am văzut deja posibilitatea de a defini condițiile de proiectare privind performanțele dinamice ale sistemului în buclă închisă în funcție de locația polilor în planul complex. Putem adăuga condițiile privind eroarea staționară. În realitate semnalul de intrare nu este doar treaptă sau rampă. Pentru un semnal de intrare aleatoriu, putem descompune acel semnal de intrare într-o sumă de semnale sinusoidale de frecvențe diferite, periodice, și defini eroarea staționară pentru fiecare dintre ele.

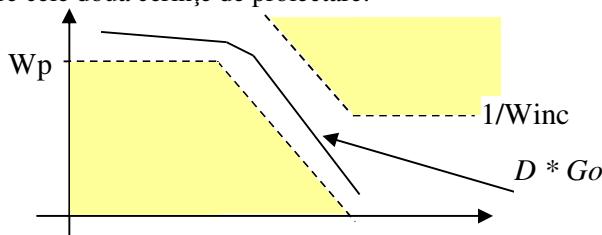
Un astfel de grafic înglobând toate condițiile pentru amplificarea pe buclă în funcție de frecvența semnalului de intrare poate reprezenta o alta definiție pentru condițiile de proiectare. În acest caz:

$$E(s) = \frac{1}{1 + DG_o} \cdot R(s) = S \cdot R \Rightarrow |E| = |S| \cdot |R| < e_b \Rightarrow |S| \cdot W_p < 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + DG_o} \right| < \frac{1}{W_p}$$

Specificație _ Proiectare _ Eroare _ E(s)

$$|DG_o| > W_p @ \text{frecvențe_joase}$$

Proiectarea se reduce în acest caz la a găsi o lege de compensație care să aducă funcția de transfer între cele două cerințe de proiectare:

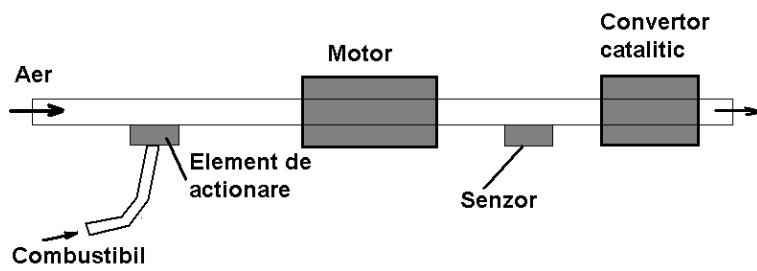
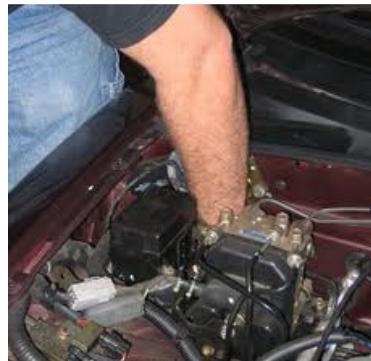


Operațiunea de prescriere a acestei condiții pentru amplificarea pe buclă (transmisia pe buclă) se mai numește formarea buclei („loopshaping”). Atenție însă la aproximările făcute, adevărate specific pentru frecvențe joase și respectiv înalte. Din acest motiv, etapele de proiectare sunt:

- Identificăm o posibilă formă a produsului $D \cdot G_0$ care să respecte condițiile aproximative arătate în chenar ROSU (condiții aproximative).
- Proiectăm compensarea capabilă să transforme funcția de transfer originală (instalație) în funcția de transfer aleasă pentru sistemul în buclă închisă.
- Verificăm aceasta lege de compensație $D(s)$ pentru ca $D(s)$ și $G_0(s)$ să respecte condițiile arătate în chenar VERDE (restrictii fără aproximare).

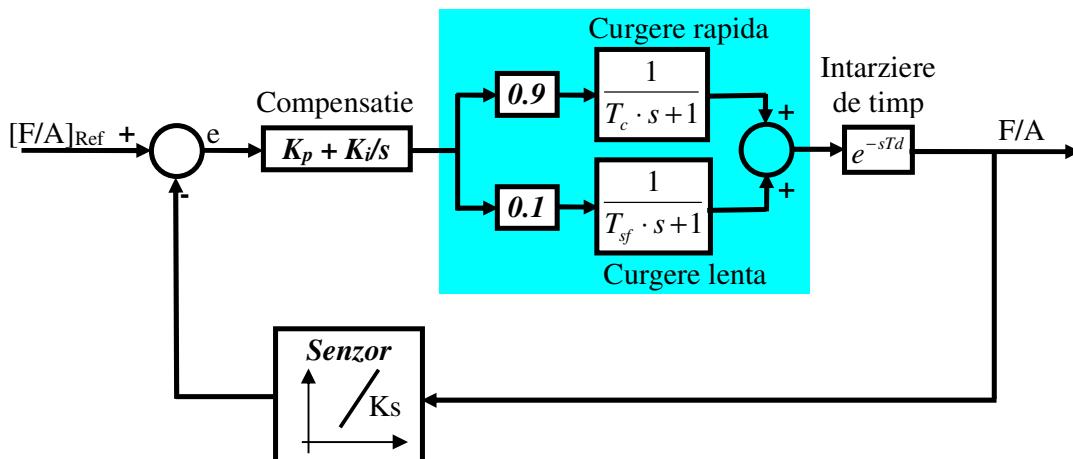
d. Exemplu: Analiza amestecului combustibil-aer în motoarele termice

După implementarea regulilor pentru reducerea poluării produse de motoarele cu ardere internă, companiile producătoare de automobile au introdus sisteme electronice de control cu reacție pentru controlul raportului combustibil-aer și implicit reducerea toxinelor. Un astfel de control în buclă închisă este necesar pentru a menține raportul combustibil-aer în apropierea raportului stoichiometric de 14.7:1.



Influența majorității factorilor perturbatori (conținutul aerului și al combustibilului, întârzieri datorate deplasării pistoanelor, întârzierile de timp datorate deplasării gazelor de eşapament între motor și senzor, s.a.m.d.) asupra bunei funcționări în apropierea raportului stoichiometric, este puternic dependentă de viteza (turația) motorului.

Fără a intra în toate detaliile de funcționare, să considerăm următorul model liniar în jurul punctului de raport stoichiometric.



Combustibilul poate fi introdus în camera de ardere sub forma unor vapori, într-un mod rapid. În plus, există o mică scurgere de combustibil lichid în camera de ardere într-un mod lent. Aceste două moduri sunt caracterizate de constante de timp de combustie diferite (T_c și respectiv T_{sf}). T_d modelează întârzierea datorată ciclului de operare și deplasării gazelor până la senzor.

$$P = \left(\frac{0.9}{1+T_c \cdot s} + \frac{0.1}{1+T_{sf} \cdot s} \right) \cdot e^{-T_d \cdot s}$$

Cu cât este mai mare turația motorului, cu atât este mai mică constanta de timp de combustie și este mai mică constanta de timp de transport. Aceste dependențe se pot exprima cu relațiile aproximative:

$$\begin{cases} T_d = \frac{252}{RPM} \\ T_c = \frac{202}{RPM} \end{cases}$$

pentru turații între 2000 și 5000 RPM.

Deoarece modelul și funcțiile de transfer aferente variază cu punctul de operare (turația motorului), este dificil să construim un model și o lege de control unitară. Vom alege o turație (3000 RPM) ca viteză reprezentativă.

Diferențele în model pentru alte viteze vor fi reprezentate ca o incertitudine și vom încerca să compensăm pentru această incertitudine prin metoda formării buclei („loopshapping”).

Vom scrie modelul instalației pentru o turație de 3000 RPM și vom denumi acest model cu MOT3.
Vom considera apoi un model al perturbațiilor pentru sistemul dat:

MOT3 · (1 + w_{unc} · delta)

- delta = perturbația considerată ca un număr complex cu modulul mai mic decât 1.
- w_{unc} = acționează ca o pondere, utilizată pentru a permite utilizarea același model pentru toată gama de turații, în funcție de incertitudinea modelului la diferite frecvențe.

Acum puteți lansa programul *L5_Amestec.m*.

```
clear;
echo on;
%
% Sa exprimam modele pentru diverse turatii.
%   / 0.9      0.1    \ -Td*s
% P = | ----- + ----- | * e
%   \ 1 + Tc*s   1 + Tsf*s /
%
echo off;
rpm=3000;
Td=252/rpm;
Tc=202/rpm;
Tsf=1;
delay=tf([-Td/2 1],[Td/2 1]); % Aproximatio Pade
ff=tf(1,[Tc 1]);
sf=tf(1,[Tsf 1]);
F=0.9*ff+0.1*sf;
MOT3=F*delay;
%
% =====
rpm=2000;
Td=252/rpm;
Tc=202/rpm;
Tsf=1;
delay=tf([-Td/2 1],[Td/2 1]); % Aproximatio Pade
ff=tf(1,[Tc 1]);
sf=tf(1,[Tsf 1]);
F=0.8*ff+0.2*sf;
MOT2=F*delay;
%
% =====
rpm=5000;
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
Td=252/rpm;
Tc=202/rpm;
Tsf=1;
delay=tf([-Td/2 1],[Td/2 1]); % Aproximatio Pade
ff=tf(1,[Tc 1]);
sf=tf(1,[Tsf 1]);
F=0.9*ff+0.1*sf;
MOT5=F*delay;
%
echo on;
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Reprezentam cele 3 fdt pe acelasi grafic Bode
bode(MOT2,'r',MOT3,'k', MOT5,'b'); grid on;
legend('2000RPM','3000RPM','5000RPM');
title('raspunsul in frecventa la diferite turatii');
% Reprezentam cele 3 fdt pe acelasi grafic Nyquist.
figure;
nyquist(MOT2,'r',MOT3,'k', MOT5,'b');
legend('2000RPM','3000RPM','5000RPM');
title('digrama Nyquist la diferite turatii');
%
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Datorita variației modelului cu turatia, vom considera aceasta variație
% ca o perturbație, definită astfel încât să înglobăm în aceeași formă
% matematică, toate cele trei modele descrise mai sus (MOT2, MOT3, MOT5).
% Vom considera MOT3 ca model nominal.
%
% MGEN=MOT3*(1 + Winc*Delta),
%
% unde Winc reprezintă incertitudinea în ce privește variația amplitudinii
% modelului. Putem să o vedem și că un procentaj de variație fata de un
% model nominal. De exemplu, la frecvențe joase variația maximă este de 20%
% fata de modelul nominal, iar la frecvențe mai mari decât 200rad/sec,
% incertitudinea devine 100%.
Winc=0.4*tf([0.010 0],[0.004 1]);
figure; bode(Winc); title('Winc'); grid on;
% Valoarea complexă a funcției de transfer pentru o anumită valoare a lui
% "s" va fi situată într-un disc, pe graficul Nyquist.
%
% Urmatoarele instrucțiuni s-ar putea să nu fie evidente de la prima
% citire. Se lucrează direct cu componentele raspunsului în frecvență
% pentru fiecare frecvență, dintr-un total de 50 puncte alese ca rezoluție.
%
echo off;
MW=MOT3*Winc;
N=50; j=sqrt(-1);
points=logspace(-4,4,N);
[MMWw,PMWw,points]=bode(MW,points);
[MM3w,PM3w,points]=bode(MOT3,points);
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
delta=exp(2*pi*sqrt(-1)*[0:0.1:1]');  
for i=1:N  
disk(:,i)=[MM3w(:, :, i)*exp(j*(2*pi/360)*PM3w(:, :, i))]+[MMWw(:, :, i)*delta];  
end  
figure;  
for k=1:11,  
    DSK=frd(disk(k,:),points);  
    % nyquist(DSK, points);  
    nyquist(DSK,'.'); hold on;  
end  
% nyquist(MOT3, points);  
nyquist(MOT3,'k');  
title('Diagrama Nyquist inclusand incertitudinea modelului');  
echo on;  
% Observam ca nu trecem prin -1 niciodata.  
%  
pause; % Apasati orice tastă pentru a continua  
%-----  
%  
%  
% Vom specifica acum cerintele de performanță pentru sistemul nostru.  
% Considerăm că sunt deja date sub forma unei funcții de transfer.  
Wp = tf(10,[1,1]);  
%  
% Condiția de stabilitate la variația parametrilor se poate exprima ca:  
Wupp = 1/Winc;  
%  
% Vom reprezenta grafic performanța dorită (Wp) și condiția de stabilitate  
% robustă (la variația parametrilor) (1/Winc). Produsul DG trebuie să se  
% afle între cele două caracteristici.  
%  
figure; bode(Wupp,'-.',Wp,'--',MOT3,'k'); grid on;  
legend('limita superioară (din Winc)', 'limita inferioară (din Wp)', 'MOT3');  
title('sistem fără compensație');  
%  
% Se observă că închizând bucla de reacție cu câștig unitar în jurul  
% modelului pentru 3000 rpm (MOT30), nu satisface condițiile de performanță  
% cerute (aproximate cu Wp).  
%  
pause; % Apasati orice tastă pentru a continua  
%-----  
%  
% Ar trebui să introducem o lege de compensație capabilă să aducă răspunsul  
% în frecvență a produsului DG între cele două curbe care definesc condiția  
% de stabilitate robustă și condițiile de performanță ale sistemului.  
%  
% Simplificăm alegerea observând că răspunsul în frecvență a lui (10/s)  
% trece printre cele două limite. Pentru a avea un astfel de răspuns în  
% bucla închisă, ar trebui să compensăm polul din funcția de transfer a  
% modelului MOT30. Deci propunem o compensație aproximativă egală cu  
% C(s)=(s+10)/s.  
%  
C1=tf([1 10],[1 0]);
```

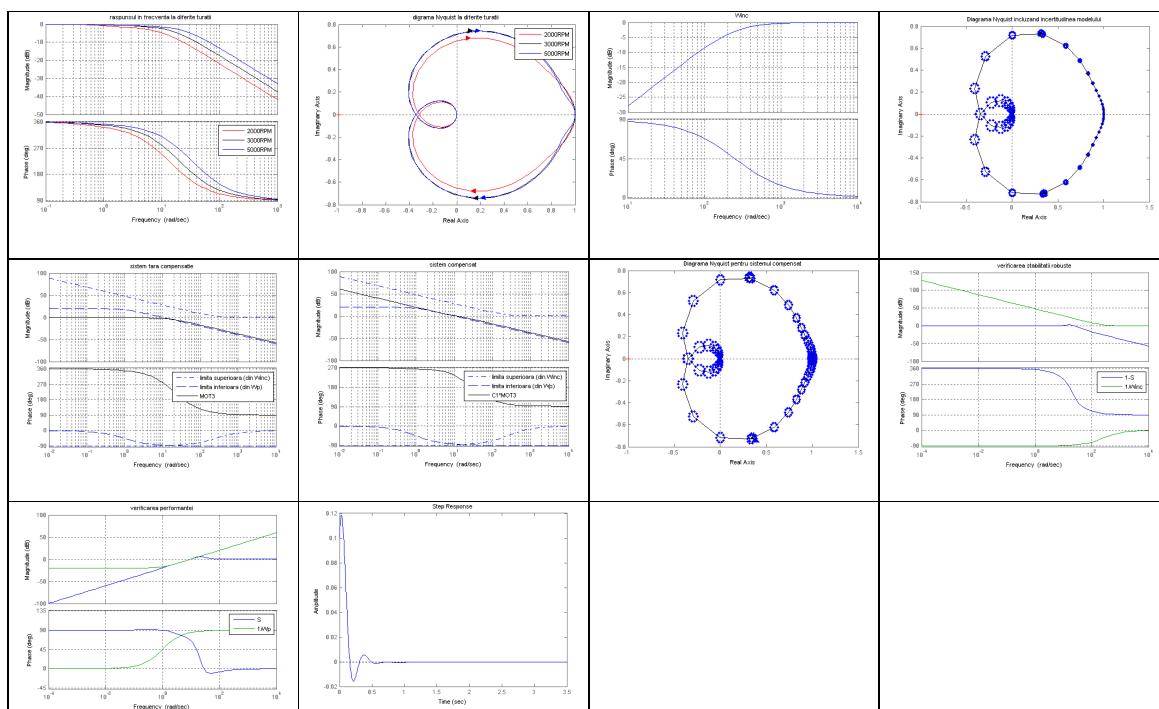
**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
DG=C1*MOT3;
figure; bode(Wupp,'.',Wp,'--',DG,'k'); grid on;
legend('limita superioara (din Winc)','limita inferioara (din Wp)','C1*MOT3');
title('sistem compensat');
%
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Sa refacem analiza de verificare a stabilitatii prin diagrama Nyquist.
echo off;
MW=C1*MOT3*Winc;
N=50; j=sqrt(-1);
points=logspace(-4,4,N);
[MMWw,PMWw,points]=bode(MW,points);
[MM3w,PM3w,points]=bode(MOT3,points);
delta=exp(2*pi*sqrt(-1)*[0:0.1:1]');
for i=1:N
disk(:,i)=[MM3w(:,:,i)*exp(j*(2*pi/360)*PM3w(:,:,i))]+[MMWw(:,:,i)*delta];
end
figure;
for k=1:11,
    DSK=frd(disk(k,:),points);
    % nyquist(DSK, points);
    nyquist(DSK, '.');
    hold on;
end
% nyquist(MOT3,points);
nyquist(MOT3, '.');
title('Diagrama Nyquist pentru sistemul compensat');
echo on;
%
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Sa verificam acum performanta sistemului si modul in care conditiile de
% proiectare sunt indeplinite. Trebuie sa facem aceasta verificare pentru
% ca am facut niste aproximatii la definirea limitelor (vezi referatul
% scris).
%
% Definim S=1/(1+DG)=1/(1+C1*MOT3)
S=1/(1+C1*MOT3);
% Sa verificam si polii sistemului in bucla inchisa:
pole(S)
% Deci polii arata stabilitate.
% Sa verificam acum conditia initiala de stabilitate robusta, deci
% functionare corecta la variația parametrilor. In acest scop, vom compara
% T=1-S cu 1/Winc (conditia reala, nu aproximata).
figure; bode(1-S, 1/Winc, points); grid on;
title('verificarea stabilitatii robuste');
legend('1-S','1/Winc');
pause; % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
 Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
 Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% Deci conditia de stabilitate robusta este indeplinita.
%
% Sa verificam acum conditia de performanta.
% S<1/Wp (conditia reala, nu aproximata).
figure; bode(S, 1/Wp, points); grid on;
title('verificarea performantei');
legend('S','1/Wp');
%
% Aditional putem revedea actiunea buclei asupra unei perturbatii.
figure; step(0.1*S)
%
% Raspunsul arata bine, deci amestecul este adus la raportul stoichiometric
% rapid, si fara oscilatii.
```

Execuția acestui fișier produce următoarele figuri.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

8. Figura 1 arată diagramele Bode pentru 3 turații (2000,3000,5000RPM). Unde sesizați variații mai mari ale modelului?
9. Folosiți figura 2 pentru a caracteriza stabilitatea sistemului.
10. Analiza stabilității cu diagramea Nyquist (Figura 4) în condițiile incertitudinii modelului, s-a făcut prin maparea domeniului de variație a frecvenței prin 50 de puncte. În jurul fiecărui punct de analiză avem exprimată incertitudinea cu un disc. De ce raza acestor discuri este mai redusă în partea dreaptă a figurii?
11. Ce sens fizic ati da condiției W_p ?
12. Considerați că am fi putut face o treabă mai bună la alegerea produsului DG în figura 6? Am ales doar o dependență proporțională cu $1/s$.
13. Comentați figura 10, răspunsul la semnal treapta aplicat funcției $1/(1+DG)$. Dacă acest semnal treapta reprezintă o schimbare în referință sistemului, cine este ieșirea? De asemenei, dacă considerăm sistemul general cu o intrare pentru referință și o intrare pentru perturbație, cum intervine acest termen $1/(1+DG)$ asupra perturbațiilor?

Problemă suplimentară

(14) Proiectați cu ajutorul diagramelor Bode un compensator cu adao de fază astfel încât sistemul în buclă închisă să fie caracterizat de o rezervă de fază $PM > 50^{\circ}$ și o lărgimea de bandă $\omega_{BW} > 20\text{rad/sec}$. Modelul instalației este caracterizat de:

$$G(s) = \frac{50000}{s \cdot (s + 10) \cdot (s + 50)}$$

LABORATORUL #6

REPREZENTAREA SISTEMELOR DINAMICE CU ECUAȚII DE STARE. ECHIVALENȚE ÎNTRE ECUAȚII DIFERENȚIALE, ECUAȚII DE STARE ȘI FUNCȚII DE TRANSFER.

1. Scopul laboratorului.
2. Descrierea sistemelor dinamice cu ecuații diferențiale (ODE).
3. Diagrame în forme canonice de reprezentare a sistemelor.
4. Echivalarea funcțiilor de transfer cu ecuații de stare.
5. Echivalarea ecuațiilor de stare cu funcții de transfer.
6. Ecuația caracteristică a unui sistem.
7. Controlul unui sistem de bandă magnetică, reprezentat cu ecuații de stare.

1. Scopul laboratorului.

Metodele de analiză și proiectare prezentate până acum fac parte din controlul clasic, dezvoltat în prima parte a secolului 20 pe baza transformatei Laplace. În ultimii ani, beneficiind de aportul calculatoarelor, s-au dezvoltat metode noi de analiză și proiectare. Dintre acestea, cele mai importante sunt metodele bazate pe caracterizarea sistemelor prin ecuații de stare.

Variabilele de stare permit descrierea ecuațiilor diferențiale de orice fel printr-un set de ecuații diferențiale de primul ordin, scrise într-o formă matriceală care ușurează rezolvarea lor cu ajutorul calculatoarelor.

In acest laborator, vom insista pe înțelegerea conceptului și avantajelor ecuațiilor de stare, precum și a echivalențelor între ecuațiile de stare, ecuații diferențiale și transformata Laplace. În laboratorul următor (#7), vom continua cu exemple de proiectare a sistemelor de control pe baza variabilelor și ecuațiilor de stare.

2. Descrierea sistemelor dinamice cu ecuații diferențiale (ODE).

Ecuațiile diferențiale ce descriu funcționarea unui sistem dinamic pot fi scrise sub forma următorului sistem de ecuații scrise în formă matriceală:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

în care $x(t)$ reprezintă un vector de variabile de stare, $u(t)$ reprezintă un vector al mărimilor de intrare (de comandă), $y(t)$ este un vector al mărimilor de ieșire. Prima relație reprezintă un sistem de ecuații diferențiale de primul ordin și se numește ecuație de stare. A doua relație se mai numește ecuație de ieșire și reprezintă un sistem de ecuații ce leagă variabilele de ieșire de cele de stare și de cele de intrare. În cazul cel mai des întâlnit în practică, al sistemelor SISO (o singură intrare, o singură ieșire sau „*single input – single output*”), vom avea doar o ecuație de ieșire. Matricea A se mai numește matrice de stare, matricea B este matrice de intrare, matricea C este matrice de ieșire, iar matricea D este numită matrice de tranziție directă.

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

Un exemplu de reprezentare cu ecuații de stare este o rețea de componente pasive (L , C , R) în care curenții prin inductanțe și tensiunile pe condensatori pot fi variabile de stare.

Un avantaj al reprezentării cu ecuații de stare este acela că se pretează la rezolvarea ușoară pe un calculator, fie digital, fie analogic. În plus, această metodă se poate extinde foarte ușor la analiza unor sisteme neliniare.

Deși reprezentarea cu ecuații de stare presupune ecuații diferențiale ordinare (de ordinul întâi), acesta nu este cazul de obicei în practică. Diverse sisteme dinamice au o funcționare fizică descrisă prin ecuații diferențiale de ordin superior. De exemplu, fie instalația cu o funcționare descrisă printr-o relație intrare- ieșire ($u(t) \rightarrow y(t)$) dată de ecuația:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_2 \cdot \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_n \cdot y = u(t)$$

Alegerea variabilelor de stare nu este unică și depinde de experiența proiectantului. În acest caz, să considerăm o alegere simplă a variabilelor de stare, astfel încât:

$$\begin{cases} x_n = y \\ x_{n-1} = \dot{y} \\ \vdots \\ x_2 = \ddot{y} \\ \cdots \\ x_1 = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{cases}$$

Se pot scrie astfel ecuațiile de stare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

și ecuația de ieșire:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot [x]$$

Să considerăm un exemplu numeric pe care să-l investigăm apoi în MATLAB.

Să se scrie ecuațiile de stare pentru sistemul dinamic descris de ecuația diferențială de ordinul al 3-lea:

$$2 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \cdot \frac{dy}{dt} + 8 \cdot y = 10 \cdot u(t)$$

Soluție: Vom avea 3 variabile de stare: $x_3 = y$, $x_2 = dy/dt$, $x_1 = d^2y/dt^2$.

Primele derive sunt: $d(x_3)/dt = x_2$, $d(x_2)/dt = x_1$,
 $2d(x_1)/dt + 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 10u \Rightarrow d(x_1)/dt = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5u$

Ecuațiile de stare devin:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \\ \cdot \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Limbajul MATLAB ne poate ajuta să automatizăm transformarea între ecuațiile de ordin superior și o formă a ecuațiilor de stare. Programul MATLAB în acest caz este (a_i =coeficienții ecuației diferențiale de ordin superior, k =coeficientul mărimii de intrare):

```
clear;
ai = [2 4 6 8];
k = 10;
%
n=length(ai)-1;
I=eye(n-1);
z=zeros(n-1,1);
zi=[I,z];
for m=1:n
    an(m)=-ai(m+1)/ai(1);
end
%
A=[an;zi]
B=[k/ai(1);z]
C=[1 z']
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de activitate la laborator):

- Scrieti ecuațiile de stare pentru ecuația diferențială:

$$7 \cdot \frac{d^4 y}{dt^4} + 3 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} = 6 \cdot u(t)$$

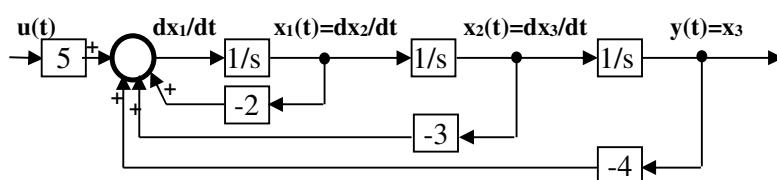
Puteți folosi direct programul MATLAB de mai sus, prin înlocuirea primelor două linii de program cu noile valori.

3. Diagrame în forma canonica de reprezentare a sistemelor.

În vederea simularii acestor sisteme, construim o reprezentare grafică a ecuațiilor numai pe baza semnului de integrare. Pentru exemplul considerat:

$$2 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \cdot \frac{dy}{dt} + 8 \cdot y = 10 \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dy}{dt} + 4 \cdot y = 5 \cdot u(t)$$

schema bloc în **forma canonica de control** este dată în figura următoare.



Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

2. Desenați forma canonică de control a ecuației de stare pentru exemplul considerat la (1).

Rolul și avantajele utilizării acestei reprezentări se vor vedea mai târziu, în proiectarea sistemelor de control pe baza reprezentării cu ecuații de stare. Să menționăm acum că forma canonică de control nu este unică reprezentare a unui sistem de ecuații de stare. Cum am spus, ecuațiile de stare ce descriu un anumit sistem nu sunt unice, sau exprimarea cu ecuații de stare nu este unică. Două alte forme prezintă importanță și ele se referă la forma canonică modală (pone în evidență polii funcției de transfer), și forma canonică de observare (toate stările sunt calculate din ieșiri).

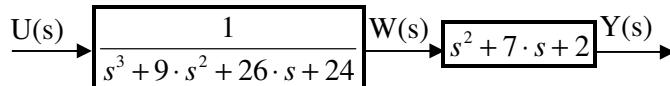
După cum vă amintiți de la studiul matricelor, în anumite condiții se pot defini transformări liniare între matrice de același ordin. În același mod, se pot defini transformări liniare (ca niște schimbări de variabilă) între ecuațiile de stare exprimate în aceste forme.

4. Echivalarea funcțiilor de transfer cu ecuații de stare.

Am văzut în numeroase exemple desfășurate în lucrările de laborator precedente că reprezentarea sistemelor dinamice cu funcții de transfer prezintă numeroase avantaje. Să vedem cum putem echivala cele două reprezentări – funcția de transfer și ecuațiile de stare. Să considerăm un sistem cu o singură intrare și o singură ieșire caracterizat prin funcția de transfer:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7 \cdot s + 2}{s^3 + 9 \cdot s^2 + 26 \cdot s + 24}$$

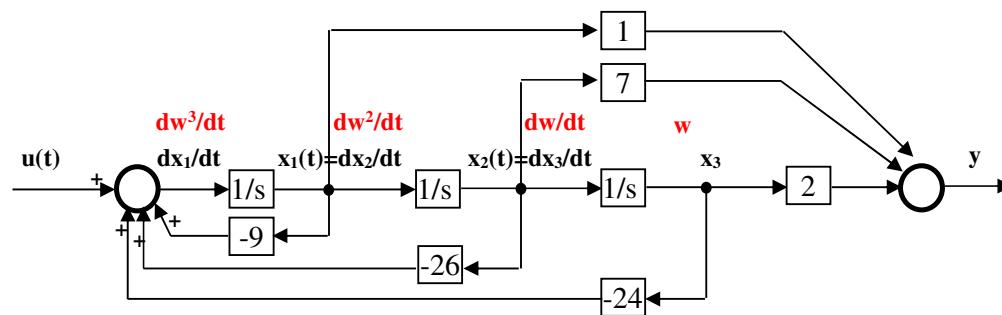
Putem considera o reprezentare bloc echivalentă (prin descompunere):



Ecuațiile se pot scrie:

$$\begin{cases} s^3 \cdot W(s) = -9 \cdot s^2 \cdot W(s) - 26 \cdot s \cdot W(s) - 24 \cdot W(s) + U(s) \\ Y(s) = s^2 \cdot W(s) + 7 \cdot s \cdot W(s) + 2 \cdot W(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{w}(t) = -9 \cdot \ddot{w}(t) - 26 \cdot \dot{w}(t) - 24 \cdot w(t) + u(t) \\ y(t) = w(t) + 7 \cdot \dot{w}(t) + 2 \cdot w(t) \end{cases}$$

Putem folosi aceste ecuații să desenăm forma canonică de control.



Se observă că această reprezentare grafică este asemănătoare cu cea derivată din ecuațiile de stare. Putem aşadar scrie prin identificare ecuațiile matriceale:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \\ \cdot \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = [1 \ 7 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Această echivalentă/reprezentare nu este unică, existând mai multe posibilități de alegere a variabilelor de stare.

MATLAB poate ajuta și în acest caz cu instrucțiunea: **[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)**
 În acest scop, puteți verifica programul următor:

```
clear;
num=[1 7 2]; den=[1 9 26 24];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

3. Determinați reprezentarea cu variabile de stare a unui sistem dinamic caracterizat prin următoarea funcție de transfer intrare-iesire:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 1}$$

5. Echivalarea ecuațiilor de stare cu funcții de transfer.

Să investigăm acum posibilitatea conversiei inverse, de la ecuațiile de stare la funcția de transfer.
 Vom aplica transformata Laplace ecuației de stare generice.

$$\begin{cases} s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \Rightarrow (s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s) \\ Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \end{cases} \Rightarrow \{Y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U + D \cdot U$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$$

MATLAB poate și de această dată să ne ajute cu instrucțiunile:

```
[num, den] = ss2tf(A,B,C,D,i)
[z, p, k] = ss2zp(A,B,C,D,i)
```

care ne oferă o funcție de transfer pentru cea de a *i*-a intrare și, respectiv, reprezentarea cu poli și zerouri a funcției de transfer. În cazul sistemelor cu o singură intrare și o singură ieșire, *i=1*.

Să verificăm secvența de program:

```
clear;
A=[-9 -26 -24; 1 0 0; 0 1 0]; B=[1 0 0]'; C=[1 7 2]; D=0;
[num, den] = ss2tf(A,B,C,D,1)
H=tf(num,den)
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

4. Determinați cu ajutorul MATLAB, funcția de transfer $u(t) \rightarrow y(t)$ ce corespunde sistemului de ecuații de stare:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = [8 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

6. Ecuația caracteristică a unui sistem.

Să privim cu atenție echivalența între funcția de transfer

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7 \cdot s + 2}{s^3 + 9 \cdot s^2 + 26 \cdot s + 24}$$

și ecuațiile de stare scrise în forma canonica de control:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \\ \cdot \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = [1 \quad 7 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Am văzut la studiul răspunsului în frecvență că rădăcinile numitorului funcției de transfer a unui sistem ne dă informații despre stabilitatea sistemului. Numeam aceste valori **poli (frecvențe naturale)** și doream să avem toți polii în partea stângă a planului complex pentru stabilitatea sistemului.

Se poate demonstra că polii din funcția de transfer a sistemului sunt valori proprii ale matricei de stare, deci:

$$\det(p_i \cdot I - A) = 0$$

Ecuația ce rezultă din calcularea acestui determinant se numește ecuația caracteristică a sistemului, care este identică cu ecuația derivată din numitorul funcției de transfer. Să calculăm acest lucru pentru exemplul considerat:

$$\det \begin{vmatrix} s+9 & 26 & 24 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (s+9) \cdot s^2 + 24 + 26 \cdot s = 0 \Leftrightarrow s^3 + 9 \cdot s^2 + 26 \cdot s + 24 = 0$$

Instrucțiunea **eig(A)** din programul MATLAB ne ajută să determinăm **polii** din funcția de transfer (rădăcinile ecuației caracteristice) fără a scrie formal funcția de transfer. Să verificăm secvența de program:

```
clear;
A=[-9 -26 -24; 1 0 0; 0 1 0]; B=[1 0 0]'; C=[1 7 2]; D=0;
p=eig(A)
```

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

5. Demonstrați că polii lui $G(s)$ de la punctul 3 „lucru în clasă” (rădăcinile numitorului) sunt aceiași cu valorile proprii ale matricii de tip „ A ” gasite de voi. Valorile proprii se pot găsi cu instrucțiunea **eig(A)** și reprezintă soluțiile ecuației caracteristice $\det(sI-A)=0$. Comparați cu rezultatele instrucțiunii **roots(P)**, unde P este un polinom cu forma dată de numitorul funcției de transfer $G(s)$.

Să privim acum numărătorul funcției de transfer. Rădăcinile ecuației derivează din polinomul de la numărător se numesc **zero-uri**. Coeficienții polinomului de la numărătorul funcției de transfer se regăsesc în matricea de tip „ C ” (de ieșire) din ecuațiile de stare – dacă ecuațiile de stare sunt în forma canonica de control.

Instrucțiunea **tzero** din programul MATLAB ne ajută să determinăm **zero-urile** din funcția de transfer fără a scrie formal funcția de transfer, direct din ecuațiile de stare. Să verificăm secvența de program:

```
clear;
A=[-9 -26 -24; 1 0 0; 0 1 0]; B=[1 0 0]'; C=[1 7 2]; D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
z=tzero(sys)
```

Se obține:

$\begin{matrix} z = \\ -6.7016 \\ -0.2984 \end{matrix}$

Care sunt rădăcinile lui $s^2+7s+2=0$.

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

6. Utilizați MATLAB pentru a determina explicit polii și zerourile din funcția de transfer corespunzătoare ecuațiilor de stare de la punctul 4 „lucru în clasă”, fără a scrie formal funcția de transfer. Observăm că ecuațiile de stare NU sunt scrise în forma canonica de control care permite echivalarea directă a ecuațiilor de stare cu funcții de transfer. Pentru acest exemplu, inversăm ordinea variabilelor de stare:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot \\ x_2 \\ \cdot \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = [8 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 8] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

și avem forma canonica de control. Vom arăta o formulă generală de transformare de la orice matrice de stare la forma canonica de control.

7. Comparați cu rezultatele găsite la punctul 4 pentru funcția de transfer.

Ecuațiile de stare ce descriu un anumit sistem nu sunt unice sau exprimarea cu ecuații de stare nu este unică. Să vedem acum două alte forme ce prezintă importanță: forma canonica modală (pune în evidență polii funcției de transfer) și forma canonica de observare (toate stările sunt calculate din ieșiri). La curs, am demonstrat formulele necesare pentru transformarea între diferite forme canonice. MATLAB poate ajuta în acest scop.

Pentru ecuațiile de stare exprimate mai sus avem:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = [8 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Să rulăm secvența de program:

```
clear;
A=[0 1; -6 -5]; B=[0 1]'; C=[8 1]; D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
z=canon(sys,'modal')
```

Obținem rezultatele pentru matricele de stare în forma canonică modală:

```
=====
a =

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & -2 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}$$


$$\text{Polii sistemului} = \boxed{\text{Rădăcinile ecuației caracteristice}}$$

=====
```

b =

u1	
x1	5.657
x2	7.211

c =

	x1	x2
y1	1.061	-0.6934

d =

u1	
y1	0

=====

Pentru a găsi forma canonica de control pentru un sistem oarecare, se calculează matricea de controlabilitate, pe baza căreia se definește o transformare matriceală.

- Matricea de controlabilitate pentru un sistem de ordin III

$$\mathcal{O} = [B \quad A \cdot B \quad A^2 \cdot B]$$

- Ultima linie a matricei de transformare liniară

$$t_n = [0 \quad 1] \cdot [C]^{-1}$$

- Matricea de transformare liniară

$$T = \begin{bmatrix} t_n \cdot A \\ t_n \end{bmatrix}$$

- Operarea transformării

$$A_o = T^{-1} \cdot A \cdot T \quad B_o = T \cdot B$$

$$C_o = C \quad D_o = D$$

Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

Următorul program MATLAB transformă matricele de stare de mai sus în forma canonica de control.

```
clear;
A=[0 1; -6 -5]; B=[0 1]; C=[8 1]; D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
co=ctrb(A,B);
tn=[0 1]*inv(co);
Ti=[tn*A; tn];
z=ss2ss(sys,inv(Ti))
```

Obținem rezultatele pentru matricele de stare în forma canonica de control:

=====

a =

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 \\ x_1 & -5 & -6 \\ x_2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Coeficienții numitorului

b =

$$\begin{matrix} u_1 \\ x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{matrix}$$

c =

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 \\ y_1 & 1 & 8 \end{matrix}$$

Coeficienții numărătorului

d =

$$\begin{matrix} u_1 \\ y_1 & 0 \end{matrix}$$

=====

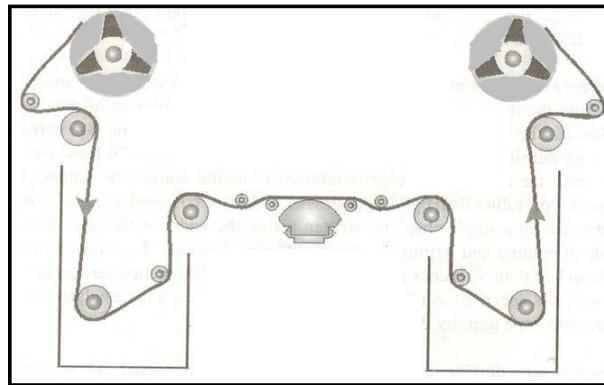
In final, să observăm că funcția de transfer derivată din ecuațiile de stare în forma canonica de control are numărătorul dependent de ecuația de ieșire $y(t)=Cx(t)$. La alegerea altel variabile de ieșire, vom avea o alta funcție de transfer dar cu același numitor. Deci orice dinamică a sistemului este legată de numitor, numărătorul având doar rolul de a defini ieșirea.

De exemplu, un sistem poate aveam două mărimi de interes pe care dorim să le urmărim ca variabile de ieșire. Fiecare astfel de variabilă de ieșire se va exprima în funcție de variabilele de stare în mod unic printr-o ecuație de ieșire cu coeficienții matricei de tip „C” diferenți. La fiecare astfel de variabilă de ieșire (și respectiv la fiecare astfel de matrice „C”) va corespunde altă funcție de transfer.

Ambele (sau toate) funcții(le) de transfer vor avea același numitor deoarece numitorul este dat de matricea de tip „A” care rămâne aceeași pentru orice variabilă de ieșire considerată. Deci studiul stabilității sistemului nu depinde de variabila de ieșire considerată ci de matricea de stare A (sau de numitorul comun al tuturor funcțiilor de transfer). În concluzie, matricea de tip „A” conține informații despre polii și stabilitatea sistemului, iar matricea de tip „C” despre zerourile sistemului.

7. Controlul unui sistem de bandă magnetică reprezentat cu ecuații de stare.

Ne vom întoarce la exemplul din **Laboratorul #1**, privind un sistem de stocare de date pe bandă magnetică. Figura următoare explică funcționarea și ecuațiile ce caracterizează acest sistem.



Ecuațiile diferențiale de mișcare devin:

$$Cuplu \quad J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = T_m - B_1 \cdot \omega_1 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_3 \right) + K \cdot (x_1 - x_3) \right] \cdot r_1$$

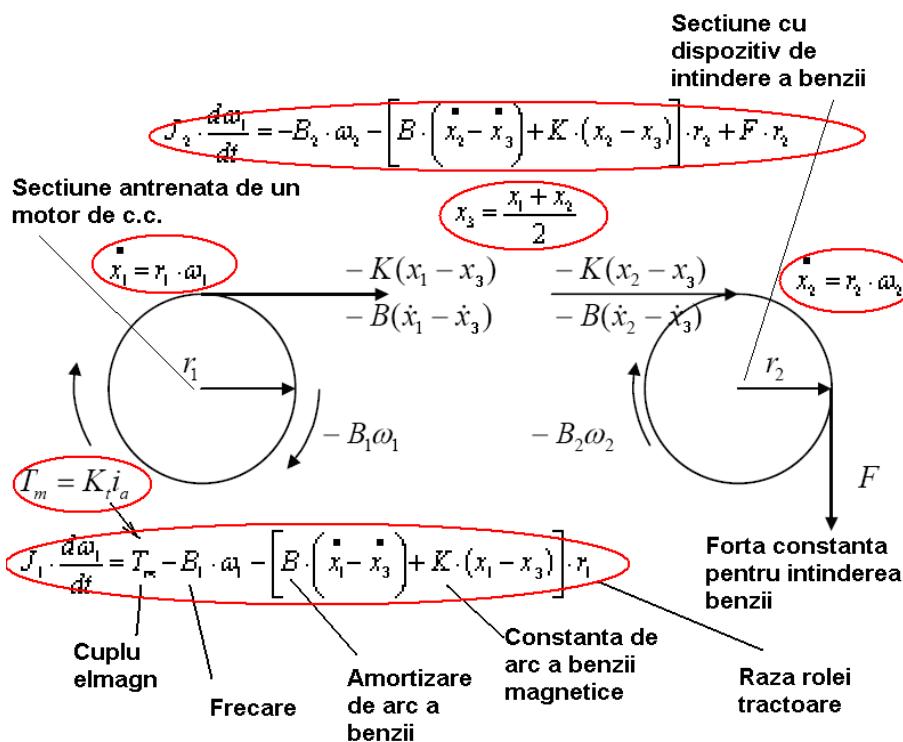
$$Cuplu \quad J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = -B_2 \cdot \omega_2 - \left[B \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_3 \right) + K \cdot (x_2 - x_3) \right] \cdot r_2 + F \cdot r_2$$

$$Motor \quad T_m = K_t \cdot i_a$$

$$Geometrie \quad \dot{x}_1 = r_1 \cdot \omega_1$$

$$Geometrie \quad \dot{x}_2 = r_2 \cdot \omega_2$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

Parametrii ce descriu sistemul practic sunt (unele date numerice au fost schimbate din primul laborator):

- Momentul de inerție $J_1=4 \cdot 10^{-5}$ kg m²
- Amortizarea benzii $B_1=1 \cdot 10^{-2}$ N m sec
- Raza discului $r_1=2 \cdot 10^{-2}$ m
- Constanta cuplului $K_t=3 \cdot 10^{-2}$ N m /A
- Constanta de deformare a fiecarui arc de suspensie $K=2 \cdot 10^4$ N/m
- Dispozitiv de absorție a șocului, într-un model asemănător cu frecarea $b=20$ N/m sec
- Raza celui de al doilea disc $r_2=2 \cdot 10^{-2}$ m
- Momentul de inerție $J=10^{-5}$ kg m²
- Amortizarea benzii $B_2=1 \cdot 10^{-2}$ N m sec
- Forța constantă $F=6$ N

O astfel de bandă trebuie să se deplaseze cu viteze de până la 5m/secundă, cu o pornire cât mai rapid posibilă. Într-o mișcare staționară a benzii, putem presupune că toate cele trei dimensiuni (x_1, x_2, x_3) evoluează la fel. Nu același lucru putem spune la pornirile și opririle repetitive cauzate de căutarea unor date pe banda magnetică, la diferite locații. Dinamica roții tractoare va determina deplasări diferite în x_1, x_2, x_3 , precum și tensiune (stress) în banda magnetică. Aceste cerințe se transformă în date de proiectare cerând timp de stabilizare la un semnal treaptă de intrare sub 10msec, și cu o suprareglare sub 10% pentru dimensiunea măsurabilă x_2 . Putem de asemenea urmări tensiunea în bandă și cere o variație minimală la semnal treaptă, urmată de o valoare staționară nulă.

Se observă că avem 5 deriveate independente în ecuațiile ce descriu funcționarea sistemului, deci putem spune că sistemul este de ordinul al 5-lea. Vom re scrie aceste ecuații în forma ecuațiilor de stare, pentru un model unitar și pentru mai multe posibilități de proiectare a sistemului de compensare. Variabilele de stare (urmărim derivele de primul ordin sau scriem derivele de ordin superior ca derivele de primul ordin) vor fi:

$$\dot{x} = [x_1 \quad \omega_1 \quad x_2 \quad \omega_2 \quad i_a]^T$$

Mărimea de intrare este tensiunea aplicată motorului de c.c.

$$u(t) = e$$

Sistemul ecuațiilor de stare devine:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K \cdot r_1}{2 \cdot J_1} & -\frac{B_1}{J_1} - B \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{2 \cdot J_1} & K \cdot \frac{r_1}{2 \cdot J_1} & \frac{B \cdot r_1 \cdot r_2}{2 \cdot J_1} & \frac{K_1}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & r_2 & 0 \\ \frac{K \cdot r_2}{2 \cdot J_2} & \frac{B \cdot r_1 \cdot r_2}{2 \cdot J_2} & -\frac{K \cdot r_2}{2 \cdot J_2} & -\frac{B \cdot r_2^2}{2 \cdot J_2} - \frac{B_2}{J_2} & 0 \\ 0 & -K_e & 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \omega_1 \\ x_2 \\ \omega_2 \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [e]$$

Ne interesează deplasarea uniformă a benzii lângă capul de citire. Am considerat această deplasare a benzii lângă capul de citire ca fiind media celor două deplasări la roțile tractoare și respectiv de întindere. Această mărime (x_3) poate fi considerată ca mărime de ieșire, îndeplinind scopul controlului nostru de a obține o deplasare uniformă a benzii în dreptul capului de citire.

Putem scrie ecuația de ieșire:

$$H_3 = [0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0]$$

Proiectarea unei legi de compensare după această mărime de ieșire pare logică, dar este greu de realizat pentru că nu putem măsura ușor deplasarea x_3 (lângă capul de citire), pentru a închide bucla de reacție. Din acest motiv, vom evalua performanțele pentru x_3 , dar vom închide bucla de reacție după x_2 , deplasarea de lângă motorul de c.c., care poate fi ușor evaluată cu un traductor de tip encoder.

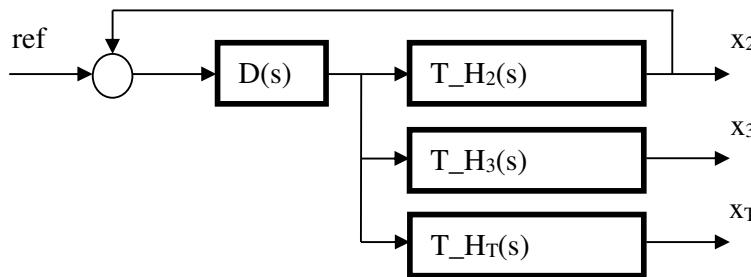
$$H_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

O altă mărime de interes poate fi considerată tensiunea benzii (notată cu T , **atenție la deosebirea față de T_m =cuprul electromagnetic**) care trebuie menținută sub un anumit nivel pe toată durata funcționării, astfel încât să nu distrugem banda magnetică.

$$\begin{aligned} T &= K \cdot (x_3 - x_1) + B \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_1) = K \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 \right) + B \cdot \left(\frac{r_1 \cdot \omega_1 + r_2 \cdot \omega_2}{2} - r_1 \cdot \omega_1 \right) = \\ &= \left(-\frac{K}{2} \right) \cdot x_1 + \left(-\frac{B \cdot r_1}{2} \right) \cdot \omega_1 + \left(\frac{K}{2} \right) \cdot x_2 + \left(\frac{B \cdot r_2}{2} \right) \cdot \omega_2 + 0 \cdot i_a \end{aligned}$$

De unde

$$H_T = [-0.2 \ -0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0] \text{ pentru } T = H_T \cdot x$$



La exprimarea valorilor numerice pentru ecuațiile de stare și funcțiile de transfer, vom observa diferențe mari între coeficienți, care ne-ar sugera o scalare a variabilelor de stare. Vom face o **scalare a timpului**, prin considerarea unei unități de timp egală cu milisecunde. În acest scop, modificăm ecuația de stare prin:

$$\frac{dx}{dt} = F \cdot x + G \cdot u \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{W} \cdot F \cdot x + \frac{1}{W} \cdot G \cdot u \\ W = 1000 \end{cases}$$

Dorim de asemenei să **scalăm distanțele** $x_{1,2,3}$ pentru a considera unități de măsură de ordinul zecilor de micrometri. În acest scop trebuie să modificăm matricele de stare printr-o transformare liniară caracterizată prin matricea:

$$S = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_s = S^{-1} \cdot F \cdot S \\ G_s = S^{-1} \cdot G \end{cases}$$

Programul MATLAB va include cele două relații pentru scalarea timpului și a distanțelor.

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

Vom observă că aplicarea metodelor clasice de proiectare a controlului pe baza transformatei Laplace este anevoie, conduce la o formă complicată a legii de compensare, și conduce la rezultate care ar putea fi și mai bune. Laboratorul viitor vom utiliza modelul dezvoltat cu ecuații de stare pentru a dezvolta o lege de control dedusă explicit prin ecuațiile de stare, fără utilizarea transformatei Laplace.

Acum puteți lansa programul *L6_Tapex.m*.

```
clear;
echo on;
%-----
% Componentele sistemului
J1=4*1e-5;    % [kg m2]
J2=1*1e-5;    % [kg m2 ]
%
B1=0.01;      % [N m sec]
B2=0.01;      % [N m sec]
%
K=4e4;        % [N/ m]
B=20;         % [N/m sec]
%
r1=2*1e-2;    % [ m]
r2=2*1e-2;    % [ m]
%
F=6;          % [ N]
Kt=0.03;
Ke=0.03*1000;
R=1;          % [Ohm]
L=1*1e-3;     % [H]
%
pause  % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Matricile de stare F, G
%
a1=[0 r1 0 0 0 ];
a2=[-K*r1/(2*J1) -(B1/J1)-(B*r1*r2/(2*J1)) K*r1/(2*J1) B*r1*r2/(2*J1) Kt/J1];
a3=[0 0 0 r2 0 ];
a4=[K*r2/(2*J2) B*r1*r2/(2*J2) -K*r2/(2*J2) -(B2/J2)-(B*r2*r2/(2*J2)) 0];
a5=[0 -Ke 0 0 -R/L];
F=[a1' a2' a3' a4' a5'];
%
g1=[0 0 0 0 1];
G=[g1'];
%
pause  % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
%
% Observam ca nu ne place modul in care sunt afisati coeficientii,
% datorita diferenelor mari intre valori.
%
% Ar fi avantajos sa scalam timpul si deplasarea.
% Prin conventie vom lucra cu zeci de micrometri si cu milisecunde.
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
%  
% Scalarea timpului (timpul apare doar in derivate):  
Fst=F/1000; Gst=G;  
% Scalarea distanteelor (scrise dupa scalarea timpului):  
t1=[1e-5 0 0 0 0];  
t2=[0 1 0 0 0];  
t3=[0 0 1e-5 0 0];  
t4=[0 0 0 1 0];  
t5=[0 0 0 0 1];  
T=[t1' t2' t3' t4' t5'];  
Fs=inv(T)*Fst*T;  
Gs=inv(T)*Gst;  
%  
% Dupa scalare, matricile de stare sunt Fs, Gs  
Fs  
Gs  
pause % Apasati orice tastă pentru a continua  
%-----  
%  
% Matricile de ieșire:  
% deplasarea x2  
H2=[0 0 1 0 0];  
% deplasarea x3  
H3=[0.5 0 0.5 0 0];  
% tensiunea în banda  
HT=[-0.2 -0.2 0.2 0.2 0];  
% Se observă că putem avea una sau mai multe marimi de ieșire.  
%  
pause % Apasati orice tastă pentru a continua  
%-----  
%  
% Oricare funcție de transfer de la intrarea "e" (care este o tensiune  
% electrică de control) la oricare dintre aceste ieșiri, va avea la numitor  
% un polinom cu coeficienți dependenți de coeficientii matricei de stare F.  
%  
% Să verificăm acest lucru:  
[num,den]=ss2tf(Fs,Gs,H2,0,1);  
num=round(10000*num)/10000; den=round(10000*den)/10000;  
T_H2=tf(num,den)  
%  
[num,den]=ss2tf(Fs,Gs,H3,0,1);  
num=round(10000*num)/10000; den=round(10000*den)/10000;  
T_H3=tf(num,den)  
%  
[num,den]=ss2tf(Fs,Gs,HT,0,1);  
num=round(10000*num)/10000; den=round(10000*den)/10000;  
T_HT=tf(num,den)  
%  
pause % Apasati orice tastă pentru a continua  
%-----  
%  
% Stabilitatea sistemului în bucla deschisă (modelul instalatiei)  
% depinde de radacinile acestui polinom de la numitor (polii fdt).
```

**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
% Aceste valori se pot determina direct din matricea F.  
eig(Fs)  
% care se pot compara cu polii fdt T_H2.  
pole(T_H2)  
% Se observa ca cele trei functii de transfer deduse mai sus au acelasi  
% numitor, deci aceeasi poli.  
% Se observa ca polii acestor functii de transfer sunt aceeasi cu valorile  
% proprii ale matricelor, valori proprii determinate cu instructiunea eig.  
% Avem un pol in origine, si 4 poli in partea stanga a planului complex.  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Conditii de proiectare cer un timp de stabilizare de 12msec la semnal  
% rampa aplicat semnalului x2 si o suprareglare minima la semnal treapta.  
%  
% Verificam ce am obtine fara nici o compensatie.  
s=tf('s');  
figure; step(T_H2/s); xlabel('msec');  
title('raspunsul lui x2 la semnal rampa'); grid on;  
figure; step(T_HT); xlabel('msec');  
title('raspunsul tensiunii T la semnal treapta'); grid on;  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
% Fdt pentru HT poate fi simplificata printr-un termen "s".  
% Verificam si aceasta forma a lui HT.  
%  
num2=num(1:5); den2=den(1:5); T_HT=tf(num2,den2);  
figure; step(T_HT); xlabel('msec');  
title('raspunsul tensiunii la semnal treapta (2)'); grid on;  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Vom considera un control in bucla inchisa dupa deplasarea din vecinatatea  
% motorului electric de c.c. (x2), care este mai usor de masurat.  
% Sa analizam fdt T_H2 pentru a proiecta compensarea pe baza metodelor  
% traditionale legate de transformata Laplace.  
%  
figure; rlocus(T_H2);  
title('Locul radacinilor pentru H2'); sgrid;  
%  
pause % Apasati orice tasta pentru a continua  
%-----  
%  
% Vom considera o compensare dubla cu avans de faza la z=0.75, p=5,  
% cu obiectivul deplasarii polilor sistemului catre valori mai negative.  
% Zero-ul dublu la 0.75 ar trebui sa corespunda polilor H2 in s=0 si -0.5.  
%  
Dc=(500/75)*tf([1 0.75],[1 5]); Ds=series(Dc,Dc);  
OL=Ds*T_H2;  
figure; rlocus(OL);
```

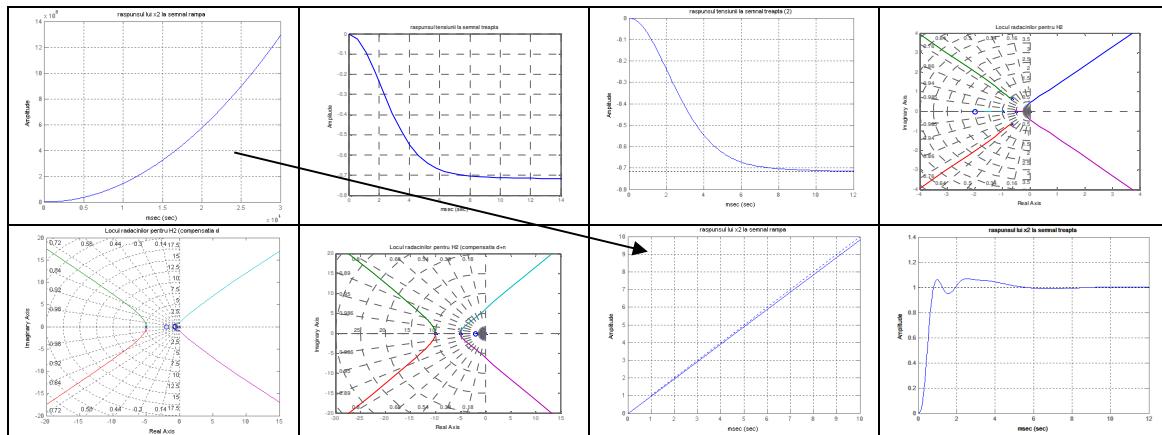
**Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII**

```
title('Locul radacinilor pentru H2 + compensatia Ds'); sgrid;
%
% Este recomandabil sa faceti "zoom" langa originea planului complex
% pentru a vedea in detaliu pozitia polilor si zerourilor.
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Putem incerca sa imbunatatim rezultatele printr-o compensare notch langa
% polii complex conjugati -0.6371+/-0.6669i, apropiati de axa imaginara.
%
Dn=100*tf([1 1 1],[1 2*10 100]);
D=series(Ds,Dn);
OL=D*T_H2;
figure; rlocus(OL);
title('Locul radacinilor pentru H2 + compensarea (Ds+Dn)'); sgrid;
%
% Este recomandabil sa faceti "zoom" langa originea planului complex
% pentru a vedea in detaliu pozitia polilor si zerourilor.
%
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Citim de pe grafic -> putem folosi un castig K<3.1. Consideram K=1.
%
% Am dori sa verificam ce am obtine cu aceasta compensatie.
%
% Dar nu stim cum vor evolua tensiunea benzii "T" si cu deplasarea "x3"
% daca controlam doar deplasarea "x2".
%
% Pentru analiza, trebuie sa consideram o referinta pentru x2.
%
% Bucla de reactie unitara este inchisa in jurul compensarii proiectate
% si a fdt H2 (pentru dependenta "e" -> x2), producand fdt in
% bucla inchisa CL.
%
CL=feedback(D*T_H2,1);
figure; step(CL/s); hold on; plot(1:10000,1:10000,'!'); xlabel('msec');
title('raspunsul lui x2 la semnal rampa'); axis([0, 10, 0, 10]); grid on;
figure; step(CL); xlabel('msec');
title('raspunsul lui x2 la semnal treapta'); grid on;
pause % Apasati orice tasta pentru a continua
%-----
%
% Tensiunea electrica "e" (care este elementul de actionare dintre
% sistemul de control D si fdt a instalatiei H2) se calculeaza cu:
% e= D*error=D*(R-x2)=D*(R-[DH2/(1+DH2)]*R)=D*R*[1/(1+D*H2)]
%
% Tensiunea (stress) in banda se calculeaza cu:
% T=HT*D*R*[1/[1+D*H2]}=(HT/H2)*[DH2/(1+DH2)]*R=(HT/H2)*CL*R
% si reprezinta modul in care se modifica tensiunea (stress) in banda
```

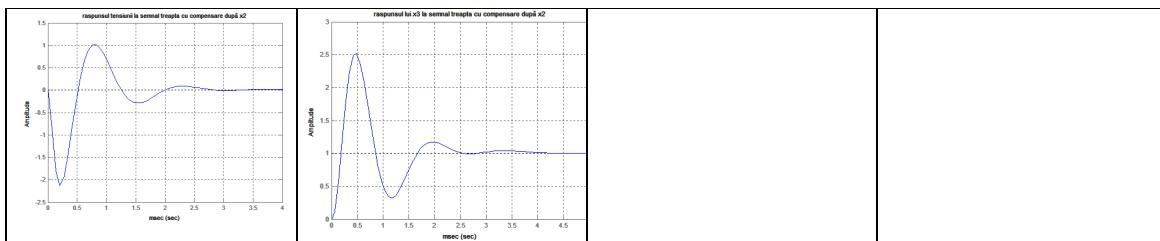
Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII

```
% atunci cand se aplica o modificarea treapta ca referinta pentru
% deplasarea x2.
%
% Afisam raspunsul tensiunii T la aplicarea unui semnal treapta pentru x2
%
% In acest scop trebuie sa simplificam functia de transfer CL*T_HT/T_H2
% ... dupa versiunea MATLAB 2014, aceasta se poate face cu instructiunea
% simplifyFraction(..)
%
% Aici vom prezenta un program care face asta.
%
Zero-HT=setdiff(zero(T_HT),intersect(zero(T_HT),zero(T_H2)));
Pole-HT=setdiff(pole(T_HT),intersect(pole(T_HT),pole(T_H2)));
Zero-H2=setdiff(zero(T_H2),intersect(zero(T_HT),zero(T_H2)));
Pole-H2=setdiff(pole(T_H2),intersect(pole(T_HT),pole(T_H2)));
[z,p,k-HT]=zpkdata(T_HT); [z,p,k-H2]=zpkdata(T_H2);
TMP=(k-HT/k-H2)*CL*zpk(Zero-HT,Zero-H2,1)/zpk(Pole-HT,Pole-H2,1);
% Simplificat CL*T_HT/T_H2
figure; step(TMP); xlabel('msec');
title('raspunsul tensiunii la semnal treapta cu compensare după x2');
grid on;
%
% Afisam raspunsul deplasarii x3 la aplicarea unui semnal treapta pentru x2
Zero-H3=setdiff(zero(T_H3),intersect(zero(T_H3),zero(T_H2)));
Pole-H3=setdiff(pole(T_H3),intersect(pole(T_H3),pole(T_H2)));
Zero-H2=setdiff(zero(T_H2),intersect(zero(T_H3),zero(T_H2)));
Pole-H2=setdiff(pole(T_H2),intersect(pole(T_H3),pole(T_H2)));
[z,p,k-H3]=zpkdata(T_H3); [z,p,k-H2]=zpkdata(T_H2);
% Simplificat CL*T_H3/T_H2
TMP=(k-H3/k-H2)*CL*zpk(Zero-H3,Zero-H2,1)/zpk(Pole-H3,Pole-H2,1);
figure; step(TMP); xlabel('msec');
title('raspunsul lui x3 la semnal treapta cu compensare după x2');
grid on;
%-----
```

Prin rularea programului se obțin următoarele figuri.



Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iasi
Facultatea Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Disciplina „Sisteme automate de control”, Anul V / SEIII



ATENȚIE: Toate graficele în timp sunt scalate în milisecunde.

ATENȚIE: Toate dimensiunile x_1, x_2, x_3 sunt scalate în zeci de micrometri.

Lucru în clasă (rezultatele se includ în raportul de laborator):

8. Urmăriți funcțiile de transfer determinate pentru x_2 (T_H2), x_3 (T_H3), și tensiunea T (T_HT). Ce corelații puteți face cu ecuațiile de stare date?
 9. Care este ecuația caracteristică a acestui sistem?
 10. Ce puteți spune despre răspunsul ieșirii x_3 la semnal rampă, și despre răspunsul tensiunii T la semnal treaptă, fără nici un sistem de compensație (figurile 1 și 3)?
 11. Cum s-a putut corecta răspunsul oferit de MATLAB pentru funcția de transfer T_HT ce conține și zero și pol în origine? (comparați figurile 2 și 3).
 12. Care este sensul fizic al rezultatului din figura 3 (acesta este un răspuns la semnal treaptă)?
 13. Recunoșcând că modelul instalației este destul de complex și varianta prezentată de proiectare a compensării este oarecum laborioasă, cum ați povestit în cuvinte simple strategia de compensare pe baza locului rădăcinilor, cu rezultatele din figurile 4, 5 și 6? Cum evoluează locul rădăcinilor de la figura 4 la figura 5, apoi la figura 6?
- Observație:** Locul rădăcinilor prezentat în figura 6 devine instabil pentru $K=3$. Am considerat $K=1$ pentru graficele prezentate în figurile 7,8,9.
14. Care este sensul reprezentării grafice din figura 7? Cum ați denumi distanța dintre cele două linii?
 15. Comparați rezultatele din figurile 7,8 (după compensație) cu răspunsurile din figurile 1,3 (înainte de compensație). Care este sensul valorii finale din figura 8?
 16. Confirmați pe figura 8 valoarea suprareglării pentru controlul după x_2 , și comparați acest rezultat cu valoarea cerută în enunțul problemei de proiectare. De asemenei determinați timpul de stabilizare și comparați cu datele de proiectare.
 17. Cum ați putea reduce oscilația de la începutul răspunsului din figura 9 (care ar putea reprezenta o forță - rezultatul este în Newtons - peste rezistența benzii)?

Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Semestrul 2

Sisteme Automate de Control *** Plan

1

Planul cursului



	22 FEB	7 MAR	8 MAR	4 APR	19 APR	10 MAI	24 MAI
Curs	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore
	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore	2 ore
	Introducere (1) + Modelare (3)	Raspuns Dinamic (4)	Proprietatile sistemelor cu reacție (4)	Locul Radacinilor (4)	Metoda Raspuns Frecventa (4)	Raspuns Frecventa (2) Var. stare (2)	Var. Stare (4)
	Tema	DA	DA	DA	DA	DA	NU

	1 MAR	15 MAR	29 MAR	12 APR	17 MAI	31 MAI	
Laborator	4 ore	4 ore	4 ore	4 ore	4 ore	4 ore	
	Introducere in MATLAB Exemple de modele	Efectul pozitiei polilor si/sau zerourilor	Exercitii cu P, I, D	Proiectare cu metoda locului radacinilor	Proiectare cu metoda raspunsului in frecventa	Echivalente SS/TF/ODE	

Cursul din 22 Martie se va recupera, joi, 7 martie 2019, orele 16-20, sala P8.

Sisteme Automate de Control *** Plan

2

Planul cursului

Saptamana 01 = Introducere in sisteme automate de reglaj (1 ora)

- Ora 01 = Introducere si definitii.

Saptamana 01 = Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 02 = Modelarea sistemelor mecanice plecand de la ecuatia de miscare.
- Ora 03 = Modelarea sistemelor electrice, electromecanice, termice sau de curgere.
- Ora 04 = Linearizarea si scalarea sistemelor

Saptamana 02 = Raspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 05 = Rolul transformatiei Laplace
- Ora 06 = Efectul locatiei polilor in planul complex
- Ora 07 = Stabilitatea sistemelor
- Ora 08 = Analiza pe calculator. Metode de proiectare asistata de calculator.

Saptamana 03 = Proprietatile sistemelor de control cu reactie (4 ore)

- Ora 09 = Caracteristicile unui control cu reactie
- Ora 10 = Control clasic P, I, D
- Ora 11 = Urmarea unei referinte variabile.
- Ora 12 = Control digital. Efectele digitizarii.

Sisteme Automate de Control *** Plan

3

Planul cursului

Saptamana 04 = Proiectare cu metoda locului radacinilor (4 ore)

- Ora 13 = Definirea metodei locului radacinilor.
- Ora 14 = Reguli pentru desenarea locului radacinilor
- Ora 15 = Compensarea sistemelor automate de control
- Ora 16 = Exemple de proiectare avansata deriveata din metoda locului radacinilor

Saptamana 05+06 = Proiectarea pe baza raspunsului in frecventa (6 ore)

- Ora 17 = Recapitulare: Raspunsul in frecventa al sistemelor si diagramele Bode.
- Ora 18 = Stabilitatea sistemelor automate de control (Nyquist, limite)
- Ora 19 = Observatii finale stabilitate
- Ora 20 = Proiectarea sistemelor PD + Proiectarea sistemelor cu avans de faza.
- Ora 21 = Proiectarea sistemelor PI + Proiectarea sistemelor cu intarziere de faza.
- Ora 22 = Consideratii practice legate de proiectare.

Saptamana 06+07 = Proiectarea cu ajutorul variabilelor de stare (6 ore)

- Ora 23 = Transformarea ecuatiilor diferențiale în ecuații de stare. Forme Canonice.
- Ora 24 = Proiectarea legii de control.
- Ora 25 = Introducerea referintei. Observatii asupra zero-urilor din sistem.
- Ora 26 = Alegerea polilor pentru o proiectare buna.
- Ora 27 = Estimatori și control cu estimare.
- Ora 28 = Control integral și urmărire robustă ("robust tracking").

Sisteme Automate de Control *** Plan

4

Planul cursului

Cursul urmărește lucrarea

“Feedback Control of Dynamic Systems”

Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini

Editura Prentice Hall;

- | | |
|---|-----------------|
| <input type="checkbox"/> Editia 4-a (15 ianuarie 2002) | ISBN 0130323934 |
| <input type="checkbox"/> Editia 5-a (10 noiembrie 2005) | ISBN 0131499300 |
| <input type="checkbox"/> Editia 6-a (03 octombrie 2009) | ISBN 0136019692 |

Planul cursului

Sistemul de evaluare:

Temă de casă, săptămânale (6 teme x 4 pct)	24%	(2.40)
Laborator (6 referate x 5 pct, prezenta)	30%	(3.00)
Examen final (teorie + probleme)	50%	(3.00+2.00=5.00)

- Opțional, se pot obține până la 10% dintr-un referat de sinteză pe tema “*Performanță versus robustețe în proiectarea sistemelor automate de control*”.
 - Participarea la curs va fi recompensată în nota finală cu până la 10%.
 - Nota minima de promovare este 4.50.
-

Contact instructor

Conferențiar Dr.Ing. **Dorin O. Neacșu**
Birou ETTI - III.39
Email dneacsu@etti.tuiasi.ro



Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2

Capitolul 1 *** Introducere

Saptamana 01 = Introducere in sisteme automate de reglaj (1 ora)

- Ora 01 = Introducere si definitii.

Saptamana 01 = Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 02 = Modelarea sistemelor mecanice plecand de la ecuatia de miscare.
- Ora 03 = Modelarea sistemelor electrice, electromecanice, termice sau de curgere.
- Ora 04 = Linearizarea si scalarea sistemelor

Capitolul 1 *** Introducere

Definiții

- **Control manual** vs. **control automat**
 - O persoană conducând un autovehicul = control manual
 - Temperatura controlată de un termostat = control automat
- Sistemele proiectate să mențină o ieșire la o valoare prescrisă se numesc **regulatoare**
 - **Exemplu:** controlul temperaturii prin termostat, controlul volumului unui amplificator audio, controlul altitudinii unui satelit, și.a.m.d.
- Sistemele proiectate să urmărească o referință variabilă se numesc **sisteme servo** sau **de urmărire**.
 - **Exemplu:** Circuite PLL, sisteme de automatizări cu motoare electrice și operare după un profil, mașini unele, și.a.m.d.
- Vom adresa **sisteme liniare și invariabile în timp**.
 - Sistemul este descris prin ecuații diferențiale liniare
 - Aceste ecuații sunt invariabile în timp, coeficienții lor nu variază cu condițiile de mediu (temperatură, umiditate), condițiile de circuit, sau uzura fizică a componentelor.

Capitolul 1 *** Introducere

Definiții

- Sisteme de control în **bucă deschisă** sau **bucă închisă**.
- Sistemele în buclă închisă folosesc o măsurare a mărimii de ieșire
 - Se mai numesc sisteme cu reacție (**feedback control**).

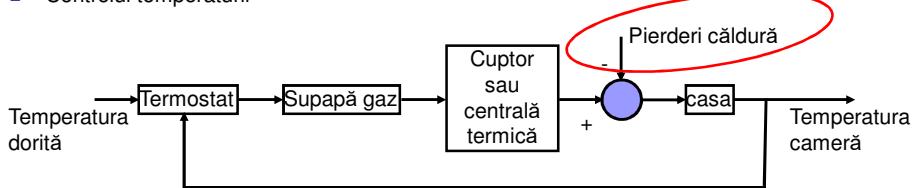
Feed-back versus feed-forward:

- Dacă un senzor din sistem poate furniza informație despre traectoria ieșirii sistemului, la un moment din viitor, vom încerca să folosim această informație printr-un control predictiv.
 - O formă specială este **feedforward control**.
 - **Exemplu:** Controlul presiunii aburului unei centrale termo-electrice – prin măsurarea cerinței de energie electrică se poate anticipa o creștere iminentă a presiunii.

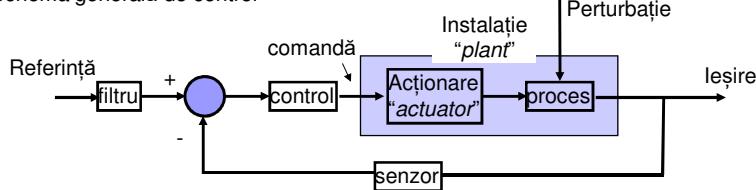
Capitolul 1 *** Introducere

Exemple de sisteme cu reacție:

- Controlul temperaturii



- Schema generală de control



- Orice control în buclă deschisă nu ar ține cont de perturbații sau de variația parametrilor.
- Ideal ar fi să proiectăm procesul controlat și controlul deodată, pentru a ține cont de particularitățile fiecărui (pentru a avea un sistem liniar și invariabil în timp, "LTI").
 - Dar ... de obicei controlul se proiectează după ce instalația este construită.

Capitolul 1 *** Introducere

Ce urmărim la proiectarea unui sistem de control? (1)

- Ne punem problema proiectării controlului pentru satisfacerea unor performanțe legate de funcționarea sistemului controlat, în condițiile cunoașterii modelului sistemului controlat (instalație, "plant").

1. Indici de performanță de regim statonian

- Eroarea stationară – deviația permanentă de la valoarea dorită, în regim staționar

2. Indici de performanță de regim dinamic (tranzitoriu)

- Răspunsul la semnal treaptă, semnal impuls, sau semnal rampă pentru o caracterizare a comportării la semnale variabile (mai cunoscute din analiza în frecvență).
 - Timpul de răspuns – Cât de repede sistemul ajunge la referința dorită?

3. Stabilitatea sistemului

- Pentru o valoare de intrare, ieșirea rămâne într-un domeniu finit de valori.

Capitolul 1 * Introducere**

Ce urmărim la proiectarea unui sistem de control? (2)

- Vom analiza răspunsul dinamic al sistemelor pentru o mai bună înțelegere a cerințelor de proiectare.
 - Dacă răspunsul dinamic nu este satisfăcător, vom introduce controlul în buclă închisă (= vom introduce o reacție după una sau mai multe variabile de ieșire).
 - Dacă o reacție printr-un circuit proporțional (căștiig fără modificarea fazelor) nu este suficient, vom folosi o compensare în frecvență, ce va ajusta faza și amplitudinea diferit, la frecvențe diferite.
- Proiectarea unui control în buclă închisă, cu căștiig mare, ar îmbunătăți regimul dinamic (ar reduce rapid erorile), dar există limite pentru valoarea maximă a căștiigului.
 - Exemplu: O instalatie de amplificare de la microfon la difuzor cu căștiig prea mare produce zgomote nedorite (oscilații).

2019 *** Sisteme Automate de Control

7

Capitolul 1 * Introducere**

Structura unui sistem automat de control

MODELARE

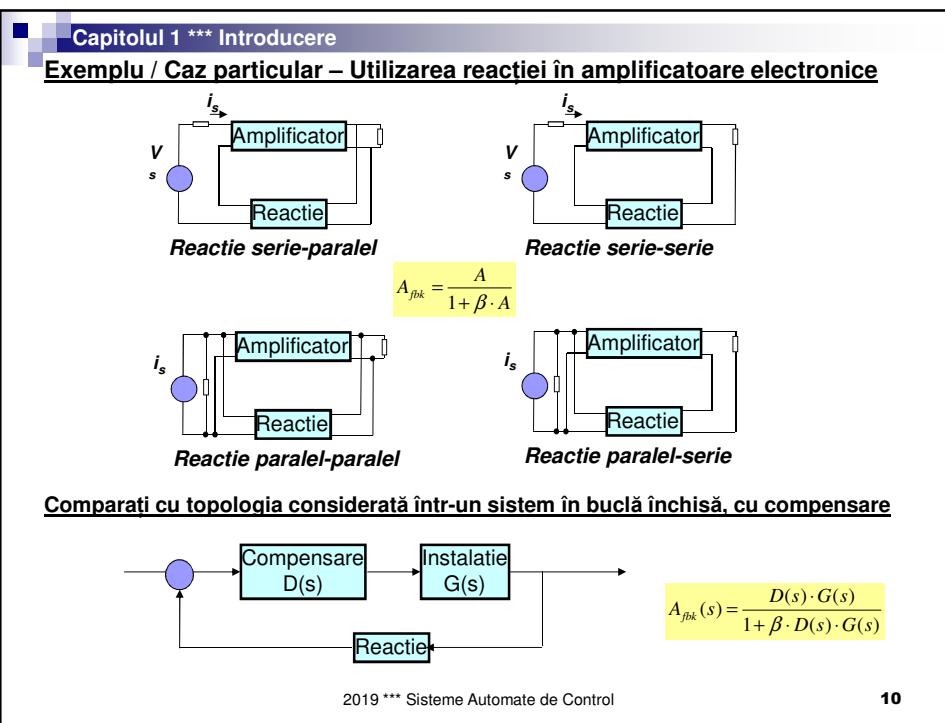
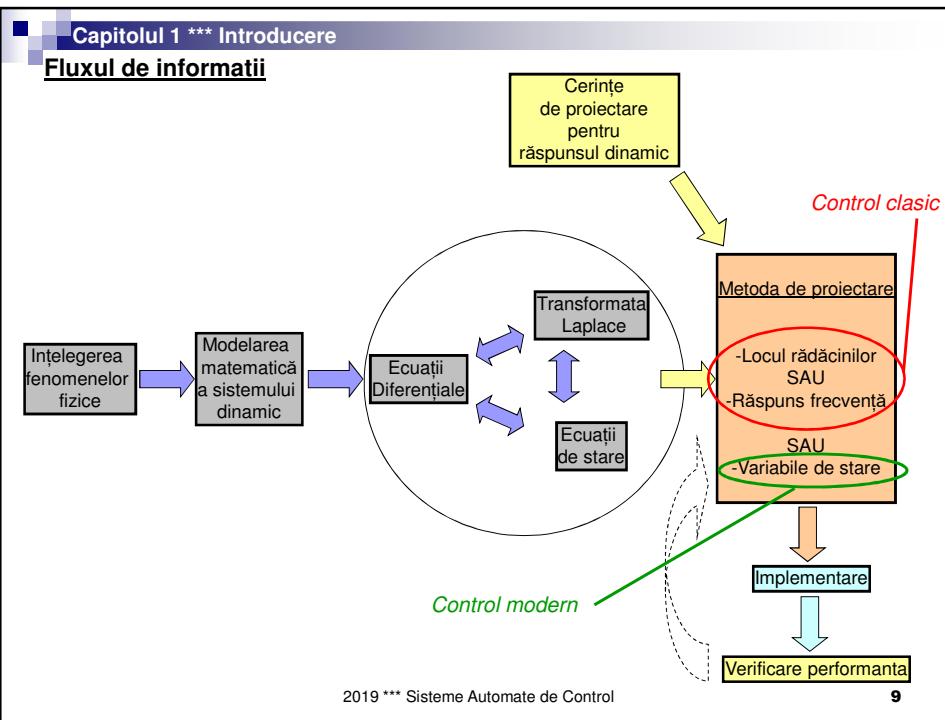
- Cea mai simplificată formă de descriere a unui sistem automat de control

PROIECTARE

- Avem nevoie de descrierea matematică a sistemului ce urmează a fi controlat.
 - Această activitate se numește modelare.
 - Modelarea sistemelor bazate pe circuite electrice
 - Modelarea sistemelor mecanice bazate pe ecuații de mișcare
 - Modelarea sistemelor electromecanice (o combinație de circuit electric și dispozitiv mecanic).
 - Modelarea sistemelor termice sau hidraulice.
 - De cele mai multe ori avem sisteme multi-disciplinare ("multi-physics").
- Pe baza modelului se proiectează legea de control (compensarea sistemului):
 - Metoda de proiectare prin analiza locului rădăcinilor
 - Metoda de proiectare prin analiza în frecvență
 - Metoda de proiectare prin utilizarea variabilelor de stare (sau ecuații diferențiale)
- Implementarea legilor de control se poate face cu un circuit electronic analog sau digital:
 - Multe metode de proiectare vor fi inherent analogice
 - Implementarea în digital va presupune emularea legilor analogice sau lucrul cu metode specifice digitale.

2019 *** Sisteme Automate de Control

8

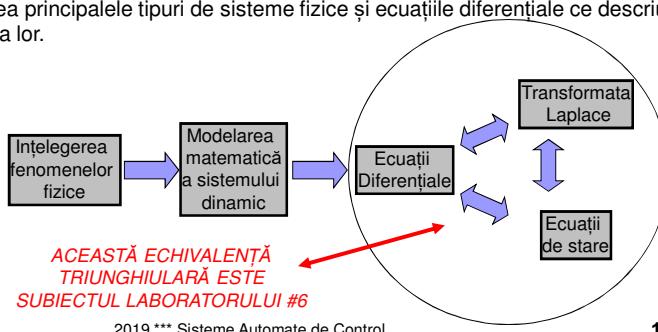


Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 02 = Modelarea sistemelor mecanice plecând de la ecuația de miscare.

Modelarea sistemelor

- Proiectarea sistemelor de control se face printr-o secvență de pași, plecând de la un model dinamic al sistemului.
 - Prin model înțelegem o descriere matematică a sistemului printr-un set de ecuații diferențiale.
- Dezvoltarea unui model poate fi un efort complex.
 - Vom analiza pe scurt dezvoltarea unor modele simple, ca un punct de plecare în descrierea principiilor modelării.
 - Vom revedea principalele tipuri de sisteme fizice și ecuațiile diferențiale ce descriu funcționarea lor.



**ACEASTĂ ECHIPALENTĂ
TRIUNGHIULARĂ ESTE
SUBIECTUL LABORATORULUI #6**

Capitolul 2 * Modelarea matematica a sistemelor**

Modelarea matematică a sistemelor fizice

Tipul sistemului	Legi importante ale fizicii	Ecuații
Mecanice	Mișcare de translație	$F=ma$
	Mișcare de rotație	$M=J\alpha$
	Mișcarea unor corpuri flexibile	$F=mx''+bx'+kx$
Electrice	Ecuatiile Kirchhoff	
Electromecanice	Legea motoarelor	$F=Bli$ $T=Ki$
	Legea generatoarelor	$E=Blv$ $E=K\theta'$
Transfer termic	Puterea termică	$Q=(1/R_{th})*(T_1-T_2)$
	Căldura specifică	$C=mc_v$
Curgerea lichidelor	Forța unui fluid acțiunând asupra unui piston	$F=pA$
	Efectul de rezistență împotriva curgerii	$W=(1/R)*(p_1-p_2)^{1/\alpha}$

Notă – Toate aceste ecuații reprezintă sisteme dinamice (termeni cu variație în timp).

2019 *** Sisteme Automate de Control

13

Capitolul 2 * Modelarea matematica a sistemelor**

Modelarea sistemelor mecanice – Ecuatia de mișcare (Newton)

- Ecuatia pentru mișcarea de translație este legea Newton:

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$
- Aplicarea acestei legi, de obicei, presupune definirea unor coordonate capabile de a ține cont de mișcarea corpului (poziție, viteză, acceleratie), determinând forțele ce se aplică fără a ține cont de dimensiunile sau forma corpului ("body-free diagram").

2019 *** Sisteme Automate de Control

14

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Exemplu de sistem în mișcare – “cruise control”

- Să descriem matematic mișcarea unui vehicul în scopul dezvoltării unui sistem de control automat al vitezei.
- Ipoteze simplificatoare:
 - Neglijăm mișcarea de rotație inertială a roțiilor.
 - Considerăm frecarea ca fiind proporțională cu viteză mașinii.
 - Neglijăm formă caroseriei mașinii, pe baza principiului diagramei forțelor asociate unui corp fără dimensiuni (“body-free diagram”).
- Alegem un sistem de coordonate astfel încât *poziția* este pe direcția de deplasare.
- Relația forțelor (considerând **forță aplicată $u(t)$** , m = masa, b = coeficientul de frecare):

$$u - b \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + b \cdot \dot{x} = \frac{u}{m}$$

se poate scrie astfel încât să avem o relație pentru **viteză v** (variabilă de control):

$$\dot{v} + \frac{b}{m} \cdot v = \frac{u}{m}$$

- Vom presupune o soluție de forma $v(t) = V \cdot e^{st}$ când se aplică o forță $u(t) = U \cdot e^{st}$

Se obține:

$$\left(s + \frac{b}{m} \right) \cdot V_o \cdot e^{st} = \frac{1}{m} \cdot U_o \cdot e^{st} \Rightarrow \frac{V_o}{U_o} = \frac{1}{s + \frac{b}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + \frac{b}{m}}}$$

Functia de transfer a instalației în forma Laplace

2019 *** Sisteme Automate de Control

15

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Ecuatiile mișcării de rotație

– Pendul (“pendulum”).



- În acest caz, mișcarea este permisă doar pe o direcție perpendiculară pe obiect (ca o tangentă la un cerc).
- Se consideră un sistem de referință într-un punct în care nu avem accelerare unghiulară (poate fi centrul unui cerc dacă traectoria este circulară).
- Ecuatia de mișcare este dată în acest caz sub forma unei relații pentru cuplu (legea a 2-a, a lui Newton):

$$F_c \cdot d + M_D = J \cdot \ddot{\theta}$$

unde **F_c** este forță aplicată, **d** este lungimea până la punctul de referință, **M_D** este un cuplu inertial (de rezistență), **J** este momentul de inerție al instalației, iar **θeta** este coordonata unghiulară instantanee.

- Se observă că avem un sistem dinamic de ordinul 2 (= ne trebuie o dublă integrare pentru rezolvarea ecuației diferențiale).

2019 *** Sisteme Automate de Control

16

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

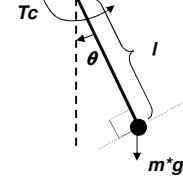
Exemplu de sistem în rotație – Pendul (“pendulum”).

Funcția de transfer (1)

- Se consideră sistemul din figură
- Date numerice: $I=1m$, $m=0.5kg$, $g=9.81m/sec^2$.
- Dorim să găsim ecuația de mișcare la aplicarea unui cuplu T_c .
 - Prin definiție, cuplul măsoară cât de mult se rotește un obiect sub acțiunea unei forțe. În acest caz, cuplul T_c reprezintă gestul de a deplasa tija de la poziția verticală până la un unghi dat.
 - Când se eliberează tija, este echivalent cu un semnal treaptă (de la T_c la 0).
 - Vom considera această nouă poziție ca originea deplasării unghiulare.
- În general, ecuația Newton pentru o miscare de rotație:

$$M = J \cdot \ddot{\alpha} = J \cdot \ddot{\theta}$$

unde M =cuplul [Nm], J =momentul de inertie [$kg \cdot m^2$], α =acceleratia unghiulară in rad/sec².
- Considerăm toate componentele derivate din cuplul aplicat T_c și greutatea pendulului:
- ... care se poate scrie dacă considerăm $J = ml^2$:
- Această ecuație diferențială este evident neliniară. Se aproximează $\sin\theta \sim \theta$.
- Se obține:
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2}$$
- Notam $\omega_m = \sqrt{\frac{g}{l}}$



Funcția de transfer a instalației în forma Laplace

2019 *** Sisteme Automate de Control

17

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Exemplu de sistem în rotație – Pendul (“pendulum”).

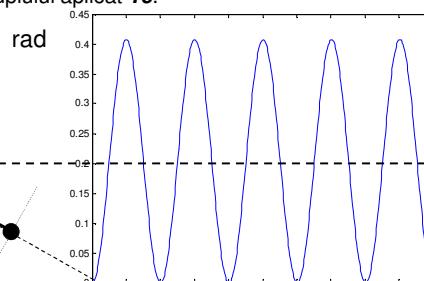
Funcția de transfer (2)

- Vom folosi intensiv MATLAB pentru calcularea diferențelor rezultate.
- Să determinăm istoria variației coordonatei θ , pentru datele numerice date.
- Să reconsiderăm funcția de transfer:

$$\frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{\frac{1}{m \cdot l^2}}{\frac{s^2 + \frac{g}{l}}{s^2 + \frac{g}{l}}} = \frac{2}{s^2 + 9.81}$$

- Variația în timp a coordonatei unghiulare se poate determina prin folosirea unei funcții treaptă unitară (**1 Nm**) de variație a cuplului aplicat T_c .

```
t=0:0.02:10;
num=2;
den=[1 0 9.81];
sys=tf(num,den);
y=step(sys,t);
plot(t,y);
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

18

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea sistemelor flexibile (cu arcuri). Teorie (1)

Pentru mai rapida înțelegere a acestui caz, să considerăm ca exemplu, un sistem de suspensie a unui automobil.

- Considerăm greutatea egal distribuită pe cele 4 roți.
- Măsurând constanta de deformare a fiecarui arc de suspensie, determinăm $k_s = 130,000 \text{ N/m}$.
- Măsurând deformarea fiecarei roți la aplicarea unei greutăți, determinăm $k_w = 1,000,000 \text{ N/m}$.
- Considerăm un dispozitiv de absorbtie a şocului, cu un model asemănător cu frecarea (notăm b).
- Forța aplicată dispozitivului de absorbtie a şocului este direct proporțională cu diferența ratei de schimbare a deplasării celor două mase (arcul de absorbtie și roata).



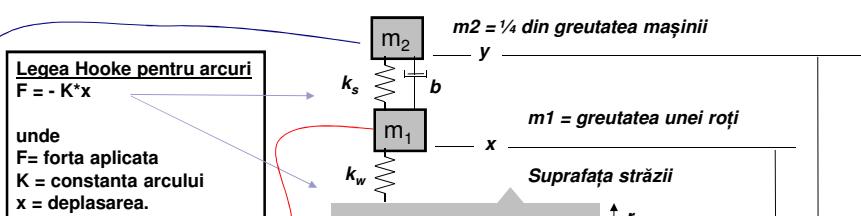
2019 *** Sisteme Automate de Control

19

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea sistemelor flexibile (cu arcuri). Teorie (2)

- Modelul fizic, compus din două mase simbolice în diagramă:



- Ecuațiile următoare arată ce forțe acționează asupra fiecărei mase:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x} = b \cdot (\dot{y} - \dot{x}) + k_s \cdot (y - x) - k_w \cdot (x - r) \\ m_2 \cdot \ddot{y} = -k_s \cdot (y - x) - b \cdot (\dot{y} - \dot{x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m_1} \cdot (\dot{y} - \dot{x}) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = \frac{k_w}{m_1} \cdot (x - r) \\ \ddot{y} + \frac{b}{m_1} \cdot (\dot{y} - \dot{x}) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = 0 \end{cases}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

20

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea sistemelor flexibile (cu arcuri).

Exemplu - Suspensie pentru automobile.

- Înlocuim s pentru d/dt și obținem:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{x} - \dot{y} \right) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (x - y) = \frac{k_w}{m_1} \cdot (x - r) \\ \ddot{y} + \frac{b}{m_1} \cdot \left(\dot{y} - \dot{x} \right) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (y - x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s^2 \cdot X(s) + s \cdot \frac{b}{m_1} \cdot (X(s) - Y(s)) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (X(s) - Y(s)) = \frac{k_w}{m_1} \cdot (X(s) - R(s)) \\ s^2 \cdot Y(s) + s \cdot \frac{b}{m_1} \cdot (Y(s) - X(s)) + \frac{k_s}{m_1} \cdot (Y(s) - X(s)) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_w \cdot b}{m_1 \cdot m_2} \cdot \left(s + \frac{k_s}{b} \right)}{s^4 + \left(\frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2} \right) \cdot s^3 + \left(\frac{k_s}{m_1} + \frac{k_s}{m_2} + \frac{k_w}{m_1} \right) \cdot s^2 + \left(\frac{k_w \cdot b}{m_1 \cdot m_2} \right) \cdot s + \left(\frac{k_w \cdot k_s}{m_1 \cdot m_2} \right)}$$

*Funcția de transfer a
Instalației în forma Laplace*

- Această relație reprezintă dependența deplasării caroseriei mașinii (și eventual a pasagerului) pe o axă perpendiculară pe stradă la întâlnirea unei deînvelări în astfalt.

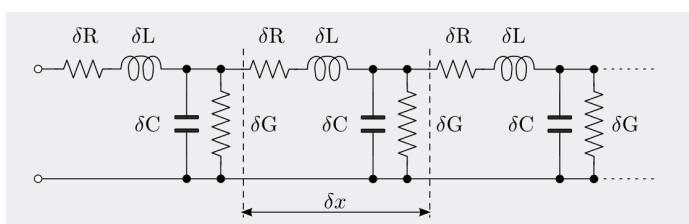
Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Sisteme cu parametri distribuiți.

- Exemplele precedente se bazează pe una sau mai multe mase bine-definite, și modelate ca și corpuși fără dimensiuni ("body-free diagram")
- Există multe aplicații în care nu putem neglijă forma și dimensiunea corpurilor.
 - De exemplu, există corpuși care se deformă sub forță aplicată ("se îndoie").
- Putem considera masa egal distribuită de-a lungul unei dimensiuni, cu un anume grad de flexibilitate între aceste mase => **sistem cu parametrii distribuiți**.
 - Cazuri rare, devine prea complicat...

Exemplu 1 – Un cilindru de cauciuc = Aproximare cu corpuși solide conectate cu arcuri.

Exemplu 2 – O linie de transmisie = caracteristicile circuitului sunt distribuite uniform prin material.



Observații finale

- Modelarea matematică a unui sistem este primul pas în proiectarea unui sistem automat de control.
 - Exemple au fost discutate pentru diverse sisteme mecanice
 - Mișcare de translatăie
 - Mișcare de rotație
 - Sistem cu arcuri
 - Exemplile dezvoltă modele exprimate cu Funcții Laplace
 - Similar, se pot dezvolta modele exprimate cu ecuații de stare
- Gradul de complexitate a modelului depinde de cerințele de performanță – deoarece putem controla doar ce apare în model.

Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 03 – Modelarea sistemelor electrice, electromecanice, termice sau de curgere.

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Sisteme de control cu circuite electrice (fie pentru control, fie ca instalatie)

- Circuitele electrice sunt foarte folosite în control datorită ușurinței procesării semnalelor electrice. Există implementări în circuite analogice sau în circuite digitale.
- În implementarea analogică, amplificatorul operațional este o componentă foarte folosită, iar în implementarea digitală, microprocesorul este foarte folosit.
- Multe concepții ale teoriei controlului automat au fost initial dezvoltate pentru amplificatoarele electronice cu reacție (Bell Labs, 1925-1940).

Legile Kirchhoff de analiză a unui circuit electric

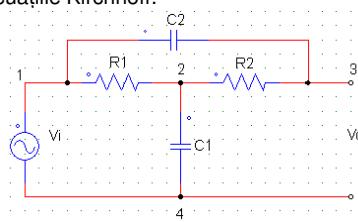
- **Legea K pentru curenti:** Suma algebraică a curentilor ce pleacă dintr-un nod este egală cu suma algebraică a curentilor ce intră în acel nod.
- **Legea K pentru tensiuni:** Suma algebraică a tuturor tensiunilor în jurul unui ochi de circuit este nulă.
- Pentru circuite complexe este important să scriem ecuațiile într-un mod organizat.
 - O metodă capabilă pentru scrierea organizată a ecuațiilor este metoda de analiză în noduri.

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Ecuatiile de circuit Kirchhoff. Exemplu - Circuit în puncte.

- Fie circuitul din figură. Să se scrie ecuațiile diferențiale intrare/ieșire.
- Alegem nodul 4 ca referință și vom folosi ecuațiile Kirchhoff:

$$\begin{aligned} v_i &= v_1 \\ -\frac{v_1 - v_2}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \cdot \frac{dv_2}{dt} &= 0 \\ \frac{v_3 - v_2}{R_2} + C_2 \cdot \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$



- Rearanjăm, să punem în evidență ecuațiile diferențiale de primul ordin:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{C1}}{dt} &= -\frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot v_{C1} - \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_2} \right) \cdot v_{C2} + \frac{1}{C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot v_i \\ \frac{dv_{C2}}{dt} &= -\frac{v_{C1}}{C_2 \cdot R_2} - \frac{v_{C2}}{C_2 \cdot R_2} + \frac{v_i}{C_2 \cdot R_2} \end{aligned}$$

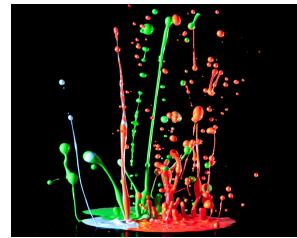
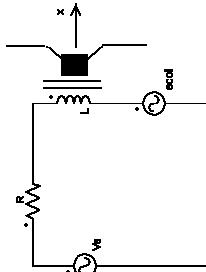
Observație: Putem aplica transformata Laplace și lucra cu funcția de transfer.

$$\frac{df}{dt} = s \cdot F(s) - f(0^-)$$

Observație: Vom vedea mai târziu că o astfel de aranjare a ecuațiilor diferențiale corespunde metodei de analiză pe baza ecuațiilor de stare.

Capitolul 2 * Modelarea matematica a sistemelor**
Modelarea sistemelor electromecanice. Difuzor.

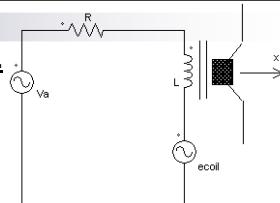
- Acest exemplu arată cum putem cupla ecuațiile unui circuit electric cu efectele produse într-un sistem mecanic.
- Să considerăm sistemul din figură, ca o problemă în care se cere dependența deplasării x de tensiunea de intrare v_a (ecuații diferențiale pentru regim dinamic).



2019 *** Sisteme Automate de Control

27

Capitolul 2 * Modelarea matematica a sistemelor**
Modelarea sistemelor electromecanice. Difuzor.



- Să considerăm sistemul din figură, ca o problemă în care se cere dependența deplasării x de tensiunea de intrare v_a (ecuații diferențiale pentru regim dinamic).
 - Se presupune ca magnetul stabilăște un câmp magnetic $B=0.5T$, iar bobina are 20 de ture, la un diametru de 2 cm.
 - Calculăm lungimea conductorului (în metri)

$$l = 20 \cdot \frac{2}{100} \cdot \pi = 1.26m$$
 - Forța produsă ($F = BIL$) asupra unui conductor de lungime L , parcurs de curentul i și aflat într-un câmp magnetic de inducție B

$$F = B \cdot i \cdot l = 0.5 \cdot i \cdot 1.26 = 0.63 \cdot i [N]$$
 - Ecuția de mișcare (Newton), considerând și frecarea b : $m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} = 0.63 \cdot i$
 - Difuzorul va produce o tensiune electrică $e = Blv = Blx$ în circuitul electric, cu relația Kirchhoff:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = v_a - 0.63 \cdot x$$
 - Rezultă sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = v_a - 0.63 \cdot x \\ m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} = 0.63 \cdot i \end{cases} \Rightarrow \frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0.63}{s \cdot [(m \cdot s + b) \cdot (L \cdot s + R) + (0.63)^2]}$$

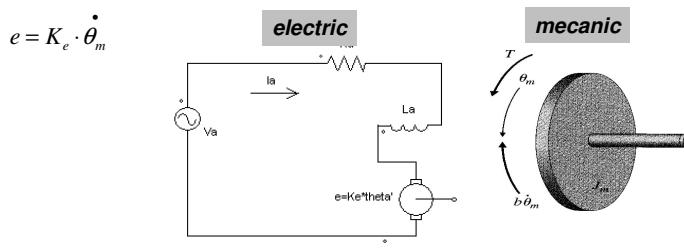
2019 *** Sisteme Automate de Control

28

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Modelarea sistemelor electromecanice. Motor de c.c.

- O foarte utilizată componentă în sistemele de acționare electrică, este motorul de c.c.
 - Partea exterioară a motorului (stator) are un grup de magneti (permanent sau electromagneti), capabil să mențină un câmp magnetic asupra înfășurării rotorice.
 - Înfășurarea rotorică este alimentată de la un circuit electric de curent continuu, prin intermediu unor perii.
 - Interacțiunea dintre câmpul magnetic produs de stator și conductorul parcurs de curent electric situat pe rotor produce cuplul mecanic.
- Fără a intra în detaliile constructive, să scriem ecuațiile circuitului electric și mișcării mecanice de rotație produse de câmpul magnetic.
 - Cuplul produs de curentul electric din rotor sub influența unui camp magnetic constant este: $T = K_t \cdot i_a$
 - Miscarea rotorului produce o tensiune electromagnetică în circuitul electric al rotorului.



2019 *** Sisteme Automate de Control

29

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Modelarea sistemelor electromecanice. Motor de c.c.

- Aplicarea legii Newton de mișcare (diagrama mecanică a rotorului):

$$J_m \cdot \ddot{\theta}_m + b \cdot \dot{\theta}_m = K_t \cdot i_a$$
- Analiza circuitului electric conținând tensiunea contralelectromotoare (e) produce ecuația:

$$L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a = v_a - K_e \cdot \dot{\theta}_m$$
- Dacă notăm derivata coordonatei unghiulare cu x , obținem sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = x \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{J_m} \cdot x - \frac{K_t}{J_m} \cdot i_a \\ \frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{1}{L_a} \cdot v_a \end{cases}$$

- Din aceste ecuații, se poate determina sistemul ecuațiilor de stare, sau funcția de transfer Laplace.

2019 *** Sisteme Automate de Control

30

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea sistemelor termice

- Unele sisteme automate de control se referă la controlul temperaturii.
- Modelele dinamice pentru reglajul temperaturii implică transferul și stocarea energiei termice.
- Energia termică circulă printr-un material cu un debit proporțional cu diferența de temperatură:

$$q = \frac{1}{R} \cdot (T_1 - T_2)$$

unde: q = puterea termică transferată (~ ca un curent într-un circuit electric) [J/sec] or [BTU/sec];

R = rezistența termică [C/J*sec];

T = temperatura [C] sau [F] (ca o tensiune într-un circuit electric).

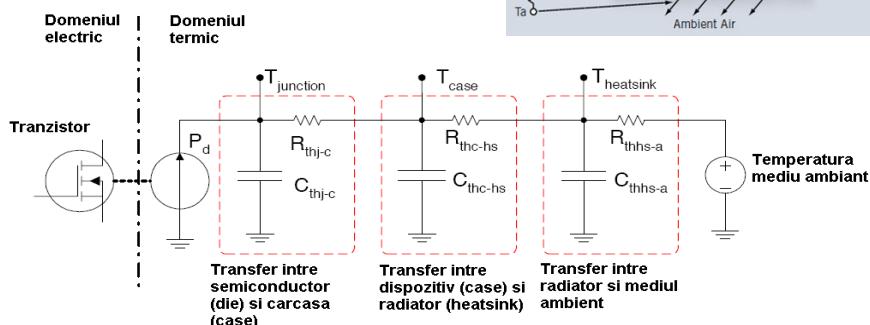
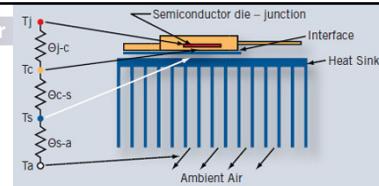
- Transferul net de energie termică într-o substanță influențează temperatura pe baza relației dinamice (ce se poate scrie și ca funcție de transfer):

$$\dot{T} = \frac{1}{C} \cdot q$$

unde **C = capacitatea termică**.

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor Modelarea sistemelor termice.

Exemplu – radiatorul unui dispozitiv semiconductor.



Observatie - La fel ca în cazul unui circuit electric, putem face o analiză în regim staționar, și o analiză de regim dinamic.

- Aparent, am fi tentați să analizăm doar un regim staționar ("să vedem cât de fierbinte devine radiatorul sau componenta")
- Regimul termic dinamic produce fenomene de uzură mecanică (contractii și relaxări repetitive la contactul între materiale cu proprietăți diferite), determinând reducerea duratei de viață a componentei.

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea sistemelor de curgere a fluidelor.

- Multe aplicații implică sisteme hidraulice, în care curgerea unui lichid poate furniza o forță mare, cu o inertie redusă și o greutate redusă.
- Pe baza conservării materiei, relația de bază este:

$$\dot{m} = \omega_{in} - \omega_{out}$$

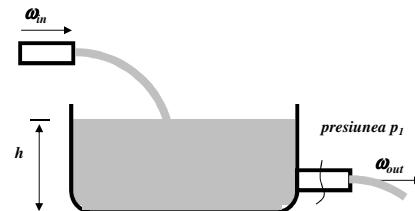
unde \dot{m} = masa fluidului într-o porțiune a sistemului

ω_{in} este debitul (rata de curgere) a masei la intrarea sistemului, iar ω_{out} este rata de curgere a masei la ieșirea sistemului.

Exemplu: Înaltimea apei într-un vas

- Se consideră debitele de intrare și ieșire din vas, dimensiunile geometrice (h, A); precum și densitatea apei ρ (calculăm masa $\dot{m} = \rho \cdot h \cdot A$)

$$\dot{h} = \frac{1}{A \cdot \rho} \cdot (\omega_{in} - \omega_{out})$$



2019 *** Sisteme Automate de Control

33

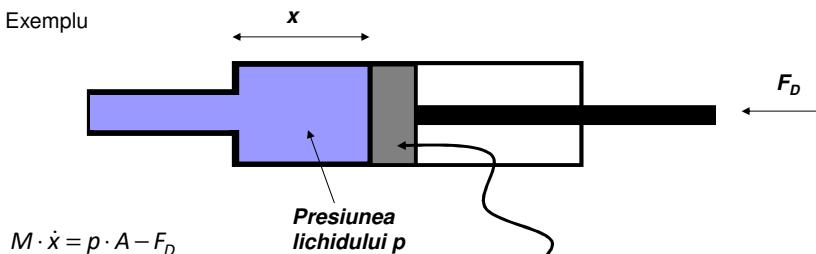
Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea acțiunii fluidelor asupra unor pistoane (hidraulică) (1)

- Dacă o coloană de apă aplică o forță unui piston, atunci intervene o nouă mărime denumită presiune (p):

$$F = p \cdot A$$

- Exemplu



unde M = masa pistonului și A = aria secțiunii pistonului.

2019 *** Sisteme Automate de Control

34

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Modelarea acțiunii fluidelor asupra unor pistoane (hidraulică) (2)

- Dacă curgerea este restricționată de frecare (sau de o alta restricție similară, de exemplu o îngustare a căii de curgere), aceasta este caracterizată de constantele (R, α):

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot (p_1 - p_2)^\alpha$$

unde

ω este debitul în unități de masă (mass flow rate);

p_1, p_2 sunt presiunile la cele două capete ale porțiunii analizate;
(R, α) sunt constante specifice restricțiilor de pe calea de curgere.

Capitolul 2 *** Modelarea matematica a sistemelor

Observatii finale

- Modelarea matematică a unui sistem este primul pas în proiectarea unui sistem automat de control.
 - Exemple au fost discutate pentru diverse sisteme electrice, electromecanice, termice, sau de curgere a lichidelor.

Modelarea sistemelor dinamice (3 ore)

- Ora 04 = Linearizarea și scalarea sistemelor

Liniarizarea și scalarea sistemelor – Noțiuni generale

- Ecuatiile diferențiale ce descriu funcționarea multor instalații sunt neliniare.
- Teoriile de analiză și proiectare sunt dezvoltate mai ușor pentru sisteme liniare.
 - In acest curs vom prezenta doar metode de control liniar.
- **Liniarizarea** este procesul prin care se găsește un model liniar care aproximează un sistem neliniar.
- **Lyapunov:** *Dacă un model de semnal mic este liniar lângă un punct de echilibru, și modelul este stabil, atunci există o regiune lângă acel punct de echilibru unde sistemul neliniar este stabil.*
 - Consecință:** Dacă avem un model de semnal mic, liniar, ca o aproximare a unui sistem neliniar, atunci putem proiecta un sistem de control cu reacție, pe baza acestui model (**liniarizare de semnal mic**).
 - Acest principiu a fost folosit la analiza amplificatoarelor cu reacție.
- **Alternative:**
 - Să încercăm întâi să anulăm (compensăm) toate neliniaritățile în afara controlului propriu-zis – fie prin re-proiectarea instalației, fie prin introducerea unor elemente neliniare (de compensare) lângă sensor sau actuator (*o neliniaritate inversă*).
 - Să folosim o parte a efortului de control pentru liniarizare (*liniarizare prin reacție*).
- In unele cazuri este necesar să scalăm sistemul = **scalare în amplitudine sau în timp**.

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Liniarizarea de semnal mic. Teorie.

- O **ecuație diferențială neliniară** este una în care derivatele au o relație neliniară cu variabilele sau cu semnalele de intrare.
 - Deci, o ecuație care nu se poate scrie într-o formă de genul (exemplu ultra-simplificat, pentru un sistem cu o variabilă și o singură intrare):

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \cdot x + b_1 \cdot u$$
 și trebuie lăsată în forma: $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$
- Pentru a determina modelul de semnal mic ("small signal linearization"), trebuie să parcurgem câțiva pași:
 - Identificăm un **punct de echilibru**, unde $\frac{dx_0}{dt} = 0 = f(x_0, u_0)$
 - Căutăm o aproximare a ecuației neliniare prin aplicarea unei variații mici în jurul punctului de echilibru $x = x_0 + \delta x$, $u = u_0 + \delta u$.
 - Ecuația devine: $\dot{x}_0 + \delta \dot{x} \equiv f(x_0, u_0) + F \cdot \delta x + G \cdot \delta u$

unde F și G sunt aproximările liniare cele mai bune pentru variația de lângă punctul de echilibru.

Observații - Practic folosim aproximarea Euler (sau primii doi termeni din desfășurarea Taylor).

- Cel mai cunoscut exemplu de liniarizare de semnal mic vă este cunoscut din analiza circuitelor electronice.

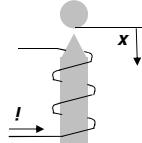
2019 *** Sisteme Automate de Control

39

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

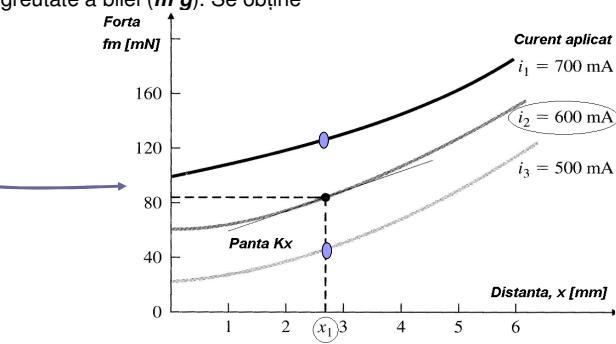
Liniarizarea de semnal mic. Exemplu (1)

- Vom considera flotația unei bile metalice într-un câmp magnetic (~ levitație).



- Ecuația de mișcare este dată de legea Newton scrisă pentru forță măsurată experimental pentru diverse distanțe x și diferite valori ale intensității curentului electric i , precum și pentru forță de greutate a bilei ($m \cdot g$). Se obține

$$m \cdot \ddot{x} = f_m(x, i) - m \cdot g$$



2019 *** Sisteme Automate de Control

40

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Liniarizarea de semnal mic. Exemplu (2)

- ...
- Forță electromagnetică determinată experimental.
 - Bila are 8.4 mg , considerăm $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$;
 - Determinăm din experiment forță pentru cazul $x_1 = 2.7 \text{ mm}$, $i_2 = 600 \text{ mA}$.
- Scriem desfașurarea lui $f_m()$ pentru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}$, $\mathbf{i} = \mathbf{i}_2 + \delta\mathbf{i}$:

$$f_m(x_1 + \delta x, i_2 + \delta i) \cong f_m(x_1, i_2) + K_x \cdot \delta x + K_i \cdot \delta i$$

□ K_x este panta caracteristicii în punctul x_1 , (aproximativ 14 N/m), citită direct de pe graficul precedent.

□ Determinăm constanta K_i după curent

■ Citim de pe grafic f_m pentru x_1 , atunci când $i = 500 \text{ mA}$ și $i = 700 \text{ mA}$.

■ Calculăm panta caracteristicii:

$$K_i = \frac{f_m(x_1, 700 \text{ mA}) - f_m(x_1, 500 \text{ mA})}{700 \text{ mA} - 500 \text{ mA}} = \frac{122 - 42}{700 - 500} \cong 400 \cdot 10^{-3} \text{ N / A}$$

□ În final, expresia matematică pentru modelul regimului dinamic devine

$$\begin{aligned} f_m(x, i) &\cong 82 \cdot 10^{-3} + 14 \cdot \delta x + 0.4 \cdot \delta i \Rightarrow \ddot{m} \cdot x = 82 \cdot 10^{-3} + 14 \cdot \delta x + 0.4 \cdot \delta i - 82 \cdot 10^{-3} \\ &\Rightarrow m \cdot \ddot{\delta x} = 14 \cdot \delta x + 0.4 \cdot \delta i \end{aligned}$$

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Liniarizarea prin reacție. Teorie.

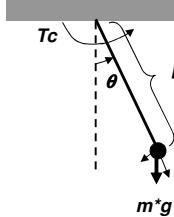
- **Liniarizarea prin reacție** se realizează prin reducerea (eliminarea) termenilor neliniari din ecuația instalației și adăugarea lor la control.
- Dacă se realizează pe un calculator de control, atunci acesta trebuie să calculeze compensarea foarte rapid.

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Liniarizarea prin reacție (schimbare de variabilă). Exemplu.

Se consideră pendulul din figura alăturată:

- T_c este mărimea de control.
- θ este mărimea controlată.



- În general, ecuația Newton pentru o mișcare de rotație:

$$M = J \cdot \alpha = J \cdot \ddot{\theta}$$

unde M =cuplul [Nm], J =momentul de inerție [kg m^2], α =accelerația unghiulară, în rad/sec².

- Considerăm toate componentele derivate din cuplul aplicat inițial T_c și greutatea pendulului:

$$T_c - m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta = J \cdot \ddot{\theta}$$

- Care se rescrie ($J=ml^2$):

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta = T_c \quad (\text{ca la pag. 16-18}).$$

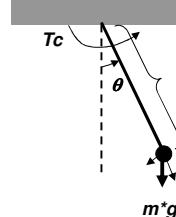
- Această ecuație diferențială este evident neliniară.

- La pag.17, am aproximat $\sin \theta \sim \theta$ pentru a elimina neliniaritatea. Să încercăm altă soluție.

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Liniarizarea prin reacție (schimbare de variabilă). Exemplu.

Se consideră pendulul din figura alăturată:



- Dacă notăm:

$$T_c = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta + u \Rightarrow u = T_c - m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta$$

în care u este noua mărime de intrare, iar θ este ultima coordonată unghiulară, măsurată în mod instantaneu.

- Ecuația de control devine liniară:

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} = u$$

- Rezolvarea problemei urmează următoarele etape

- Se consideră modelul **Laplace** al instalației ca $\Theta(s)/u(s)$.
- Sistemul de control va determina "u" cu care să controlăm instalația pentru o anumită comportare a lui θ
- Se recalculează T_c din notația de mai sus, pe baza coordonatei unghiulare măsurate.
- T_c se trimite la echipamentul de control al instalației.

Scalarea Amplitudinii

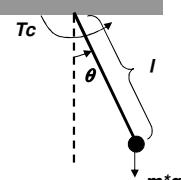
- Scalarea amplitudinii se face de multe ori involuntar, prin adoptarea unui set de mărimi care are sens în cazul aplicației respective.
 - Pentru bila suspendată, are sens să folosim "**mm**" și "**mA**".
 - Pentru un satelit trimis pe o orbită staționară, folosirea "**km**" are sens.
- Problema scalării amplitudinii devine foarte importantă la implementarea propriu-zisă a controlului.
 - În sisteme analogice de control, avem domenii de variație de câțiva volți ce corespund mărimilor măsurate.
 - În sisteme digitale de control, avem domenii digitale de genul 2^n , ce trebuie atribuite unor tensiuni analogice de intrare.
 - De obicei se lucrează normalizat la un domeniu **[−1, 1]**.
- Scalarea amplitudinii este în esență liniară și are – în schema bloc – un efect similar modificării unui câștig.

Scalarea Timpului

- Scalarea timpului este un fel de schimbare de coordonate în domeniul timp.
- Dacă ecuațiile sunt dezvoltate în secunde, iar măsurătorile de sistem se fac în milisecunde, are sens să schimbăm toate ecuațiile în milisecunde.
$$\tau = \omega \cdot t \leftarrow \omega = 1000$$
- **Atenție:** Majoritatea ecuațiilor diferențiale sunt exprimate ca o evoluție în timp, deci scalarea timpului va rezulta în modificarea ecuației printr-un factor.

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Scalarea Timpului. Exemplu – oscilator.



- Să reconsiderăm exemplul unui pendul (oscilator) la care se folosește aproximația $\sin\theta \sim \theta$.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \\ \sin\theta \approx \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2}$$

- Să luam cazul numeric al unei frecvențe naturale de **10 Hz** (foarte rapid, 10 balansări pe secundă),

$$m = 1 \text{ gram}, g = 9.81 \text{ m/sec}^2.$$

$$\text{Notam } \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

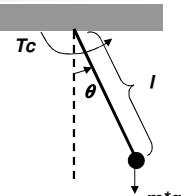
$$\begin{cases} \omega_n = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 62,832 \text{ rad/sec} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow l = 9,81 / 62,832^2 = 0,0025 \text{ m} = 2,5 \text{ mm} \\ \frac{1}{m \cdot l^2} = \frac{1}{0,001 \cdot [0,0025]^2} = 161,95 \cdot 10^6 \\ \Rightarrow \ddot{\vartheta} + 3947,86 \cdot \vartheta = 161,95 \cdot 10^6 \cdot T_c \end{cases}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

47

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Scalarea Timpului. Exemplu – oscilator.



- Se cere să lucrăm în **milisecunde**.

- Deci, cum trebuie scalată ecuația de mișcare inițială, pentru a utiliza datele direct în milisecunde?*
- Considerăm (notăm ω ca un câștig, iar τ este noua variabilă de timp)

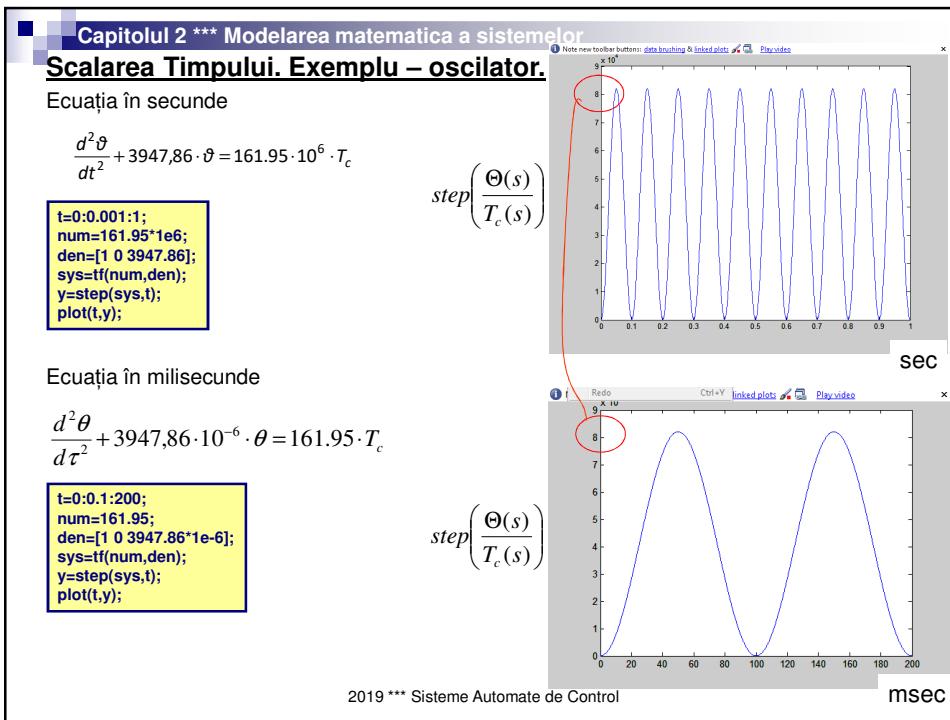
$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 10^{-6} \cdot \ddot{\theta} \\ \frac{d\theta}{d\tau} = 10^{-3} \cdot \dot{\theta} \\ \tau = 1000 \cdot t \end{cases}$$

$$10^6 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + 3947,86 \cdot \dot{\theta} = 161,95 \cdot 10^6 \cdot T_c$$

- Dupa rezolvarea ecuației, vom avea graficul direct în **msec**.

2019 *** Sisteme Automate de Control

48



Capitolul 2 * Modelarea matematică a sistemelor**

Observații finale

- Liniarizarea și scalarea ecuațiilor diferențiale ce caracterizează instalația au rolul de a facilita lucrul cu aceste ecuații într-un sistem liniar și într-o manieră mai ușoară.
- Dacă avem un model de semnal mic liniar, ca o aproximare a unui sistem neliniar, atunci putem proiecta un sistem de control cu reacție pe baza acestui model (după o liniarizare de semnal mic).
 - **Atenție** – liniarizarea de semnal mic este valabilă doar în vecinătatea unui punct de operare.
- **Alternative:**
 - Să încercăm întâi să anulăm (compensăm) toate neliniaritățile, în afara controlului propriu-zis – fie prin re-projectarea instalației, fie prin introducerea unor elemente neliniare lângă sensor sau actuator (*o neliniaritate inversă*).
 - Să folosim parte a efortului de control pentru liniarizare (*liniarizare prin reacție*).
- În unele cazuri este necesar să scalăm sistemul, fie în amplitudine, fie în timp.

2019 *** Sisteme Automate de Control

50

TEMA DE CASĂ #1

Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 15 martie.

Capitolul 2 *** Modelarea matematică a sistemelor

Problema 1

Sistemele de control cu reacție necesită măsurarea variabilelor care urmărează să fie controlate.

Deoarece semnalele electrice pot fi transmise, amplificate și procesate mai ușor, se preferă ca ieșirea din senzorul de măsură să fie o tensiune sau un curent proporțional cu variabila măsurată.

Descrieți senzori care ar putea furniza o mare electrică proporțională cu:

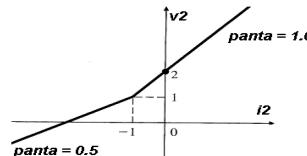
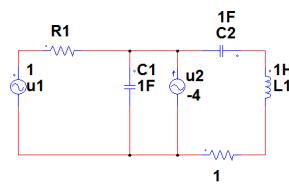
- (a) Temperatura
- (b) Presiune
- (c) Nivelul unui lichid
- (d) Curgerea unui lichid printr-o conductă
- (e) Poziția liniară a unui mecanism în mișcare liniară
- (f) Poziția unui mecanism în mișcare de rotație
- (g) Viteza unui vehicul
- (h) Acceleratia unui vehicul
- (i) Cuplul aplicat.

Problema 2

Se consideră circuitul din figură, în care u_1 , u_2 sunt surse de tensiune și respectiv curent, iar R_1 și R_2 sunt rezistențe neliniare cu caracteristicile:

$$R_1: i_1 = G(v_1) = v_1^2$$

$$R_2: v_2 = r(i_2) \quad \text{dată de figura alăturată.}$$



(a) Arătați ca ecuațiile circuitului pot fi scrise ca:

$$\dot{x}_1 = G(u_1 - x_1) + u_2 - x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - r(x_3)$$

Identificați variabilele x_i .

(b) Pentru $u_1 = 1V$, $u_2 = -4A$, determinați starea de echilibru $[x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0]$.

(c) Desenați diagrama circuitului ce corespunde unui model liniarizat.

SOLUTII PENTRU TEMA DE CASA NUMARUL 1

Problema 1

Sistemele de control cu reactie necesita masurarea variabilelor ce urmeaza a fi controlate. Deoarece semnalele electrice pot fi transmise, amplificate si procesate mai usor, se prefera ca iesirea din senzorul de masura sa fie o tensiune sau un curent proportional cu variabila masurata.

Descrieti senzori care ar putea furniza o marime electrica propotionala cu:

(a) Temperatura

Rezistenta electrica a unui material sensibil la variatiile temperaturii

(b) Presiune

Dispozitiv piezoelectric capabil sa transforme stres mecanic in sarcina electrica.

(c) Nivelul unui lichid

Un flotor conectat la un potentiometru.

(d) Curgerea unui lichid printr-o conducta

O micro-turbina de c.c. producand tensiune la antrenarea unei elicei in curgerea lichidului.

(e) Pozitia liniara a unui mecanism in miscare liniara

Un potentiometru.

(f) Pozitia unui mecanism in miscare de rotatie

Un potentiometru cu o cursa circulara.

(g) Viteza unui vehicol

Un generator de c.c. (dinam) conectat la miscarea de rotatie a unei roti.

(h) Acceleratia unui vehicol

Dispozitiv piezoelectric capabil sa transforme stres mecanic in sarcina electrica.

(i) Cuplul aplicat.

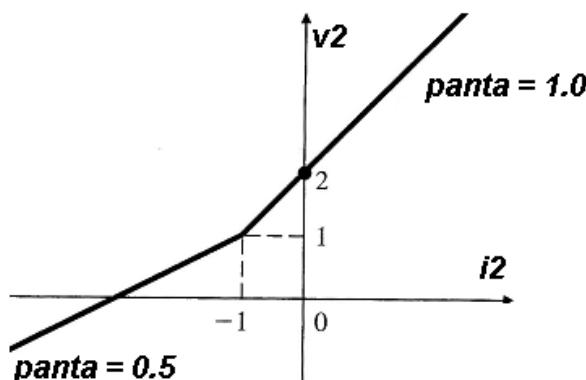
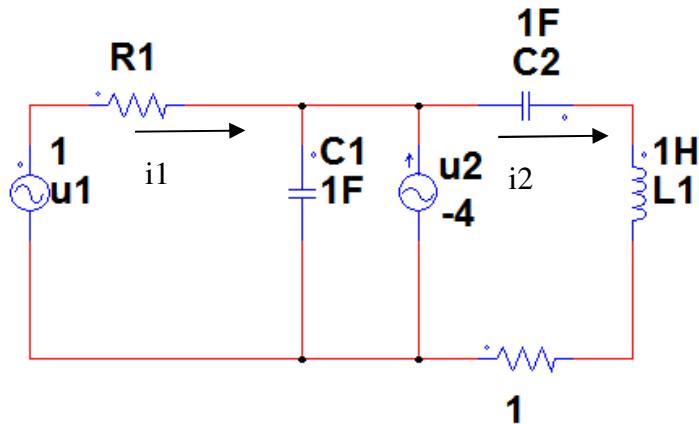
Transformator rotitor, isi schimba pozitia in functie de cuplul aplicat, generand tensiune ce depinde de noua pozitie.

Problema 2

Se consideră circuitul din figura, în care u_1 , u_2 sunt surse de tensiune și respectiv curent, iar R_1 și R_2 sunt rezistențe neliniare cu caracteristicele:

$$R_1: i_1 = G(v_1) = v_1^2$$

$$R_2: v_2 = r(i_2) \quad \text{data de figura alăturată.}$$



(a) Arătați că ecuațiile circuitului pot fi scrise ca:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= G(u_1 - x_1) + u_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 - r(x_3)\end{aligned}$$

Identificați variabilele xi .

- (b) Pentru $u_1 = 1V$, $u_2 = -4A$, determinați starea de echilibru $[x_{10} \ x_{20} \ x_{30}]$.
(c) Desenăți diagrama circuitului ce corespunde unui model liniarizat.

Solutie

(a) Vom avea 3 variabile de stare (x_1, x_2, x_3), deci scriem 3 ecuații de circuit:

$$i_1 = C_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} - u_2 + i_2 \Rightarrow G(u_1 - x_1) = \dot{x}_1 - u_2 + i_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = G(u_1 - x_1) + u_2 - x_3$$

$$C_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} = i_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = x_3$$

$$x_1 = x_2 + L \cdot \frac{di_2}{dt} + R_2 \cdot i_2 \Rightarrow \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - r(i_2)$$

La care adăugăm ecuațiile din enunțul problemei

$$\dot{x}_1 = (u_1 - x_1)^2 + u_2 - x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - r(x_3)$$

(b) Considerăm toate derivatele nule la echilibru și înlocuim valorile date pentru semnalele de intrare ($u_1 = 1V$, $u_2 = -4A$). Apoi, $r(x_{20}) = r(0) = 2$.

$$0 = (u_1 - x_{10})^2 + u_2 - x_{30} \Rightarrow 0 = (1 - x_{10})^2 - 4 \Rightarrow x_{10} = 3 \text{ sau } x_{10} = -1$$

$$x_{30} = 0$$

$$0 = x_{10} - x_{20} - r(x_{30}) \Rightarrow x_{20} = 1 \text{ sau } x_{20} = -3$$

Considerăm soluțiile pozitive

$$x_{10} = 3$$

$$x_{20} = 1$$

$$x_{30} = 0$$

(c)

Sursele din sistem vor avea doar variații finite.

$$\begin{cases} u_1 = u_{10} + \delta u_1 = 1 + \delta u_1 \\ u_2 = u_{20} + \delta u_2 = -4 + \delta u_2 \end{cases}$$

In jurul punctului de echilibru [3 1 0], considerăm variații mici ale variabilelor de stare.

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + \delta x_1 = 3 + \delta x_1 \\ x_2 = x_{20} + \delta x_2 = 1 + \delta x_2 \\ x_3 = x_{30} + \delta x_3 = \delta x_3 \end{cases}$$

Vom înlocui toate aceste expresii în ecuațiile circuitului și vom neglija puterile lui ($\delta u_1 - \delta x_1$):

$$\dot{(\delta x_1)} = (-2 + \delta u_1 - \delta x_1)^2 - 4 + \delta u_2 - \delta x_3$$

$$\dot{(\delta x_2)} = \delta x_3 \quad \rightarrow$$

$$\dot{(\delta x_3)} = 3 + \delta x_1 - 1 - \delta x_2 - 2 - \delta x_3$$

$$\dot{(\delta x_1)} = 4 + 4 \cdot \delta x_1 - 4\delta u_1 - 4 + \delta u_2 - \delta x_3$$

$$\dot{(\delta x_2)} = \delta x_3$$

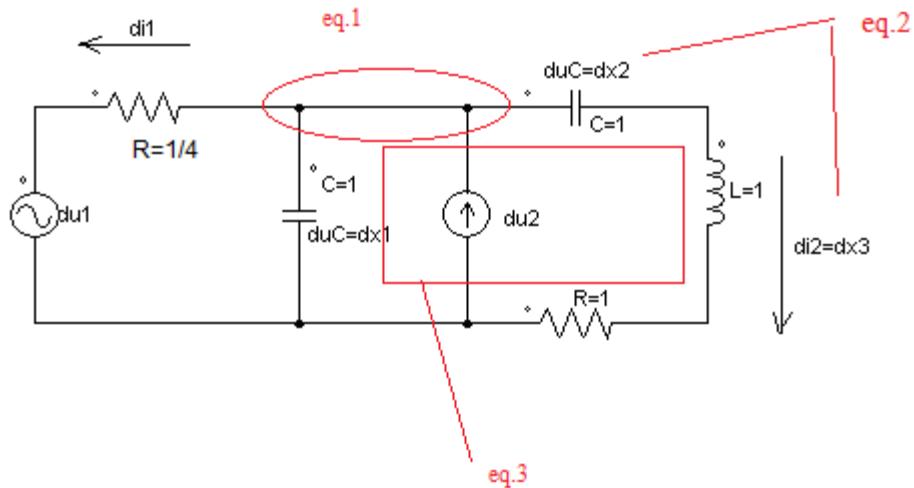
$$\dot{(\delta x_3)} = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3$$

$$\dot{(\delta x_1)} = -4 \cdot (\delta u_1 - \delta x_1) + \delta u_2 - \delta x_3$$

$$\dot{(\delta x_2)} = \delta x_3$$

$$\dot{(\delta x_3)} = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3$$

Circuitul echivalent va urma schema circuitului inițial, cu valori determinate de ecuațiile de mai sus, pentru variații ale mărimilor.





Sisteme Automate de Control

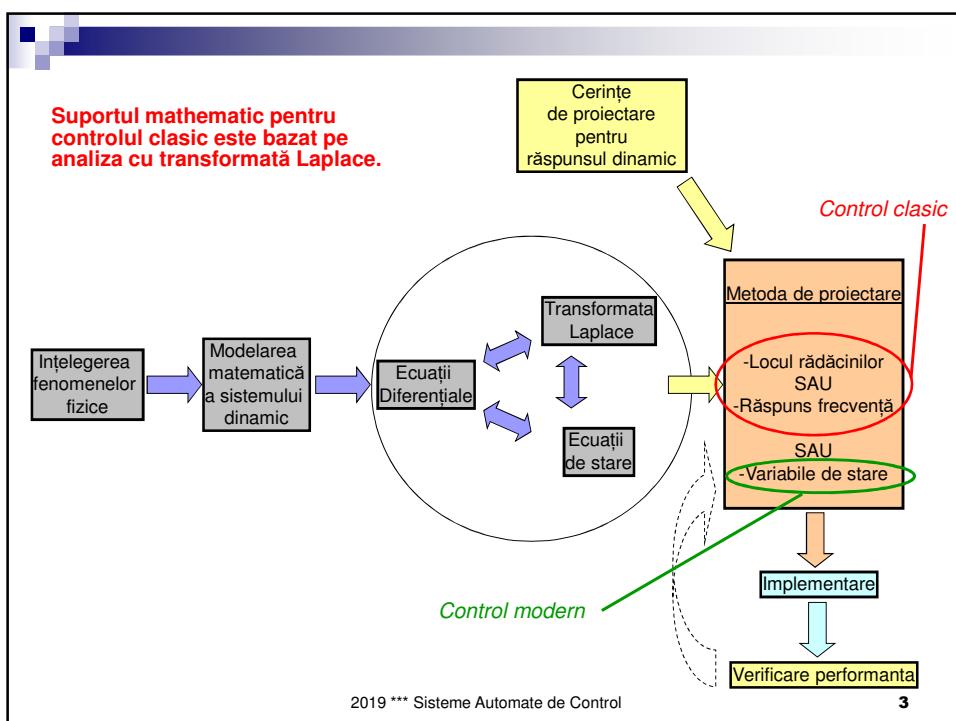
Note de curs *** 2019 Sem.2



Capitolul 1 *** Introducere

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 05 = Rolul transformatei Laplace
- Ora 06 = Efectul locației polilor în planul complex
- Ora 07 = Stabilitatea sistemelor
- Ora 08 = Analiza pe calculator. Metode de proiectare asistata de calculator.



Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**

Recapitulare: Transformata Laplace

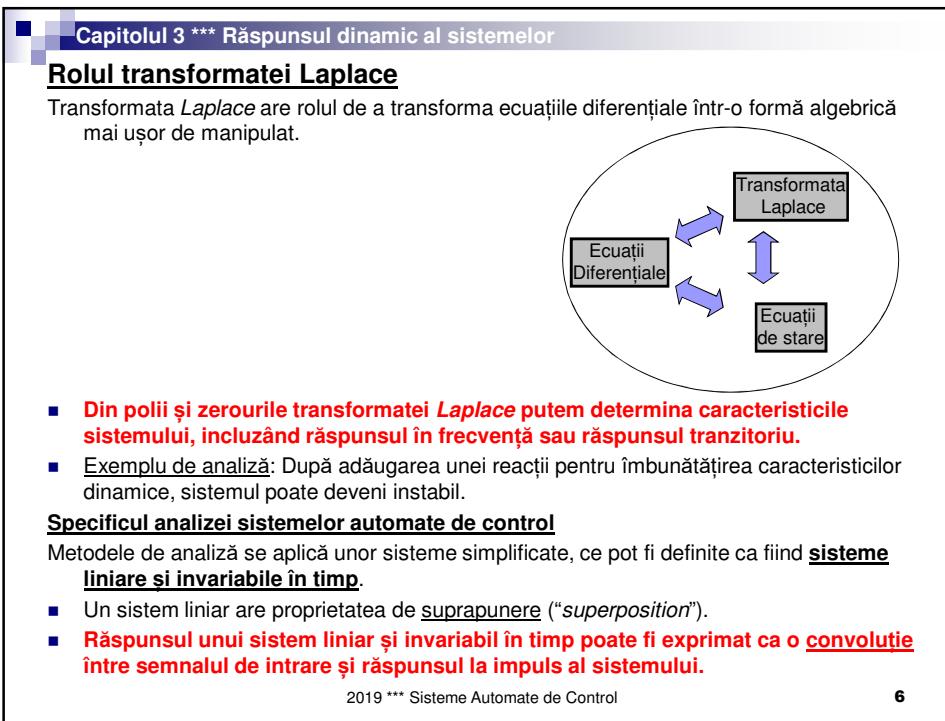
- Definiție
$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$
- Se mai numește **transformată Laplace unilaterală** –
 - ... pe care o vom considera în continuare
- O funcție de timp are transformata Laplace dacă există un număr real σ pentru care
$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) \cdot e^{-\sigma t}| = 0$$
- Transformata Laplace poate fi utilizată pentru analiza răspunsului sistemelor, inclusiv răspunsul tranzitoriu.
 - Deosebire față de transformata Fourier care permite doar analiza regimului staționar.

2019 *** Sisteme Automate de Control 4

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor				
Transformata Laplace – Proprietăți				
Proprietate	$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$	Denumirea funcției $f(t)$	Funcția originală $f(t)$	Transformata Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$
Definire	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Impuls unitar Dirac	$\delta(t)$	1
Liniaritate	$Af_1(t) + Bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} AF_1(s) + BF_2(s)$	Test semnal impuls		
Derivata	$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$	Funcția Heaviside	$h(t), h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
Derivata de ordinul al 2-lea	$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	Test semnal treapta		
Derivata de ordinul al n-lea	$\frac{df(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-i}f^{(i-1)}(0^-)$			
Integrala	$\int_0^t f(\lambda)d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}F(s)$	Semnal polinomial	t	$\frac{1}{s^2}$
Multiplicarea cu timp	$tf(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dF(s)}{ds}$		$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Scalarea timpului	$f(t-a)\gamma(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}F(s)$ $\gamma(t) = \text{unit step}$		$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
Adunarea unei constante în complex	$f(t)e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$		$\frac{t^n}{n!}e^{-at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
Întărirea	$f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aF(as)$	Exponențială	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
Convoluție	$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)F_2(s)$	Semnale armonice	$\sin t$	$\frac{1}{s^2+1}$
Teorema valorii initiale	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$		$\cos t$	$\frac{s}{s^2+1}$
Teorema valorii finale	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$		$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
			$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
		Semnale armonice modulate în amplitudine	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
			$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

2019 *** Sisteme Automate de Control

5



Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Suprapunere (“superposition”)

- Dacă semnalul de intrare se poate descompune într-o sumă de semnale, atunci răspunsul sistemului va fi dat de suma răspunsurilor individuale la fiecare dintre componentele semnalului de intrare.
- Dacă cunoaștem răspunsul sistemului la semnale elementare, putem descompune oricare semnal de intrare într-o sumă de astfel de semnale elementare.

Răspunsul la impuls – Consecință a proprietății de suprapunere

- Conceptul matematic de impuls (**Dirac**) se exprimă prin faptul că impulsul este atât de scurt și atât de intens încât nici o altă valoare a funcției $u(t)$ nu contează în afara unui domeniu restrâns lângă momentul în care impulsul este aplicat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = u(t)$$

- Integrala fiind la limită o sumă, se poate spune ca funcția $u(t)$ se poate reprezenta ca o sumă de impulsuri de intensitate $u(t-\tau)$.
 - **Deci, răspunsul la orice intrare arbitrară $u(t)$ poate fi aflat dacă știm răspunsul la impuls al sistemului.**
 - Răspunsul unui sistem liniar și invariabil în timp poate fi exprimat ca o convoluție între semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului.

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

- Dacă știm răspunsul la un impuls, răspunsul la o intrare arbitrară $u(t)$ se poate afla din răspunsul la un impuls $h(t, \tau)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h(t, \tau) d\tau$$

unde răspunsul la impuls $h(t, \tau)$ reprezintă răspunsul în momentul de timp t , la impulsul aplicat la momentul τ .

- Dacă sistemul este invariabil în timp, răspunsul la impuls este dat de diferența momentelor de timp $h(t-\tau)$.
- Se obține
 - $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h(t, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau$
- Această relație se numește **integrala de convoluție**
 - Ieșirea unui sistem în domeniul timp, este dată de convoluția între semnalul de intrare și răspunsul la impuls unitar al sistemului.

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Exemplu

- Să considerăm un sistem de ordinul întâi, și să calculăm răspunsul la impuls.
- Deoarece $\delta(t)$ are efect doar lângă zero, considerăm integrala în vecinătatea lui 0.

$$\begin{cases} \dot{y} + k \cdot y = u(t) = \delta(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{0-}^{0+} \dot{y} dt + k \cdot \int_{0-}^{0+} y dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt \Rightarrow y(0^+) - y(0^-) = 1 \Rightarrow y(0^+) = 1$$

unde integrala lui y pe un domeniu îngust lângă zero, este "0"; iar integrala lui $\delta(t)$ este "1".

- Deci efectul imediat al impulsului este să modifice brusc ieșirea din "0" la "1".
- Pentru momente de timp după 0^+ , presupunem soluția $y(t) = Ae^{-kt}$.

$$\begin{cases} \dot{y} + k \cdot y = 0 \\ y(0^+) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot s \cdot e^{st} + k \cdot A \cdot e^{st} = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow s = -k \Rightarrow y(t) = h(t) = e^{-kt}, t > 0$$

- Putem defini funcția unitară (Heaviside) $1(t)$: $1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$

care ne ajută să rescriem răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul întâi:

$$h(t) = e^{-kt} \cdot 1(t)$$

- Folosind integrala de conoluție, determinăm răspunsul sistemului la orice alt semnal de intrare $u(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-k\tau} \cdot u(t - \tau) d\tau$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

9

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Funcția de transfer a unui sistem exprimată cu transformata Laplace

- O consecință a conoluției este că la aplicarea unui semnal de intrare e^{st} , semnalul de ieșire va fi dat de $H(s) \cdot e^{st}$.

- $H(s)$ se numește funcție de transfer a sistemului, unde s este un număr complex.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \quad \text{Din definiția Laplace (pag.4)}$$

unde $h(t)$ reprezintă răspunsul sistemului la impuls (răspuns natural).

- O altă consecință este legată de analiza în frecvență a unui sistem.

- Să considerăm aplicarea unui semnal sinusoidal la intrarea unui sistem liniar și invariabil în timp.

$$A \cdot \cos(\omega t) = \frac{A}{2} \cdot [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}]$$

- Răspunsul sistemului la cele două exponentiale care formează semnalul **cos** este

$$y(t) = \frac{A}{2} \cdot [H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} + H(-j\omega) \cdot e^{-j\omega t}]$$

- Functia de transfer $H(j\omega)$ a sistemului este un număr complex care poate fi exprimat cu amplitudine și fază (M, ϕ). Semnalul de ieșire va rezulta:

$$y(t) = \frac{A}{2} \cdot [M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} \cdot e^{j\omega t} + M(\omega) \cdot e^{-j\phi(\omega)} \cdot e^{-j\omega t}] = A \cdot M \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

10

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Răspunsul în frecvență exprimat cu transformata Laplace. Exemplu.

- Să se determine răspunsul în frecvență al unui sistem cu funcția de transfer ($k=1$)

$$H(s) = \frac{1}{s+k} = \frac{1}{s+1}$$

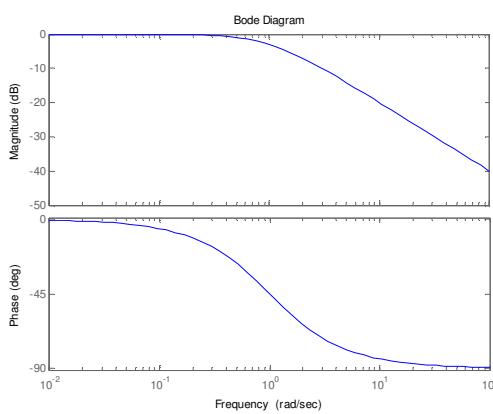
- La fiecare frecvență de interes, putem calcula amplitudinea și fază

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \\ \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) \end{cases}$$

- Răspunsul va fi dat de

$$y(t) = A \cdot M \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

```
clear;
k=1;
num=1;
den=[1 k];
sysH=tf(num,den);
w=logspace(-2,2);
bode(sysH,w);
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

11

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Transformata Laplace inversă. Exprimarea prin fractii parțiale.

- In multe aplicații este nevoie de determinarea inversei transformantei Laplace, adică determinarea semnalului în domeniul timp $f(t)$ din transformata Laplace $F(s)$.

- Dacă funcția Laplace $F(s)$ este rațională, se poate scrie desfășurarea în funcții parțiale:

$$F(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

- Pentru determinarea constantelor C_i se multiplică fiecare termen cu $s - p_i$:

$$(s - p_1) \cdot F(s) = C_1 + C_2 \cdot \frac{s - p_1}{s - p_2} + \dots + C_n \cdot \frac{s - p_1}{s - p_n} \Rightarrow C_1 = [(s - p_1) \cdot F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

- Se obține (revedeți răspunsul unei funcții de ordinul întâi, la pagina 8)

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t)$$

Exemplu

$$Y(s) = \frac{(s+2) \cdot (s+4)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+3)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+3} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{8}{3} \cdot 1(t) - \frac{3}{2} \cdot e^{-t} \cdot 1(t) - \frac{1}{6} \cdot e^{-3t} \cdot 1(t)$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

12

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Teorema valorii finale

Important

- Proprietate a transformatei Laplace, utilizată în controlul sistemelor automate.
- Cunoscând valoarea finală, putem calcula eroarea staționară.
 - **Ne permite calcularea erorii staționare direct din transformata Laplace.**
- Pentru un caz general caracterizat de o transformată Laplace $Y(s)$ a unui semnal $y(t)$, limita la (timp) infinit poate fi constantă, nedefinită, sau infinită.
 - Dacă $Y(s)$ are poli în partea dreaptă a planului s , atunci $y(t)$ va crește către o valoare (limită) nelimitată.
 - Dacă $Y(s)$ are o pereche de poli pe axa imaginară a planului s , atunci $y(t)$ va conține o sinusoidă care va persista la infinit, determinând o valoare nedeterminată pentru valoarea finală.
 - Dacă $Y(s)$ nu îndeplinește niciuna dintre aceste două condiții, atunci vom avea o valoare finală constantă la infinit.
- **Teorema valorii finale** se poate enunța: *Dacă toți polii lui $s^*Y(s)$ sunt în partea stângă a planului complex (sistemul este stabil), atunci valoarea finală se poate calcula cu*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s)$$

Important

Exemplu

$$Y(s) = \frac{3 \cdot (s + 2)}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 10)} \Rightarrow y(\infty) = s \cdot Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{3 \cdot 2}{10} = 0.6$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

13

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Observații finale

- Transformata Laplace poate fi utilizată pentru analiza răspunsului sistemelor, inclusiv răspunsul tranzitoriu.
 - Un sistem liniar are proprietatea de suprapunere ("superposition").
- Răspunsul unui sistem liniar și invariant în timp poate fi exprimat ca o convoluție între semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului.
 - O consecință a convoluției este că la aplicarea unui semnal de intrare e^{st} , semnalul de ieșire va fi dat de $H(s) * e^{st}$.
 - $H(s)$ se numește funcție de transfer a sistemului.
- Transformata inversă de la funcția de transfer a sistemului în domeniul timp reprezintă **răspunsul la semnalul impuls (răspuns natural)**.
 - **Răspunsul la semnalul impuls oferă informații despre stabilitatea sistemului.**

1

- **O alta consecință este legată de analiza în frecvență (Bode)**

Important

- **Teorema valorii finale permite calcularea erorii stationare direct din transformata Laplace.**

2

- Teorema valorii finale se poate enunța:

- Dacă toți polii lui $s^*Y(s)$ sunt în partea stângă a planului complex, atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s)$$

Important

- **Teorema valorii finale se folosește la determinarea erorii staționare.**

2019 *** Sisteme Automate de Control

14

Capitolul 1 *** Introducere

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 06 = Efectul locației polilor în planul complex

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Poli și zerouri în funcția de transfer

- O funcție de transfer rațională poate fi scrisă ca un raport de două expresii polinomiale:

$$H(s) = \frac{b_1 \cdot s^m + b_2 \cdot s^{m-1} + \dots + b_{m+1}}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots + a_n} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

sau într-o formă factorială

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

- Rădăcinile numărătorului se numesc **zero-uri**.

⇒ **Zero-urile** sunt locații din planul complex unde funcția de transfer este nulă.

⇒ **Sistemul are capabilitatea de a bloca frecvențele ce coincid cu zerourile.**

⇒ Dacă la intrarea unui sistem se aplică un semnal $u(t) = u_0 \cdot e^{s_0 \cdot t}$

unde s_0 este **zero** al sistemului (dar nu este și **pol**), atunci semnalul de ieșire devine egal cu 0.

- **Vom studia mai târziu efectul zerourilor în regimul tranzitoriu.**

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Poli și zerouri în funcția de transfer

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

- Rădăcinile numitorului se numesc **poli** (engleză: "poles").
- **Polii** sunt locații în planul complex unde funcția de transfer capătă o valoare infinită.
 - Se observă că polii unui sistem determină stabilitatea sistemului:
La frecvențe egale cu frecvența polilor, sistemul devine instabil.

Alte observații

- Orice funcție de transfer descriind un sistem fizic va avea mai mulți poli decât zerouri ($n > m$), altfel va tinde la infinit la frecvențe mari.
- Un sistem are $n-m$ zero-uri la infinit, deoarece funcția de transfer se apropie de "0" când " s " tinde la infinit.

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

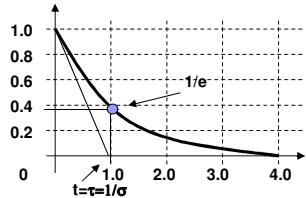
Răspunsul la impuls = răspunsul natural al sistemului

- Să considerăm funcția de transfer a unui sistem dată de un raport între două expresii polinomiale.
- Răspunsul la o funcție de intrare impuls va fi o funcție de timp ce corespunde echivalentului în domeniul timp al funcției de transfer.
 - ⇒ Răspunsul la impuls se mai numește **răspuns natural** al sistemului.
 - ⇒ Polii funcției de transfer determină componentele în domeniul timp, după descompunerea în funcții de primul ordin.
- Să considerăm cazul simplificat al unei funcții de transfer de primul ordin (pag.9)

$$H(s) = \frac{1}{s + \sigma} \Rightarrow h(t) = e^{-\sigma t} \cdot 1(t)$$

- Dacă $\sigma > 0$, funcția exponentială este descrescătoare, și sistemul este stabil.
- Dacă $\sigma < 0$, funcția exponentială este crescătoare, și sistemul este instabil.

Răspunsul la impuls



Constanta de timp $\tau =$ momentul în care funcția devine $1/e$ ($= e^{-1}$), și reprezintă o măsură a ratei de scădere a funcției.

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Reprezentarea polilor și zerourilor în planul complex. Exemplu.

- Să revenim la locația în planul complex a polilor și zerourilor.
- Considerăm un exemplu:

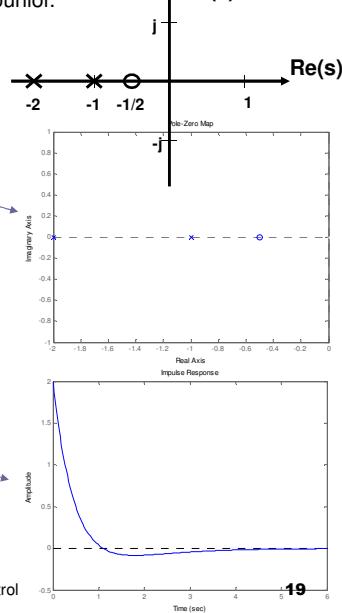
$$H(s) = \frac{2 \cdot s + 1}{s^2 + 3 \cdot s + 2} = 2 \cdot \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + 1) \cdot (s + 2)} = -\frac{1}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}$$

```
num=[2 1];
den=[1 3 2];
pzmap(num,den);
```

- Din tabelul funcțiilor Laplace, determinăm echivalentul în domeniul timp (răspuns la impuls):

$$h(t) = \begin{cases} -e^{-t} + 3 \cdot e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = (-e^{-t} + 3 \cdot e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

```
numH=[2 1];
denH=[1 3 2];
sysH=tf(numH,denH);
impulse(sysH);
```



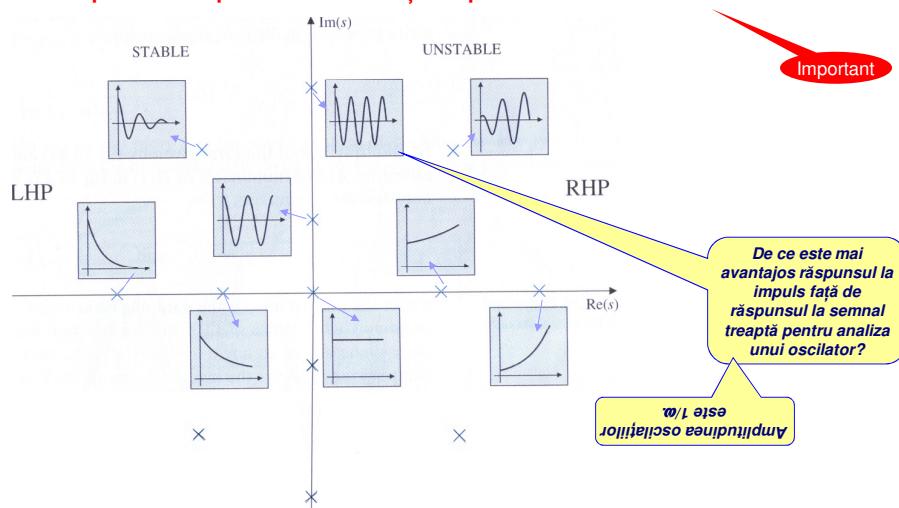
2019 *** Sisteme Automate de Control

19

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Funcții de timp asociate cu poli în planul complex ("fast poles" și "slow poles")

- Forma răspunsului natural (răspunsul la impuls) este dată de locația polilor din funcția de transfer.
- Răspunsul la impuls ne dă informații despre stabilitatea sistemului.**



2019 *** Sisteme Automate de Control

20

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Poli dominanți versus poli nesemnificativi

- Polii situați cel mai aproape de axa imaginară determină un timp de răspuns mare (evoluție lentă a sistemului)
- Polii situați la frecvențe mari determină un răspuns rapid al sistemului.
- Dacă sistemul este compus din poli cu răspuns lent și poli cu răspuns rapid, răspunsul sistemului compus va fi determinat de polii lenti, pe care îl vom denumi **poli dominanți**.
 - Într-un sistem compus, putem neglijă efectul polilor foarte rapizi în fața polilor cu răspuns lent (dominanți), deoarece răspunsul sistemului va fi similar.

Exemplu

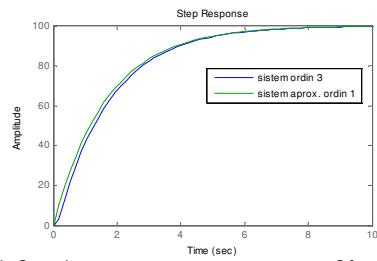
$$H(s) = \frac{K}{(s + p) \cdot (s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2)}$$

Dacă polii complex conjugăți sunt mult mai rapizi decât polul simplu p ($\zeta \omega >> 10p$), sistemul $H(s)$ se va comporta similar unui sistem de primul ordin, cu polul dominant p .

$$H(s) = \frac{6000}{(s + 0.6) \cdot (s^2 + 12 \cdot s + 100)} \approx \frac{6000/100}{s + 0.6}$$

```
pol1=[1 0.6];
pol2=[1 12 100];
den=conv(pol1,pol2);
H=6000*tf(1,den);
Hd=60*tf(1,pol1);
step(H); hold on; step(Hd);
```

Similar pentru poli dominanți complex conjugăți.



2019 *** Sisteme Automate de Control

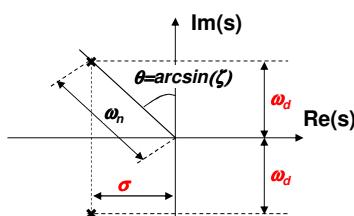
21

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Amortizarea în domeniul timp, legată de polii complex conjugăți (1).

- Un caz special îl reprezintă perechile de poli complex conjugăți: $s = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$
- Numitorul funcției de transfer va avea un termen $a(s) = (s + \sigma - j \cdot \omega_d) \cdot (s + \sigma + j \cdot \omega_d) = (s + \sigma)^2 + \omega_d^2$
- În general, expresia funcției de transfer cu doi poli $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta \cdot \omega_n)^2 + \omega_n^2 \cdot (1 - \zeta^2)}$
- Prin echivalare între cele două forme, obținem partea reală și imaginara: Re: $\sigma = \zeta \cdot \omega_n$ Im: $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$
 - unde ζ reprezintă factorul de amortizare, iar ω_n este frecvența naturală (egală cu frecvența de oscilație doar în cazul $\zeta = 0$).

- Reprezentarea grafică în planul complex:



- Răspunsul în domeniul timp corespunzător funcției de transfer $H(s)$

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\sigma t} \cdot (\sin \omega_d \cdot t) \cdot 1(t)$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

22

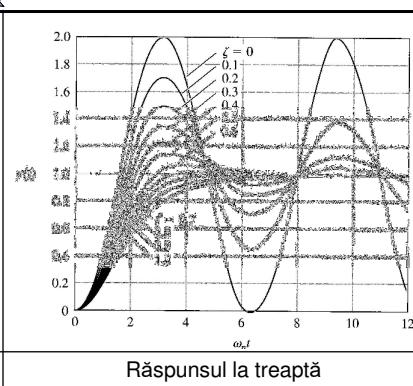
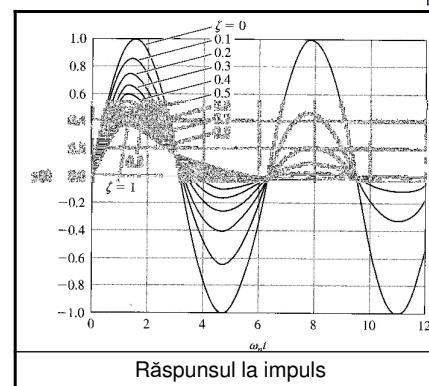
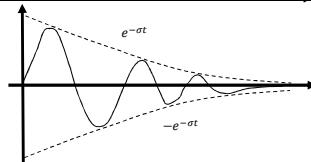
Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Amortizarea în domeniul timp, legată de polii complex conjugăți (2).

Răspunsul la semnal impuls

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\sigma t} \cdot (\sin \omega_d \cdot t) \cdot 1(t)$$

$$\sigma = \zeta \cdot \omega_n \quad \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$



2019 *** Sisteme Automate de Control

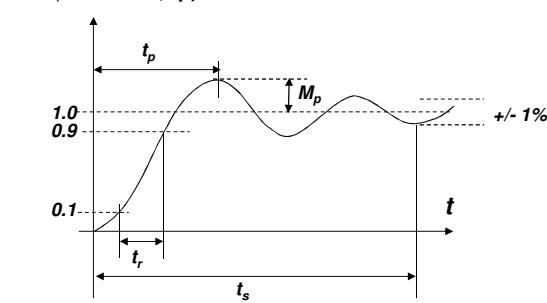
23

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Specificatii de proiectare în domeniul timp (1).

Important

- Caracterizarea regimului dinamic ca o cerință de proiectare se face în domeniul timp.
- De obicei, aceste cerințe sunt deriveate din **răspunsul la semnal treaptă** (formulele de calcul sunt date aici pentru cazul unei perechi de poli complex conjugăți și sunt formule aproximative).
- Vom furniza formule matematice pentru cazul unui **sistem de ordinul doi, fără zero-uri**.
(multe sisteme se pot reduce la doi poli dominant complex conjugăți).
 - Timpul de creștere (**rise time, t_r**)
 - Timpul de atingere regim staționar 1% (**settling time, t_s**)
 - Suprareglare (**Overshoot, M_p**)
 - Timpul de atingere vârf (**Peak time, t_p**)



2019 *** Sisteme Automate de Control

24

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Specificații de proiectare în domeniul timp (2).

- Timpul de creștere (**rise time, t_r**)
 - Observăm că timpii de creștere sunt comparabili (pag.23)

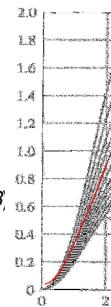
- Considerăm o valoare medie pentru cazul $\zeta = 0.5 \rightarrow 1.8$ (pe grafic, pag.23,

$$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n}$$

- Timpul de atingere regim staționar 1% (**settling time, t_s**)
 - Se calculează pentru o eroare sub 1% \rightarrow termenul exponential

$$e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t_s} = 0.01 \Rightarrow \zeta \cdot \omega_n \cdot t_s = 4.6 \Rightarrow t_s = \frac{4.6}{\sigma}$$

- Suprareglare (**Overshoot, M_p**) și **temp de atingere vârf (t_p)**



2019 *** Sisteme Automate de Control

25

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Specificații de proiectare în domeniul timp (3).

- Soluție analitică pentru atingerea maximului (*la suprareglare*):

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma \cdot t} \cdot \left[\cos(\omega_d \cdot t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] = 1 - e^{-\sigma \cdot t} \cdot \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega_d^2}} \cdot \cos(\omega_d \cdot t - \beta)$$

unde

$$\beta = \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)$$

- În momentul de atingere a maximului, derivata va fi nulă.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sigma \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \left[\cos(\omega_d \cdot t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] - e^{-\sigma \cdot t} \cdot [-\omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + \sigma \cdot \cos(\omega_d \cdot t)] = \\ &= e^{-\sigma \cdot t} \cdot \left[\frac{\sigma^2}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + \omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] = 0 \Rightarrow \sin(\omega_d \cdot t_p) = 0 \Rightarrow (\omega_d \cdot t_p) = \pi \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \end{aligned}$$

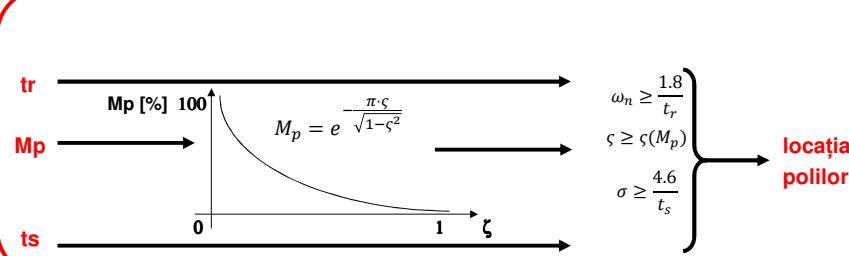
$$M_p = e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Specificații de proiectare în domeniul timp (4).

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad M_p = e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- De obicei, se construiesc tabele cu aceste corespondențe neliniare.
- Cerințele de proiectare includ **tr, Mp, tp, ts**, pe baza cărora se determină locația polilor pentru ca răspunsul în timp să fie mai bun decât aceste cerințe.



2019 *** Sisteme Automate de Control

27

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Specificații de proiectare în domeniul timp (5).

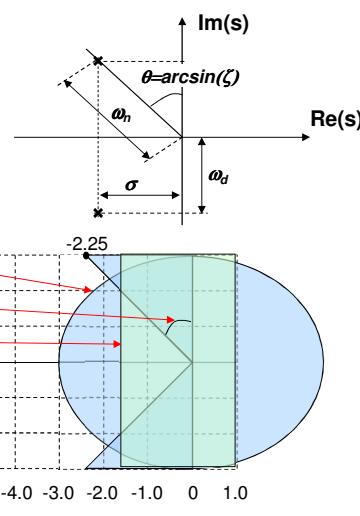
Exemplu: Să se găsească regiunea din planul complex în care trebuie să se afle rădăcinile numitorului unei funcții de transfer de ordinul doi (poli de forma $s = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$) pentru a obține următoarele performanțe:

$$\begin{aligned} t_r &\leq 0.6 \text{ sec} \\ M_p &\leq 10\% \\ t_s &\leq 3 \text{ sec} \end{aligned}$$

- Aplicând formulele precedente, se obține:

$$\begin{aligned} \omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} = 3.0 \text{ rad/sec} \\ e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} &\leq 0.1 \Rightarrow \zeta \geq 0.6 \Rightarrow \theta \geq 36.86^\circ \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{3} = 1.5 \text{ sec} \end{aligned}$$

Observație:
Zonele colorate NU satisfac
condițiile de proiectare



2019 *** Sisteme Automate de Control

28

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Efectul adăugării unor zerouri (1)

- Să considerăm un **zero** atașat la aceeași funcție de transfer de ordinul doi.

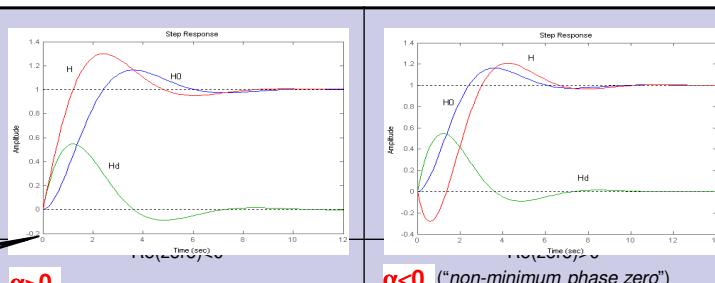
□ Vom considera un caz general ce depinde de un parametru α .

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} \rightarrow H(s) = \frac{\left(\frac{s}{\alpha \cdot \zeta \cdot \omega_n}\right) + 1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

- H_d este echivalentă cu funcția originală plus derivata funcției originale.

$$H(s) = \frac{\left(\frac{s}{\alpha \cdot \zeta \cdot \omega_n}\right) + 1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} + \frac{\left(\frac{s}{\alpha \cdot \zeta \cdot \omega_n}\right)}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} = H_0(s) + \left(\frac{1}{\alpha \cdot \zeta \cdot \omega_n}\right) \cdot s \cdot H_0(s)$$

```
clear;
numH0=[1];
numHd=[1 0];
denH0=[1 1 1];
H0=tf(numH0,denH0);
Hd=tf(numHd,denH0);
step(H0); gtext('H0');
pause; hold on;
step(Hd); gtext('Hd');
pause; hold on;
H=H0-Hd;
step(H); gtext('H');
```



Grafice pentru
 $\omega_n = 1$; $\zeta = 0.5$, $\alpha = \pm 2$

$\alpha > 0$

$\alpha < 0$ ("non-minimum phase zero")

2019 *** Sisteme Automate de Control

29

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Efectul adăugării unor zerouri (2)

- Se observă câteva cazuri

□ Dacă **zero-ul** este apropiat de partea reală a polilor (număr real negativ).

- Efectul major este acela de a crește suprareglarea **M_p** ("overshoot"), dar nu are influență în timpul de atingere a regimului staționar.

□ Dacă **zero-ul** are $\alpha \rightarrow \infty$, și este departe față de partea reală a polilor

- Nu avem o influență majoră în răspunsul în timp.

□ Dacă **zero-ul** are $\alpha < 0$, zero este în partea dreaptă a planului complex

- Sistem cu fază neminimă ("non-minimum phase zero"),
 - Răspunsul la semnal treaptă, în domeniul timp, parurge un domeniu negativ, la început, apoi revine la valori pozitive și urcă la valoarea dorită de treaptă.
 - Acest caz trebuie privit în particular.

2019 *** Sisteme Automate de Control

30

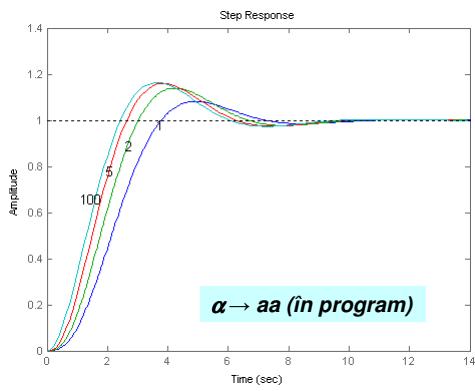
Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Efectul unor poli adiționali

- Să considerăm adăugarea unui nou pol la funcția de transfer de ordinul doi.

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\alpha \cdot \zeta \cdot \omega_n} + 1\right) \cdot \left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right]}$$

```
clear;
numG=[1];
denG=[1 1 1];
sysG=tf(numG,denG);
step(sysG); hold on;
aa=[1 2 5 100];
for i=1:4
    numH=[1];
    A=[1 1 1]; B=[1/aa(i) 1];
    denH=conv(A,B);
    sysH=tf(numH,denH);
    step(sysH); hold on;
end
gtext('1');
gtext('2');
gtext('5');
gtext('100');
```



- Un pol apropiat de cei existenți va crește timpul de răspuns ("va încețini creșterea formei de undă").
- Răspunsul pentru $\alpha = 100$ se suprapune pe cel original (un pol adițional departe de cei inițiali nu influențează răspunsul: "departe" = frecvențe de 10-100 de ori mai mari).

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Observații finale

- Forma răspunsului natural este determinată de locația polilor din funcția de transfer.

- Legătura dintre locația polilor și parametrii răspunsului tranzitoriu se pot aproxima cu (*formule date pentru sisteme de ordin 2*):

$$\begin{aligned} \omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} \\ \varsigma &\geq \varsigma(M_p) \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{t_s} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad M_p = \begin{cases} 5\% & 0.690 \\ 10\% & 0.591 \\ 15\% & 0.517 \\ 20\% & 0.456 \\ 25\% & 0.404 \\ 30\% & 0.358 \\ 35\% & 0.317 \\ 40\% & 0.280 \\ 45\% & 0.242 \\ 50\% & 0.216 \end{cases}$$

Efectul unui zero aditional:

- Un **zero** în stânga planului complex va crește suprareglarea ("overshoot", M_p) dacă zero-ul este foarte aproape de partea reală a polilor complecsi (până la un ordin de 4).
- Un **zero** în partea dreaptă a planului complex va relaxa suprareglarea și va determina o mică excursie în domeniul negativ a răspunsului în domeniul timp.

Efectul unui pol aditional:

- Adăugarea de poli în partea stângă a planului complex, va crește timpul de creștere (va încețini răspunsul) dacă noul pol este foarte aproape de partea reală a polilor complecsi (până la un ordin de 4).

Capitolul 1 *** Introducere

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 07 = Stabilitatea sistemelor

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Stabilitatea sistemelor. Definiții.

- Un sistem este stabil dacă condițiile initiale converg către zero (regimul tranzitoriu scade), și este instabil dacă în timp semnalul de ieșire devine divergent.
- Vom studia stabilitatea pentru sisteme liniare și invariante în timp:
 - Este mai dificil de studiat stabilitatea pentru sisteme neliniare și/sau cu model variabil în timp.
 - **Un sistem liniar și invariabil în timp este stabil dacă toate rădăcinile numitorului polinomial al funcției de transfer (polii) au părți reale negative.**
 - Altă exprimare – toți polii sunt în partea stângă a planului complex.
 - Dacă un pol este în partea dreaptă a planului complex, sistemul este instabil; iar daca $\sigma = 0$ sistemul prezintă oscilații întreținute.
- **Vom prezenta o metodă de studiu a stabilității unui sistem liniar, invariabil în timp (Criteriul Routh).**
- Alte metode de analiză a stabilității:
 - Metoda Nyquist bazată pe răspunsul în frecvență (*reluat în cursul 5, modulul 18*)
 - Metoda Lyapunov derivată din ecuațiile de stare (*nu se predă în acest curs*)

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Stabilitatea sistemelor liniare și invariante în timp. Teorie.

- Să considerăm cazul general $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$

în care definim ecuația caracteristică $s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n = 0$

- Considerând s ca un operator de derivare, forma generală a soluției ecuației diferențiale ce corespunde acestei ecuații caracteristice va fi:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot e^{p_i t}$$

unde p_i sunt rădăcinile ecuației (**polii** funcției de transfer).

- Se observă că sistemul este stabil dacă și numai dacă fiecare termen din soluția $y(t)$ converge la zero când timpul converge la infinit, ceea ce se întamplă dacă toate soluțiile au partea reală negativă (toți polii sunt în LHP). $\text{Re}(p_i) < 0$

- Această definiție a stabilității se mai numește **stabilitate internă**.
- Se observă că axa imaginară $<j\omega>$ reprezintă frontieră între regiunea de stabilitate și cea de instabilitate.
 - Un sistem cu soluții simple pe această axă are **stabilitate neutră** (oscilații întreținute, de amplitudine constantă).
 - Dacă există soluții multiple pe axa $j\omega$, sistemul este instabil.

2019 *** Sisteme Automate de Control

35

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Stabilitatea sistemelor. Criteriul Routh (1).

- Dacă locația polilor nu este evidentă din funcția de transfer, se poate utiliza criteriul de stabilitate Routh – permite obținerea de informații despre rădăcini fără rezolvarea ecuației caracteristice.

$$a(s) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n$$

- O condiție necesară pentru stabilitate este ca toate rădăcinile să aibă părți reale negative, ceea ce este echivalent cu cerința ca toți coeficienții a_i să fie pozitivi.
 - Dacă această condiție este îndeplinită, avem nevoie de un test mai puternic.
- Criteriul Routh cere calcularea unei matrice triunghiulare care este o funcție de coeficienții polinomiali $\{a_i\}$.
 - O condiție necesară și suficientă de stabilitate este dacă toate elementele din prima coloană a acestei matrice Routh sunt pozitive.

2019 *** Sisteme Automate de Control

36

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Stabilitatea sistemelor. Criteriul Routh (2).

O condiție necesară și suficientă de stabilitate este dacă toate elementele din prima coloană a acestei matrici Routh sunt pozitive.

Calcularea matricei Routh:

- Aranjăm coeficienții pe două rânduri:

$$\begin{array}{cccccc} s^n & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \end{array}$$

- Adaugăm rânduri succesive să completăm matricea triunghiulară Routh:

$$\begin{array}{cccccc} Row_n & s^n & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ Row_{n-1} & s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ Row_{n-2} & s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ Row_{n-3} & s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Row_2 & s^2 & * & * & * & \\ Row_1 & s^1 & * & * & & \\ Row_0 & s^0 & * & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_3}{a_1} \\ b_2 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_5}{a_1} \\ b_3 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_7}{a_1} \\ c_1 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_3 - b_2 \cdot a_1}{b_1} \\ c_2 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_5 - b_3 \cdot a_1}{b_1} \\ c_3 &= -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_7 - b_4 \cdot a_1}{b_1} \end{aligned}$$

unde

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Stabilitatea sistemelor. Criteriul Routh. Exemplu (3).

- Să considerăm un exemplu numeric. Fie ecuația caracteristică:
 $a(s) = s^6 + 4 \cdot s^5 + 3 \cdot s^4 + 2 \cdot s^3 + s^2 + 4 \cdot s + 4$
- Condiția necesară este îndeplinită deoarece toți coeficienții sunt pozitivi.
- Să calculăm matricea Routh :

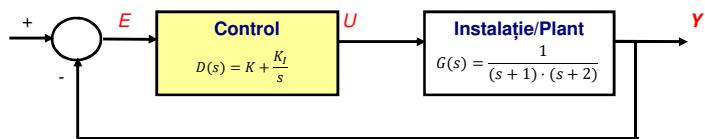
$$\begin{array}{cccccc} s^6 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ s^5 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ s^4 & \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2} & \frac{4 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{4} = 0 & \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 0}{4} = 4 \\ s^3 & \frac{5/2 \cdot 2 - 4 \cdot 0}{5/2} = 2 & \frac{5/2 \cdot 4 - 4 \cdot 4}{5/2} = -12 & 0 \\ s^2 & \frac{2 \cdot 0 - 5/2 \cdot (-12/5)}{2} = 3 & \frac{2 \cdot 4 - (5/2 \cdot 0)}{2} = 4 \\ s^1 & \frac{3 \cdot (-12/5) - 8}{3} = \frac{-76}{15} & 0 \\ s^0 & \frac{(-76/15) \cdot 4 - 0}{(-76/15)} = 4 & \end{array}$$

- Elementele din prima coloană nu sunt toate pozitive, deci avem rădăcini în partea dreaptă a planului complex, deci sistemul NU este stabil.

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Stabilitate versus domeniul de variație al parametrilor

- De multe ori problema de proiectare se referă la determinarea domeniului permis de variație a unor parametri pentru a avea stabilitate.
- Fie exemplul din figură la care se cere domeniul de variație a constantelor K , K_i pentru stabilitate.



- Ecuatia caracteristica (numitorul) a sistemului în buclă închisă este

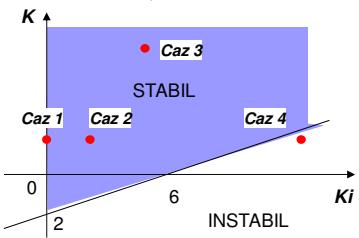
$$1 + D(s) \cdot G(s) = 1 + \left(K + \frac{K_i}{s}\right) \cdot \frac{1}{(s+1) \cdot (s+2)} = 0$$

$$s \cdot (s+1) \cdot (s+2) + (s \cdot K + K_i) = 0 \Rightarrow s^3 + 3 \cdot s^2 + (2+K) \cdot s + K_i = 0$$

- Matricea Routh se calculează

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 2+K \\ s^2 & 3 & K_i \\ s^1 & \frac{(6+3 \cdot K - K_i)}{3} \\ s^0 & K_i \end{array}$$

- Condițiile de stabilitate devin $K_i > 0$ și $K > (1/3)K_i - 2 \Rightarrow$
- Alegem câteva seturi de valori pentru analiză.



2019 *** Sisteme Automate de Control

39

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Stabilitate versus domeniul de variație al parametrilor (2 parameteri)

- Răspuns la semnal treaptă

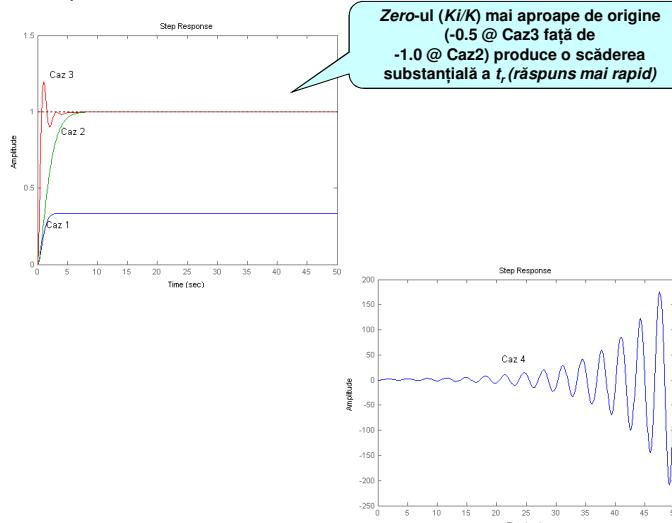
```
clear;
K=1; Ki=0;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 1'); hold on;
axis([0 50 0.0 1.5]);

K=1; Ki=1;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 2'); hold on;

K=10; Ki=5;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 3');

figure;

K=1; Ki=12;
numT=[K Ki];
denT=[1 3 2+K Ki];
sysT=tf(numT,denT);
step(sysT, 50);
gtext('Caz 4');
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

40

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Cazuri speciale la aplicarea criteriului Routh (1)

- Dacă un element pe prima poziție dintr-un rând este zero, atunci putem înlocui acest zero cu o valoare mică ε și calcula apoi limita $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Exemplu:

$$a(s) = s^5 + 3 \cdot s^4 + 2 \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 + 6 \cdot s + 9$$

- Matricea Routh:

s^5	1	2	6
s^4	3	6	9
s^3	0	3	0
s^3	ε	3	0
s^2	$\frac{2 \cdot \varepsilon - 3}{\varepsilon}$	3	0
s^1	$3 - \frac{3 \cdot \varepsilon^2}{2 \cdot \varepsilon - 3}$	0	0
s^0	3	0	

- Aplicând limita, se observă două schimbări de semn, deci vor fi două rădăcini cu partea reală pozitivă - instabilitate.

2019 *** Sisteme Automate de Control

41

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Cazuri speciale la aplicarea criteriului Routh (2)

- Alt caz special atunci când un întreg sir de valori este zero.
- Aceasta indică existența unor (sau unei) perechi de rădăcini complex conjugate, pe axa imaginară sau simetrice față de axa imaginară.
- Vom forma o ecuație auxiliară cu coeficienții rândului precedent din matrice, și plasăm coeficienții derivatei acestei noi ecuații pe rândul următor.

Exemplu: $a(s) = s^5 + 5 \cdot s^4 + 11 \cdot s^3 + 23 \cdot s^2 + 28 \cdot s + 12$

- Calculăm matricea Routh:

s^5	1	11	28
s^4	5	23	12
s^3	$\frac{5 \cdot 11 - 23}{5} = 6.4$	$\frac{5 \cdot 28 - 12}{5} = 25.6$	0
s^2	3	12	
s^1	0	0	
s^1	6	0	
s^0	12		

- Nu avem schimbare de semn în prima coloană, deci toate rădăcinile au partea reală negativă cu excepția unei perechi pe axa imaginară.

2019 *** Sisteme Automate de Control

42

Capitolul 3 *** Răspunsul dinamic al sistemelor

Observații finale

- Un sistem stabil are toți polii funcției de transfer situați în partea stângă a planului complex.
- **Un sistem este stabil dacă și numai dacă toate elementele din prima coloană a matricei Routh sunt pozitive.**
 - Metoda de determinare a matricei Routh a fost prezentată.

Capitolul 1 *** Introducere

Săptămâna 02 = Răspunsul dinamic al sistemelor (4 ore)

- Ora 08 = Analiza pe calculator. Metode de proiectare asistata de calculator.

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**

Analiza pe calculator. Metode de proiectare.

Dezvoltarea calculatoarelor a permis automatizarea tuturor fazelor procesului de proiectare:

- **Modelarea sistemelor pe baza datelor experimentale**
 - Folosirea datelor din măsurarea directă a răspunsului tranzitoriu.
 - Folosirea datelor din măsurarea directă a răspunsului în frecvență.
 - Colectarea de date stocastice pentru regimul staționar.
 - Folosirea datelor din măsurarea directă a răspunsului la injectarea unui zgomot pseudo-aleatoriu.
- **Simularea în domeniul timp a comportării sistemelor, prin rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale**
 - Ecuații diferențiale neliniare
 - Metoda de integrare Euler
 - Metoda de integrare Runge-Kutta
 - Ecuații diferențiale liniare
 - Metoda ecuațiilor de stare.
- **Proiectare asistată de calculator**
 - Utilizarea mediului MATLAB pentru proiectarea pe baza unor metode cunoscute.
 - Metoda răspunsului în frecvență
 - Metoda locului rădăcinilor
 - Metoda ecuațiilor de stare
 - Dezvoltarea unor **GUI** pentru automatizarea proiectării în MATLAB.

2019 *** Sisteme Automate de Control

45

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**

Modelarea sistemelor pe baza datelor experimentale

Se recomandă construirea modelelor din date experimentale deoarece:

- De multe ori, informații despre modelul (comportarea) sistemului nu sunt disponibile
 - Fenomenele fizice nu sunt înțelese bine
 - Sistemul este foarte complex, greu de definit matematic
 - Nu avem acces complet la structura internă a sistemului pentru a construi un model teoretic
 - Modelul este în continuă schimbare și depinde de parametrii de operare, deci trebuie actualizat periodic.
- Orice model teoretic este (de fapt) o aproximare a realității și trebuie comparat sau verificat cu rezultatele experimentale.

2019 *** Sisteme Automate de Control

46

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**
Modelarea sistemelor pe baza datelor experimentale

Metoda	Avantaje	Dezavantaje
Răspuns tranzitoriu	- Usor de obținut - Dezvoltă modele fiabile	- Trebuie aplicată o treaptă destul de mare (S/N) - Nu întotdeauna aproximează operația normală a sistemului - Rezultatele nu sunt ușor de convertit în modele poli-zero -uri
Răspuns în frecvență	- Usor de obținut - Avem direct modelul în frecvență	- Poate lua mult timp - Trebuie aplicat un semnal destul de mare (S/N)
Răspuns stationar stocastic (colectarea de date de operare, fără teste speciale)	- Atractiv, deoarece nu trebuie să aplicăm semnale speciale	- Calitatea informației poate fi inconsistentă - Poate ascunde anumite aspecte, sau anumite dinamici. - Necesită algoritmi complexi de deducere a modelului.
Aplicarea de zgomot pseudo-aleatoriu	- Zgomot construit prin metode digitale, cum ar fi PRBS (pseudo-random binary signal).	- Modelul poate fi creat doar de un calculator puternic.

- Construirea modelelor sistemelor din date experimentale fac parte din **identificarea sistemelor**, o disciplină de sine-stătătoare.

2019 *** Sisteme Automate de Control

47

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**
Modelarea sistemelor de baza datelor experimentale

- Identificarea sistemelor** se bazează pe metode statistice pentru construirea modelelor matematice ale sistemelor dinamice.
- Pentru reducerea efortului de colectare de date, este necesară proiectarea optimă a procesului de colectare de date – proiectarea optimă a experimentelor (“*design of experiments*”).

2019 *** Sisteme Automate de Control

48

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**
Simularea în domeniul timp a comportării sistemelor, prin rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale

- Ecuații diferențiale neliniare = ecuațiile pot fi scrise doar ca

$$\dot{x} = f(x, u)$$

- Metoda de integrare Euler

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = f(x_i, u_i) \Rightarrow x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot f(x_i, u_i)$$

- Metoda de integrare Runge-Kutta

- Mai multe forme posibile, discutăm aici metoda de ordinul al doilea
- Determină o valoare aproximativă a lui $x(i+1)$ cu ajutorul metodei Euler
- Estimează derivată în acest punct, apoi recalculează $x(i+1)$ cu o medie a derivatelor

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, u_i) \\ k_2 &= f(x_i + k_1 \cdot \Delta t, u_{i+1}) \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot (k_1 + k_2) \end{aligned}$$

- Ecuații diferențiale liniare

- Metoda ecuațiilor de stare.

- Ecuațiile diferențiale se pot scrie ca un sistem de ecuații de primul ordin

$$\dot{x} = F \cdot x + G \cdot u$$

- Pentru care avem mecanisme automate de rezolvare.

2019 *** Sisteme Automate de Control

49

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**

Proiectare asistată de calculator

- Analiza se face cu programe dedicate analizei sistemelor dinamice.
- Un astfel de program este MATLAB
 - Oferă facilități de analiză de sistem, și raportare grafică a rezultatelor
 - Lucrează împreună cu *Control Systems Toolbox*
 - Construiește și manipulează modele liniare și invariabile în timp
 - Funcții de transfer definite prin poli-zero sau fracție
 - Ecuații de stare (ecuații diferențiale de primul ordin în variabilă de stare)
 - Ecuații diferențiale
 - Modele pe baza unor date experimentale
 - Oferă optimizarea modelelor LTI prin reducerea ordinului
 - Analizează aceste modele și desenează răspunsurile lor în frecvență.
 - Proiectează compensare folosind metoda locului rădăcinilor și tehnici de plasare optimă a polilor.
 - Oferă diverse GUI (*Graphical user Interface*) pentru proiectarea asistată de calculator.
 - Vizualizarea răspunsului în timp al sistemelor *ltiview*
 - Proiectarea structurilor de compensare tipice *pidtool*
 - Proiectarea rețelelor de compensare în mod interactiv *sisotool*
 - Oferă conversie automată a modelelor LTI în modele digitale, pentru implementare pe microcontroler.

2019 *** Sisteme Automate de Control

50

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**

Proiectare asistată de calculator

■ MATLAB-SIMULINK

- Conține o bibliotecă de modele utilizabile ca blocuri în construcția sistemului de analizat.
- Reprezentarea grafică intuitivă a sistemelor, la nivel de bloc/module
- Oferă o modalitate de simulare a comportării sistemelor dinamice în domeniul timp
- Analiza în domeniul timp, cu vizualizarea tuturor formelor de undă, precum și posibilități de salvare date, pentru post-procesare în mediul MATLAB
- Mod de interacțiune cu mediul hardware (*microcontroler*) pentru testări on-line și/sau scrierea asistată a programului de control.

Capitolul 3 * Răspunsul dinamic al sistemelor**

Observații finale

Calculatoarele ne ajută prin:

- Identificarea și modelarea sistemelor dinamice**
- Simularea funcționării pentru analiza performanțelor**
- Proiectarea asistată de calculator a compensării sistemelor dinamice**

TEMA DE CASĂ #2

Tema de casă numărul 2 trebuie adusă la laboratorul din 29 martie.

Capitolul 3 *** Raspunsul dinamic al sistemelor

Problema 1

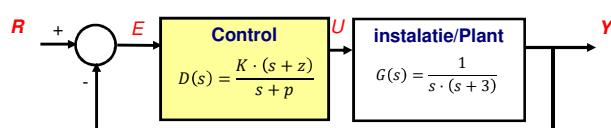
Găsiți transformata Laplace pentru funcția în timp: $f(t) = t^2 + e^{-2t} \cdot \sin(3t)$

Problema 2

Găsiți echivalentul în domeniul timp pentru funcția Laplace: $F(s) = \frac{2 \cdot (s^2 + s + 1)}{s \cdot (s + 1)^2}$

Problema 3

Pentru sistemul cu reacție unitară prezentat în figură, determinați K , p și z , pentru a obține un răspuns la semnal treaptă caracterizat de suprareglare ("overshoot") < 10%, timp de stabilizare la 1% ("settling time") < 1.5sec. [Optional: Puteți verifica rezultatul în MATLAB].



Problema 4

Folosiți criteriul de stabilitate Routh pentru a verifica stabilitatea sistemului în buclă închisă, cu reacție unitară, aplicată unui sistem în buclă deschisă caracterizat de:

$$KG(s) = \frac{2 \cdot (s + 4)}{s^2 \cdot (s + 1)}$$

SOLUTII PENTRU TEMA DE CASA NUMARUL 2

Temele au fost noteate cu $4x2 + 2$ baza.

Problema 1

Gasiti transformata Laplace pentru functia in timp:

$$f(t) = t^2 + e^{-2t} \cdot \sin(3t)$$

Solutie

Pe baza proprietăților de liniaritate și translație în frecvență:

$$L(\sin(3t)) = \frac{3}{s^2 + 9} \Rightarrow L(e^{-2t} \cdot \sin(3t)) = \frac{3}{(s+2)^2 + 9}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{(s+2)^2 + 9} = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2 + 4 \cdot s + 13} = \frac{3 \cdot s^3 + 2 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 26}{s^3 \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 13)}$$

Problema 2

Gasiti echivalentul in domeniul timp pentru functia Laplace:

$$F(s) = \frac{2 \cdot (s^2 + s + 1)}{s \cdot (s + 1)^2}$$

Solutie

$$F(s) = \frac{2 \cdot (s^2 + s + 1)}{s \cdot (s + 1)^2} \Rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B \cdot s + C}{s^2 + 2 \cdot s + 1}$$

$$= \frac{A \cdot s^2 + 2 \cdot A \cdot s + A + B \cdot s^2 + C \cdot s}{s \cdot (s + 1)^2} =$$

$$= \frac{(A + B) \cdot s^2 + (2 \cdot A + C) \cdot s + A}{s \cdot (s + 1)^2} = \frac{2 \cdot (s^2 + s + 1)}{s \cdot (s + 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 2 \cdot A + C = 2 \\ A = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s + 1)^2}$$

Din tabel și prin proprietatea de liniaritate, obținem:

$$f(t) = 2 \cdot 1(t) - 2 \cdot t \cdot e^{-t} = 2 \cdot (1 - t \cdot e^{-t}) \cdot 1(t)$$

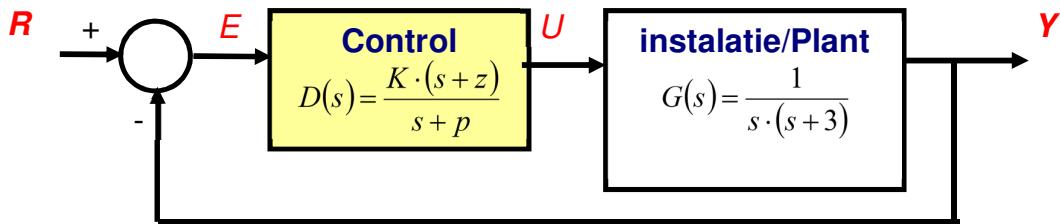
unde

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

este funcția treaptă unitară (Heaviside) cu sensul unui semnal aplicat începând din momentul $t=0$.

Problema 3

Pentru sistemul cu reacție unitară prezentat în figură, determinați K , p și z , pentru a obține un răspuns la semnal treaptă caracterizat de suprareglare (“overshoot”) <10%, timp de stabilizare la 1% (“settling time”) <1.5sec.
[Optional: Puteți verifica rezultatul în MATLAB].



Solutie

*) studiul stabilitatii nu a fost (de)punctat.

I. Funcții de transfer

$$D(s) = \frac{K \cdot (s + z)}{s + p} \Rightarrow D(s)G(s) = \frac{K \cdot (s + z)}{s + p} \cdot \frac{1}{s \cdot (s + 3)} = \frac{K \cdot (s + z)}{s \cdot (s + 3) \cdot (s + p)}$$

Sistemul în bucla închisă are funcția de transfer:

$$H_c(s) = \frac{D(s) \cdot G(s)}{1 + D(s) \cdot G(s)} = \frac{\frac{K \cdot (s + z)}{s \cdot (s + 3) \cdot (s + p)}}{1 + \frac{K \cdot (s + z)}{s \cdot (s + 3) \cdot (s + p)}}$$

II. Analiză Stabilitate (studiul stabilitatii nu a fost punctat)

Ecuația caracteristică a funcției de transfer în bucla închisă se obține (numitorul lui H_c):

$$s^3 + (3 + p) \cdot s^2 + (3 \cdot p + K) \cdot s + K \cdot z = 0$$

Aplicam criteriul Routh pentru stabilitate:

s^3	1	$3 \cdot p + K$
s^2	$3 + p$	K
s^1	$\frac{(3 + p) \cdot (3 \cdot p + K) - K}{3 + p}$	
s^0	K	

Pentru stabilitate, trebuie indeplinite condițiile:

$$\begin{cases} K > 0 \\ 3 + p > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > 0 \\ p > -2 \leftarrow p > 0 \end{cases}$$

In orice condiții (K, p, z numere reale pozitive), avem un sistem stabil cu o radacină reală și două rădăcini complexe conjugate, toate în partea negativă a planului complex.

III. Proiectare control

ATENTIE: NU EXISTĂ SOLUTIE UNICĂ !!! MAI MULTE SETURI DE VALORI PENTRU (K,z,p) pot satisface condițiile de proiectare!

Cea mai rapidă proiectare a compensării se poate face prin reducerea ordinului sistemului, la o aproximare $z=3$. Va rămâne o funcție de transfer de ordinul doi și se pot aplica formulele din curs.

ATENTIE: $z=3$ este o idealizare, nu vom putea realiza niciodată în microcontroler (sistemu de control) o valoare EXACT egală cu polul din modelul instalației. Un model mai corect ar fi $z=3,05$ (orice *zero* LÂNGĂ 3).

(*)

Vom prezenta acum o metodă diferită de proiectare.

Putem considera analiza ca un sistem cu doi poli conjugati la care adaugam un pol real negativ (pagina 29, curs 2).

- Am vazut ca daca polul real este la distanta mare de polii complecsi, putem neglaja efectul său.
- Dacă este în vecinătatea părții reale a polilor complex conjugați, acesta va înceti răspunsul la semnal treaptă.
- Un alt efect va fi acela de a produce o valoare mai scazută a suprareglarii M_p . Deoarece aceasta ultima observatie nu este argumentata printr-o formula, vom considera in proiectare o condiție mai stringentă la considerarea suprareglarii M_p (de exemplu 5% sau 7% in loc de 10%).

Deci, putem considera cazul cel mai defavorabil ca fiind situația cu polul real negativ situat la mare departare de cei doi poli complex conjugati. În alte cuvinte, considerăm cazul în care putem neglaja efectul acestui pol real negativ.

O astfel de aproximare reduce analiza la un sistem de ordinul doi.

Un sistem ce produce suprareglare (“overshoot”) $<10\%$ si timp de stabilizare la 1% (“settling time”) $<1.5\text{sec}$, poate fi descris de ecuatia caracteristica:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{4.6}{ts} = \frac{4.6}{1.5} \\ \zeta > 0.591 \leftarrow M_p = 10\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \frac{4.6}{ts} = \frac{4.6}{1.5} > 3.07 \approx 3.25 \\ \zeta = 0.65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{3.25}{0.65} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s^2 + 6.5 \cdot s + 25 = 0$$

unde am considerat o valoare mai mare pentru ζ in vederea pre-intampinarii unei suprareglari prea mari (ca o rezerva in proiectare).

Notăm polul real negativ cu Q, atunci $Q > 10 \cdot \sigma \sim 33$ (de 10 ori mai mare decât partea reală a celor două rădăcini complexe conjugate).

Apoi:

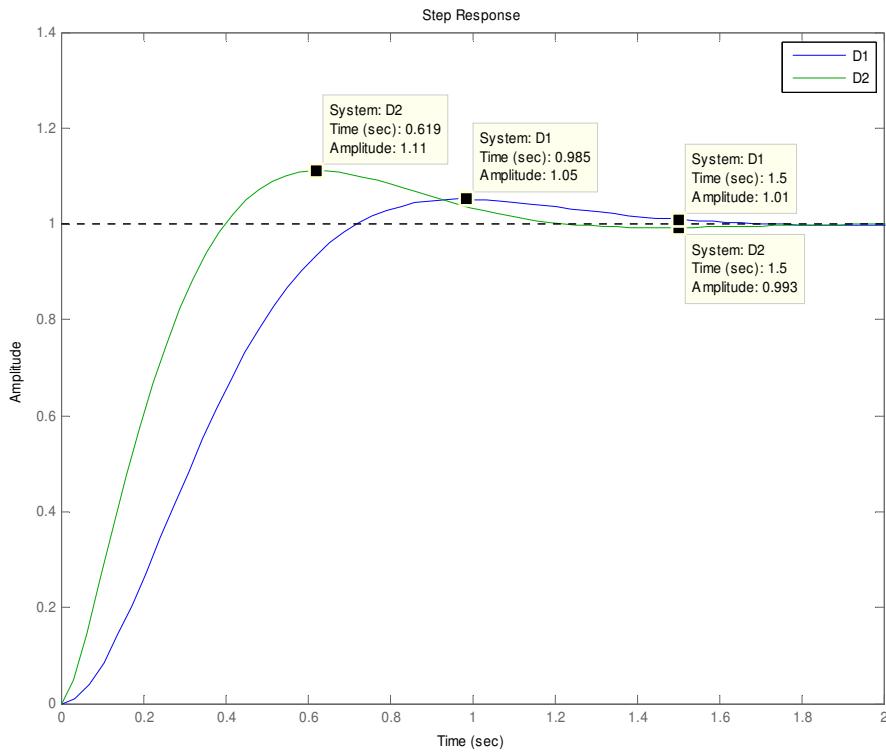
$$(s + Q) \cdot (s^2 + 6.5 \cdot s + 25) = s^3 + (Q + 6.5)s^2 + (25 + 6.5 \cdot Q) \cdot s + 25 \cdot Q = \\ = s^3 + 39.5 \cdot s^2 + 239.5 \cdot s + 825 \equiv s^3 + (3 + p) \cdot s^2 + (3 \cdot p + K) \cdot s + K \cdot z$$

De unde:

$$\begin{cases} p = 36.5 \\ 3 \cdot 36.5 + K = 239.5 \Rightarrow K = 130 \\ K \cdot z = 825 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 36.5 \\ K = 130 \Rightarrow D_2(s) = \frac{130 \cdot (s+6.35)}{s+36.5} \\ z = 6.35 \end{cases} \quad (**)$$

Pentru o imagine completă a rezultatelor, figura următoare prezintă răspunsul MATLAB la semnal treaptă pentru cazurile legilor de control (*) sau (**).

$$D_1(s) = \frac{20 \cdot (s+3.05)}{s+6.25} \quad (*) \qquad D_2(s) = \frac{130 \cdot (s+6.35)}{s+36.5} \quad (**)$$



```
G=tf([1],[1 3 0])
D1=20*tf([1 3.05],[1 6.25])
D2=130*tf([1 6.35],[1 36.50])
S1=feedback(D1*G,1)
S2=feedback(D2*G,1)
step(S1); hold on; step(S2);
legend('D1','D2');
```

Problema 4

Folosiți criteriul de stabilitate Routh pentru a verifica stabilitatea sistemului în buclă închisă, cu reacție unitară, aplicată unui sistem în buclă deschisă caracterizat de:

$$KG(s) = \frac{2 \cdot (s + 4)}{s^2 \cdot (s + 1)}$$

Solutie:

$$H_c(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{\frac{2 \cdot (s + 4)}{s^2 \cdot (s + 1)}}{1 + \frac{2 \cdot (s + 4)}{s^2 \cdot (s + 1)}} = \frac{2 \cdot (s + 4)}{s^3 + s^2 + 2 \cdot s + 8}$$

Ecuatia caracteristica devine:

$$s^3 + s^2 + 2 \cdot s + 8 = 0$$

Criteriul Routh are forma simplă:

s^3	1	2
s^2	1	8
s^1	-6	
s^0	8	

Sistemul NU este stabil.



Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Semestrul 2



Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 09 = Caracteristicile unui control cu reacție
- Modul 10 = Control clasic P, I, D
- Modul 11 = Urmărirea unei referințe variabile.
- Modul 12 = Control digital. Efectele digitizării.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 09 = Caracteristicile unui control cu reacție

2019 *** Sisteme Automate de Control

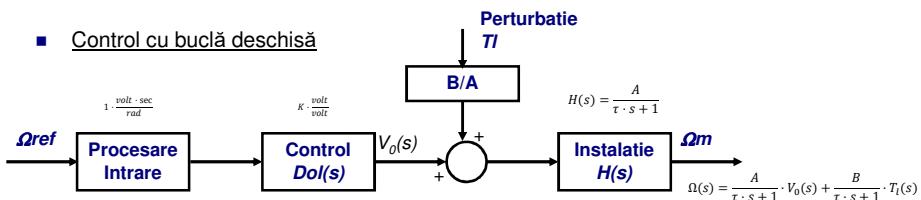
3

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

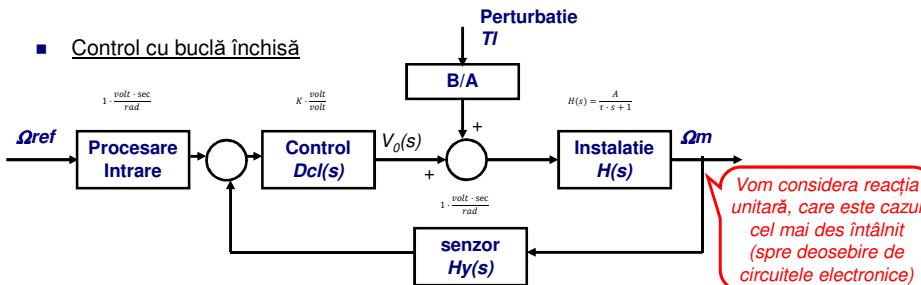
Reprezentarea cu scheme bloc a sistemelor dinamice

- Exemplu simplificat de control al vitezei unui sistem în mișcare caracterizat de o funcție de transfer cu un pol și reacție printr-un căstig constant (proporțional).

- Control cu buclă deschisă



- Control cu buclă închisă



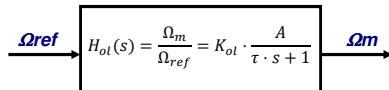
2019 *** Sisteme Automate de Control

4

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Reprezentarea cu scheme bloc – Functia de transfer intrare-iesire

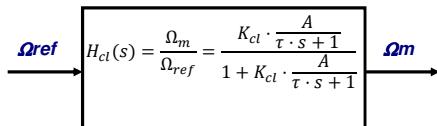
- Control în buclă deschisă



□ Câștigul controlului în buclă deschisă se calculează pentru perturbație $T_l=0$, la $s=0$

$$K_{ol} = \frac{1}{A}$$

- Control în buclă închisă



□ Câștigul controlului în buclă închisă se calculează pentru $T_l=0$, la $s=0$, deci este unitar pentru $K_{cl} \uparrow \Rightarrow A \cdot K_{cl} \gg 1$

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Efectul reacției asupra - rejectie unei perturbații

- Cât de bine menține sistemul o referință în prezența unei perturbații în sistemul controlat? (în exemplu: perturbația de cuplu de sarcină T_l la o acționare cu motor electric)

□ Calculele anterioare au fost facute cu $T_l = 0$.
□ Să vedem ce se întâmplă dacă avem $T_l \neq 0$.

$$\Omega(s) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot V_0(s) + \frac{B}{\tau \cdot s + 1} \cdot T_l(s)$$

- Buclă deschisă, regim staționar

$$v_{ss} = v_{ref} + B \cdot T_l$$

- Buclă închisă, regim staționar

$$v_{ss} = \frac{A \cdot K_{cl}}{1 + A \cdot K_{cl}} \cdot v_{ref} + \frac{B}{1 + A \cdot K_{cl}} \cdot T_l$$

- Cu proiectarea anterioară, $K_{cl} \uparrow \rightarrow A \cdot K_{cl} \gg 1$
- Dacă (*în plus*), $A \cdot K_{cl} \gg B$

$$v_{ss} - v_{ref} \sim 0$$

Concluzie – Eroarea sistemului la o perturbație constantă poate fi redusă cu un factor de $\frac{1}{1 + A \cdot K_{cl}}$ în buclă închisă față de cazul buclei deschise.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Efectul reactiei asupra – sensibilitatii sistemului la variația parametrilor din modelul sistemului controlat (1)

- Variația parametrilor (cauze)
 - Diferite componente ale sistemului pot avea parametri variabili în timp îndelungat, depinzând de mediul extern (cum ar fi temperatura, îmbătrâinarea componentelor),
 - Datele originale din model pot fi ușor eronate.
- Vom studia efectul unor astfel de variații asupra câștigului funcției de transfer, la $s=0$.

$$A \rightarrow A + \delta A \quad \frac{\delta H_{ol}}{H_{ol}} = (\text{coeficient_de_sensibilitate}) \cdot \frac{\delta A}{A} = S \cdot \frac{\delta A}{A}$$

□ Buclă deschisă

$$K_{ol} \cdot A \rightarrow K_{ol} \cdot (A + \delta A) = K_{ol} \cdot A + K_{ol} \cdot \delta A \Rightarrow \frac{\delta H_{ol}}{H_{ol}} = \frac{\delta A}{A} \Rightarrow S = 1$$

- Exemplu = O variație de 10% în modelul sarcinii ("plant"), produce o eroare de 10% în transferul intrare-iesire.

□ Buclă închisă (sistem cu reactie):

$$S = \frac{\frac{\delta H_{cl}}{H_{cl}}}{\frac{\delta A}{A}} = \frac{A}{\frac{A \cdot K_{cl}}{1 + A \cdot K_{cl}}} \cdot \left(\frac{dH_{cl}}{dA} \right) = \frac{A}{\frac{A \cdot K_{cl}}{1 + A \cdot K_{cl}}} \cdot \frac{(1 + A \cdot K_{cl}) \cdot K_{cl} - K_{cl} \cdot A \cdot K_{cl}}{(1 + A \cdot K_{cl})^2} = \frac{1}{1 + A \cdot K_{cl}}$$

Concluzie – Variația câștigului sistemului în buclă închisă la $s=0$ este mai puțin sensibilă la variații ale parametrilor, cu un factor de $1+AK$ față de cazul buclei deschise.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Efectul reactiei asupra – Sensibilitatii sistemului la variația parametrilor din modelul sistemului controlat (2)

Observatie pentru perturbatii sinusoidale

- Rezultate similare se obțin dacă perturbațiile de sarcină sau de model sunt sinusoidale în locul unor valori constante.
- Această observație se poate extinde și la alte semnale complexe, ce pot fi descompuse într-o sumă de semnale sinusoidale.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Efectul reacției asupra - Răspunsului în timp al sistemelor

- Deoarece sistemele sunt caracterizate de proprietăți dinamice, modul în care sunt urmărite referințele variabile este important.

- Funcția de transfer pentru control în buclă deschisă

$$H_{ol}(s) = \frac{\Omega_m}{\Omega_{ref}} = K_{ol} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}$$

- Se observă constanta de timp τ

- Funcția de transfer pentru control în buclă închisă

$$H_{cl}(s) = \frac{\Omega_m}{\Omega_{ref}} = \frac{K_{cl} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}}{1 + K_{cl} \cdot \frac{A}{\tau \cdot s + 1}} = \frac{K_{cl} \cdot A}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A}$$

- Noua constantă de timp este

- Observații**

$$\tau_{cl} = \frac{\tau}{1 + A \cdot K_{cl}}$$

- Sistemele de control în buclă închisă au un **răspuns mai rapid**, cu atât mai rapid cu cât crește câștigul pe buclă de reacție.

- La sistemele de ordin mare, **creșterea câștigului pe buclă de reacție reduce amortizarea**, și poate produce oscilații neamortizate.

- Proiectarea rezolvă conflictul dintre viteza de răspuns mare și stabilitate.

Concluzie = Sistemele de control cu reacție pot face sistemul mai rapid și mai puțin stabil.

2019 *** Sisteme Automate de Control

9

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (1)

- Să considerăm pentru început, cazul general al unei funcții cu variație în timp $y(t)$.
- Sensibilitatea acestei funcții față de variația unui parametru de interes θ

$$y(t, \theta + \delta\theta) = y(t, \theta) + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \delta\theta + \dots \Rightarrow \delta y = \left[\frac{\partial y}{\partial \theta} \right] \cdot \delta\theta$$

- Să revenim la exemplul simplificat, și să explorăm sensibilitatea răspunsului în timp (la semnal treaptă) la variația câștigului în buclă închisă K_{cl} .

- Funcția Laplace pentru semnalul de ieșire la aplicarea unei trepte

$$Y(s) = H_{cl}(s) \cdot R(s) = \frac{K_{cl} \cdot A}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A} \cdot R(s) = \frac{K_{cl} \cdot A}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A} \cdot \frac{1}{s} = \left(\frac{-K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) \cdot \left(\frac{\tau}{\tau \cdot s + 1 + K_{cl} \cdot A} - \frac{1}{s} \right)$$

- Cu echivalentul în domeniul timp

$$y(t) = \left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) \left(1 - e^{-\frac{1+K_{cl} \cdot A}{\tau} t} \right)$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

10

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (2)

- De pe pagina precedentă

$$y(t) = \left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) \left(1 - e^{-\frac{1+K_{cl} \cdot A}{\tau} t} \right)$$

- Derivata parțială pentru studiul sensibilității

$$\frac{\partial y}{\partial K_{cl}} = \left(\frac{A}{(1 + K_{cl} \cdot A)^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{1+K_{cl} \cdot A}{\tau} t} \right) + \left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) \left(\left(\frac{A}{\tau} \cdot t \right) e^{-\frac{1+K_{cl} \cdot A}{\tau} t} \right)$$



$$\frac{\partial y}{\partial K_{cl}} = \left(\frac{1}{(1 + K_{cl} \cdot A)} \right) \left(\frac{y}{K_{cl}} \right) + \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) \left(1 - \frac{y}{\left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A} \right)} \right) = \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) + \left(\frac{1}{1 + K_{cl} \cdot A} - \frac{AK_{cl}}{\tau} \cdot t \right) \cdot \left(\frac{y}{K_{cl}} \right)$$

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (3)

$$\frac{\partial y}{\partial K_{cl}} = \left(\frac{1}{(1 + K_{cl} \cdot A)} \right) \left(\frac{y}{K_{cl}} \right) + \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) \left(1 - \frac{y}{\left(\frac{K_{cl} \cdot A}{1 + K_{cl} \cdot A} \right)} \right) = \left(\frac{K_{cl} \cdot \frac{A^2}{\tau} \cdot t}{1 + K_{cl} \cdot A} \right) + \left(\frac{1}{1 + K_{cl} \cdot A} - \frac{AK_{cl}}{\tau} \cdot t \right) \cdot \left(\frac{y}{K_{cl}} \right)$$

Considerând

$$K_{cl} \uparrow \Rightarrow A \cdot K_{cl} \gg 1$$

se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial K_{cl}} &\approx \left(\frac{A}{\tau} \cdot t \right) + \left(-\frac{A}{\tau} \cdot t \right) \cdot (y(t)) \Rightarrow y^*(t) = y(t) + \left[\left(\frac{A}{\tau} \cdot t \right) + \left(-\frac{A}{\tau} \cdot t \right) \cdot (y(t)) \right] \cdot \delta K_{cl} \\ &= y(t) + \left[\frac{A}{\tau} \cdot (1 - y(t)) \cdot \delta K_{cl} \right] \cdot t \end{aligned}$$

$$y^*(t) = y(t) + \left[\frac{A}{\tau} \cdot (1 - y(t)) \cdot \delta K_{cl} \right] \cdot t$$

Capitolul 4 * Proprietatile controlului cu reactie**

Sensibilitatea răspunsului în timp la variația parametrilor (4)

- Observați cum se modifică răspunsul la semnal treaptă la modificarea câștigului pe buclă închisă cu 10%.

$$H(s) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1}$$

$$\tau_{cl} = \frac{\tau}{1 + A \cdot K_{cl}} \approx \frac{\tau}{1 + A \cdot 0.9 \cdot K_{cl}}$$

A MATLAB code snippet is shown:

```
clear;
A=1; % rad/volt*sec
tau=0.01; % sec
Kcl=9;
dKcl=0.9;

Hol=tf(A,[tau 1]);
[y,t]=step(Hol);
sz=size(t);
for i=1:sz
    f(i)=((A*dKcl/tau)*t(i)) * (1-y(i));
end
plot(t,[y' f' y"']);
legend('y', 'f', 'y"');
```

2019 *** Sisteme Automate de Control 13

Capitolul 4 * Proprietatile controlului cu reactie**

Efortul de control (1)

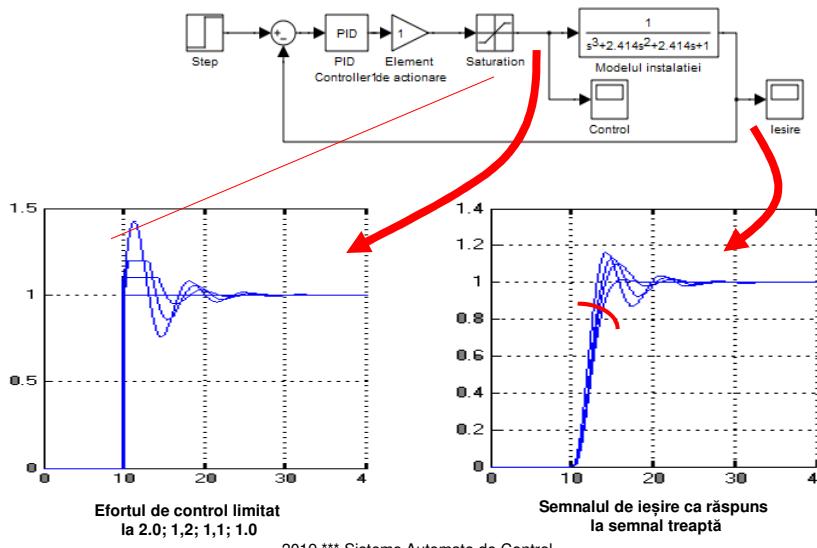
- Se introduce un termen nou, foarte legat de implementarea practică.
 - Efortul de control** este mărimea aplicată instalației ca urmare a legii de control.
 - Proiectantul trebuie să se întrebe - Poate sistemul fizic genera efortul de control așteptat de proiectant? Sistemele fizice sunt de putere limitată și efortul de control poate fi sub cel așteptat (puterea motorului unui autoturism, debitul de gaz într-o centrală termică, s.a.m.d.)
 - Cum variază efortul de control pe durata funcționării?
 - La erori mari, **efortul de control** va fi mare.
 - La erori mici, **efortul de control** va fi redus.
- In exemplul de control al vitezei, "cruise control", **efortul de control** va fi forța motorului aplicată la un moment dat pentru schimbarea vitezei.
 - Limitarea puterii motorului va introduce erori mai mari ale controlului.
 - Un vehicul cu un motor de 600CP va răspunde mai ferm decât un motor de 55CP.

2019 *** Sisteme Automate de Control 14

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Efortul de control (2) = Exemplu numeric

Limitarea efortului de control produce răspuns mai lent:



2019 *** Sisteme Automate de Control

15

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Observații finale

- Spre deosebire de controlul în buclă deschisă, sistemele de control cu reacție pot fi utilizate pentru
 - reducerea erorii stationare la diverse perturbații,
 - reducerea dependenței funcției de transfer la variația parametrilor,
 - îmbunătățirea regimului tranzitoriu,
 - reducerea dependenței semnalului dinamic de ieșire la variația parametrilor.
- Creșterea câștigului buclei de reacție îmbunătățește viteza răspunsului, dar poate crea probleme de stabilitate.

2019 *** Sisteme Automate de Control

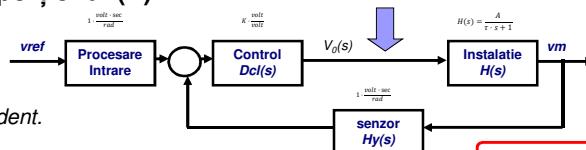
16

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 10 = Control clasic P, I, D

Control cu câștig proporțional (P)

Coresponde exemplului
și analizei din modulul precedent.



- Ieșirea sistemului de control poate fi caracterizată de relația $u = K_p \cdot e$
- Un astfel de sistem are o eroare stationară nenulă ("offset" față de referință constantă), care scade cu creșterea câștigului K_p .
- Am văzut că sistemele de ordinul întâi sunt stabile întotdeauna.
- Pentru sisteme de ordin superior, controlul proporțional poate conduce la instabilitate și există întotdeauna o valoare pentru câștigul K_p de la care avem instabilitate.
 - Dar ... o valoare redusă a lui K_p poate produce o valoare ridicată a erorii staționare și un răspuns tranzitoriu nesatisfăcător.
- Soluția standard pentru reducerea erorii staționare este adăugarea unei componente integrale (**Control P-I**).

Observatie: - Rețelele de reacție studiate în acest capitol și proiectarea lor fac parte din **controlul clasic**, care și-a găsit succesul în automatizarea unor procese industriale, în special în industria chimică.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Control cu câştig proporţional-integrator PI (1)

- Leşirea modulului de control va produce semnalul (exprimare în domeniul timp)

$$u(t) = k_p \cdot e + k_I \cdot \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$$

e = eroare

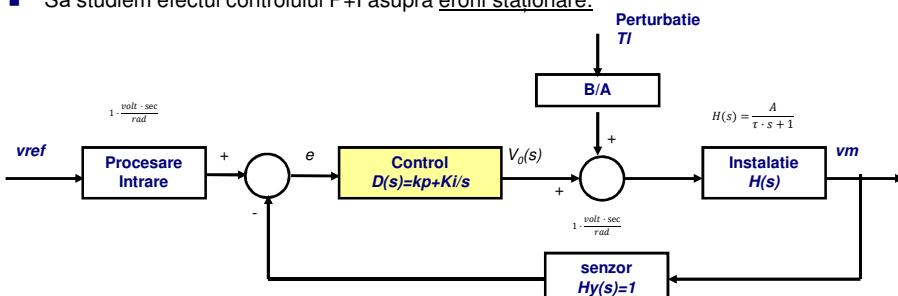
- Termenul de integrală poate fi privit ca o sumare a tuturor valorilor anterioare ale erorii.
 - Aceasta înseamnă că o perturbație constantă poate fi anihilată de termenul de integrare chiar dacă eroarea este zero.
- Funcția de transfer a controlului devine:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_I}{s}$$

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Control cu câştig proporţional-integrator PI (2)

- Să studiem efectul controlului P+I asupra erorii staționare:



$$\begin{aligned}
 v_m &= \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(V_0 + \frac{B}{A} \cdot T_l \right) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(\left(k_p + \frac{k_I}{s} \right) \cdot (v_{ref} - v_m) + \frac{B}{A} \cdot T_l \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot \left(k_p + \frac{k_I}{s} \right) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot T_l \Rightarrow \\
 &\Rightarrow s \cdot (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot (s \cdot k_p + k_I) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot s \cdot T_l
 \end{aligned}$$

$$v_m = \frac{A \cdot (s \cdot k_p + k_I)}{\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot v_{ref} + \frac{B \cdot s}{\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot T_l$$

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Control cu câştig proporțional-integrator PI (3)

- Calculăm eroarea stationară la semnal treaptă, prin **Teorema valorii finale**
 - Considerăm $v_{ref} = 0$ (pentru a izola eroarea staționară), $T_i = T_o/s$ (semnal treaptă).

$$v_m = \frac{A \cdot (s \cdot k_p + k_I)}{\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot v_{ref} + \frac{B \cdot s}{\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot T_o$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot v_m(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{B \cdot s}{\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot \frac{T_o}{s} \right] = 0$$

□ Deci valoarea finală la aplicarea unei perturbații ca semnal treaptă va fi nulă.

- Calcularea erorii stationare prin $s=0$ pentru semnale de intrare constante.
 - Se obține $v_m = v_{ref}$, care implică o eroare staționară nulă independent de valoarea câștigului A sau de câștigurile k_p și k_I ale controlului (cu condiția ca k_I să fie nenul).
- Deoarece legea de control conține un termen în "s", controlul va modifica dinamica sistemului într-un mod mai profund decât simpla modificare a câștigului în cazul controlului proporțional.
 - Rădăcinile ecuației caracteristice: $\tau \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I = 0$

depind de proiectarea controlului, și pot conduce la răspuns necorespunzător.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Control cu câştig proporțional-integrator-derivativ PID (1)

- Îșișarea blocului de control va produce semnalul

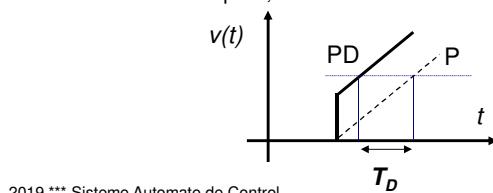
$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_I \cdot \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + k_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

- Funcția de transfer

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s \right)$$

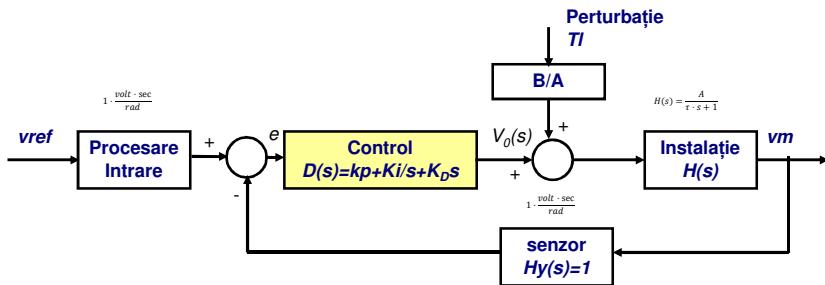
- Forma a doua este folosită în reglarea proceselor de control industriale, unde **constanta de resetare (T_I) și cea de derivare (T_D)** capătă pentru operator un sens fizic, de constante de timp, exprimate în secunde.

- Sensul componentei derivative este acela de anticipare, cu efectul reducerii oscilațiilor.



Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Control cu câştig proporţional-integrator-derivativ PID (2)



$$v_m = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(V_0 + \frac{B}{A} \cdot T_l \right) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} \cdot \left(\left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s \right) \cdot (v_{ref} - v_m) + \frac{B}{A} \cdot T_l \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s \right) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot T_l \Rightarrow \\ \Rightarrow s \cdot (\tau \cdot s + 1) \cdot v_m = A \cdot (k_D \cdot s^2 + s \cdot k_p + k_I) \cdot (v_{ref} - v_m) + B \cdot s \cdot T_l$$

$$v_m = \frac{A \cdot (s^2 \cdot k_D + s \cdot k_p + k_I)}{(\tau + A \cdot k_D) \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot v_{ref} + \frac{B \cdot s}{(\tau + A \cdot k_D) \cdot s^2 + (A \cdot k_p + 1) \cdot s + A \cdot k_I} \cdot T_l$$

Efectul termenului derivativ este mai important în sisteme de ordin superior.

2019 *** Sisteme Automate de Control

23

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Efectul controlului PID

- Creșterea controlului proporțional reduce eroarea staționară, dar pune în pericol stabilitatea sistemului.
- Componența integrală se folosește pentru reducerea erorii staționare.
- Componența derivativă îmbunătățește atenuarea ("damping") sistemului de control și îmbunătățește stabilitatea.
- Cele trei componente formează controlul PID clasic.

	<i>Timp de creștere</i>	<i>Suprareglare</i>	<i>Timp de stabilizare</i>	<i>Eroare staționară</i>
<i>Kp crește</i>	<i>scade</i>	<i>crește</i>	<i>crește puțin</i>	<i>scade</i>
<i>Ki crește</i>	<i>scade puțin</i>	<i>crește</i>	<i>crește</i>	<i>eliminată</i>
<i>Kd crește</i>	<i>scade puțin</i>	<i>scade</i>	<i>scade</i>	<i>schimbare</i>

2019 *** Sisteme Automate de Control

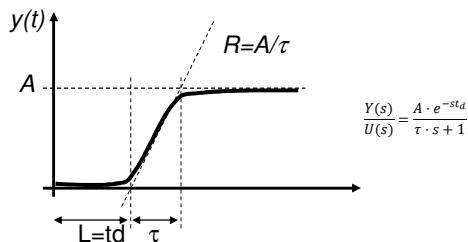
24

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Ajustarea controlului prin metoda Ziegler-Nichols (1)

- Există metode de proiectare pe calculator (în domeniul timp) pentru satisfacerea condițiilor de eroare staționară și răspuns tranzitoriu, fie pentru urmărirea unei referințe, fie pentru eliminarea unei perturbații.
 - Se bazează pe disponibilitatea unui model precis al sistemului controlat.
- Vom analiza mai târziu metode de proiectare în domeniul frecvență.
- Vom prezenta aici o metodă simplificată, parte din controlul clasic (1942), bazată pe simple experimente cu rezultate în domeniul timp.

Criteriul 1: Răspunsul multor sisteme la un semnal treaptă la intrare este ca cel din figură:



- Constantele din funcția de transfer aproximativă se pot determina din figură, pentru sistemul în buclă deschisă.

2019 *** Sisteme Automate de Control

25

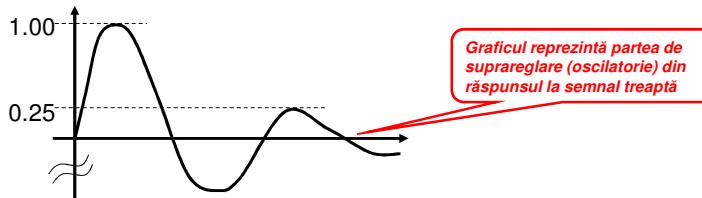
Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Ajustarea controlului prin metoda Ziegler-Nichols (2)

- Criteriul 1:** După determinarea constantelor R și L din răspunsul la semnal treaptă al sistemului în buclă deschisă, se proiectează un control cu coeficienții din tabel...

Control	Coeficienti din legea de control
Proportional (P)	$k_p = \frac{1}{R \cdot L}$
Proportional-Integral (PI)	$k_p = \frac{0.9}{R \cdot L}$ $T_I = \frac{L}{0.3}$
Proportional-Integral-Derivativ (PID)	$k_p = \frac{1.2}{R \cdot L}$ $T_I = 2 \cdot L$ $T_D = 0.5 \cdot L$

- ... pentru a garanta un răspuns în buclă închisă cu o rată de amortizare de 25% (al doilea vârf).



2019 *** Sisteme Automate de Control

26

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Ajustarea controlului prin metoda Ziegler-Nichols (3)

- Criteriu 2:** Acordarea la limita de stabilitate ("ultimate sensitivity method") constă în evaluarea amplitudinii și frecvenței oscilațiilor la limita de stabilitate.
 - Se închide bucla de reacție.
 - Se crește câstigul proporțional până apar oscilații la ieșirea sistemului.
 - Se determină k_u ("ultimate gain") și P_u ("ultimate period").

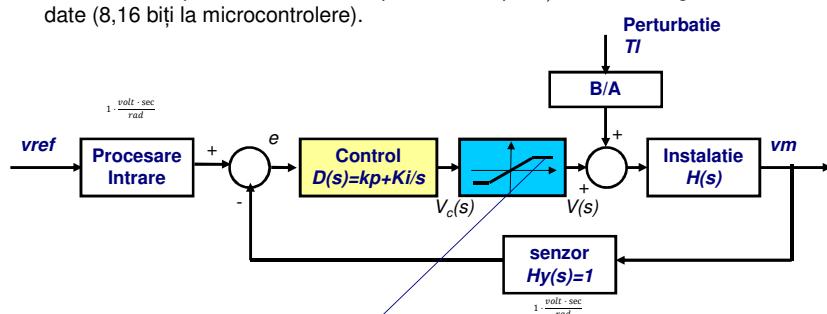
Control	Coefficienți din legea de control
Proportional (P)	$k_p = 0.5 \cdot K_u$
Proportional-Integral (PI)	$\begin{cases} k_p = 0.45 \cdot K_u \\ T_I = \frac{P_u}{1.2} \end{cases}$
Proportional-Integral-Derivativ (PID)	$\begin{cases} k_p = 0.6 \cdot K_u \\ T_I = \frac{1}{2} \cdot P_u \\ T_D = \frac{1}{8} \cdot P_u \end{cases}$

- Observatie:** - În multe cazuri practice, k_p trebuie redus (față de aceste rezultate) pentru a reduce suprareglarea ("overshoot").

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Saturarea ieșirii circuitului de control = "integrator anti-windup" (1)

- În realitate, regimul dinamic al oricărui circuit de control este limitat, ceea ce înseamnă că ieșirea controlului se poate satura.
- Această limită poate fi $\pm 15V$ la amplificatoare operaționale sau lărgimea bus-ului de date (8,16 biți la microcontrolere).

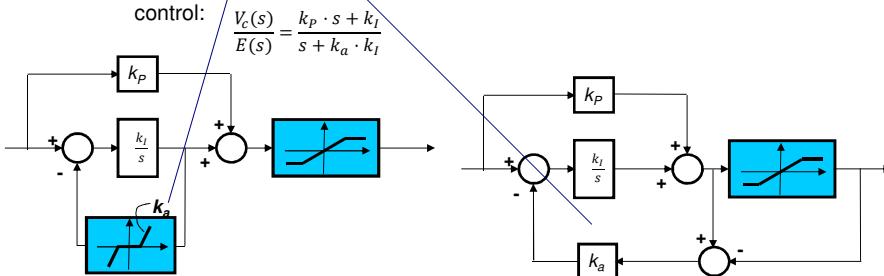


- Semnalul $V(s)$ este limitat la V_{max} (sau $-V_{max}$), integratorul continuă să răspundă la eroare și să crească semnalul $V_c(s)$.
 - La ieșirea sistemului din saturare, este nevoie de o eroare negativă imensă pentru a reduce semnalul V_c la valori mai mici decât V_{max} .
 - Altfel, saturarea la V_{max} se menține pentru mult timp și controlul sistemului este pierdut.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Saturarea ieșirii circuitului de control = “integrator anti-windup” (2)

- Soluția (“**integrator anti-windup**”) constă în întreruperea acțiunii de integrare la saturarea circuitului de control.
 - În controlul digital => “if $v=V_{max}$, $K_i=0$ ”
 - În control analog (sau ca metode de principiu), se poate folosi una dintre configurațiile din figură.
 - Coeficientul k_a se alege destul de mare pentru ca intrarea în circuitul de control să rămână mică la orice valoare a semnalului de eroare.
 - Pe durata în care circuitul de desaturare (“anti-windup”) este activ, întregul control se manifestă ca o întârziere (“lag”), care poate fi descrisă de legea de control:



2019 *** Sisteme Automate de Control

29

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Observații finale

- Sistemele de control cu reacție se folosesc pentru
 - Reducerea erorii staționare la perturbații,
 - Reducerea sensibilității funcției de transfer la variația parametrilor,
 - Îmbunătățirea regimului tranzistoriu,
 - Reducerea sensibilității ieșirii sistemului de control la variația parametrilor din sistemul controlat.
- Creșterea controlului proporțional reduce eroarea staționară, dar pune în pericol stabilitatea sistemului.
 - Componenta integrală se folosește pentru reducerea erorii staționare.
 - Componenta derivativă îmbunătățește atenuarea (“**damping**”) sistemului de control și îmbunătățește stabilitatea.
 - Cele trei componente formează controlul PID clasic.
- Recomandări pentru proiectarea controlului clasic PID au fost date pe baza măsurării performanței sistemului controlat.
- Circuitul de desaturare (“**anti-windup**”) are rolul de a introduce o reacție locală pentru a face sistemul de control stabil atunci când saturarea ieșirii se produce în interiorul sistemului principal de control (PID).

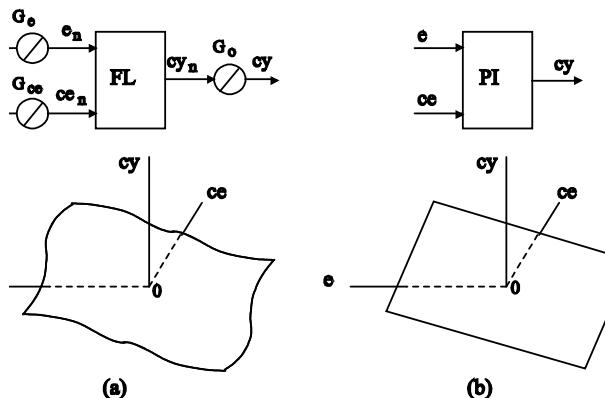
2019 *** Sisteme Automate de Control

30

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Anexă:

- Majoritatea implementărilor unei metode de control din clasa P-I-D, se fac prin definirea unei "variații în marimea de ieșire" (cy) în funcție de eroare (e) și "variația erorii" (ce).
- Controlul clasic P-I conduce la o suprafață de control plană (figura b).
- În unele cazuri se poate folosi
 - Control PI neliniar = coeficienții de control K_p , K_i se modifică pe intervale de variație a erorii.
 - Control "fuzzy logic" = inferență (interpolare) între puncte ale suprafeței de control pre-definite.



2015 2019 Sisteme Automate de Control 10

31

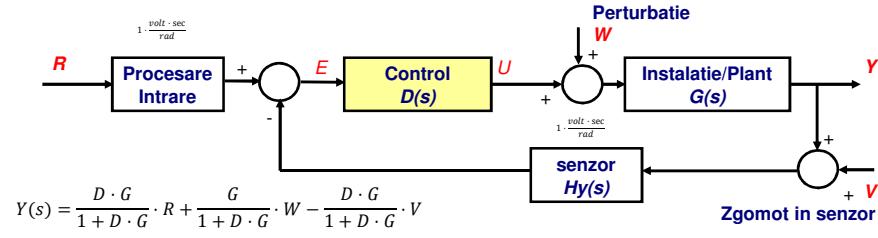
Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 11 = Urmărirea unei referințe variabile.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Recapitularea ecuațiilor unui sistem de control cu reacție



$$Y(s) = \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot R + \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W - \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R - \left[\frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot R + \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W - \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V \right] = \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R - \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W + \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V \\ &= \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R - \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W + \left[1 - \frac{1}{1 + D \cdot G} \right] \cdot V \end{aligned}$$

- Scopul unui sistem de control este acela de a menține eroarea mică pentru orice referință și în prezența oricărei perturbații sau zgomot în circuitul de măsură.
 - Vom proiecta funcția de control $D(s)$ pentru a atinge acest obiectiv, desi se pot face și schimbări sau adaptări în modelul instalației ("plant").
 - Pentru proiectarea controlului $D(s)$, se poate considera că variația referinței (R) și a perturbațiilor (W) au loc la frecvențe scăzute, iar zgomotul de măsurare (V) este la frecvențe înalte, în domeniile de frecvență diferite.
 - Deci $[1/(1+DG)]$ trebuie să fie scăzut la frecvențe joase, și aproape de 1 la frecvențe înalte => Comportarea ca un filtru trece-jos a produsului DG.

2019 *** Sisteme Automate de Control

33

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Urmărirea unei referințe variabile ("tracking", 1)

- In multe cazuri, semnalul de intrare (referință) nu este constant.
 - Să presupunem că acest semnal poate fi aproximat cu o funcție cu variație polinomială pentru un interval de timp destul de lung pentru ca sistemul să atingă regim staționar (avem variație polinomială până când suntem în regim staționar).
 - Pentru un sistem dat (instalație, "plant"), eroarea va fi zero pentru referințe exprimate ca funcție polinomială de un grad mai mic decât o anumită valoare, și va fi nelimitată pentru funcții polinomiale de grad ridicat.
 - Vom defini tipul sistemului ca fiind egal cu gradul polinomului utilizat ca referință care produce o eroare finită nenulă.**
- Exemplu – Sistemul de ordin întâi (din ora precedentă) cu modelul sarcinii (instalație, plant)

$$G(s) = \frac{A}{\tau \cdot s + 1}$$
 - Control proporțional (P) produce o eroare finită nenulă (offset) la o referință constantă (v. *modulul 9*)
 - Control integral (I) sau $P+I$ produce o eroare nulă la o referință constantă (*modulul 9*).
 - Control integral (I) sau $P+I$ produce o eroare nenulă finită la o referință cu o variație în rampă (vom demonstra)

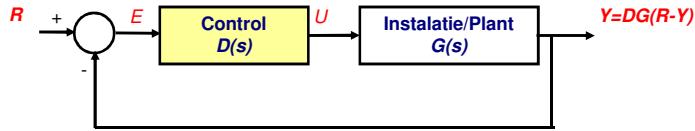
2019 *** Sisteme Automate de Control

34

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Urmărirea unei referințe variabile ("tracking", 2)

- Vom considera cazul simplificat al unei reacții unitare și vom neglijă prezența zgomotului în senzor, și a altor perturbații ($W = V = 0$).



- Eroarea va fi dată de:

$$E(s) = \left[\frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R \right]$$

- Pentru semnale de referință polinomiale, vom considera cazul simplificat:

Semnal treaptă pentru a arăta când începe răspunsul

$$r(t) = t^k \cdot 1(t) \quad R(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

$k = 0 \Rightarrow$ referință de tip "poziție" (treaptă)
 $k = 1 \Rightarrow$ referință de tip "viteză" (rampă)
 $k = 2 \Rightarrow$ referință de tip "accelerație" (parabolă)

- Aplicarea **teoremei valorii finale** (v. modul 05) conduce la

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right]$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

35

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Urmărirea unei referințe variabile ("tracking", 3)

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot R(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right]$$

Să rescriem funcția de transfer prin punerea în evidență a polilor în origine și a unei alte funcții Laplace $G_0(s)$ pentru care $G_0(0)$ are o valoare finită K_n .

$$DG(s) = \frac{G_0(s)}{s^n}$$

Obținem

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + D \cdot G} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_0(s)}{s^n}} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s^n}{s^n + K_n} \cdot \frac{1}{s^k} \right] = \begin{cases} 0 & \leftarrow n > k \\ \frac{1}{1 + K_0} & \leftarrow n = k = 0 \\ \frac{1}{K_n} & \leftarrow n = k \neq 0 \\ \infty & \leftarrow n < k \end{cases}$$

Exemplu:

Cazul unei funcții de transfer de ordinul întâi, la care aplicăm un semnal treaptă. Am văzut că valoarea finală este diferită pentru orice K_0 din funcția de transfer, ceea ce coincide cu $n=k=0$.

2019 *** Sisteme Automate de Control

36

Capitolul 4 * Proprietatile controlului cu reactie**

Urmărirea unei referințe variabile (“tracking”, 4)

Calcularea erorilor staționare ca o funcție de tipul sistemului:

0	$k=$	2
----------	------------------------	----------

$$e_{ss} = \begin{cases} 0 & \leftarrow n > k \\ \frac{1}{1+K_0} & \leftarrow n = k = 0 \\ \frac{1}{K_n} & \leftarrow n = k \neq 0 \\ \infty & \leftarrow n < k \end{cases}$$

Semnal de intrare (“Referinta”)			
	Treapta (“Pozitie”)	Rampa (“Viteza”)	Parabola (“Acceleratie”)
	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t \cdot 1(t)$	$r(t) = t^2 \cdot 1(t)$
Tipul “0”	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
Tipul “1”	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipul “2”	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Câți $1/s$ sunt în DG?

n

Concluzii

- Tipul sistemului este dat de numărul de poli în $s = 0$.
- În funcție de tipul sistemului, putem estima capacitatea unui sistem de a urmări semnale de referință cu o variație polinomială.
- Se observă că într-un sistem de control cu reacție unitară, variația parametrilor nu modifică tipul erorii staționare.
- Fără demonstrație: Pentru orice sistem în buclă închisă, deplasarea polilor catre $(-\infty)$ determină creșterea K_p, K_v, K_a și scăderea erorii staționare.

2019 *** Sisteme Automate de Control

37

Capitolul 4 * Proprietatile controlului cu reactie**

Urmărirea unei referințe variabile (“tracking”, 5)

Cazul general al unei reacții ne-unitare $H(s)$

- Funcția de transfer intrare-ieșire devine

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G} \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G}$$

- Aplicarea teoremei valorii finale (v. ora05) conduce la

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \left(1 - \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G} \right) \cdot R(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \left(1 - \frac{D \cdot G}{1 + H \cdot D \cdot G} \right) \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right]$$

- Eroarea staționară e_{ss} poate fi
 - O constantă nenulă => sistemul este de tipul k
 - Zero (0)
 - Infinită

2019 *** Sisteme Automate de Control

38

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Tipul unui sistem în cazul perturbațiilor cu reprezentare polinomială

- Să reluăm ecuația generală

$$Y(s) = \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot R + \frac{G}{1 + D \cdot G} \cdot W + \frac{D \cdot G}{1 + D \cdot G} \cdot V$$

- Am studiat cazul unei referințe **R** variabile în timp, cu reprezentare printr-o funcție polinomială.
- Vom efectua o analiză similară pentru cazul unei perturbații variabile în timp **W**, cu reprezentare printr-o funcție polinomială.

- Analiza este oarecum identică cu cea precedentă și putem defini tipul unui sistem în privința oricarei variații polinomiale a perturbațiilor.

Legatura dintre perturbație și eroare (consider $R=0, V=0$)

$$T_w(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{-Y(s)}{W(s)}$$

- Aplicarea **teoremei valorii finale** (v. modul 05) conduce la

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot T_w(s) \cdot W(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot (s^n \cdot T_{w0}) \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] \leftarrow T_{w0}(0) = \frac{1}{K_{nw}}$$

- Eroarea staționară e_{ss} la perturbațile cu reprezentare polinomială de ordin k , poate fi
 - O constantă nenulă => Sistemul este de tipul k când $n = k$
 - Zero (0) când $n > k$
 - Infinită când $n < k$

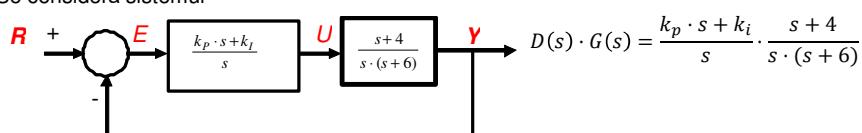
2019 *** Sisteme Automate de Control

39

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Exemplu de calculare a erorii staționare

Se consideră sistemul



- (a) **Care este tipul sistemului și eroarea staționară pentru urmărirea unei referințe variabile?**

Sistemul este de tipul 2, eroarea staționară va depinde de semnalul de intrare

- = 0 pentru semnal treapta
- = 0 pentru semnal rampă
- = o constantă ($1/K_a$) pentru semnal parabolic ($1/s^2$), adică inversa pentru

$$K_a = \frac{D_o(s)G_o(s)}{\Big|_{s=0}} = \frac{(s+4) \cdot (k_p \cdot s + k_i)}{(s+6)} \Big|_{s=0} = \frac{4 \cdot k_i}{6} = \frac{2 \cdot k_i}{3}$$

- (b) **Care este tipul sistemului și eroarea staționară pentru rejetia unei perturbații?**

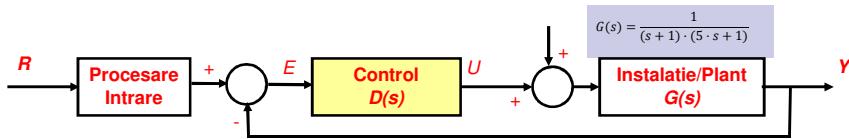
$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot T_w(s) \cdot W(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{G(s)}{1 + D(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{\frac{G_o(s)}{s}}{1 + \frac{D_o(s)G_o(s)}{s^2}} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{4}{6}}{1 + \frac{4k_i}{s^2}} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] = \boxed{\begin{cases} 0, k = 0 \\ 1/k_i, k = 1 \\ \infty, k > 1 \end{cases}} \end{aligned}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

40

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Exemplu de control de tip P, PI, PID (generalizare)



Se consideră sistemul cu funcția de transfer a instalației ("**plant**"):

Să se determine tipul sistemului și eroarea staționară pentru semnale de intrare cu variație polinomială, pentru legi de control de tip P, PI, PID, cu $k_p = 19$, $k_i = 0.5$, $k_d = 4/19$.

Solutie

$$D(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \cdot s = \frac{k_d \cdot s^2 + k_p \cdot s + k_i}{s}$$

$$D(s) \cdot G(s) = \begin{cases} \frac{DG_0(s)}{s} \leftarrow DG_0(0) = k_i = \text{constan} t, \text{PID} \\ \frac{DG_0(s)}{s} \leftarrow DG_0(0) = k_i = \text{constan} t, \text{PI} \\ \frac{DG_0(s)}{s^0} \leftarrow DG_0(0) = k_p = \text{constan} t, \text{P} \end{cases}$$

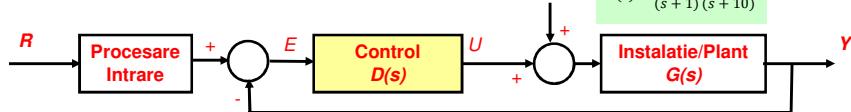
Semnal de intrare ("Referinta")		
Treapta ("Positie")	Rampa ("Viteza")	Parabola ("Acceleratie")
$r(t) = l(t)$	$r(t) = t \cdot l(t)$	$r(t) = t^2 \cdot l(t)$
P Tipul "0"	$\frac{1}{1+k_p}$	∞
PI, PID Tipul "1"	0	$\frac{1}{k_i}$

2019 *** Sisteme Automate de Control

41

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

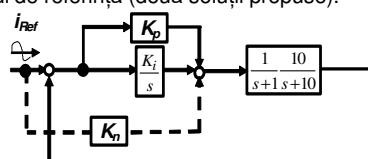
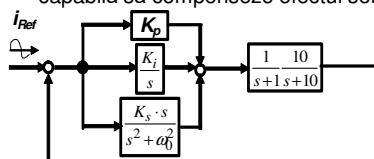
Exemplu de semnal de intrare sinusoidal



Să se studieze capabilitatea sistemului de a urmări o referință sinusoidală.

Solutie

- Considerăm semnalul de intrare de tipul $i_R = I_R \cdot \cos(\omega_0 t)$ cu transformata Laplace $I_R(s) = \frac{I_R \cdot s}{s^2 + \omega_0^2}$ deci $E(s) = \frac{I_R(s)}{1 + DG(s)} = \frac{I_R \cdot s}{s^2 + \omega_0^2 \cdot 1 + DG(s)}$
- Pentru intervale mici de timp, putem considera că sinusoida se aproximează cu un semnal rampă de pantă variabilă.
- Fiecare astfel de semnal rampă va conduce la o eroare staționară dacă sistemul de control este de tip PI (v. problema precedentă). Această eroare va fi $1/K_i$.
- Pentru a rezolva această problemă, se adaugă o componentă la legea de control, capabilă să compenseze efectul semnalului de referință (două soluții propuse).



2019 *** Sisteme Automate de Control

42

Observații finale

- Clasificarea unui sistem ca fiind de **tipul k** , definește capabilitatea sistemului de a atinge eroare staționară nulă la semnale de intrare (referințe) definite prin funcții polinomiale de un ordin mai mic decât k .
- Un sistem cu reacție unitară este de **tipul k** relativ la semnalul de referință dacă funcția de transfer a sistemului în buclă închisă are k poli în origine ($s=0$).
- Erorile staționare pentru diverse sisteme de tipul 0, 1, sau 2 la diverse semnale de intrare cu reprezentare polinomială este dată.
- O clasificare și rezultate similare pot fi făcute pentru perturbații.

Proprietățile sistemelor de control cu reacție (4 ore)

- Modul 12 = Control digital. Efectele digitizării.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Avantajele controlului digital

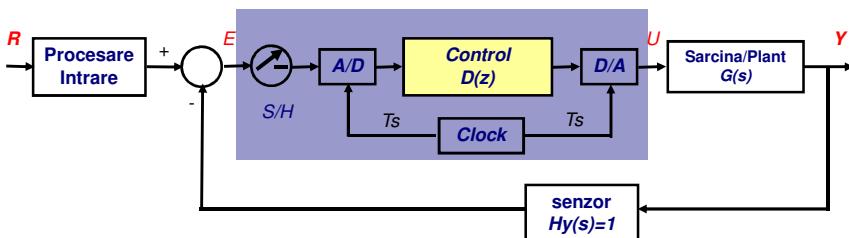
- Dezvoltarea platformelor digitale de tip microprocesor, microcontroller, sau FPGA/ASIC recomandă implementarea legilor de control în format digital.
- Legile de control pot fi implementate în hardware sau software.
 - Soluțiile software oferă flexibilitate foarte mare la schimbarea și/sau adaptarea parametrilor sau chiar a legilor de control.
 - Ambele soluții de implementare digitală (HW, SW) oferă posibilitatea integrării unor logici binare, de decizie, privind considerarea mai multor legi de control pe diverse domenii de operare.
- Proiectarea controlului în domeniul digital se poate face prin:
 - Proiectarea în domeniul analog și conversia legilor de control din analog în digital,
 - Prin aplicarea transformației Z și proiectarea cu această metodă,
 - Prin alte metode specifice controlului digital.

2019 *** Sisteme Automate de Control

45

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Structura unui sistem de control digital



- Caracteristica de bază a unui sistem de control digital constă în eșantionarea și digitizarea semnalului înainte de folosire.
 - Semnalele eșantionate se numesc discrete.
 - Semnalele eșantionate și digitizate (cuantizate) se numesc digitale.
- Procesul de eșantionare introduce limite în viteza de răspuns a sistemului, exprimate prin limitări ale lărgimii de bandă.
 - O regulă empirică de proiectare spune că perioada semnalului de eșantionare trebuie aleasă astfel încât pe durata timpului de creștere al răspunsului la semnal treaptă (*rising time*), să avem aproximativ 6 eșanțioane ale semnalului de intrare (alte surse, 5-10 eșanțioane).
 - Prin metode specifice controlului digital, se poate compensa efectul eșantionării și permite perioadei de eșantionare să fie de 2-3 ori mai mică decât timpul de creștere.

2019 *** Sisteme Automate de Control

46

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Metodă de determinare a echivalentului discret (dar nu cuantizat) pentru un control analog cunoscut

- Să considerăm perioada de eșantionare T_s , foarte mică pentru aproximarea semnalelor analogice.
- Vom ignora procesul de cuantizare (să considerăm destui biți în conversia A/D).
- Legea cunoscută, de control analog

$$U(s) = \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s \right) \cdot E(s)$$

are expresia în domeniul timp

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \cdot \frac{de}{dt} = u_p + u_I + u_D$$

unde putem separa termenii pe baza liniarității, și exprima pe baza eșantioanelor

$$u_p(k \cdot T_s + T_s) = k_p \cdot e(k \cdot T_s + T_s)$$

$$\begin{aligned} u_I(k \cdot T_s + T_s) &= k_I \cdot \int_0^{kT_s} e(\tau) d\tau = k_I \cdot \left(\int_0^{kT_s} e(\tau) d\tau + \int_{kT_s}^{kT_s+T_s} e(\tau) d\tau \right) = u_I(k \cdot T_s) + [\text{area_under_e}(t)] \approx \\ &u_I(k \cdot T_s) + k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \{e(kT_s + T_s) + e(kT_s)\} \end{aligned}$$

$$\frac{T_s}{2} \cdot \{u_D(k \cdot T_s + T_s) + u_D(k \cdot T_s)\} = k_D \cdot \{e(k \cdot T_s + T_s) - e(k \cdot T_s)\}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

47

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Recapitulare: Transformata z

- Cu aplicații în matematică și procesarea de semnal, transformata z convertește un semnal discret (o secvență de numere reale sau complexe), din domeniul timp într-o reprezentare în domeniul frecvență.
- În acest scop, definim un operator $z = e^{s \cdot T_s}$, pentru care:

$$\begin{aligned} u(k \cdot T_s) &\leftrightarrow U(z) \\ u(k \cdot T_s + T_s) &\leftrightarrow z \cdot U(z) \end{aligned}$$

- Cu această definiție, putem rescrie termenii din legea de control

□ Termenul integral

$$z \cdot U_I(z) = U_I(z) + k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot [z \cdot E(z) + E(z)] \Rightarrow U_I(z) = k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot E(z)$$

□ Termenul derivativ (prin inversarea rolurilor pentru U și E)

$$U_D(z) = k_D \cdot \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot E(z)$$

□ Obținem legea de control

$$U(z) = \left(k_p + k_I \cdot \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + k_D \cdot \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right) E(z)$$

- Observație: Aceste rezultate se puteau obține și prin înlocuirea formală a operatorului s

prin un echivalent $\frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ (metoda Tustin) în relația $U(s) = \left(k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \cdot s \right) \cdot E(s)$

2019 *** Sisteme Automate de Control

48

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Exemplu de conversie în format discret

- Să găsim implementarea digitală pentru funcția Laplace

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{11 \cdot s + 1}{3 \cdot s + 1}$$

- Vom utiliza operatorul discret

$$D_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = D(s) \Big|_{\frac{z-1}{T_s z+1}}$$

Metoda Tustin sau regula trapezoidală de aproximare a echivalentului digital

- Obținem pentru o perioadă de eșantionare $T_s = 1$ (doar în acest caz, pentru demonstrație)

$$D_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{11 \cdot \frac{2 \cdot (z-1)}{z+1} + 1}{3 \cdot \frac{2 \cdot (z-1)}{z+1} + 1} = \frac{23 \cdot z - 21}{7 \cdot z - 5}$$

- Să continuăm conversia în eșantioane, pentru implementarea în software

$$(7 \cdot z - 5) \cdot U(z) = (23 \cdot z - 21) \cdot E(z) \Rightarrow 7 \cdot u(k+1) - 5 \cdot u(k) = 23 \cdot e(k+1) - 21 \cdot e(k) \Rightarrow \\ \Rightarrow u(k+1) = \frac{5}{7} \cdot u(k) + \frac{23}{7} \cdot e(k+1) - \frac{21}{7} \cdot e(k)$$

Observație: Toate aceste rezultate se referă la semnale eșantionate (discrete), dar NU cuantizate. Operația de scriere a acestor rezultate în format binar, pe un anumit număr de biți se numește cuantizare și reprezintă o altă sursă de erori sau limitări.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

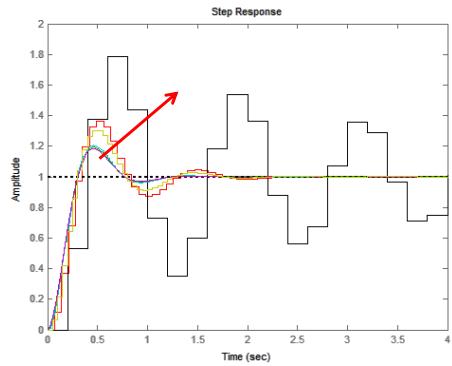
Efectele conversiei în format digital

- Vom utiliza un exemplu dezvoltat în MATLAB pentru o comparație directă între răspunsul în timp al soluției analogice și a celei echivalente digitale.

$$G(s) = \frac{45}{(s+9) \cdot (s+5)} \quad D(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = 1.4 + \frac{8.4}{s} = \frac{1.4 \cdot (s+6)}{s}$$

```
clear;
numG=45;
den1=[1 9];
den2=[1 5];
denG=conv(den1,den2);
sysG=tf(numG,denG);
numD=1.4*[1 6];
denD=[1 0];
sysD=tf(numD,denD);
DG=sysD*sysG;
DGF=feedback(DG,1);
step(DGF); hold on;
Dd=c2d(sysD,0.07);
Gd=c2d(sysG,0.07);
DGD=Dd*Gd;
DGD=feedback(DGD,1);
step(DGD);
```

Forma de undă fără eșantionare,
 $T_s=0.001, 0.005,$
 $0.050, 0.070, 0.250$



- Se observă o întârziere de jumătate de perioadă ($T_s/2$).
- În alte cazuri, este posibilă apariția unui aliasing.

Notă: Pentru simplificarea exemplului, am convertit aici modelul întregii bucle, inclusiv instalația. De obicei, în practică, doar compensarea este digitală.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Metode de proiectare în format digital – Metoda emulației (1)

- Metoda emulației ("emulation") constă în găsirea unei soluții de compensație în analog $D(s)$, urmată de aproximarea acelei soluții printr-un operator.
- Aproximarea integralei printr-o reprezentare trapezoidală (*Tustin*), conducând la operatorul formal:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Alte aproximări sunt posibile:
 - Aproximarea derivaților prin metoda Euler.
 - Pe baza definiției, aplicând direct $z = \exp(sT) \rightarrow$ metoda "matched pole-zero MPZ"
 - O versiune denumită "modified MPK" (MMPK), evită eșantioanele $e(k+1)$ în calcularea lui $y(k+1)$

2019 *** Sisteme Automate de Control

51

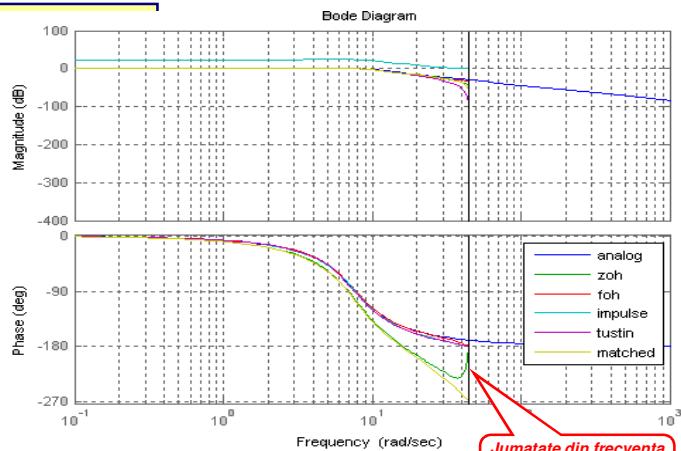
Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reactie

Metode de proiectare în format digital – Metoda emulației (2)

```
clear;
numG=45;
den1=[1 9];
den2=[1 5];
denG=conv(den1,den2);
sysG=tf(numG,denG);
numD=1.4*[1 6];
denD=[1 0];
sysD=tf(numD,denD);
DG=sysD*sysG;
DGf=feedback(DG,1);

Dd1=c2d(DGF,0.07,'zoh');
Dd2=c2d(DGF,0.07,'foh');
Dd3=c2d(DGF,0.07,'impulse');
Dd4=c2d(DGF,0.07,'tustin');
Dd5=c2d(DGF,0.07,'matched');

bode(DGF); hold on;
bode(Dd1); hold on;
bode(Dd2); hold on;
bode(Dd3); hold on;
bode(Dd4); hold on;
bode(Dd5); hold on;
grid on;
legend('analog', 'zoh', 'foh', 'impulse', 'tustin', 'matched');
```



- Compararea acestor metode de conversie
 - Răspuns identic la frecvențe joase (sub $\frac{1}{4}$ din frecvența de esantionare)
 - MMPZ ("matched pole-zero") și Tustin prezintă un "notch" la frecvențe aproximativ jumătate din frecvența de esantionare, deoarece aceste metode au un **zero** inherent la $z=-1$, din termenul $z+1$.

2019 *** Sisteme Automate de Control

52

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Metode de proiectare în format digital – Metoda directă

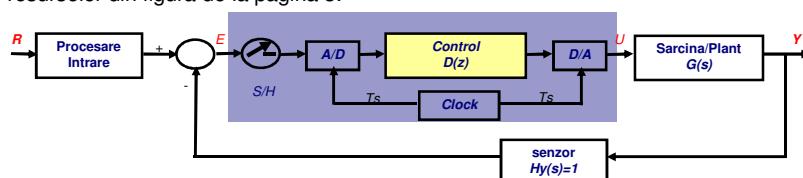
- Această metodă se bazează pe determinarea funcției de transfer a sistemului în digital, înainte de proiectarea legii de control.
- Aceleași reguli pe care le vom demonstra prin metoda locului rădăcinilor rămân valabile și pentru funcțiile de transfer exprimate în digital (z), dar interpretarea rezultatelor este diferită.
- Detalii ale acestor metode pur digitale depășesc cadrul acestui curs.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Observații finale

- O reprezentare în format digital a unei legi de control se poate obține prin înlocuirea directă a operatorului s cu: $\frac{2}{T_s} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$

- Există mai multe versiuni de implementare și partiție între software și hardware a resurselor din figura de la pagina 3.



- Proiectarea se reduce la
 - Determinarea adecvată a perioadei de eşantionare
 - Determinarea rezoluției adecvate (număr de biți pentru cuantizare)
 - Adoptarea unei aproximări a soluției din analog. Mai multe opțiuni sunt posibile.
- Metode de proiectare directă în digital există, dar depășesc cadrul acestui curs.

TEMA DE CASĂ #3

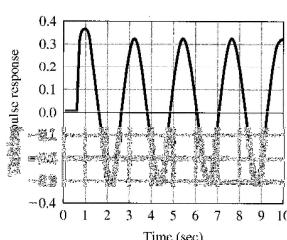
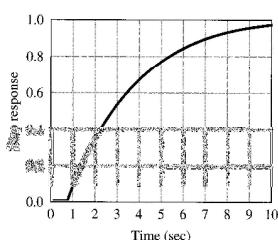
Tema de casă numărul 3 trebuie adusă la laboratorul din 29 martie.

Capitolul 4 *** Proprietatile controlului cu reacție

Problema 1

Răspunsul la semnal treaptă a unui sistem este dat în figură. Întârzierea și răspunsul tranzitoriu se pot determina din figura din stânga.

- (a) Proiectați sisteme de control P, PI, și respectiv PID, folosind metoda Ziegler-Nichols bazată pe răspuns tranzitoriu.
(b) Utilizând un control simplu proporțional P, se obține răspunsul la impuls din figura din dreapta. Pentru un câștig proporțional $K_u = 8,559$, sistemul este la limita stabilității (oscilații întreținute). Proiectați sisteme de control P, PI, și respectiv PID, folosind metoda Ziegler-Nichols pentru sensibilitate.



Problema 2

Considerați sistemul din figură, controlat cu PI.

- (a) Determinați funcția de transfer $R \rightarrow Y$.
(b) Folosiți criteriul Routh pentru a determina domeniul (k_p, k_i) pentru care sistemul este stabil.
(c) Care este tipul sistemului și eroarea stationară pentru urmărirea unei referințe variabile?
(d) Care este tipul sistemului și eroarea staționară pentru rejecția unei perturbații?

2019 *** Sisteme Automate de Control

56

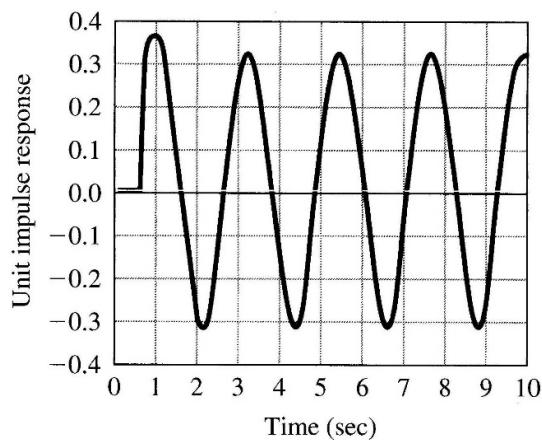
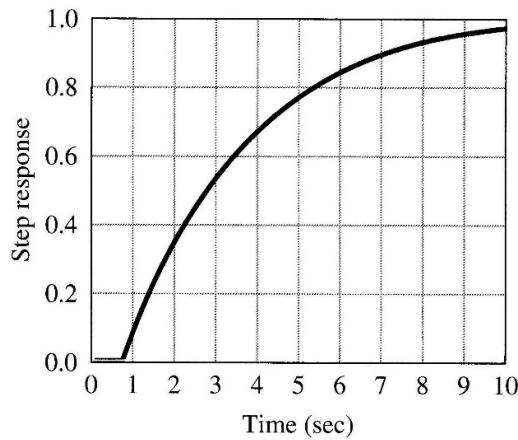
SOLUTII PENTRU TEMA DE CASA NUMARUL 3

Problema 1

Răspunsul la semnal treaptă a unui sistem este dat în figură. Intârzierea și răspunsul tranzitoriu se pot determina din figura din stânga.

- Proiectați sisteme de control P, PI, și respectiv PID, folosind metoda Ziegler-Nichols bazată pe răspuns tranzitoriu.
- Utilizând un control simplu proporțional P, se obține răspunsul la impuls din figura din dreapta. Pentru un câștig proporțional $K_u=8,559$, sistemul este la limita stabilității (oscilații întreținute). Proiectați sisteme de control P, PI, și respectiv PID, folosind metoda Ziegler-Nichols pentru sensibilitate.

Solutie



(a)

$$L=T_d=0.9$$

$$R=A/t=1/9.2=0.108$$

Control proporțional

$$K_p = \frac{1}{RL} = 10.28$$

Control proporțional-integrativ

$$\begin{cases} K_p = \frac{0.9}{RL} = 9.259 \\ T_I = \frac{L}{0.3} = 3 \end{cases}$$

Control proporțional-integrativ-derivativ

$$\begin{cases} K_p = \frac{1.2}{RL} = \frac{1.2}{0.108 * 0.9} = 12.345 \\ T_I = 2L = 1.8 \\ T_D = 0.5L = 0.45 \end{cases}$$

(b)

Proportional

$$K_p = 0.5 * Ku = 4.280$$

Proportional-integrativ

$$\begin{cases} k_p = 0.45 * Ku = 3.852 \\ T_I = \frac{Pu}{1.2} = \frac{2.2}{1.2} = 1.83 \end{cases}$$

Proportional integrativ derivativ

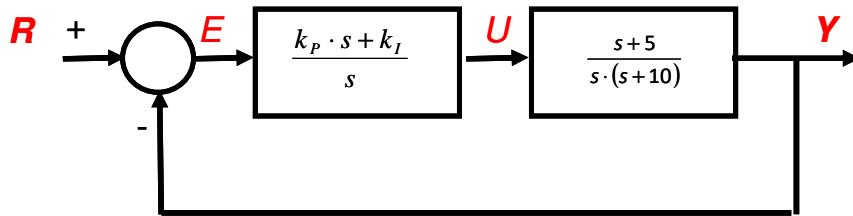
$$\begin{cases} k_p = 0.6Ku = 5.135 \\ T_I = 0.5Pu = 1.1 \\ T_D = (1/8) * Pu = 0.275 \end{cases}$$

Problema 2

Considerați sistemul din figură, controlat cu PI.

- (a) Determinați funcția de transfer R->Y.
- (b) Folosiți criteriul Routh pentru a determina domeniul (k_p, k_i) pentru care sistemul este stabil.
- (c) Care este tipul sistemului și eroarea stationară pentru urmărirea unei referințe variabile?
- (d) Care este tipul sistemului și eroarea staționară pentru rejecția unei perturbații?

Solutie



(a)

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(S)} &= \frac{\frac{k_p \cdot s + k_I}{s} \cdot \frac{s+5}{s \cdot (s+10)}}{1 + \frac{k_p \cdot s + k_I}{s} \cdot \frac{s+5}{s \cdot (s+10)}} = \frac{(s+5) \cdot (k_p \cdot s + k_I)}{s^3 + 10 \cdot s^2 + k_p \cdot s^2 + (5 \cdot k_p + k_I) \cdot s + 5 \cdot k_I} \\ \frac{Y(s)}{R(S)} &= \frac{(s+5) \cdot (k_p \cdot s + k_I)}{s^3 + (10 + k_p)s^2 + (5 \cdot k_p + k_I)s + 5 \cdot k_I} \end{aligned}$$

(b) Pentru $k_p, k_i > 0$, toți coeficienții numărătorului sunt pozitivi.

Criteriul Routh

s^3	1	$5 \cdot k_p + k_i$
s^2	$10 + k_p$	$5 \cdot k_i$
s	$\frac{5 \cdot k_p^2 + 50 \cdot k_p + 10 \cdot k_i + k_i \cdot k_p - 5 \cdot k_i}{10 + k_p}$	0
s^0	$5 \cdot k_i$	

$$k_i > 0$$

$$k_p > 0$$

$$5 \cdot k_p^2 + (5 + k_i) \cdot k_p + (4 \cdot k_i) > 0$$

Totii termenii din prima coloana sunt pozitivi intotdeauna, deci avem sistem stabil.

(c)

Tipul „2”

Eroarea stationara pentru referinta

= 0 pentru semnal treapta

= 0 pentru semnal rampa

= $1/K$ pentru semnal parabolic

$$K_o = \left. \frac{D_o(s)G_o(s)}{(s+5)(s+10)} \right|_{s=0} = \frac{5 \cdot k_i}{10} = \frac{k_i}{2}$$

(d)

Tipul „1”

Eroarea stationara pentru perturbatie

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot T_w(s) \cdot W(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{G(s)}{1 + D(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{\frac{Go(s)}{s}}{1 + \frac{Do(s)Go(s)}{s^2}} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{s^{k+1}}}{1 + \frac{10}{s^2}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s^2}{2 \cdot s^2 + k_i} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \right] = \begin{cases} 0, k=0 \\ 1/k_i, k=1 \\ \infty, k>1 \end{cases} \end{aligned}$$



Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2



Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Curs #4

Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

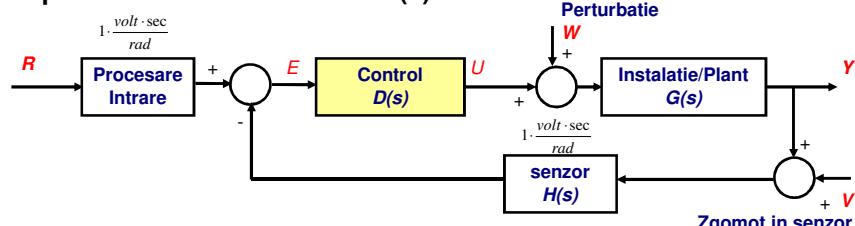
- Modul 13 = Definirea metodei locului rădăcinilor
- Modul 14 = Reguli pentru desenarea locului rădăcinilor
- Modul 15 = Compensarea sistemelor automate de control
- Modul 16 = Exemple de proiectare avansată derivată din metoda locului rădăcinilor

Justificare pentru metoda locului rădăcinilor

- Am discutat legatura dintre cerințele de proiectare în domeniul timp și locul (pozitia) polilor unui sistem în planul complex.
- **Vom studia acum legatura dintre parametrii sistemului de control și pozitia polilor în planul complex.**
 - Parametrii sistemului de control vor modifica rădăcinile ecuației caracteristice, care sunt polii funcției de transfer în bucla închisă.
 - Acești parametri pot fi chiar componentele rețelei de compensare (P, PI, PID, cu avans sau întârziere de fază).
- Acestă metodă de proiectare a fost introdusă de Evans și se numește *locul rădăcinilor*.
 - Metoda locului rădăcinilor a fost studiată la SCS, ca o metodă de analiza stabilității unui sistem în funcție de un parametru.
 - Aplicăm aceste rezultate în contextul proiectării sistemelor de control.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Exprimarea locului rădăcinilor (1)



- Funcția de transfer intrare-iesire (atunci când neglijăm efectul perturbațiilor și a zgromotului în sensor):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{D(s) \cdot G(s)}{1 + D(s) \cdot G(s) \cdot H(s)}$$
- Ecuația caracteristică se determină din

$$1 + D(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$$
- Pentru a studia efectul parametrilor asupra rădăcinilor, vom scrie întâi ecuația sub forma unui polinom. Să considerăm existența unui singur parametru **K**, astfel încât să avem:

$$a(s) + K \cdot b(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot L(s) = 0$$
- Putem reprezenta grafic toate rădăcinile ce se obțin pentru **K** variind între 0 și infinit. Acest grafic se numește locul rădăcinilor.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Exprimarea locului rădăcinilor (2)

$$a(s) + K \cdot b(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot L(s) = 0$$

- Putem considera o reprezentare polinomială pentru $b(s)$ și $a(s)$.

$$\begin{aligned} b(s) &= s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + b_2 \cdot s^{m-2} + \dots + b_m = (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m) \\ a(s) &= s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots + a_n = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n) \end{aligned}$$

- Urmatoarele ecuații sunt echivalente și au aceleași rădăcini

$$1 + K \cdot L(s) = 0$$

$$1 + K \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0$$

$$a(s) + K \cdot b(s) = 0$$

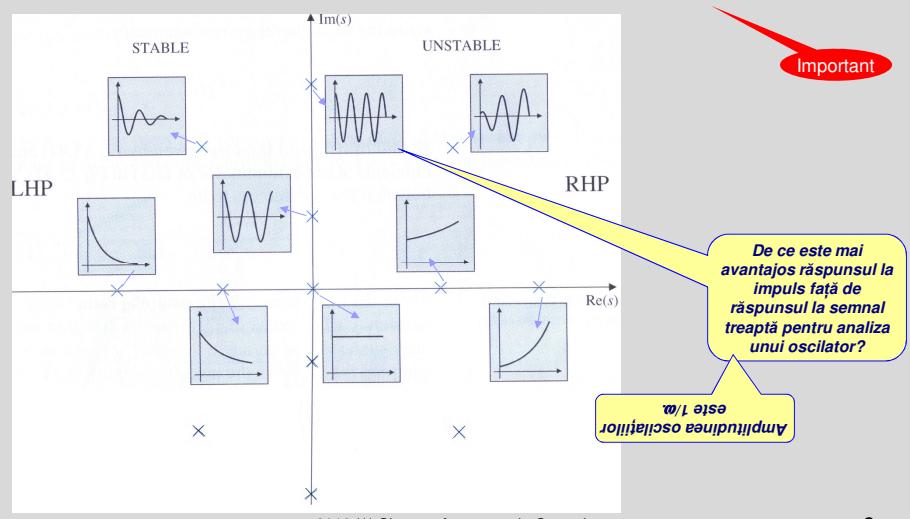
$$L(s) = -\frac{1}{K}$$

- Oricare formă poate fi utilizată pentru desenarea graficului locului rădăcinilor.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Funcții de timp asociate cu poli în planul complex ("fast poles" și "slow poles")

- Forma răspunsului natural (răspunsul la impuls) este dată de locația polilor din funcția de transfer.
- Răspunsul la impuls ne dă informații despre stabilitatea sistemului.**



2019 *** Sisteme Automate de Control

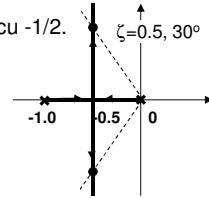
Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 1

- Să considerăm sistemul cu reacție unitară și funcția de transfer în buclă deschisă $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)} \Rightarrow 1 + G(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{s \cdot (s+1)} = 0 \Rightarrow s^2 + s + K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4 \cdot K}}{2}$$

- Pentru K între 0 și $\frac{1}{4}$, rădăcinile sunt reale, între 0 și -1.
- Pentru $K > \frac{1}{4}$, rădăcinile sunt complexe, cu partea reală egală cu $-1/2$.



- Reprezentarea grafică

- “x” marchează punctele de început, pentru $K = 0$
- Săgețile arată sensul de schimbare când K crește

- Din perspectiva schemei de control

- $K = 0$ înseamnă buclă deschisă
- Pentru valori foarte mari ale lui K , obținem poli departați de axa reală.
- Putem selecta K , pentru cerințe de proiectare cum ar fi regimul tranzitoriu.

- Sunt marcate punctele de intersecție a locului cu amortizarea $\zeta = 0.5$

- Dacă cerințele de proiectare nu sunt satisfăcute, putem considera o structură de control mai complexă decât K .

Ce puteți spune despre stabilitatea sistemului?

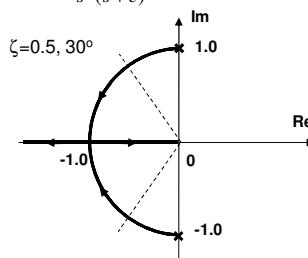
Observatie – Parametrul considerat pentru locul rădăcinilor poate fi orice parametru din sistemul în buclă închisă, nu neapărat câștigul sistemului de control.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 2 – Analiza față de un pol al funcției în buclă deschisă ($c > 0$)

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+c)} \Rightarrow 1 + G(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{s \cdot (s+c)} = 0 \Rightarrow s^2 + c \cdot s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4}}{2}$$



- La $c = 2$, cele două rădăcini sunt la -1.
- La $c = 0$, cele două rădăcini sunt pe axa imaginară, deci răspunsul sistemului are oscilații întreținute.

Observații

- Ambele exemple au avut ecuații de gradul doi. Este mai dificilă determinarea soluțiilor unor ecuații caracteristice de ordin mai mare.
- Reguli pentru desenarea locului fără calcularea rădăcinilor au fost propuse de **Evans**.
- MATLAB poate desena locul rădăcinilor prin instrucțiunea **rlocus(sys)**.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Metoda Evans de desenare a locului rădăcinilor

Definitie = Locul rădăcinilor este un set de valori pentru variabila s , astfel încât $1+KL(s)=0$, unde K este între zero și infinit.

- Dacă $1+KL(s) = 0$ este ecuația caracteristică a sistemului, valorile de pe graficul astfel determinat sunt polii funcției de transfer în bucla închisă.
- Dacă $K > 0$, atunci $L(s)$ este real și negativ => Faza lui $L(s)$ este 180° .
 - Denumim locul rădăcinilor ca fiind **pozitiv** (**după K**), sau 180° (**după L**).
- Dacă $K < 0$, atunci $L(s)$ este real și pozitiv => Faza lui $L(s)$ este 0° .
 - Denumim locul rădăcinilor ca fiind **negativ** (**după K**) sau 0° (**după L**).
- Putem considera locul rădăcinilor sub forma unei condiții de fază:
 - Locul rădăcinilor determinat de $1+KL(s) = 0$ este reprezentat de punctele din planul complex unde faza lui $L(s)$ este 180° .
 - Această condiție se poate exprima matematic prin: $\sum \psi_i - \sum \phi_i = 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$

$$\begin{array}{c} \text{Unghi determinat} \\ \text{de un zero in } L(s), \\ \text{la punctul de test } s \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Unghi determinat} \\ \text{de un pol in } L(s), \\ \text{la punctul de test } s \end{array}$$

pentru orice număr întreg l .

Concluzie

- Dacă este dificil să calculăm soluțiile unei ecuații polinomiale de ordin ridicat, atunci poate este mai ușor să calculăm faza unei funcții de transfer într-un anumit punct.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 3

- Fie funcția de transfer: $L(s) = \frac{s+1}{s \cdot (s+5) \cdot [(s+2)^2 + 4]}$

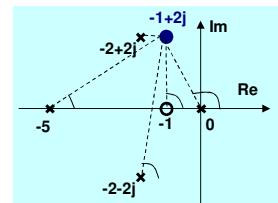
$$\sum \psi_i - \sum \phi_i = 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

- Să presupunem un punct pentru test ($s_0 = -1+2j$).
- Dorim să aflăm dacă acest punct face parte din locul rădăcinilor, adică dacă este rădăcină a lui $1+KL(s)=0$ pentru o valoare a lui K .

Soluții

- Calculare directă a fazei

$$\begin{aligned} \angle L(s_0) &= \angle(s_0 + 1) - \angle s_0 - \angle(s_0 + 5) - \angle[(s_0 + 2)^2 + 4] = \\ &= \angle(2j) - \angle((-1+2j)) - \angle(4+2j) - \angle[(-1+2j)^2 + 4] = 90^\circ - 116.56^\circ - 26.56^\circ - 75.96^\circ = -129.08^\circ \end{aligned}$$
- Deci, NU este parte din locul rădăcinilor.
- Geometric



Observații

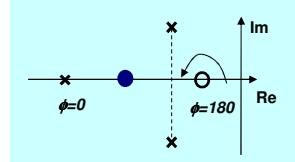
- este foarte rar când polii și zerourile sunt date explicit.
- este imposibil să calculăm faza lui $L(s)$ în fiecare punct din planul complex.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ($K > 0$)

- Pentru enunțarea regulilor, vom considera cazul general cu $1+KL(s) = 0$, cu $L(s)$ având ordinul “ n ” la numitor, și ordinul “ m ” la numărător ($n > m$), iar $K > 0$.
 - Locul rădăcinilor are “ n ” ramuri.
- **REGULA 1:** Cele “ n ” ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din polii lui $L(s)$, iar “ m ” ramuri se termină în zero-urile lui $L(s)$.
- **Demonstratie:**
 - Dacă considerăm $1 + K \cdot L(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Leftrightarrow a(s) + K \cdot b(s) = 0$
 - Pentru $K = 0$, punctele de pe loc sunt rădăcinile lui $a(s)$, care sunt și polii lui $L(s)$.
 - Pentru $K \rightarrow \infty$, punctele de pe loc sunt rădăcinile lui $b(s)$ (zerouri la $L(s)$); OR $s \rightarrow \infty$.
- **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor care se situează pe axa reală, sunt la stânga unui număr impar de poli sau zero-uri.
- **Demonstratie:**
 - Se consideră un punct de test, oriunde pe axa reală.
 - Toate perechile de poli complecsi aduc o contribuție nulă la calculul fazelor (simetrie).
 - Toți polii și zerourile la stânga punctului de test aduc o contribuție nulă la fază.
 - Toți polii și zerourile la dreapta punctului de test aduc o contribuție de +/-180 la fază, deci trebuie să fie într-un număr par.



2019 *** Sisteme Automate de Control

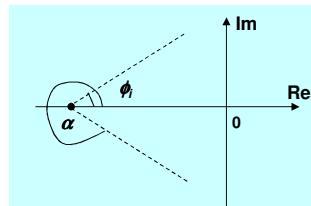
Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ($K > 0$)

- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui s și K , $n-m$ ramuri ale locului sunt asymptote după unghiurile ϕ_l ce pleacă dintr-un punct α de pe axa reală unde

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^{n-m} z_i$$



- **Demonstratie:** Pentru $K \rightarrow \infty$, ecuația $L(s) = -1/K$ este satisfăcută doar pentru $L(s) = 0$.

■ $L(s) = 0 \leftarrow$ Pentru cele m rădăcini ale lui $b(s) = 0$, sau pentru $s \rightarrow \infty$ (pentru ca $n > m$).

■ Asimptotele aproximiază cum cele $n - m$ ramuri reprezintă $s \rightarrow \infty$.

□ Considerăm $\lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \left[1 + K \cdot \frac{s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n} \right] \approx \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \left[1 + K \cdot \frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}} \right]$

□ Cu această echivalență/approximare avem toate rădăcinile grupate pe axa reală, și orice punct de pe locul rădăcinilor (de pe asimptotă) va fi situat la un unghi:

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ($K > 0$)

- **Demonstratie regula 3 (continuare):**

- Să calculăm valoarea lui α .

- $L(s) = 0 \leftarrow$ Pentru cele m rădăcini ale lui $b(s) = 0$, sau pentru $s \rightarrow \infty$ (pentru ca $n > m$).
- Rădăcinile lui $L(s) = 0$ sunt date de rădăcinile lui $b(s) = 0$ plus $(n-m)$ rădăcini α .

- Din $(s - r_1) \cdot (s - r_2) \cdot \dots \cdot (s - r_n) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n + K \cdot (s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m)$
- Egalăm coeficienții lui $n-1$, și obținem $\text{suma}(ri) = \text{suma}(pi)$

- Rezultă

$$\sum p_i = (n-m) \cdot \alpha + \sum z_i \Rightarrow \alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

Chiar ne trebuie polii și zerourile exprimate explicit pentru a calcula α ?

2019 *** Sisteme Automate de Control

Concluzii

- După echivalarea condițiilor de proiectare din domeniul timp în pozițiile dorite ale polilor funcției de transfer în bucla închisă, în planul complex, trebuie să determinăm valorile parametrilor de control care conduc la aceste locații.
- În acest scop, desenăm locul rădăcinilor pe baza metodei Evans.
- Numitorul funcției de transfer în buclă închisă reprezintă ecuația caracteristică ce se consideră pentru desenul locului rădăcinilor, și poate fi exprimată într-o dintre formele echivalente:

 - $1 + K \cdot L(s) = 0$
 - $1 + K \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0$
 - $a(s) + K \cdot b(s) = 0$
 - $L(s) = -\frac{1}{K}$

- Au fost prezentare și demonstate primele 3 reguli pentru desenarea locului rădăcinilor.
 - REGULA 1:** Cele " n " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din polii lui $L(s)$, iar " m " ramuri se termină în zerourile lui $L(s)$.
 - REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor ce se situează pe axa reală, sunt la stânga unui număr impar de poli sau zerouri.
 - REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui s și K , $n-m$ ramuri ale locului sunt asymptote după unghiurile ϕ_l ce pleacă dintr-un punctul α de pe axa reală unde

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^{n-m} z_i}{n-m}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Curs #4

Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

- Modul 14 = Reguli pentru desenarea locului rădăcinilor

2019 *** Sisteme Automate de Control

Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv (Reluare)

- **REGULA 1:** Cele " n " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din polii lui $L(s)$, iar " m " ramuri se termină în zerourile lui $L(s)$.
- **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor ce se situează pe axa reală, sunt la stânga unui numar impar de poli sau zerouri.
- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui s și K , $n-m$ ramuri ale locului sunt asymptote după unghiurile ϕ_l ce pleacă dintr-un punctul α de pe axa reală unde

$$\begin{aligned}\phi_l &= \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} & l = 1, 2, \dots, n-m \\ \alpha &= \sum p_i - \sum z_i\end{aligned}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ($K > 0$) (reguli mai puțin folosite, date fără demonstrație)

$$\sum \psi_i - \sum \phi_i = 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

Unghi determinat de un zero în $L(s)$, la punctul de test s

Unghi determinat de un pol în $L(s)$, la punctul de test s

- REGULA 4 (consecință a definitiei):**

Unghiul de plecare a unei ramuri a locului dintr-un pol de multiplicitate q este dat de:

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ \cdot (l-1)$$

Unghiul de sosire a unei ramuri a locului într-un zero de multiplicitate q este dat de:

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

unghiurile sunt pentru zerourile și polii lui $L(s)$.

Observații:

- De obicei, polii sunt singulari și $q = 1$.
- Unghiul de plecare este foarte important la poli de lângă axa imaginară.

Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ($K > 0$) (reguli mai puțin folosite, date fără demonstrație)

- REGULA 5:** Locul rădăcinilor traversează axa imaginară în puncte unde criteriul Routh arată trecerea de la stabilitate la instabilitate (o tranziție de la rădăcini în stânga planului complex către rădăcini în partea dreaptă a planului complex).

Consecințe

- Dacă $n-m > 2$, cel puțin o ramură a locului va traversa axa imaginară.
- Existența unei rădăcini a ecuației caracteristice în partea dreaptă a planului complex implică un sistem în buclă inchisă instabil, lucru ce poate fi testat prin criteriul Routh.

- REGULA 6:** Locul va avea rădăcini multiple în puncte de pe locul rădăcinilor unde

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0$$

Ramurile vor sosi într-un punct cu q rădăcini la unghiuri separate de $\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{q}$ și vor pleca cu aceeași separație între unghiuri.

Observație: Rădăcinile multiple sunt puncte de ramificație ale locului rădăcinilor.



Reguli pentru desenarea unui loc negativ ($K < 0$)

■ Justificare

- Dacă modelul sistemului controlat ("plant") are un **zero** în partea dreaptă a planului complex ("non-minimum phase system"), considerăm $K < 0$ pentru analiza.
- Studiul unui sistem de control cu reacție, dacă reacția se închide cu semn inversat.

■ Definie:

- Dacă $K < 0$, $L(s) > 0$. Faza lui $L(s)$ este $0 + 360(l-1)$ pentru orice s de pe locul negativ.

■ **REGULA 1:** Cele " n " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din polii lui $L(s)$, iar " m " ramuri se termină în zerourile lui $L(s)$.

■ **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor se situează pe axa reală, la stânga unui numar **par** de poli sau zerouri.

■ **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui s și K , $n-m$ ramuri ale locului sunt asymptote după unghiurile ϕ_l ce pleacă dintr-un punctul α de pe axa reală unde

$$\phi_l = \frac{360^0 \cdot (l-1)}{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^m z_i} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Reguli pentru desenarea unui loc negativ ($K < 0$)

(reguli mai puțin folosite, date fără demonstrație)

■ **REGULA 4 (consecință a definitiei):**

Unghiul de plecare a unei ramuri a locului dintr-un pol de multiplicitate q este dat de:

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \psi_i - 360^0 \cdot (l-1)$$

Unghiul de sosire a unei ramuri a locului într-un zero de multiplicitate q este dat de:

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \phi_i + 360^0 \cdot (l-1)$$

■ **REGULA 5:** Locul rădăcinilor traversează **axa imaginară** în puncte unde criteriul Routh arată o tranziție de la rădăcini în stânga planului complex către rădăcini în partea dreaptă a planului complex.

- Dacă $n-m > 2$, cel puțin o ramură a locului va traversa axa imaginară.
- Existența unei rădăcini a ecuației caracteristice în partea dreaptă a planului complex implică un sistem în buclă închisă instabil, lucru care poate fi testat prin criteriul Routh.

■ **REGULA 6:** Locul va avea rădăcini multiple în puncte de pe locul rădăcinilor unde

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0$$

Puncte de ramificatie

Ramurile vor sosi într-un punct cu q rădăcini la unghiuri separate de $\frac{360^0 \cdot (l-1)}{q}$ și vor pleca cu aceeași separație între unghiuri.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 4 = Desenarea unui loc negativ (1)

$$\begin{cases} 1 + K \cdot \frac{s - 6}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 13)} = 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

Câștig negativ la frecvența $s=0$ (pentru $L(0)$)

Un zero pozitiv în funcția de transfer a instalației apare la convertoarele boost.

- Regula 1: Vor fi 3 ramuri, plecând din cei 3 poli, una se termină în **zero-ul ($s = 6$)** și sunt două asymptote (3-1).
- Regula 2: Locul este pe axa reală la dreapta lui $s = 6$ și la stânga lui $s = 0$.
- Regula 3: Unghiurile celor două asymptote sunt:

$$\varphi_{1,2} = \frac{(l-1) \cdot 360^\circ}{2} = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases} \quad \text{Iar centru lor este la } \alpha = \frac{(-4) - (6)}{3-1} = -5$$

(-4) = suma rădăcinilor numitorului

- Regula 4: Calculăm cele două rădăcini complexe: $s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = -2 \pm 3 \cdot j$

O ramură pleacă din $-2+3j$, cu un unghi

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) + 90^\circ + 360^\circ \cdot (l-1) = -69.443 + 33.690 + 90 + 360(l-1) = -54.247^\circ$$

Similar pentru $-2-3j$ ("în oglindă").

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 4 = Desenarea unui loc negativ (2)

$$\begin{cases} 1 + K \cdot \frac{s - 6}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 13)} = 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

- Regula 5 (stabilitate, criteriul Routh): Ecuată caracteristică se obține:

$$s^3 + 4 \cdot s^2 + (13 + K) \cdot s - 6 \cdot K = 0$$

Criteriul Routh

s^3	1	$13 + K$
s^2	4	$-6K$
s	$\frac{4 \cdot (13 + K) + 6K}{4} = 2.5K + 13$	0
s^0	$-6K$	

Criteriul Routh sugerează limita de stabilitate la $K = -5.2$

$$K = -5.2 \Rightarrow s^3 + 4 \cdot s^2 + 7.8 \cdot s + 31.2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -4 \\ s_2 = 2.792 \cdot j \\ s_3 = -2.792 \cdot j \end{cases}$$

- pentru $K > 0$, instabilitate
- pentru $K < 0$, $K > -5.2$, stabilitate
- pentru $K < -5.2$, instabilitate

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 4 = Desenarea unui loc negativ (3)

$$\begin{cases} 1 + K \cdot \frac{s - 6}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 13)} = 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

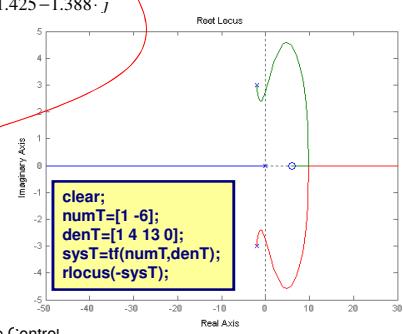
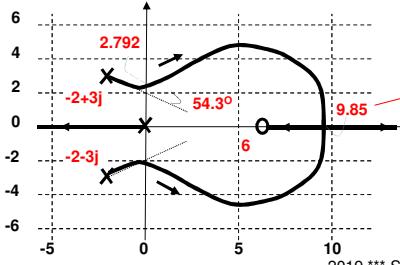
- Regula 6 (rădăcini multiple, puncte de ramificație):

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0 \Rightarrow ((s-6) \cdot (3 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 13) - (s^3 + 4 \cdot s^2 + 13 \cdot s)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot s^3 + 8 \cdot s^2 + 13 \cdot s - 18 \cdot s^2 - 48 \cdot s - 78 - s^3 - 4 \cdot s^2 - 13 \cdot s = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot s^3 - 14 \cdot s^2 - 48 \cdot s - 78 = 0 \Leftrightarrow s^3 - 7 \cdot s^2 - 24 \cdot s - 39 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 9.85 \\ s_2 = -1.425 + 1.388 \cdot j \\ s_3 = -1.425 - 1.388 \cdot j \end{cases}$$

Selectăm doar rădăcinile de pe locul rădăcinilor (9.85)



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 5 = Control Proporțional

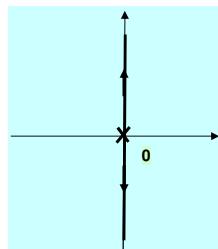
$$L(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow 1 + k_p \cdot \frac{1}{s^2} = 0$$

- Exemplul corespunde controlului cu reacție unitară și control proporțional (**P**), a unui sistem caracterizat prin $1/s^2$.

- Regula 1: Avem 2 ramuri care pleacă din $s = 0$.
- Regula 2: Nu avem locul rădăcinilor pe axa reală ($2x = par$).
- Regula 3: Avem două asymptote cu originea la $s = 0$, și aflate la unghiuri de $+/-90^\circ$.
- Regula 4: Locul pleacă din 0 la unghiuri de $+/-90^\circ$.
- Regula 5: Locul rămâne pe axa imaginară pentru toate valorile lui k_p .
- Regula 6: Punctul de ramificare este la $s=0$.

Despre stabilitate

- Răspunsul tranzitoriu al unui astfel de sistem va fi oscilatoriu
- Sistemul este la limita de instabilitate ("oscilații întreținute")



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 6 = Control PD Ideal

Vom încerca îmbunătățirea răspunsului tranzitoriu prin aplicarea unui control în buclă închisă, cu control PD. Ecuatia caracteristică va deveni: $1 + (k_p + k_D \cdot s) \cdot \frac{1}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_D \cdot s + k_p = 0$

- Vom nota $K=k_D$, și $k_p/k_D=1$, care simplifică analiza în ecuația caracteristică $1 + K \cdot \frac{s+1}{s^2} = 0$

- Regula 1: Avem 2 ramuri care pornesc din $s=0$, una se termină la $s=-1$, alta este asimptotă la infinit.

- Regula 2: Toată axa reală la stânga lui $s=-1$ este parte din loc.

- Regula 3: Din $n-m=1$, asymptota este de-a lungul axei negative reale (180°).

- Regula 4: Unghiurile de plecare din polul dublu $s=0$, sunt $+/-90^\circ$ (v. "→").

- Regula 5: Criteriul Routh pentru ecuația caracteristică $s^2 + K \cdot s + K = 0$

$$s^2 \quad 1 \quad K$$

$$s \quad K$$

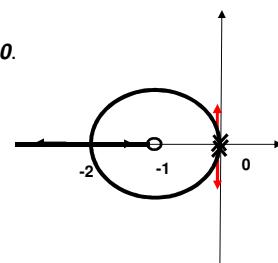
$$s^0 \quad K$$

- Regula 6:

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0 \Rightarrow (s+1) \cdot (2 \cdot s) - 1 \cdot s^2 = 0 \Rightarrow s^2 + 2 \cdot s = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = 0 \end{cases}$$

$s = -2$ este pe loc → rădăcină dublă, sau punct de ramificație.

Adăugarea unui zero a mutat locul rădăcinilor catre stânga planului complex, îmbunătățind stabilitatea.



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 7 = Control PD Practic (1)

Controlul PD NU poate fi implementat în exact aceeași formă, din cauza operatorului de diferențiere. Implementarea practică devine:

$$D(s) = k_p + \frac{k_D \cdot s}{\frac{s}{p} + 1} = K \cdot \frac{s+z}{s+p} \quad \text{unde } p \gg z$$

(Acest control se mai numește **compensare cu avans de fază, v.cursul următor**)

- Ecuația caracteristică devine $1 + K \cdot \frac{s+z}{s^2 \cdot (s+p)} = 0$

Să considerăm un caz numeric pentru a ilustra efectul acestei legi de control

$$1 + K \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s+1}{s+12} = 0 \Rightarrow s^3 + 12 \cdot s^2 + K \cdot s + K = 0$$

- Regula 1: Vom avea 3 ramuri, două pleacă din $s=0$, una din $s=-12$; una se termină la $s=-1$, două asimptote.

- Regula 2: Porțiunea dintre $s=-12$ și $s=-1$ este parte din locul rădăcinilor.

- Regula 3: Cele două asimptote sunt centrate la

$$\alpha = \frac{-12 - (-1)}{2} = -\frac{11}{2}$$

$$\phi_l = \frac{180 + 360 \cdot (l-1)}{2} = +/-90 \Leftarrow l=1,2$$

- Regula 4: Unghiurile de plecare a ramurilor de la $s=0$ sunt $+/-90^\circ$.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 7 = Control PD Practic (2)

- Regula 5: Criteriul Routh pentru ecuația caracteristică

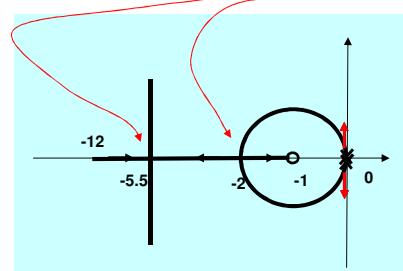
$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & K \\ s^2 & 12 & K \\ s & \frac{11}{12}K \\ s^0 & K \end{array}$$

Nu intersectează axa imaginară pentru oricare $K>0$.

- Regula 6 (puncte de ramificație):

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0 \Rightarrow (s+1) \cdot (3 \cdot s^2 + 24 \cdot s) - 1 \cdot (s^3 + 12 \cdot s^2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot s^3 + 15s^2 + 24s = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2.31 \\ s_3 = -5.18 \end{cases}$$

Locul rădăcilor ne arată un sistem stabil



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 8 = Sistem cu flexibilitate, sau oscilații - Model

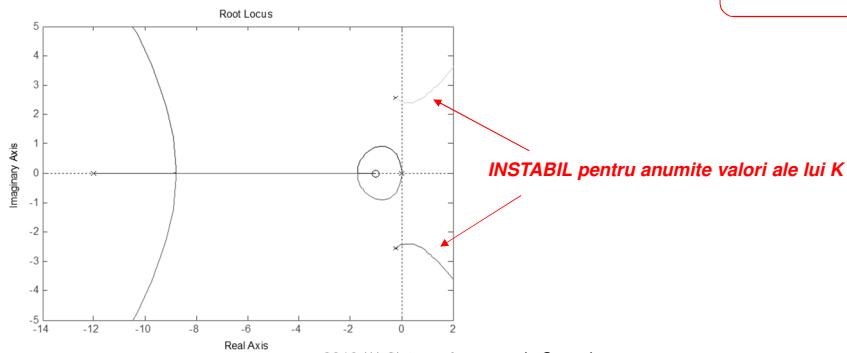
vezi ora 02, p.9

Caz practic: După proiectarea sistemului de control pentru un sistem mechanic, dereglarea unor componente a născut mici vibratii (oscilații) mecanice.

Cât sunt de periculoase pentru stabilitatea sistemului și cum le putem elibera?

Termeni ce produc oscilații introduc *sistem cu un grad de flexibilitate*.

$$H(s) = D(s) \cdot G(s) = \left(\frac{s+1}{s+12} \right) \cdot \left(\frac{1}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64} \right) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64}$$



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 8 = Sistem cu flexibilitate, sau oscilații – Control (1)

- Am dori să eliminăm acest efect prin control.
- **NU** putem adăuga un termen **identic** cu numitorul în funcția de control, din considerente practice legate de implementare, sau de precizia modelului.
- Dacă am putea introduce un termen identic, am putea simplifica

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64} \cdot [s^2 + k_1 \cdot s + k_2]$$

- Se aproximează polii din modelul instalației (modelul este oricum o aproximare a realității)

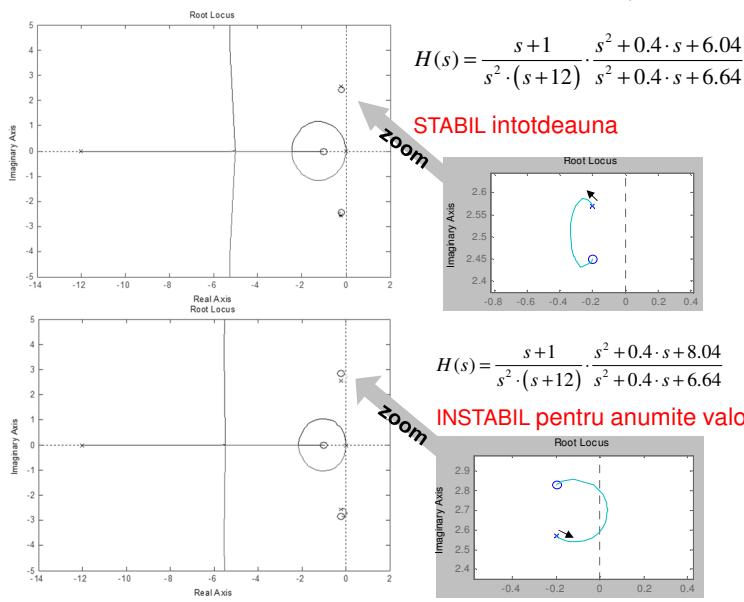
- Pentru diferite alegeri a valorii approximative (de compensare), observăm schimbarea proprietății de stabilitate → **Rolul metodei locului rădăcinilor în analiză**.

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.04}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64} \quad ? \quad H(s) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{s^2 + 0.4 \cdot s + 8.04}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 8 = Sistem cu flexibilitate, sau oscilații – Control (2)



Observați importanța studiului locului rădăcinilor pentru $1 + k H=0$
-Vezi unghiul de plecare a locului de la polii de lângă axa imag

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Sumar = Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv sau negativ

- **REGULA 1:** Cele "n" ramuri ale locului radacinilor pleacă întotdeauna din polii lui $L(s)$, iar "m" ramuri se termină în zerourile lui $L(s)$.
- **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor se situează pe axa reală, la stânga unui număr impar (par) de poli sau zerouri.
- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui s și K , $n-m$ ramuri ale locului sunt asymptote după unghiurile ϕ ce pleacă din punctul a de pe axa reală unde

$$\begin{aligned}\phi_l &= \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} & l = 1, 2, \dots, n-m \\ \alpha &= \frac{\sum_{i=1}^{n-m} z_i}{n-m}\end{aligned}$$

- **REGULA 4 (consecință a definiției):**

Unghiul de plecare a unei ramuri a locului dintr-un pol de multiplicitate q este dat de:

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 360^\circ \cdot (l-1)$$

Unghiul de sosire a unei ramuri a locului într-un zero de multiplicitate q este dat de:

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum_{i \neq l} \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 360^\circ \cdot (l-1)$$

- **REGULA 5:** Locul rădăcinilor traversează axa imaginară în puncte unde criteriul Routh arată o tranziție de la rădăcini în stânga planului complex către rădăcini în partea dreaptă a planului complex.

- **REGULA 6:** Locul va avea rădăcini multiple în puncte de pe locul rădăcinilor unde

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0$$

Ramurile vor sosi într-un punct cu q rădăcini la unghiuri separate de și vor pleca cu aceeași separație între unghiuri.

2019 *** Sisteme Automate de Control

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{q} \\ \frac{360^\circ \cdot (l-1)}{q} \end{array} \right.$$

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Curs #4

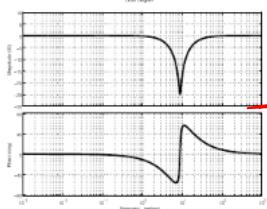
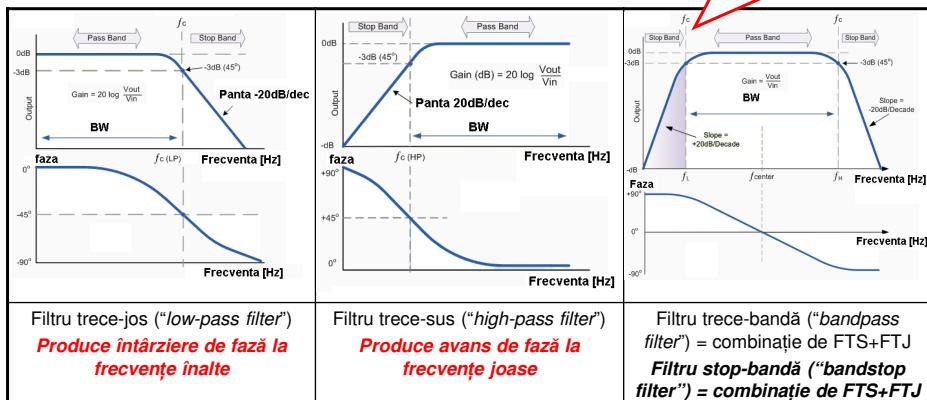
Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

- Modul 15 = Compensarea sistemelor automate de control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Recapitulare – Filtre de ordinul 1

La produsul a două funcții de transfer, căstigul se înmulțește, iar fază se adună.



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea dinamică a sistemelor

- Proiectarea unui sistem de control este foarte importantă pentru performanța sistemului.

Etape de proiectare:

- Se studiază modelul sistemului ce urmează a fi controlat
 - => Sistemul poate fi schimbat prin adăugarea de amortizare (*compensare cu avans de fază* = *control PD*) sau eliminarea unei flexibilități (*compensare notch*).
- Se convertește datele de proiectare referitoare la regimul tranzitoriu în cerințe pentru locația rădăcinilor.
- Se observă dacă un control proporțional simplu nu ar fi de ajuns pentru îndeplinirea acestor cerințe. Dacă NU, atunci se continuă cu o proiectare a unei **compensări dinamice (în frecvență)**.
- Cele mai utilizate rețele (legi) de compensare:
 - Compensare cu întârziere de fază ("lag")* – aproximează un control PI
 - Compensare cu avans de fază ("lead")* – aproximează un control PD
 - Compensare de tip "notch"*
- Exprimarea matematică a controlului

$$D(s) = K \cdot \frac{s + z}{s + p}$$

- Avans de fază pentru $z < p$ (contează zero-ul)
- Intârziere de fază pentru $z > p$ (contează polul)

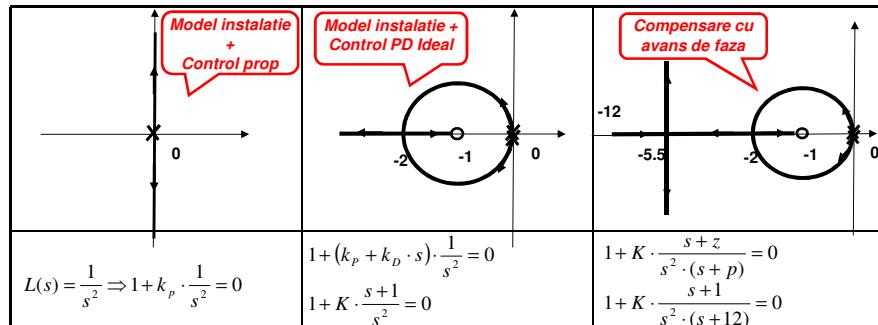
- Implementarea se poate realiza
 - Circuite analogice
 - Circuite digitale

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 1)

- Să recapitulăm rezultatele din ora trecută, pentru exemplul considerat.



- Observatie** – Valorile numerice au fost alese pentru exemplificare și nu ca urmare a unei proiectări impuse de performanță.
- Se observă îmbunătățirea stabilității prin deplasarea către stânga a locului rădăcinilor.
- Se observă și că diferite aspecte ale performanței răspunsului tranzitoriu se pot obține prin selectarea corespunzătoare a **zero**-ului și **câștigului** (de exemplu: factorul de amortizare, frecvența naturală, s.a.m.d.).
- Controlul PD nu este practic** din cauza dificultății de implementare și a efectului secundar de amplificare a zgromotului senzorilor.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 2)

- Legea de control cu compensare cu avans de fază este dată de:
$$D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$
- Zero-ul** se alege conform cu controlul PD, iar polul se alege în afara domeniului de control ($p >> z$), pentru a nu afecta efectele dinamice ale controlului convențional PD.
 - Cu cât p este mai mare, cu atât locul rădăcinilor și răspunsul sistemului va fi mai asemănător cu cel din controlul ideal PD
 - Altfel spus, la frecvențe joase sistemele se comportă asemănător cu PD; iar la frecvențe înalte polul își face similitudinea prezentă, prin modificarea răspunsului (popular spus: "filtrează zgromotul de înaltă frecvență").
 - Deoarece efectul global este văzut în faza sistemului, se numește **compensare cu avans de fază**.
- Proiectarea unui control cu avans de fază (selectia lui **z** și **p**):
 - Proiectarea are un caracter empiric, bazată pe experiență.
 - Zero-ul** se plasează în apropierea frecvenței ω_n (ca o consecință rezultată din timpul de creștere și timpul de stabilizare, vezi modulul 6).
 - Polul** se plasează la o frecvență de 5-20 ori mai mare.
 - Compromis între zgromot redus printr-un pol la frecvențe joase (filtrare), și o valoare mare care să nu influenteze controlul dat de **zero**.
 - Efectul polului se vede puțin în timpul de creștere a sistemului controlat.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 3)

Exemplul 1

- Să se găsească compensația dinamică pentru un sistem caracterizat de funcția de transfer a instalației ("plant") $G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$

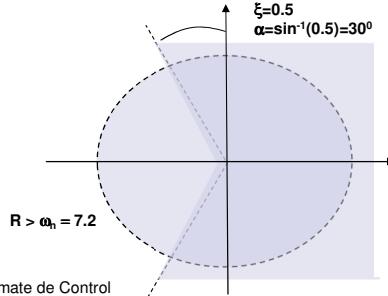
care să determine o suprareglare ("overshoot") mai mică decât 20 %, și un timp de creștere mai mic decât 0.25 sec.

Solutie:

Convertim datele de proiectare în constrângeri în planul complex

- Suprareglare < 20% => factor de amortizare $\zeta > 0.5$ ("damping") (vezi modul6, pentru aproximarea cu sistem de ordinul 2) (sector unghiular)
- Timp de creștere < 0.25 sec => frecvență naturală $\omega_n > 1.80/0.25 = 7.2$ (cerc)
- Hasurăm regiunile "interzise"

$$\begin{aligned} \text{Re: } \sigma &= \zeta \cdot \omega_n & \text{Im: } \omega_d &= \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} & M_p &= \begin{cases} 10\% & 0.591 \\ 20\% & 0.456 \\ 30\% & 0.358 \\ 40\% & 0.280 \end{cases} \\ \zeta &\geq \zeta(M_p) \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{t_s} \end{aligned}$$



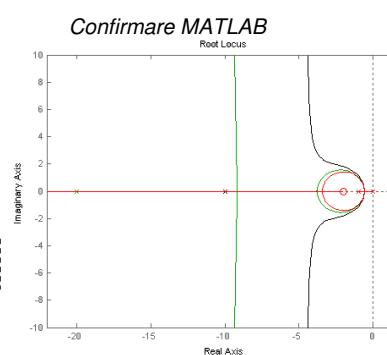
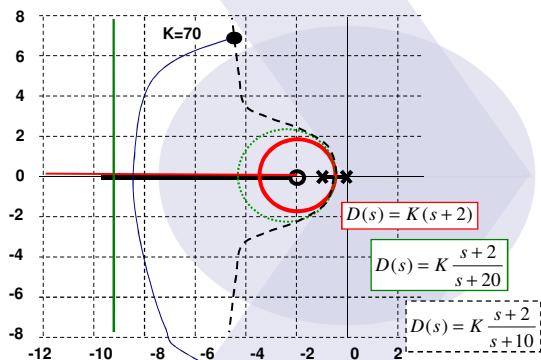
2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 4)

Proiectare Control

- Incercăm diferite soluții de formă: $D(s) = K \cdot \frac{s+2}{s+p}$



- Adoptăm

$$D(s) = 70 \cdot \frac{s+2}{s+10}$$

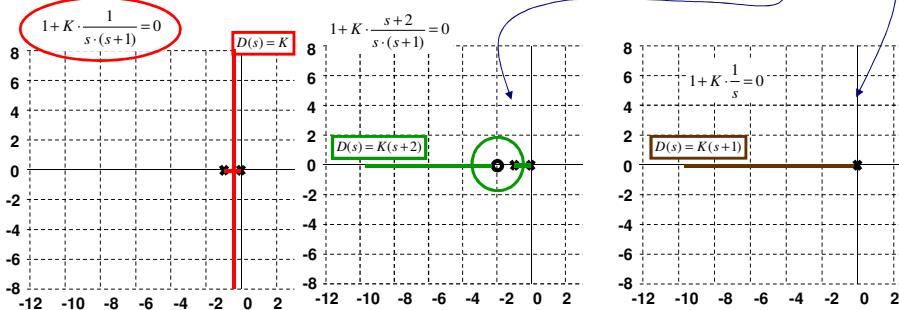
2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 5)

Discuție – selecția componentei derivative (D)

- Neglijăm efectul polului de la frecvențe înalte
- Un caz particular ar coincide selecția componentei derivative cu polul funcției de transfer în bucla deschisă ("se simplifică").
- Nu se poate realiza în practică ⇒ Se preferă cazul mai general în care componenta derivativă este lângă polul funcției de transfer a sistemului controlat "plant".



- ~~ proiectăm pentru o posibilă variație a parametrilor (modelul nu este precis, sau nu avem o compensare precisă.)

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

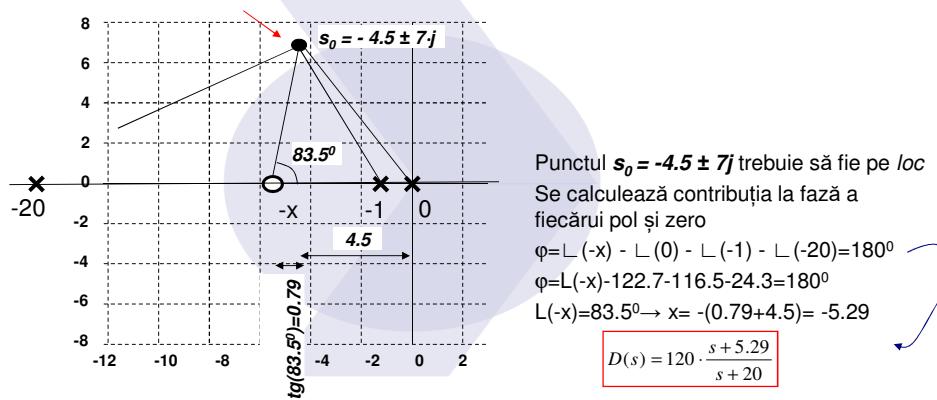
Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 6)

Altă metodă de proiectare

- Incepem invers – prin alegerea unui pol la distanță foarte mare de polii și zerourile din funcția de transfer a instalației. În cazul nostru $p = 20 \gg 0 & 1$

$$D(s) = K \frac{s+x}{s+20} \Rightarrow 1 + K \cdot \frac{s+x}{s+20} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+1)} = 0$$

- Alegem o poziție din planul complex pentru locul rădăcinilor cf. condițiilor de proiectare.



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 2

Problema: Proiectați un control cu avans de fază pentru un sistem cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Astfel încât polii dominanti ai sistemului în buclă închisă să fie la $-2 \pm 2i$.

Soluție:

Considerăm $D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$

- Funcția de transfer în buclă închisă:

$$\frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} = \frac{K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{s^2}}$$

- Ecuația caracteristică devine:

$$(s+p) \cdot s^2 + K \cdot (s+z) = 0 \Rightarrow s^3 + p \cdot s^2 + K \cdot s + K \cdot z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 16 - 2K + Kz = 0 \\ 16 - 8p + 2K = 0 \end{cases}$$

- Adoptăm $p = 20 \Rightarrow K = 72, z = 1.78$.

□ 3 necunoscute, 2 ecuații \Rightarrow un grad de libertate disponibil.

□ Am fi putut beneficia de gradul de libertate oferit, și impune o altă condiție de proiectare.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea cu întârziere de fază (“lag compensation”)

- Adreseză răspuns nesatisfăcător la frecvențe joase sau eroarea staționară.
- Am arătat că tipul sistemului (care arată cum o funcție de transfer polinomială poate urmări o referință variabilă) este dat de ordinul polilor (**1/s**) în funcția de transfer $D(s)G(s)$ (vezi modul 11).

I, Pl: Adăugăm termeni "1/s"
LAG: Creștem K la s=0

	Semnal de intrare (“Referință”)		
	Treapta (“Pozitie”)	Rampa (“Viteză”)	Parabolă (“Acceleratie”)
	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t \cdot 1(t)$	$r(t) = t^2 \cdot 1(t)$
Tipul “0”	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
Tipul “1”	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipul “2”	0	0	$\frac{1}{K_a}$

- Pentru reducerea erorii staționare, trebuie să creștem câștigul la frecvențe joase fără a influența comportarea la frecvențe înalte. Vom utiliza:

$$D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p} \text{ unde } z > p, \text{ și ambele } z, p \text{ sunt mai mici decât } \omega_n$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplul 3

Problema: Proiectați un control cu întârziere de fază pentru un sistem cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}$$

Astfel încât polii dominanti ai sistemului în bucla închisă să fie la $-1 \pm i$.

Solutie:

$$\text{Considerăm } D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$

- Funcția de transfer în buclă închisă:

$$\frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} = \frac{K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}}{1 + K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}} \Rightarrow \begin{cases} (s+p)(s+2)(s+3) + K(s+z) = 0 \\ s^3 + (5+p)s^2 + (6+5p+K)s + 6p + Kz = 0 \\ -4 - K + p + Kz = 0 \\ -2 + 3p + K = 0 \end{cases}$$

- Pentru a avea două rădăcini complexe în funcția de transfer în buclă închisă, situate la dreapta rădăcinilor initiale $(-2, -3)$, vom aștepta un control asemănător cu PI (pol lângă origine, dat de datele problemei $|p| < 1$).
- Alegem $z=3$ (ca să obținem PI, $z>>p$). Obținem:
 - $\begin{cases} -4 + p + 2K = 0 \\ -2 + 2p + K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ K = 2 \end{cases}$
 - Legea de control se reduce la un control PI ($p=0, z=3, K=2$).
- Altă soluție posibilă $\begin{cases} z = 5 \\ p = 4/11 \\ K = 10/11 \end{cases}$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Compensarea de tip "notch"

- Dacă un sistem în buclă închisă prezintă oscilații la o anumită frecvență, trebuie să corectăm acest lucru
 - Am putea adăuga încă un termen cu întârziere de fază capabil să scadă câstigul pe buclă la acea frecvență, cu dezavantajul alterării răspunsului tranzitoriu.

SAU

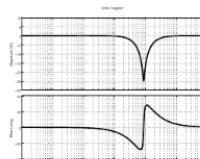
- ar fi util să adăugăm un termen capabil să înlăture doar acea frecvență (ca un filtru "notch") prin adaugarea unui **zero** la frecvența de rezonanță, ce va avea ca efect adăugarea de fază și deplasarea locului rădăcinilor în partea stângă a planului complex.
- O lege generică de realizare a compensării "notch" devine: $D_{notch}(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_o^2}{(s + \omega_o)^2}$

Câstigul se alege egal cu 1 pentru a nu influența efectul celorlalte componente din sistem.

ω_o se alege aproape de frecvența de rezonanță din sistemul în buclă deschisă.

Rămâne ca o decizie de proiectare dacă această frecvență să fie sub sau deasupra frecvenței de rezonanță a sistemului.

(revedeți modulul 14, p.11)



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 * Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor**
Compensarea de tip “notch”. Exemplul 4

- Sistemul dat prin funcția de transfer în bucla deschisă:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

- Am adoptat legea de compensație:

$$D(s) = 70 \cdot \frac{s+2}{s+10}$$

- Să considerăm acum existența unor oscilații în modelul instalației care sunt exprimate prin:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)} \cdot \frac{2500}{s^2 + s + 2500}$$

- Efectul se poate vedea și în răspunsul la semnal treaptă (v. pagina următoare)

- Se propune eliminarea acestor oscilații printr-o compensație **notch** situată lângă polii rezonanți.

$$D_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot 60 \cdot s + 60^2}{(s+60)^2} \Rightarrow D(s) = 70 \cdot \frac{s+2}{s+10} \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot 60 \cdot s + 60^2}{(s+60)^2}$$

- Răspunsul la semnal treaptă al acestei noi legi de control, pentru **K=1** (sistem stabil).

- Problema în acest caz este selectia corespunzătoare a frecvenței compensării notch.

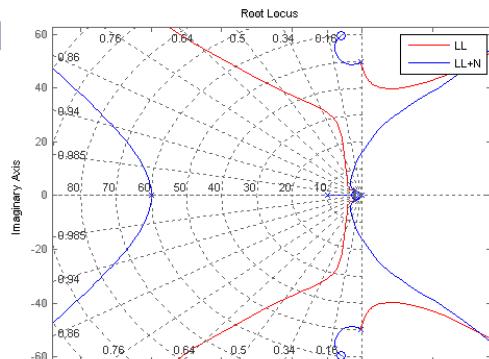
2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 * Proiectarea cu metoda locului**

Compensarea de tip “notch”.
Exemplul 4

```
clear;
numT=[2500];
denT=conv([1 1 0], [1 1 2500]);
sysT=tf(numT,denT);
numD=70*[1 2];
denD=[1 10];
sysD=tf(numD,denD);
OL1=sysT*sysD;
CL1=feedback(OL1,1);
numN=[1 12 3600];
denN=[1 120 3600];
sysN=tf(numN,denN);
OL2=sysD*sysT*sysN;
CL2=feedback(OL2,1);

step(CL1); hold on;
step(CL2);
legend('LL','LL+N');
figure;
rlocus(OL1, 'r', OL2, 'b');
sgrid;
legend('LL','LL+N');
```



LL = Fără compensare notch
LL+N = Cu compensare notch

Rezultate pentru K = 1,
buclă închisă
(D(s) precedent)

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Stabilizarea de fază

Compensarea notch se folosește pentru a obține stabilitate în sistemele cu amortizare redusă și cu posibile oscilații.

În funcție de faza sistemului la frecvența de rezonanță, se folosește una dintre formele

- Considerăm polii la frecvențe foarte mari față de frecvența **notch** (poate fi privit ca un filtru notch obișnuit plus efect de avans de fază = adăugare de fază)

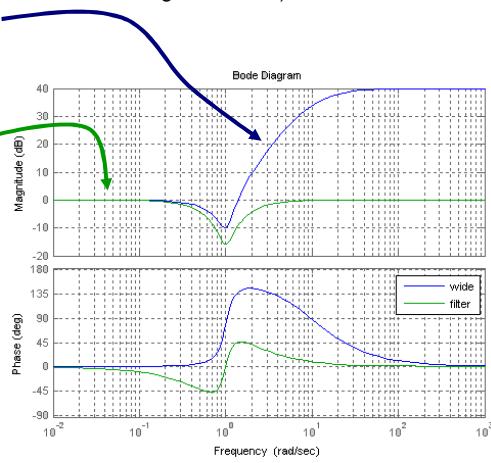
$$D_2(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_0^2}{(s + \omega_2)^2}, \omega_2 \gg \omega_0$$

- Considerăm polii la aceeași frecvență ca și cea rezonantă (filtru)

$$D_1(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_0^2}{(s + \omega_0)^2}$$

Procesul de selecție a valorii corespunzătoare compensării notch în vederea menținerii fazelor sistemului în buclă închisă la valori ce implică stabilitate, se numește stabilizare de fază.

~ spre deosebire de stabilizarea amplificării care presupune obținerea stabilității prin scăderea câstigului la frecvențe înalte.



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Observații finale – Compensare

- Cu întârziere de fază ("lag")
 - Legea se consideră pentru $z > p \leftarrow$ efectul polului domină
 - Aproximează un control PI
 - Imbunătățeste eroarea staționară în timp ce pastrează răspunsul tranzitoriu, prin creșterea câstigului (amplificării) de frecvență joasă.
 - De obicei degradează stabilitatea sistemului.
- Cu avans de fază ("lead")
 - Legea se consideră pentru $z < p \leftarrow$ efectul zero-ului domină
 - Aproximează un control PD
 - Are efectul de a muta locul rădăcinilor către stânga, îmbunătățind stabilitatea, amortizarea sistemului, și rapiditatea regimului tranzitoriu.
- Compensarea "notch"
 - Folosită mai rar, de obicei împreună cu altă lege de control.
 - Are efectul de a înlătura oscilații pe o frecvență fixă.

$$D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$

$$D_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_0^2}{(s + \omega_2)^2}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Curs #4

Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

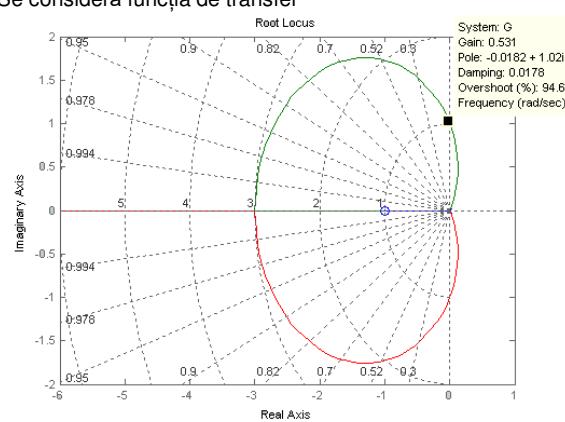
- Modul 16 = Exemple de proiectare avansată derive din metoda locului rădăcinilor

2019 *** Sisteme Automate de Control

Exemplul 5 - Sisteme cu stabilitate condițională

- Majoritatea sistemelor sunt stabile pentru valori mici ale lui K și devin instabile pentru valori mari ale lui K .
- Să vedem un exemplu diferit. Se consideră funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$$



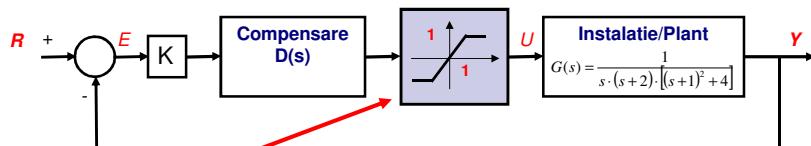
- În acest caz, se observă că locul rădăcinilor trece în partea dreaptă a planului complex pentru K între 0 și 0.5, și redevine stabil pentru valori mari ale lui K .
- Dacă câștigul K este limitat de implementarea fizică, se pot produce oscilații sau instabilitate.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

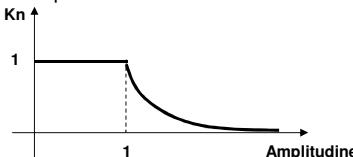
Exemplu de proiectare (1)

Să se deseneze locul rădăcinilor și să se propună o compensare pentru un sistem cu saturatie, dată de legea de transfer ("plant") $T(s)$.



SATURATIE

- Teoria prezentată anterior consideră sisteme liniare și invariabile în timp.
- Neliniaritatea poate fi considerată ca un câștig ce depinde de nivelul semnalului, fără a avea componente dinamice. În cazul din figură, acest câștig poate fi reprezentat:



- Din punct de vedere al locului rădăcinilor, acest lucru înseamnă că trebuie să analizăm comportarea sistemului pentru toate valorile mai mici decât K , și nu doar la o valoare anumită K .

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplu de proiectare (2)

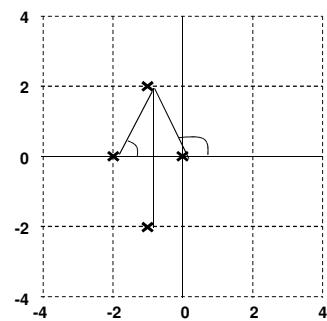
CONTROL PROPORTIONAL

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 2) \cdot [(s + 1)^2 + 4]}$$

Să desenăm locul rădăcinilor pentru un control simplu, $K > 0$.

- Regula 1: Vom avea 4 ramuri plecând din $0, -2, -1 \pm 2j$; toate sunt 4 asimptote.
- Regula 2: Locul conține axa reală pentru $-2 < s < 0$.
- Regula 3: Centrul asimptotelor este la $\alpha = \frac{-2 - 1 - 1 - 0 + 0}{4 - 0} = -1$
și unghiurile sunt $45^\circ, 135^\circ, -45^\circ$ și -135° .
- Regula 4: Unghiul de plecare al locului rădăcinilor din rădăcina complexă $-1 + 2j$, este dat de

$$\phi_{dep} = -\phi_1 - \phi_2 - \phi_4 + 180^\circ = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) - 90^\circ + 180^\circ = -116.6^\circ - 63.4^\circ - 90^\circ + 180^\circ = -90^\circ$$



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplu de proiectare (3)

- Regula 5: ecuația caracteristică este $s^4 + 4 \cdot s^3 + 9 \cdot s^2 + 10 \cdot s + K = 0$

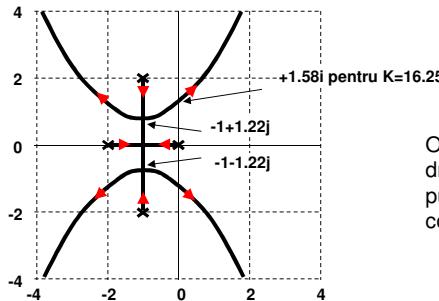
Criteriul Routh

$$\begin{array}{ccccc} s^4 & 1 & 9 & K \\ s^3 & 4 & 10 & \\ s^2 & \frac{26}{4} & K & \\ s & \frac{260-16K}{26} & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

Determină $K > 0, K < 260/16 = 16.25$
La $K = 16.25$, locul rădăcinilor traversează axa imaginară.

$$\begin{cases} -2.0000 + 1.5811i \\ -2.0000 - 1.5811i \\ 0.0000 + 1.5811i \\ 0.0000 - 1.5811i \end{cases}$$

- Regula 6: Determinarea rădăcinilor multiple (puncte de ramificație a locului): $\frac{da}{ds} = 0 \Rightarrow 4 \cdot s^3 + 12 \cdot s^2 + 18 \cdot s + 10 = 0 \Rightarrow (s+1) \cdot (4 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 + 1.22 \cdot j \\ s_3 = -1 - 1.22 \cdot j \end{cases}$



Observăm că locul rădăcinilor trece în partea dreaptă a planului complex pentru $K > 16.25$, punând probleme de stabilitate => este necesară o compensare dinamică.

2019 *** Sisteme Automate de Control

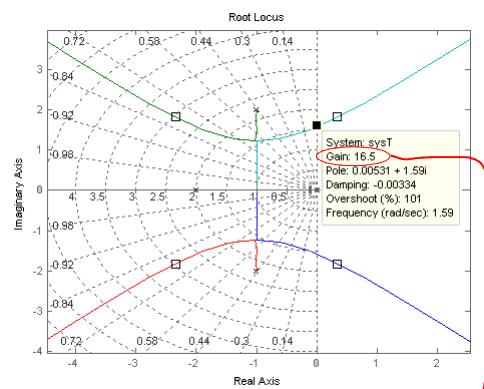
Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplu de proiectare (4)

- Să urmărim reprezentarea în MATLAB a rezultatelor

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot [(s+1)^2 + 4]}$$

```
% reprezentarea unui loc
clear;
numG=[1];
denG=conv([1 2 0], [1 2 5]);
sysG=tf(numG,denG);
rlocus(sysG); sggrid;
%
% punctele de pe loc pentru un k dat
% aici, k=30, vezi patrate albe
%
hold on;
rlocus(sysT,30,'ks');
```



- Prezintă interes determinarea lui K la intersecția cu axa imaginară.
 - Acest lucru se face prin simplu click pe grafic => $K=16.5$

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplu de proiectare (5) COMPENSARE DINAMICA

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot [(s+1)^2 + 4]}$$

- Am văzut că putem compensa un sistem de tipul $G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$ cu o compensare cu avans de fază ($|z| < |p|$).
- Prin analogie, vom considera compensarea cu avans de fază dată de funcția de transfer

$$D_1(s) = K \cdot \frac{s+3}{s+20} \Rightarrow 1 + D(s) \cdot G(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot \frac{s+3}{s+20} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+2)(s^2 + 2s + 5)} = 0$$

- Dacă enunțul problemei ar cere și anumite performanțe dinamice, valorile "3" și "20" s-ar alege din acele cerințe (vezi modul 15). În lipsa unor cerințe speciale, adoptăm zero-ul lângă polii din modelul instalației.

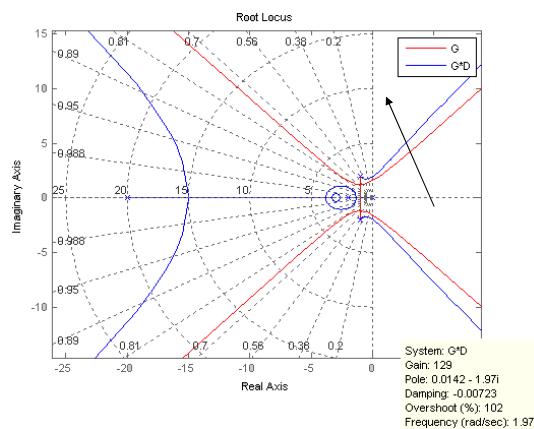
2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplu de proiectare (6) COMPENSARE DINAMICA

- Să observăm locul rădăcinilor, pentru sistemul compensat (G^*D).

```
clear;
numG=[1];
denG=conv([1 2 0],[1 2 5]);
sysG=tf(numG,denG);
numD=[1 3];
denD=[1 20];
sysD=tf(numD,denD);
sysT=sysG*sysD;
rlocus(sysG, 'r', sysT,'b');
sgrid;
legend('G','G*D');
figure;
CLT=feedback(100*sysT,1);
step(CLT); grid on;
```



- Față de cazul precedent, observăm deplasarea locului către stânga, și o limită de stabilitate $K = 130$, la trecerea locului rădăcinilor în semiplanul drept.

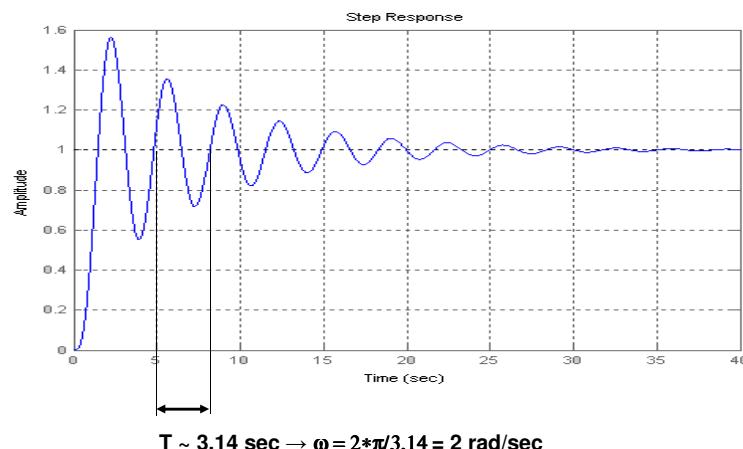
2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 * Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor**

Exemplu de proiectare (7)

COMPENSARE DINAMICA

- Răspunsul la semnal treaptă pentru **K = 100 < 130 (dar aproape de instabilitate)..**



2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 * Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor**

Exemplu de proiectare (8)

COMPENSARE DINAMICA

- Putem continua îmbunătățirea rezultatelor prin adăugarea unei compensări asemănătoare celei "notch" pentru eliminarea oscilațiilor de frecvență **ω = 2 rad/sec**
 - Echivalență cu deplasarea locului către stânga, dată de o compensare cu avans de fază.
 - Ca o lege de compensare dublă cu avans de fază (compensare notch)

$$1 + K \cdot \underbrace{\left(\frac{144}{\omega_n^2} \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}{(s+12)^2} \right)}_{N(s)} \cdot \underbrace{\left(100 \cdot \frac{s+3}{s+20} \right)}_{D(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 5)}}_{G(s)} = 0$$

Compensare notch	Compensare	Model Instalație
N(s)	D(s)	G(s)

- Se pune problema alegerii frecvenței ω_n .
 - Se urmărește în locul rădăcinilor, închiderea unei bucle scurte de la **pol**-ul din modelul instalației la noul **zero** introdus de compensarea **notch**, către interior.

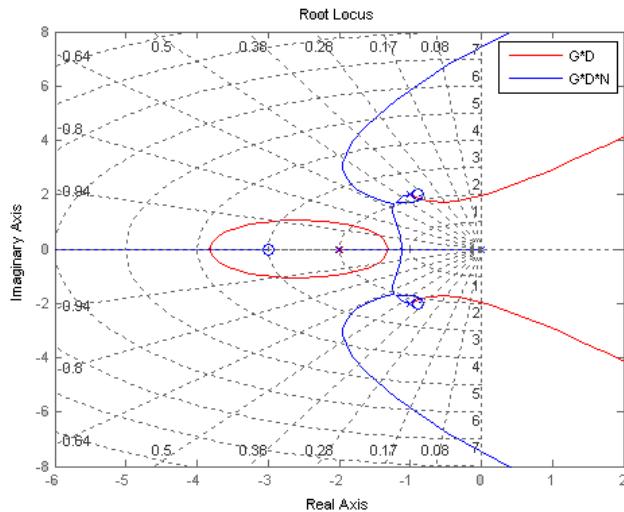
2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Exemplu de proiectare (9)

COMPENSARE DINAMICA $\left(\frac{144}{(2.19)^2} \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot 0.41 \cdot 2.19 \cdot s + (2.19)^2}{(s+12)^2} \right) \cdot \left(100 \cdot \frac{s+3}{s+20} \right) \cdot \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 5)}$

```
clear;
numG=[1];
denG=conv([1 2 0],[1 2 5]);
sysG=tf(numG,denG);
numD=100*[1 3];
denD=[1 20];
sysD=tf(numD,denD);
z=0.41; wn=2.19;
KK=144/(wn*wn);
numN=[1 2 z*wn*wn];
denN=[1 24 144];
sysN=tf(numN,denN);
sysT=2*KK*sysG*sysD*sysN;
rlocus(sysG*sysD, 'r', sysT,'b');
axis([-6, 2, -8 8]);
sgrid;
legend('G*D','G*D*N');
figure;
CLT=feedback(sysT,1);
step(CLT); grid on;
```



Se obține $K_{max}=5$, înainte de instabilitate (aditional la $K=100$ considerat în $D(s)$).

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

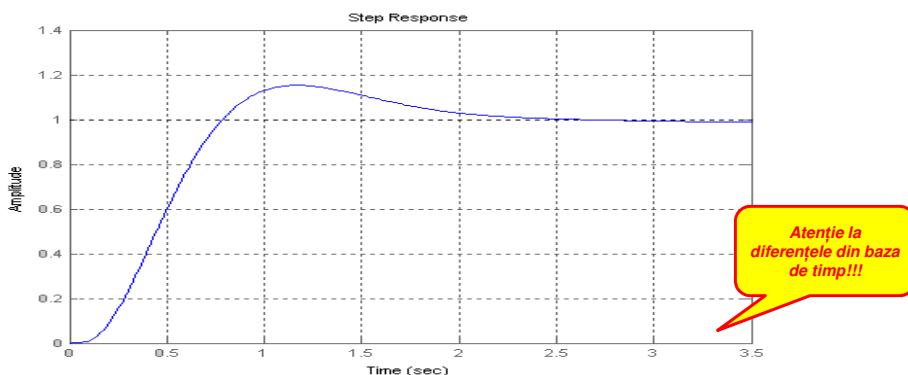
Exemplu de proiectare (10)

COMPENSARE DINAMICA

Răspuns la semnal treaptă pentru $K=2$

Legea de control devine

$$D(s) = 2 \cdot \left(30.024 \cdot \frac{s^2 + 1.7958 \cdot s + 4.7961}{(s+12)^2} \right) \cdot \left(100 \cdot \frac{s+3}{s+20} \right)$$

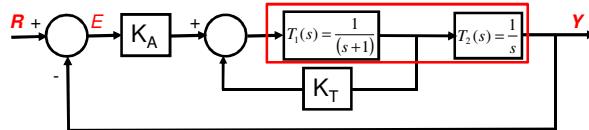


2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Considerarea a doi parametri. Sistem de control în cascadă.

- Metoda locului rădăcinilor consideră un singur parametru pentru reprezentarea grafică.
- O metodă practică de control poate considera două bucle de control, în cascadă, una rapidă (internă), și alta mai lentă (externă).
- Proiectarea unui astfel de sistem folosește un algoritm bazat pe închiderea succesivă a buclelor de control.
- Se consideră sistemul de control automat:



- Funcția de transfer intrare-iesire:

$$H(s) = \frac{K_A \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_T \cdot \frac{s+1}{s}} = \frac{K_A \cdot \frac{1}{s+1}}{1 + K_A \cdot \frac{s+1}{s}} \Rightarrow 1 + \frac{K_A}{s \cdot (s+1)} + \frac{K_T}{s+1} = 0 \Rightarrow s^2 + s + K_A + K_T \cdot s = 0$$

- Alegem o valoare pentru K_A (de exemplu, $K_A=4$), și desenăm locul rădăcinilor pentru K_T .
- Optimizăm selecția lui K_T , apoi definim $K_A = 4 + K_i$.
- Considerăm locul rădăcinilor în funcție de K_i .
- După optimizarea în funcție de K_i , putem reveni la locul rădăcinilor pentru K_T și optimiza din nou.

2019 *** Sisteme Automate de Control

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Observații finale – Exemple pentru proiectarea cu locul rădăcinilor

- Proiectarea sistemelor de control se bazează pe experiență.
- Discuția unor cazuri particulare și exemple permit dezvoltarea cunoașterii despre domeniul.

2019 *** Sisteme Automate de Control

TEMA DE CASĂ #4

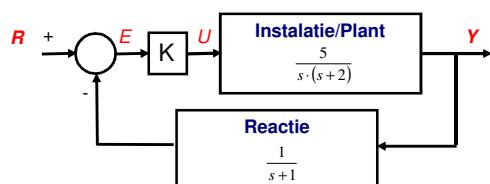
Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 17 mai.

Capitolul 5 *** Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

Problema

Considerati sistemul prezentat in figura.

- Folositi criteriul de stabilitate Routh pentru determinarea valorile lui K care asigura stabilitatea.
- Desenati locul radacinilor ecuatiei caracteristice in functie de $K>0$. Indicati pe figura toate punctele de interes.

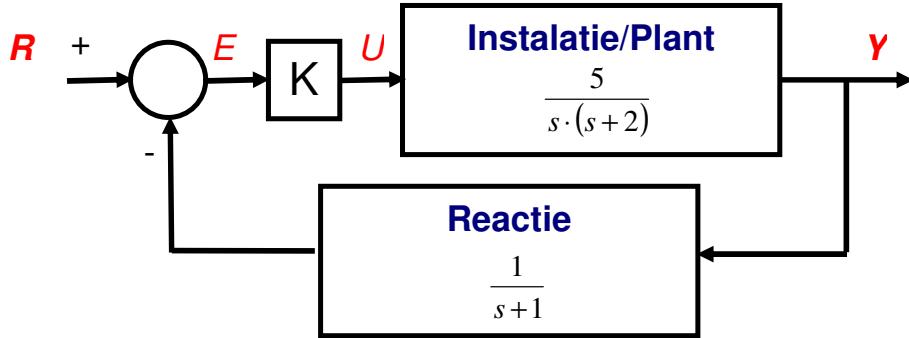


SOLUTII PENTRU TEMA DE CASA #4

Problema

Considerați sistemul prezentat în figură.

- Folosiți criteriul de stabilitate Routh pentru determinarea valorile lui K care asigură stabilitatea.
- Desenați locul rădăcinilor ecuației caracteristice în funcție de $K > 0$. Indicați pe figură toate punctele de interes.



Solutie

(a)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot \frac{5}{s \cdot (s+2)}}{1 + K \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s \cdot (s+2)}} = \frac{5 \cdot K \cdot (s+1)}{s \cdot (s+1)(s+2) + 5K} = \frac{5 \cdot K \cdot (s+1)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5K}$$

Criteriul Routh:

$$\begin{array}{r}
 s^3 & 1 & 2 \\
 s^2 & 3 & 5K \\
 s & \frac{6 - 5K}{3} \\
 s^0 & 5K
 \end{array}$$

$$K > 0, 6 - 5K > 0 \Rightarrow 0 < K < 1.2$$

(b)

Trebuie să desenăm locul rădăcinilor pentru:

$$1 + K \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

Regula 1: avem 3 ramuri, toate 3 terminându-se în asymptote.

Regula 2: locul conține axa reală între -1 și 0, cât și între -infinit și -2.

Regula 3: centrul asymptotelor este la:

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

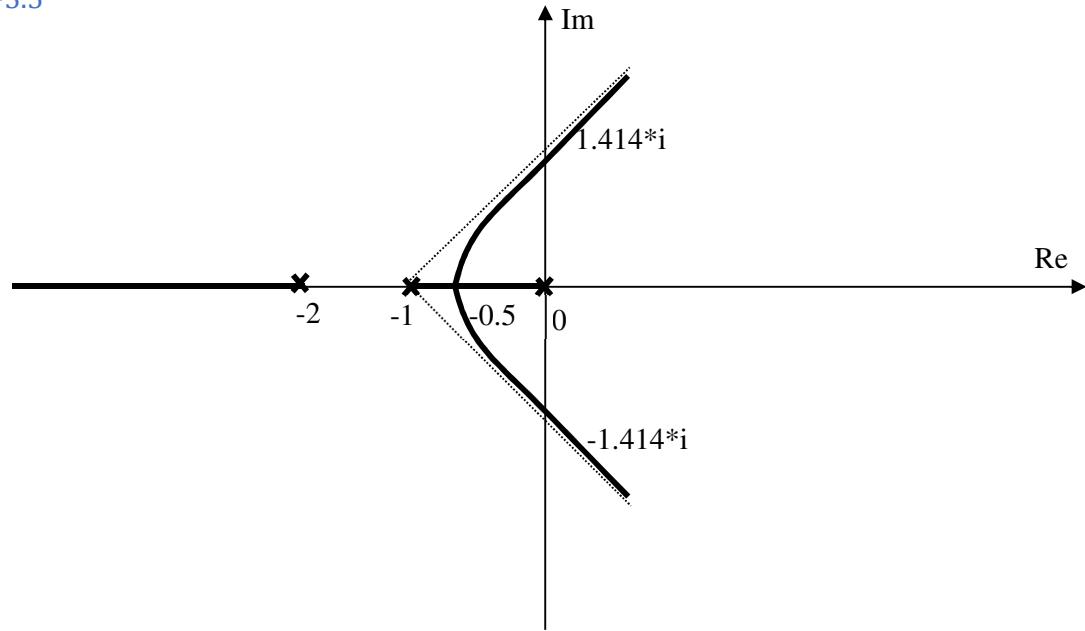
si unghiurile sunt 180, 60, -60.

Regula 4: pentru $K=1.2$, avem mai sus criteriul Routh

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0 \Leftrightarrow (s^2 + 2)(s + 3) = 0 \Leftrightarrow s = -3, \pm i \cdot 1.414$$

Regula 5: Puncte de ramificație:

$$s^2 + 6s + 5 + s^2 + 5s + s^2 + s = 0 \Leftrightarrow 3s^2 + 12s + 5 = 0 \Leftrightarrow s_1 \approx -0.55 \quad s_2 = -3.5$$





Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2



Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Cursul #05

Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 17 = Recapitulare - Răspunsul în frecvență al sistemelor și diagramele Bode.
- Ora 18 = Stabilitatea sistemelor automate de control (*Nyquist, limite*)
- Ora 19 = Observații finale stabilitate
- Ora 20 = Proiectarea sistemelor PD + Proiectarea sistemelor cu avans de fază.

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare – Răspunsul în frecvență (1)

- Studiul legăturii între **poli-zero** și răspunsul în frecvență
- Metodele de studiu includ diagramele Bode și criteriul Nyquist de stabilitate
- **Avantaje**
 - Permit rezultate bune fără cunoașterea exactă a modelului,
 - Permit includerea unor date experimentale în model,
 - **Cea mai ușoară și mai directă metodă pentru proiectarea compensării.**
- **Proiectarea cu metoda analizei în frecvență poate fi folosită doar pentru sisteme liniare și invariabile în timp.**
- Răspunsul unui sistem liniar și invariabil în timp, la semnale de intrare sinusoidale poate fi determinat din locația polilor și zero-urilor.
 - Fie un sistem caracterizat de funcția de transfer $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
 - Unde semnalul de intrare este sinusoidal $u(t) = A \cdot \sin(\omega_o \cdot t) \cdot l(t) \Rightarrow U(s) = \frac{A \cdot \omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$
 - Transformata Laplace a semnalului de ieșire

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{A \cdot \omega_o}{s^2 + \omega_o^2} = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - p_n} + \frac{\alpha_o}{s + j \cdot \omega_o} + \frac{\alpha_o^*}{s - j \cdot \omega_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \alpha_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + \alpha_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + \alpha_n \cdot e^{p_n \cdot t} + 2 \cdot |\alpha_o| \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \phi)$$

2019 *** Sisteme automate de control

3

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare – Răspunsul în frecvență (2)

$$y(t) = \alpha_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + \alpha_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + \alpha_n \cdot e^{p_n \cdot t} + 2 \cdot |\alpha_o| \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \phi)$$

- Dacă toți polii p_i din funcția de transfer a sistemului reprezintă răspuns stabil (partea lor reală este negativă), atunci toți termenii exponentiali în p_i se vor atenua în timp și răspunsul staționar va depinde doar de semnalul sinusoidal de la intrare.

$$y(t) = A \cdot M \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \phi)$$

$$\begin{cases} M = |G(j\omega_o)| = |G(s)|_{s=j\omega_o} = \sqrt{[\text{Re}(G(j\omega_o))]^2 + [\text{Im}(G(j\omega_o))]^2} \\ \phi = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(G(j\omega_o))}{\text{Re}(G(j\omega_o))} \right] \end{cases}$$

- Răspunsul în frecvență al unui sistem va fi determinat în forma de mai sus pentru tot domeniul de frecvențe ω_o .

Consecință: Dacă nu avem un model precis al unui sistem ("plant"), putem aplica la intrare semnale sinusoidale de frecvență variabilă și măsura semnalul de la ieșire.

Consecință: Putem stabili o legătură între răspunsul la semnal treaptă și răspunsul în frecvență al unui sistem:

- Vârful rezonant al unei caracteristici în frecvență corespunde la amortizare și corespunde răspunsului tranzitoriu la semnal treaptă (prin suprareglare).

2019 *** Sisteme automate de control

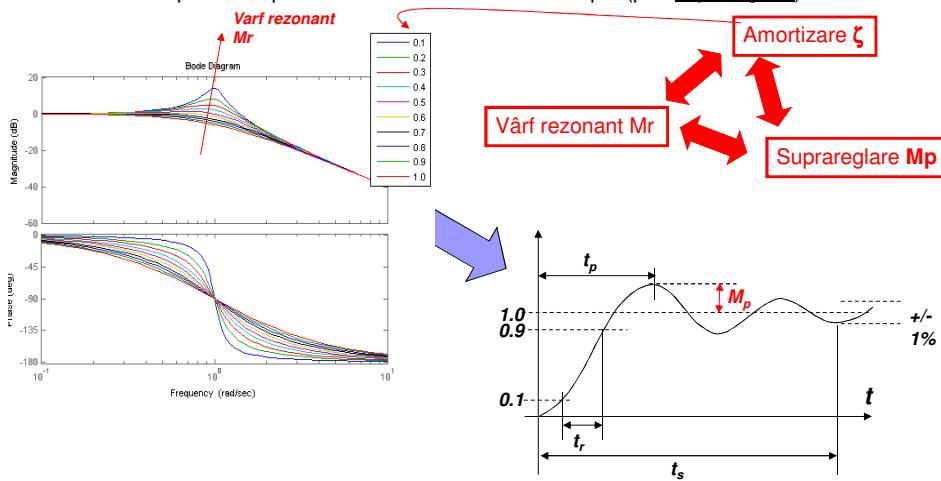
4

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare – Răspunsul în frecvență (3)

Consecință: Putem stabili o legătură între răspunsul la semnal treaptă și răspunsul în frecvență al unui sistem:

- **Vârful rezonant** al unei caracteristici în frecvență corespunde la amortizare și corespunde răspunsului tranzitoriu la semnal treaptă (prin suprareglare).



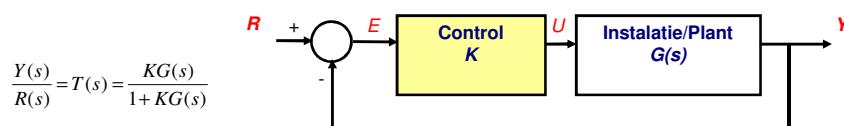
2019 *** Sisteme automate de control

5

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

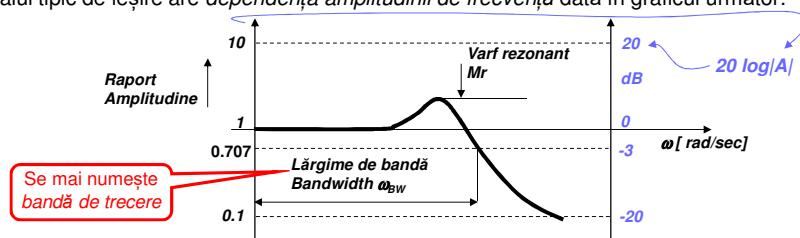
Recapitulare: Lărgime de bandă (“bandwidth”) și vârf rezonant (“resonant peak”)

- **Lărgimea de bandă** – Frecvența maximă la care ieșirea unui sistem va urmări o intrare sinusoidală într-un mod corespunzător (de obicei cu o atenuare peste **0.707**).



- În majoritatea sistemelor fizice, un sistem se comportă ca un filtru trece-jos:
 - ieșirea urmează semnalul de intrare $Y/R = 1$ la frecvențe joase,
 - Semnalul de ieșire nu mai urmărește fidel intrarea la frecvențe înalte.

Semnalul tipic de ieșire are *dependența amplitudinii de frecvență* dată în graficul următor:



2019 *** Sisteme automate de control

6

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare: Metoda diagrameelor Bode (1)

- Un mod de reprezentare a răspunsului în frecvență - posibil de desenat fără calculator.
- Metodă dezvoltată de Bode (1932-1942)
 - Desenarea caracteristicii de amplitudine pe o scară logaritmică și a caracteristicii de fază pe o scară liniară.
 - **Permite adunarea grafică a termenilor funcției de transfer !**

$$G(j\omega) = \frac{(r_1 \cdot e^{j\theta_1}) \cdot (r_{12} \cdot e^{j\theta_2})}{(r_3 \cdot e^{j\theta_3}) \cdot (r_4 \cdot e^{j\theta_4}) \cdot (r_5 \cdot e^{j\theta_5})} = \left(\frac{r_1 \cdot r_{12}}{r_3 \cdot r_4 \cdot r_5} \right) \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{r_1 \cdot r_{12}}{r_3 \cdot r_4 \cdot r_5} \\ \angle G(j\omega) = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{10}|G(j\omega)| = \log_{10} r_1 + \log_{10} r_{12} - \log_{10} r_3 - \log_{10} r_4 - \log_{10} r_5 \\ \angle G(j\omega) = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 \end{cases}$$

- Amplitudinea se măsoară în decibeli

$$|G|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare: Metoda diagrameelor Bode (2)

■ Avantajele diagrameelor Bode

- **Compensarea dinamică poate fi proiectată în totalitate pe diagramele Bode.**
 - Foarte ușor de desenat "de mâna" (fără calculator), simplificând proiectarea compensării dinamice.
 - Diagramele Bode pot fi determinate experimental în cazul în care sistemul nu este definit matematic.
 - Diagramele Bode a sistemelor în cascadă (serie) se adună pe graficul logaritmic în amplitudine și pe graficul liniar în fază.
 - Folosirea unei coordonate logaritmice permite un domeniu larg de variație.

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare: Metoda diagrameelor Bode (3)

- Avem 3 clase de termeni elementari posibili în funcțiile de transfer:

- Termeni singulari în origine

$$K_o \cdot (j\omega)^n$$

$$\log[K_o \cdot (j\omega)^n] = \log K_o + n \cdot \log|j\omega|$$

Diagrama de amplitudine este o linie dreaptă cu o pantă de $n * 20\text{dB/decada}$.

Diagrama de fază este o linie orizontală la $n * 90^\circ$.

- Termeni de primul ordin

$$j \cdot \omega \tau + 1$$

- Diagrama de amplitudine urmărește două asymptote (la joasă și înaltă frecvență) $\omega \cdot \tau \ll 1 \Rightarrow j \cdot \omega \cdot \tau + 1 \approx 1$

$$\omega \cdot \tau \gg 1 \Rightarrow j \cdot \omega \cdot \tau + 1 \approx j \cdot \omega \cdot \tau$$

cele două asymptote se intersecțează în punctul $\omega = 1/\tau$, și curba trece la 3dB de acest punct de intersecție.

- Diagrama de fază

$$\omega \cdot \tau \ll 1 \Rightarrow \angle 1 = 0^\circ$$

$$\omega \cdot \tau \gg 1 \Rightarrow \angle j \cdot \omega \cdot \tau = 90^\circ$$

$$\omega \cdot \tau \approx 1 \Rightarrow \angle(j \cdot \omega \cdot \tau + 1) = 45^\circ$$

trece la 11° de punctele de intersecție a asymptotelor de 0 și inf cu o secantă desfașurată pe o decadă în jurul frecvenței $\omega = 1/\tau$.

2019 *** Sisteme automate de control

9

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

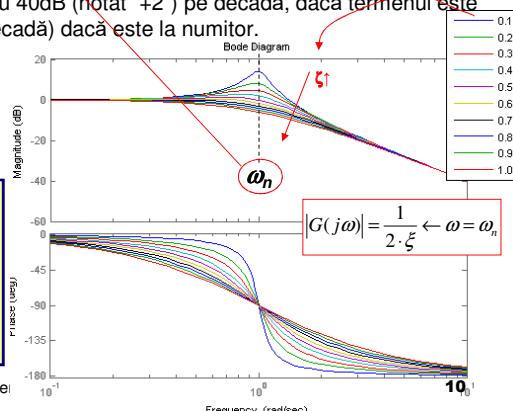
Recapitulare: Metoda diagrameelor Bode (4)

- Termeni de ordinul doi

$$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2 \cdot \xi \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right]^{\pm 1}$$

- Punctul de curbură ("breakpoint") este la $\omega = \omega_n$.
- Lărgimea de bandă ("Bandwidth") se poate approxima cu frecvența ω_n (vom reveni, p.48-49)
- Tranziția prin punctul de curbură depinde de amortizare ζ (vom reveni, p.48-49)
- Amplitudinea își schimbă pantă cu 40dB (notat "+2") pe decadă, dacă termenul este la numărător, și cu "-2" (-40dB/decadă) dacă este la numitor.
- Faza se schimbă cu $\pm 180^\circ$.

```
clear;
numT=[1];
for zeta=0.1:0.1:1
denT=[1 2*zeta 1];
sysT=tf(numT,denT);
bode(sysT,[1e-1,1e1]);
hold on;
end
legend('0.1','0.2','0.3','0.4','0.5','0.6','0.7','0.8','0.9','1.0');
```



2019 *** Sisteme automate de control

5

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare: Metoda diagrameelor Bode (5). Exemplu.

- Desenati diagrama Bode pentru functia de transfer:

$$KG(s) = \frac{2000 \cdot (s + 0.5)}{s \cdot (s + 10) \cdot (s + 50)}$$

- Pasul 1:** Re-aranjăm f.d.t. în forma canonica (Bode)

$$K \cdot G(s) = \frac{2 \cdot \left[\left(\frac{j\omega}{0.5} \right) + 1 \right]}{j\omega \cdot \left[\left(\frac{j\omega}{10} \right) + 1 \right] \cdot \left[\left(\frac{j\omega}{50} \right) + 1 \right]}$$

- Pasul 2:**

Termenul $(j\omega)$ este de ordinul întâi și este la numitor, deci asimptota de frecvență foarte joasă este data de $(2/j\omega)$, cu panta de 20dB/decadă, trece prin punctul $(\omega=1, M=2)$.

- Pasul 3:**

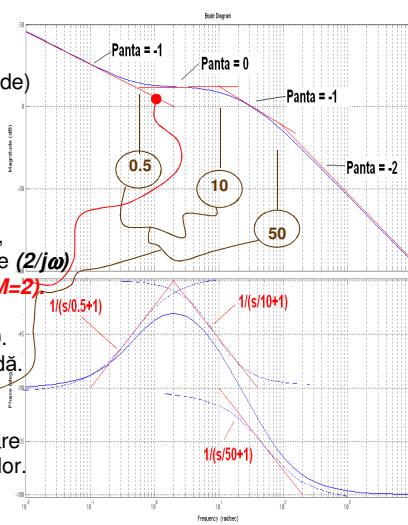
Identificăm celelalte puncte de curbură la 0.5, 10, 50. Desenăm celelalte asimptote, fiecare cu 20dB/decadă. Asimptotele se intersectează la **[0.5, 10, 50]**.

- Pasul 4:**

Desenăm diagrama de amplitudine, trecând de fiecare dată la 3dB de punctele de intersecție ale asimptotelor.

- Pasul 5:**

Faza la joasă frecvență este -90, apoi desenăm contribuția fiecărui termen și le adunăm.

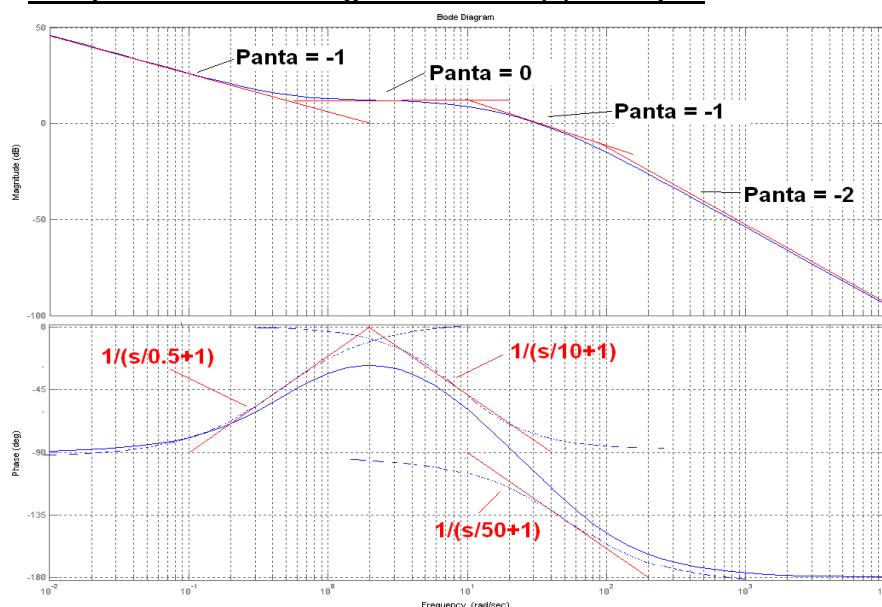


2019 *** Sisteme automate de control

11

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Recapitulare: Metoda diagrameelor Bode (5). Exemplu.



2019 *** Sisteme automate de control

12

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

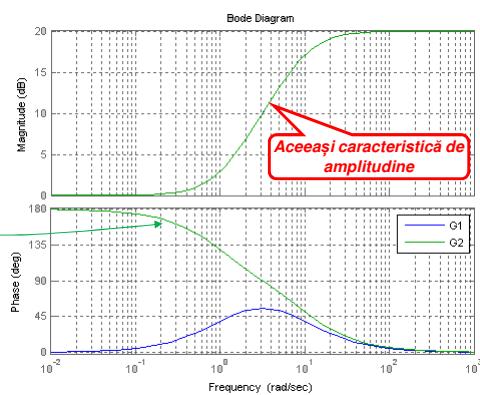
Caz special - Sisteme cu zero pozitiv ("Non-minimum Phase")

- Un sistem cu un **zero** în partea dreaptă a planului complex prezintă o schimbare importantă a fazelor la modificarea frecvenței între **0** și **infinit**.
- O astfel de schimbare de fază este mai mare decât cea obținută dacă toți polii și zero-urile ar fi în partea stângă a planului complex.
- Să considerăm funcțiile următoare, cu amplitudine egală, dar fază diferită.

$$G_1(s) = 10 \cdot \frac{s+1}{s+10}$$

$$G_2(s) = 10 \cdot \frac{s-1}{s+10}$$

```
clear;
numG1=[1 1];
denG1=[1 10];
sysG1=tf('10*numG1,denG1);
bode(sysG1,{1e-2,1e3}); hold on;
numG2=[1 -1];
denG2=[1 10];
sysG2=tf('10*numG2,denG2);
bode(sysG2,{1e-2,1e3});
legend('G1','G2');
grid on;
```



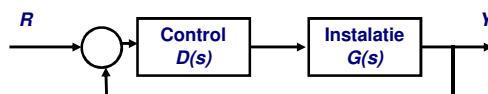
2019 *** Sisteme automate de control

13

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Proiectarea sistemelor de control cu răspunsul în frecvență - Eroarea staționară (1)

- **Eroarea staționară a sistemului în buclă închisă scade cu creșterea câștigului funcției de transfer în buclă deschisă**
 - Ne interesează **câștigul în buclă deschisă la frecvențe joase (funcția DG)**, deci cu cât asimptota de frecvență joasă este mai mare, cu atât eroarea staționară este mai redusă.



➢ F.d.t. în buclă închisă

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s) \cdot G(s)}{1 + D(s) \cdot G(s)}$$

➢ Repetăm tabelul ([vezi curs 3, p.37](#)) cu relația dintre eroarea staționară și f.d.t. în buclă deschisă (**DG** în exemplu).

2019 *** Sisteme automate de control

14

Urmărirea unei referințe variabile (“tracking”)

Calcularea erorilor staționare ca o funcție de tipul sistemului:

 $k=$

$$e_{ss} = \begin{cases} 0 & \leftarrow n > k \\ \frac{1}{1+K_0} & \leftarrow n = k = 0 \\ \frac{1}{K_n} & \leftarrow n = k \neq 0 \\ \infty & \leftarrow n < k \end{cases}$$

Câtă “1/s” sunt în DG?

	0	1	2
	Semnal de intrare (“Referință”)		
	Treapta (“Poziție”)	Rampa (“Viteză”)	Parabola (“Acceleratie”)
	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t \cdot 1(t)$	$r(t) = t^2 \cdot 1(t)$
Tipul “0”	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
Tipul “1”	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipul “2”	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Concluzii

- Tipul sistemului este dat de numărul de poli în $s=0$.
- În funcție de tipul sistemului, putem estima capabilitatea unui sistem de a urmări semnale de referință cu o variație polinomială.
- Se observă că într-un sistem de control cu reacție unitară, variația parametrilor nu modifică tipul erorii staționare.
- Fără demonstrație: Pentru orice sistem în buclă închisă, deplasarea polilor catre $(-\infty)$ determină creșterea K_p, K_v, K_a și scăderea erorii staționare.

2019 *** Sisteme automate de control

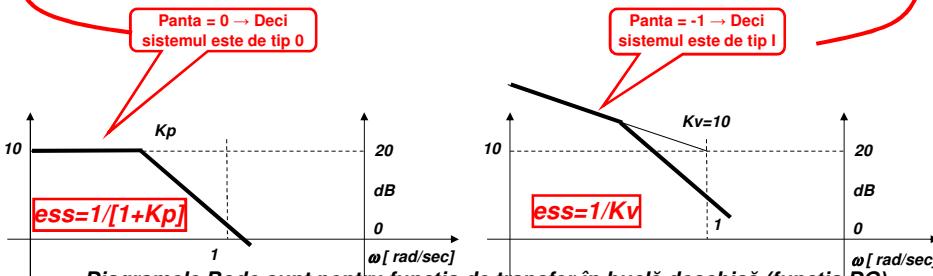
15

Proiectarea sistemelor de control cu răspunsul în frecvență - Eroarea staționară (3)

- **Eroarea staționară scade cu creșterea câstigului funcției de transfer în buclă deschisă** → Ne interesează câstigul în buclă deschisă la frecvențe joase (funcția DG), deci cu cât asimptota de frecvență joasă este mai mare, cu atât eroarea staționară este mai redusă.

Observație folosită la proiectarea compensării.

- Pentru un sistem de tipul 0, eroarea staționară a sistemului în buclă închisă, la semnal de intrare treaptă este dată de $ess = 1/[1+K_p]$ (vezi cursul 3, p.37)
- Pentru un sistem de tipul I, eroarea staționară a sistemului în buclă închisă, la semnal de intrare rampă sau sinusoidal este dată de $ess = 1/K_v$, unde K_v se determină prin citire directă de pe grafic, pentru $\omega = 1\text{rad/sec}$ (vezi cursul 3, p.37)



Diagramele Bode sunt pentru funcția de transfer în buclă deschisă (funcția DG).

2019 *** Sisteme automate de control

16



Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Observații finale

Desenarea manuală a diagramelor Bode presupune urmarea pașilor:

- Manipulați funcția de transfer în forma factorială.
- Determinați puterea n a termenului de tip singularitate. Desenați această componentă a amplitudinii cu o pantă $n*20\text{dB}$.
- Desenați asimptotele pe baza adunării sau scăderii cu 20dB pentru fiecare termen de ordinul întâi.
- Desenați diagrama de amplitudine aproximativă, cu deplasări de maximum 3 dB lângă punctele de curbură.
- Desenați asimptota de frecvență joasă a diagramei de fază, la $n*90$.
- Desenați asimptotele pentru fiecare termen individual.
- Adunați grafic componentele de fază pentru fiecare termen.



Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Cursul #05

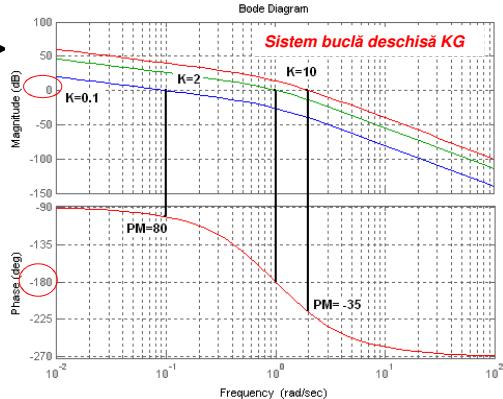
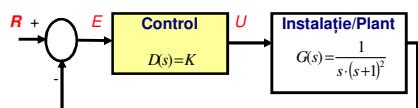
Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 18 = Stabilitatea sistemelor automate de control (*Nyquist, limite*)

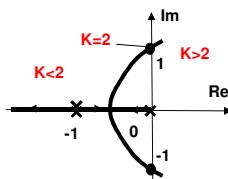
Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Definiții – Legătura dintre stabilitate și răspunsul în frecvență (1)

- Dorim analiza stabilității prin metoda răspunsului în frecvență.
- Determinăm stabilitatea sistemului în buclă închisă prin analiza în frecvență a sistemului în buclă deschisă $D(s)G(s) = KG(s)$.**
- Să considerăm un exemplu (stăm funcția de transfer în buclă deschisă și studiem stabilitatea sistemului în buclă închisă):



- Loul rădăcinilor se va obține (dat aici fără demonstrație):



- Punctele de stabilitate neutră ("la limită") se găsesc pe axa imaginară (**K = 2**).
- Orice punct de pe locul rădăcinilor satisfacă $1 + KG = 0$: $|KG(s)| = 1 \quad \angle G(s) = 180^\circ$

2019 *** Sisteme automate de control

19

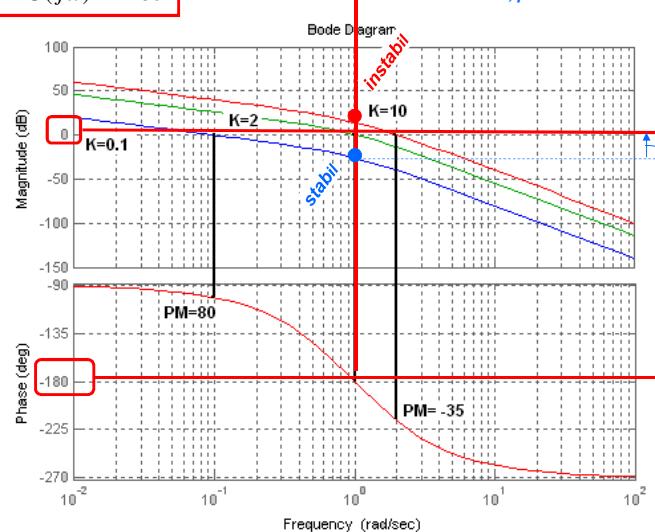
Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Definiții – Legătura dintre stabilitate și răspunsul în frecvență (2)

$$|KG(j\omega)| < 1 \text{ pentru } \angle G(j\omega) = -180^\circ$$

Reserva de amplitudine vom reveni, p.38-39

Observație = Putem translă graficul de amplificare în sus sau jos, prin intermediul lui K.



2019 *** Sisteme automate de control

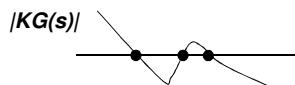
20

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Definiții – Legatura dintre stabilitate și răspunsul în frecvență (3)

- Analiza locului rădăcinilor
 - Observăm că orice valoare a lui $K > 2$ determină instabilitate.
 - Observăm că orice valoare a lui $K < 2$ determină un sistem stabil.
- Enunțăm următorul criteriu de stabilitate:

$|KG(j\omega)| < 1 \text{ pentru } \angle G(j\omega) = -180^\circ$
- Acest criteriu este adevărat pentru orice sistem la care:
 - (1) Creșterea amplificării K conduce la instabilitate, și **NU** avem situațiile arătate pentru sistemele cu stabilitate condițională ([v.cursul 4, p.50](#))
 - (2) Modulul produsului $KG(s)$ intersectează axa de căstig unitar doar o singură dată.
- O situație ambiguă se obține când graficul amplitudinii din răspunsul în frecvență trece prin valoarea "1" de mai multe ori.



- În astfel de cazuri, este nevoie să schităm locul rădăcinilor.
- O altă metodă echivalentă de eliminare a acestei ambiguități, este **criteriu de stabilitate Nyquist**.

- Demonstrația criteriului Nyquist pleacă de la principiul argumentului Cauchy.

2019 *** Sisteme automate de control

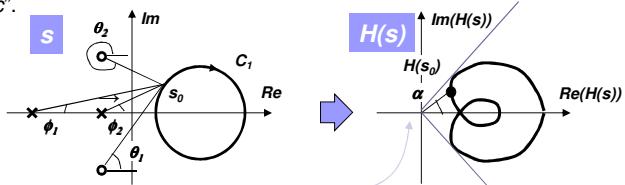
21

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Principiul argumentului (Cauchy)

- Să considerăm (ca exemplu) o funcție de transfer

$$H(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot s + 5}{(s + 1) \cdot (s + 3)}$$
- Dorim să evaluăm această funcție pentru valori ale lui " s " de pe un contur C_1 , parcurs "în sensul acelor de ceasornic".



- Argumentul (faza) lui $H(s_0)$ se obține:

$$\alpha = \underbrace{\theta_1 + \theta_2}_{\text{Zero-uri}} - \underbrace{\phi_1 - \phi_2}_{\text{Poli}}$$
- Când s parcurge C_1 , unghiul α se va schimba, dar nu va parcurge 360° ("nu se dă peste cap") dacă nici un **pol** sau **zero** nu este în interiorul lui C_1 .
- Echivalent cu a observa că noul contur pentru $H(s_0)$ nu încercuiește originea.

Principiul argumentului (Cauchy):

Conturul unei funcții complexe va înconjura originea planului complex de (Z-P) ori, unde Z este numărul de zerouri și P numărul de poli din interiorul conturului.

2019 *** Sisteme automate de control

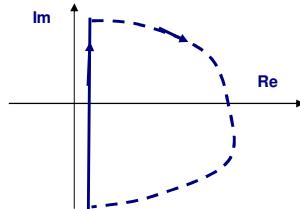
22

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Aplicație la proiectarea sistemelor de control

- Alegem C_1 să acopere întreaga parte dreaptă a planului complex, regiune în care un pol ar produce un sistem instabil.
- Funcția de transfer în buclă închisă:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)}$$



Aplicăm principiul argumentului funcției $1 + KG(s) = 0$.

- Dacă conturul de evaluare pentru s - ce înconjoară întreaga parte dreaptă a planului complex - va contine un **pol** sau **zero**, atunci conturul pentru $1 + KG(s)$ va înconjura originea.
- Dacă $1 + KG(s)$ înconjoară originea, atunci $KG(s)$ va înconjura punctul **-1**.
- O astfel de reprezentare se numește **diagrama Nyquist** ("Nyquist plot" sau "polar plot").
- Mai trebuie să determinăm dacă o încercuire a lui **-1** este datorată unui **pol** sau unui **zero**.
 - Orice pol pentru $1 + KG(s)$ este pol și pentru $G(s)$.
 - Dacă $G(s)$ nu are poli în partea dreaptă a planului complex, atunci orice înconjurare a lui **-1**, arată un **zero** al funcției de transfer $1+KG(s)$
 - ... care este un **pol** al funcției de transfer în buclă închisă, deci instabilitate.

2019 *** Sisteme automate de control

23

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Procedură pentru desenarea unei diagrame Nyquist.

- Evaluati $KG(j\omega)$ pentru un interval de la $\omega = 0$ la $\omega = \omega_h > 0$.
 - Amplitudinea lui $KG(j\omega_h)$ va rezulta foarte mică pentru orice sistem fizic.
- Completați desenul prin simetrie (oglinză) față de axa reală
 - Noua curbă va reprezenta funcția pentru $-\infty < \omega < \infty$.
- **Determinați numărul de încercuiri în sens pozitiv** (în sensul acelor de ceasornic) a lui **-1**. Notați acel număr cu **N**.
- **Determinați numărul de poli în partea dreaptă a planului complex a lui $G(s)$ prin simplă inspecție a funcției de transfer.** Notați acel număr cu **P**.
- **Numărul de rădăcini ce determină instabilitate va fi dat de $Z = N + P$.**
- **Pentru a avea un sistem stabil, ne am dorि ca $Z = 0$.**
- Observăm că toată această analiză se face pentru o valoare prestabilită a lui **K**.
- De obicei ne interesează determinarea unui interval de valori pentru **K** astfel încât să avem stabilitate.
- Se poate transla această metodă astfel încât să analizăm încercuirea unui punct **-1/K** de către funcția $G(s)$.
- Putem calcula numărul de rădăcini instabile ale sistemului în buclă închisă, prin **Z = N + P**, unde **N**=numărul de încercuiri, **P**=numărul de poli **RHP** ai sistemului în buclă deschisă.

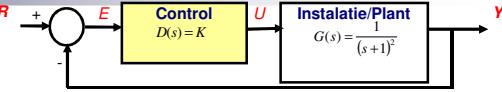
Acronym pentru partea dreaptă a planului complex

2019 *** Sisteme automate de control

24

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Diagrama Nyquist. Exemplul 1



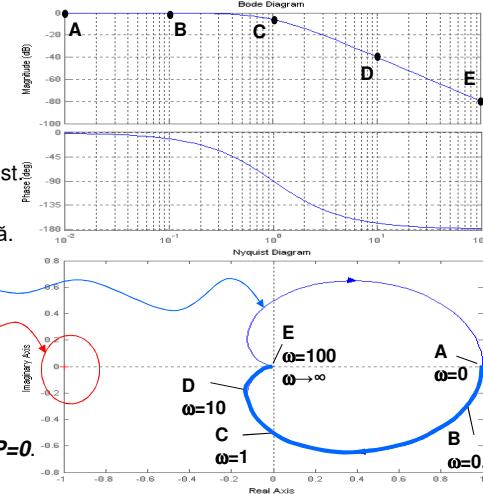
- In acest caz cunoaștem funcția de transfer în bucla deschisă $G(s)$.
- Desenăm diagrama Bode pentru $G(s)$.

```
clear;
numG=1;
denG=[1 2 1];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w);
grid on;
```

- Translăm diagrama Bode în diagrama Nyquist.
- In acest scop, alegem punctele A,B,C,D,E.
- Diagrama Nyquist este o reprezentare polară.
- Construim prin simetrie, pentru $\omega < 0$

```
numG=1;
denG=[1 2 1];
sysG=tf(numG,denG);
nyquist(sysG);
```

- Observăm că $(-1/K)$ nu este încercuit de diagramă, pentru nici un $K > 0 \Rightarrow N=0$.
- $G(s)$ nu are poli în RHP, deci $P=0 \Rightarrow Z=N+P=0$.
- \Rightarrow Sistem stabil pentru orice $K > 0$.

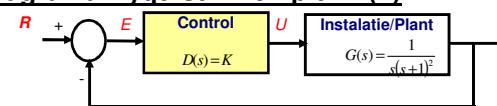


2019 *** Sisteme automate de control

25

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Diagrama Nyquist. Exemplul 2 (1)



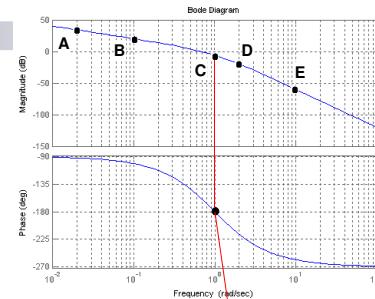
- Cunoaștem funcția de transfer în buclă deschisă $G(s)$.
- Desenăm diagrama Bode pentru $G(s)$.

```
clear;
numG=1;
denG=[1 2 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w);
grid on;
```

- Translăm această diagramă în diagrama Nyquist.
 - In acest scop, alegem punctele A, B, C, D, E.
 - Diagrama Nyquist este o reprezentare polară.

```
clear;
numG=1;
denG=[1 2 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
nyquist(sysG,[1e-3,1e2]); hold on;
nyquist(sysG,1,'ks'); hold on;
nyquist(sysG,2,'kd'); hold on;
nyquist(sysG,10,'kv');
axis([-3,1,-2,2]);
```

- Diagrama Nyquist nu este bine definită la $\omega = 0$. Alegem un contur modificat Cauchy.



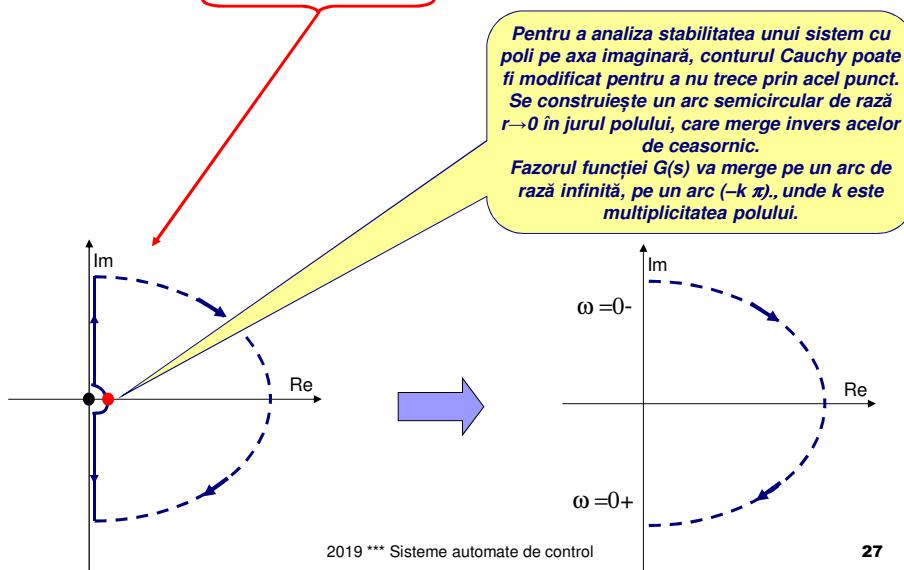
2019 *** Sisteme automate de control

26

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Diagrama Nyquist. Exemplul 2 (2)

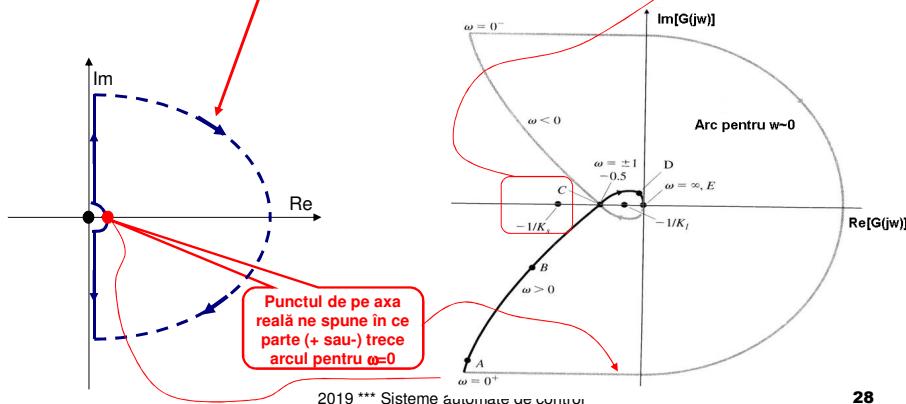
- Diagrama Nyquist nu este bine definită la $\omega = 0$.
 - Alegem un contur modificat Cauchy, capabil să ocolească $\omega = 0$.



Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Diagrama Nyquist. Exemplul 2 (3)

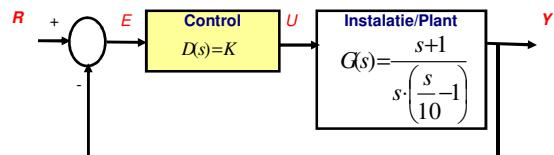
- Diagrama Nyquist nu este bine definită la $\omega = 0$.
 - Alegem un contur modificat Cauchy, capabil să ocolească $\omega = 0$.
- Sistemul în buclă deschisă ($G(s)$) nu are poli în RHP, deci $P = 0$.
- Se observă că sunt două posibilități pentru locația lui $(-1/K)$:
 - Pentru $K > 2$: In două bucle, deci $N = 2 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow$ sistemul în buclă închisă este instabil.
 - Pentru $K < 2$: In nici o buclă, deci $N = 0 \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow$ sistemul în buclă închisă este stabil.



Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

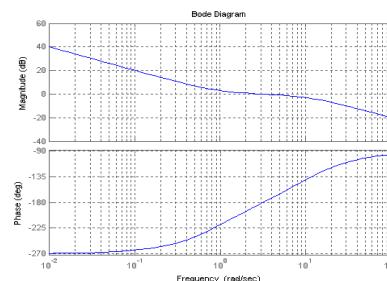
Diagrama Nyquist. Exemplul 3 (1)

- Să considerăm un exemplu cu un sistem în buclă deschisă instabil ($P = 1$).



- Cunoaștem funcția de transfer în buclă deschisă $G(s)$.
- Desenăm diagrama Bode pentru $G(s)$.

```
clear;
numG=[1 1];
denG=[0.1 -1 0];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w); grid on;
```



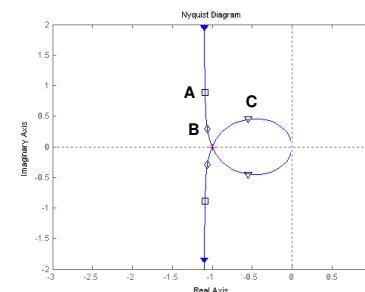
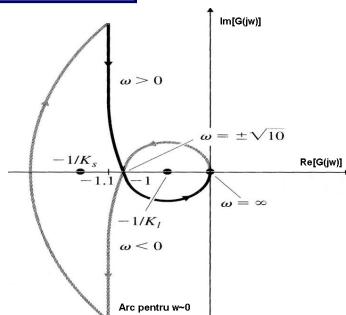
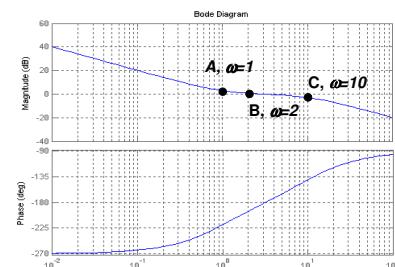
Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Diagrama Nyquist. Exemplul 3 (2)

- Translăm diagrama Bode în diagrama Nyquist.
 - In acest scop, alegem punctele A,B,C.
 - Diagrama Nyquist este o reprezentare polară.

```
numG=[1 1];
denG=[0.1 -1 0];
sysG=tf(numG,denG);
nyquist(sysG,(1e-2,1e2));
hold on;
nyquist(sysG,1,'ks'); hold on;
nyquist(sysG,2,'kd'); hold on;
nyquist(sysG,10,'kv');
axis([-3,1,-2,2]);
```

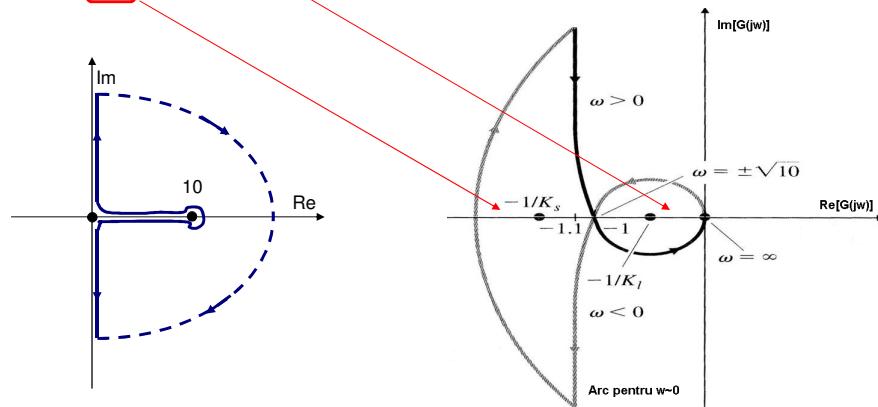
Fără această scalare a axelor nu am vedeat detaliile lângă origine



Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Diagrama Nyquist. Exemplul 3 (3)

- Şi în acest caz avem o incertitudine lângă $\omega = 0$, deci lucrăm cu conturul modificat Cauchy.
- Pentru $K > 1$, avem o încercuire posibilă a lui $(-1/K)$, în direcție inversă acelor de ceasornic (**ccw**), deci $N = -1 \Rightarrow Z = N + P = -1 + 1 = 0 \Rightarrow$ sistem stabil.
- Pentru $0 < K < 1$, avem o încercuire posibilă a lui $(-1/K)$ în direcția acelor de ceasornic (**cw**), deci $N=1 \Rightarrow Z=N+P=1+1=2 \Rightarrow$ sistem instabil.



2019 *** Sisteme automate de control

31

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Observații finale privind determinarea stabilității din răspunsul în frecvență

- Desenarea sau transformarea diagramelor Bode în diagrama Nyquist

- Evaluati $KG(j\omega)$ pentru un interval de la $\omega = 0$ la $\omega = \omega_h > 0$.
 - Amplitudinea lui $KG(j\omega_h)$ va rezulta foarte mică pentru orice sistem fizic.
- Completați desenul printr-o "oglinză" față de axa reală.
- Determinați numărul de încercuiri în sens pozitiv (în sensul acelor de ceasornic) a lui $-1/K$. Notați acel număr cu N .
- Determinați numărul de poli în partea dreaptă a planului complex a lui $G(s)$ prin simpla inspecție a funcției de transfer. Notați acel număr cu P .
- Numărul de rădăcini ce determină instabilitate va fi dat de $Z = N + P$.
- Pentru a avea un sistem stabil, ne-am dori ca $Z = 0$.
 - Ne interesează determinarea unui interval de valori pentru K astfel încât să avem stabilitate.

2019 *** Sisteme automate de control

32



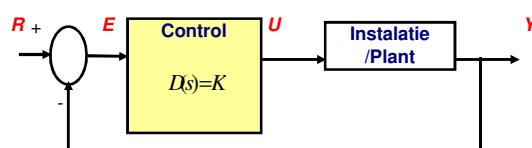
Cursul #05

Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 19 = Observații finale stabilitate



Rezervele domeniului de stabilitate (1)



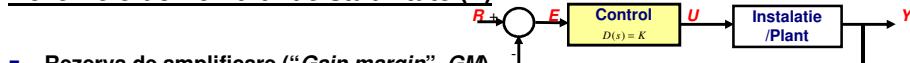
Observatie

Larga majoritate a sistemelor automate de control sunt stabile pentru o valoare mică a câștigului K și devin instabile pentru o valoare mare a câștigului K .

- Deoarece modelul sistemului controlat poate fi definit aproximativ și considerând posibila variație a parametrilor, devine foarte importantă măsurarea marginilor (rezervelor) până la instabilitate.
 - Rezerva de amplificare/amplitudine ("Gain margin")
 - Rezerva de fază ("Phase margin")

Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

Rezervele domeniului de stabilitate (2)



■ Rezerva de amplificare ("Gain margin", GM)

- Definitie = intervalul cu care câstigul poate fi crescut până la instabilitate.
- Poate fi citit direct de pe diagrama Bode = Distanța verticală între caracteristica amplitudinii semnalului de ieșire și valoarea unitară, măsurată în punctul în care faza este 180° .
- Practic, arată cu cât poate fi crescut K până la instabilitate.
- Orice sistem de primul ordin (un singur pol real negativ) are $GM = \infty$, deoarece faza nu ajunge niciodată la -180° .

■ Rezerva de fază ("Phase margin", PM)

- Definiție = arată cât de departe de instabilitate este condiția de fază.
- Poate fi citit direct de pe diagrama Bode = cu cât este faza deasupra lui -180° , când câstigul este egal cu 1.
- Practic, arată cu cât poate fi faza scăzută până la instabilitate.
- Vom arăta că rezerva de fază se alege din condițiile de proiectare pentru răspunsul tranzitoriu (suprareglare, apoi amortizare).

■ Rezervele de fază și amplificare pot fi reprezentate și pe diagrama Nyquist ca un vector.

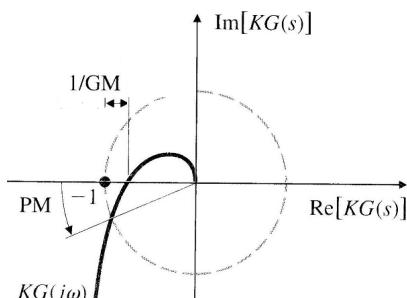
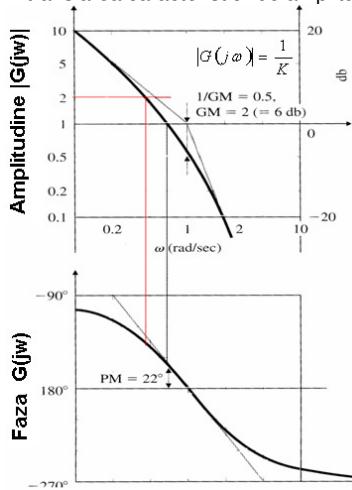
2019 *** Sisteme automate de control

35

Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

Rezervele domeniului de stabilitate (3)

- Se folosește termenul de frecvență de tăiere ("crossover frequency") pentru frecvența la care amplificarea este unitară (denumire venită din studiul filtrelor).
- Se observă ușurința cu care se poate analiza orice schimbare a valorii amplificării K prin translarea caracteristicii de amplitudine.



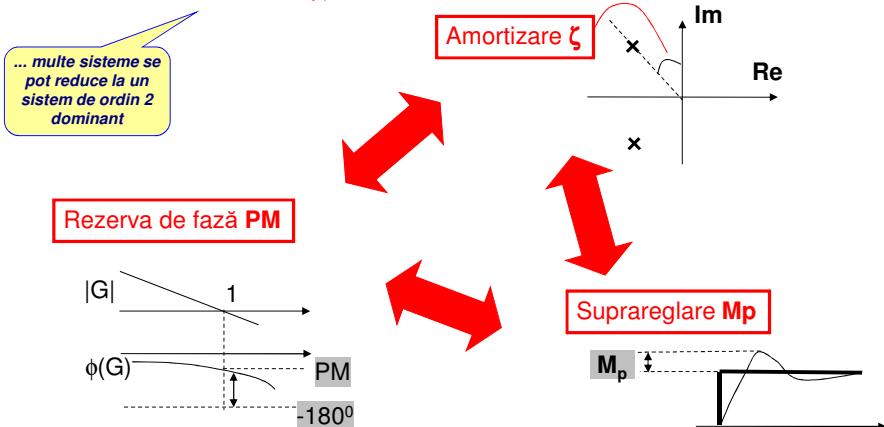
2019 *** Sisteme automate de control

36

Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

Rezerva de fază și amortizarea (1)

- Pentru sisteme de ordinul doi, există o legătură directă între rezerva de fază (diagrama Bode pentru G , din bucla deschisă), amortizare (planul complex), și suprareglare (răspuns tranzitoriu în domeniul timp).



- In general, dacă adăugăm fază prin compensare \rightarrow vom îmbunătăți rezerva de fază \leftrightarrow vom crește amortizarea \leftrightarrow vom scăde suprareglarea.
- Discuție pentru caz particular – poli real negativi.

2019 *** Sisteme automate de control

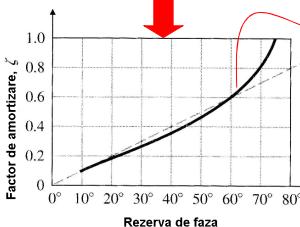
37

Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

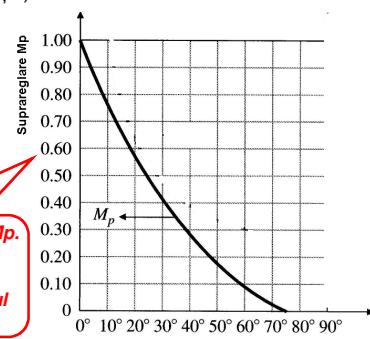
Rezerva de fază și amortizarea (2)

- Fie sistemul cu reacție unită:
$$\begin{cases} \text{bucla_deschisa} & G(s) = \frac{\omega_n^2}{s \cdot (s + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n)} \\ \text{bucla_inchisa} & T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \end{cases}$$
- Se obține pentru rezerva de fază PM (fără demonstrație):

$$PM = \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \xi}{\sqrt{1 + 4 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi}} \right) \quad \xi \equiv \frac{PM}{100} \quad PM < 70^\circ$$



O relație neliniară legă ξ de MP .
(vezi modul 06)
Cumulând cele două
dependențe obținem graficul
acesta.



- Deși această relație aproximativă este adevarată doar pentru sisteme de ordinul doi, este folosită de multe ori ca un punct de plecare pentru proiectarea oricărui sistem.
- Relații de proiectare aproximative se obțin pentru suprareglare (overshoot) M_p , și vârful rezonant, M_r (vezi modul 06).

2019 *** Sisteme automate de control

38

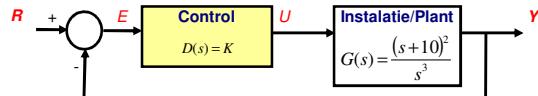
Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Cazuri speciale - Sisteme cu stabilitate conditională (1)

- Am văzut că în majoritatea cazurilor, un sistem este stabil pentru valori reduse a lui K , și devine instabil la valori mari ale lui K .
- Există și situații în care creșterea lui K determină stabilitatea, iar valorile reduse ale lui K determină instabilitate.
 - Astfel de sisteme se numesc sisteme cu stabilitate conditională ("conditionally stable systems").
- Exemplu (v.modul 16, p.2):

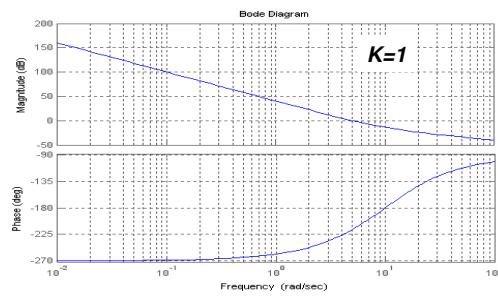
$$G(s) = \frac{(s+10)^2}{s^3}$$

- Dorim să studiem proprietățile de stabilitate în funcție de K .



```
clear;
numG=[1 20 100];
denG=[1 0 0 0];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w); grid on;

figure; rlocus(sysG);
figure; bode(7*sysG,w); grid on;
figure; nyquist(7*sysG,[1e-2,1e2]);
axis([-5,1,-3,3]);
```



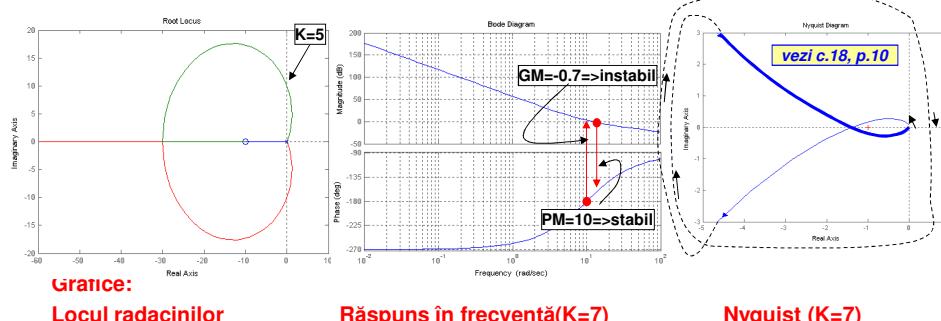
2019 *** Sisteme automate de control

39

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Cazuri speciale - Sisteme cu stabilitate conditională (2)

$$G(s) = \frac{(s+10)^2}{s^3}$$



Gratice:

Locul radacinilor

Răspuns în frecvență(K=7)

Nyquist (K=7)

- Locul rădăcinilor = Arată că sistemul este stabil pentru $K > 5$ și instabil pentru $K < 5$.
- Determinarea marginilor de pe diagramea Bode pentru $K=7$, ar arăta $PM=10^0$, $GM= -0.7$, deci un sistem instabil.
- Aplicarea criteriului Nyquist, arată o încercuire **CW** (sensul acelor de ceasornic, și una **CCW** (invers acelor de ceasornic), deci $N=0$, și se confirmă că sistemul este stabil ($Z=N+P=0+0=0$) pentru $K=7$.
- Concluzie: Utilizarea diagramelor Bode pentru determinarea stabilității sistemelor cu stabilitate conditională NU este recomandată.**

2019 *** Sisteme automate de control

40

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Cazuri speciale - Sisteme cu stabilitate conditională (3)

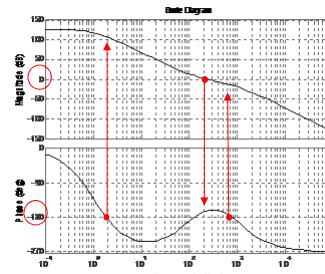
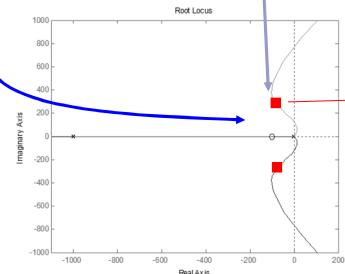
Un alt exemplu (poli și zero-uri multipli, alternanți):

$$G(s) = \frac{100 \cdot (s + 100)^2}{(s + 1)^3 \cdot (s + 1000)^2}$$

Din locul rădăcinilor stabilitatea depinde de valoarea lui K.

Reprezentăm Bode pentru $K=2 \cdot 10^6$.

Observatie O astfel de diagramă Bode se obține uneori la controlul tensiunii unei surse de tensiune continue, când faza scade abrupt în jurul frecvenței de rezonanță a filtrului, apoi crește prin efectul unor zero-uri din sistemul de compensare.



Concluzie: Utilizarea diagramelor Bode pentru determinarea stabilității sistemelor cu stabilitate condițională NU este recomandată.

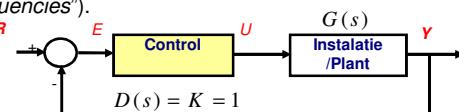
2019 *** Sisteme automate de control

41

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Cazuri speciale - Sisteme cu intersectări multiple ale axei /G=1 (1)

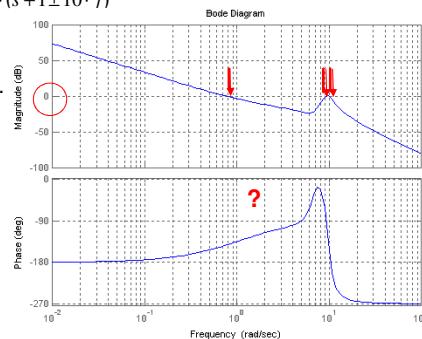
- Observațiile de determinare a stabilității și rezervelor de fază sau amplificare sunt valabile pentru sisteme cu o singură intersecție a axei unitare, în diagrama Bode de amplitudine.
- Trebuie să fim atenți în interpretarea rezultatelor dacă avem mai multe puncte de intersecție a axei ("multiple crossover frequencies").
- Exemplu:



$$G(s) = \frac{85 \cdot (s + 1) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 43.25)}{s^2 \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 82) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 101)} = \frac{85 \cdot (s + 1) \cdot (s + 1 \pm 6.5 \cdot j)}{s^2 \cdot (s + 1 \pm 9 \cdot j) \cdot (s + 1 \pm 10 \cdot j)}$$

- Dorim să studiem proprietățile de stabilitate.

```
clear;
numG=85*conv([1 1],[1 2 43.25]);
denG=conv([1 2 82 0 0],[1 2 101]);
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2,100);
bode(sysG,w); grid on;
figure; rlocus(sysG);
axis([-20,20,-20,20]);
figure; nyquist(sysG ,{1e-2,1e2});
axis([-2,2,-2,2]);
figure;bode(0.6*sysG,w); grid on;
```

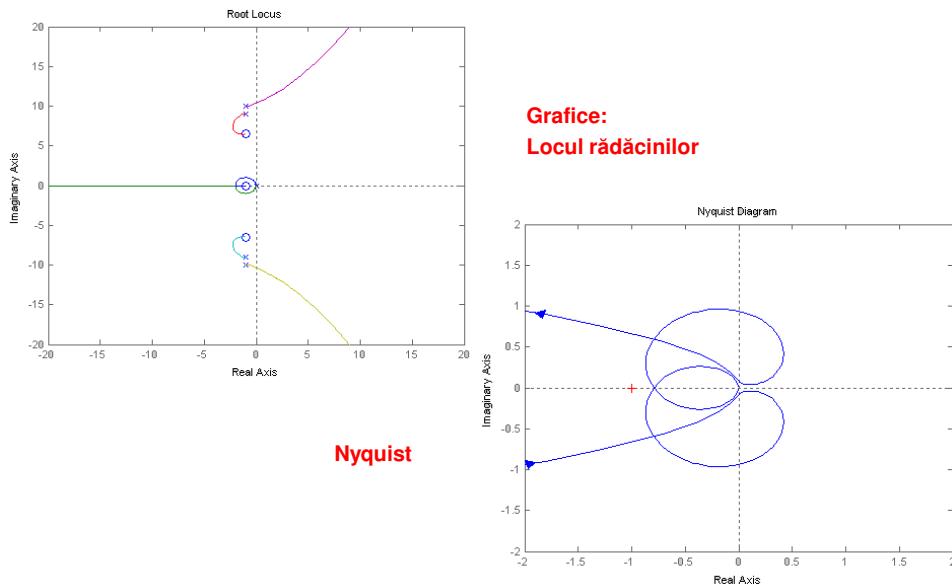


2019 *** Sisteme automate de control

42

Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

Cazuri speciale - Sisteme cu intersectări multiple ale axei $|G|=1$ (2)

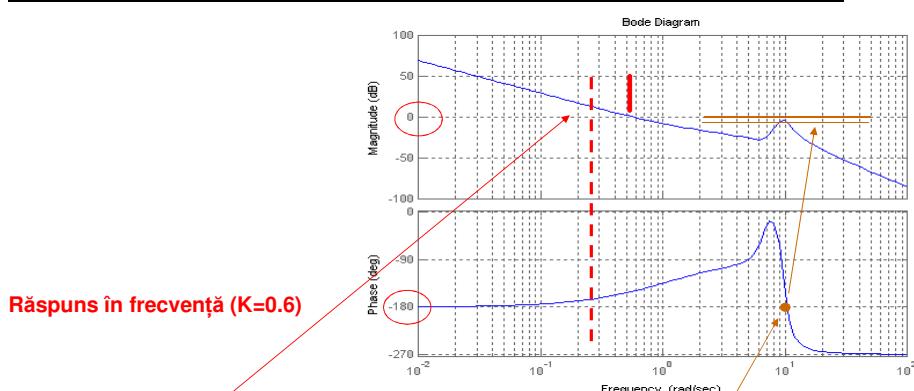


2019 *** Sisteme automate de control

43

Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

Cazuri speciale - Sisteme cu intersectări multiple ale axei $|G|=1$ (3)



- Diagramele Nyquist sau Bode arată că avem 3 frecvențe de trecere a axei unitare, pentru care se pot calcula rezervele de fază individuale.

- Rezerva de amplitudine se determină la 10.4 rad/sec, și este de 1.26.

Solutie Stabilitatea acestui sistem s-ar îmbunătăți dacă am scăde câstigul K , astfel incât să avem o singură trecere a axei unitare și o determinare mai clară a rezervelor de amplitudine și fază.

2019 *** Sisteme automate de control

44

Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

Relatia Bode intre amplitudine si fază (1)

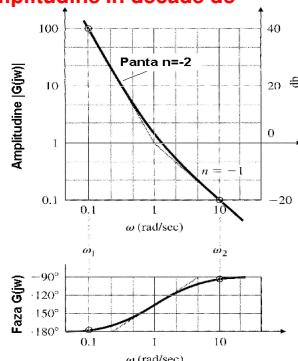
Teorema: Pentru orice sistem stabil, de fază minimă (fără poli sau zerouri în partea dreaptă a planului complex), faza lui $G(j\omega)$ este într-o relație unică cu amplitudinea lui $G(j\omega)$.

Consecințele sunt mai importante decât teorema:

- Dacă graficul amplitudinii are aceeași pantă pentru cel puțin o decadă de variație a frecvenței, atunci faza este dată de

$\angle G(j\omega) \approx n \cdot 90^\circ$ unde n reflectă panta caracteristicii de amplitudine în decade de amplitudine pe decade de frecvență.

- Exemplu:



Aplicatie în proiectarea unui sistem de control

- Pentru stabilitate, dorim ca faza să fie $> -180^\circ$ astfel încât $PM > 0$.
- Putem ajusta $|KG(j\omega)|$ astfel încât să avem o pantă $n = -1$ la frecvența de tăiere.
- Dacă $n = -1$ pentru o decadă înainte și o decadă după ω_c , atunci $PM = 90^\circ$, iar dacă avem o decadă în jurul lui ω_c , atunci PM este suficientă.**

2019 *** Sisteme automate de control

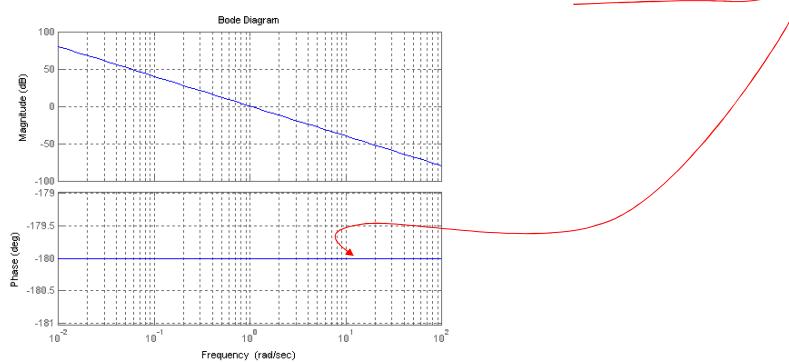
45

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Relatia Bode intre amplitudine si fază (2). Exemplu.

- Pentru a ilustra proiectarea pe baza relației amplitudine-fază, să considerăm un sistem cu funcția de transfer: $G(s) = \frac{1}{s^2}$
- Se dorește proiectarea care să asigure o lărgime de bandă $BW = 0.2\text{rad/sec}$, pentru sistemul în buclă închisă.
- Etapele de proiectare sunt:

- Desenați $|G(s)|$. Se observă o pantă = -2, care nu asigură destulă rezervă de fază.



2019 *** Sisteme automate de control

46

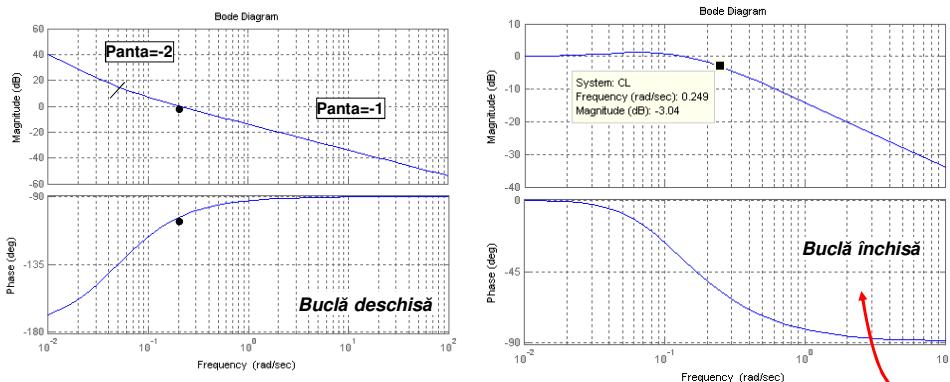
Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Relația Bode între amplitudine și fază (3). Exemplu.

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

2. Modificați desenul să includă o lege de compensare PD $|D(s)|$, cu frecvență de cel puțin 4 ori mai mică decât $BW = 0.20\text{rad/sec}$.

□ Deci $\omega_1 = 0.05\text{rad/sec}$ ($T_D = 20$), astfel încât panta să fie $n = -1$ la $\omega = 0.20\text{rad/sec}$.



3. Deoarece $T = DG/(1+DG)$ în buclă închisă, dorim ca $|DG| = 100$ la frecvența de tăiere, astfel încât $|T(s)| \sim 1$. Deci $D(s) = 0.01 * (20^*s + 1)$.
4. La implementarea practică, mai trebuie să adăugăm un pol la frecvențe foarte mari.
5. Verificați rezultatele.

2019 *** Sisteme automate de control

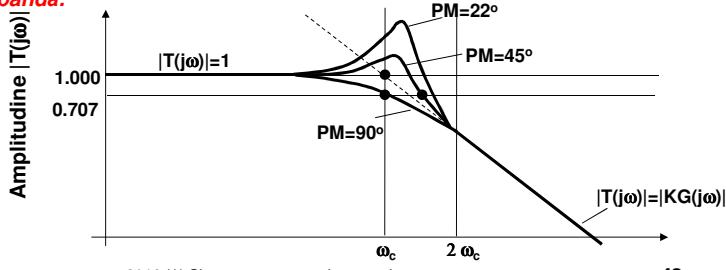
47

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Răspunsul în frecvență al sistemului în buclă închisă (1)

- Vom încerca să stabilim o legătură între frecvența de tăiere a sistemului în buclă deschisă ω_c și lărgimea de bandă (BW) a sistemului în buclă închisă.
- $|T(j\omega)| = \left| \frac{K \cdot G(j\omega)}{1 + K \cdot G(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} 1, \omega \ll \omega_c \\ |KG|, \omega \gg \omega_c \end{cases}$
- Stim că în vecinătatea frecvenței de tăiere, avem prin definiție $|KG| \sim 1$, și $|T|$ depinde puternic de rezerva de fază a sistemului în buclă deschisă.
 - O rezervă de fază $PM = 90^\circ$, înseamnă că $|T| = 0.707$
 - O rezervă de fază $PM = 45^\circ$, înseamnă că $|T| = 1.310$.
- Concluzie: $\omega_c \leq BW \leq 2 \cdot \omega_c$

Condițiile pentru BW a sistemului în buclă închisă se convertesc în condiții pentru rezerva de fază PM a sistemului în buclă deschisă ← Putem proiecta după lărgimea de bandă.



2019 *** Sisteme automate de control

48

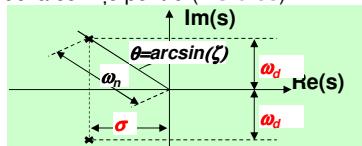
Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Răspunsul în frecvență al sistemului în buclă închisă (2)

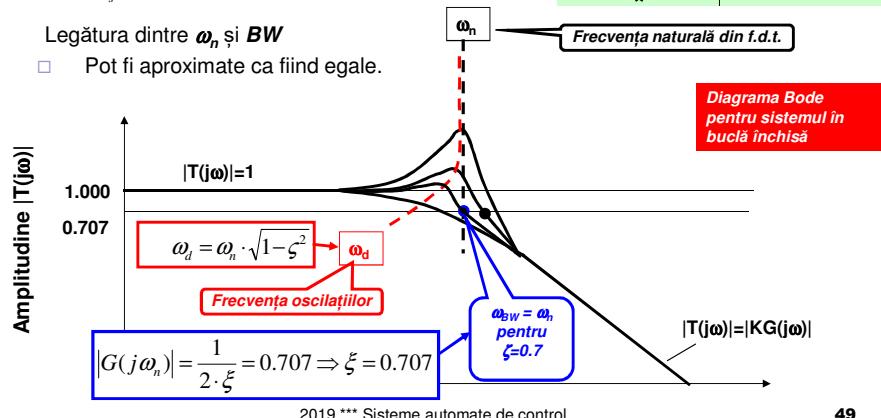
Condițiile pentru BW (bucla închisă) se convertesc în condiții pentru PM (bucla deschisă).

- Datate de proiectare pentru răspunsul tranzitoriu conduc la cerințe pentru (v.ora 06)

$$\begin{aligned}\omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} \\ \zeta &\geq \zeta(M_p) \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{t_s}\end{aligned}$$



- Legătura dintre ω_n și **BW**
 - Pot fi aproximăte ca fiind egale.



2019 *** Sisteme automate de control

49

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Observații finale

- Rezerva de amplificare ("Gain margin")
 - Definiție = factorul cu care amplificarea poate fi crescută până la instabilitate.
 - Poate fi citit direct de pe diagrama Bode = distanța verticală între caracteristica amplificării și un căstig egal cu 1, măsurat în punctul în care faza este 180° .
 - Practic, arată că poate fi crescut K până la instabilitate.
 - Orice sistem de primul ordin are $GM = \infty$
- Rezerva de fază ("Phase margin")
 - Definiție = cât de departe de instabilitate este condiția de fază.
 - Poate fi citit direct de pe diagrama Bode = cu cât este faza deasupra lui -180° , când căstigul este egal cu 1.
 - Practic, arată că poate fi faza scăzută până la instabilitate.
- Situatii speciale
 - Sisteme cu stabilitate condițională
 - Sisteme cu intersectări multiple ale axei unitare.

Teorema (legatura amplitudine-fază):

Pentru orice sistem stabil și de fază minimă (fără poli sau zerouri în partea dreaptă a planului complex), faza lui $G(j\omega)$ este într-o relație unică cu amplitudinea lui $G(j\omega)$.

2019 *** Sisteme automate de control

50

Cursul #05

Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Ora 20 = Proiectarea sistemelor PD + Proiectarea sistemelor cu avans de fază.

Compensarea dinamică

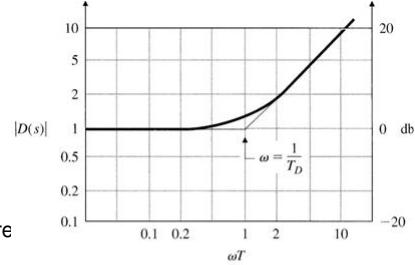
- Am discutat metode de analiză în frecvență pentru cazul unui control proporțional (K).
- De multe ori este necesar să adăugăm componente dinamice (de compensare) pentru a îndeplini cerințele de proiectare.

Compensarea PD

- Considerăm:
- $D(s) = (T_D \cdot s + 1)$
- Efectele acestui control se văd deasupra frecvenței ($1/T_D$):

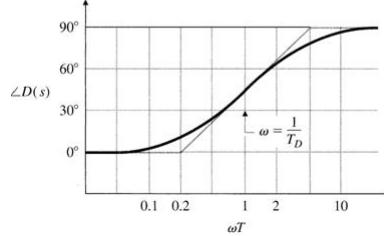
 - Adaugă fază
 - Adaugă +1 la panta caracteristicii de amplificare

- Scopul este de a îmbunătăți stabilitatea



Repetăm consecința teoremei amplitudine-fază

Dacă $n = -1$ pentru o decadă înainte și o decadă după ω_c , atunci $PM = 90^\circ$, iar dacă avem o decadă în jurul lui ω_c , atunci PM este suficientă.



Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Compensarea cu avans de fază

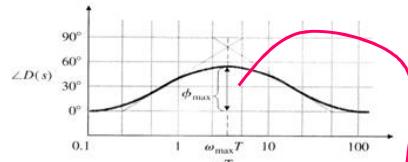
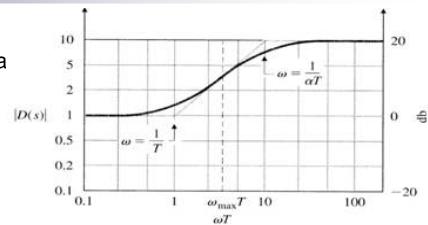
- Pentru a limita amplificarea de frecvență înaltă a compensării PD, se adaugă un pol la o frecvență mult mai înaltă decât **zero-ul** caracteristic compensării PD.

- De asemenei, în caz practic, este imposibil de implementat un diferențiator ideal.

- Legea de control este data de:

$$D(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha < 1$$

- Rolul este același, de a adăuga fază, dar cu amplificare mai redusă la frecvențe înalte.



Adăugarea de fază este utilă pentru o îmbunătățire a amortizării (*Remember* $\zeta \sim PM/100$*).

- Faza adăugată de o compensare cu avans de fază este: $\phi = \tan^{-1}(T\omega) - \tan^{-1}(\alpha T\omega)$

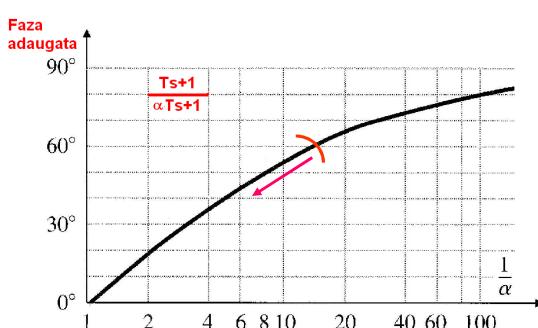
cu valoarea maximă $\sin \phi_{\max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ @ $\omega_{\max} = \frac{1}{T \cdot \sqrt{\alpha}}$ (între cele două frecvențe)

- Dacă compensarea este exprimată ca $D(s) = \frac{s+z}{s+p}$ atunci $\omega_{\max} = \sqrt{|z| \cdot |p|}$

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Soluții alternative și proiectare optimală

- Valoarea lui α determină faza maximă adăugată de compensarea cu avans de fază.



$$D(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha < 1$$

- Totuși adăugarea unei faze mari poate produce amplificare mare la frecvențe înalte, compromițând sensibilitatea la zgromot.
- Se consideră un compromis optim la adăugarea unei faze maxime de **60°**.
- Pentru adăugarea unei faze mai mari decât **60°**, se poate considera un compensator cu avans de fază dublu.

$$D(s) = \left(\frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \right)^2$$

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Etape de proiectare

1. Determinați câștigul de buclă deschisă K din condiția de eroare staționară sau de lărgime de bandă (BW).
1. Condiția de eroare staționară se transformă în condiții pentru constantele de eroare în funcție de tipul sistemului și de semnalul de intrare considerat (v. [Curs 5, pag.15](#))
2. Pentru îndeplinirea condițiilor de lărgime de bandă (**BW**), considerați K astfel încât frecvența de tăiere (amplificare unitară) a sistemului în buclă deschisă este lărgimea de bandă dorită (v. [Curs 5, pag. 49](#)).
2. Evaluati rezerva de fază (PM) a sistemului fără compensație, folosind valoarea lui K dedusă anterior.
3. Adăugați o rezervă adițională de aproximativ 10^0 și determinați faza necesară.
4. Determinați α din figura de la pagina 4 (v. [Curs 5, pag. 54](#)).
5. Incepți o serie de încercări ("trial and error") plecând de la alegerea lui ω_{max} la frecvența de tăiere, deci alegeți un pol la $(1/T) = \omega_{max}^\sqrt{\alpha}$, și un zero la $(1/\alpha T) = \omega_{max}^{1/\alpha}$.
6. Desenați răspunsul în frecvență al sistemului compensat și verificați rezerva de fază (PM). Dacă nu este suficientă, iterați proiectarea de la pasul 5.

Notă = Dacă condițiile par imposibil de satisfăcut, considerați un compensator dublu.

ω_{max} = frecvența la care
vrem să adăugăm cea mai
multă fază.

2019 *** Sisteme automate de control

55

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Exemplul 1 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (1)

- Să considerăm sistemul dat de legea:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

și cerințele de proiectare: eroare staționară mai mică decât **0.1** pentru un semnal de intrare de tip rampă, și o suprareglare (la semnal treaptă) **Mp < 25%**.

Soluție:

- Adoptăm o compensare cu avans de fază de forma: $D(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha < 1$
 - Eroarea staționară la semnal rampă pentru cazul unui sistem stabil, cu compensare cu avans de fază **D(s)** și reacție unitară este:
- $$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + K \cdot D(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + K \cdot D(s) \cdot \frac{1}{s \cdot (s+1)}} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{K \cdot D(0)} = \frac{1}{K}$$
- Deci $KD(0) \geq 10$. Adoptăm $K = 10$, și presupunem un câștig unitar pentru **D(s)**.
 - Am reprezentat relația neliniară între suprareglare și rezerva de fază (v. [Curs 5, pag.15](#)). $Mp < 25\% \rightarrow PM = 45^\circ$.

2019 *** Sisteme automate de control

56

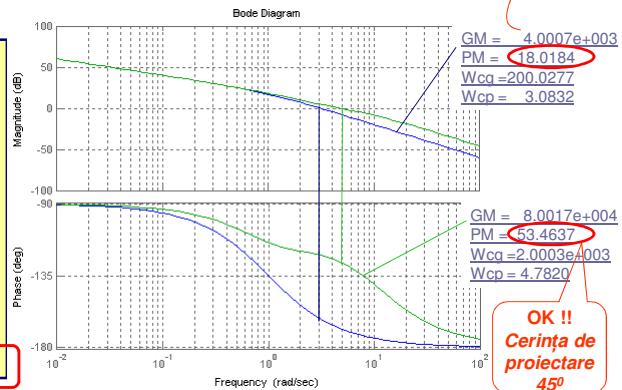
Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Exemplul 1 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (2)

- Reprezentăm diagramele Bode pentru sistemul $G(s)$ în buclă deschisă (ALBASTRU).
- Audem PM=20°; deci am avea nevoie de o diferență de 25°.
- Deoarece polul lui $G(s)$ este aproape de frecvența de tăiere (~ 3rad/sec), trebuie să plănuim o diferență de fază mai mare. De exemplu 40°. Din graficul de la pagina 54, $1/\alpha=5$.
- Prin încercări, considerăm un **zero** la 2rad/sec și un **pol** la 10rad/sec.
 - Teoria ne-ar fi sugerat **zero** la 1.34 rad/sec ($3/\sqrt{5}$) și **pol** la 6.5 rad/sec.

```
clear;
numG=10;
denG=[1 10];
sysG=tf(numG,denG);
w=logspace(-2,2);
bode(sysG,w); grid on; hold on;
[mag,phase,w]=bode(sysG);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)

numD=5*[1 2]; denD=[1 10];
sysD=tf(numD,denD);
OL=sysD*sysG;
w=logspace(-2,2);
bode(OL,w);
[mag,phase,w]=bode(OL);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
```



2019 *** Sisteme automate de control

57

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Exemplul 2 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (1)

Să considerăm instalația (sistemu) dat de legea:

$$K \cdot G(s) = K \cdot \frac{10}{s \cdot \left(\frac{s}{2.5} + 1 \right) \cdot \left(\frac{s}{6} + 1 \right)}$$

Să se proiecteze o lege de compensare care să conducă la un sistem în buclă închisă, cu reacție unitară, cu rezervă de fază **PM=45°** și cu **K_v=10** (de exemplu, provenite din date de proiectare pentru suprareglare – [v.curs 5, pag.38](#); și, respectiv, eroare staționară – [v.curs5, pag.15](#))

$$D(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha < 1$$

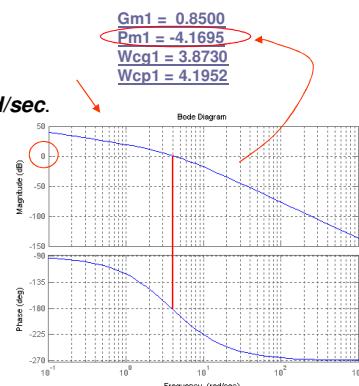
Solutie:

- Pentru **K=1** ↔ avem **K_v=10**.
- Desenăm diagrama Bode ($1^*G(s)$). **PM = -4°** la $\omega_c = 4$ rad/sec.
- Calculăm faza dorită $F = 45^\circ + 10^\circ - (-4^\circ) = 59^\circ$.
- Din figura de la pagina 4, citim $\alpha \approx 0.07$.
- Noua frecvență de tăiere ar fi puțin mai mare decât cea pentru **G(s)**, $\omega_c=4$ rad/sec.

Putem începe iterarea cu $\omega_{zero}=2$ și $\omega_{pol}=30$.
6. Diagrama **Bode** pentru această compensație.

$$D(s) = \frac{\frac{s}{2} + 1}{\frac{s}{30} + 1}$$

- Producă o rezervă de fază **PM=28°** - insuficient.



2019 *** Sisteme automate de control

58

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Exemplul 2 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (2)

8. Considerăm un compensator dublu

$$D(s) = \frac{\frac{s}{2} + 1}{30} \cdot \frac{\frac{s}{3} + 1}{45}$$

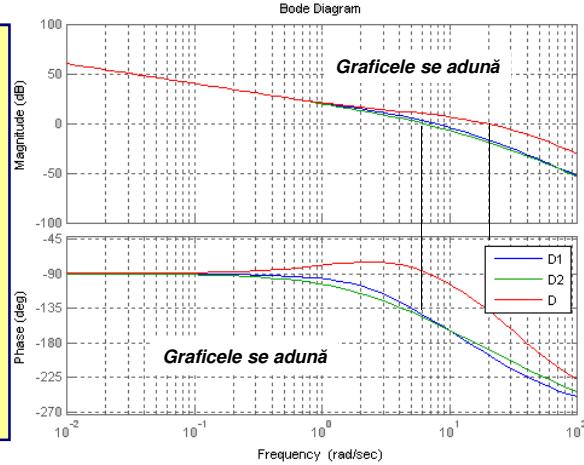
OK!

Pm1 = 28.3528
Pm2 = 33.3608
Pm = 45.4019

```
clear;
numG=150;
denG=conv([1 2.5 0],[1 6]);
sysG=tf(numG,denG);
numD1=[0.5 1];
denD1=[1/30 1];
sysD1=tf(numD1,denD1);
numD2=[1/3 1];
denD2=[1/45 1];
sysD2=tf(numD2,denD2);

OL1=sysD1*sysG;
OL2=sysD2*sysG;
OL3=sysD1*sysD2*sysG;
w=logspace(-2,2);
bode(OL1,OL2,OL3,w); grid on; hold on;
legend('D1','D2','D');

[Gm1,Pm1,Wcg1,Wcp1] = MARGIN(OL1,w);
[Gm2,Pm2,Wcg2,Wcp2] = MARGIN(OL2,w);
[Gm3,Pm3,Wcg3,Wcp3] = MARGIN(OL3,w);
```



2019 *** Sisteme automate de control

59

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Exemplul 3 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (1)

Se consideră instalația cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{100}{s \cdot (s+1) \cdot (s+10)}$$

Proiectați folosind diagramele Bode un compensator cu avans de fază **KD(s)** pentru care obținem o rezervă de fază **PM > 50°** iar sistemul în buclă închisă are o lărgime de bandă (bandwidth) **w_{BW} > 2 rad/sec.**

.....

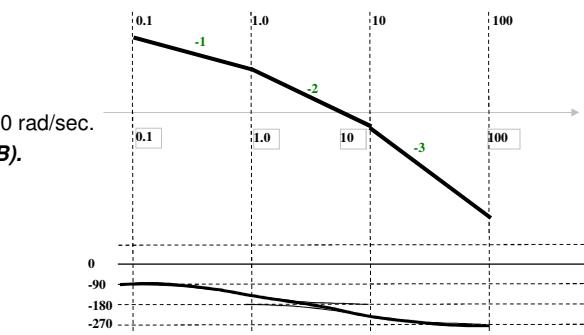
Desenăm diagrama Bode pentru sistemul fără compensație.

$$G(s) = \frac{10}{s \cdot (s+1) \cdot \left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

Frecvențele de interes 0, 1 și 10 rad/sec.

$s = 10j$ → Câștig ~ 0.707 (-3dB).

$s = 50j$ → Câștig ~ -41 dB.



2019 *** Sisteme automate de control

60

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Exemplul 3 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (2)

(1) Lărgimea de bandă a sistemului în buclă închisă $w_{BW} > 2\text{rad/sec}$ se poate aproxima cu frecvența de taiere w_c a sistemului KDG în buclă deschisă.

Trebuie estimat câstigul legii de compensare $KD(s)$ astfel încât $w_c = 2\text{rad/sec}$.

$$|G(j \cdot 2)| = \left| \frac{100}{j2 \cdot (j \cdot 2 + 1) \cdot (j \cdot 2 + 10)} \right| = \frac{100}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{104}} = \frac{50}{\sqrt{520}} = 2.192 \approx 6.81\text{dB}$$

Adoptăm $KD(j2) = 0.456$ (astfel încât $0.456 \cdot 2.192 = 1$).

(2) Să adăugăm fază la această frecvență $w_c = 2 \text{ rad/sec}$.

Funcția de transfer $G(s)$ are faza aproximativ -180° la $w_c = 2 \text{ rad/sec}$.

Ne propunem să adăugăm $50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$ (deoarece vrem să fim siguri că obținem $\text{PM} > 50^\circ$, considerăm și o rezervă de 10°). Din tabel, citim $\alpha = 0.05$.

$$\text{Deci } D(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \omega_{\max} = \frac{1}{T \cdot \sqrt{\alpha}} \approx \omega_c \Rightarrow T \cdot \sqrt{0.05} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{T} = 0.447 \Rightarrow \frac{1}{\alpha T} = 9$$

$$D(s) = 20 \cdot \frac{s + 0.447}{s + 9} \Rightarrow |D(j2)| = 20 \cdot \frac{\sqrt{4 + 0.447 \cdot 0.447}}{\sqrt{4 + 81}} = \frac{20 \cdot 2.04}{9.21} = 4.44 \Rightarrow K = 0.1$$

(3) Trebuie să desenăm diagrama Bode pentru

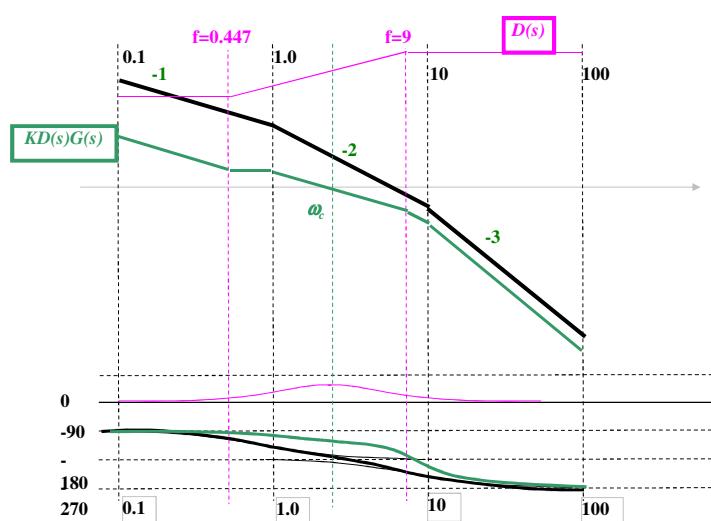
$$K \cdot D(s) \cdot G(s) = 0.1 \cdot 20 \cdot \frac{s + 0.447}{s + 9} \cdot \frac{100}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 10)}$$

2019 *** Sisteme automate de control

61

Capitolul 6 *** Răspunsul în frecvență

Exemplul 3 – Proiectarea unei compensări cu avans de fază (3)



2019 *** Sisteme automate de control

62

Observații finale – Recapitulare etape de proiectare

1. Determinați câștigul de buclă deschisă K din condiția de eroare staționară sau de lărgime de bandă (BW).
 1. Condiția de eroare staționară se transformă în condiții pentru constantele de eroare în funcție de tipul sistemului și de semnalul de intrare considerat.
 2. Pentru îndeplinirea condițiilor de lărgime de bandă (BW), considerați K astfel încât frecvența de tăiere a sistemului în buclă deschisă este de două ori mai mică decât lărgimea de bandă dorită pentru sistemul în buclă închisă.
 2. Evaluăți rezerva de fază (PM), a sistemului fără compensație, folosind valoarea lui K dedusă anterior.
 3. Adăugați o rezervă/margine de aproximativ 10^0 și determinați faza necesară.
 4. Determinați α din figura de la pagina 4.
 5. Incepeți o serie de încercări ("trial and error") plecând de la alegerea lui ω_{max} la frecvența de tăiere, deci alegeți un zero la $(1/T)=\omega_{max}/\alpha$, și un pol la $(1/\alpha T)=\omega_{max}/\alpha$.
 6. Desenăți răspunsul în frecvență al sistemului compensat și verificați rezerva de fază (PM). Dacă nu este suficientă, iterați proiectarea de la pasul 5.
- Dacă condițiile par imposibil de satisfăcut, considerați un compensator dublu.



TEMA DE CASĂ #5

Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 17 mai.



Capitolul 6 *** Raspunsul in frecventa

Problema 1

Determinati domeniul de variatie a lui K pentru care urmatorul sistem este stabil. In acest scop desenati diagramele Bode pentru $K=1$ si imaginati-vă ca graficul de amplitudine se deplaseaza in sus sau jos cu valoarea lui K .

Verificati raspunsul printre-un desen rapid al locului radacinilor.

$$KG(s) = \frac{K}{(s+10) \cdot (s+1)^2}$$

Problema 2

Proiectati un compensator cu avans de faza astfel incat $PM > 50$, si largimea de banda (bandwidth) $\omega_{BW} > 20\text{rad/sec}$, folosind diagramele Bode, pentru functia de transfer in bucla deschisa:

$$G(s) = \frac{50,000}{s \cdot (s+10) \cdot (s+50)}$$

SOLUTII PENTRU TEMA DE CASA NUMARUL 5

Problema 1

Determinati domeniul de variație a lui K pentru care urmatorul sistem este stabil. In acest scop desenati diagramele Bode pentru $K=1$ si imaginati-vă ca graficul de amplitudine se deplasează în sus sau jos cu valoarea lui K .

Verificati raspunsul printr-un desen rapid al locului radacinilor.

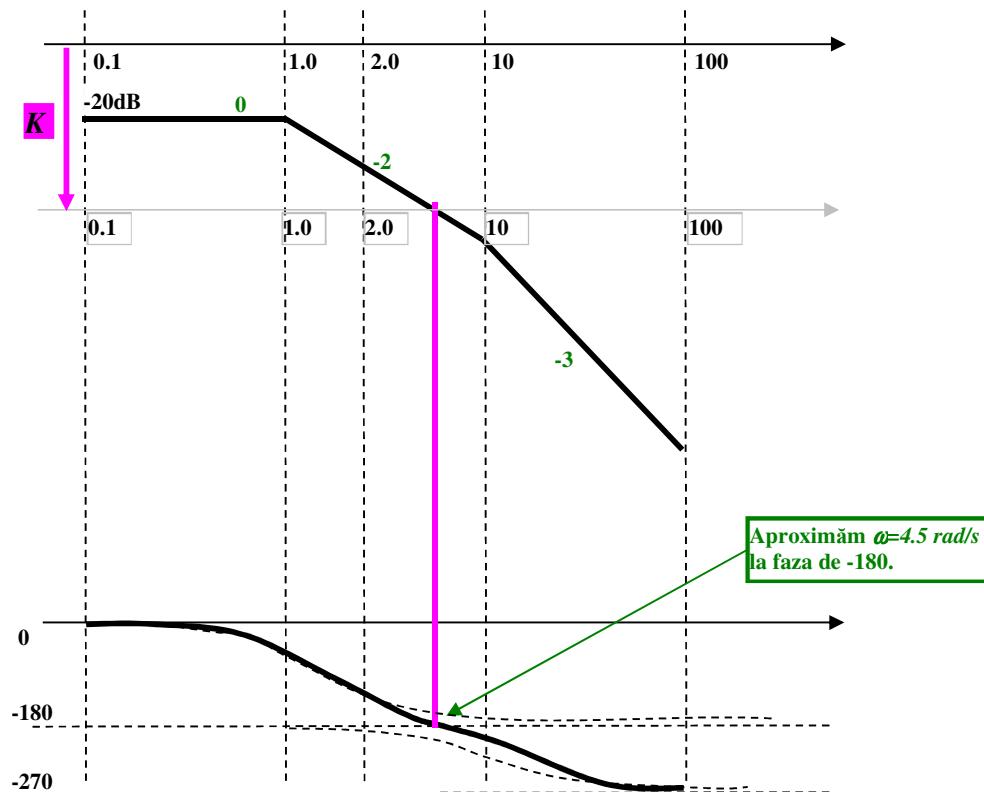
$$KG(s) = \frac{K}{(s + 10) \cdot (s + 1)^2}$$

Solutie:

$$KG(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{K}{\left(\frac{s}{10} + 1\right) \cdot (s + 1)^2}$$

Frecvențele de interes sunt 1 și 10.

La $s=0$, avem $G(0)=1/10=0.1 \Rightarrow A=-20\text{dB}$.



Condiția de rezervă de amplitudine

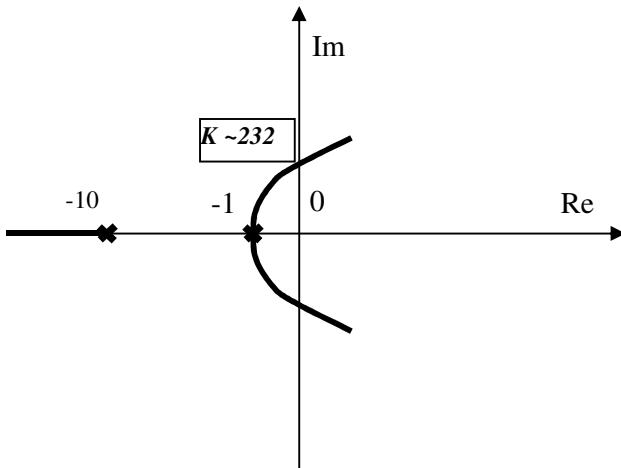
$$KG(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{K}{\left(\frac{j \cdot 4.5}{10} + 1\right) \cdot (j \cdot 4.5 + 1)^2} \rightarrow |KG| = |K| \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{1.2}} \cdot \frac{1}{21.25} = |K| \cdot \frac{1}{232} < 1 \rightarrow K < 232$$

Locul radacinilor:

Avem 3 ramuri, care pleaca din polii sistemului aflati la -10 și -1 (dublu).

Nu avem nici un zero, deci toate 3 ramurile sunt asymptote.

Unghurile asymptotelor sunt la $180/3=60$.



Problema 3

Proiectați un compensator cu avans de fază astfel încât $PM > 50$, și largimea de banda (bandwidth) $w_{BW} > 20 \text{ rad/sec}$, folosind diagramele Bode, pentru funcția de transfer în buclă deschisă:

$$G(s) = \frac{50000}{s \cdot (s + 10) \cdot (s + 50)}$$

Solutie

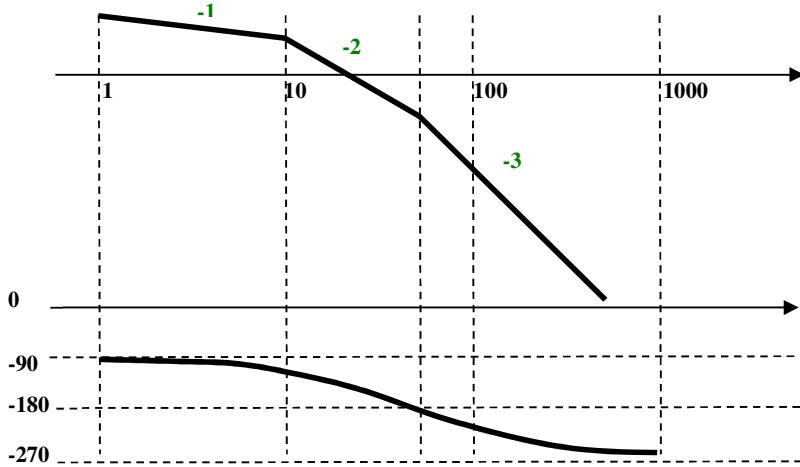
Desenam diagrama Bode pentru sistemul fără compensație.

$$G(s) = \frac{100}{s \cdot \left(\frac{s}{10} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{50} + 1\right)}$$

Frecvențele de interes sunt la 0, 10 și 50 rad/sec.

La $s=10*j$, avem un castig de aproximativ 4.47 (13dB).

La $s=50*j$, avem un castig de aproximativ 0.28 (-10dB).



Putem estima că ω_c este între 10 și 50 rad/sec, poate în jur de 20 rad/sec.

Să adăugăm fază la această frecvență. Ne propunem să adăugăm 60° .

Deoarece vrem să fim siguri că obținem $PM > 50^\circ$, considerăm și o rezervă de 10° .

Din graficul de la curs (pagina 54), citim $\alpha = 0.05$.

$$D(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}$$

Pentru a avea fază maximă adăugată în jur de 20 rad/sec, trebuie să selectăm

$$\frac{1}{T \cdot \sqrt{\alpha}} = \omega_c \Rightarrow T \cdot \sqrt{0.05} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{T} = 4.47 \approx 5 \Rightarrow \frac{1}{\alpha T} = 100$$

Deci:

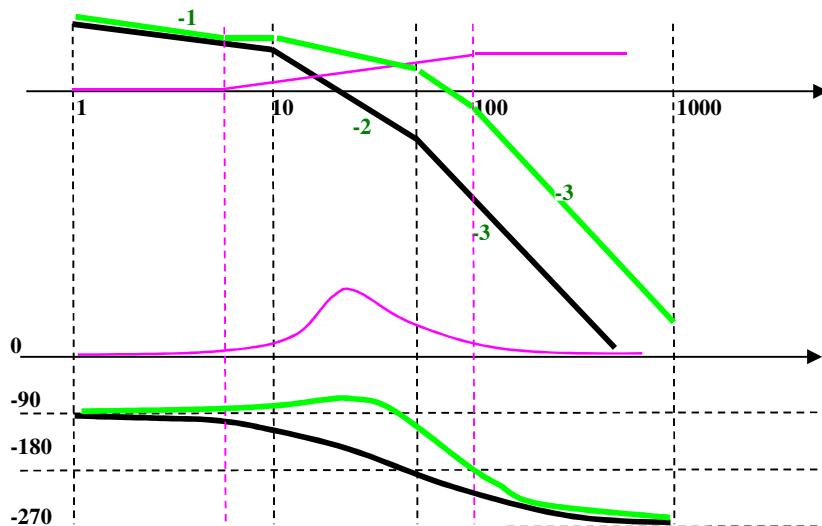
$$D(s) = 20 \cdot \frac{s + 5}{s + 100}$$

Trebuie să redesenăm diagrama Bode pentru:

$$D(s) \cdot G(s) = 20 \cdot \frac{s + 5}{s + 100} \cdot \frac{50000}{s \cdot (s + 10) \cdot (s + 50)}$$

Putem să facem asta prin adunare pe graficul anterior =>

"instalație în negru + compensare în roz = DG în verde".



Se obține reprezentarea grafică, cu linie verde.

Aceasta trebuie să taie axa de amplificare unitara (zero dB), la $w = 20\text{rad/sec}$.

K se alege din această condiție (tragem curba verde în jos):

$$|D(j20) \cdot G(j20)| = \left| 20 \cdot \frac{j \cdot 20 + 5}{j \cdot 20 + 100} \cdot \frac{50000}{j \cdot 20 \cdot (j \cdot 20 + 10) \cdot (j \cdot 20 + 50)} \right| = 20 \cdot \frac{20.61}{20 \cdot 5.1} \cdot \frac{25}{2.23 \cdot 5.38}$$
$$= 8.42$$

$$K = 1/8.42 = 0.118$$



Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2

Cursul 06

Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- Modul 21 = Proiectarea sistemelor PI + Proiectarea sistemelor cu întârziere de fază.
- Modul 22 = Considerații practice legate de proiectare.

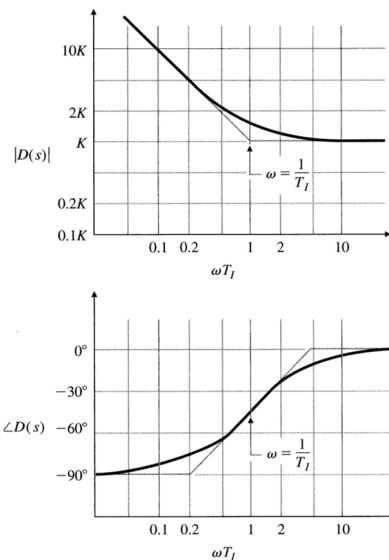
Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Modul 23 = Transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații de stare. Forme Canonice.
- Modul 24 = Proiectarea legii de control.

- Modul 21 = Proiectarea sistemelor PI + Proiectarea sistemelor cu întârziere de fază.

Compensare PI

- Utilizată dacă este important să reducem eroarea statioanară și/sau să menținem lărgimea de bandă (**BW**) la valori scăzute.
- Definiție:
$$D(s) = \frac{K}{s} \cdot \left(s + \frac{1}{T_I} \right)$$
- Caracteristica ideală are câștig infinit la frecvența zero (care reduce eroarea staționară) cu prețul scăderii fazei la frecvențe joase ($< 1/T_I$).
- Condiții contradictorii:
 - Pentru un câștig mare la frecvențe joase, trebuie să avem $(1/T_I)$ mare.
 - Pentru limitarea scăderii fazei, această frecvență ar trebui să fie la frecvențe mult mai joase decât frecvența de tăiere ($1/T_I \ll \omega_c$).

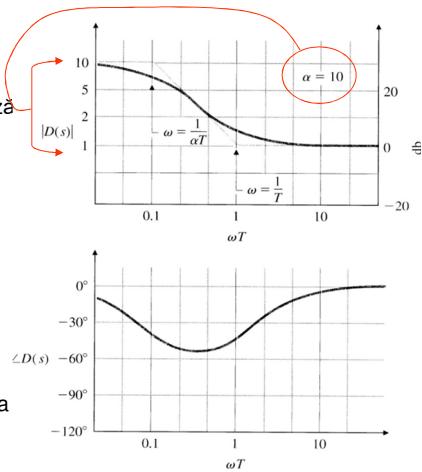


Compensarea cu întârziere de fază

- Compensarea cu întârzierea de fază aproximează controlul PI.
- Definiție:

$$D(s) = \alpha \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha > 1$$

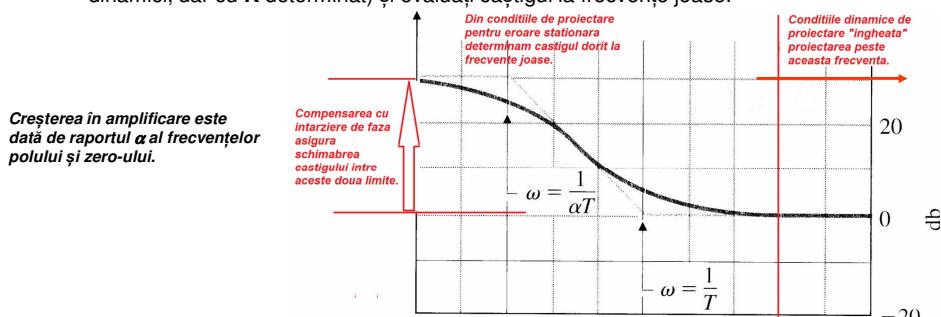
- Se observă
 - un **pol** la frecvențe joase care produce creșterea în amplitudine și scăderea fazei.
 - un **zero** la frecvențe înalte care reduseaza faza la valori crescute.



- Obiectivul de proiectare este de a adăuga un câstig α la frecvențe joase \leftrightarrow îmbunătățirea regimului staționar fără deteriorarea regimului tranzitoriu.

Proiectarea unei compensări cu întârziere de fază

1. Determinați câstigul de buclă deschisă K ce va satisface cerințele de rezervă de fază fără compensare (dată de condițiile de proiectare pentru regimul dinamic).
2. Desenați diagrama Bode pentru sistemul fără compensare dinamică (fără termeni dinamici, dar cu K determinat) și evaluați câstigul la frecvențe joase.



3. Determinați α pentru a satisface condițiile de proiectare pentru eroarea staționară (α va permite creșterea amplificării la frecvențe joase la valoarea dorită).
4. Determinați frecvența pentru **zero**-ul compensatorului cu întârziere de fază pentru a fi cu o decadă mai jos decât noua frecvență de tăiere ω_c .
5. Se determină **pol**-ul la $\omega = 1/(\alpha T)$.
6. Se repetă proiectarea (iterativ) până la satisfacerea tuturor condițiilor de proiectare.

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (1)

Se consideră sistemul

$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

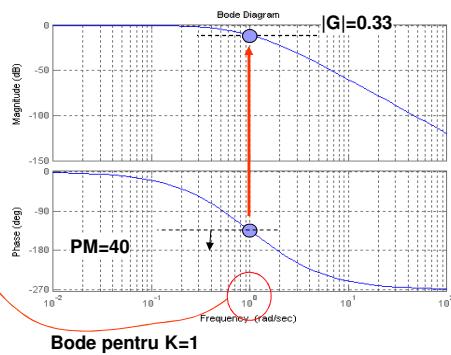
Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p=9$ [de exemplu, ca la modul 11, p.6, "Urmărirea unei referințe variabile", eroarea staționară la semnal treaptă pentru sistem fără $1/s$, este $1/(1+K_p)$]

Soluție:

1. Desenăm diagrama Bode pentru $G(s)$.

Observăm $PM > 40^\circ$, se obține pentru $\omega_c \leq 1 \text{ rad/sec}$, dacă $K \sim 3$. (din $|G| * K = 1$)

```
clear;
numG=1;
den2=conv([1 0.5],[1 1]);
denG=conv(den2,[1 2]);
sysG=tf(numG,denG);
bode(sysG); grid on;
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

7

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (2)

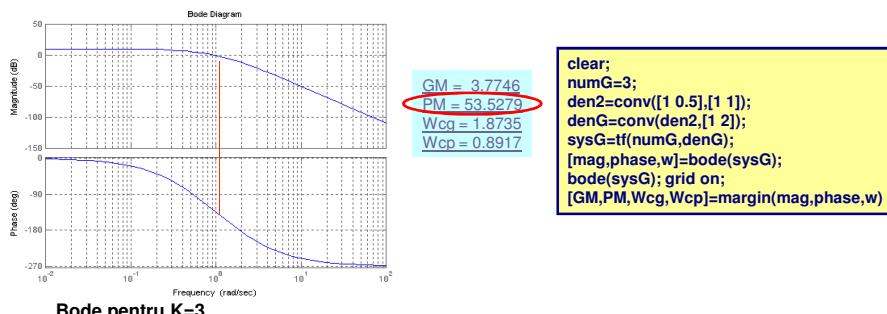
Se consideră sistemul

$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p=9$.

Soluție (cont.):

2. Redesenăm diagrama Bode pentru $3 \cdot G(s)$ și/sau determinăm PM cu MATLAB ptr $3 \cdot G(s)$.



Determinăm $PM = 53^\circ$ și câstigul de frecvență joasă $K = 3$.

Se acceptă $PM = 53^\circ > 40^\circ$ deoarece bănuim că vom înrăutăți PM la adăugarea compensării

2019 *** Sisteme Automate de Control

8

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (3)

Se consideră sistemul

$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p=9$.

Soluție (cont.):

3. Câștigul de joasă frecvență (ce determină eroarea staționară), trebuie crescut de 3 ori, deci $\alpha = 3$ pentru ca să obținem $K_p = 9$.
4. Alegem frecvența pentru zero mult mai mică decât $\omega_c = 1 \text{ rad/sec}$. Adoptăm $\text{zero} = 0.2 \text{ rad/sec}$ ($T = 5$).
5. Adoptăm și frecvența pentru pol, la 0.06 rad/sec ($T = 5$, $\alpha = 3 \rightarrow 1/(\alpha T)$).
6. Încercăm legea de compensare:

$$D(s) = K \cdot \frac{s + 1}{s + \frac{1}{15}} = 3 \cdot \frac{s + 1}{s + \frac{1}{15}} \Rightarrow \text{Verifică } DC_{Gain} = D(0) \cdot G(0) = 9 \cdot 1 = 9$$

Redesenăm diagrama Bode.

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (4)

Se consideră sistemul

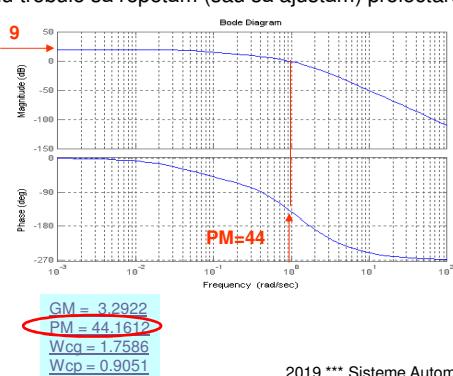
$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p=9$.

Soluție (cont.):

7. Redesenăm diagrama Bode. Citim $K_p = 9$, $PM = 44^\circ$.

Nu trebuie să repetăm (sau să ajustăm) proiectarea.



```
numG=3;
den2=conv([1 0.5],[1 1]);
denG=conv(den2,[1 2]);
sysG=tf(numG,denG);
numD=[1 0.2];
denD=[1 1/15];
sysD=tf(numD,denD);
CL=sysG*sysD;
figure; bode(CL); grid on;
[mag,phase,w]=bode(CL);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
```

Exemplul 2 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (1)

Se consideră sistemul $KG(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)}$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, astfel încât rezerva de fază să fie cel puțin 45° și $K_v = 10$.

[de exemplu, ca la ora 11, p.6, "Urmărirea unei referințe variabile", eroarea staționară la semnal rampă pentru sistem cu un $1/s$, este $1/K_v$]

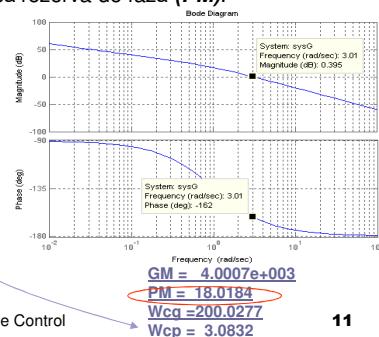
Soluție:

O altă strategie de proiectare ar fi să păstrăm câstigul de la frecvențe joase, din sistemul fără compensare, iar adăugarea unei compensări cu întârziere de fază să reducă frecvența de tăiere și implicit să îmbunătățească rezerva de fază (**PM**).

1. Considerăm direct **K=10**.
2. Desenăm diagrama Bode pentru **K=10**.

Avem **PM=18°** (insuficient) la $\omega_c=3\text{rad/sec}$.

```
clear;
numG=10;
denG=[1 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
[mag,phase,w]=bode(sysG);
bode(sysG); grid on;
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

11

Exemplul 2 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (2)

Se consideră sistemul $KG(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)}$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, astfel încât rezerva de fază să fie cel puțin 45° , și $K_v = 10$.

Scopul este de a reduce frecvența de tăiere (ω_c), pentru a avea o rezervă de fază mai mare.

Soluție (cont.):

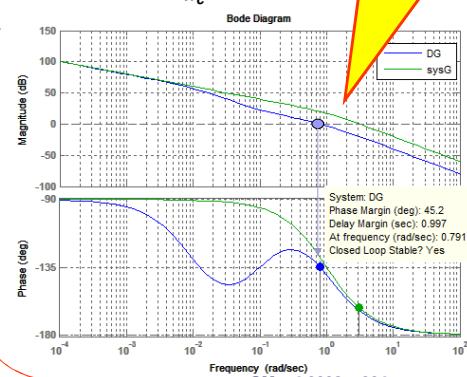
3. Alegem compensarea cu un pol și un zero mult mai mici decât $\omega_c = 3\text{rad/sec}$.

Adoptăm $\omega_z = 0.1\text{rad/sec}$ și $\omega_p = 0.01\text{rad/sec}$.

$$D(s) = \frac{\frac{s}{0.1} + 1}{\frac{s}{0.01} + 1}$$

4. Desenăm diagrama Bode $\rightarrow PM = 45^\circ$.

```
clear;
numG=10;
denG=[1 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
numD=[10 0 1];
denD=[100 1];
sysD=tf(numD,denD);
OL=sysG*sysD;
[mag,phase,w]=bode(OL);
bode(OL); grid on;
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

12

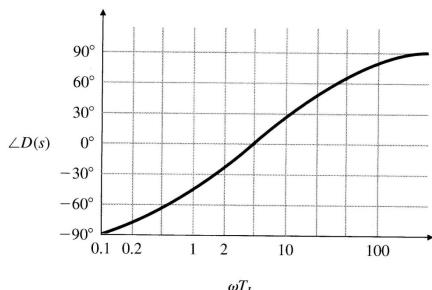
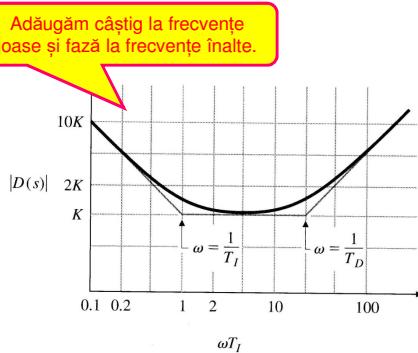
Compensarea PID

- Dacă dorim să îmbunătățim și rezerva de fază la frecvențe înalte și câștigul de la frecvențe joase, putem folosi un control PID.

- Definiție:

$$KD(s) = \frac{K}{s} \cdot (T_D \cdot s + 1) \cdot \left(s + \frac{1}{T_I} \right)$$

- In această formă, compensatorul este echivalent cu a combina un compensator cu întârziere de fază cu unul cu avans de fază ("lead-lag compensator").



2019 *** Sisteme Automate de Control

13

Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (1)

Se consideră sistemul

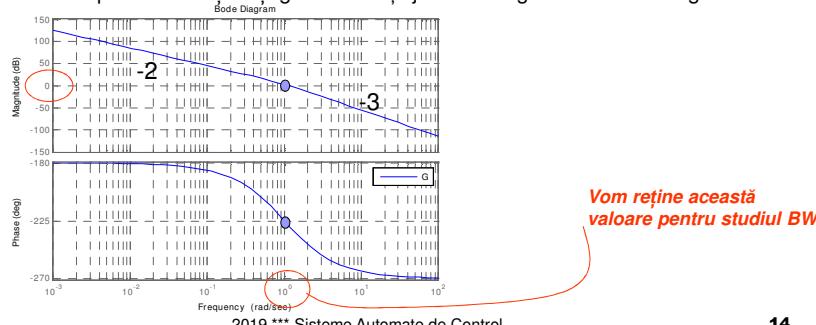
$$G(s) = \frac{0.9}{s^2} \cdot \left(\frac{2}{s+1} \right)$$

Proiectați o compensare astfel încât rezerva de fază să fie cel puțin **65°**, eroarea staționară nulă la rejetia perturbațiilor, și o lărgime de bandă cât mai mare.

Solutie

- Desenăm diagrama Bode pentru G(s).

- Audem nevoie de un termen derivativ (**zero**) pentru a aduce panta la -1 în punctul de intersecție a amplificării unitare (ω_c), deoarece acum avem pantele de -2, și -3.
- Pentru a păstra același câștig la frecvențe joase adăugăm termenul integrator.

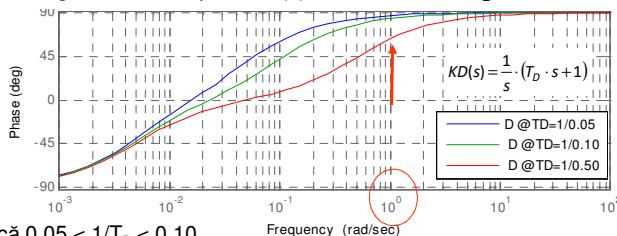


2019 *** Sisteme Automate de Control

14

Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (2)

2. Considerăm $T_I \gg T_D$
(frecvența termenului integral mult mai mică decât a termenului derivativ)
3. Analizăm influența lui T_D pentru un K arbitrar, dar posibil ($K = 1$ în desen).
 - Nu ne interesează diagrama de amplificare (ar fi doar translată pe verticală de un alt câștig K).
 - Considerăm diagrama de fază pentru $D(s)$, la diferite valori T_D .

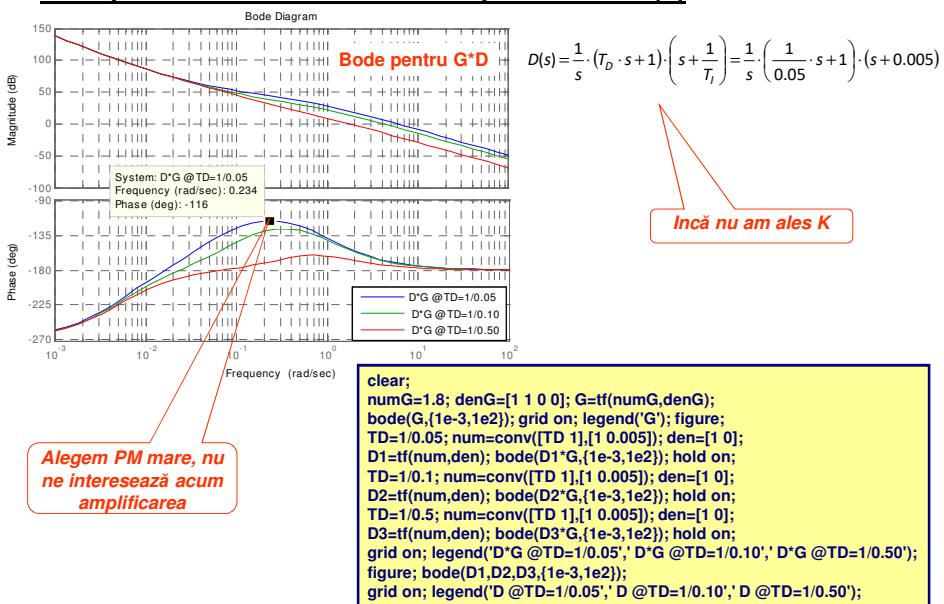


4. Observăm că $0.05 < 1/T_D < 0.10$.
 - Orice valoare $1/T_D < 0.05$ (deasupra), nu produce nici o creștere în $\omega_c (BW)$
 - Orice valoare $1/T_D > 0.10$ (sub) nu satisface cerințele pentru $PM = 65^\circ$.
5. Rămânem la $T_D = 20$ ($1/T_D = 0.05$, desen ALBASTRU). Considerăm $T_I \gg T_D$ (sau termenul integrator intervine mult sub cel derivativ, la frecvențe mult mai joase). $1/T_I = 0.005 \rightarrow s + 0.005$

2019 *** Sisteme Automate de Control

15

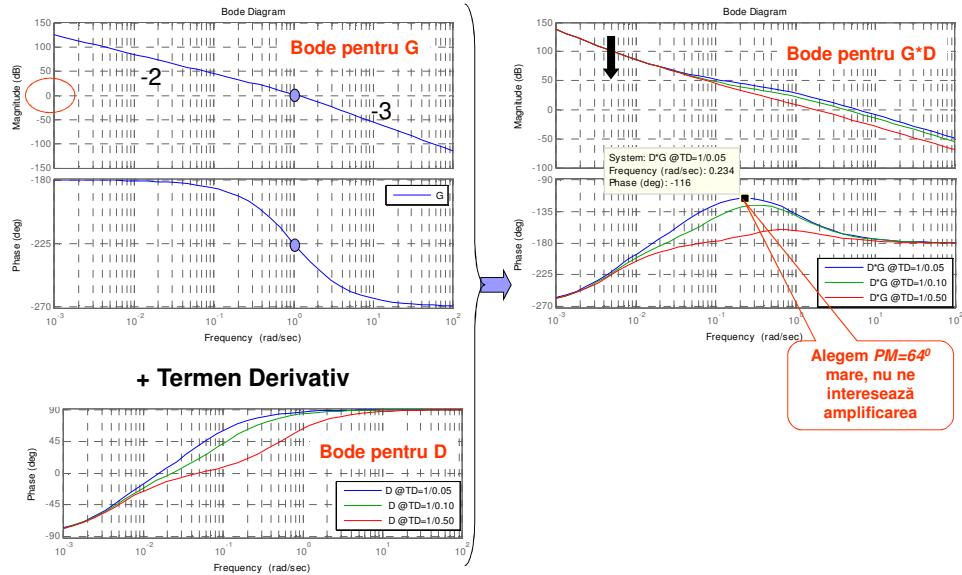
Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (3)



2019 *** Sisteme Automate de Control

16

Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (4)



2019 *** Sisteme Automate de Control

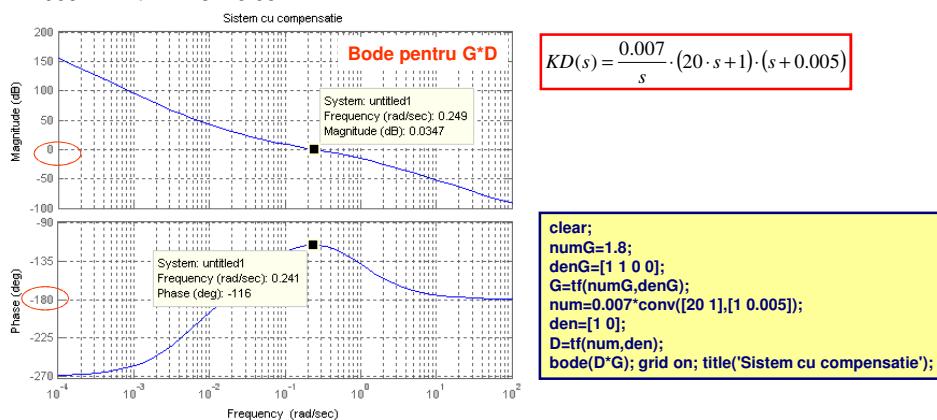
17

Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (5)

6. Trebuie să alegem K astfel încât caracteristica de amplificare să treacă prin axa de câstig unitar ("1") la $PM = 64^\circ$.

Pentru $K = 1$, observăm $|D(s)G(s)| = 43dB = 141.25$ la $\omega_c = 0.25\text{rad/sec}$, pentru $PM = 64^\circ$.

Pentru a face $\omega_c = 0.25\text{rad/sec} = \text{Frecvența de tăiere}$, trebuie să avem $|KD(s)G(s)| = 1$, deci $K = 1/141.25 = 0.007$.



2019 *** Sisteme Automate de Control

18

Observații finale despre compensație

Controlul PD ("FTS") adaugă fază la toate frecvențele deasupra frecvenței de trecere.

- Dacă câștigul nu se schimbă la frecvențe joase, frecvența de tăiere (amplificare unitară) și lărgimea de bandă (BW) vor crește.
- Creșterea amplificării la frecvențe înalte va crește sensibilitatea la zgomot.

Compensarea cu avans de fază adaugă fază într-un domeniu de frecvențe între două frecvențe de schimbare a pantei, alese în jurul frecvenței originale de trecere.

- Dacă nu există creștere a câștigului de frecvență joasă, această compensare va determina creșterea lărgimii de bandă.

Controlul PI ("FTJ") crește amplitudinea răspunsului la frecvențe joase, scăzând astfel eroarea staționară.

- Scade faza sub frecvența de trecere, producând posibile probleme de stabilitate.

Compensarea cu întârziere de fază crește amplitudinea între două frecvențe de schimbare a pantei.

- Pentru valori corespunzătoare a lui K , poate scade amplitudinea pentru a menține o rezervă de fază dorită.
- Produce o scădere a fazei între două limite care trebuie ținute la valori scăzute.

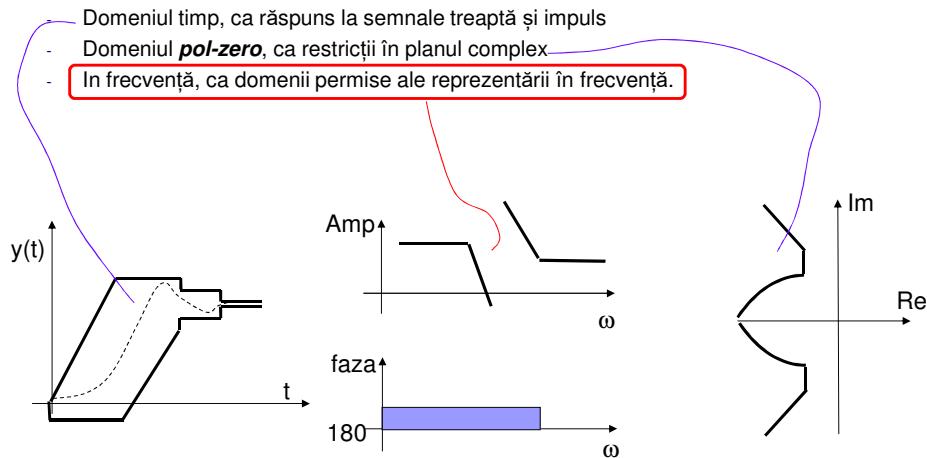
- Modul 22 = Considerații practice legate de proiectare.

Considerații de proiectare cu metoda răspunsului în frecvență

Cerințele de proiectare:

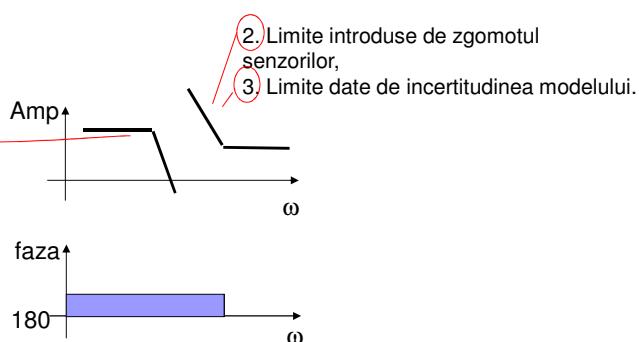
Pot fi definite în:

- Domeniul timp, ca răspuns la semnale treaptă și impuls
- Domeniul **pol-zero**, ca restricții în planul complex
- **In frecvență**, ca domenii permise ale reprezentării în frecvență.



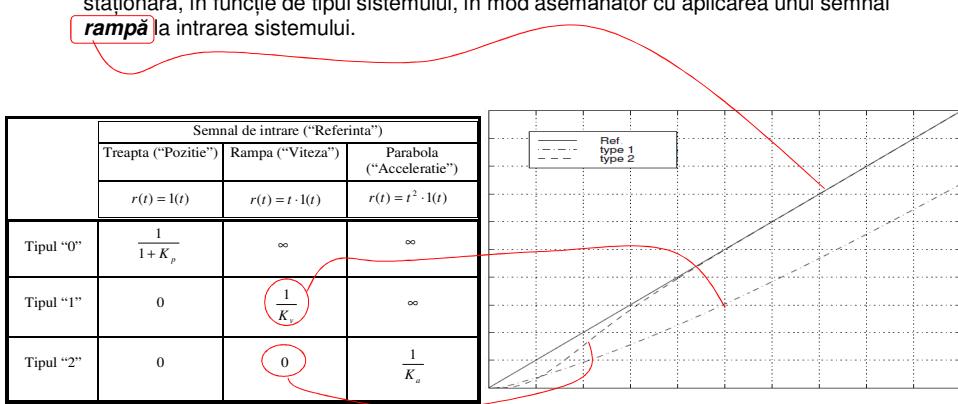
Proiectare pe baza unor condiții pentru caracteristicile Bode

1. După cum s-a arătat, erori staționare pot apărea atât datorită unor semnale particulare de referință cât și datorită unor perturbații.



(1) Limitarea erorilor stationare (1)

- După cum s-a arătat, la aplicarea unui semnal la intrarea unui sistem, componentele din semnalul de ieșire ce corespund unor poli simpli din f.d.t. a sistemului se vor atenua în timp, lăsând semnalele sinusoidale de la intrare să persiste la ieșire.
- La aplicarea unui semnal de referință sinusoidal, am arătat că se produce o eroare stationară, în funcție de tipul sistemului, în mod asemănător cu aplicarea unui semnal **rampă** la intrarea sistemului.



(1) Limitarea erorilor staționare (2)

- Fiecare semnal de intrare complex poate fi descompus într-o sumă de semnale sinusoidale
- Pentru reducerea erorilor staționare este necesar să avem un câstig mare la frecvențe joase.
 - Mai mult, sistemele dinamice pot fi caracterizate printr-un interval de frecvențe pentru care nu avem erori staționare (de fapt, erorile sunt sub o anumită valoare = date de proiectare).

(1) Limitarea erorilor stationare (3)

- O astfel de diagramă Bode înglobând toate condițiile pentru amplificare pe buclă în funcție de frecvența semnalului de intrare poate reprezenta o altă definiție pentru condițiile de proiectare. În acest caz:

$$E(s) = \frac{1}{1 + DG_o} \cdot R(s) = S \cdot R \Rightarrow |E| = |S| \cdot |R| < e_b \Rightarrow |S| < \frac{1}{W_p} \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + DG_o} \right| < \frac{1}{W_p}$$

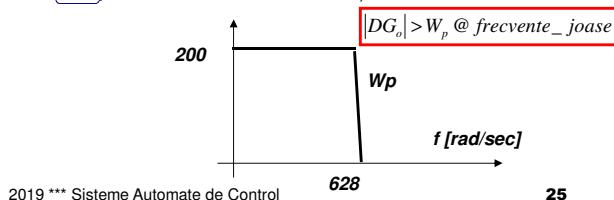
Specificație _ Proiectare _ Eroare _ E(s)

- Se observă că se poate lucra cu o funcție de sensibilitate $S(j\omega)$.
- Se poate considera o valoare aproximativă:

$$|DG_o| > W_p @ \text{frecvențe joase}$$

Exemplu = Un sistem cu reacție unitară trebuie să furnizeze o eroare staționară mai mică decât 0.005 pentru orice semnal sinusoidal sub 100Hz.

Soluție = Amplificarea cerută este > 200 pentru domeniul de frecvențe dat.



2019 *** Sisteme Automate de Control

25

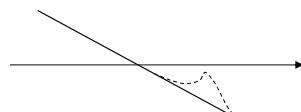
(2) Limitarea zgomotului din senzori

- Am văzut că o filtrare la frecvență înaltă este binevenită.
 - De exemplu, la proiectarea regulațoarelor PD, adăugăm un pol la 5-10 ori mai mare decât zero-ul din PD.
- Mai mult, unii proiectanți dublează efectul acestui pol de înaltă frecvență, pentru filtrarea zgomotului:

$$\frac{T \cdot s + 1}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)^2}$$

(3) Limitarea posibilității declansării de rezonanțe la frecvențe înalte

- Multe sisteme mecanice prezintă rezonanțe la frecvențe înalte, care pot avea efect în stabilitatea sistemului.



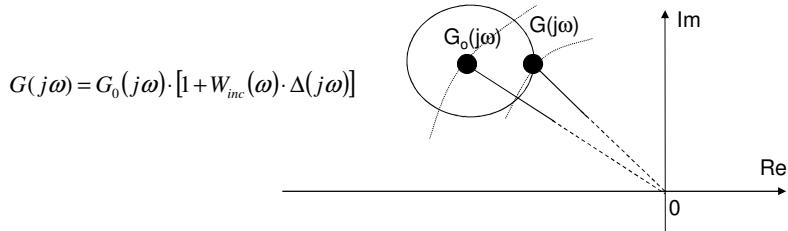
- O strategie bună în acest caz este menținerea câștigului subunitar în jurul frecvenței acestor posibile rezonanțe.
 - Se pot introduce poli adiționali
 - Acst proces se numește stabilizarea amplificării (gain stabilization).**

2019 *** Sisteme Automate de Control

26

(4) Incertitudinea modelului (1)

- Vom încerca acum să modelăm și să discutăm proiectarea legii de compensare pentru variația parametrilor legii de transfer a instalației.
- Vom considera existența unei incertitudini în definirea modelului.
 - Pentru orice valoare de interes „ s ”, funcția de transfer este un număr complex, o locație în planul complex.
 - Vom exprima incertitudinea modelului ca o posibilă variație în amplitudinea acestei locații și o posibilă variație în fază (vezi figura).



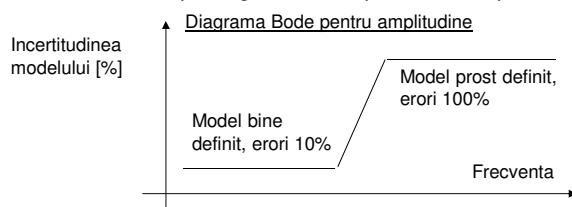
- W_{inc} (raza) este foarte redus la frecvențe joase unde modelul este mai bine cunoscut și nu avem o variație atât de mare a parametrilor, și este mai mare la frecvențe înalte unde modelul original s-ar putea să nu fi fost prea bine definit
 - „efekte sau componente parazite”, vibrații, zgomote, s.a.m.d.
 - unde variația parametrilor este mai importantă în operație (mediu ambiant, îmbătrânire).

2019 *** Sisteme Automate de Control

27

(3) Incertitudinea modelului (2)

- Putem reprezenta acest lucru pe diagrama de amplitudine a răspunsului în frecvență:



- Să presupunem că am proiectat o lege de compensație pentru modelul nominal $G_0(jw)$ și că sistemul în bucla închisă este stabil, deci $1+DG_0 \neq 0$.

$$1 + D \cdot G \neq 0 \Leftrightarrow 1 + D \cdot G_0 \cdot [1 + W_{inc} \cdot \Delta] \neq 0 \Leftrightarrow 1 + D \cdot G_0 + D \cdot G_0 \cdot W_{inc} \cdot \Delta \neq 0$$

$$(1 + D \cdot G_0) \cdot [1 + T \cdot W_{inc} \cdot \Delta] \neq 0 \Rightarrow |T \cdot W_{inc} \cdot \Delta| < 1$$

$$\text{unde } T(s) = \frac{DG_0}{1 + DG_0} = \text{Functie_de_sensibilitate}$$

$$|T \cdot W_{inc}| < 1 \Leftrightarrow |T| \cdot |W_{inc}| < 1 \Leftrightarrow |T| < \frac{1}{|W_{inc}|} \Leftrightarrow \left| \frac{DG_0}{1 + DG_0} \right| < \frac{1}{|W_{inc}|}$$

- Forma aproximativă:

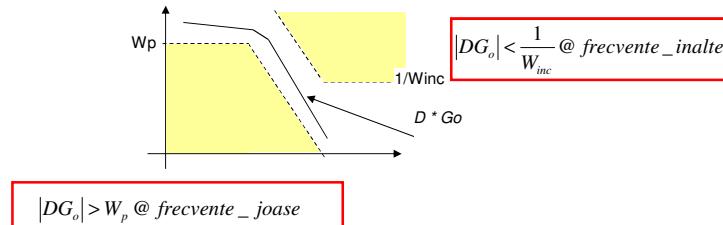
$$\left| DG_0 \right| < \frac{1}{|W_{inc}|} @ \text{frecvențe_înalte}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

28

Etape de proiectare

- Se definesc constrângările aproximative date de W_p (pagina 25) și W_{inc} (pagina 28).



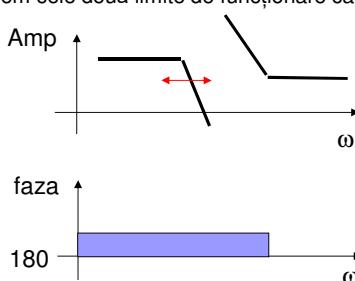
- Se alege o funcție de transfer DG_o care să satisfacă ambele condiții.
- Se proiectează o lege de compensare capabilă să aducă funcția de transfer în buclă închisă la forma dorită.
- Se verifică noua lege de transfer în buclă închisă, față de condițiile (fără aproximare)

$$\left| \frac{DG_o}{1+DG_o} \right| < \frac{1}{W_{inc}}$$

$$\left| \frac{1}{1+DG_o} \right| < \frac{1}{W_p}$$

Observatii finale asupra restrictiilor pentru amplificare în sisteme reale

- Observând cele două condiții pentru eroare staționară redusă și pentru incertitudinea modelului, am dori să avem cele două limite de funcționare cât mai aproape una de alta.



- Acum ar însemna o pantă foarte mare a caracteristicii.
- Dacă am încerca să facem panta mai mare (mai rapidă), am pierde rezerva de fază, și am contrazice ideea de stabilitate la o pantă de -1 la intersecția cu axa 0dB.

(vezi consecința teoremei Bode, în cursul 5)

Observatie - Un alt mod de analiză este prin definirea unei sensibilități.

Sisteme cu întârziere de timp (Time Delay Td)

- Toate sistemele reale, fizice, prezintă elemente de întârziere.
 - Măsurarea mărimilor de reacție prezintă întârziere de timp.
 - Implementarea circuitelor de control introduce involuntar elemente de întârziere de timp.
- Transformarea Laplace a unei întârzieri de timp T_d este: $G(s) = e^{-sT_d}$ Cea mai "bună" aproximare a unei funcții cu o funcție rațională
- Pentru care se folosește **aproximarea Padé** sau reprezentarea în serii McLaurin a funcției exponentiale:

$$f(x) = e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$G(s) = e^{-sT_d} \cong \frac{1 - s \cdot \frac{T_d}{2}}{1 + s \cdot \frac{T_d}{2}}$$
- Dacă întârzierea este foarte mică, câteodată se folosește aproximarea:

$$G(s) = e^{-sT_d} \cong \frac{1}{1 + s \cdot T_d}$$
- Răspunsul în frecvență a unui element de întârziere (aproape ca un filtru trece jos):
 - Amplitudine unitară
 - Pierdere de fază, $[-\omega T_d]$ rad
 - limitează lărgimea de bandă maximă ce se poate obține într-un sistem ce conține acest element de întârziere.
 - Introduce sau modifică limita de stabilitate

2019 *** Sisteme Automate de Control

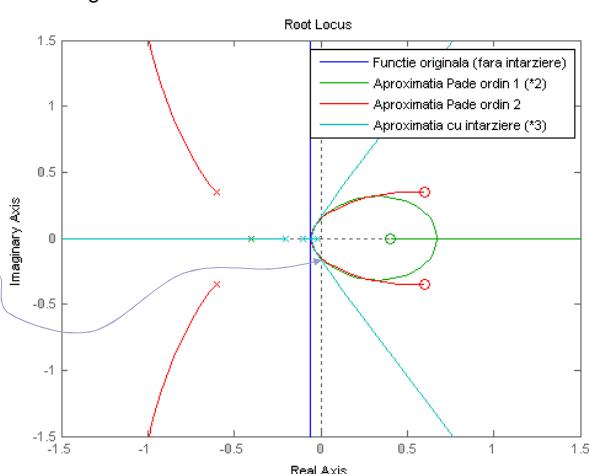
31

Exemplu de instabilitate provocată de elementele de întârziere

- Să considerăm funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s+1) \cdot (60s+1)}$$
- Cu reprezentarea locului rădăcinilor în figură.

Oricare reprezentare arată o trecere la instabilitate pentru un anume K



2019 *** Sisteme Automate de Control

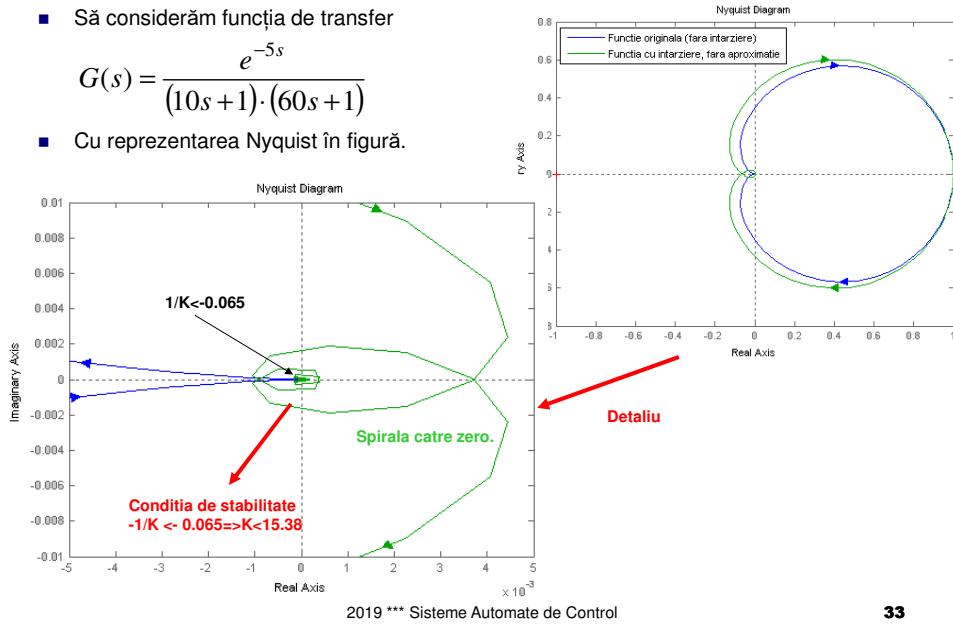
32

Exemplu de instabilitate provocată de elementele de întârziere

- Să considerăm funcția de transfer

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s+1) \cdot (60s+1)}$$

- Cu reprezentarea Nyquist în figură.



Observații finale

- Am discutat aspecte practice particulare implementării practice a metodei răspunsului în frecvență:
 - Proiectarea considerând incertitudinea modelului și un criteriu de performanță
 - Efectul unor elemente de întârziere.

Anexa

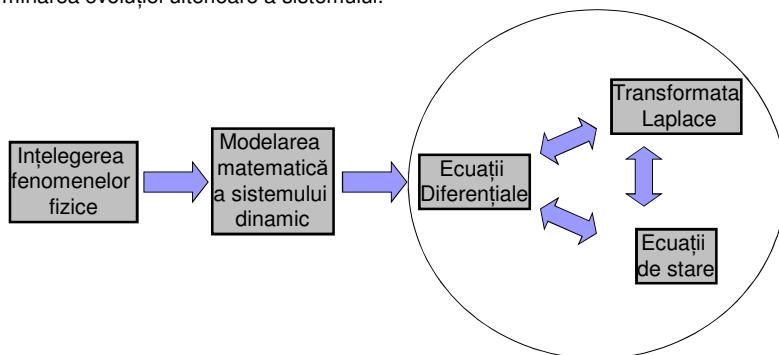
- Program pentru desenele din pagina 12
- Folosim instrucțiunea **pade(T,N)**, unde T=constantă, N=ordinul aproximativ.

```
clear;
num=1;
den=conv([10 1],[60 1]);
H=tf(num,den);
den2=conv([5 1],den);
Ad=tf(num,den2);
[NU,DE] = pade(5,1);
P=tf(NU,DE);
A1=series(H,P);
[NU,DE] = pade(5,2);
P=tf(NU,DE);
A2=series(H,P);
rlocus(H, A1, A2, Ad); axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5]);
legend('Functie originala (fara intarziere)', 'Aproximatie Pade ordin 1 (*2)', 'Aproximatie Pade ordin 2', 'Aproximatie cu intarziere (*3)');
figure;
S=tf('s');
Aa=exp(-5*s); A=series(H,Aa);
nyquist(H,A);
legend('Functie originala (fara intarziere)', 'Functia cu intarziere, fara aproximatie');
figure;
nyquist(H,A); axis([-0.005,0.005,-0.01,0.01]);
```

- Modul 23 = Transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații de stare. Forme Canonice.

Ecuării diferențiale în forma variabilelor de stare (1)

- Principiul de bază al acestei metode constă în posibilitatea descrierii complete a comportării unui sistem cu un set de mărimi de stare pe baza ecuațiilor diferențiale ce descriu sistemul, cunoscând un sistem de mărimi de intrare.
- Starea sistemului se consideră a fi o informație minimă asupra sistemului la un moment dat, care împreună cu valorile mărimilor de intrare la același moment permite determinarea evoluției ulterioare a sistemului.



Ecuării diferențiale în forma variabilelor de stare (2)

- Descrierea dinamicii sistemelor mecanice, termice, sau electrice se reduce la un set de ecuații diferențiale.
- Este avantajos să putem pune aceste ecuații diferențiale într-o formă similară pentru mai multe aplicații, în scopul dezvoltării unor metode și programe unice de rezolvare.
- Se preferă descrierea sistemului prin ecuații simple, de primul ordin; chiar dacă aceasta implică introducerea unor variabile intermediare (de stare).
 - Practic, fiecare variabilă de stare corespunde unui integrator necesar rezolvării unei ecuații de ordinul întâi.
 - Orice set de ecuații diferențiale poate fi rescris ca un set de ecuații de ordinul întâi.
 - Se constituie un vector (*matrix nx1*) de variabile, și soluția este văzută ca o trajectorie în spațiul stărilor.

Exemplu

- Deplasarea unui vehicul poate fi descrisă prin

$$u - b \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x} = \frac{u}{m}$$

unde: b = coeficientul de frecare

m = masa

x = deplasarea, \dot{x} = viteza, \ddot{x} = acceleratia.

- Se poate considera viteza $[v]$ ca o variabilă intermedieră, de stare.

$$\dot{v} = -\frac{b}{m} \cdot v + \frac{1}{m} \cdot u$$

- Această ecuație de mișcare poate fi identificată cu forma generală a ecuațiilor de stare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \cdot u \quad \text{Generalizare: } \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u$$

x = Variabile de stare
 u = Variabile de intrare
 F, G = Matrici de stare

- Pentru determinarea variabilei de ieșire (redefinim poziția vehiculului cu altă variabilă):

$$y = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

Generalizare: $y = H \cdot x + J \cdot u$

x = Variabile de stare
 u = Variabile de intrare
 y = Variabile de ieșire
 H, J = Matrici de ieșire

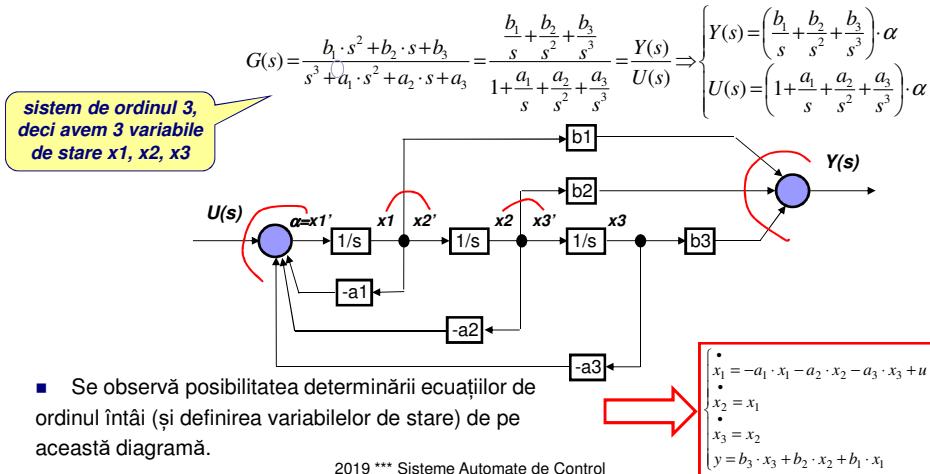
Observatie: Această reprezentare matriceală a sistemelor nu este unică (aduceți-vă aminte de proprietățile de transformare a matricilor).

Folosirea variabilelor de stare în control

- Proiectarea sistemelor de control cu variabile de stare presupune proiectarea unei compensări dinamice a unui sistem prin lucrul direct cu variabilele de stare.
- Studierea ecuațiilor diferențiale puse sub formă ecuațiilor diferențiale ordinare are următoarele avantaje:
 - Foloseste un instrument matematic în domeniul timp.
 - Permite studiul și descrierea unor sisteme mai complexe, nu neapărat liniare, sau staționare.
 - Permite descrierea mai multor sisteme în același format, și definirea unor metode generice.
 - Permite lucrul centralizat cu sisteme cu mai multe intrări, și/sau mai multe ieșiri.
 - Permite vizualizarea rezultatelor în sisteme multi-dimensionale.
 - Permite inter-conectarea mai multor sisteme, descrise prin legi fizice diferite.
 - Permite includerea în model a legilor de evoluție interne (spre deosebire de funcția de transfer care nu arată decât o legătură intrare-ieșire).
- Prințipiuul proiectării prin folosirea variabilelor de stare:
 - Consideră toate variabilele de stare măsurate și disponibile pentru control ("full state feedback").
 - Aceasta permite atribuirea de cerințe dinamice arbitrară și considerarea lor pentru o primă proiectare.
 - Putem folosi un "observer" pentru estimarea [construirea] variabilelor de stare din mărimile măsurate de la ieșirea sistemului.
 - Adăugăm referințele externe pentru a avea o structură completă.
 - Legile de control obținute sunt similare legilor obținute prin metodele transformate în frecvență.

Diagrama cu integratori

- Reprezentăm grafic funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă, utilizând doar integratori izolați, ca elemente dinamice ($1/s$). O astfel de diagramă bloc este denumită **formă canonica de control** ("control canonical form").
- Fiecare variabilă de stare este conectată prin reacție la intrarea sistemului.
- Să considerăm echivalența între funcția de transfer Laplace și diagrama din figură



Exemplu:

- Fie funcția de transfer
- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 7 \cdot s + 12} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}}{1 + \frac{7}{s} + \frac{12}{s^2}} = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$
- Forma canonica de control

sistem de ordinul 2, deci avem 2 variabile de stare x_1, x_2

□ Ecuatiile diferențiale de ordinul întâi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 + 2 \cdot x_2 \end{cases}$$

- Ecuatiile de stare în forma canonica de control:

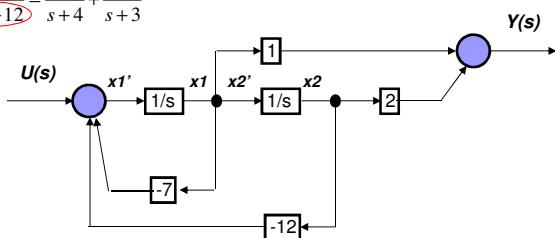
$$\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \\ y = C_c \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B_c &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_c &= [1 \quad 2] & D_c &= 0 \end{aligned}$$

Exemplu:

- Fie funcția de transfer

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 7 \cdot s + 12} = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$

- Forma canonica de control



- Ecuatiile diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 + 2 \cdot x_2 \end{cases}$$

Formă caracteristică unui sistem
cu "o singura intrare – o singura ieșire"

- Ecuatiile de stare în forma de control canonica

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \\ y = C_c \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ C_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ D_c = 0 \end{matrix}$$

In acest caz, ieșirea "y" nu depinde
direct de marimea de intrare "u".

2019 *** Sisteme Automate de Control

43

Forma canonica de control – Generalizare

- Funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{b_1 \cdot s^{n-1} + b_2 \cdot s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Matricele din ecuațiile de stare: $\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \\ y = C_c \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ C_c = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] \\ B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \\ D_c = 0 \end{matrix}$

- Aceleiasi rezultate pentru forma canonica de control se pot obtine in **MATLAB** cu

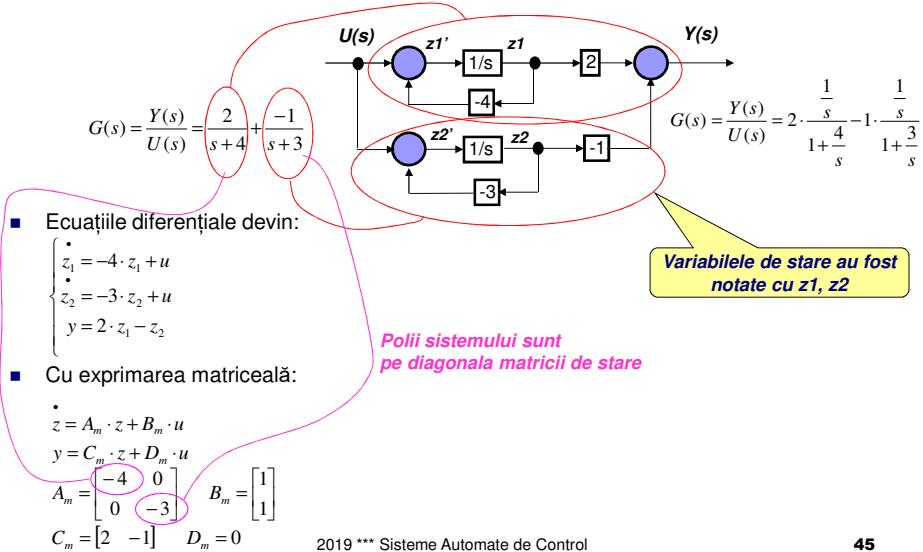
[A,B,C,D]= tf2ss(num,den)

2019 *** Sisteme Automate de Control

44

Forma canonică modală

- Dacă considerăm acum desfașurarea în fracții parțiale, putem avea o altă reprezentare grafică a funcției de transfer originale.



2019 *** Sisteme Automate de Control

45

Matricea de controlabilitate (1)

- Pentru că există cel puțin două reprezentări matriceale posibile pentru același sistem, înțelegem că putem defini o transformare liniară de matrici (= schimbare a variabilelor de stare), capabilă să treacă dintr-o reprezentare în alta.

$$\text{De exemplu, de la } x \text{ la } z \quad \begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ y = H \cdot x + J \cdot u \end{cases} \xrightarrow{T} \begin{cases} \dot{z} = A \cdot z + B \cdot u \\ y = C \cdot z + D \cdot u \end{cases}$$

$$\text{Dacă: } x = T \cdot z \Leftrightarrow \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A = T^{-1} \cdot F \cdot T \quad B = T^{-1} \cdot G \\ C = H \cdot T \quad D = J \end{array}$$

- Pentru a projecța legile de control în buclă închisă trebuie să avem ecuațiile de stare scrise în forma canonică de control (demonstratia mai târziu)**

- In acest scop, ne trebuie un mecanism de a transforma orice set de ecuații de stare în ecuații de stare scrise în forma canonică de control.

2019 *** Sisteme Automate de Control

46

Matricea de controlabilitate (2)

- Să considerăm un sistem caracterizat prin matricile de stare (F, G, H, J) și dorim să determinăm o transformare T capabilă să aducă sistemul în forma canonica de control.
- În forma canonica de control, matricile de stare sunt

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G(s) = \frac{b_1 \cdot s^{n-1} + b_2 \cdot s + \dots + b_n}{s^n + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + \dots + a_n}$$

$$C = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n], \quad D = 0$$

- Vom nota liniile matricei T (matricea de transformare) cu t_1, t_2, t_3 .
- Se obține (v. pag. precedentă)

$$A \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot F \Rightarrow \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \cdot F \\ t_2 \cdot F \\ t_3 \cdot F \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 \cdot F = t_3 \cdot F^2 \\ t_2 = t_3 \cdot F \end{cases}$$

$$B = T^{-1} \cdot G \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ t_1 \cdot G \\ t_2 \cdot G \\ t_3 \cdot G \end{bmatrix} = \begin{cases} t_3 \cdot G = 0 \\ t_2 \cdot G = (t_3 \cdot F) \cdot G = 0 \Rightarrow t_3 \cdot [G \ F \cdot G \ F^2 \cdot G] = [0 \ 0 \ 1] \\ t_1 \cdot G = (t_3 \cdot F^2) \cdot G = 1 \end{cases}$$

- Deci matricea de transformare s-ar putea calcula dacă am cunoaște întâi matricea

$$\varphi = [G \ F \cdot G \ F^2 \cdot G] \quad \text{pe care o vom denumi **matrice de controlabilitate**.}$$

Matricea de controlabilitate (3)

Etapele de transformare a unui set de ecuații de stare în forma canonica de control

- Calculați matricea de controlabilitate:

$$\varphi = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$$

- Calculați ultima linie a inversei matricei de transformare:

$$t_n = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot \varphi^{-1}$$

- Componeti matricea transformării liniare prin formulele:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_n \cdot F^{n-1} \\ t_n \cdot F^{n-2} \\ \dots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Exemplu program MATLAB pentru sistem de ordinul 2

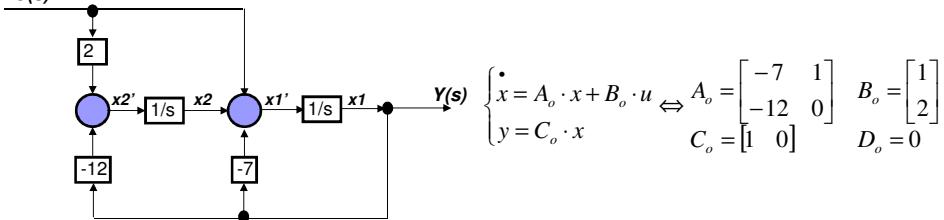
```
sys=ss(F,G,H,J);
co=ctrb(F,G);
tn=[0 1]'inv(co);
Ti=[tn'F; tn];
z=ss2ss(sys,inv(Ti))
```

- Dacă matricea φ (matrice de controlabilitate) nu este singulară, atunci sistemul dat de F, G este controlabil.
 - O matrice este nesingulară dacă determinantul este nenul, deci există inversa sa.
- O schimbare de stare (transformare de matrici) nu schimbă proprietatea de controlabilitate
 - Noile matrici de stare determină o matrice de controlabilitate nesingulară.

Forma canonica de observare

- Să considerăm din nou funcția de transfer originală:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 7 \cdot s + 12} \Rightarrow Y(s) \cdot \left(1 + \frac{7}{s} + \frac{12}{s^2}\right) = U(s) \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right) \Rightarrow Y(s) = \frac{U(s) - 7 \cdot Y(s)}{s} + \left(\frac{2 \cdot U(s) - 12 \cdot Y(s)}{s^2}\right)$$
- Să definim o nouă reprezentare în care orice legătură de reacție să fie de la ieșire către variabilele de stare.
- Această formă este definită pentru a caracteriza variabilele de stare din măsurători ale mărimilor de ieșire.
 - Acest lucru este adeseori necesar pentru a completa reacția sistemului ("feedback") când nu toate variabilele de stare se pot măsura.



- Să în acest caz putem verifica matematic dacă toate mărimile de stare se pot defini din mărimi de ieșire prin calcularea unei matrice de observabilitate (considerăm sistemul definit de F, G, H, J): $O = [H \quad HF \quad \dots \quad HF^{n-1}]^T$
- **Daca O nu este singulară, atunci sistemul este observabil, deci putem estima/calcula variabilele de stare din variabilele de ieșire.**

2019 *** Sisteme Automate de Control

49

Determinarea funcției de transfer din ecuațiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ y = H \cdot x + J \cdot u \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F \cdot x + G \cdot u \xrightarrow{\text{Laplace}} s \cdot X(s) - x(0) = F \cdot X(s) + G \cdot U(s) \Leftrightarrow (s \cdot I - F) \cdot X(s) = G \cdot U(s) + x(0) \\ &\Leftrightarrow X(s) = (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G \cdot U(s) + (s \cdot I - F)^{-1} \cdot x(0) \\ Y(s) &= H \cdot X(s) + J \cdot U(s) = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G \cdot U(s) + H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot x(0) + J \cdot U(s) \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + J \end{aligned}$$

- ... care se poate determina și cu MATLAB.
 - [num, den] = ss2tf(A,B,C,D,i)
 - [z, p, k] = ss2zp(A,B,C,D,i)
 - Funcțiile de transfer de la a i -a intrare la fiecare ieșire.
 - Toate f.d.t. vor avea același numitor și diferite funcții polinomiale la numărător.
- Această formă este importantă pentru că leagă ecuațiile de stare de determinarea răspunsului dinamic al sistemului, cu toți parametrii definiti anterior pentru funcții de transfer.

2019 *** Sisteme Automate de Control

50

Observații finale

- Există o echivalentă între ecuații diferențiale, funcții de transfer și ecuații de stare.
- Ecuațiile de stare se pot exprima în diferite forme (de control, modală, de observare).
- Transformări liniare între matrici pot converti o formă în alta.

- O proprietate importantă pentru controlul unui sistem definit de ecuațiile de stare, este controlabilitatea, exprimată prin matricea de controlabilitate.
 - Dacă această matrice este nesingulară, atunci ecuațiile sistemului se pot transforma în forma canonică de control.

- O proprietate importantă pentru controlul unui sistem definit de ecuațiile de stare, este observabilitatea, exprimată prin matricea de observabilitate.
 - Dacă aceasta este nesingulară, atunci ecuațiile sistemului se pot transforma în forma canonică de observare.

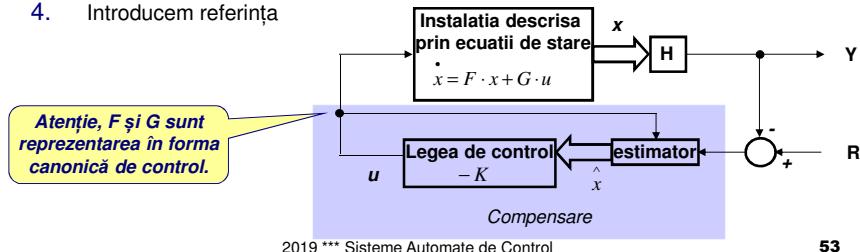
Modul 24 – Proiectarea legii de control.

Proiectarea legii de control (1)

- O caracteristică atractivă a lucrului cu variabilele de stare constă în **proiectarea structurată** a legii de control, prin urmarea unor pași independenți de sistemul dat.
 - Avantaj la proiectarea automată pe calculator.

Etapele de proiectare a legii de compensare

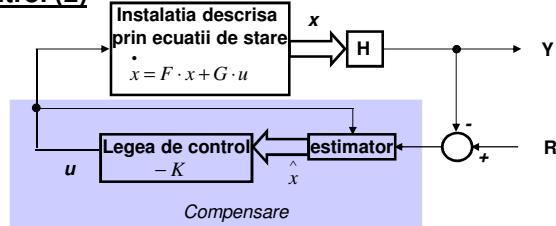
1. Stabilim ecuațiile de stare și estimăm variabilele de stare pentru reacție
 - **Reacția este întotdeauna după variabilele de stare.**
 - S-ar putea să nu putem măsura toate variabilele de stare, și să trebuie să estimăm prin calcul unele variabile de stare.
2. Calculăm legea de control ca o combinație liniară a variabilelor de stare
3. **Legea de control plus estimarea variabilelor de stare reprezintă compensarea. Definim estimatorul dacă nu putem măsura toate variabilele de stare.**
4. Introducem referința



2019 *** Sisteme Automate de Control

53

Proiectarea legii de control (2)



- Scopul proiectării legii de control este acela de a permite determinarea (schimbarea) unor locații a polilor sistemului pentru satisfacerea unor performanțe dinamice.
 - Am văzut legătura dintre locația polilor și răspunsul dinamic al sistemelor în cursul 2.
- Legea de control este dată ca o combinație liniară a variabilelor de stare, presupunând că avem informație despre toate variabilele de stare **[x]**:

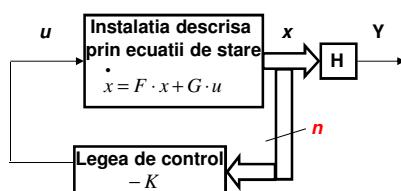
$$u = -K \cdot x = -[K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

54

Proiectarea legii de control (3)

- Proiectarea legii de control prin metoda variabilelor de stare presupune că toate variabilele de stare sunt cunoscute (fie coîncid cu ieșirile și sunt măsurate, sau sunt estimate din ieșiri).
 - Ar putea exista metode de control ce utilizează mai puține variabile pentru reacție ("feedback").
 - Variabilele de stare care nu se pot măsura direct în instalație, se pot calcula pentru a fi disponibile proiectării sistemului de compensare.
 - Pomenim de la faptul că toate variabilele de stare sunt disponibile.
 - **Numărul variabilelor de stare corespunde numărului rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului, deci putem selecta independent locația fiecărei rădăcini pentru către un coeficient din legea de control.**
- Pentru proiectarea legii de control, vom considera schema simplificată.



2019 *** Sisteme Automate de Control

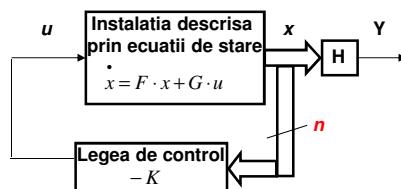
55

Proiectarea legii de control (4)

- Matematic:

$$\dot{x} = F \cdot x - G \cdot K \cdot x \Rightarrow \dot{x} = (F - G \cdot K) \cdot x \Rightarrow s \cdot I \cdot x = (s \cdot I - F + G \cdot K) \cdot x = 0$$
 - Ecuația caracteristică a acestui sistem în buclă închisă este

$$\det[s \cdot I - F + G \cdot K] = 0$$
- care conduce la un polinom de ordinul n , ce conține coeficienții K_1, \dots, K_n .
- Trebuie să alegem acești coeficienți astfel încât rădăcinile să se afle la locațiile dorite.
 - Pentru n poli (rădăcini), avem n coeficienți K .



2019 *** Sisteme Automate de Control

56

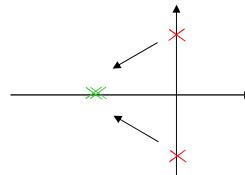
Proiectarea legii de control. Exemplu – Pendul (1).

- Presupunem că am determinat ecuațiile de stare pentru un pendul (ca instalatie, vezi ora 2, pagina 7):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta &= \frac{T_c}{m \cdot l^2} \\ \text{Notam } \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Rightarrow \frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{P}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \cdot u = F \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + G \cdot u$$



Problemă = Să se găsească legea de control capabilă să mute ambii poli ai funcției de transfer în bucla închisă, la $-2\omega_0$.

- Deci dorim să dublăm frecvența naturală, și să creștem amortizarea ζ de la 0 la 1.
- Ecuată caracteristică pentru noul sistem în buclă închisă este:

$$\alpha_c(s) = (s + 2 \cdot \omega_0)^2 = s^2 + 4 \cdot \omega_0 \cdot s + 4 \cdot \omega_0^2$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

57

Proiectarea legii de control. Exemplu – Pendul (2).

- Conform teoriei, calculăm (folosim F, G de pe pagina precedentă):

$$\det[s \cdot I - (F - G \cdot K)] = \det \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) \right] = s^2 + K_2 \cdot s + \omega_0^2 + K_1 = 0$$



- Datele problemei cer o ecuație caracteristică

$$s^2 + 4 \cdot \omega_0 \cdot s + 4 \cdot \omega_0^2 = 0$$

... ce dorim să obținem

- Prin identificarea celor două relații, se obține:

$$\begin{cases} K_2 = 4 \cdot \omega_0 \\ 4 \cdot \omega_0^2 = \omega_0^2 + K_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 3 \cdot \omega_0^2 \\ K_2 = 4 \cdot \omega_0 \end{cases}$$

- Ecuațiile de stare ale sistemului compensat devin:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= [F - GK] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 \cdot \omega_0^2 & -4 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

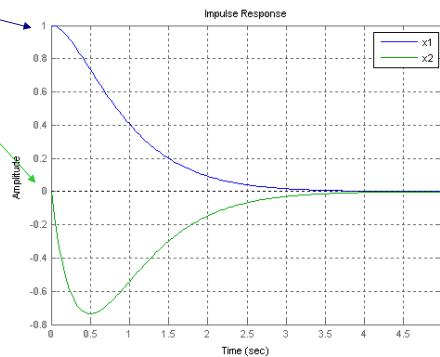
58

Proiectarea legii de control. Exemplu – Pendul (3).

- Rezultate determinate cu MATLAB ($\omega_0=1$)
- Condiții initiale $x_1=1, x_2=0$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \end{bmatrix} = [F - GK] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 \cdot \omega_0^2 & -4 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

```
A=[0 1; -4 -4];
% fortam o conditie initiala x1=u=1, x2=0
B=[1 0]';
% definim o iesire fictiva y=x1
C1=[1 0];
[num,den]=ss2tf(A,B,C1,1);
H1=tf(num,den);
impulse(H1); hold on; grid on;
% definim o iesire fictiva y=x2
C2=[0 1];
[num,den]=ss2tf(A,B,C2,1);
H2=tf(num,den);
impulse(H2);
legend('x1','x2');
```



- **Observatie** - Prin deplasarea polilor din perechea complex conjugată $(\pm j\omega_0)$ în poli dubli la $-2\omega_0$, sistemul are un răspuns aperiodic amortizat.

Alte forme de rezolvare a legii de control

Exemplu precedent a avut un ordin scăzut. Multe sisteme sunt mai complexe, de ordin ridicat.

- Se folosește **forma canonica de control**
 - Se bazează pe bucle de reacție ce se întorc către variabila controlată (de intrare).
 - Ecuatiile devin mult simplificate

Exemplu pentru înțelegerea acestei metode. Să considerăm:

$$y + a_1 \cdot \ddot{y} + a_2 \cdot \dot{y} + a_3 \cdot y = b_1 \cdot \ddot{u} + b_2 \cdot \dot{u} + b_3 \cdot u \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + b_3}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3} = \frac{a(s)}{b(s)}$$

- Alegem o nouă variabilă χ astfel încât:

$$\begin{cases} \frac{\chi(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} \\ Y(s) = b(s) \cdot \chi(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\chi} + a_1 \cdot \ddot{\chi} + a_2 \cdot \dot{\chi} + a_3 \cdot \chi = u \\ y = b_1 \cdot \ddot{\chi} + b_2 \cdot \dot{\chi} + b_3 \cdot \chi \end{cases}$$

Vom scrie această ecuație diferențială de ordin ridicat într-un sistem de ecuații de ordinul întâi

$$\begin{cases} \cdot \\ \chi_3 = \chi_2 \\ \cdot \\ \chi_2 = \chi_1 \\ \cdot \\ \chi_1 + a_1 \cdot \chi_1 + a_2 \cdot \chi_2 + a_3 \cdot \chi_3 = u \Rightarrow \chi_1 = -a_1 \cdot \chi_1 - a_2 \cdot \chi_2 - a_3 \cdot \chi_3 + u \end{cases}$$

Generalizare (1)

Etapele metodei descrise sunt:

- Se stabilește locația dorită a polilor => ecuația caracteristică de forma:
 $\alpha_c(s) = s^n + \alpha_1 \cdot s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$
- Se cunoaște setul de ecuații diferențiale de primul ordin ce caracterizează sistemul în buclă deschisă prin alegerea unui nou set de variabile de stare egale cu derivatele succesive de ordin superior.
- Noul sistem se poate descrie ca ecuații de stare, cu ecuația caracteristică:
 $a_{oi}(s) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n = 0$
- Sistemul în buclă închisă prin reacție ($-Kx$) schimbă ecuația caracteristică în:
 $a_{ci}(s) = s^n + (a_1 + K_1) \cdot s^{n-1} + \dots + (a_n + K_n) = 0$
- Se determină coeficienții K din reacție prin identificare între ecuația caracteristică pentru buclă închisă și ecuația caracteristică dorită.

$$\alpha_1 = a_1 + K_1$$

$$\alpha_2 = a_2 + K_2$$

...

$$\alpha_n = a_n + K_n$$

Generalizare (2)

Aceleași idei exprimate în forma matriceală:

Fie ecuațiile de stare date de (F,G)

1. Transformăm (F,G) în forma canonica de control (Fc,Gc) prin transformarea $x = Tz$
2. Calculăm coeficienții de control K prin identificare între ecuația caracteristică dorită și legea de control $u = -Kc^*z$.
3. Transformăm înapoi $K = Kc^*T^{-1}$.

Formula lui Ackerman

- Acești 3 pași (**transformare, identificare, transformare inversă**) se pot grupa matematic într-o formă compactă denumită **formula lui Ackerman**.

□ Calculăm matricea de controlabilitate: $\Psi = [G \quad F \cdot G \quad F^2 \cdot G \quad \dots \quad F^{n-1} \cdot G]$

□ Calculăm o matrice pe baza ecuației caracteristice dorite (dată de locația dorită):

$$\alpha_c(F) = F^n + \alpha_1 \cdot F^{n-1} + \dots + \alpha_n \cdot I$$

□ Pe baza acestora, determinăm coeficienții de control

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \cdot \Psi^{-1} \cdot \alpha_c(F)$$

Exemplul precedent (pendul)

□ Se dau ecuațiile de stare ale sistemului în buclă deschisă

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \dot{\theta} = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \theta \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \cdot u$$

□ Să se găsească legea de control capabilă să mute ambi poli ai funcției de transfer în buclă închisă, la **-2ω₀**.

- Deci dorim să dublăm frecvența naturală, și să creștem amortizarea ζ de la 0 la 1.
- Ecuația caracteristică pentru acest sistem este:

$$\alpha_c(s) = (s + 2 \cdot \omega_0)^2 = s^2 + 4 \cdot \omega_0 \cdot s + 4 \cdot \omega_0^2$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

63

Solutie:

Calculăm $\alpha_c(F)$:

$$\alpha_c(F) = \begin{bmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0 \\ -4 \cdot \omega_0^3 & 3 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix}$$

Calculăm matricea de controlabilitate:

$$\Psi = [G \quad F \cdot G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Coefficienții K devin (din formula Ackerman):

$$K = [K_1 \quad K_2] = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0 \\ -4 \cdot \omega_0^3 & 3 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0 \\ -4 \cdot \omega_0^3 & 3 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} = [3 \cdot \omega_0^2 \quad 4 \cdot \omega_0]$$

- Programul MATLAB furnizează $K = [3 \ 4]$ calculate cu instrucția **acker**.

```
w0=1;
F=[0 1; -w0*w0 0];
G=[0 1];
pc=[-2*w0; -2*w0];
K=acker(F,G,pc);
```

Observații din practică și exercițiu:

- Lângă locațiile unde controlabilitatea se pierde, coeficienții K devin foarte mari.
- Mutarea polilor la distanțe mari necesită coeficienți K foarte mari.
- Mutarea polilor lângă zero-uri necesită coeficienți K foarte mari.

2019 *** Sisteme Automate de Control

64

Observații finale

- O etapă importantă în proiectarea compensării este stabilirea legii de control
 - Practic, **dacă sistemul este controlabil, putem schimba locația polilor** printr-o reacție liniară, cu coeficienții K .
 - Sistemul obținut se identifică cu cel dorit pentru determinarea coeficienților de control K .
 - O alternativă la această metodă de calcul manual, este dată de formula Ackerman ce se potrivește pentru lucrul cu calculatorul.
-
- Formula Ackerman este implementată în MATLAB prin “**acker**” sau “**place**”.
 - **acker**
 - recomandată pentru sisteme de ordin mai redus decât 10.
 - **place**
 - Nu funcționează pentru poli multipli.



TEMA DE CASĂ #6

Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 31 mai.

Problema 1

Obtineti ecuatiiile de stare pentru forma canonica de control, ce corespund functiei de transfer:

Problema 2

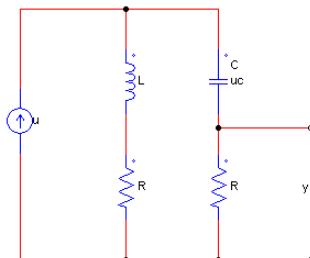
Considerati sistemul caracterizat prin ecuatiiile de stare:

$$x = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot [x] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

Determinati functia de transfer $u \rightarrow y=x1$ fără MATLAB.

Problema 3

Considerati circuitul electric din figura:



Screti ecuatiiile de stare ce corespund acestui circuit.

- Considerati semnalul de intrare $u(t)$ ca fiind curentul $i(t)$ si iesirea $y(t)$ ca fiind o tensiune.
- Apoi, considerati variabilele de stare $x1 = iL$, $x2 = vC$.

67

SOLUTII PENTRU TEMA DE CASA NUMARUL 6

Problema 1

Obțineți ecuațiile de stare pentru forma canonica de control, ce corespund funcției de transfer:

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 9s + 20}$$

Soluție

Scrim ecuațiile de stare în forma canonica direct din coeficienții funcției de transfer

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 1] & D &= 0 \end{aligned}$$

Problema 2

Considerați sistemul caracterizat prin ecuațiile de stare:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot [x] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

Determinați funcția de transfer $u \rightarrow y=xI$.

Soluție

Pentru a determina funcția de transfer $u \rightarrow y=xI$, vom considera $H_1=[1 \ 0]$

Putem aplica direct formula din curs 6, pagina 50:

$$L(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + J$$

unde identificăm matricile (considerăm ca ieșire, prima variabilă de stare xI):

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H_1 &= [1 \quad 0] & J &= 0 \end{aligned}$$

și ținem cont de inversa unei matrice

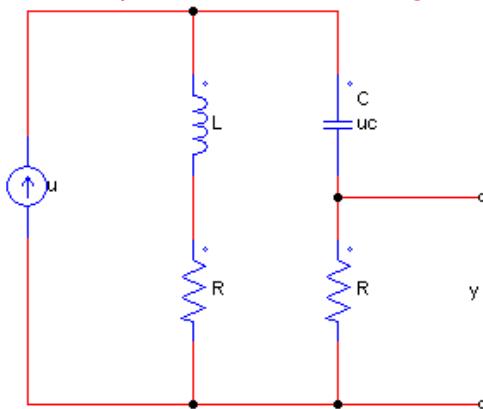
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Deci:

$$\begin{aligned} L_1(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = H_1 \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + J = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} s+4 & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [1 \quad 0] \cdot \frac{1}{(s+4) \cdot (s+1) + 2} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s+4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+4) \cdot (s+1) + 2} \cdot [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5 \cdot s + 6} \end{aligned}$$

Problema 3

Considerați circuitul electric din figură:



Scrieți ecuațiile de stare ce corespund acestui circuit. Considerați semnalul de intrare $u(t)$ ca fiind curentul $i(t)$ și ieșirea $y(t)$ ca fiind o tensiune. Apoi, considerați variabilele de stare $x_1 = i_L$, $x_2 = v_C$.

Solutie

Ecuațiile ce descriu funcționarea circuitului:

$$\begin{cases} L \cdot \frac{di_1}{dt} + R \cdot i_1 = v \\ i_2 = C \cdot \frac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_2 = u \\ L \cdot \frac{di_1}{dt} = -R \cdot i_1 + (v_c + R \cdot (u - i_1)) \\ y = R \cdot C \cdot \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (u - i_1) \\ \frac{di_1}{dt} = \left(-\frac{2 \cdot R}{L}\right) \cdot i_1 + \frac{1}{L} \cdot v_c + \frac{R}{L} \cdot u \\ \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot i_1 + \frac{1}{C} \cdot u \\ y = R \cdot C \cdot \frac{dv_c}{dt} = R \cdot (u - i_1) \end{cases}$$

Ecuatiile de stare sunt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \cdot R & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \cdot u \\ y &= [-R \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_c \end{bmatrix} + R \cdot u \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F = \begin{bmatrix} -2 \cdot R & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} & G = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \\ H = [-R \quad 0] & J = R \end{cases}$$



Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2



Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Săptămâna 07

Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 25 = Introducerea referinței. Observații asupra **zero**-urilor din sistem.
- Ora 26 = Alegerea polilor pentru o proiectare bună.
- Ora 27 = Estimatori și control cu estimare.
- Ora 28 = Control integral și urmărire robustă (“*robust tracking*”).

Săptămâna 07

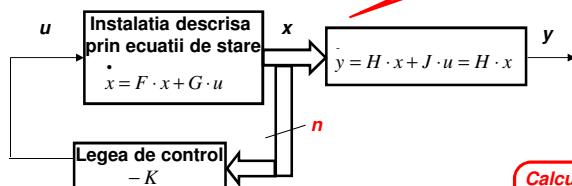
Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 25 = Introducerea referinței. Observații asupra **zero-urilor** din sistem.

Recapitulare: Control cu variabile de stare (din modul 23-24)

*Performanțele dinamice depind de polii sistemului.
Polii sistemului sunt aceeași cu valorile proprii ale matricei F.
Pentru a schimba locația polilor, trebuie schimbată matricea F.*

Matricele F,G,H,J reprezintă sistemul



Ecuația caracteristică a sistemului în buclă închisă este

$$\det[s \cdot I - F + G \cdot K] = 0$$

ce se echivalează cu condițiile de proiectare pentru performanță.

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Efectul pozitiei zero-urilor (1)

Exemplu Să considerăm un sistem în buclă deschisă caracterizat de matricile:

~ același exemplu de la pagina 43 (curs 6, modul 23), cu ecuațiile scrise ca la pagina 49 (curs 6, modul 23) = forma canonica de observare.

$$F = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = 0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + z_0}{s^2 + 7 \cdot s + 12}$$

Să se găsească câștigurile legii de control \mathbf{K} , pentru a plasa polii sistemului la rădăcinile ecuației $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$.

Solutie:

1. Scriem ecuația caracteristică pentru sistemul cu buclă închisă după variabilele de stare:

$$\det[s \cdot I - (F - G \cdot K)] = 0 \Rightarrow \det \left[s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix} \cdot [K_1 \quad K_2] \right) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} s + 7 + K_1 & -1 + K_2 \\ 12 - z_0 \cdot K_1 & s - z_0 \cdot K_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (s + 7 + K_1) \cdot (s - z_0 \cdot K_2) - (12 - z_0 \cdot K_1) \cdot (-1 + K_2) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 + (-z_0 \cdot K_2 + 7 + K_1) \cdot s + (7 \cdot z_0 \cdot K_2 - z_0 \cdot K_1 \cdot K_2 + 12 - 12 \cdot K_2 - z_0 \cdot K_1 + z_0 \cdot K_1 \cdot K_2) = 0$$

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Efectul pozitiei zerourilor (2)

2. Acestă ecuație trebuie identificată cu cea dorită ($s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$) în scopul determinării constantelor K_1, K_2 .

$$\begin{cases} 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 7 + K_1 - z_0 \cdot K_2 \\ \omega_n^2 = 12 - 7 \cdot z_0 \cdot K_2 - 12 \cdot K_2 - z_0 \cdot K_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{z_0 \cdot (14 \cdot \xi \cdot \omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12 \cdot (2 \cdot \xi \cdot \omega_n - 7)}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \\ K_2 = \frac{z_0 \cdot (7 - 2 \cdot \xi \cdot \omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \end{cases}$$

Notă = Această metodă de calcul a câștigurilor K devine dificilă și unpredictibilă la sisteme complexe. De aceea se folosește trecerea prin forma canonica de control, care simplifică calculele și oferă o formulare unitară pentru lucrul cu calculatorul.

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Efectul pozitiei zerourilor (3)

- Să considerăm un caz numeric pentru criteriul de performanță $\omega_n=2$, $\zeta=0.5$.
- Ecuația caracteristică dorită devine $s^2+2s+4=0$, cu rădăcinile $-1 \pm j\sqrt{3}$ și modulul 2.
- Coefficienții legii de control devin:

$$\begin{cases} K_1 = \frac{-27 \cdot z_0 - 60}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \\ K_2 = \frac{5 \cdot z_0 + 8}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \end{cases}$$

- Să analizăm diferite valori pentru z_0 :

```
clear;
A0=[-7 1; -12 0];
z0=-2.99;
B0=[1; -20];
pc=roots([1 2 4]);
K=place(A0,B0,pc);
```

$$z_0 = 2 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -3.80 \\ K_2 = 0.60 \end{cases} \quad z_0 = -2.99 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 2052.5 \\ K_2 = -688.1 \end{cases}$$

Concluzie - Selectia polilor doriti (în exemplu, $-1 \pm j\sqrt{3}$) în apropierea zero-ului sistemului dat (instalație, -2.99) conduce la valori foarte mari ale controlului K .

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Efectul pozitiei zerourilor (4)

- Să considerăm un exemplu de sistem în buclă deschisă, definit în forma unui sistem de ecuații scrise sub forma canonica de control.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \Leftrightarrow A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = C_c \cdot x \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D_c = 0 \end{cases} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 7 \cdot s + 12}$$

- Să ne propunem mutarea polilor sistemului la $-10 \pm 10j$ (departe de zero-ul și polii inițiali)

```
clear;
A0=[-7 -12; 1 0]; B0=[1; 0];
C0=[1 2]; D0=0;
pc=[-10+10i -10-10i];
K=acker(A0,B0,pc);
[num den]=ss2tf(A0-B0*K,B0,C0,D0);
CL=tf(num,den); roots(den)
```

- Obținem $K = [13 188]$

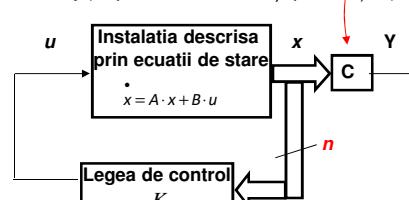
$$s + 2$$

$$s^2 + 20s + 200$$

- Să scriem ecuațiile de stare pentru sistemul cu buclă închisă după variabilele de stare.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [A - BK] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [13 \ 188] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -200 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

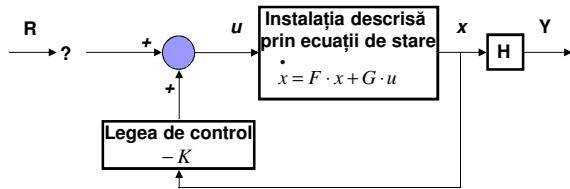
Se observă că zero-urile rămân aceleași cu sistemul în buclă deschisă, descris în formă canonica !!



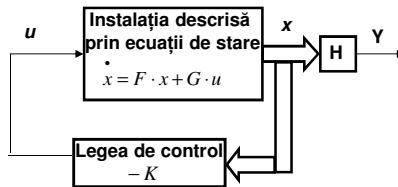
Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Introducerea referinței (r;1)

- Structura sistemului de control după variabilele de stare trebuie completată cu o referință pentru variabila de ieșire.



- Proiectarea legii de control a fost făcută cu preocuparea de a obține o anumită locație a polilor sistemului în buclă închisă (pentru stabilitate și condițiile de performanță impuse).



Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Introducerea referinței (r;2)

- Introducerea simplă a referinței, prin $u = -Kx + r$, ar produce o eroare staționară nenulă la o intrare semnal treaptă deoarece acest sistem este de tip "0".
- Trebuie să calculăm această eroare staționară, precum și valoarea ce trebuie aplicată la intrare pentru obținerea unei erori staționare nule.
- In general, presupunem că valorile dorite ale stării și mărimea de intrare sunt x_{ss} și u_{ss} .
- Legea de control ar trebui să fie modificată:

$$u = -K \cdot x \rightarrow u = u_{ss} - K \cdot (x - x_{ss})$$

pentru a ține cont în legea de compensare de posibila eroare staționară.

- Valorile u_{ss} și x_{ss} trebuie determinate pentru a avea eroare staționară nulă la orice intrare constantă.

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ y = H \cdot x + J \cdot u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot x_{ss} + G \cdot u_{ss} \\ y_{ss} = H \cdot x_{ss} + J \cdot u_{ss} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot x_{ss} + G \cdot u_{ss} \\ r_{ss} = H \cdot x_{ss} + J \cdot u_{ss} \end{cases} \forall r_{ss}$$

- Notăm, și înlocuim în formula de mai sus:

$$\begin{cases} x_{ss} = N_x \cdot r_{ss} \\ u_{ss} = N_u \cdot r_{ss} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot N_x \cdot r_{ss} + G \cdot N_u \cdot r_{ss} \\ r_{ss} = H \cdot N_x \cdot r_{ss} + J \cdot N_u \cdot r_{ss} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot N_x + G \cdot N_u \\ 1 = H \cdot N_x + J \cdot N_u \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cu soluțiile:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice coloană cu un număr de termeni nuli egal cu numărul de variabile de stare

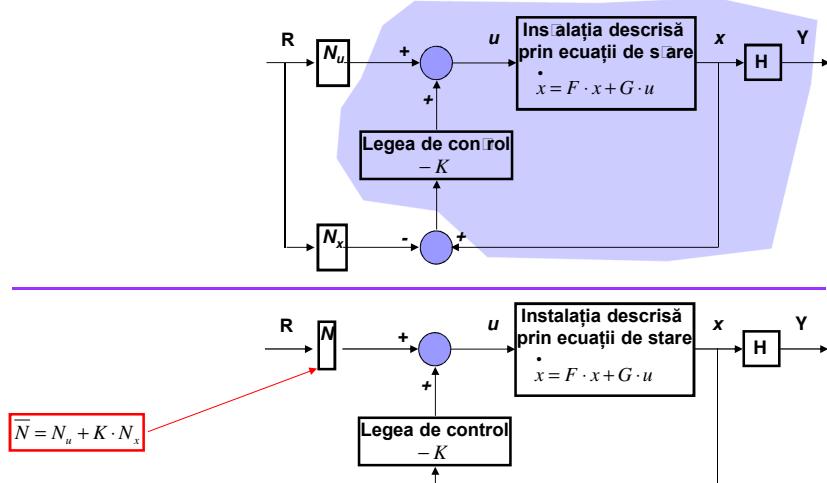
Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Introducerea referinței (r;3)

- Avem acum o formulă pentru a introduce referință dorită în sistemul în buclă închisă:

$$u = N_u \cdot r - K \cdot (x - N_x \cdot r) = -K \cdot x + (N_u + K \cdot N_x) \cdot r = -K \cdot x + \bar{N} \cdot r$$

- Se obțin următoarele reprezentări schematicice (două forme echivalente):



2019 *** Sisteme automate de control

11

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu (1)

- Să se calculeze coeficienții necesari pentru introducerea unei referințe cu eroare staționară nulă la aplicarea unui semnal treptă, pentru un sistem caracterizat de ecuațiile de stare descrise prin matricile:

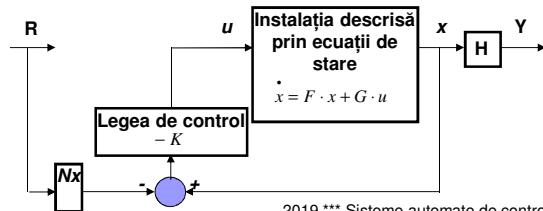
$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & J &= 0 \end{aligned}$$

- Considerați câștigurile reacției $K = [K_1 \ K_2] = [3 \ 4]$. (v.exemplul pendul, pag. 57-59, curs #6)

Solutie

- Observăm că ordinul sistemului este doi, deci avem $x = [x_1 \ x_2]^T$, iar $u = u_1$.
- Ecuația pentru determinarea câștigurilor N_x, Nu devine:

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{x1} \\ N_{x2} \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N_{x1} = 1 \\ N_{x2} = 0 \\ N_u = 0 \end{cases}$$



2019 *** Sisteme automate de control

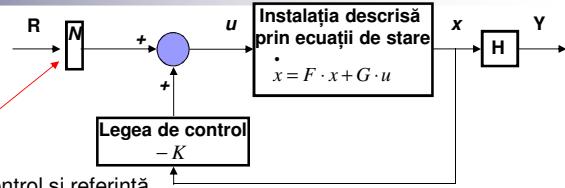
12

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu (2)

- Să calculăm valoarea lui **Nbar**:

$$\bar{N} = N_u + K \cdot N_x = 1 + [3 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$



- Ecuatiile sistemului cu lege de control și referință

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H \\ J_{cl} = 0 \end{cases}$$

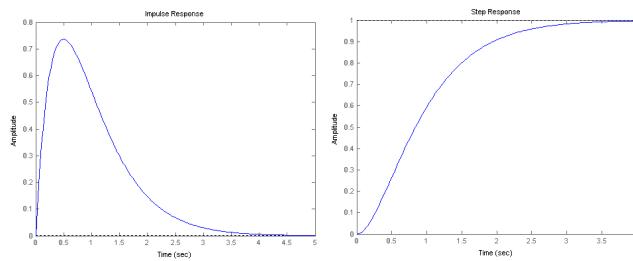
- Răspunsurile la semnal impuls și treaptă sunt arătate în figură.

```
clear;
F=[0 1; -1 0]; G=[0; 1]; H=[1 0]; J=0;
K=[3 4];

N=inv([F G; H J])*[0; 0; 1];
Nx=[N(1); N(2)]; Nu=1;
Nbar=Nu+K*Nx;

FCL=F-G*K;
GCL=G*Nbar;
HCL=H;
JCL=0;

FDT=ss(FCL,GCL,HCL,JCL);
impulse(FDT);
figure;
step(FDT);
```



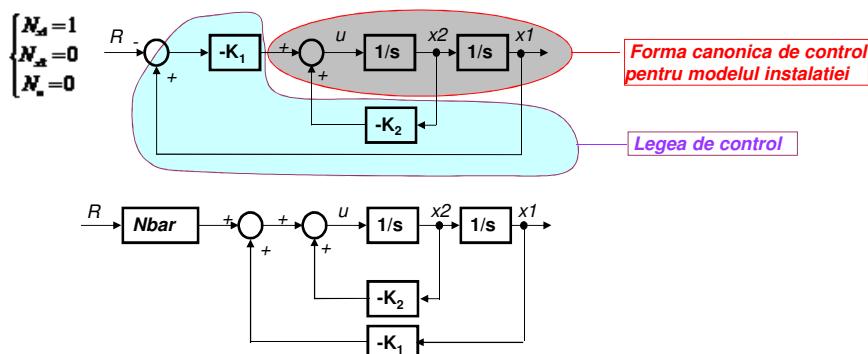
2019 *** Sisteme automate de control

13

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu (3)

- Reprezentarea cu integratori pune în evidență cele două structuri posibile pentru introducerea referinței:



- Care dintre cele două structuri vi se pare mai robustă? Mai puțin sensibilă la variația parametrilor?

- Rezultatele sunt foarte comparabile. Cel mult se poate afirma că a doua structură necesită câștiguri identice fie pe calea de reacție K1, fie la aplicarea referinței prin N (care conține K1). Dar ambele sunt în programul unui microcontroler, deci se poate asigura ușor egalitatea lor.

2019 *** Sisteme automate de control

14

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Despre zero-urile funcției de transfer a sistemului în buclă închisă

- F.d.t. a instalației (buclă deschisă) scrisă din ecuațiile de stare (v.pag.50, cursul #6)

$$A_{ol}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + J = \dots = \frac{\det \begin{bmatrix} s \cdot I - F & G \\ -H & J \end{bmatrix}}{\det(sI - F)}$$

- După determinarea legii de control K și a referinței de la intrare (prin M), sistemul în buclă închisă va avea intrarea r și ieșirea y .

- Să analizăm acum ecuațiile de stare pentru sistemul în buclă închisă, la aplicarea referinței, precum și funcția de transfer Laplace

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H \\ J_{cl} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{cl} = \frac{\det \begin{bmatrix} s \cdot I - (F - G \cdot K) & G \cdot N_{bar} \\ -H & J \end{bmatrix}}{\det(s \cdot I - (F - G \cdot K))}$$

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Despre zero-urile funcției de transfer a sistemului în buclă închisă

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H \\ J_{cl} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{cl} = \frac{\det \begin{bmatrix} s \cdot I - (F - G \cdot K) & G \cdot N_{bar} \\ -H & J \end{bmatrix}}{\det(s \cdot I - (F - G \cdot K))}$$

- **Polii** sistemului sunt valorile proprii ale matricii sistemului în buclă închisă $F - GK$.
- Pentru calcularea răspunsului sistemului în buclă închisă trebuie să știm unde sunt **zero-urile** sistemului, pentru un răspuns de la referință (r) la ieșirea (y).

- **Zero-urile** sunt valori ale lui s pentru care: $\det \begin{bmatrix} sI - (F - GK) & G \cdot N_{bar} \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0$

- Operații între coloanele și rândurile unui determinant determină reducerea la forma următoare:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} sI - (F - GK) & G \cdot N_{bar} \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 &\Leftrightarrow N_{bar} \cdot \det \begin{bmatrix} sI - (F - GK) & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \det \begin{bmatrix} sI - F + GK & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} GK & 0 \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \boxed{\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}} &= 0 \end{aligned}$$

Concluzie: La folosirea reacției după toate stările, **zero-urile** sistemului rămân neschimbate.



Observatii finale

- O referință de intrare se poate introduce astfel încât să nu obținem eroare staționară nenuă la aplicarea unui semnal treaptă de intrare.
- Formulele pentru introducerea referinței au fost calculate pentru compensarea erorii staționare.
- La folosirea reacției după toate stările ($-Kx$), zero-urile sistemului rămân neschimbate.

□ **Atentie = Aceasta nu este reacție după mărimile de ieșire, ci după stări !!!**



Săptămâna 07

Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 26 = Alegerea polilor pentru o proiectare bună.

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Controlul după variabilele de stare (recapitulare)

Am văzut etapele proiectării unui sistem de control în buclă închisă, pe baza ecuațiilor de stare:

- Determinarea legii de control
 - Introducerea referinței
-
- O astfel de proiectare permite mutarea polilor sistemului în buclă închisă de la locația lor din funcția de transfer în buclă deschisă.
 - **Se pune problema alegerii optimale a acestei noi locații a polilor.**

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Selectia locatiei polilor pentru o proiectare adevarata

- Se ține cont de două observații anterioare:
 - Mutarea polilor la o distanță mare înseamnă un câștig K mare (efort mare de control),
 - Este dificil de mutat polii lângă zero-urile existente în modelul instalației ($\rightarrow K$ mare).
- Un câștig K mic este mai ușor de realizat fizic, printr-un sistem de acționare ("actuator") mai ușor de implementat.
 - Exemple**
 - Un circuit R-L alimentat în tensiune pentru a controla curentul.
 - O tensiune mare ar permite o variație mai rapidă a curentului, dar o sursă de tensiune mare este mai greu de realizat.
 - Un motor cu ardere internă utilizat împreună cu un sistem de control a vitezei ("cruise control")
 - O putere mare (500HP) va putea oferi un răspuns foarte rapid, dar va costa mult și va consuma mai multă benzină.
- **Vom analiza două metode de proiectare (alegere optimală a locației polilor)**
 - Utilizarea polilor dominantă de ordinul 2
 - Utilizarea unui loc al rădăcinilor simetric.

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Proiectarea prin utilizarea polilor dominantă de ordinul 2

- Să ne aducem aminte despre răspunsul unui sistem cu funcție de transfer de ordinul 2.

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta \cdot \omega_n)^2 + \omega_n^2 \cdot (1 - \zeta^2)}$$

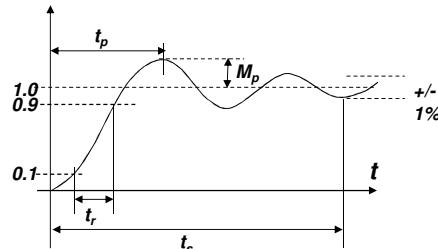
- Performanțele dinamice se pot defini ca:

$$\begin{aligned}\omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} \\ \zeta &\geq \zeta(M_p) \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{t_s}\end{aligned}$$

$$M_p \approx \begin{cases} 5\% & \zeta = 0.7 \\ 16\% & \zeta = 0.5 \\ 35\% & \zeta = 0.3 \end{cases}$$

- Cu notatiile:

$$s = -\sigma \pm j \cdot \omega_d \Rightarrow \sigma = \zeta \cdot \omega_n \quad \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$



- Pentru un sistem de ordin ridicat, putem alege o pereche de poli dominantă complex conjugăți, departe de ceilalți poli ai sistemului, astfel încât performanțele dinamice să fie influențate doar de perechea dominantă, iar polii îndepărtați să nu aibă nici o influență (regimurile lor tranzitorii să fie terminate mult mai rapid decât cele ale sistemului considerat dominant).
 - Trebuie să verificăm dacă zero-urile sunt de asemenei în partea stângă a planului complex, la o distanță mare de perechea de poli dominantă selectată.

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu – Metoda polilor dominanti (1)

- Se reia, fără demonstrație, modelul în ecuațiile de stare a unui sistem de acționare a unei benzi magnetice (laborator).

- Variabilele de stare:

$$x = \begin{bmatrix} x_1(\text{pozitia_benzii_la_roata}) \\ \omega_1(\text{viteza_benzii_la_roata}) \\ x_2(\text{pozitia_servomotor}) \\ \omega_2(\text{viteza_iesire}) \\ i(\text{currentul_in_motor}) \end{bmatrix}$$

Ecuatiile de stare au fost determinate in laboratorul #6, si noteate cu [Fs, Gs]

- Ecuatiile de stare:

$$\begin{aligned}x &= F \cdot x + G \cdot u \\ y &= H \cdot x + J \cdot u\end{aligned}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.10 & -0.35 & 0.10 & 0.10 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.4 & -1.4 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Valorile proprii ale matricei F devin poli ai funcției de transfer în buclă deschisă

- MATLAB $P = \text{eig}(F)$

$$P = \begin{bmatrix} -0.6371 + 0.6669 \cdot j \\ -0.6371 - 0.6669 \cdot j \\ 0.0000 \\ -0.5075 \\ -0.9683 \end{bmatrix}$$

- In funcție de controlul dorit, putem avea diferite mărimi de ieșire:

- Posiția servomotorului $H_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$
- Posiția capului de citire $H_3 = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0]$
- Tensiunea în bandă

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu – Metoda polilor dominantă (2)

- Cerințe de proiectare: să se folosească metoda polilor dominantă de ordinul 2, astfel încât să nu avem mai mult de 5% suprareglare (overshoot) și un timp de creștere sub 4 milisecunde.

Soluție

- Din analiza sistemelor de ordinul doi (v. pag.26, curs #2, ora #6; sau pag.21, acest curs):
 - 5% suprareglare -> $\zeta = 0.7$
 - 4 milisecunde timp de creștere -> $\omega_n \geq 0.45$, adoptăm $\omega_n = 0.60$.
- Perechea de poli dominantă este definită prin
 - Partea reală $\sigma = \zeta * \omega_n = 0.7 * 0.60 = 0.42$
 - Partea imaginară $\omega_d = \omega_n * \sqrt{1-0.5} = 0.7 * \omega_n = 0.7 * 0.60 = 0.42$
- Alegem ceilalți 3 poli la o depărtare de această pereche astfel încât regimul lor tranzitoriu să nu influențeze rezultatele. Adoptăm (arbitră) un factor de 4 ($\omega_{pol} = 4 * \omega_d$).

$$P_{cl} = \begin{bmatrix} -0.42 + 0.42 \cdot j \\ -0.42 - 0.42 \cdot j \\ -1.68 \\ -1.68 \\ -1.68 \end{bmatrix}$$

- Setul de coeficienți capabil să mute polii P în noua locație P_{cl} , se determină cu comanda MATLAB $K=acker(F,G,Pcl)=[0.8356 \ 5.8048 \ 0.5584 \ -0.4542 \ 3.1300]$

2019 *** Sisteme automate de control

23

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu – Metoda polilor dominantă (3)

- Referință se introduce cu relațiile (considerăm x2 pentru închiderea buclei de control, H2)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H2 & J \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0_m \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = N_u + K \cdot N_x$$

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H2 \\ J_{cl} = 0 \end{cases}$$

- Ecuatiile de stare în buclă închisă sunt
- Valorile proprii ale matricei $F-GK$ devin poli ai funcției de transfer în buclă închisă
 - MATLAB $P_{cl} = eig(F-GK)$

- Program MATLAB și rezultate semnal treptă, după x2.

```

F=[0 2 0 0 0; -0.10 -0.35 0.10 0.10 0.75; 0 0 0 2 0; 0.4 0.4 -0.4 -1.4 0; 0 -0.03 0 0 -1];
G=[0; 0; 0; 0; 1];
H2=[0 0 1 0 0];
H3=[0.5 0 0.5 0 0];
H1=[-0.2 -0.2 0.2 0.2 0];
J=0;
P=eig(F)
Pcl=[-0.42+0.42*j; -0.42-0.42*j; -1.68; -1.68; -1.68];
K=acker(F,G,Pcl);
A=[F G; H2 J];
N=(inv(A))'[0; 0; 0; 0; 1];
Nx=N(1:5); Nu=N(6); Nbar=Nu+K'Nx;
Fc1=F-G*K;
Pclr=eig(F-G*K);
Gcl=G*Nbar;
Hcl=H2;
Jcl=0;
sys=ss(Fcl,Gcl,Hcl,Jcl);
step(sys); grid on;

```



2019 *** Sisteme automate de control

24

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu – Metoda polilor dominanți (4)

- Referință se introduce cu relațiile (considerăm x_2 pentru închiderea buclei de control, H_2)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H_2 & J \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0_m \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = N_u + K \cdot N_x$$

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H_2 \\ J_{cl} = 0 \end{cases}$$

Considerăm cei trei poli de 10 ori mai departe.

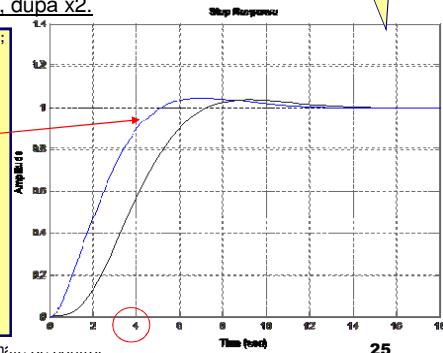
- Ecuatiile de stare în buclă închisă sunt
- Valorile proprii ale matricei $F-GK$ devin poli ai funcției de transfer în buclă închisă
 - MATLAB $P_{cl} = eig(F-GK)$

- Program MATLAB și rezultate semnal treaptă, după x_2 .

```

F=[0 2 0 0 0; -0.10 -0.35 0.10 0.10 0.75; 0 0 0 2 0; 0.4 0.4 -0.4 -1.4 0; 0 -0.03 0 0 -1];
G=[0; 0; 0; 0; 1];
H2=[0 0 1 0 0];
H3=[0.5 0 0.5 0 0];
HT=[-0.2 -0.2 0.2 0.2 0];
J=0;
P=eig(F)
Pcl=[-0.42+0.42*j; -0.42-0.42*j; -16.8; -16.8];
K=acker(F,G,Pcl);
A=[F G; H2 J];
N=(inv(A))*[0; 0; 0; 0; 1];
Nx=N(1:5); Nu=N(6); Nbar=Nu+K*Nx;
Fc1=F-G*K;
Pcl=eig(F-G*K);
Gcl=G*Nbar;
Hcl=H2;
Jcl=0;
sys=ss(Fc1,Gcl,Hcl,Jcl);
step(sys); grid on;

```



2019 *** Sisteme automate de control

25

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Metoda locului simetric al rădăcinilor. Teorie. (1)

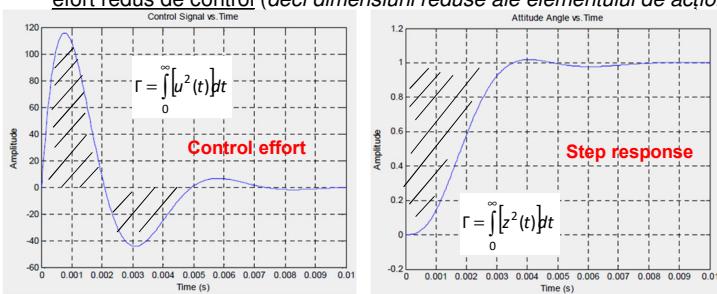
- Să considerăm un sistem descris de ecuațiile de stare pentru sistemul în buclă deschisă:

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ z = H_1 \cdot x \end{cases}$$

- Introducem o metodă de control optimală, denumită **Linear Quadratic Regulator (LQR)**, bazată pe aflarea controlului $u = -Kx$, astfel încât indicele de performanță următor să fie minimizat.

$$\Gamma = \int_0^{\infty} [\rho \cdot z^2(t) + u^2(t)] dt$$

- In acest indice de performanță, avem ρ un factor de ponderare care permite proiectantului să balanseze dorința unui raspuns rapid (valori mici ale erorii de urmare, $\int z^2 dt$) și un efort redus de control (deci dimensiuni reduse ale elementului de acționare, $\int u^2 dt$).



2019 *** Sisteme automate de control

26

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Metoda locului simetric al rădăcinilor. Teorie. (2)

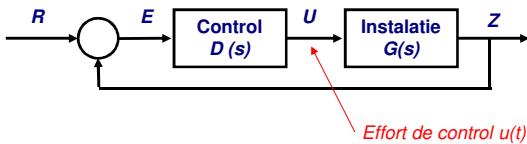
De obicei se alege $\rho = 1$, pentru o balansare a celor două cerințe.

- În buclă închisă avem:

$$z(t) \leftarrow E(s) = \frac{1}{1+D(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) \quad u(t) \leftarrow U(s) = \frac{D(s)}{1+D(s) \cdot G(s)} \cdot R(s)$$

$$\Gamma = \int_0^{\infty} [\rho \cdot z^2(t) + u^2(t)] dt$$

- Se mai ține cont de o posibilă scalare a rezultatelor (*ține cont de câștigul de frecvență nulă a f.d.t., care știm că determină/influențează eroarea staționară, deci z ; și nu influențează semnalul de ieșire aplicat elementului de acționare, deci u*).
- Altfel spus, de la u (**care nu este R în această reprezentare**) la z avem $G(s)$.



2019 *** Sisteme automate de control

27

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Metoda locului simetric al radacinilor. Teorie. (3)

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ z = H_1 \cdot x \end{cases}$$

- Se poate demonstra că valorile optimale ale lui K vor determina plasarea polilor în partea stângă a planului complex (stabilitate) pentru ecuația:

$$1 + \rho \cdot G_0(s) \cdot G_0(-s) = 0$$

unde

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = H_1 \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G = \frac{N(s)}{D(s)}$$

și ρ este coeficientul din relația precedentă LQR.

- Aceasta este o problemă de locul rădăcinilor, cu parametrul ρ .
- Observăm ca s și $-s$ afectează rezultatele în aceeași manieră, motiv pentru care metoda este denumită metoda **locului simetric al rădăcinilor** (symmetrical root locus).
- Punctele de pe locul rădăcinilor vor determina o soluție optimă după criteriul dat și pot constitui un punct de plecare pentru alegerea locației polilor.
 - MATLAB reprezintă întotdeauna locul de 180° , deci $\rho > 0$.
- Altă formă pentru aceeași ecuație de plasare a polilor:

$$1 + \rho \cdot \frac{N(-s) \cdot N(s)}{D(-s) \cdot D(s)} = 0$$

2019 *** Sisteme automate de control

28

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplul 1

Metoda locului simetric al rădăcinilor, de determinare a poziției polilor

- Fie sistemul dat de ecuațiile diferențiale (care poate fi privit direct ca ecuații de stare):
$$\begin{cases} \dot{y} = -a \cdot y + u \\ z = y \end{cases}$$

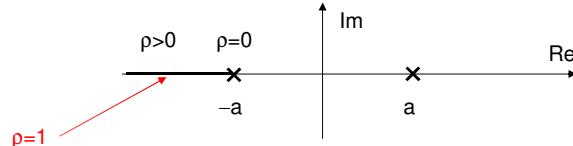
- Functia de transfer G_0 se poate calcula:

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+a}$$

- Scriem acum ecuația SRL:

$$1 + \rho \cdot G_0(-s) \cdot G_0(s) = 0 \Rightarrow 1 + \rho \cdot \frac{1}{(-s+a) \cdot (s+a)} = 0$$

- Aceasta reprezintă o problemă de locul rădăcinilor [la fel ca $1+kL(s)=0$], pentru valori $\rho > 0$ (180°):



- Orice rădăcină a sistemului în buclă închisă ce minimizează indicele de performanță se află la stânga rădăcinii sistemului în bucla deschisă (-a).

- De exemplu se poate considera $\rho=1$.

2019 *** Sisteme automate de control

29

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplul 2

Metoda locului simetric al rădăcinilor de determinare a poziției polilor

- Fie sistemul dat de ecuațiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u \\ z = [2 & 1] \cdot x \end{cases}$$

- Functia de transfer G_0 se poate calcula:

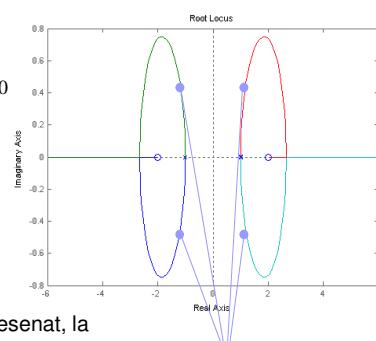
$$G_0(s) = -\frac{s+2}{s^2 - \omega_0^2}$$

- Scriem acum ecuația SRL:

$$1 + \rho \cdot G_0(-s) \cdot G_0(s) = 0 \Rightarrow 1 + \rho \cdot \left[\frac{-s+2}{s^2 - \omega_0^2} \right] \cdot \left[\frac{-s+2}{s^2 - \omega_0^2} \right] = 0$$

- Locusul rădăcinilor desenat în MATLAB ($\omega_0 = 1$):

```
numGG=conv([-1 2], [-1 2]);
denGG=conv([1 0 -1], [1 0 -1]);
sysGG=tf(numGG, denGG);
rlocus(sysGG);
```



- Adoptăm $\rho = 1$, care determină rădăcini pe locul desenat, la

$$1 + \frac{4-s^2}{(s^2-1)^2} = 0 \Rightarrow s^4 - 3 \cdot s^2 + 5 = 0 \Rightarrow s^2 = \frac{3 \pm 3.31 \cdot j}{2} \Rightarrow s = \pm \sqrt{1.500 \pm 1.655 \cdot j} = \pm (1.8668 \pm 0.4432 \cdot j)$$

2019 *** Sisteme automate de control

30

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplul 2

Metoda locului simetric al rădăcinilor de determinare a pozitiei polilor

- Deci rădăcinile dorite de la sistemul în buclă închisă sunt $-1.8668 \pm 0.4432j$.
- Determinăm K cu MATLAB

```
F=[0 1; 1 0];
G=[0 1];
pc=[-1.8668+0.4432j; -1.8668-0.4432j];
K=acker(F,G',pc)
```

$K =$

4.6814 3.7336

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Observatii finale

- Am văzut etapele proiectării unui sistem de control în buclă închisă, pe baza ecuațiilor de stare:
 - Determinarea legii de control
 - Introducerea referinței
- O astfel de proiectare permite mutarea polilor sistemului în buclă închisă de la locația lor din funcția de transfer în buclă deschisă.
- **Se pune problema alegerii optimale a acestei noi locatii a polilor.**
- Avem două metode de proiectare:
 - Utilizarea polilor dominantii de ordinul 2
 - = Aproximarea întregului sistem cu un sistem de ordinul doi
 - = Alegera celorlalți poli la frecvențe mult mai mari (cel puțin de 4 ori)
 - Utilizarea unui loc al rădăcinilor simetric (criteriu optimal)
 - = O metodă de optimizare matematică, bazată pe locul rădăcinilor calculat pentru o funcție compusă de forma

$$1 + \rho \cdot G_0(s) \cdot G_0(-s) = 0$$

unde

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = H_1 \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G = \frac{N(s)}{D(s)}$$

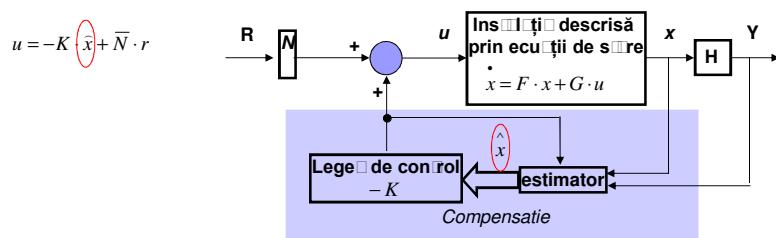
Săptămâna 07

Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 27 = Estimatori și control cu estimare.

Definire și proiectare cu estimatori

- În descrierea metodei precedente de proiectare, am presupus că toate variabilele de stare sunt disponibile pentru reacție.
 - Deoarece este dificil de realizat, trebuie să construim un estimator și să le estimăm din mărimile de ieșire ce pot fi măsurate.
 - Se poate demonstra că teoria legii de control pe bază ecuațiilor de stare rămâne valabilă și dacă utilizăm variabilele de stare estimante în locul variabilei de stare propriu-zise (măsurate).

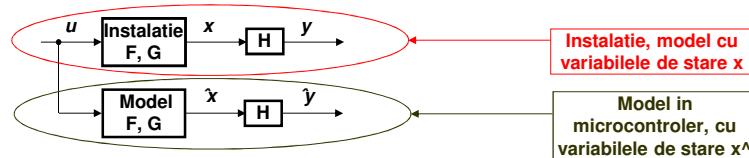


Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Estimator complet (“Full order estimators”). Definiție.

- Vom considera estimarea tuturor variabilelor de stare prin construirea unui model complet al instalației (“*plant*”) în programul microcontrolerului folosit pentru control, model care va fi guvernăt de ecuațiile:

$$\dot{\hat{x}} = F \cdot \hat{x} + G \cdot u$$
- Deoarece presupunem că știm modelul instalației (dat de matricele F, G), mai avem nevoie de condiția initială $x(0)$ a variabilelor de stare pentru a defini variabila de stare estimată cu aceeași condiție initială $x(0)$.
- Obținem următoarea structură pentru estimator:



- Posibile probleme:
 - Lipsa unei informații despre valoarea inițială $x(0)$
 - Model cu parametri imprecisi determinați sau variabili în timp

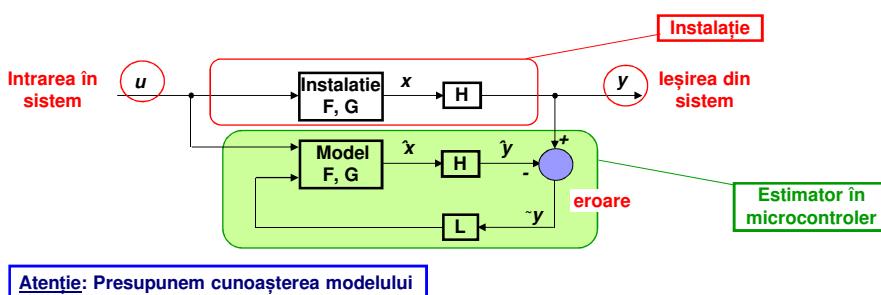
Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Estimator complet (“Full order estimators”). Utilizarea reacției. (1)

- Soluția constă în utilizarea unei reacții pentru compensarea erorilor din jurul modelului.
- În acest scop, definim eroarea de estimare:

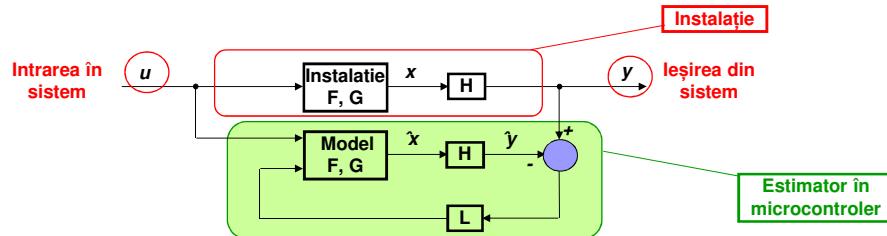
$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$
- Ecuația de stare a erorilor devine (pentru sistemul în buclă deschisă):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = F \cdot \tilde{x} \\ \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \end{cases}$$
- Eroarea converge la zero dacă sistemul (F) este stabil.
- Sistemul inclusând reacția pentru corecția acestei erori are structura:



Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Estimator complet (“Full order estimators”). Utilizarea reacției. (2)



- Considerăm o reacție liniară L asemănător reacției după variabilele de stare (K).
- $$L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$$
- Ecuatiile de stare după eroare (variabila de stare)** - se modifică prin adăugarea acestei mărimi de intrare:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= F \cdot \tilde{x} - L \cdot (\hat{y} - y) = F \cdot \tilde{x} - L \cdot (H \cdot \hat{x} - y) \\ \left(\begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\hat{x}} - x \\ x = F \cdot x + G \cdot u \end{array} \right) &= F \cdot (\hat{x} - x) - L \cdot (H \cdot \hat{x} - y) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = F \cdot \hat{x} - F \cdot x - L \cdot H \cdot \hat{x} + L \cdot y \\ \dot{\hat{x}} - x = F \cdot \hat{x} + G \cdot u - L \cdot H \cdot \hat{x} + L \cdot y \end{array} \\ \Rightarrow \dot{\hat{x}} &= (F - L \cdot H) \cdot \hat{x} + G \cdot u + L \cdot y \end{aligned}$$

2019 *** Sisteme automate de control

37

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Estimator complet (“Full order estimators”). Utilizarea reacției. (3)

- Pentru analiza acestui sistem cu reacție să considerăm regimul dinamic al erorii:
 $\dot{\tilde{x}} = (F - L \cdot H) \cdot \tilde{x}$
- Ecuată caracteristică va fi dată de: $\det[s \cdot I - (F - L \cdot H)] = 0$
- Alegem L astfel încât $(F - L \cdot H)$ are rădăcini stabile, valori proprii “rapide” (la frecvențe înalte), pentru ca eroarea să scadă (conveargă) către 0 și să rămână acolo, independent de mărimea de intrare $u(t)$ (deci, cu eroare staționară nulă).
- Selectia lui L se poate face în același mod cum se face selectia lui K din legea de control (plecând de la cunoașterea locației polilor).
 - In acest scop, specificăm rădăcinile β ale ecuației caracteristice pentru estimator:
$$s_i = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \Rightarrow \alpha_c(s) = (s - \beta_1) \cdot (s - \beta_2) \cdot \dots \cdot (s - \beta_n)$$
 - Apoi identificăm coeficienții lui L prin compararea relațiilor de mai sus.

2019 *** Sisteme automate de control

38

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Estimator complet (“Full order estimators”). Utilizarea reacției. (4)

- Să comparăm cele două legi de control cu reacție liniară.

$$\dot{x} = (F - G \cdot K) \cdot x$$

$$\dot{\hat{x}} = (F - L \cdot H) \cdot \hat{x} + G \cdot u + L \cdot y$$

- Asemănător cu proiectarea legii de control K , continuăm cu folosirea instrucțiunilor **acker** sau **place**.
 - Pentru a folosi aceleasi instructiuni, trebuie să folosim proprietatea $(F-LH)^T = F^T - H^T L^T$
 - Instrucțiunea trebuie folosită ca $L^T = \text{acker}(F^T, H^T, pc)$.
 - Se poate calcula $L = L^T$

Control	Estimator
K	L^T
F	F^T
G	H^T
H	G^T

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu – Estimator pentru controlul unui pendul (1)

- Se consideră pendulul prezentat anterior (*v.pag.57, C#6, modul #24*).
- Se cere folosirea unui estimător cu polii la $-10\omega_0$ (mult mai “rapizi”).

Soluție:

- Ecuatiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x \end{cases}$$

Ecuatiile de stare ce descriu mișcarea pendului
- Ecuată caracteristică dorită

$$\alpha_c(s) = (s + 10 \cdot \omega_0)^2 = s^2 + 20 \cdot \omega_0 \cdot s + 100 \cdot \omega_0^2$$
- Aplicarea teoriei (formula de pe pagina precedentă) conduce la:

$$\det(s \cdot I - (F - L \cdot H)) = 0 \Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -\omega_0^2 - l_2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ \omega_0^2 + l_2 & s \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow s^2 + l_1 \cdot s + (l_2 + \omega_0^2) = 0$$
- Identificarea coeficienților produce L_1, L_2 .

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \cdot \omega_0 \\ 99 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix}$$

Polii din structura estimatorului trebuie aleși cel puțin de 2...6... 10 ori mai rapizi decât polii din structura legii de control de bază.

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu

Estimator pentru controlul unui pendul (2)

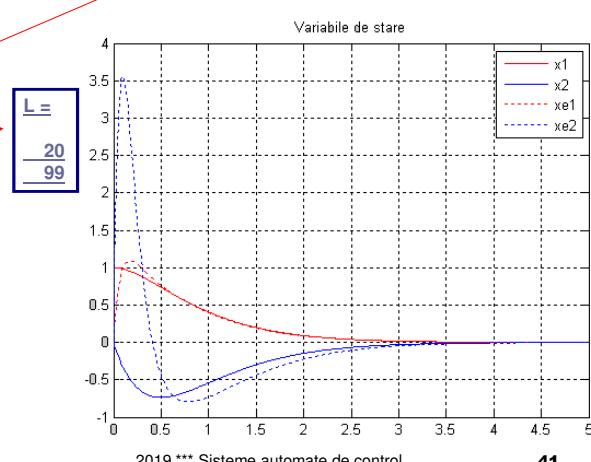
- Să analizăm sistemul și rezultatele în MATLAB

$$\dot{\bar{x}} = (F - L \cdot H) \cdot \bar{x} + G \cdot u + L \cdot y$$

$$L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$$

La plasarea polilor legii de control, foloseam instrucțiunile `acker` sau `place`, pentru determinarea lui K din F-GK. Pentru a folosi aceleași instrucțiuni, trebuie să folosim $(F-LH)^T=F^T-H^T L^T$

```
clear;
wo=1;
F=[0 1; -wo^2 0];
G=[0 1];
H=[1 0];
% Proiectarea estimatorului
pe=[-10*wo; -10*wo];
Lt=acker(F',H',pe);
L=Lt';
% Proiectarea legii de control (pag.5, ora24)
Kc=[3*wo 0 4*wo^2*wo];
Fc=F*G*Kc;
Gc=[1 0];
% Simulam sistemul în buclă închisă
t=0:0.01:5;
u=0*t;
x0=[1.0; 0.0];
[y,x]=sim(Fc,Gc,H,u,t,x0);
plot(t,x(:,1),'r'); hold on;
plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
%
% Simulam rezultatele estimatorului
xe0=[0; 0];
[ye,xe]=sim(F-L^T*H,[0 0],0,[u; y'],t,xe0);
plot(t,xe(:,1),'r'); hold on;
plot(t,xe(:,2),'b'); hold on;
title('VARIABLE DE STARE');
legend('x1','x2','xe1','xe2');
```



2019 *** Sisteme automate de control

41

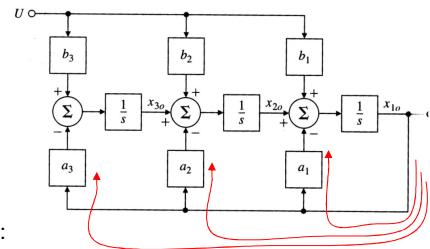
Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Forma canonica a observatorului ("observer canonical form")

- La fel ca pentru proiectarea legii de control, există o formă canonică pentru care ecuațiile de proiectare a estimatorului devin mai ușor de aplicat.
- In acest caz, toate legăturile de reacție sunt de ieșire la variabilele de stare.
- Vom exemplifica pentru o f.d.t. de ordinul 3:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + b_3}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3}$$

- Definim diagrama din figură:



Care poate fi descrisă prin ecuațiile de stare:

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad G_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad F_o - L \cdot H_o = \begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & 1 & 0 \\ -a_2 - l_2 & 0 & 1 \\ -a_3 - l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s^3 + (a_1 + l_1) \cdot s^2 + (a_2 + l_2) \cdot s + (a_3 + l_3) = 0$$

$$H_o = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

- Aveam avantajul observării directe a coeficientilor, urmată de identificarea cu ecuația caracteristică dorită.

2019 *** Sisteme automate de control

42

Proprietatea de observabilitate

- La fel ca în cazul proiectării legii de control, putem să definim o proprietate capabilă să ne spună dacă putem aplica această metodă pentru o anumită situație.
- Testul matematic pentru aceasta este dat de calcularea **matricei de observabilitate**:

$$O = \begin{bmatrix} H \\ H \cdot F \\ H \cdot F^2 \\ \dots \\ H \cdot F^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Aceasta matrice trebuie să fie nesingulară (determinant diferit de zero), pentru a avea o transformare de matrici de la forma dată a ecuațiilor de stare la forma canonica a observatorului.
- Funcțiile MATLAB (**acker** sau **place**) pot fi folosite și în acest caz, în mod asemănător cu cazul proiectării legii de control.

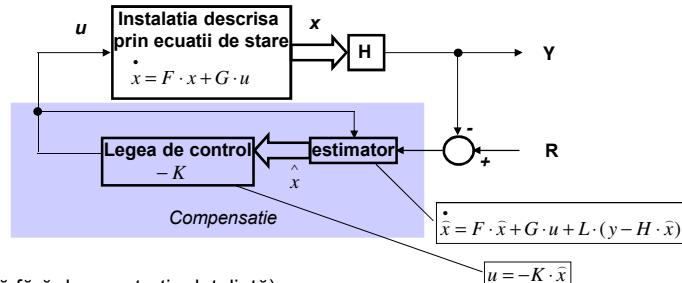
Selectia polilor din structura unui estimator. Teorie.

- Polii din structura estimatorului trebuie aleși cel puțin de 2...6 ori mai rapizi decât polii din structura legii de control de bază.
 - În acest mod, orice regim tranzitoriu data de acești poli trebuie să fie terminat până la intervenția polilor din legea de control.
 - Problema posibilă în această selecție, este data de zgromotul din senzori = poli rapizi care determină creșterea lărgimii de bandă (bandwidth BW) și care interacționează la frecvențe înalte cu acest zgromot.
 - Tinând cont de aceste observații, putem afirma că metoda polilor dominantă este de obicei mai potrivită în acest caz.

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Combinarea structurilor de control și estimator.

- Un sistem automat de control cu estimator va fi compus din:
 - Înțelegerie și senzori de măsurare a mărimii de ieșire din sistem;
 - Eștimător;
 - Modul de introducere a referinței;
 - Legea de control, determinată prin $(-K)$.
- Deoarece toate aceste elemente pot fi prezente, ecuațiile de control pot fi combinate:



- Se obține (dată fără demonstrație detaliată):

$$D_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K \cdot (s \cdot I - F + G \cdot K + L \cdot H)^{-1} \cdot L$$

2019 *** Sisteme automate de control

45

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Observații finale

- Au fost date principiile proiectării unui estimator pentru determinarea variabilelor de stare prin calcul de la valorile de ieșire.
- Ecuațiile de determinare a unui estimator plecând de la ecuațiile de stare sunt date.
- La fel ca pentru proiectarea legii de control
 - Există o formă canonica pentru care ecuațiile de proiectare a estimatorului devin mai ușor de aplicat.
 - Există o matrice de observabilitate care ne ajută să verificăm posibilitatea utilizării unui estimator
- Aceleasi etape trebuie urmate asemănător cu proiectarea unei legi de control pe baza ecuațiilor de stare.

2019 *** Sisteme automate de control

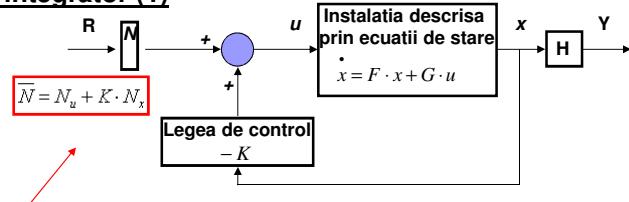
46

Săptămâna 07

Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 28 = Control integral și urmărire robustă (“robust tracking”).

Control cu termen integrator (1)



- Introducerea referinței prin metoda descrisă anterior conduce la un sistem cu eroare staționară nulă.
 - Dar ... orice schimbare de parametri în timpul operării instalației poate determina o eroare staționară deoarece ecuațiile ce stau la baza calculării **Nbar** nu mai sunt respectate.
- Ne propunem să discutăm metode de control robust la variația parametrilor.
 - Vom folosi control cu termen integrator pentru a obține un control robust la variația parametrilor.
 - **Observație** - Metodele de control dezvoltate cu ajutorul ecuațiilor de stare nu conțin nici un element integral (doar control liniar **-K**).

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Control cu termen integrator (2)

- Să incepem cu prezentarea unei soluții bazate pe o buclă de reacție după integrala erorii mărimii ce trebuie urmarită (referință -> ieșire).

- In acest scop, să adăugăm o nouă variabilă de stare la sistemul de ecuații de stare:

 - Sistemul de ecuații de stare ce descrie instalația:

$$\dot{x} = F \cdot x + G \cdot u + G_1 \cdot w$$

$$y = H \cdot x$$

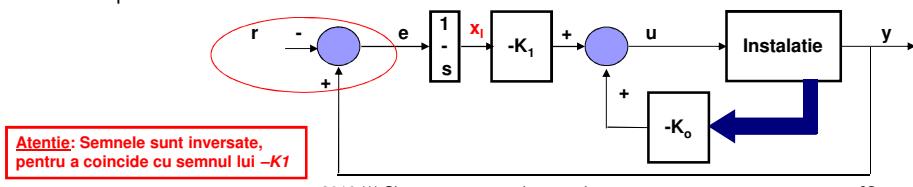
 - Adaugăm o variabilă de stare pentru eroare

$$\dot{x}_I = e = H \cdot x - r$$

 - Noile ecuații de stare devin (am marcat matricile pentru înțelegerea ecuațiilor):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & [H] \\ 0 & [F] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [G] \end{bmatrix} \cdot u - \begin{bmatrix} 1 \\ [0] \end{bmatrix} \cdot r + \begin{bmatrix} 0 \\ [G_1] \end{bmatrix} \cdot w$$

 - Utilizând noile ecuații de stare și structura de control propusă $[K_1, K_o]$, putem reproiecta sistemul de control.



2019 *** Sisteme automate de control

49

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Control cu termen integrator a vitezei unui motor (1).

- Fie modelul instalației descris de (f.d.t. în buclă deschisă)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3} \Rightarrow \begin{cases} F = -3 & G = 1 \\ H = 1 & J = 0 \end{cases}$$

- Se cere să proiectăm un sistem de control caracterizat de

 - Adăugarea unui control cu termen integrator => Sistem în buclă închisă cu 2 poli (buclă deschisă + integrator)
 - Un sistem în buclă închisă cu 2 poli la $s = -5$.
 - Un estimator cu un pol la $s = -10$.

Soluție

- Condiția de plasare a polilor sistemului în buclă închisă:

$$pc = [-5; -5] \Rightarrow s^2 + 10 \cdot s + 25 = 0$$

- Un control cu termen integrator se adaugă prin rescrierea ecuațiile de stare pentru a pune în evidență noua variabilă de stare pentru eroare (consider $r = u$, la intrare și $y = x$, la ieșire):

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= x - r \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (u) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} & G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H_c = H = 1 & J_c = 0 \end{cases}$$

2019 *** Sisteme automate de control

50

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Control cu termen integrator a vitezei unui motor (2).

Soluție

- Putem scrie ecuația caracteristică a sistemului în buclă închisă:

$$\det(s \cdot I - F + G \cdot K) = 0 \Rightarrow \det\left(s \cdot I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ K_1 & s+3+K_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 + (3 + K_2) \cdot s + K_1 = 0 \Rightarrow K = \boxed{\begin{bmatrix} 25 & 7 \end{bmatrix}}$$

pc = [-5; -5] ⇒ s² + 10 · s + 25 = 0

- Sau se poate utiliza una dintre instrucțiunile MATLAB **acker** sau **place**.

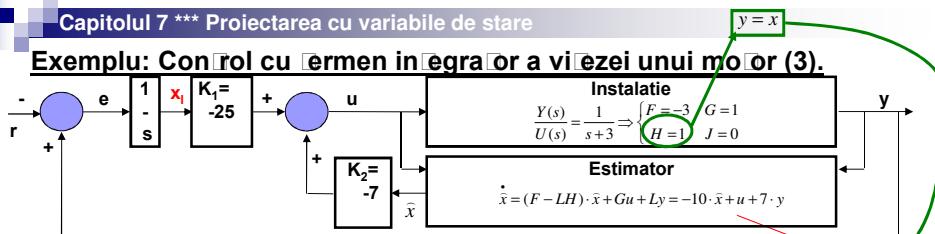
- Ecuția caracteristică pentru estimator este (*conform teoriei*):

$$\det(s \cdot I - F + L \cdot H) = 0 \Rightarrow \det(s \cdot I + 3 + L \cdot 1) = 0 \Rightarrow s + 3 + L = 0 \Rightarrow L = 7$$

pol_la_s = -10

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

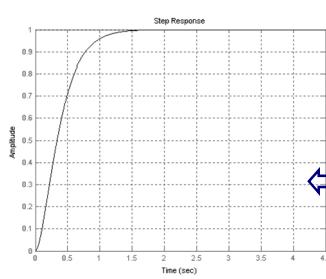
Exemplu: Control cu termen integrator a vitezei unui motor (3).



- Ecuțiile sistemului rezultă prin combinarea legilor de control și estimare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$u = -K \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$



```
clear;
F=[0 1 0; -25 -3 -7; -25 7 -17];
G=[-1; 0; 0];
H=[0 1 0]; % Iesirea este x
% Simulam sistemul
A=ss(F,G,H,0);
step(A, 4.5); grid on;
axis([0, 4.5, 0, 1]);
```

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -25 & -3 & -7 \\ -25 & 7 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (1)

- Multe aplicații de control avansat presupun un sistem cu o referință variabilă ce trebuie urmarită cu eroare staționară nulă.
 - Diverse aplicații servo
 - Sisteme de tip PLL
 - Aplicații ce funcționează în legatură cu rețea de putere de 50Hz
- În toate aceste cazuri, presupunem că știm că referință (variabilă, dar repetitivă) este un semnal ce satisface o ecuație diferențială.
 - Cazul cel mai tipic îl reprezintă urmărirea unei referințe sinusoidale, caz în care ecuația diferențială este:
$$r = -\omega_o^2 \cdot r$$
- În toate aceste cazuri, se suplimentează sistemul de ecuații diferențiale ce descriu instalată și legea de control, cu ecuații și variabile de stare ce descriu ecuațiile diferențiale verificate de semnalul de intrare (referință).
 - Se obține o structură foarte asemănătoare cu cea de estimator, dar plecând de la referință în loc de mărimea de ieșire.
 - Se definește o eroare de urmărire $e=y-r$ și se proiectează o lege de control pentru reducerea acestei erori.
 - Controlul rezultat se numește control în spațiu erorii, pentru a pune în evidență că avem control cu variabile de stare, incluzând variabilele definite pentru ecuația diferențială a carei soluție este semnalul de intrare dat (variabil și periodic).

2019 *** Sisteme automate de control

53

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (2)

- Să considerăm matricile de stare ce definesc un sistem ce caracterizează instalată unui servomecanism pentru o unitate de disc (intrare u și perturbație w).

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & J &= 0 \end{aligned}$$

- Referință este o sinusoidă de frecvență ω_o .

Soluție

- Să considerăm un sistem cu 4 variabile de stare:
 - Sistemul dat ca instalată are 2 variabile de stare.
 - Construim un model al semnalului de intrare ce poate fi caracterizat prin 2 variabile de stare (ecuație de ordinul doi), dar variabilele de stare sunt în spațiu erorilor.
- Trebuie să reconstruim sistemul ecuațiilor de stare:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_o^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= 0 \end{aligned}$$

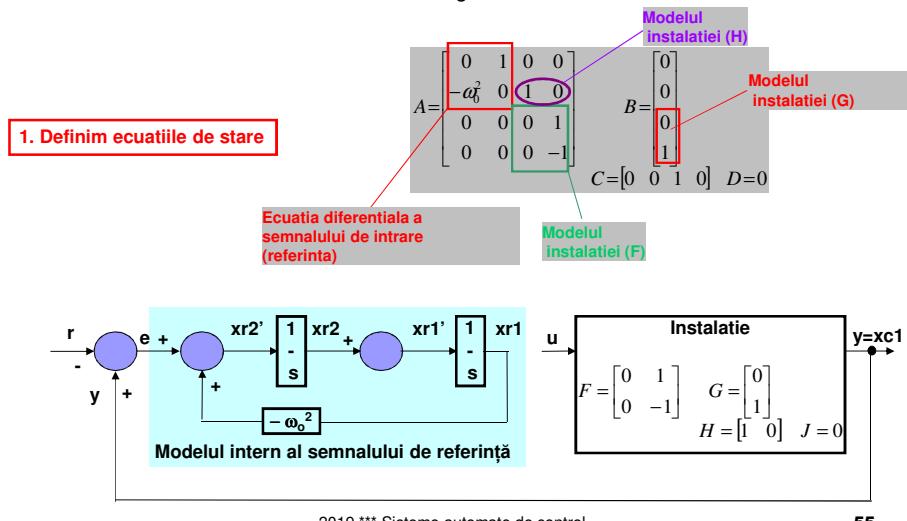
2019 *** Sisteme automate de control

54

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (3)

- Vom ilustra demonstrația printr-o serie de figuri, pentru a evita prezentarea întregului calcul matematic.
- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:



2019 *** Sisteme automate de control

55

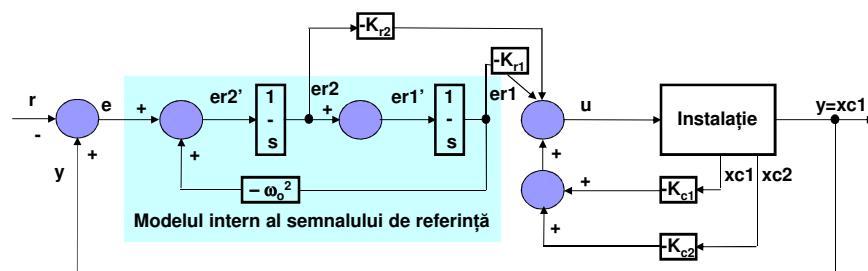
Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (4)

- Vom ilustra demonstrația printr-o serie de figuri, pentru a evita prezentarea intregului calcul matematic.
- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:

2. Introducem legea de control

■ $u = -Kx$



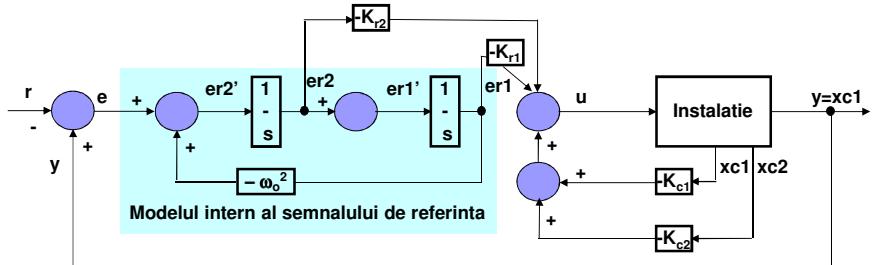
2019 *** Sisteme automate de control

56

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (5)

- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:



3. Schimbare de variabila de la forma canonica de control la forma canonica de observare

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_{r1} \\ \dot{e}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [-K_{r1} \quad -K_{r2}] \begin{bmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_{r2} \\ \dot{e}_{r1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{r2} \\ e_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [-K_{r2} \quad -K_{r1}] \begin{bmatrix} e_{r2} \\ e_{r1} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{r1} \\ \dot{x}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_{r2} \\ -K_{r1} \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

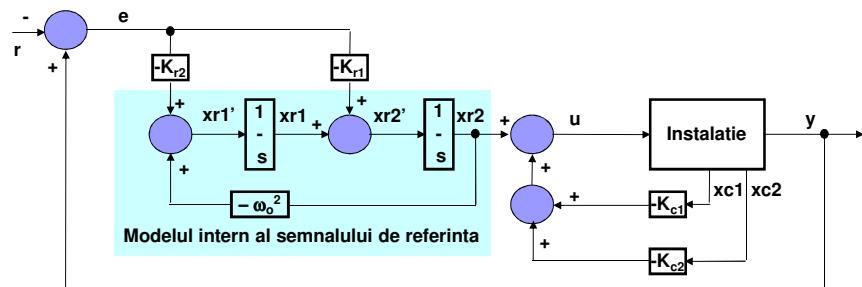
2019 *** Sisteme automate de control

57

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (6)

- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:



2019 *** Sisteme automate de control

58

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

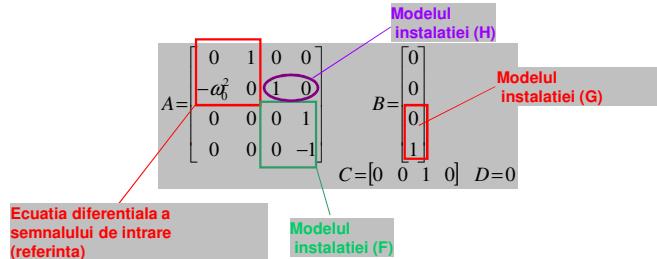
Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (7)

- Proiectarea legii de control se reduce la determinarea unui vector al câștigurilor de reacție:

- Să considerăm pentru un exemplu numeric, că $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$.
- Ne propunem ca polii sistemului în buclă închisă să aibă locațiile:

$$pc = [-1 + j\sqrt{3} \quad -1 - j\sqrt{3} \quad -\sqrt{3} + j \quad -\sqrt{3} - j] \quad K = [K_{r1} \quad K_{r2} \quad K_{c1} \quad K_{c2}]$$

- De pe figura de la pag.9 deducem ecuațiile de stare ale sistemului în buclă închisă (s-ar putea determina și prin aplicarea succesivă a diverselor ecuații de control și introducere a referinței):



2019 *** Sisteme automate de control

59

Capitolul 7 *** Proiectarea cu variabile de stare

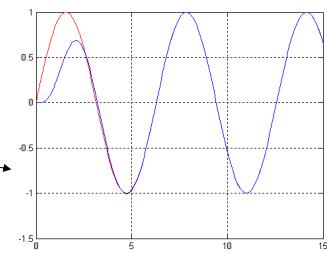
Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (8) $\omega_0=1$

$$\begin{bmatrix} \cdot & x_{r1} \\ \cdot & x_{r2} \\ \cdot & x_{c1} \\ \cdot & x_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -K_{r1} & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & -K_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -K_{c1} & -1-K_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{r1} \\ K_{r2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -K(2) & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & -K(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -K(3) & -1-K(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K(2) \\ K(1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r$$

```

clear;
w0=1;
A=[0 1 0 0; -w0*w0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 -1];
B=[0; 0; 0; 1];
pc=[-1+j*sqrt(3); -1-j*sqrt(3); -sqrt(3)+j; -sqrt(3)-j];
K=place(A, B, pc)
%
Ac=[0 1-K(2) 0; -w0*w0 0 -K(1) 0; 0 0 0 1; 1 0 -K(3) -1-K(4)];
Bc=[K(2); K(1); 0; 0]; Cc=[0 0 1 0];
% Simulare sistemul în buclă închisă
t=0:0.1:15;
u=sin( );
x0=[0; 0; 0; 0];
[y,x]=lsim(Ac,Bc,Cc,0,u,t,x0);
plot(t,u,'r-'; grid on; hold on;
plot(t,y,'b-');

```



2019 *** Sisteme automate de control

60



Observații finale

- Sisteme de control bazate pe proprietățile ecuațiilor de stare au fost dezvoltate pentru estimarea variabilelor de stare și pentru urmărirea unei referințe variabile, periodice descrise printr-o funcție matematică (în exemplu, sinusoidală).