

# Sisteme Automate de Control

Note de curs \*\*\* 2019 Sem.2

## Capitolul 7 \*\*\* Proiectarea cu variabile de stare

### Săptămâna 07

#### Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 25 = Introducerea referinței. Observații asupra **zero**-urilor din sistem.
- Ora 26 = Alegerea polilor pentru o proiectare bună.
- Ora 27 = Estimatori și control cu estimare.
- Ora 28 = Control integral și urmărire robustă ("*robust tracking*").

## Săptămâna 07

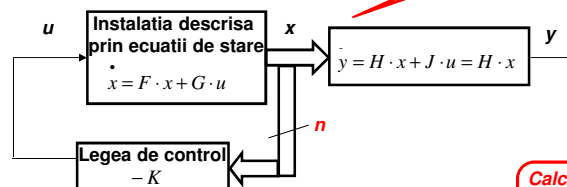
### Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 25 = Introducerea referinței. Observații asupra **zero**-urilor din sistem.

### Recapitulare: Control cu variabile de stare (din modul 23-24)

Performanțele dinamice depind de polii sistemului.  
Polii sistemului sunt aceiași cu valorile proprii ale matricei  $F$ .  
Pentru a schimba locația polilor, trebuie schimbată matricea  $F$ .

Matricele  $F, G, H, J$  reprezintă sistemul



Calculule se simplifică dacă ecuațiile sunt în forma canonică de control.

Ecuția caracteristică a sistemului în buclă închisă este

$$\det[s \cdot I - F + G \cdot K] = 0$$

ce se echivalează cu condițiile de proiectare pentru performanță.

### Efectul poziției zero-urilor (1)

**Exemplu** Să considerăm un sistem în buclă deschisă caracterizat de matricile:

~ același exemplu de la pagina 43 (curs 6, modul 23), cu ecuațiile scrise ca la pagina 49 (curs 6, modul 23) = forma canonică de observare.

$$F = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = 0 \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + z_0}{s^2 + 7 \cdot s + 12}$$

Să se găsească câștigurile legii de control  $K$ , pentru a plasa polii sistemului la rădăcinile ecuației  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ .

#### Soluție:

1. Scriem ecuația caracteristică pentru sistemul cu buclă închisă după variabilele de stare:

$$\det[s \cdot I - (F - G \cdot K)] = 0 \Rightarrow \det \left[ s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix} \cdot [K_1 \ K_2] \right) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} s + 7 + K_1 & -1 + K_2 \\ 12 - z_0 \cdot K_1 & s - z_0 \cdot K_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (s + 7 + K_1) \cdot (s - z_0 \cdot K_2) - (12 - z_0 \cdot K_1) \cdot (-1 + K_2) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 + (-z_0 \cdot K_2 + 7 + K_1) \cdot s + (-7 \cdot z_0 \cdot K_2 - z_0 \cdot K_1 \cdot K_2 + 12 - 12 \cdot K_2 - z_0 \cdot K_1 + z_0 \cdot K_1 \cdot K_2) = 0$$

### Efectul poziției zerourilor (2)

2. Această ecuație trebuie identificată cu cea dorită ( $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ ) în scopul determinării constantelor  $K_1, K_2$ .

$$\begin{cases} 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 7 + K_1 - z_0 \cdot K_2 \\ \omega_n^2 = 12 - 7 \cdot z_0 \cdot K_2 - 12 \cdot K_2 - z_0 \cdot K_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{z_0 \cdot (14 \cdot \zeta \cdot \omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12 \cdot (2 \cdot \zeta \cdot \omega_n - 7)}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \\ K_2 = \frac{z_0 \cdot (7 - 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \end{cases}$$

**Notă** = Această metodă de calcul a câștigurilor  $K$  devine dificilă și impredictibilă la sisteme complexe. De aceea se folosește trecerea prin forma canonică de control, care simplifică calculele și oferă o formulare unitară pentru lucrul cu calculatorul.

### Efectul poziției zerourilor (3)

- Să considerăm un caz numeric pentru criteriul de performanță  $\omega_n=2$ ,  $\zeta=0.5$ .
- Ecuția caracteristică dorită devine  $s^2+2s+4=0$ , cu rădăcinile  $-1 \pm j \cdot \sqrt{3}$  și modulul 2.
- Coeficienții legii de control devin:

$$\begin{cases} K_1 = \frac{-27 \cdot z_0 - 60}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \\ K_2 = \frac{5 \cdot z_0 + 8}{(z_0 + 3) \cdot (z_0 + 4)} \end{cases}$$

- Să analizăm diferite valori pentru  $z_0$ .

```
clear;
A0=[-7 1; -12 0];
z0=-2.99;
B0=[1; -z0];
pc=roots([1 2 4]);
K=place(A0,B0,pc);
```

$$z_0 = 2 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -3.80 \\ K_2 = 0.60 \end{cases}$$

$$z_0 = -2.99 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 2052.5 \\ K_2 = -688.1 \end{cases}$$

**Concluzie** - Selecția polilor doriti (în exemplu,  $-1 \pm j \cdot \sqrt{3}$ ) în apropierea zero-ului sistemului dat (instalație, -2.99) conduce la valori foarte mari ale controlului  $K$ .

### Efectul poziției zerourilor (4)

- Să considerăm un exemplu de sistem în buclă deschisă, definit în forma unui sistem de ecuații scrise sub forma canonică de control.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \\ y = C_c \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ D_c = 0 \end{cases} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$$

- Să ne propunem mutarea polilor sistemului la  $-10 \pm 10j$  (departe de zero-ul și polii inițiali)

```
clear;
A0=[-7 -12; 1 0]; B0=[1; 0];
C0=[1 2]; D0=0;
pc=[-10+10*i -10-10*i];
K=acker(A0,B0,pc);
[num den]=ss2tf(A0-B0*K,B0,C0,D0);
CL=tf(num,den); roots(den)
```

- Obținem  $K = [13 \ 188]$

$$s + 2$$

$$s^2 + 20s + 200$$

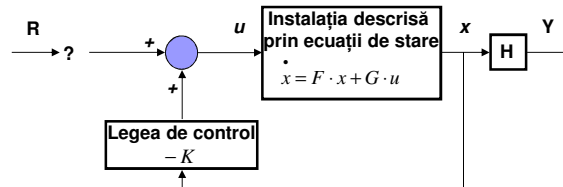
- Să scriem ecuațiile de stare pentru sistemul cu buclă închisă după variabilele de stare.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [A - BK] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [13 \ 188] \right\} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -200 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

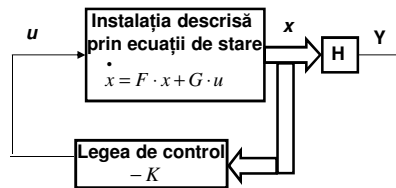
**Se observă că zero-urile rămân aceleași cu sistemul în buclă deschisă, descris în formă canonică !!**

### Introducerea referinței ( $r;1$ )

- Structura sistemului de control după variabilele de stare trebuie completată cu o referință pentru variabila de ieșire.



- Proiectarea legii de control a fost făcută cu preocuparea de a obține o anumită locație a polilor sistemului în buclă închisă (pentru stabilitate și condițiile de performanță impuse).



### Introducerea referinței ( $r;2$ )

- Introducerea simplă a referinței, prin  $u = -Kx + r$ , ar produce o eroare staționară nenulă la o intrare semnal treaptă deoarece acest sistem este de tip "0".
- Trebuie să calculăm această eroare staționară, precum și valoarea ce trebuie aplicată la intrare pentru obținerea unei erori staționare nule.
- În general, presupunem că valorile dorite ale stării și mărimii de intrare sunt  $x_{ss}$  și  $u_{ss}$ .
- Legea de control ar trebui să fie modificată:

$$u = -K \cdot x \rightarrow u = u_{ss} - K \cdot (x - x_{ss})$$

pentru a ține cont în legea de compensare de posibila eroare staționară.

- Valorile  $u_{ss}$  și  $x_{ss}$  trebuie determinate pentru a avea eroare staționară nulă la orice intrare constantă.

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ y = H \cdot x + J \cdot u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot x_{ss} + G \cdot u_{ss} \\ r_{ss} = H \cdot x_{ss} + J \cdot u_{ss} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot x_{ss} + G \cdot u_{ss} \\ r_{ss} = H \cdot x_{ss} + J \cdot u_{ss} \end{cases} \forall r_{ss}$$

- Notăm, și înlocuim în formula de mai sus:

$$\begin{cases} x_{ss} = N_x \cdot r_{ss} \\ u_{ss} = N_u \cdot r_{ss} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot N_x \cdot r_{ss} + G \cdot N_u \cdot r_{ss} \\ r_{ss} = H \cdot N_x \cdot r_{ss} + J \cdot N_u \cdot r_{ss} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = F \cdot N_x + G \cdot N_u \\ 1 = H \cdot N_x + J \cdot N_u \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cu soluțiile:

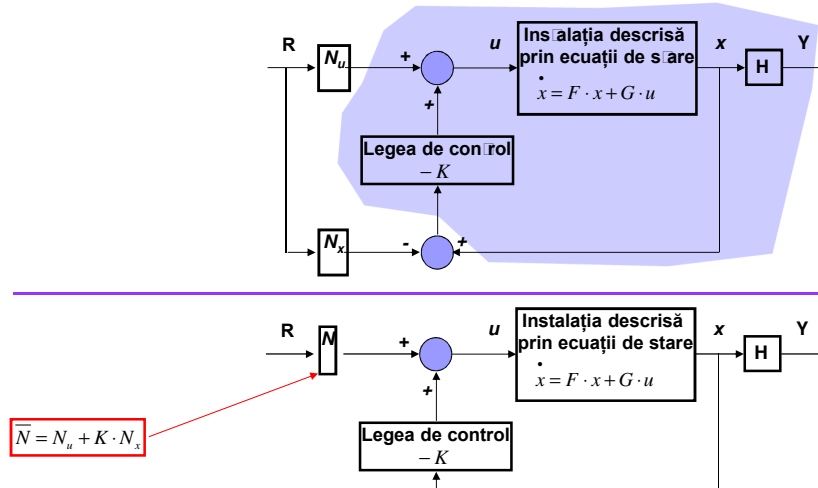
$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice coloană cu un număr de termeni nuli egal cu numărul de variabile de stare

### Introducerea referinței (r;3)

- Avem acum o formulă pentru a introduce referința dorită în sistemul în buclă închisă:  

$$u = N_u \cdot r - K \cdot (x - N_x \cdot r) = -K \cdot x + (N_u + K \cdot N_x) \cdot r = -K \cdot x + \bar{N} \cdot r$$
- Se obțin următoarele reprezentări schematice (două forme echivalente):



2019 \*\*\* Sisteme automate de control

11

### Exemplu (1)

- Să se calculeze coeficienții necesari pentru introducerea unei referințe cu eroare staționară nulă la aplicarea unui semnal treaptă, pentru un sistem caracterizat de ecuațiile de stare descrise prin matricile:

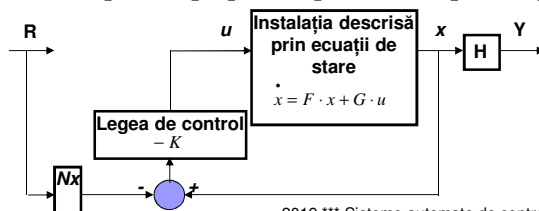
$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = 0$$

- Considerați câștigurile reacției  $K = [K_1 \ K_2] = [3 \ 4]$ . (v.exemplul pendul, pag. 57-59, curs #6)

### Soluție

- Observăm că ordinul sistemului este doi, deci avem  $x = [x_1 \ x_2]^T$ , iar  $u = u_1$ .
- Ecuația pentru determinarea câștigurilor  $N_x$ ,  $N_u$  devine:

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{x1} \\ N_{x2} \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N_{x1} = 1 \\ N_{x2} = 0 \\ N_u = 0 \end{cases}$$



2019 \*\*\* Sisteme automate de control

12

## Capitolul 7 \*\*\* Proiectarea cu variabile de stare

### Exemplu (2)

- Să calculăm valoarea lui  $N_{bar}$ :

$$\bar{N} = N_u + K \cdot N_x = 1 + [3 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

- Ecuatiile sistemului cu lege de control și referință

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H \\ J_{cl} = 0 \end{cases}$$

Atât  $K$  cât și  $N$  sunt coeficienți, fără termen integrativ. Orice variație a parametrilor poate influența rezultatele.

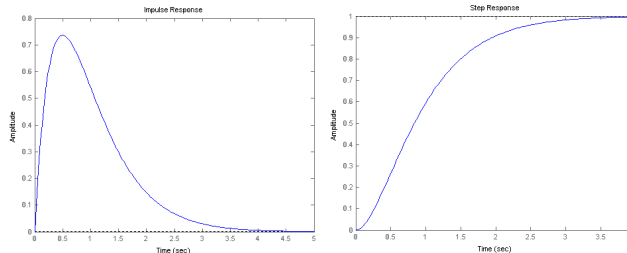
- Răspunsurile la semnal impuls și treaptă sunt arătate în figură.

```
clear;
F=[0 1; -1 0]; G=[0; 1]; H=[1 0]; J=0;
K=[3 4];

N=inv([F G; H J])*[0; 0; 1];
Nx=[N(1); N(2)]; Nu=1;
Nbar=Nu+K*Nx;

FCL=F-G*K;
GCL=G*Nbar;
HCL=H;
JCL=0;

FDT=ss(FCL,GCL,HCL,JCL);
impulse(FDT);
figure; step(FDT);
```



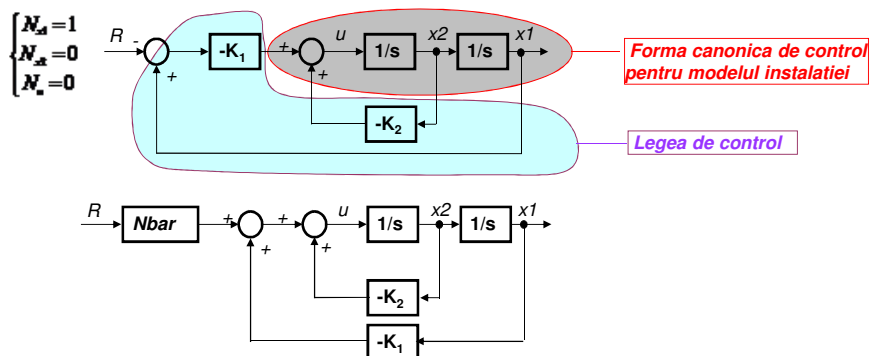
2019 \*\*\* Sisteme automate de control

13

## Capitolul 7 \*\*\* Proiectarea cu variabile de stare

### Exemplu (3)

- Reprezentarea cu integratori pune în evidență cele două structuri posibile pentru introducerea referinței:



- Care dintre cele două structuri vi se pare mai robustă? Mai puțin sensibilă la variația parametrilor?

- Rezultatele sunt foarte comparabile. Cel mult se poate afirma că a doua structură necesită câștiguri identice fie pe calea de reacție  $K_1$ , fie la aplicarea referinței prin  $N$  (care conține  $K_1$ ). Dar ambele sunt în programul unui microcontroler, deci se poate asigura ușor egalitatea lor.

2019 \*\*\* Sisteme automate de control

14

**Despre zero-urile funcției de transfer a sistemului în buclă închisă**

- F.d.t. a instalației (buclă deschisă) scrisă din ecuațiile de stare (v.pag.50, cursul #6)

$$A_{ol}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + J = \dots = \frac{\det \begin{bmatrix} s \cdot I - F & G \\ -H & J \end{bmatrix}}{\det(sI - F)}$$

- După determinarea legii de control **K** și a referinței de la intrare (prin **N**), sistemul în buclă închisă va avea intrarea **r** și ieșirea **y**.

- Să analizăm acum ecuațiile de stare pentru sistemul în buclă închisă, la aplicarea referinței, precum și funcția de transfer Laplace

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H \\ J_{cl} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{cl} = \frac{\det \begin{bmatrix} s \cdot I - (F - G \cdot K) & G \cdot N_{bar} \\ -H & J \end{bmatrix}}{\det(s \cdot I - (F - G \cdot K))}$$

**Despre zero-urile funcției de transfer a sistemului în buclă închisă**

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H \\ J_{cl} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{cl} = \frac{\det \begin{bmatrix} s \cdot I - (F - G \cdot K) & G \cdot N_{bar} \\ -H & J \end{bmatrix}}{\det(s \cdot I - (F - G \cdot K))}$$

- **Polii** sistemului sunt valorile proprii ale matricii sistemului în buclă închisă **F - GK**.
- Pentru calcularea răspunsului sistemului în buclă închisă trebuie să știm unde sunt **zero**-urile sistemului, pentru un răspuns de la referința (**r**) la ieșirea (**y**).

- **Zero**-urile sunt valori ale lui **s** pentru care:  $\det \begin{bmatrix} sI - (F - GK) & G \cdot N_{bar} \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0$

- Operații între coloanele și rândurile unui determinant determină reducerea la forma următoare:

$$\det \begin{bmatrix} sI - (F - GK) & G \cdot N_{bar} \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow N_{bar} \cdot \det \begin{bmatrix} sI - (F - GK) & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} sI - F + GK & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} GK & 0 \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

**Concluzie:** La folosirea reacției după toate stările, **zero**-urile sistemului rămân neschimbate.



### Observații finale

- O referință de intrare se poate introduce astfel încât să nu obținem eroare staționară nenulă la aplicarea unui semnal treaptă de intrare.
- Formulele pentru introducerea referinței au fost calculate pentru compensarea erorii staționare.
- La folosirea reacției după toate stările (  $-Kx$  ), **zero**-urile sistemului rămân neschimbate.
- Atenție = Aceasta nu este reacție după mărimile de ieșire, ci după stări !!!

### Săptămâna 07

#### Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 26 = Alegerea polilor pentru o proiectare bună.

### Controlul după variabilele de stare (recapitulare)

Am văzut etapele proiectării unui sistem de control în buclă închisă, pe baza ecuațiilor de stare:

- Determinarea legii de control
- Introducerea referinței
- O astfel de proiectare permite mutarea polilor sistemului în buclă închisă de la locația lor din funcția de transfer în buclă deschisă.
- Se pune problema alegerii optime a acestei noi locații a polilor.

### Selecția locației polilor pentru o proiectare adecvată

- Se ține cont de două observații anterioare:
  - Mutarea polilor la o distanță mare înseamnă un câștig  $K$  mare (efort mare de control),
  - Este dificil de mutat polii lângă **zero**-urile existente în modelul instalației ( $\rightarrow K$  mare).
- Un câștig  $K$  mic este mai ușor de realizat fizic, printr-un sistem de acționare ("actuator") mai ușor de implementat.
  - Exemple
    - Un circuit R-L alimentat în tensiune pentru a controla curentul.
      - O tensiune mare ar permite o variație mai rapidă a curentului, dar o sursă de tensiune mare este mai greu de realizat.
    - Un motor cu ardere internă utilizat împreună cu un sistem de control a vitezei ("cruise control")
      - O putere mare (500HP) va putea oferi un răspuns foarte rapid, dar va costa mai mult și va consuma mai multă benzină.
- Vom analiza două metode de proiectare (alegere optimă a locației polilor)
  - Utilizarea polilor dominanți de ordinul 2
  - Utilizarea unui loc al rădăcinilor simetric.

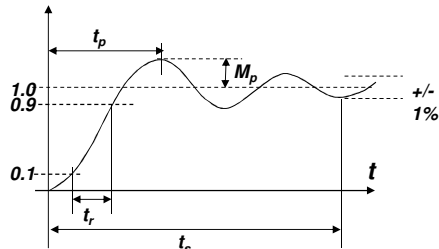
## Proiectarea prin utilizarea polilor dominanți de ordinul 2

- Să ne aducem aminte despre răspunsul unui sistem cu funcție de transfer de ordinul 2.

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}$$

- Performanțele dinamice se pot defini ca:

$$\begin{aligned} \omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} \\ \zeta &\geq \zeta(M_p) \\ \sigma &\geq \frac{4.6}{t_s} \end{aligned} \quad M_p \equiv \begin{cases} 5\% & \zeta = 0.7 \\ 16\% & \zeta = 0.5 \\ 35\% & \zeta = 0.3 \end{cases}$$



- Cu notațiile:

$$s = -\sigma \pm j\omega_d \Rightarrow \sigma = \zeta\omega_n \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

- Pentru un sistem de ordin ridicat, putem alege o pereche de poli dominanți complex conjugați, departe de ceilalți poli ai sistemului, astfel încât performanțele dinamice să fie influențate doar de perechea dominantă, iar polii îndepărtați să nu aibă nici o influență (regimurile lor tranzitorii să fie terminate mult mai rapid decât cele ale sistemului considerat dominant).

- Trebuie să verificăm dacă **zero**-urile sunt de asemeni în partea stângă a planului complex, la o distanță mare de perechea de poli dominanți selectată.

## Exemplu – Metoda polilor dominanți (1)

- Se reia, fără demonstrație, modelul în ecuațiile de stare a unui sistem de acționare a unei benzi magnetice (laborator).

- Variabilele de stare:

$$x = \begin{bmatrix} x_1(\text{poziția\_benzii\_la\_rola}) \\ \omega_1(\text{viteza\_benzii\_la\_roata}) \\ x_2(\text{poziția\_servomotor}) \\ \omega_2(\text{viteza\_iesire}) \\ i(\text{curentul\_in\_motor}) \end{bmatrix}$$

Ecuatiile de stare au fost determinate în laboratorul #6; și notate cu [Fs, Gs]

- Ecuatiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ y = H \cdot x + J \cdot u \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.10 & -0.35 & 0.10 & 0.10 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.4 & -1.4 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Valorile proprii ale matricei **F** devin poli ai funcției de transfer în buclă deschisă

- MATLAB **P = eig(F)**

$$P = \begin{bmatrix} -0.6371 + 0.6669 \cdot j \\ -0.6371 - 0.6669 \cdot j \\ 0.0000 \\ -0.5075 \\ -0.9683 \end{bmatrix}$$

- În funcție de controlul dorit, putem avea diferite mărimi de ieșire:

- Poziția servomotorului  $H_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$
- Poziția capului de citire  $H_3 = [0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0]$
- Tensiunea în bandă

### Exemplu – Metoda polilor dominanți (2)

- Cerințe de proiectare: să se folosească metoda polilor dominanți de ordinul 2, astfel încât să nu avem mai mult de 5% suprareglare (overshoot) și un timp de creștere sub 4 milisecunde.

#### Soluție

- Din analiza sistemelor de ordinul doi (v. pag.26, curs #2, ora #6; sau pag.21, acest curs):
  - 5% supracreștere --->  $\zeta = 0.7$
  - 4 milisecunde timp de creștere ->  $\omega_n \geq 0.45$ , adoptăm  $\omega_n = 0.60$ .
- Perechea de poli dominanți este definită prin
  - Partea reală  $\sigma = \zeta \cdot \omega_n = 0.7 \cdot 0.60 = 0.42$
  - Partea imaginară  $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1-0.5} = 0.7 \cdot 0.60 = 0.42$
- Alegem ceilalți 3 poli la o depărtare de această pereche astfel încât regimul lor tranzitoriu să nu influențeze rezultatele. Adoptăm (arbitrar) un factor de 4 ( $\omega_{pol} = 4 \cdot \omega_d$ ).

$$P_{cl} = \begin{bmatrix} -0.42 + 0.42 \cdot j \\ -0.42 - 0.42 \cdot j \\ -1.68 \\ -1.68 \\ -1.68 \end{bmatrix}$$

- Setul de coeficienți capabil să mute polii  $P$  în noua locație  $P_{cl}$ , se determină cu comanda MATLAB  $K = \text{acker}(F, G, P_{cl}) = [0.8356 \ 5.8048 \ 0.5584 \ -0.4542 \ 3.1300]$

### Exemplu – Metoda polilor dominanți (3)

- Referința se introduce cu relațiile (considerăm  $x_2$  pentru închiderea buclei de control,  $H_2$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_x \\ \dot{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H_2 & J \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0_m \\ 1 \end{bmatrix}$$

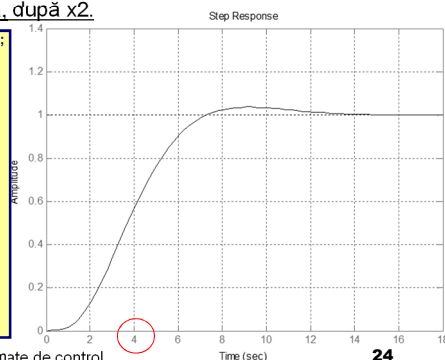
$$\bar{N} = N_u + K \cdot N_x$$

$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H_2 \\ J_{cl} = 0 \end{cases}$$

- Ecuațiile de stare în buclă închisă sunt
- Valorile proprii ale matricei  $F-GK$  devin poli ai funcției de transfer în buclă închisă
  - MATLAB  $P_{cl} = \text{eig}(F-GK)$

- Program MATLAB și rezultate semnal treaptă, după  $x_2$ .

```
F=[0 2 0 0 0; -0.10 -0.35 0.10 0.10 0.75; 0 0 0 2 0; 0.4 0.4 -0.4 -1.4 0; 0 -0.03 0 0 -1];
G=[0; 0; 0; 0; 1];
H2=[0 0 1 0 0];
H3=[0.5 0 0.5 0 0];
HT=[-0.2 -0.2 0.2 0.2 0];
J=0;
P=eig(F);
Pcl=[-0.42+0.42*j; -0.42-0.42*j; -1.68; -1.68; -1.68];
K=acker(F,G,Pcl);
A=[F G; H2 J];
N=(inv(A))*[0; 0; 0; 0; 1];
Nx=N(1:5); Nu=N(6); Nbar=Nu+K*Nx;
Fcl=F-G*K;
Pclr=eig(F-G*K);
Gcl=G*Nbar;
Hcl=H2;
Jcl=0;
sys=ss(Fcl,Gcl,Hcl,Jcl);
step(sys); grid on;
```



## Capitolul 7 \*\*\* Proiectarea cu variabile de stare

### Exemplu – Metoda polilor dominanți (4)

- Referința se introduce cu relațiile (considerăm  $x_2$  pentru închiderea buclei de control,  $H_2$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_x \\ \dot{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H_2 & J \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0_m \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = N_u + K \cdot N_x$$

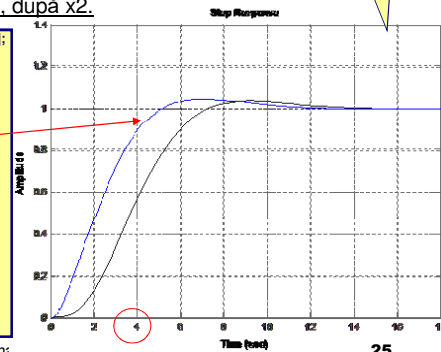
$$\begin{cases} F_{cl} = F - G \cdot K \\ G_{cl} = G \cdot N_{bar} \\ H_{cl} = H_2 \\ J_{cl} = 0 \end{cases}$$

Considerăm cei trei poli de 10 ori mai departe.

- Ecuatiile de stare în buclă închisă sunt
- Valorile proprii ale matricei  $F-GK$  devin poli ai funcției de transfer în buclă închisă
  - MATLAB  $P_{cl} = \text{eig}(F-GK)$

- Program MATLAB și rezultate semnal treaptă, după  $x_2$ .

```
F=[0 2 0 0 0; -0.10 -0.35 0.10 0.10 0.75; 0 0 2 0; 0.4 0.4 -0.4 -1.4 0; 0 -0.03 0 0 -1];
G=[0; 0; 0; 0; 1];
H2=[0 0 1 0 0];
H3=[0.5 0 0.5 0 0];
HT=[-0.2 -0.2 0.2 0.2 0];
J=0;
P=eig(F)
Pcl=[-0.42+0.42*j; -0.42-0.42*j; -16.8; -16.8; -16.8];
K=acker(F,G,Pcl);
A=[F G; H2 J];
N=(inv(A))*[0; 0; 0; 0; 1];
Nx=N(1:5); Nu=N(6); Nbar=Nu+K'*Nx;
Fcl=F-G*K;
Pclr=eig(F-G*K);
Gcl=G*Nbar;
Hcl=H2;
Jcl=0;
sys=ss(Fcl,Gcl,Hcl,Jcl);
step(sys); grid on;
```



2019 \*\*\* Sisteme automate de control

25

## Capitolul 7 \*\*\* Proiectarea cu variabile de stare

### Metoda locului simetric al rădăcinilor. Teorie. (1)

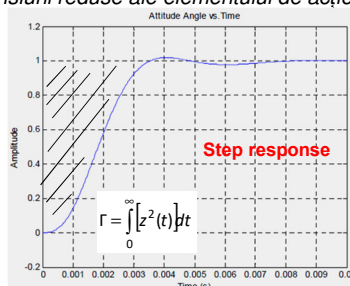
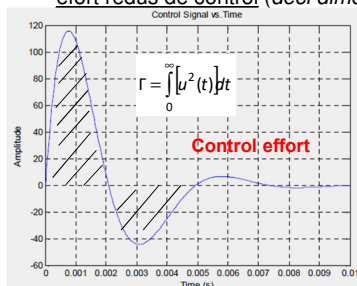
- Să considerăm un sistem descris de ecuațiile de stare pentru sistemul în buclă deschisă:

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ z = H_1 \cdot x \end{cases}$$

- Introducem o metodă de control optimă, denumită **Linear Quadratic Regulator (LQR)**, bazată pe aflarea controlului  $u = -Kx$ , astfel încât indicele de performanță următor să fie minimizat.

$$\Gamma = \int_0^{\infty} [\rho \cdot z^2(t) + u^2(t)] dt$$

- În acest indice de performanță, avem  $\rho$  un factor de ponderare care permite proiectantului să balanseze dorința unui **raspuns rapid** (valori mici ale erorii de urmărire,  $\int z^2 dt$ ) și un **efort redus de control** (deci dimensiuni reduse ale elementului de acționare,  $\int u^2 dt$ ).



2019 \*\*\* Sisteme automate de control

26

### Metoda locului simetric al rădăcinilor. Teorie. (2)

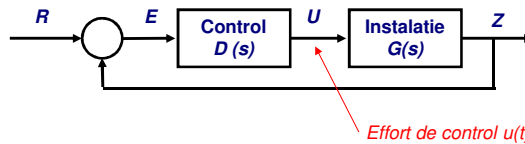
De obicei se alege  $\rho = 1$ , pentru o balanșare a celor două cerințe.

$$\Gamma = \int_0^{\infty} [\rho \cdot z^2(t) + u^2(t)] dt$$

- În buclă închisă avem:

$$z(t) \leftarrow E(s) = \frac{1}{1 + D(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) \quad u(t) \leftarrow U(s) = \frac{D(s)}{1 + D(s) \cdot G(s)} \cdot R(s)$$

- Se mai ține cont de o posibilă scalare a rezultatelor (*ține cont de câștigul de frecvență nulă a f.d.t., care știm că determină/influențează eroarea staționară, deci  $z$ ; și nu influențează semnalul de ieșire aplicat elementului de acționare, deci  $u$* ).
- Altfel spus, de la  $u$  (*care nu este  $R$  în această reprezentare*) la  $z$  avem  $G(s)$ .



### Metoda locului simetric al rădăcinilor. Teorie. (3)

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ z = H_1 \cdot x \end{cases}$$

- Se poate demonstra că valorile optime ale lui  $K$  vor determina plasarea polilor în partea stângă a planului complex (stabilitate) pentru ecuația:

$$1 + \rho \cdot G_0(s) \cdot G_0(-s) = 0$$

unde

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = H_1 \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G = \frac{N(s)}{D(s)}$$

și  $\rho$  este coeficientul din relația precedentă LQR.

- Aceasta este o problemă de locul rădăcinilor, cu parametrul  $\rho$ .
- Observăm că  $s$  și  $-s$  afectează rezultatele în aceeași manieră, motiv pentru care metoda este denumită metoda **locului simetric al rădăcinilor** (symmetrical root locus).
- Punctele de pe locul rădăcinilor vor determina o soluție optimă după criteriul dat și pot constitui un punct de plecare pentru alegerea locației polilor.
  - MATLAB reprezintă întotdeauna locul de  $180^\circ$ , deci  $\rho > 0$ .
- Altă formă pentru aceeași ecuație de plasare a polilor:

$$1 + \rho \cdot \frac{N(-s) \cdot N(s)}{D(-s) \cdot D(s)} = 0$$

### Exemplul 1

#### Metoda locului simetric al rădăcinilor, de determinare a poziției polilor

- Fie sistemul dat de ecuațiile diferențiale (care poate fi privit direct ca ecuații de stare):

$$\begin{cases} \dot{y} = -a \cdot y + u \\ z = y \end{cases}$$

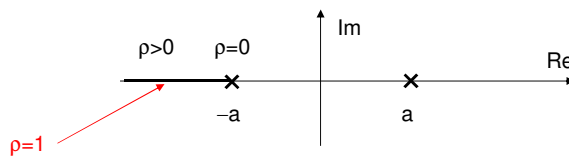
- Funcția de transfer  $G_0$  se poate calcula:

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+a}$$

- Scriem acum ecuația SRL:

$$1 + \rho \cdot G_0(-s) \cdot G_0(s) = 0 \Rightarrow 1 + \rho \cdot \frac{1}{(-s+a) \cdot (s+a)} = 0$$

- Aceasta reprezintă o problemă de locul rădăcinilor [la fel ca  $1+kL(s)=0$ ], pentru valori  $\rho > 0$  ( $180^\circ$ ):



- Orice rădăcină a sistemului în buclă închisă ce minimizează indicele de performanță se află la stânga rădăcinii sistemului în bucla deschisă ( $-a$ ).
  - De exemplu se poate considera  $\rho=1$ .

### Exemplul 2

#### Metoda locului simetric al rădăcinilor de determinare a poziției polilor

- Fie sistemul dat de ecuațiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u \\ z = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot x \end{cases}$$

- Funcția de transfer  $G_0$  se poate calcula:

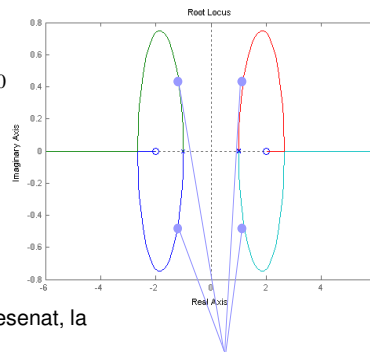
$$G_0(s) = -\frac{s+2}{s^2 - \omega_0^2}$$

- Scriem acum ecuația SRL:

$$1 + \rho \cdot G_0(-s) \cdot G_0(s) = 0 \Rightarrow 1 + \rho \cdot \left[ -\frac{-s+2}{s^2 - \omega_0^2} \right] \cdot \left[ -\frac{s+2}{s^2 - \omega_0^2} \right] = 0$$

- Locul rădăcinilor desenat în MATLAB ( $\omega_0 = 1$ ):

```
numGG=conv([-1 2], [-1 2]);
denGG=conv([1 0 -1], [1 0 -1]);
sysGG=tf(numGG,denGG);
rlocus(sysGG);
```



- Adoptăm  $\rho = 1$ , care determină rădăcini pe locul desenat, la

$$1 + \frac{4-s^2}{(s^2-1)^2} = 0 \Rightarrow s^4 - 3 \cdot s^2 + 5 = 0 \Rightarrow s^2 = \frac{3 \pm 3.31 \cdot j}{2} \Rightarrow s = \pm \sqrt{1.500 \pm 1.655 \cdot j} = \pm (1.8668 \pm 0.4432 \cdot j)$$

### Exemplul 2

#### Metoda locului simetric al rădăcinilor de determinare a poziției polilor

- Deci rădăcinile dorite de la sistemul în buclă închisă sunt  $-1.8668 \pm j0.4432$ .
- Determinăm  $K$  cu MATLAB

```
F=[0 1; 1 0];
G=[0 1];
pc=[-1.8668+0.4432j; -1.8668-0.4432j];
K=acker(F,G',pc)
```

K =

4.6814 3.7336

### Observații finale

- Am văzut etapele proiectării unui sistem de control în buclă închisă, pe baza ecuațiilor de stare:
  - Determinarea legii de control
  - Introducerea referinței
- O astfel de proiectare permite mutarea polilor sistemului în buclă închisă de la locația lor din funcția de transfer în buclă deschisă.
- Se pune problema alegerii optime a acestei noi locații a polilor.
- Avem două metode de proiectare;
  - Utilizarea polilor dominanți de ordinul 2
    - = Aproximarea întregului sistem cu un sistem de ordinul doi
    - = Alegerea celorlalți poli la frecvențe mult mai mari (cel puțin de 4 ori)
  - Utilizarea unui loc al rădăcinilor simetric (criteriu optimal)
    - = O metodă de optimizare matematică, bazată pe locul rădăcinilor calculat pentru o funcție compusă de forma

$$1 + \rho \cdot G_0(s) \cdot G_0(-s) = 0$$

unde

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = H_1 \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G = \frac{N(s)}{D(s)}$$



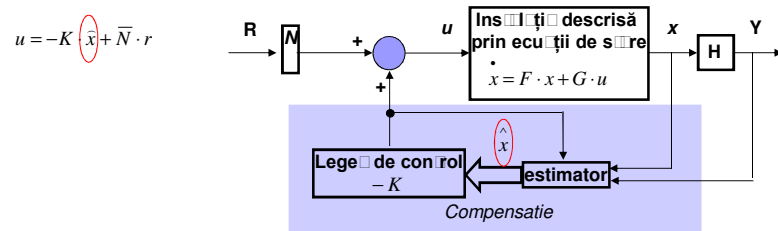
## Săptămâna 07

### Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 27 = Estimatori și control cu estimare.

### Definire și proiectare cu estimatori

- În descrierea metodei precedente de proiectare, am presupus că toate variabilele de stare sunt disponibile pentru reacție.
  - Dacă sunt dificil de măsurat, trebuie să construim un estimator și să le estimăm din măsurile de ieșire ce pot fi măsurate.
  - Se poate demonstra că teoria legii de control pe bază de ecuațiilor de stare rămâne validă și dacă utilizăm variabilele de stare estimate în locul variabilei de stare propriu-zise (măsurate).

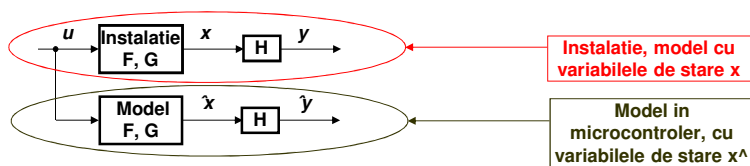


### Estimator complet ("Full order estimators"). Definiție.

- Vom considera estimarea tuturor variabilelor de stare prin construirea unui model complet al instalației ("plant") în programul microcontrolerului folosit pentru control, model care va fi guvernat de ecuațiile:

$$\dot{\hat{x}} = F \cdot \hat{x} + G \cdot u$$

- Deoarece presupunem că știm modelul instalației (dat de matricele  $F, G$ ), mai avem nevoie de condiția inițială  $x(0)$  a variabilelor de stare pentru a defini variabila de stare estimată cu aceeași condiție inițială  $x(0)$ .
- Obținem următoarea structură pentru estimator:



- Posibile probleme:
  - Lipsa unei informații despre valoarea inițială  $x(0)$
  - Model cu parametri imprecis determinați sau variabili în timp

### Estimator complet ("Full order estimators"). Utilizarea reacției. (1)

- Soluția constă în utilizarea unei reacții pentru compensarea erorilor din jurul modelului.

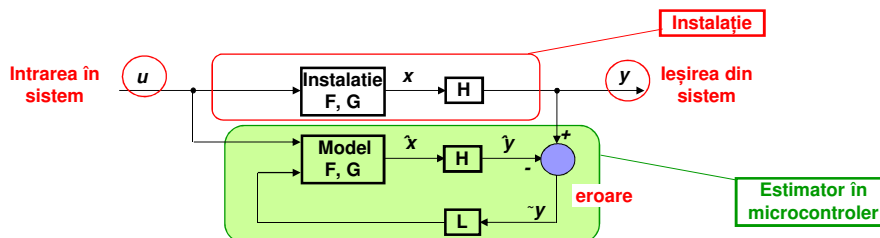
- În acest scop, definim eroarea de estimare:

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

- Ecuația de stare a erorilor devine (pentru sistemul în buclă deschisă):

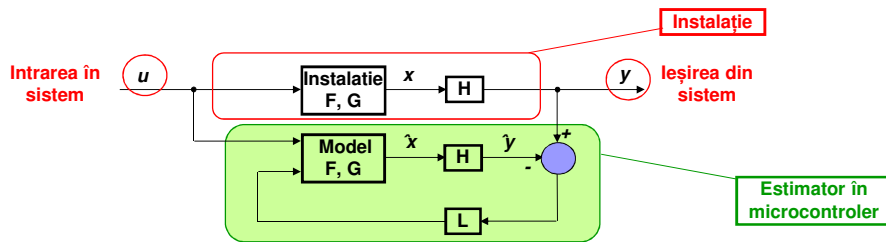
$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = F \cdot \tilde{x} \\ \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \end{cases}$$

- Eroarea converge la zero dacă sistemul ( $F$ ) este stabil.
- Sistemul incluzând reacția pentru corecția acestei erori are structura:



**Atenție:** Presupunem cunoașterea modelului

### Estimator complet ("Full order estimators"). Utilizarea reacției. (2)



- Considerăm o reacție liniară  $L$  asemănător reacției după variabilele de stare (K).

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n]^T$$

- Ecuatiile de stare după eroare (variabila de stare) - se modifică prin adăugarea acestei mărimi de intrare:

$$\dot{\tilde{x}} = F \cdot \tilde{x} - L \cdot (\hat{y} - y) = F \cdot \tilde{x} - L \cdot (H \cdot \hat{x} - y)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{(\hat{x} - x)} &= F \cdot (\hat{x} - x) - L \cdot (H \cdot \hat{x} - y) \Leftrightarrow \dot{\hat{x}} - \dot{x} = F \cdot \hat{x} - F \cdot x - L \cdot H \cdot \hat{x} + L \cdot y \\ \dot{x} &= F \cdot x + G \cdot u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = F \cdot \hat{x} + G \cdot u - L \cdot H \cdot \hat{x} + L \cdot y$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = (F - L \cdot H) \cdot \hat{x} + G \cdot u + L \cdot y$$

### Estimator complet ("Full order estimators"). Utilizarea reacției. (3)

- Pentru analiza acestui sistem cu reacție să considerăm regimul dinamic al erorii:

$$\dot{\tilde{x}} = (F - L \cdot H) \cdot \tilde{x}$$

- Ecuatia caracteristică va fi dată de:  $\det[s \cdot I - (F - L \cdot H)] = 0$

- Alegem  $L$  astfel încât  $(F - L \cdot H)$  are rădăcini stabile, valori proprii "rapide" (la frecvențe înalte), pentru ca eroarea să scadă (converge) către  $0$  și să rămână acolo, independent de mărimea de intrare  $u(t)$  (deci, cu eroare staționară nulă).

- Selecția lui  $L$  se poate face în același mod cum se face selecția lui  $K$  din legea de control (plecând de la cunoașterea locației polilor).

- In acest scop, specificăm rădăcinile  $\beta$  ale ecuației caracteristice pentru estimator:

$$s_i = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \Rightarrow \alpha_c(s) = (s - \beta_1) \cdot (s - \beta_2) \cdot \dots \cdot (s - \beta_n)$$

- Apoi identificăm coeficienții lui  $L$  prin compararea relațiilor de mai sus.

### Estimator complet ("Full order estimators"). Utilizarea reacției. (4)

- Să comparăm cele două legi de control cu reacție liniară.

$$\dot{\hat{x}} = (F - G \cdot K) \cdot \hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = (F - L \cdot H) \cdot \hat{x} + G \cdot u + L \cdot y$$

- Asemănător cu proiectarea legii de control K, continuăm cu folosirea instrucțiunilor **acker** sau **place**.
  - Pentru a folosi aceleași instrucțiuni, trebuie să folosim proprietatea  $(F - LH)^T = F^T - H^T L^T$
  - Instrucțiunea trebuie folosită ca  $L^T = \text{acker}(F^T, H^T, pc)$ .
  - Se poate calcula  $L = L^T$

Control	Estimator
K	L <sup>T</sup>
F	F <sup>T</sup>
G	H <sup>T</sup>
H	G <sup>T</sup>

### Exemplu – Estimator pentru controlul unui pendul (1)

- Se consideră pendulul prezentat anterior (v.pag.57, C#6, modul #24).
- Se cere folosirea unui estimator cu polii la  $-10\omega_0$  (mult mai "rapizi").

#### Soluție:

- Ecuatiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x \end{cases}$$

Ecuatiile de stare ce descriu mișcarea pendulului

Polii din structura estimatorului trebuie aleși cel puțin de 2...6... 10 ori mai rapizi decât polii din structura legii de control de bază.

- Ecuatia caracteristică dorită  
 $\alpha_c(s) = (s + 10 \cdot \omega_0)^2 = s^2 + 20 \cdot \omega_0 \cdot s + 100 \cdot \omega_0^2$
- Aplicarea teoriei (formula de pe pagina precedentă) conduce la:

$$\det(s \cdot I - (F - L \cdot H)) = 0 \Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -\omega_0^2 - l_2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left( \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ \omega_0^2 + l_2 & s \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow s^2 + l_1 \cdot s + (l_2 + \omega_0^2) = 0$$

- Identificarea coeficienților produce **L1, L2**.

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \cdot \omega_0 \\ 99 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix}$$

### Exemplu

#### Estimator pentru controlul unui pendul (2)

- Să analizăm sistemul și rezultatele în MATLAB

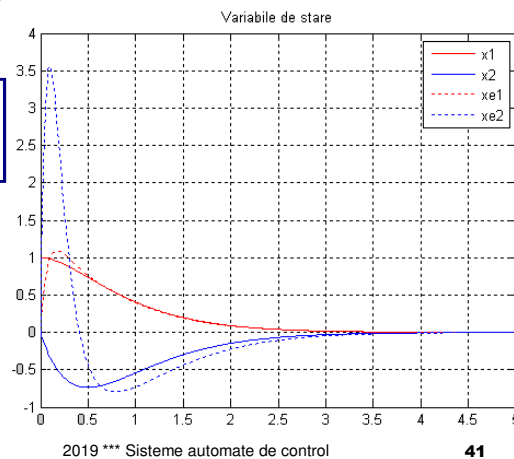
$$\dot{\hat{x}} = (F - L \cdot H) \cdot \hat{x} + G \cdot u + L \cdot y$$

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n]^T$$

La plasarea polilor legii de control, foloseam instrucțiunile *acker* sau *place*, pentru determinarea lui *K* din F-GK. Pentru a folosi aceleași instrucțiuni, trebuie să folosim  $(F-LH)^T = F^T - H^T L^T$

```
clear;
wo=1;
F=[0 1; -wo^2 0];
G=[0; 1];
H=[1 0];
% Proiectarea estimatorului
pe=[-10*wo; -10*wo];
Lt=acker(F',H',pe);
L=Lt';
% Proiectarea legii de control (pag.5, ora24)
K=[3*wo^2 4*wo*wo];
Fc=F-G*K;
Gc=[1 0];
% Simulam sistemul in bucla inchisa
t=0:0.01:5;
u=0*t;
x0=[1.0; 0.0];
[y,x]=lsim(Fc,Gc,H,0,u,t,x0);
plot(t,x(:,1),'r-'); grid on; hold on;
plot(t,x(:,2),'b-'); hold on;
%
% Simulam rezultatele estimatorului
xe0=[0; 0];
[ye,x]=lsim(F-L'*H,[G L],[0 0],0,[u; y],t,xe0);
plot(t,x(:,1),'r-'); hold on;
plot(t,x(:,2),'b-'); hold on;
title('Variabile de stare');
legend('x1','x2','xe1','xe2');
```

$$L = \begin{bmatrix} 20 \\ 99 \end{bmatrix}$$



2019 \*\*\* Sisteme automate de control

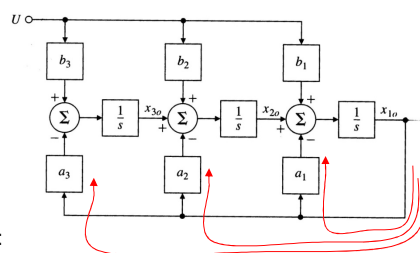
41

#### Forma canonică a observatorului ("observer canonical form")

- La fel ca pentru proiectarea legii de control, există o formă canonică pentru care ecuațiile de proiectare a estimatorului devin mai ușor de aplicat.
- În acest caz, toate legăturile de reacție sunt de la ieșire la variabilele de stare.
- Vom exemplifica pentru o f.d.t. de ordinul 3:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + b_3}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3}$$

- Definim diagrama din figură:



care poate fi descrisă prin ecuațiile de stare:

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$F_o - L \cdot H_o = \begin{bmatrix} -a_1 - l_1 & 1 & 0 \\ -a_2 - l_2 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_n - l_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s^3 + (a_1 + l_1) \cdot s^2 + (a_2 + l_2) \cdot s + (a_3 + l_3) = 0$$

- Avem avantajul observării directe a coeficienților, urmată de identificarea cu ecuația caracteristică dorită.

2019 \*\*\* Sisteme automate de control

42

### Proprietatea de observabilitate

- La fel ca în cazul proiectării legii de control, putem să definim o proprietate capabilă să ne spună dacă putem aplica această metodă pentru o anumită situație.
- Testul matematic pentru aceasta este dat de calcularea **matricei de observabilitate**:

$$O = \begin{bmatrix} H \\ H \cdot F \\ H \cdot F^2 \\ \dots \\ H \cdot F^{n-1} \end{bmatrix}$$

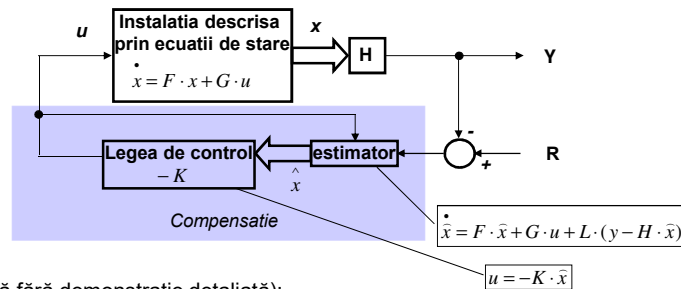
- Aceasta matrice trebuie să fie nesară (determinant diferit de zero), pentru a avea o transformare de matrice de la forma dată a ecuațiilor de stare la forma canonică a observatorului.
- Funcțiile MATLAB (**acker** sau **place**) pot fi folosite și în acest caz, în mod asemănător cu cazul proiectării legii de control.

### Selecția polilor din structura unui estimator. Teorie.

- Polii din structura estimatorului trebuie aleși cel puțin de 2...6 ori mai rapizi decât polii din structura legii de control de bază.
  - In acest mod, orice regim tranzitoriu data de acești poli trebuie să fie terminat până la intervenția polilor din legea de control.
  - Problema posibilă în această selecție, este dată de zgomotul din senzori = poli rapizi ar determina creșterea lărgimii de bandă (bandwidth BW) și ar interacționa la frecvențe înalte cu acest zgomot.
  - Ținând cont de aceste observații, putem afirma ca metoda polilor dominanți este de obicei mai potrivită în acest caz.

### Combinarea structurilor de control și estimator.

- Un sistem automat de control cu estimator va fi compus din:
  - Intrare și senzori de măsurare a mărimii de ieșire din sistem;
  - Estimator;
  - Modul de introducere a referinței;
  - Legea de control, determinată prin  $(-K)$ .
- Deoarece toate aceste elemente pot fi prezente, ecuațiile de control pot fi combinate:



- Se obține (dată fără demonstrație detaliată):

$$D_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K \cdot (s \cdot I - F + G \cdot K + L \cdot H)^{-1} \cdot L$$

### Observații finale

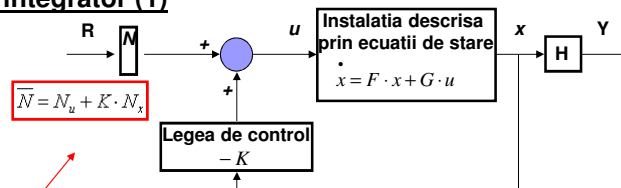
- Au fost date principiile proiectării unui estimator pentru determinarea variabilelor de stare prin calcul de la valorile de ieșire.
- Ecuațiile de determinare a unui estimator plecând de la ecuațiile de stare sunt date.
- La fel ca pentru proiectarea legii de control
  - Există o formă canonică pentru care ecuațiile de proiectare a estimatorului devin mai ușor de aplicat.
  - Există o matrice de observabilitate care ne ajută să verificăm posibilitatea utilizării unui estimator
- Aceleași etape trebuie urmate asemănător cu proiectarea unei legi de control pe baza ecuațiilor de stare.

## Săptămâna 07

### Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- Ora 28 = Control integral și urmărire robustă ("robust tracking").

#### Control cu termen integrator (1)



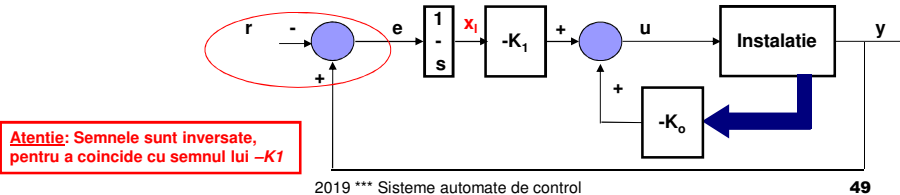
- Introducerea referinței prin metoda descrisă anterior conduce la un sistem cu eroare staționară nulă.
  - Dar ... orice schimbare de parametri în timpul operării instalației poate determina o eroare staționară deoarece ecuațiile ce stau la baza calculării **N<sub>bar</sub>** nu mai sunt respectate.
- Ne propunem să discutăm metode de control robust la variația parametrilor.
  - Vom folosi control cu termen integrator pentru a obține un control robust la variația parametrilor.
  - **Observație** - Metodele de control dezvoltate cu ajutorul ecuațiilor de stare nu conțin nici un element integral (doar control liniar  $-K$ ).



### Control cu termen integrator (2)

- Să începem cu prezentarea unei soluții bazate pe o bucă de reacție după integrala erorii măririi ce trebuie urmărită (*referință* → *ieșire*).
- În acest scop, să adăugăm o nouă variabilă de stare la sistemul de ecuații de stare:
  - Sistemul de ecuații de stare ce descrie instalația:
 
$$\dot{x} = F \cdot x + G \cdot u + G_i \cdot w$$

$$y = H \cdot x$$
  - Adăugăm o variabilă de stare pentru eroare
 
$$\dot{x}_i = e = H \cdot x - r$$
  - Noile ecuații de stare devin (am marcat matricile pentru înțelegerea ecuațiilor):
 
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & [H] \\ 0 & [F] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [G] \end{bmatrix} \cdot u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r + \begin{bmatrix} 0 \\ [G_i] \end{bmatrix} \cdot w$$
  - Utilizând noile ecuații de stare și structura de control propusă  $[K, K_d]$ , putem reproiecta sistemul de control.



### Exemplu: Control cu termen integrator a vitezei unui motor (1).

- Fie modelul instalației descris de (*f.d.t. în buclă deschisă*)
 
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3} \Rightarrow \begin{cases} F = -3 & G = 1 \\ H = 1 & J = 0 \end{cases}$$
- Se cere să proiectăm un sistem de control caracterizat de
  - Adăugarea unui control cu termen integrator ⇒ Sistem în buclă închisă cu 2 poli (*bucă deschisă + integrator*)
  - Un sistem în buclă închisă cu 2 poli la  $s = -5$ .
  - Un estimator cu un pol la  $s = -10$ .

#### Soluție

- Condiția de plasare a polilor sistemului în buclă închisă:
 
$$pc = [-5; -5] \Rightarrow s^2 + 10 \cdot s + 25 = 0$$
- Un control cu termen integrator se adaugă prin rescrierea ecuațiilor de stare pentru a pune în evidență noua variabilă de stare pentru eroare (consider  $r = u$ , la intrare și  $y = x$ , la ieșire):

$$\begin{aligned} x_i &= x - r \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (u) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r \Rightarrow \begin{cases} F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} & G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H_c = H = 1 & J_c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemplu: Control cu termen integrator a vitezei unui motor (2).**

**Soluție**

- Putem scrie ecuația caracteristică a sistemului în buclă închisă:

$$\det(s \cdot I - F + G \cdot K) = 0 \Rightarrow \det \left( s \cdot I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [K_1 \quad K_2] \right) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ K_1 & s+3+K_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 + (3+K_2) \cdot s + K_1 = 0 \Rightarrow K = [25 \quad 7]$$

$$pc = [-5; -5] \Rightarrow s^2 + 10 \cdot s + 25 = 0$$

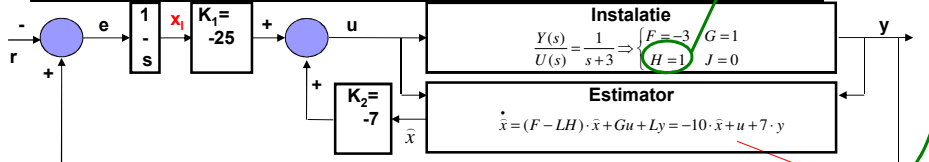
- Sau se poate utiliza una dintre instrucțiunile MATLAB **acker** sau **place**.

- Ecuația caracteristică pentru estimator este (conform teoriei):

$$\det(s \cdot I - F + L \cdot H) = 0 \Rightarrow \det(s \cdot I + 3 + L \cdot 1) = 0 \Rightarrow s + 3 + L = 0 \Rightarrow L = 7$$

$$pol\_la\_s = -10$$

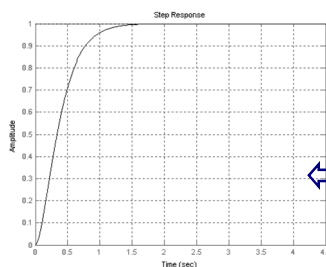
**Exemplu: Control cu termen integrator a vitezei unui motor (3).**



- Ecuațiile sistemului rezultă prin combinarea legilor de control și estimare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} y$$

$$u = -K \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = [-25 \quad 0 \quad -7] \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$



```
clear;
F=[0 1 0; -25 -3 -7; -25 7 -17];
G=[-1; 0; 0];
H=[0 1 0]; % iesirea este x
% Simulam sistemul
A=ss(F,G,H,0);
step(A,4.5); grid on;
axis([0,4.5,0 1]);
```

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -25 & -3 & -7 \\ -25 & 7 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

**Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (1)**

- Multe aplicații de control avansat presupun un sistem cu o referință variabilă ce trebuie urmărită cu eroare staționară nulă.
  - Diverse aplicații servo
  - Sisteme de tip PLL
  - Aplicații ce funcționează în legătură cu rețeaua de putere de 50Hz
- În toate aceste cazuri, presupunem că știm că referința (variabilă, dar repetitivă) este un semnal ce satisface o ecuație diferențială.
  - Cazul cel mai tipic îl reprezintă urmărirea unei referințe sinusoidale, caz în care ecuația diferențială este:
 
$$\ddot{r} = -\omega_0^2 \cdot r$$
- În toate aceste cazuri, se suplimentează sistemul de ecuații diferențiale ce descriu instalația și legea de control, cu ecuații și variabile de stare ce descriu ecuațiile diferențiale verificate de semnalul de intrare (referință).
  - Se obține o structură foarte asemănătoare cu cea de estimator, dar plecând de la referință în loc de mărimea de ieșire.
  - Se definește o eroare de urmărire  $e=y-r$  și se proiectează o lege de control pentru reducerea acestei erori.
  - Controlul rezultat se numește control în spațiul erorii, pentru a pune în evidență că avem control cu variabile de stare, incluzând variabilele definite pentru ecuația diferențială a carei soluție este semnalul de intrare dat (variabil și periodic).

**Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (2)**

- Să considerăm matricile de stare ce definesc un sistem ce caracterizează instalația unui servomecanism pentru o unitate de disc (intrare  $u$  și perturbația  $w$ ).

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = 0$$

- Referința este o sinusoidă de frecvență  $\omega_0$ .

**Soluție**

- Să considerăm un sistem cu 4 variabile de stare:
  - Sistemul dat ca instalație are 2 variabile de stare.
  - Construim un model al semnalului de intrare ce poate fi caracterizat prin 2 variabile de stare (ecuație de ordinul doi), dar variabilele de stare sunt în spațiul erorilor.
- Trebuie să reconstruim sistemul ecuațiilor de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Modelul instalației (H)

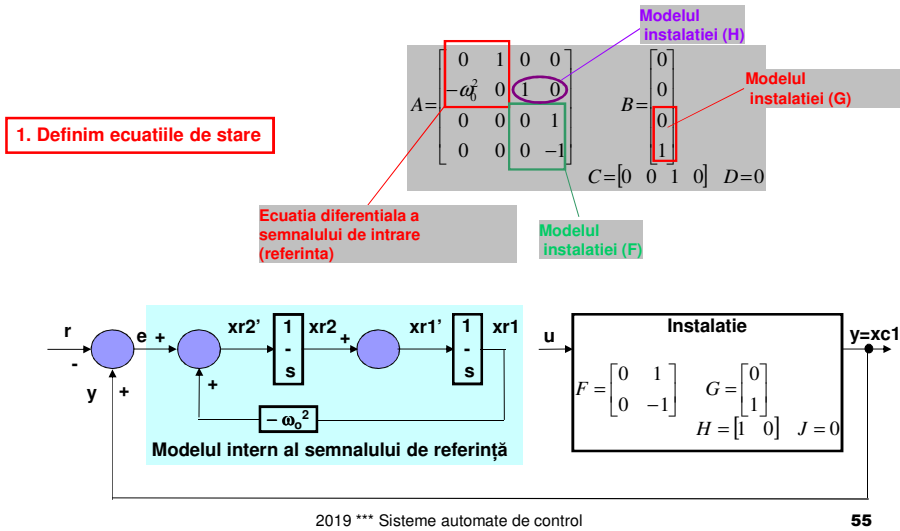
Modelul instalației (G)

Modelul instalației (F)

Ecuația diferențială a semnalului de intrare (referință)

### Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (3)

- Vom ilustra demonstrația printr-o serie de figuri, pentru a evita prezentarea întregului calcul matematic.
- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:

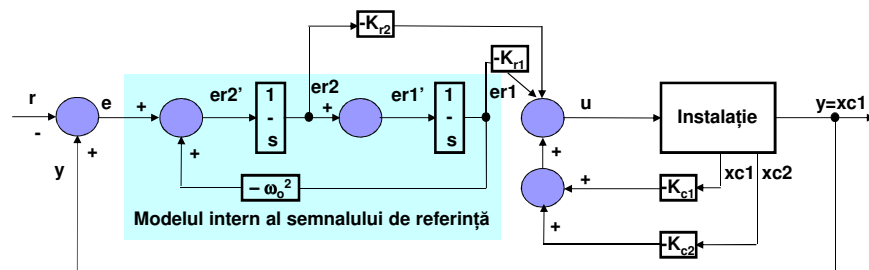


### Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (4)

- Vom ilustra demonstrația printr-o serie de figuri, pentru a evita prezentarea întregului calcul matematic.
- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:

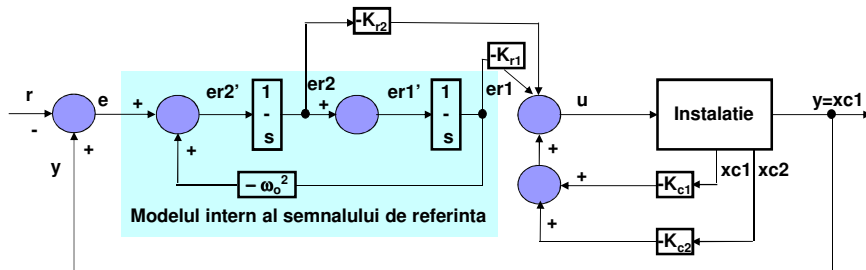
#### 2. Introducem legea de control

■  $u = -Kx$



**Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (5)**

- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:

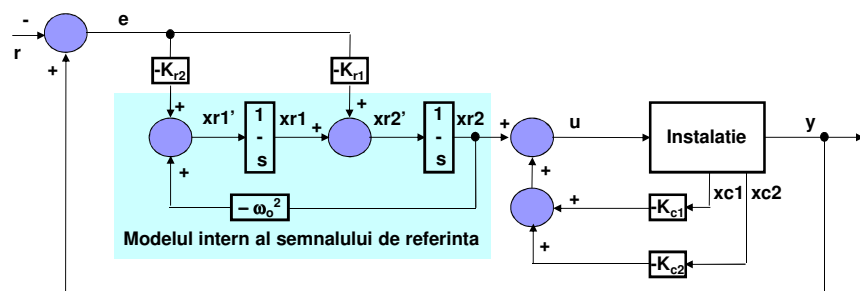


**3. Schimbare de variabila de la forma canonica de control la forma canonica de observare**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_{r1} \\ \dot{e}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [-K_{r1} \quad -K_{r2}] \begin{bmatrix} e_{r1} \\ e_{r2} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_{r2} \\ \dot{e}_{r1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{r2} \\ e_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [-K_{r2} \quad -K_{r1}] \begin{bmatrix} e_{r2} \\ e_{r1} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{r1} \\ \dot{x}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_{r2} \\ -K_{r1} \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

**Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (6)**

- Sistemul de control va avea structura din figura următoare:



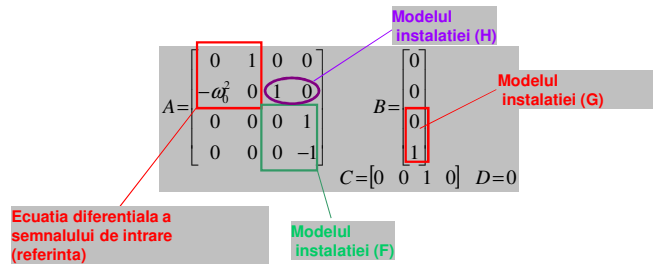
**Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (7)**

- Proiectarea legii de control se reduce la determinarea unui vector al câștigurilor de reacție:

- Să considerăm pentru un exemplu numeric, că  $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$ .
- Ne propunem ca polii sistemului în bucla închisă să aibă locațiile:

$$p_c = [-1 + j\sqrt{3} \quad -1 - j\sqrt{3} \quad -\sqrt{3} + j \quad -\sqrt{3} - j] \quad K = [K_{r1} \quad K_{r2} \quad K_{c1} \quad K_{c2}]$$

- De pe figura de la pag.9 deducem ecuațiile de stare ale sistemului în buclă închisă (s-ar putea determina și prin aplicarea succesivă a diverselor ecuații de control și introducerea referinței):

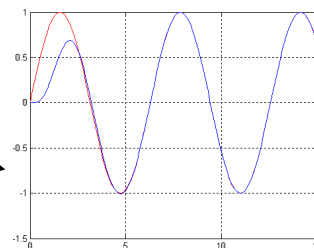


**Exemplu: Urmărirea robustă a unei referințe sinusoidale (8)**  $\omega_0=1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{r1} \\ \dot{x}_{r2} \\ \dot{x}_{c1} \\ \dot{x}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -K_{r1} & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & -K_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -K_{c1} & -1-K_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{r1} \\ K_{r2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -K(2) & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & -K(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -K(3) & -1-K(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K(2) \\ K(1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r$$

```
cle r;
wo=1;
A=[0 1 0 0; -wo*wo 0 1 0; 0 0 1 0; 0 0 0 -1];
B=[0; 0; 0; 1];
pc=[-1+j*sqrt(3); -1-j*sqrt(3); -sqrt(3)+j; -sqrt(3)-j];
K=place(A, B, pc)
%
Ac=[0 1 -K(2) 0; -wo*wo 0 -K(1) 0; 0 0 1 0; 1 0 -K(3) -1-K(4)];
Bc=[K(2); K(1); 0; 0]; Cc=[0 0 1 0];
% Simulam sistemul in bucla inchisa
t=0:0.1:15;
u=sin(t);
x0=[0; 0; 0; 0];
[y,x]=lsim(Ac,Bc,Cc,0,u,t,x0);
plot(t,u,'r-'); grid on; hold on;
plot(t,y,'b-');
```

$$K = 2.0718 \quad 16.3923 \quad 13.9282 \quad 4.4641$$



**Observații finale**

- Sisteme de control bazate pe proprietățile ecuațiilor de stare au fost dezvoltate pentru estimarea variabilelor de stare și pentru urmărirea unei referințe variabile, periodice descrise printr-o funcție matematică (în exemplu, sinusoidală).