



Sisteme Automate de Control

Note de curs *** 2019 Sem.2

Cursul 06

Proiectarea sistemelor de control pe baza răspunsului în frecvență

- ☐ Modul 21 = Proiectarea sistemelor PI + Proiectarea sistemelor cu întârziere de fază.
- ☐ Modul 22 = Considerații practice legate de proiectare.

Proiectarea sistemelor de control cu ajutorul variabilelor de stare

- ☐ Modul 23 = Transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații de stare. Forme Canonice.
- ☐ Modul 24 = Proiectarea legii de control.

- Modul 21 = Proiectarea sistemelor PI + Proiectarea sistemelor cu întârziere de fază.

Compensare PI

- Utilizată dacă este important să reducem eroarea staționară și/sau să menținem lărgimea de bandă (**BW**) la valori scăzute.

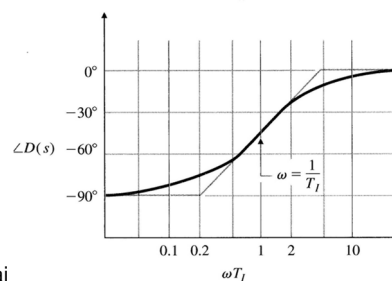
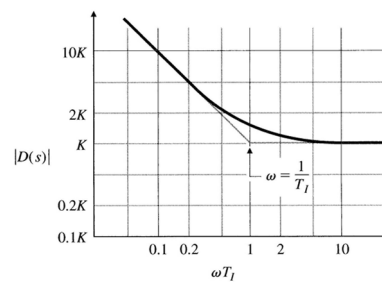
- Definiție:

$$D(s) = \frac{K}{s} \cdot \left(s + \frac{1}{T_I} \right)$$

- Caracteristica ideală are câștig infinit la frecvența zero (care reduce eroarea staționară) cu prețul scăderii fazei la frecvențe joase ($< 1/T_I$).

- Condiții contradictorii:

- Pentru un câștig mare la frecvențe joase, trebuie să avem ($1/T_I$) mare.
- Pentru limitarea scăderii fazei, această frecvență ar trebui să fie la frecvențe mult mai joase decât frecvența de tăiere ($1/T_I \ll \omega_c$).



Compensarea cu întârziere de fază

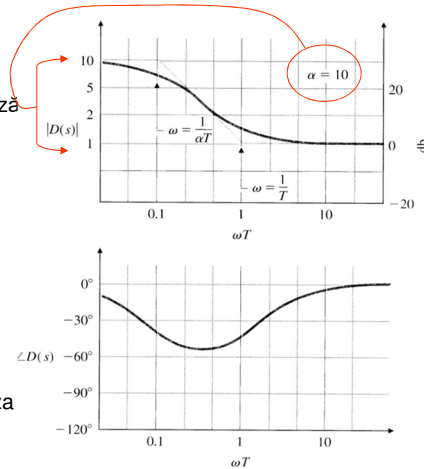
- Compensarea cu întârzierea de fază aproximează controlul PI.

- Definiție:

$$D(s) = \alpha \cdot \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha > 1$$

- Se observă

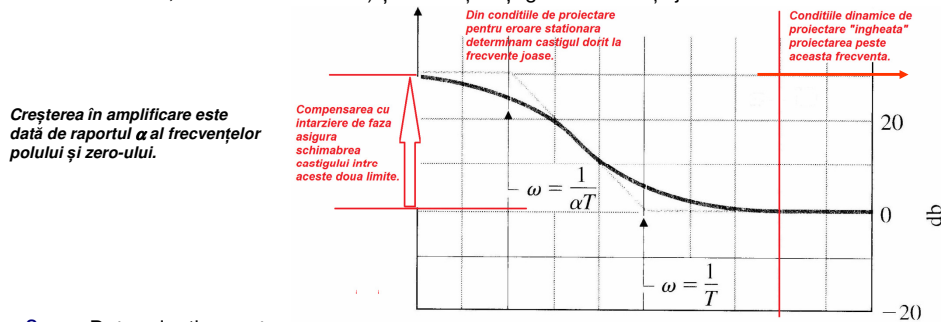
- un **pol** la frecvențe joase care produce creșterea în amplitudine și scăderea fazei.
- un **zero** la frecvențe înalte care readuce faza la valori crescute.



- **Obiectivul de proiectare este de a adăuga un câștig α la frecvențe joase \leftrightarrow îmbunătățirea regimului staționar fără deteriorarea regimului tranzitoriu.**

Proiectarea unei compensări cu întârziere de fază

1. Determinați câștigul de buclă deschisă K ce va satisface cerințele de rezervă de fază fără compensare (dată de condițiile de proiectare pentru regimul dinamic).
2. Denați diagrama Bode pentru sistemul fără compensare dinamică (fără termeni dinamici, dar cu K determinat) și evaluați câștigul la frecvențe joase.



3. Determinați α pentru a satisface condițiile de proiectare pentru eroarea staționară (α va permite creșterea amplificării la frecvențe joase la valoarea dorită).
4. Determinați frecvența pentru **zero**-ul compensatorului cu întârziere de fază pentru a fi cu o decadă mai jos decât noua frecvență de tăiere ω_c .
5. Se determină **pol**-ul la $\omega = 1/(\alpha T)$.
6. Se repetă proiectarea (iterativ) până la satisfacerea tuturor condițiilor de proiectare.

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (1)

Se consideră sistemul

$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s+1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p=9$ [de exemplu, ca la modul 11, p.6, "Urmărirea unei referințe variabile", eroarea staționară la semnal treaptă pentru sistem fără $1/s$, este $1/(1+K_p)$]

Soluție:

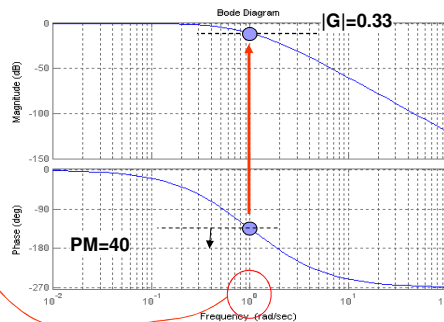
1. Desenăm diagrama Bode pentru $G(s)$.

Observăm $PM > 40^\circ$, se obține

pentru $\omega_c \leq 1 \text{ rad/sec}$,

dacă $K \sim 3$. (din $|G| \cdot K = 1$)

```
clear;
numG=1;
den2=conv([1 0.5],[1 1]);
denG=conv(den2,[1 2]);
sysG=tf(numG,denG);
bode(sysG); grid on;
```



Bode pentru K=1

2019 *** Sisteme Automate de Control

7

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (2)

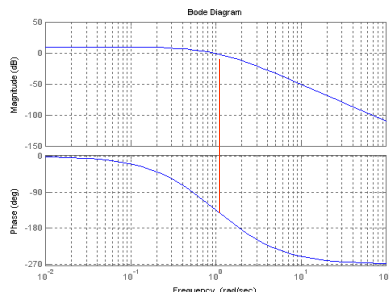
Se consideră sistemul

$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s+1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p=9$.

Soluție (cont.):

2. Redesenăm diagrama Bode pentru $3 \cdot G(s)$ și/sau determinăm PM cu MATLAB ptr $3 \cdot G(s)$.



Bode pentru K=3

```
clear;
numG=3;
den2=conv([1 0.5],[1 1]);
denG=conv(den2,[1 2]);
sysG=tf(numG,denG);
[mag,phase,w]=bode(sysG);
bode(sysG); grid on;
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
```

Determinăm $PM = 53^\circ$ și câștigul de frecvență joasă $K = 3$.

Se acceptă $PM = 53^\circ > 40^\circ$ deoarece bănuim că vom înrăutăți PM la adăugarea compensării

2019 *** Sisteme Automate de Control

8

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (3)

Se consideră sistemul

$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p = 9$.

Soluție (cont.):

3. Câștigul de joasă frecvență (ce determină eroarea staționară), trebuie crescut de 3 ori, deci $\alpha = 3$ pentru ca să obținem $K_p = 9$.
4. Alegem frecvența pentru zero mult mai mică decât $\omega_c = 1 \text{ rad/sec}$.
Adoptăm zero = 0.2 rad/sec ($T = 5$).
5. Adoptăm și frecvența pentru pol, la 0.06 rad/sec ($T = 5$, $\alpha = 3 \rightarrow 1/(\alpha T)$).
6. Incercăm legea de compensare:

$$D(s) = K \cdot \frac{s + \frac{1}{5}}{s + \frac{1}{15}} = 3 \cdot \frac{s + \frac{1}{5}}{s + \frac{1}{15}} \Rightarrow \text{Verifică } DC_{\text{Gain}} = D(0) \cdot G(0) = 9 \cdot 1 = 9$$

Redesenăm diagrama Bode.

Exemplul 1 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (4)

Se consideră sistemul

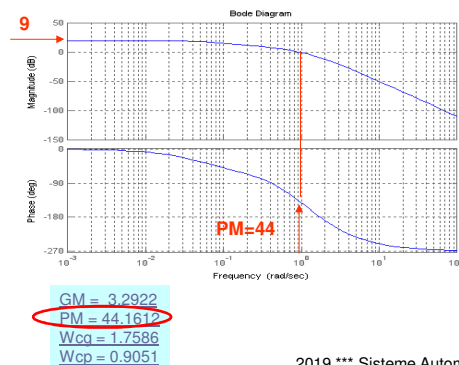
$$KG(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{0.5} \cdot s + 1\right) \cdot (s + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s + 1\right)}$$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, a.î. rezerva de fază să fie cel puțin 40° și $K_p = 9$.

Soluție (cont.):

7. Redesenăm diagrama Bode. Citim $K_p = 9$, $PM = 44^\circ$.

Nu trebuie să repetăm (sau să ajustăm) proiectarea.



```
numG=3;
den2=conv([1 0.5],[1 1]);
denG=conv(den2,[1 2]);
sysG=tf(numG,denG);
numD=[1 0.2];
denD=[1 1/15];
sysD=tf(numD,denD);
CL=sysG*sysD;
figure; bode(CL); grid on;
[mag,phase,w]=bode(CL);
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
```

Exemplul 2 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (1)

Se consideră sistemul $KG(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)}$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, astfel încât rezerva de fază să fie cel puțin 45° și $K_v = 10$.

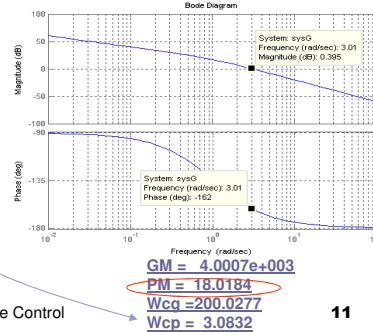
[de exemplu, ca la ora 11, p.6, "Urmărirea unei referințe variabile", eroarea staționară la semnal rampă pentru sistem cu un $1/s$, este $1/K_v$]

Soluție:

O altă strategie de proiectare ar fi să păstrăm câștigul de la frecvențe joase, din sistemul fără compensare, iar adăugarea unei compensări cu întârziere de fază să reducă frecvența de tăiere și implicit să îmbunătățească rezerva de fază (**PM**).

1. Considerăm direct $K=10$.
 2. Desenăm diagrama Bode pentru $K=10$.
- Avem $PM=18^\circ$ (insuficient) la $\omega_c=3\text{rad/sec}$.

```
clear;
numG=10;
denG=[1 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
[mag,phase,w]=bode(sysG);
bode(sysG); grid on;
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

11

Exemplul 2 – Proiectarea unui compensator cu întârziere de fază (2)

Se consideră sistemul $KG(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)}$

Proiectați o compensare cu întârziere de fază, astfel încât rezerva de fază să fie cel puțin 45° , și $K_v = 10$.

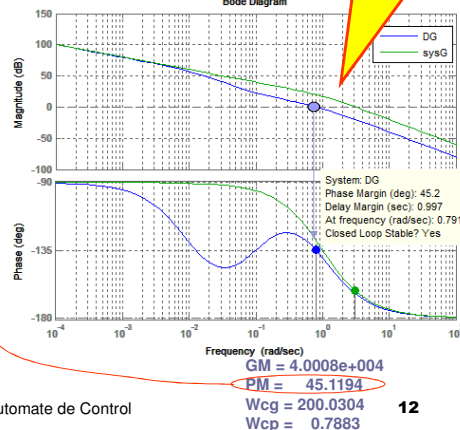
Soluție (cont.):

3. Alegem compensarea cu un pol și un zero mult mai mici decât $\omega_c = 3\text{rad/sec}$.
- Adoptăm $\omega_z = 0.1\text{rad/sec}$ și $\omega_p = 0.01\text{rad/sec}$.

$$D(s) = \frac{\frac{s}{0.1} + 1}{\frac{s}{0.01} + 1}$$

4. Desenăm diagrama Bode $\rightarrow PM = 45^\circ$.

```
clear;
numG=10;
denG=[1 1 0];
sysG=tf(numG,denG);
numD=[0.1 1];
denD=[0.01 1];
sysD=tf(numD,denD);
OL=sysG*sysD;
[mag,phase,w]=bode(OL);
bode(OL); grid on;
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
```



2019 *** Sisteme Automate de Control

12

Compensarea PID

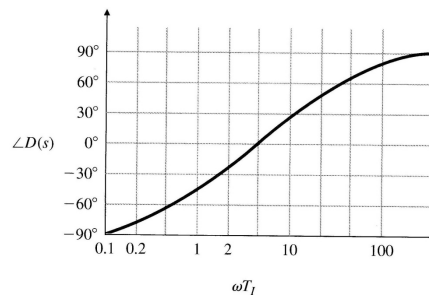
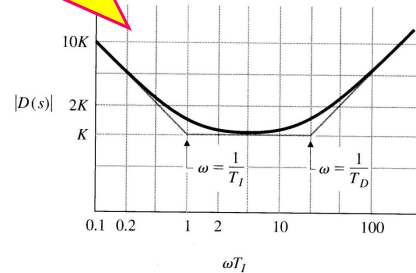
- Dacă dorim să îmbunătățim și rezerva de fază la frecvențe înalte și câștigul de la frecvențe joase, putem folosi un control PID.

- Definiție:

$$KD(s) = \frac{K}{s} \cdot (T_D \cdot s + 1) \cdot \left(s + \frac{1}{T_I} \right)$$

- În această formă, compensatorul este echivalent cu a combina un compensator cu întârziere de fază cu unul cu avans de fază (*“lead-lag compensator”*).

Adăugăm câștig la frecvențe joase și fază la frecvențe înalte.



2019 *** Sisteme Automate de Control

13

Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (1)

Se consideră sistemul

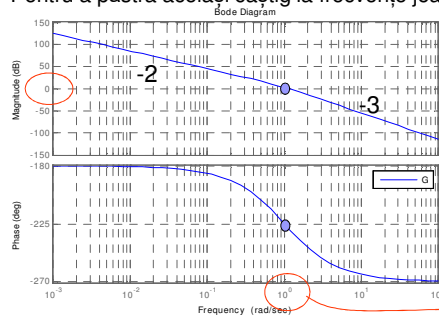
$$G(s) = \frac{0.9}{s^2} \cdot \left(\frac{2}{s+1} \right)$$

Proiectați o compensare astfel încât rezerva de fază să fie cel puțin **65°**, eroarea staționară nulă la rejecția perturbațiilor, și o lărgime de bandă cât mai mare.

Soluție

1. Desenăm diagrama Bode pentru $G(s)$.

- Avem nevoie de un termen derivativ (**zero**) pentru a aduce panta la -1 în punctul de intersecție a amplificării unitare (ω_c), deoarece acum avem pantele de -2, și -3.
- Pentru a păstra același câștig la frecvențe joase adăugăm termenul integrator.



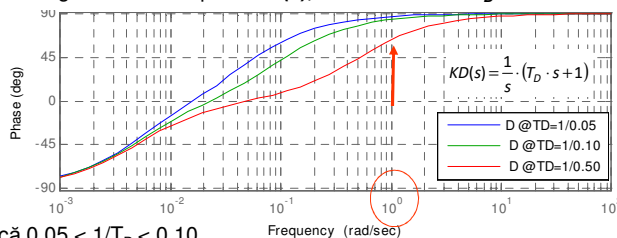
Vom reține această valoare pentru studiul BW

2019 *** Sisteme Automate de Control

14

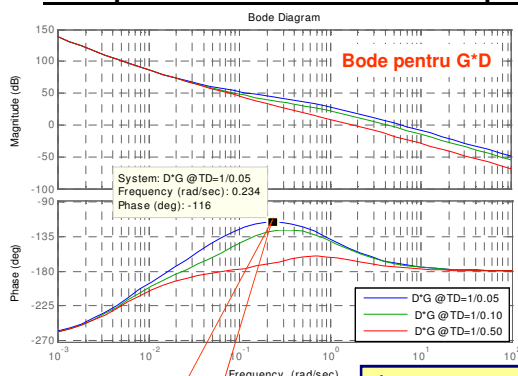
Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (2)

- Considerăm $T_I \gg T_D$
(frecvența termenului integral mult mai mică decât a termenului derivativ)
- Analizăm influența lui T_D pentru un K arbitrar, dar posibil ($K = 1$ în desen).
- Nu ne interesează diagrama de amplificări (ar fi doar trasată pe verticală de un alt câștig K).
- Considerăm diagrama de fază pentru $D(s)$, la diferite valori T_D .



- Observăm că $0.05 < 1/T_D < 0.10$.
- Orice valoare $1/T_D < 0.05$ (deasupra), nu produce nici o creștere în ω_c (BW)
- Orice valoare $1/T_D > 0.10$ (sub) nu satisface cerințele pentru $PM = 65^\circ$.
- Rămânem la $T_D = 20$ ($1/T_D = 0.05$, desen ALBASTRU).
Considerăm $T_I \gg T_D$ (sau termenul integrator intervine mult sub cel derivativ, la frecvențe mult mai joase). $1/T_I = 0.005 \rightarrow s + 0.005$

Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (3)



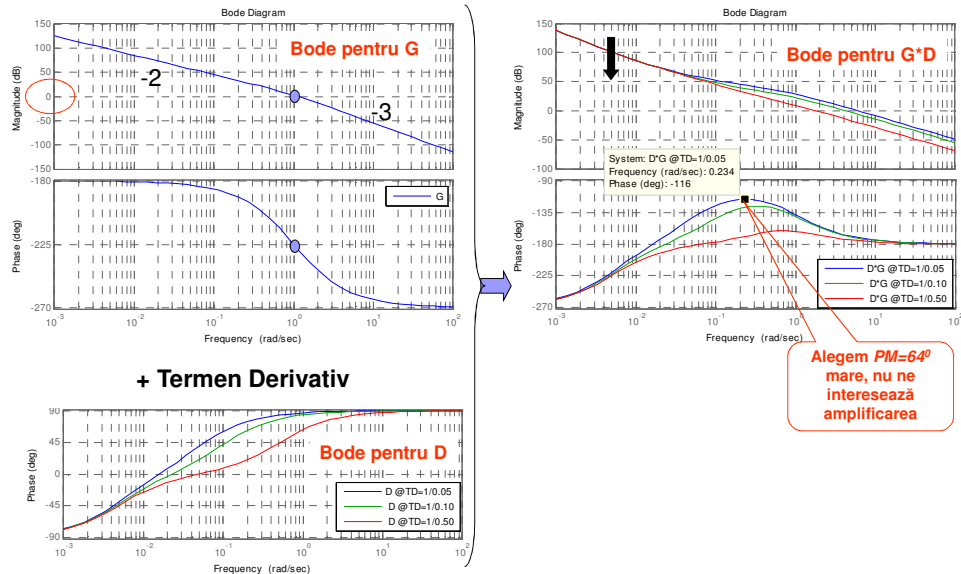
$$D(s) = \frac{1}{s} \cdot (T_D \cdot s + 1) \cdot \left(s + \frac{1}{T_I} \right) = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{0.05} \cdot s + 1 \right) \cdot (s + 0.005)$$

Încă nu am ales K

Alegem PM mare, nu ne interesează acum amplificarea

```
clear;
numG=1.8; denG=[1 1 0 0]; G=tf(numG,denG);
bode(G,[1e-3,1e2]); grid on; legend('G'); figure;
TD=1/0.05; num=conv([TD 1],[1 0.005]); den=[1 0];
D1=tf(num,den); bode(D1*[1e-3,1e2]); hold on;
TD=1/0.1; num=conv([TD 1],[1 0.005]); den=[1 0];
D2=tf(num,den); bode(D2*[1e-3,1e2]); hold on;
TD=1/0.5; num=conv([TD 1],[1 0.005]); den=[1 0];
D3=tf(num,den); bode(D3*[1e-3,1e2]); hold on;
grid on; legend('D*G @TD=1/0.05','D*G @TD=1/0.10','D*G @TD=1/0.50');
figure; bode(D1,D2,D3,[1e-3,1e2]);
grid on; legend('D @TD=1/0.05','D @TD=1/0.10','D @TD=1/0.50');
```


Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (4)



2019 *** Sisteme Automate de Control

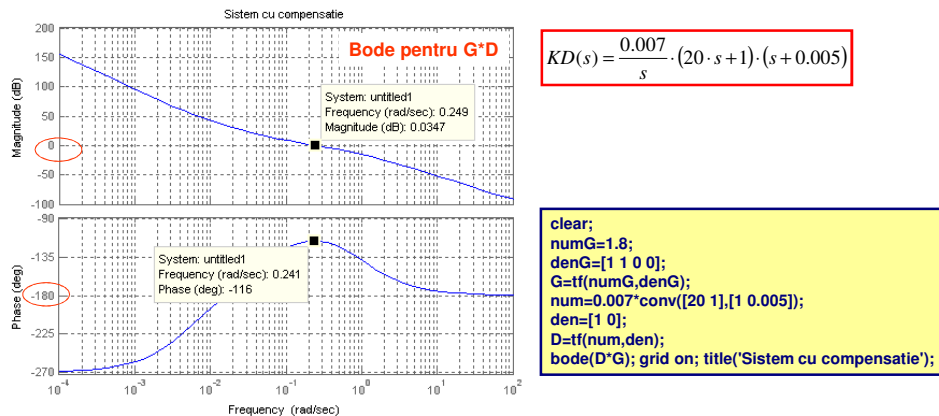
17

Exemplul 3 – Proiectarea unui compensator PID (5)

6. Trebuie să alegem K astfel încât caracteristica de amplificare să treacă prin axa de câștig unitar ("1") la $PM = 64^\circ$.

Pentru $K = 1$, observăm $|D(s)G(s)| = 43dB = 141.25$ la $\omega_c = 0.25rad/sec$, pentru $PM = 64^\circ$.

Pentru a face $\omega_c = 0.25rad/sec = \text{Frecvența de tăiere}$, trebuie să avem $|KD(s)G(s)| = 1$, deci $K = 1/141.25 = 0.007$.



2019 *** Sisteme Automate de Control

18

Observații finale despre compensație

Controlul PD ("FTS") adaugă fază la toate frecvențele deasupra frecvenței de trecere.

- Dacă câștigul nu se schimbă la frecvențe joase, frecvența de tăiere (amplificare unitară) și lărgimea de bandă (BW) vor crește.
- Creșterea amplificării la frecvențe înalte va crește sensibilitatea la zgomot.

Compensarea cu avans de fază adaugă fază într-un domeniu de frecvențe între două frecvențe de schimbare a pantei, alese în jurul frecvenței originale de trecere.

- Dacă nu există creștere a câștigului de frecvență joasă, această compensare va determina creșterea lărgimii de bandă.

Controlul PI ("FTJ") crește amplitudinea răspunsului la frecvențe joase, scăzând astfel eroarea staționară.

- Scade faza sub frecvența de trecere, producând posibile probleme de stabilitate.

Compensarea cu întârziere de fază crește amplitudinea între două frecvențe de schimbare a pantei.

- Pentru valori corespunzătoare a lui K , poate scăde amplitudinea pentru a menține o rezervă de fază dorită.
- Produce o scădere a fazei între două limite care trebuie ținute la valori scăzute.

2019 *** Sisteme Automate de Control

19

- Modul 22 = Considerații practice legate de proiectare.

2019 *** Sisteme Automate de Control

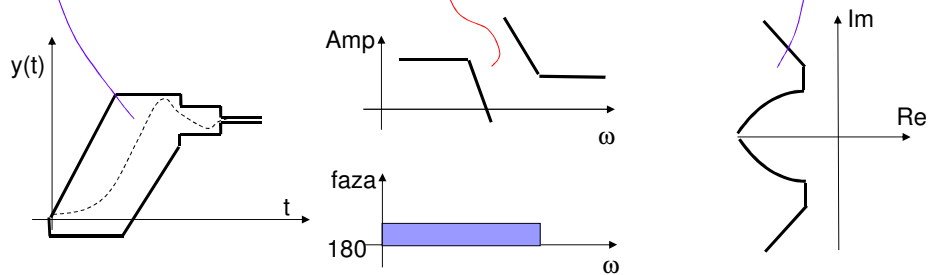
20

Considerații de proiectare cu metoda răspunsului în frecvență

Cerințele de proiectare:

Pot fi definite în:

- Domeniul timp, ca răspuns la semnale treaptă și impuls
- Domeniul **pol-zero**, ca restricții în planul complex
- În frecvență, ca domenii permise ale reprezentării în frecvență.

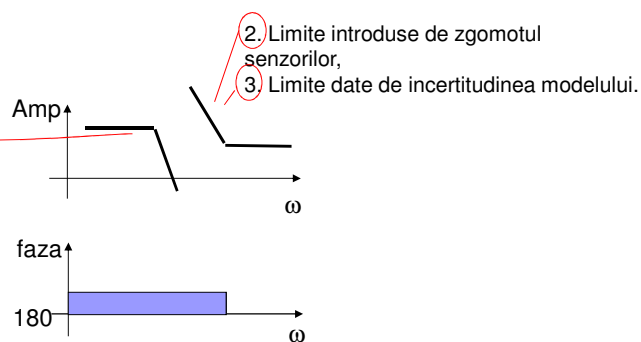


2019 *** Sisteme Automate de Control

21

Proiectare pe baza unor condiții pentru caracteristicile Bode

1. După cum s-a arătat, erori staționare pot apare atât datorită unor semnale particulare de referință cât și datorită unor perturbații.



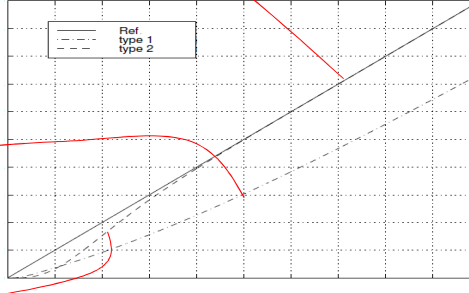
2019 *** Sisteme Automate de Control

22

(1) Limitarea erorilor staționare (1)

- După cum s-a arătat, la aplicarea unui semnal la intrarea unui sistem, componentele din semnalul de ieșire ce corespund unor poli simpli din f.d.t. a sistemului se vor atenua în timp, lăsând semnalele sinusoidale de la intrare să persiste la ieșire.
- La aplicarea unui semnal de referință sinusoidal, am arătat că se produce o eroare staționară, în funcție de tipul sistemului, în mod asemănător cu aplicarea unui semnal **rampă** la intrarea sistemului.

	Semnal de intrare ("Referință")		
	Treapta ("Pozitie")	Rampa ("Viteza")	Parabola ("Acceleratie")
	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t \cdot 1(t)$	$r(t) = t^2 \cdot 1(t)$
Tipul "0"	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
Tipul "1"	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipul "2"	0	0	$\frac{1}{K_a}$



(1) Limitarea erorilor staționare (2)

- Fiecare semnal de intrare complex poate fi descompus într-o sumă de semnale sinusoidale
- Pentru reducerea erorilor staționare este necesar să avem un câștig mare la frecvențe joase.
 - Mai mult, sistemele dinamice pot fi caracterizate printr-un interval de frecvențe pentru care nu avem erori staționare (de fapt, erorile sunt sub o anumită valoare = dată de proiectare).

(1) Limitarea erorilor staționare (3)

- O astfel de diagramă Bode înglobând toate condițiile pentru amplificarea pe buclă în funcție de frecvența semnalului de intrare poate reprezenta o altă definiție pentru condițiile de proiectare. În acest caz:

$$E(s) = \frac{1}{1 + DG_o} \cdot R(s) = S \cdot R \Rightarrow |E| = |S| \cdot |R| < e_b \Rightarrow |S| < \frac{1}{W_p} \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + DG_o} \right| < \frac{1}{W_p}$$

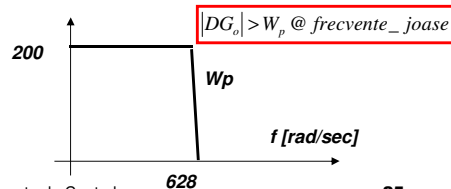
Specificatie _ Proiectare _ Eroare _ E(s)

- Se observă că se poate lucra cu o funcție de sensibilitate $S(j\omega)$.
- Se poate considera o valoare aproximativă:

$$|DG_o| > W_p @ \text{frecvențe joase}$$

Exemplu = Un sistem cu reacție unitară trebuie să furnizeze o eroare staționară mai mică decât 0.005 pentru orice semnal sinusoidal sub 100Hz.

Soluție = Amplificarea cerută este > 200 pentru domeniul de frecvențe dat.



2019 *** Sisteme Automate de Control

25

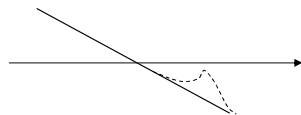
(2) Limitarea zgomotului din senzori

- Am văzut că o filtrare la frecvență înaltă este binevenită.
 - De exemplu, la proiectarea reguletoarelor PD, adăugăm un pol la 5-10 ori mai mare decât **zero**-ul din PD.
- Mai mult, unii proiectanți dublează efectul acestui pol de înaltă frecvență, pentru filtrarea zgomotului:

$$\frac{T \cdot s + 1}{(\alpha \cdot T \cdot s + 1)^2}$$

(3) Limitarea posibilității declanșării de rezonanțe la frecvențe înalte

- Multe sisteme mecanice prezintă rezonanțe la frecvențe înalte, care pot avea efect în stabilitatea sistemului.



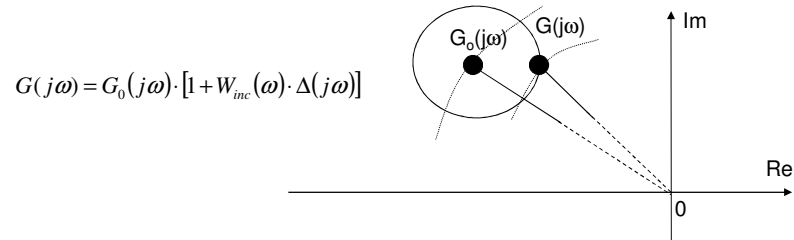
- O strategie bună în acest caz este menținerea câștigului subunitar în jurul frecvenței acestor posibile rezonanțe.
 - Se pot introduce poli adiționali
 - Acest proces se numește stabilizarea amplificării (gain stabilization).**

2019 *** Sisteme Automate de Control

26

(4) Incertitudinea modelului (1)

- Vom încerca acum să modelăm și să discutăm proiectarea legii de compensare pentru variația parametrilor legii de transfer a instalației.
- Vom considera existența unei incertitudini în definirea modelului.
 - Pentru orice valoare de interes „s”, funcția de transfer este un număr complex, o locație în planul complex.
 - Vom exprima incertitudinea modelului ca o posibilă variație în amplitudinea acestei locații și o posibilă variație în fază (vezi figura).



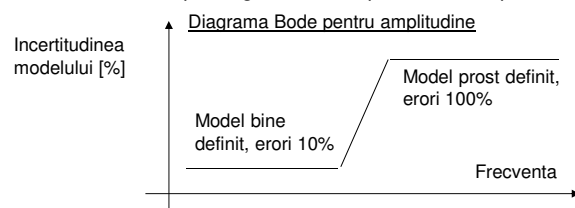
- W_{inc} (raza) este foarte redus la frecvențe joase unde modelul este mai bine cunoscut și nu avem o variație atât de mare a parametrilor, și este mai mare la frecvențe înalte unde modelul original s-ar putea să nu fi fost prea bine definit
 - „efecte sau componente parazite”, vibrații, zgomote, s.a.m.d.
 - unde variația parametrilor este mai importantă în operație (mediu ambiant, îmbătrânire).

2019 *** Sisteme Automate de Control

27

(3) Incertitudinea modelului (2)

- Putem reprezenta acest lucru pe diagrama de amplitudine a răspunsului în frecvență:



- Să presupunem că am proiectat o lege de compensație pentru modelul nominal $G_0(j\omega)$ și că sistemul în bucla închisă este stabil, deci $1 + DG_0 \neq 0$.

$$1 + D \cdot G \neq 0 \Leftrightarrow 1 + D \cdot G_0 \cdot [1 + W_{inc} \cdot \Delta] \neq 0 \Leftrightarrow 1 + D \cdot G_0 + D \cdot G_0 \cdot W_{inc} \cdot \Delta \neq 0$$

$$(1 + D \cdot G_0) \cdot [1 + T \cdot W_{inc} \cdot \Delta] \neq 0 \Rightarrow |T \cdot W_{inc} \cdot \Delta| < 1$$

$$\text{unde } T(s) = \frac{DG_0}{1 + DG_0} = \text{Funcție_de_sensibilitate}$$

$$|T \cdot W_{inc}| < 1 \Leftrightarrow |T| \cdot W_{inc} < 1 \Leftrightarrow |T| < \frac{1}{W_{inc}} \Leftrightarrow \left| \frac{DG_0}{1 + DG_0} \right| < \frac{1}{W_{inc}}$$

- Forma aproximativă:

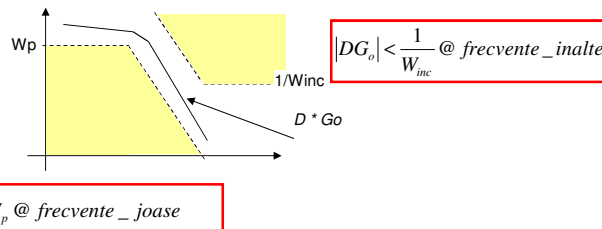
$$|DG_0| < \frac{1}{W_{inc}} @ \text{frecvențe_înalte}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

28

Etape de proiectare

- Se definesc constrângerile aproximative date de W_p (pagina 25) și W_{inc} (pagina 28).



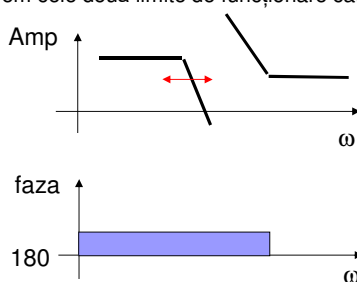
- Se alege o funcție de transfer DG_o care să satisfacă ambele condiții.
- Se proiectează o lege de compensare capabilă să aducă funcția de transfer în buclă închisă la forma dorită.
- Se verifică noua lege de transfer în bucla închisă, față de condițiile (fără aproximare)

$$\left| \frac{DG_o}{1 + DG_o} \right| < \frac{1}{W_{inc}}$$

$$\left| \frac{1}{1 + DG_o} \right| < \frac{1}{W_p}$$

Observații finale asupra restricțiilor pentru amplificarea în sisteme reale

- Observând cele două condiții pentru eroare staționară redusă și pentru incertitudinea modelului, am dori să avem cele două limite de funcționare cât mai aproape una de alta.



- Acest lucru ar însemna o pantă foarte mare a caracteristicii.
 - Dacă am încerca să facem panta mai mare (mai rapidă), am pierde rezerva de fază, și am contrazice ideea de stabilitate la o pantă de -1 la intersecția cu axa 0dB.
- (vezi consecința teoremei Bode, în cursul 5)

Observație - Un alt mod de analiză este prin definirea unei sensibilități.

Sisteme cu întârziere de timp (*Time Delay* T_d)

- Toate sistemele reale, fizice, prezintă elemente de întârziere.
 - Măsurarea mărimilor de reacție prezintă întârziere de timp.
 - Implementarea circuitelor de control introduce involuntar elemente de întârziere de timp.
- Transformarea Laplace a unei întârzieri de timp T_d este: $G(s) = e^{-sT_d}$ *Cea mai "bună" aproximare a unei funcții cu o funcție rațională*
- Pentru care se folosește **aproximarea Pade** sau reprezentarea în serii McLaurin a funcției exponențiale:

$$f(x) = e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

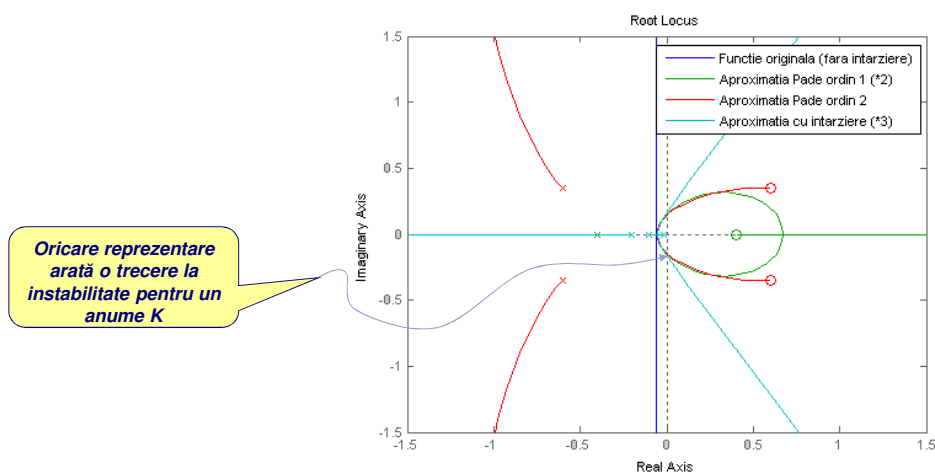
$$G(s) = e^{-sT_d} \cong \frac{1 - s \cdot \frac{T_d}{2}}{1 + s \cdot \frac{T_d}{2}}$$
- Dacă întârzierea este foarte mică, câteodată se folosește aproximarea:

$$G(s) = e^{-sT_d} \cong \frac{1}{1 + s \cdot T_d}$$
- Răspunsul în frecvență a unui element de întârziere (aproape ca un filtru trece jos):
 - Amplitudine unitară
 - Pierdere de fază, $[-\omega T_d]$ rad
 - limitează lărgimea de bandă maximă ce se poate obține într-un sistem ce conține acest element de întârziere.
 - Introduce sau modifică limita de stabilitate

Exemplu de instabilitate provocată de elementele de întârziere

- Să considerăm funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s+1) \cdot (60s+1)}$$
- Cu reprezentarea locului rădăcinilor în figură.

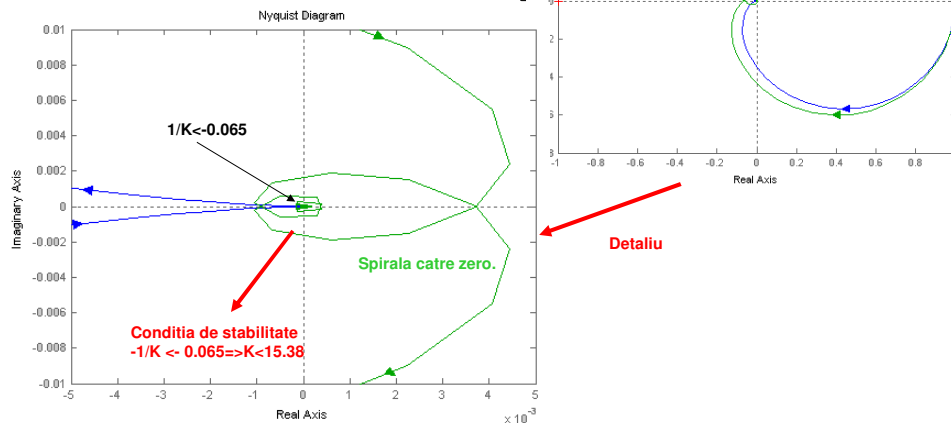


Exemplu de instabilitate provocată de elementele de întârziere

- Să considerăm funcția de transfer

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s+1) \cdot (60s+1)}$$

- Cu reprezentarea Nyquist în figură.



2019 *** Sisteme Automate de Control

33

Observații finale

- Am discutat aspecte practice particulare implementării practice a metodei răspunsului în frecvență:
 - Proiectarea considerând incertitudinea modelului și un criteriu de performanță
 - Efectul unor elemente de întârziere.

2019 *** Sisteme Automate de Control

34

Anexa

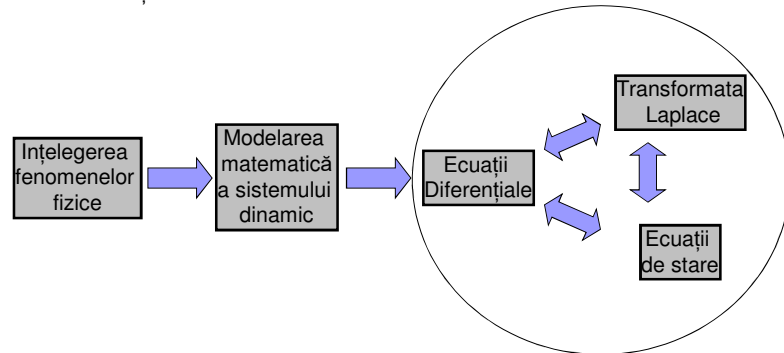
- Program pentru desenele din pagina 12
- Folosim instrucțiunea **pade(T,N)**, unde T=constanta, N=ordinul aproximativ.

```
clear;
num=1;
den=conv([10 1],[60 1]);
H=tf(num,den);
den2=conv([5 1],den);
Ad=tf(num,den2);
[NUM,DEN] = pade(5,1);
P=tf(NUM,DEN);
A1=series(H,P);
[NUM,DEN] = pade(5,2);
P=tf(NUM,DEN);
A2=series(H,P);
rlocus(H, A1, A2, Ad); axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5]);
legend('Funcție originală (fără întârziere)', 'Aproximația Pade ordin 1 (*2)',
'Aproximația Pade ordin 2', 'Aproximația cu întârziere (*3)');
figure;
s=tf('s');
Aa=exp(-5*s); A=series(H,Aa);
nyquist(H,A);
legend('Funcție originală (fără întârziere)', 'Funcția cu întârziere, fără aproximație');
figure;
nyquist(H,A); axis([-0.005,0.005,-0.01,0.01]);
```

- Modul 23 = Transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații de stare. Forme Canonice.

Ecuatii diferențiale în forma variabilelor de stare (1)

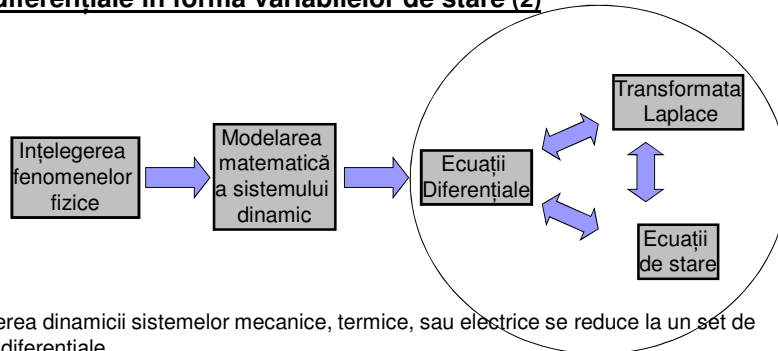
- Principiul de bază al acestei metode constă în posibilitatea descrierii complete a comportării unui sistem cu un set de mărimi de stare pe baza ecuațiilor diferențiale ce descriu sistemul, cunoscând un sistem de mărimi de intrare.
- Starea sistemului se consideră a fi o informație minimă asupra sistemului la un moment dat, care împreună cu valorile mărimilor de intrare la același moment permite determinarea evoluției ulterioare a sistemului.



2019 *** Sisteme Automate de Control

37

Ecuatii diferențiale în forma variabilelor de stare (2)



- Descrierea dinamicii sistemelor mecanice, termice, sau electrice se reduce la un set de ecuații diferențiale.
- Este avantajos să putem pune aceste ecuații diferențiale într-o formă similară pentru mai multe aplicații, în scopul dezvoltării unor metode și programe unice de rezolvare.
- Se preferă descrierea sistemului prin ecuații simple, de primul ordin; chiar dacă aceasta implică introducerea unor variabile intermediare (de stare).
 - Practic, fiecare variabilă de stare corespunde unui integrator necesar rezolvării unei ecuații de ordinul întâi.
 - Orice set de ecuații diferențiale poate fi rescris ca un set de ecuații de ordinul întâi.
 - Se constituie un vector (*matrice $n \times 1$*) de variabile, și soluția este văzută ca o traiectorie în spațiul stărilor.

2019 *** Sisteme Automate de Control

38

Exemplu

- Deplasarea unui vehicul poate fi descrisă prin

$$u - b \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x} = \frac{u}{m}$$

unde: b = coeficientul de frecare

m = masa

x = deplasarea, x' = viteza, x'' = accelerația.

- Se poate considera viteza $[v]$ ca o variabilă intermediară, de stare.

$$\dot{v} = -\frac{b}{m} \cdot v + \frac{1}{m} \cdot u$$

- Această ecuație de mișcare poate fi identificată cu forma generală a ecuațiilor de stare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \cdot u$$

Generalizare:

$$\dot{x} = F \cdot x + G \cdot u$$

x = Variabile de stare
 u = Variabile de intrare
 F, G = Matrici de stare

- Pentru determinarea variabilei de ieșire (redefinim poziția vehiculului cu altă variabilă):

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

Generalizare:

$$y = H \cdot x + J \cdot u$$

x = Variabile de stare
 u = Variabile de intrare
 y = Variabile de ieșire
 H, J = Matrici de ieșire

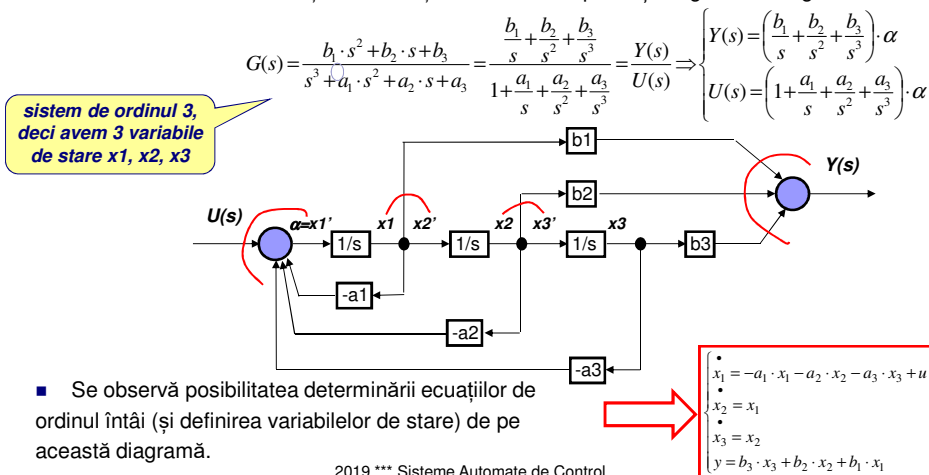
Observație: Această reprezentare matriceală a sistemelor nu este unică (aduceți-va aminte de proprietățile de transformare a matricilor).

Folosirea variabilelor de stare în control

- Proiectarea sistemelor de control cu variabile de stare presupune proiectarea unei compensări dinamice a unui sistem prin lucrul direct cu variabile de stare.
- Studiul ecuațiilor diferențiale puse sub forma ecuațiilor diferențiale ordinare are următoarele avantaje:
 - Folosește un instrument matematic în domeniul timp.
 - Permite studiul și descrierea unor sisteme mai complexe, nu neapărat liniare, sau staționare.
 - Permite descrierea mai multor sisteme în același format, și definirea unor metode generice.
 - Permite lucrul centralizat cu sisteme cu mai multe intrări, și/sau mai multe ieșiri.
 - Permite vizualizarea rezultatelor în sisteme multi-dimensionale.
 - Permite inter-conectarea mai multor sisteme, descrise prin legi fizice diferite.
 - Permite includerea în model a legilor de evoluție interne (spre deosebire de funcția de transfer care nu arată decât o legătură intrare-ieșire).
- Principiul proiectării prin folosirea variabilelor de stare:
 - Consideră toate variabilele de stare măsurate și disponibile pentru control ("full state feedback").
 - Aceasta permite atribuirea de cerințe dinamice arbitrare și considerarea lor pentru o primă proiectare.
 - Putem folosi un "observer" pentru estimarea [construirea] variabilelor de stare din măsurile măsurate de la ieșirea sistemului.
 - Adăugăm referințele externe pentru a avea o structură completă.
 - Legile de control obținute sunt similare legilor obținute prin metodele transformatei în frecvență.

Diagrama cu integratori

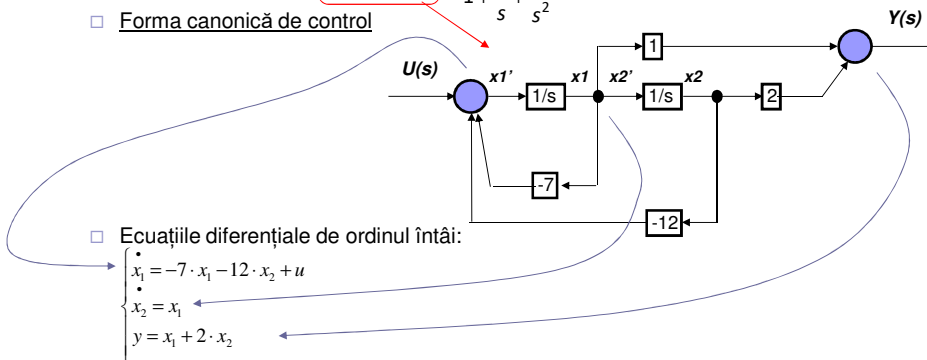
- Reprezentăm grafic funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă, utilizând doar integratori izolați, ca elemente dinamice ($1/s$). O astfel de diagrama bloc este denumită **forma canonică de control** ("**control canonical form**").
 - Fiecare variabilă de stare este conectată prin reacție la intrarea sistemului.
- Să considerăm echivalența între funcția de transfer Laplace și diagrama din figură



Exemplu:

- Fie funcția de transfer

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s^2+7 \cdot s+12} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}}{1 + \frac{7}{s} + \frac{12}{s^2}} = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$
- **Forma canonică de control**



- Ecuațiile de stare în forma canonică de control:

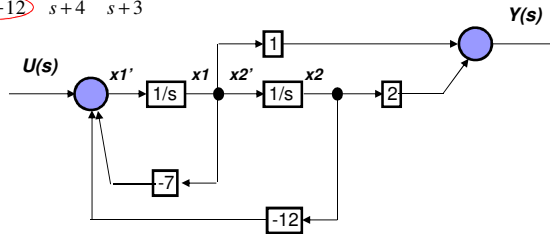
$$\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \\ y = C_c \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D_c = 0$$

Exemplu:

- Fie funcția de transfer

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 7s + 12} = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$

- Forma canonică de control



- Ecuațiile diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 + 2 \cdot x_2 \end{cases}$$

- Ecuațiile de stare în forma de control canonică

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \\ y = C_c \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D_c = 0$$

Formă caracteristică unui sistem cu "o singură intrare – o singură ieșire"

In acest caz, ieșirea "y" nu depinde direct de mărimea de intrare "u".

2019 *** Sisteme Automate de Control

43

Forma canonică de control – Generalizare

- Funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{b_1 \cdot s^{n-1} + b_2 \cdot s + \dots + b_n}{s^n + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + \dots + a_n}$$

- Matricele din ecuațiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c \cdot x + B_c \cdot u \\ y = C_c \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \quad D_c = 0$$

- Aceleași rezultate pentru forma canonică de control se pot obține în **MATLAB** cu

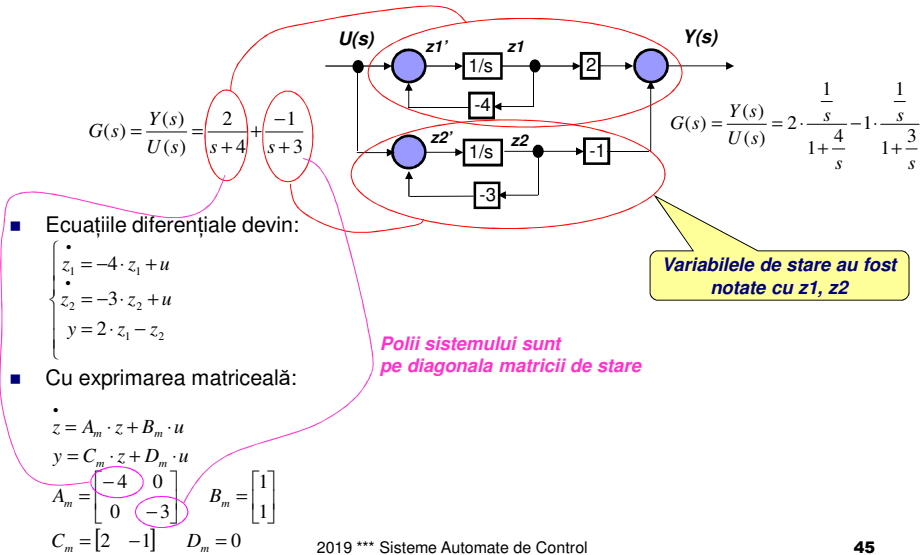
[A,B,C,D]= tf2ss(num,den)

2019 *** Sisteme Automate de Control

44

Forma canonică modală

- Dacă considerăm acum desfașurarea în fracții parțiale, putem avea o altă reprezentare grafică a funcției de transfer originale.



2019 *** Sisteme Automate de Control

45

Matricea de controlabilitate (1)

- Pentru că există cel puțin două reprezentări matriceale posibile pentru același sistem, înțelegem că putem defini o transformare liniară de matrici (= schimbare a variabilelor de stare), capabilă să treacă dintr-o reprezentare în alta.

De exemplu, de la x la z

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ y = H \cdot x + J \cdot u \end{cases} \xrightarrow{T} \begin{cases} \dot{z} = A \cdot z + B \cdot u \\ y = C \cdot z + D \cdot u \end{cases}$$

Dacă: $x = T \cdot z \Leftrightarrow \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} A &= T^{-1} \cdot F \cdot T & B &= T^{-1} \cdot G \\ C &= H \cdot T & D &= J \end{aligned}$

- Pentru a proiecta legile de control în buclă închisă trebuie să avem ecuațiile de stare scrise în forma canonică de control (demonstratia mai târziu)
 - În acest scop, ne trebuie un mecanism de a transforma orice set de ecuații de stare în ecuații de stare scrise în forma canonică de control.

2019 *** Sisteme Automate de Control

46

Matricea de controlabilitate (2)

- Să considerăm un sistem caracterizat prin matricile de stare (F, G, H, J) și dorim să determinăm o transformare T capabilă să aducă sistemul în forma canonică de control.
- În forma canonică de control, matricile de stare sunt

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \quad D = 0$$

$$G(s) = \frac{b_1 \cdot s^{n-1} + b_2 \cdot s + \dots + b_n}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Vom nota liniile matricei T (matricea de transformare) cu t_1, t_2, t_3 .
- Se obține (v.pag. precedentă)

$$A \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot F \Rightarrow \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \cdot F \\ t_2 \cdot F \\ t_3 \cdot F \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ t_1 = t_2 \cdot F = t_3 \cdot F^2 \\ t_2 = t_3 \cdot F \end{cases}$$

$$B = T^{-1} \cdot G \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \cdot G \\ t_2 \cdot G \\ t_3 \cdot G \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_3 \cdot G = 0 \\ t_2 \cdot G = (t_3 \cdot F) \cdot G = 0 \Rightarrow t_3 \cdot [G \quad F \cdot G \quad F^2 \cdot G] = [0 \quad 0 \quad 1] \\ t_1 \cdot G = (t_3 \cdot F^2) \cdot G = 1 \end{cases}$$

- Deci matricea de transformare s-ar putea calcula dacă am cunoaște întâi matricea $\varphi = [G \quad F \cdot G \quad F^2 \cdot G]$ pe care o vom denumi **matrice de controlabilitate**.

Matricea de controlabilitate (3)

Etapele de transformare a unui set de ecuații de stare în forma canonică de control

1. Calculați matricea de controlabilitate:

$$\varphi = [G \quad FG \quad \dots \quad F^{n-1}G]$$

2. Calculați ultima linie a inversei matricei de transformare:

$$t_n = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \cdot \varphi^{-1}$$

3. Compuneți matricea transformării liniare prin formulele:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_n \cdot F^{n-1} \\ t_n \cdot F^{n-2} \\ \dots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Exemplu program
MATLAB pentru
sistem de ordinul 2

```
sys=ss(F,G,H,J);
co=ctrb(F,G);
tn=[0 1]*inv(co);
Ti=[tn*F; tn];
z=ss2ss(sys,inv(Ti))
```

- Dacă matricea φ (matrice de controlabilitate) nu este singulară, atunci sistemul dat de F, G este controlabil.
- O matrice este nesingulară dacă determinantul este nenul, deci există inversa sa.
- O schimbare de stare (transformare de matrici) nu schimbă proprietatea de controlabilitate
 - Noile matrici de stare determină o matrice de controlabilitate nesingulară.

Forma canonică de observare

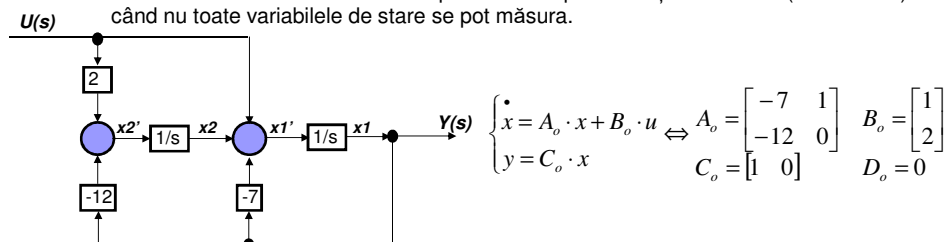
- Să considerăm din nou funcția de transfer originală:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \Rightarrow Y(s) \cdot \left(1 + \frac{7}{s} + \frac{12}{s^2}\right) = U(s) \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right) \Rightarrow Y(s) = \frac{U(s) - 7 \cdot Y(s)}{s} + \left(\frac{2 \cdot U(s) - 12 \cdot Y(s)}{s^2}\right)$$

- Să definim o nouă reprezentare în care orice legătură de reacție să fie de la ieșire către variabilele de stare.

- Această formă este definită pentru a caracteriza variabilele de stare din măsurători ale mărimilor de ieșire.

- Acest lucru este adeseori necesar pentru a completa reacția sistemului ("feedback") când nu toate variabilele de stare se pot măsura.



- Și în acest caz putem verifica matematic dacă toate mărimile de stare se pot defini din mărimi de ieșire prin calcularea unei matrici de observabilitate (considerăm sistemul definit de F, G, H, J): $O = \begin{bmatrix} H & HF & \dots & HF^{n-1} \end{bmatrix}^T$

- **Dacă O nu este singulară, atunci sistemul este observabil, deci putem estima/calcula variabilele de stare din variabilele de ieșire.**

2019 *** Sisteme Automate de Control

49

Determinarea funcției de transfer din ecuațiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \\ y = H \cdot x + J \cdot u \end{cases}$$

$$\dot{x} = F \cdot x + G \cdot u \xrightarrow{\text{Laplace}} s \cdot X(s) - x(0) = F \cdot X(s) + G \cdot U(s) \Leftrightarrow (s \cdot I - F) \cdot X(s) = G \cdot U(s) + x(0)$$

$$\Leftrightarrow X(s) = (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G \cdot U(s) + (s \cdot I - F)^{-1} \cdot x(0)$$

$$Y(s) = H \cdot X(s) + J \cdot U(s) = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G \cdot U(s) + H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot x(0) + J \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + J$$

- ... care se poate determina și cu MATLAB.

[num, den] = ss2tf(A,B,C,D,i)

[z, p, k] = ss2zp(A,B,C,D,i)

- Funcțiile de transfer de la a i -a intrare la fiecare ieșire.
- Toate $f.d.t.$ vor avea același numitor și diferite funcții polinomiale la numărător.

- Această formă este importantă pentru că leagă ecuațiile de stare de determinarea răspunsului dinamic al sistemului, cu toți parametri definiți anterior pentru funcții de transfer.

2019 *** Sisteme Automate de Control

50

Observații finale

- Există o echivalență între ecuații diferențiale, funcții de transfer și ecuații de stare.
- Ecuațiile de stare se pot exprima în diferite forme (de control, modală, de observare).
- Transformări liniare între matrici pot converti o formă în alta.

- O proprietate importantă pentru controlul unui sistem definit de ecuațiile de stare, este controlabilitatea, exprimată prin matricea de controlabilitate.
 - Dacă această matrice este nesingulară, atunci ecuațiile sistemului se pot transforma în forma canonică de control.

- O proprietate importantă pentru controlul unui sistem definit de ecuațiile de stare, este observabilitatea, exprimată prin matricea de observabilitate.
 - Dacă aceasta este nesingulară, atunci ecuațiile sistemului se pot transforma în forma canonică de observare.

- Modul 24 = Proiectarea legii de control.

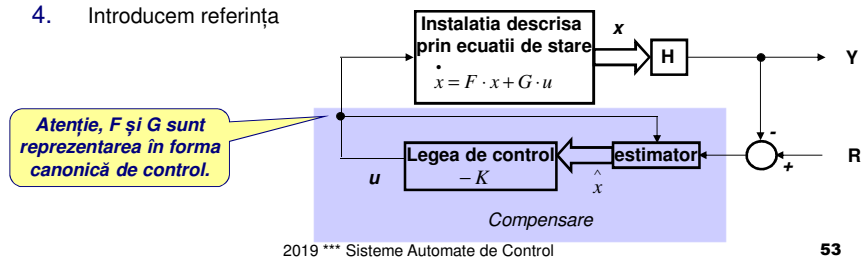
Proiectarea legii de control (1)

- O caracteristică atractivă a lucrului cu variabile de stare constă în **proiectarea structurată** a legii de control, prin urmarea unor pași independenți de sistemul dat.

□ Avantaj la proiectarea automată pe calculator.

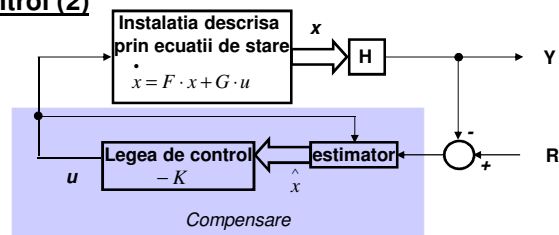
Etapele de proiectare a legii de compensare

1. Stabilim ecuațiile de stare și estimăm variabilele de stare pentru reacție
 - **Reacția este întotdeauna după variabile de stare.**
 - S-ar putea să nu putem măsura toate variabilele de stare, și să trebuie să estimăm prin calcul unele variabile de stare.
2. Calculăm legea de control ca o combinație liniară a variabilelor de stare
3. **Legea de control plus estimarea variabilelor de stare reprezintă compensarea. Definim estimatorul dacă nu putem măsura toate variabilele de stare.**
4. Introducem referința



53

Proiectarea legii de control (2)



- Scopul proiectării legii de control este acela de a permite determinarea (schimbarea) unor locații a polilor sistemului pentru satisfacerea unor performanțe dinamice.
 - Am văzut legătura dintre locația polilor și răspunsul dinamic al sistemelor în cursul 2.
- Legea de control este dată ca o combinație liniară a variabilelor de stare, presupunând că avem informație despre toate variabilele de stare $[x]$:

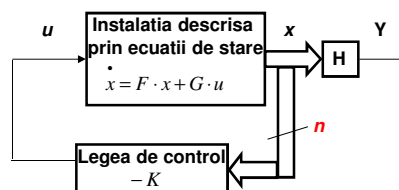
$$u = -K \cdot x = -[K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

54

Proiectarea legii de control (3)

- Proiectarea legii de control prin metoda variabilelor de stare presupune că toate variabilele de stare sunt cunoscute (fie coincid cu ieșirile și sunt măsurate, sau sunt estimate din ieșiri).
 - Ar putea exista metode de control ce utilizează mai puține variabile pentru reacție ("feedback").
 - Variabilele de stare care nu se pot măsura direct în instalație, se pot calcula pentru a fi disponibile proiectării sistemului de compensare.
 - Pornim de la faptul că toate variabilele de stare sunt disponibile.
 - **Numărul variabilelor de stare corespunde numărului rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului, deci putem selecta independent locația fiecărei rădăcini pentru câte un coeficient din legea de control.**
- Pentru proiectarea legii de control, vom considera schema simplificată.



2019 *** Sisteme Automate de Control

55

Proiectarea legii de control (4)

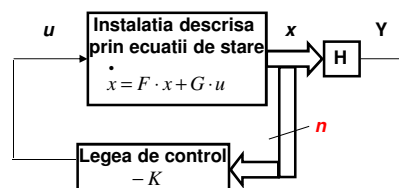
- Matematic:

$$\dot{x} = F \cdot x - G \cdot K \cdot x \Rightarrow \dot{x} = (F - G \cdot K) \cdot x \Rightarrow s \cdot I \cdot x = (F - G \cdot K) \cdot x \Rightarrow (s \cdot I - F + G \cdot K) \cdot x = 0$$
- Ecuația caracteristică a acestui sistem în buclă închisă este

$$\det[s \cdot I - F + G \cdot K] = 0$$

care conduce la un polinom de ordinul n , ce conține coeficienții K_1, \dots, K_n .

- Trebuie să alegem acești coeficienți astfel încât rădăcinile să se afle la locațiile dorite.
- Pentru n poli (rădăcini), avem n coeficienți K .



2019 *** Sisteme Automate de Control

56

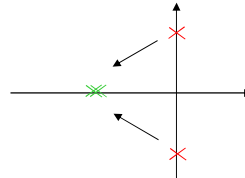
Proiectarea legii de control. Exemplu – Pendul (1).

- Presupunem că am determinat ecuațiile de stare pentru un pendul (ca instalație, vezi ora 2, pagina 7):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta &= \frac{T_c}{m \cdot l^2} \\ \text{Notăm } \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Rightarrow \frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{P}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \theta \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \cdot u = F \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + G \cdot u$$



Problemă = Să se găsească legea de control capabilă să mute ambii poli ai funcției de transfer în bucla închisă, la $-2\omega_0$.

- Deci dorim să dublăm frecvența naturală, și să creștem amortizarea ζ de la 0 la 1.
- Ecuația caracteristică pentru noul sistem în buclă închisă este:

$$\alpha_c(s) = (s + 2 \cdot \omega_0)^2 = s^2 + 4 \cdot \omega_0 \cdot s + 4 \cdot \omega_0^2$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

57

Proiectarea legii de control. Exemplu – Pendul (2).

- Conform teoriei, calculăm (folosim F, G de pe pagina precedentă):

$$\det[s \cdot I - (F - G \cdot K)] = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [K_1 \quad K_2] \right) \right\} = s^2 + K_2 \cdot s + \omega_0^2 + K_1 = 0$$

- Datele problemei cer o ecuație caracteristică

$$s^2 + 4 \cdot \omega_0 \cdot s + 4 \cdot \omega_0^2 = 0$$

... ce avem

... ce dorim să obținem

- Prin identificarea celor două relații, se obține:

$$\begin{cases} K_2 = 4 \cdot \omega_0 \\ 4 \cdot \omega_0^2 = \omega_0^2 + K_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 3 \cdot \omega_0^2 \\ K_2 = 4 \cdot \omega_0 \end{cases}$$

- Ecuațiile de stare ale sistemului compensat devin:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= [F - GK] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [3 \cdot \omega_0^2 \quad 4 \cdot \omega_0] \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 \cdot \omega_0^2 & -4 \cdot \omega_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2019 *** Sisteme Automate de Control

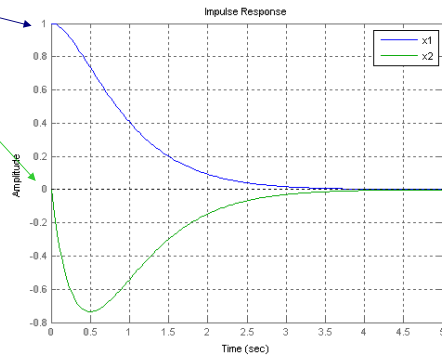
58

Proiectarea legii de control. Exemplu – Pendul (3).

- Rezultate determinate cu MATLAB ($\omega_0=1$)
- Condiții inițiale $x_1=1, x_2=0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [F - GK] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 \cdot \omega_0^2 & -4 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

```
A=[0 1; -4 -4];
% fortam o conditie initiala x1=u=1, x2=0
B=[1 0]';
% definim o iesire fictiva y=x1
C1=[1 0];
[num,den]=ss2tf(A,B,C1,1);
H1=tf(num,den);
impulse(H1); hold on; grid on;
% definim o iesire fictiva y=x2
C2=[0 1];
[num,den]=ss2tf(A,B,C2,1);
H2=tf(num,den);
impulse(H2);
legend('x1','x2');
```



- **Observatie** - Prin deplasarea polilor din perechea complex conjugată ($\pm j\omega_0$) în poli dubli la $-2\omega_0$, sistemul are un răspuns aperiodic amortizat.

Alte forme de rezolvare a legii de control

Exemplu precedent a avut un ordin scăzut. Multe sisteme sunt mai complexe, de ordin ridicat.

- Se folosește **forma canonică de control**
 - Se bazează pe bucle de reacție ce se întorc către variabila controlată (de intrare).
 - Ecuațiile devin mult simplificate

Exemplu pentru înțelegerea acestei metode. Să considerăm:

$$y + a_1 \cdot \dot{y} + a_2 \cdot \ddot{y} + a_3 \cdot \dddot{y} = b_1 \cdot u + b_2 \cdot \dot{u} + b_3 \cdot \ddot{u} \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + b_3}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3} = \frac{a(s)}{b(s)}$$

- Alegem o nouă variabilă χ astfel încât:

$$\begin{cases} \frac{\chi(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} \\ Y(s) = b(s) \cdot \chi(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dddot{\chi} + a_1 \cdot \ddot{\chi} + a_2 \cdot \dot{\chi} + a_3 \cdot \chi = u \\ y = b_1 \cdot \chi + b_2 \cdot \dot{\chi} + b_3 \cdot \ddot{\chi} \end{cases}$$

Vom rescrie această ecuație diferențială de ordin ridicat într-un sistem de ecuații de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{\chi}_3 = \chi_2 \\ \dot{\chi}_2 = \chi_1 \\ \dot{\chi}_1 + a_1 \cdot \chi_1 + a_2 \cdot \chi_2 + a_3 \cdot \chi_3 = u \Rightarrow \dot{\chi}_1 = -a_1 \cdot \chi_1 - a_2 \cdot \chi_2 - a_3 \cdot \chi_3 + u \end{cases}$$

Generalizare (1)

Etapetele metodei descrise sunt:

- Se stabilește locația dorită a polilor => ecuația caracteristică de forma:
$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_1 \cdot s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$$
- Se cunoaște setul de ecuații diferențiale de primul ordin ce caracterizează sistemul în buclă deschisă prin alegerea unui nou set de variabile de stare egale cu derivatele succesive de ordin superior.
- Noul sistem se poate rescrie ca ecuații de stare, cu ecuația caracteristică:
$$a_{ol}(s) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$
- Sistemul în buclă închisă prin reacție ($-Kx$) schimbă ecuația caracteristică în:
$$a_{cl}(s) = s^n + (a_1 + K_1) \cdot s^{n-1} + \dots + (a_n + K_n) = 0$$
- Se determină coeficienții K din reacție prin identificare între ecuația caracteristică pentru buclă închisă și ecuația caracteristică dorită.

$$\alpha_1 = a_1 + K_1$$

$$\alpha_2 = a_2 + K_2$$

...

$$\alpha_n = a_n + K_n$$

Generalizare (2)

Aceleași idei exprimate în forma matriceală:

Fie ecuațiile de stare date de (F,G)

1. Transformăm (F,G) în forma canonică de control (Fc,Gc) prin transformarea $x = Tz$
2. Calculăm coeficienții de control K prin identificare între ecuația caracteristică dorită și legea de control $u = -Kc^*z$.
3. Transformăm înapoi $K = Kc^*T^{-1}$.

Formula lui Ackerman

- Acești 3 pași (**transformare, identificare, transformare inversă**) se pot grupa matematic într-o formă compactă denumită **formula lui Ackerman**.

□ Calculăm matricea de controlabilitate: $\Psi = [G \quad F \cdot G \quad F^2 \cdot G \quad \dots \quad F^{n-1} \cdot G]$

- Calculăm o matrice pe baza ecuației caracteristice dorite (dată de locația dorită):

$$\alpha_c(F) = F^n + \alpha_1 \cdot F^{n-1} + \dots + \alpha_n \cdot I$$

- Pe baza acestora, determinăm coeficienții de control

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \cdot \Psi^{-1} \cdot \alpha_c(F)$$

Exemplul precedent (pendul)

- Se dau ecuațiile de stare ale sistemului în buclă deschisă

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = \frac{T_c}{m \cdot l^2} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \theta \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \cdot u$$

- Să se găsească legea de control capabilă să mute ambii poli ai funcției de transfer în buclă închisă, la $-2\omega_0$.

- Deci dorim să dublăm frecvența naturală, și să creștem amortizarea ζ de la 0 la 1.
- Ecuația caracteristică pentru acest sistem este:

$$\alpha_c(s) = (s + 2 \cdot \omega_0)^2 = s^2 + 4 \cdot \omega_0 \cdot s + 4 \cdot \omega_0^2$$

Soluție:

Calculăm $\alpha_c(F)$:

$$\alpha_c(F) = \begin{bmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0 \\ -4 \cdot \omega_0^3 & 3 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix}$$

Calculăm matricea de controlabilitate:

$$\Psi = [G \quad F \cdot G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Coeficienții K devin (din formula Ackerman):

$$K = [K_1 \quad K_2] = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0 \\ -4 \cdot \omega_0^3 & 3 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot \omega_0^2 & 4 \cdot \omega_0 \\ -4 \cdot \omega_0^3 & 3 \cdot \omega_0^2 \end{bmatrix} = [3 \cdot \omega_0^2 \quad 4 \cdot \omega_0]$$

- Programul MATLAB furnizează $K = [3 \ 4]$ calculate cu instrucțiunea **acker**.

```
w0=1;
F=[0 1; -w0*w0 0];
G=[0 1];
pc=[-2*w0; -2*w0];
K=acker(F,G,pc);
```

- **Observații din practică și exercițiu:**

- Lângă locațiile unde controlabilitatea se pierde, coeficienții K devin foarte mari.
- Mutarea polilor la distanțe mari necesită coeficienți K foarte mari.
- Mutarea polilor lângă **zero**-uri necesită coeficienți K foarte mari.

Observații finale

- O etapă importantă în proiectarea compensării este stabilirea legii de control
 - Practic, **dacă sistemul este controlabil, putem schimba locația polilor** printr-o reacție liniară, cu coeficienții K .
 - Sistemul obținut se identifică cu cel dorit pentru determinarea coeficienților de control K .
 - O alternativă la această metodă de calcul manual, este dată de formula Ackerman ce se potrivește pentru lucrul cu calculatorul.
-
- Formula Ackerman este implementată în MATLAB prin "**acker**" sau "**place**".
 - **acker**
 - recomandată pentru sisteme de ordin mai redus decât 10.
 - **place**
 - Nu funcționează pentru poli multipli.



TEMA DE CASĂ #6

Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 31 mai.

Problema 1

Obțineți ecuațiile de stare pentru forma canonică de control, ce corespund funcției de transfer:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+9s+20}$$

Problema 2

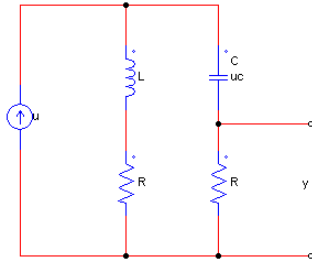
Considerați sistemul caracterizat prin ecuațiile de stare:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot [x] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

Determinați funcția de transfer $u \rightarrow y = x^T$ fără MATLAB.

Problema 3

Considerați circuitul electric din figura:



Scrieți ecuațiile de stare ce corespund acestui circuit.

- Considerați semnalul de intrare $u(t)$ ca fiind curentul $i(t)$ și ieșirea $y(t)$ ca fiind o tensiune.
- Apoi, considerați variabilele de stare $x_1 = iL$, $x_2 = vC$.