

# Sisteme Automate de Control

Note de curs \*\*\* 2019 Sem.2

Capitolul 5 \*\*\* Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

## Curs #4

### Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

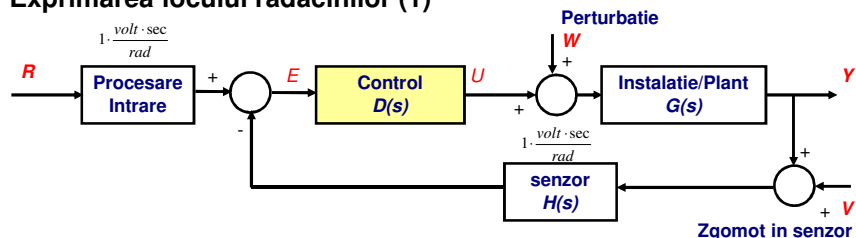
- ☐ Modul 13 = Definirea metodei locului rădăcinilor.
- ☐ Modul 14 = Reguli pentru desenarea locului rădăcinilor
- ☐ Modul 15 = Compensarea sistemelor automate de control
- ☐ Modul 16 = Exemple de proiectare avansată derivate din metoda locului rădăcinilor

## Justificare pentru metoda locului rădăcinilor

- Am discutat legatura dintre cerințele de proiectare în domeniul timp și locul (poziția) polilor unui sistem în planul complex.
- Vom studia acum legatura dintre parametrii sistemului de control și poziția polilor în planul complex.
  - Parametrii sistemului de control vor modifica rădăcinile ecuației caracteristice, care sunt polii funcției de transfer în bucla închisă.
  - Acești parametri pot fi chiar componentele rețelei de compensare (P, PI, PID, cu avans sau întârziere de fază).
- Această metodă de proiectare a fost introdusă de Evans și se numește locul rădăcinilor.
  - Metoda locului rădăcinilor a fost studiată la SCS, ca o metodă de analiza stabilității unui sistem în funcție de un parametru.
  - Aplicăm aceste rezultate în contextul proiectării sistemelor de control.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Exprimarea locului rădăcinilor (1)



- Funcția de transfer intrare-ieșire (atunci când neglijăm efectul perturbațiilor și a zgomotului în senzor):
 
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{D(s) \cdot G(s)}{1 + D(s) \cdot G(s) \cdot H(s)}$$
- Ecuația caracteristică se determină din
 
$$1 + D(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$$
- Pentru a studia efectul parametrilor asupra rădăcinilor, vom scrie întâi ecuația sub forma unui polinom. Să considerăm existența unui singur parametru  $K$ , astfel încât să avem:
 
$$a(s) + K \cdot b(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot L(s) = 0$$
- Putem reprezenta grafic toate rădăcinile ce se obțin pentru  $K$  variind între 0 și infinit. Acest grafic se numește locul rădăcinilor.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Exprimarea locului rădăcinilor (2)

$$a(s) + K \cdot b(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot L(s) = 0$$

- Putem considera o reprezentare polinomială pentru  $b(s)$  și  $a(s)$ .

$$b(s) = s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + b_2 \cdot s^{m-2} + \dots + b_m = (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)$$

$$a(s) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots + a_n = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)$$

- Următoarele ecuații sunt echivalente și au aceleași rădăcini

$$1 + K \cdot L(s) = 0$$

$$1 + K \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0$$

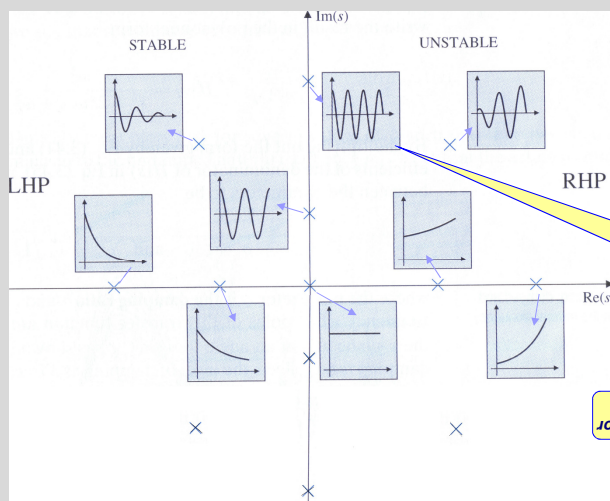
$$a(s) + K \cdot b(s) = 0$$

$$L(s) = -\frac{1}{K}$$

- Oricare formă poate fi utilizată pentru desenarea graficului locului rădăcinilor.

## Funcții de timp asociate cu poli în planul complex ("fast poles" și "slow poles")

- Forma răspunsului natural (răspunsul la impuls) este dată de locația polilor din funcția de transfer.
- Răspunsul la impuls ne dă informații despre stabilitatea sistemului.**



### Exemplul 1

- Să considerăm sistemul cu reacție unitară și funcția de transfer în buclă deschisă  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)} \Rightarrow 1 + G(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{s \cdot (s+1)} = 0 \Rightarrow s^2 + s + K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4 \cdot K}}{2}$$

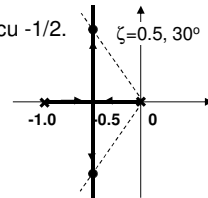
- Pentru  $K$  între 0 și  $1/4$ , rădăcinile sunt reale, între 0 și -1.
- Pentru  $K > 1/4$ , rădăcinile sunt complexe, cu partea reală egală cu  $-1/2$ .

- Reprezentarea grafică

- "x" marchează punctele de început, pentru  $K = 0$
- Săgețile arată sensul de schimbare când  $K$  crește

- Din perspectiva schemei de control

- $K = 0$  înseamnă buclă deschisă
- Pentru valori foarte mari ale lui  $K$ , obținem poli departați de axa reală.
- Putem selecta  $K$ , pentru cerințe de proiectare cum ar fi regimul tranzitoriu.
  - Sunt marcate punctele de intersecție a locului cu amortizarea  $\zeta = 0.5$



- Dacă cerințele de proiectare nu sunt satisfăcute, putem considera o structură de control mai complexă decât  $K$ .

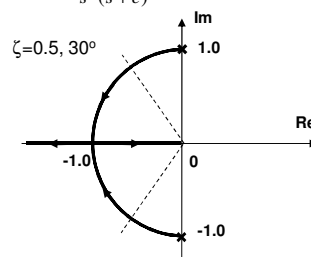
*Ce puteți spune despre stabilitatea sistemului?*

**Observatie** – Parametrul considerat pentru locul rădăcinilor poate fi orice parametru din sistemul în buclă închisă, nu neapărat câștigul sistemului de control.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 2 – Analiza față de un pol al funcției în buclă deschisă ( $c > 0$ )

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+c)} \Rightarrow 1 + G(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{s \cdot (s+c)} = 0 \Rightarrow s^2 + c \cdot s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2-4}}{2}$$



- La  $c = 2$ , cele două rădăcini sunt la  $-1$ .
- La  $c = 0$ , cele două rădăcini sunt pe axa imaginară, deci răspunsul sistemului are oscilații întreținute.

#### Observatii

- Ambele exemple au avut ecuații de gradul doi. Este mai dificilă determinarea soluțiilor unor ecuații caracteristice de ordin mai mare.
- Reguli pentru desenarea locului fără calcularea rădăcinilor au fost propuse de **Evans**.
- MATLAB poate desena locul rădăcinilor prin instrucțiunea **rlocus(sys)**.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Metoda Evans de desenare a locului rădăcinilor

**Definiție** = Locul rădăcinilor este un set de valori pentru variabila  $s$ , astfel încât  $1+KL(s)=0$ , unde  $K$  este între zero și infinit.

- Dacă  $1+KL(s) = 0$  este ecuația caracteristică a sistemului, valorile de pe graficul astfel determinat sunt polii funcției de transfer în bucla închisă.
- Dacă  $K > 0$ , atunci  $L(s)$  este real și negativ  $\Rightarrow$  Faza lui  $L(s)$  este  $180^\circ$ .
  - Denumim locul rădăcinilor ca fiind **pozitiv (după K)**, sau  **$180^\circ$  (după L)**.
- Dacă  $K < 0$ , atunci  $L(s)$  este real și pozitiv  $\Rightarrow$  Faza lui  $L(s)$  este  $0^\circ$ .
  - Denumim locul rădăcinilor ca fiind **negativ (după K)** sau  **$0^\circ$  (după L)**.
- Putem considera locul rădăcinilor sub forma unei condiții de fază:
  - Locul rădăcinilor determinat de  $1+KL(s) = 0$  este reprezentat de punctele din planul complex unde faza lui  $L(s)$  este  $180^\circ$ .
  - Această condiție se poate exprima matematic prin:  $\sum \psi_i - \sum \phi_i = 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$

Unghi determinat de un zero în  $L(s)$ , la punctul de test  $s$

Unghi determinat de un pol în  $L(s)$ , la punctul de test  $s$

pentru orice număr întreg  $l$ .

### Concluzie

- Dacă este dificil să calculăm soluțiile unei ecuații polinomiale de ordin ridicat, atunci poate este mai ușor să calculăm faza unei funcții de transfer într-un anumit punct.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Exemplul 3

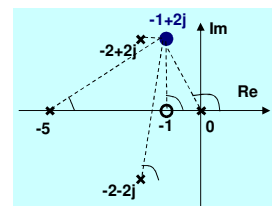
- Fie funcția de transfer:  $L(s) = \frac{s+1}{s \cdot (s+5) \cdot [(s+2)^2 + 4]}$

- Să presupunem un punct pentru test ( $s_0 = -1+2j$ ).
- Dorim să aflăm dacă acest punct face parte din locul rădăcinilor, adică dacă este rădăcină a lui  $1+KL(s)=0$  pentru o valoare a lui  $K$ .

### Soluții

- Calculare directă a fazei
 
$$\angle L(s_0) = \angle(s_0+1) - \angle s_0 - \angle(s_0+5) - \angle[(s_0+2)^2 + 4] =$$

$$= \angle(2j) - \angle(-1+2j) - \angle(4+2j) - \angle[(-1+2j)^2 + 4] = 90^\circ - 116.56^\circ - 26.56^\circ - 75.96^\circ = -129.08^\circ$$
- Deci, NU este parte din locul rădăcinilor.
- Geometric



### Observații

- este foarte rar când polii și zerourile sunt date explicit.
- este imposibil să calculăm faza lui  $L(s)$  în fiecare punct din planul complex.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

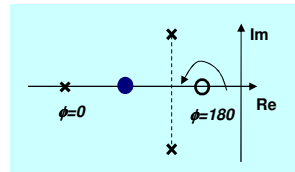
### Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ( $K > 0$ )

- Pentru enunțarea regulilor, vom considera cazul general cu  $1 + KL(s) = 0$ , cu  $L(s)$  având ordinul " $n$ " la numitor, și ordinul " $m$ " la numărător ( $n > m$ ), iar  $K > 0$ .
  - Locul rădăcinilor are " $n$ " ramuri.
- **REGULA 1:** Cele " $n$ " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din polii lui  $L(s)$ , iar " $m$ " ramuri se termină în zero-urile lui  $L(s)$ .
- **Demonstratie:**
  - Dacă considerăm  $1 + K \cdot L(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Leftrightarrow a(s) + K \cdot b(s) = 0$
  - Pentru  $K = 0$ , punctele de pe loc sunt rădăcinile lui  $a(s)$ , care sunt și polii lui  $L(s)$ .
  - Pentru  $K \rightarrow \infty$ , punctele de pe loc sunt rădăcinile lui  $b(s)$  (zerouri la  $L(s)$ ); OR  $s \rightarrow \infty$ .

- **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor care se situează pe axa reală, sunt la stânga unui număr impar de poli sau zero-uri.

#### Demonstratie:

- Se consideră un punct de test, oriunde pe axa reală.
- Toate perechile de poli complecsi aduc o contribuție nulă la calculul fazei (simetrie).
- Toți polii și zerourile la stânga punctului de test aduc o contribuție nulă la fază.
- Toți polii și zerourile la dreapta punctului de test aduc o contribuție de  $\pm 180$  la fază, deci trebuie să fie într-un număr par.

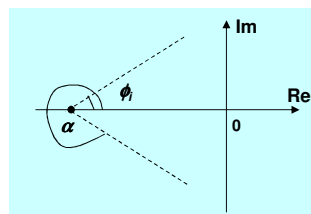


### Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ( $K > 0$ )

- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui  $s$  și  $K$ ,  $n-m$  ramuri ale locului sunt asimptote după unghiurile  $\phi_l$  ce pleacă dintr-un punct  $\alpha$  de pe axa reală unde

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$



- **Demonstratie:** Pentru  $K \rightarrow \infty$ , ecuația  $L(s) = -1/K$  este satisfăcută doar pentru  $L(s) = 0$ .
  - $L(s) = 0 \leftarrow$  Pentru cele  $m$  rădăcini ale lui  $b(s) = 0$ , sau pentru  $s \rightarrow \infty$  (pentru ca  $n > m$ ).

- Asimptotele aproximează cu cele  $n-m$  ramuri reprezintă  $s \rightarrow \infty$ .

- Considerăm 
$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ 1 + K \cdot \frac{s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n} \right] \approx \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ 1 + K \cdot \frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}} \right]$$
- Cu această echivalență/aproximare avem toate rădăcinile grupate pe axa reală, și orice punct de pe locul rădăcinilor (de pe asimptotă) va fi situat la un unghi:

$$\varphi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

## Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ( $K > 0$ )

### ■ Demonstratie regula 3 (continuare):

#### ■ Să calculăm valoarea lui $\alpha$

- $L(s) = 0$  ← Pentru cele  $m$  rădăcini ale lui  $b(s) = 0$ , sau pentru  $s \rightarrow \infty$  (pentru ca  $n > m$ ).
- Rădăcinile lui  $L(s) = 0$  sunt date de rădăcinile lui  $b(s) = 0$  plus  $(n-m)$  rădăcini  $\alpha$ .

- Din  $(s - r_1) \cdot (s - r_2) \cdot \dots \cdot (s - r_n) = s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n + K \cdot (s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m)$
- Egalăm coeficienții lui  $n-1$ , și obținem  $\text{suma}(ri) = \text{suma}(pi)$
- Rezultă

$$\sum p_i = (n-m) \cdot \alpha + \sum z_i \Rightarrow \alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

*Chiar ne trebuie polii și zerourile exprimate explicit pentru a calcula  $\alpha$ ?*

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Concluzii

- După echivalarea condițiilor de proiectare din domeniul timp în pozițiile dorite ale polilor funcției de transfer în bucla închisă, în planul complex, trebuie să determinăm valorile parametrilor de control care conduc la aceste locații.
- În acest scop, desenăm locul rădăcinilor pe baza metodei Evans.
- Numitorul funcției de transfer în buclă închisă reprezintă ecuația caracteristică ce se consideră pentru desenul locului rădăcinilor, și poate fi exprimată într-una dintre formele echivalente:

$$\begin{aligned} 1 + K \cdot L(s) &= 0 \\ 1 + K \cdot \frac{b(s)}{a(s)} &= 0 \\ a(s) + K \cdot b(s) &= 0 \\ L(s) &= -\frac{1}{K} \end{aligned}$$

- Au fost prezentate și demonstrate primele 3 reguli pentru desenarea locului rădăcinilor.
  - **REGULA 1:** Cele " $n$ " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din polii lui  $L(s)$ , iar " $m$ " ramuri se termină în zerourile lui  $L(s)$ .
  - **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor ce se situează pe axa reală, sunt la stânga unui număr impar de poli sau zerouri.
  - **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui  $s$  și  $K$ ,  $n-m$  ramuri ale locului sunt asimptote după unghiurile  $\phi_l$  ce pleacă dintr-un punctul  $\alpha$  de pe axa reală unde

$$\begin{aligned} \phi_l &= \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \\ \alpha &= \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m \end{aligned}$$

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Curs #4

### Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

- Modul 14 = Reguli pentru desenarea locului rădăcinilor

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

#### Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv (Reluare)

- **REGULA 1:** Cele " $n$ " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din polii lui  $L(s)$ , iar " $m$ " ramuri se termina în zerourile lui  $L(s)$ .
- **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor ce se situează pe axa reală, sunt la stânga unui număr impar de poli sau zerouri.
- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui  $s$  și  $K$ ,  $n-m$  ramuri ale locului sunt asimptote după unghiurile  $\phi_l$  ce pleacă dintr-un punctul  $\alpha$  de pe axa reală unde

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control



### Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ( $K > 0$ ) (reguli mai puțin folosite, date fără demonstrație)

$$\sum \psi_i - \sum \phi_i = 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

Unghi determinat  
de un zero în  $L(s)$ ,  
la punctul de test  $s$

Unghi determinat  
de un pol în  $L(s)$ ,  
la punctul de test  $s$

■ **REGULA 4 (consecință a definiției):**

Unghiul de plecare a unei ramuri a locului dintr-un pol de multiplicitate  $q$  este dat de:

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ \cdot (l-1)$$

Unghiul de sosire a unei ramuri a locului într-un zero de multiplicitate  $q$  este dat de:

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

unghiurile sunt pentru zerourile și polii lui  $L(s)$ .

**Observații:**

- De obicei, polii sunt singolari și  $q = 1$ .
- Unghiul de plecare este foarte important la poli de lângă axa imaginară.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv ( $K > 0$ ) (reguli mai puțin folosite, date fără demonstrație)

- **REGULA 5:** Locul rădăcinilor traversează axa imaginară în puncte unde criteriul Routh arată trecerea de la stabilitate la instabilitate (o tranziție de la rădăcini în stânga planului complex către rădăcini în partea dreaptă a planului complex).

**Consecințe**

- Dacă  $n-m > 2$ , cel puțin o ramură a locului va traversa axa imaginară.
- Existența unei rădăcini a ecuației caracteristice în partea dreaptă a planului complex implică un sistem în buclă închisă instabil, lucru ce poate fi testat prin criteriul Routh.

- **REGULA 6:** Locul va avea rădăcini multiple în puncte de pe locul rădăcinilor unde

$$\left( b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0$$

Ramurile vor sosi într-un punct cu  $q$  rădăcini la unghiuri separate de  $\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{q}$  și vor pleca cu aceeași separație între unghiuri.

**Observație:** Rădăcinile multiple sunt puncte de ramificație ale locului rădăcinilor.



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Reguli pentru desenarea unui loc negativ ( $K < 0$ )

■ **Justificare**

- Dacă modelul sistemului controlat ("plant") are un **zero** în partea dreaptă a planului complex ("non-minimum phase system"), considerăm  $K < 0$  pentru analiza.
- Studiul unui sistem de control cu reacție, dacă reacția se închide cu semn inversat.

■ **Definiție:**

- Dacă  $K < 0$ ,  $L(s) > 0$ . Faza lui  $L(s)$  este  $0 + 360(l-1)$  pentru orice  $s$  de pe locul negativ.

- **REGULA 1:** Cele " $n$ " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din poli lui  $L(s)$ , iar " $m$ " ramuri se termină în zerourile lui  $L(s)$ .

- **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor se situează pe axa reală, la stânga unui număr **par** de poli sau zerouri.

- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui  $s$  și  $K$ ,  $n-m$  ramuri ale locului sunt asimptote după unghiurile  $\phi_l$  ce pleacă dintr-un punctul  $\alpha$  de pe axa reală unde

$$\phi_l = \frac{360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Reguli pentru desenarea unui loc negativ ( $K < 0$ ) (reguli mai puțin folosite, date fără demonstrație)

■ **REGULA 4 (consecință a definiției):**

Unghiul de plecare a unei ramuri a locului dintr-un pol de multiplicitate  $q$  este dat de:

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq l} \phi_i - 360^\circ \cdot (l-1)$$

Unghiul de sosire a unei ramuri a locului într-un zero de multiplicitate  $q$  este dat de:

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum \phi_i - \sum_{i \neq l} \psi_i + 360^\circ \cdot (l-1)$$

- **REGULA 5:** Locul rădăcinilor traversează axa imaginară în puncte unde criteriul Routh arată o tranziție de la rădăcini în stânga planului complex către rădăcini în partea dreaptă a planului complex.

- Dacă  $n-m > 2$ , cel puțin o ramură a locului va traversa axa imaginară.
- Existența unei rădăcini a ecuației caracteristice în partea dreaptă a planului complex implică un sistem în buclă închisă instabil, lucru care poate fi testat prin criteriul Routh.

- **REGULA 6:** Locul va avea rădăcini multiple în puncte de pe locul rădăcinilor unde

$$\left( b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0$$

Puncte de  
ramificație

Ramurile vor sosi într-un punct cu  $q$  rădăcini la unghiuri separate de  $\frac{360^\circ \cdot (l-1)}{q}$  și vor pleca cu aceeași separație între unghiuri.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 4 = Desenarea unui loc negativ (1)

$$\begin{cases} 1 + K \cdot \frac{s-6}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 13)} = 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

Câștig negativ la frecvența  $s=0$  (pentru  $L(0)$ )

Un zero pozitiv în funcția de transfer a instalației apare la convertoarele boost.

- **Regula 1:** Vor fi 3 ramuri, plecând din cei 3 poli, una se termină în **zero-ul ( $s = 6$ )** și sunt două asimptote (3-1).
- **Regula 2:** Locul este pe axa reală la dreapta lui  $s = 6$  și la stânga lui  $s = 0$ .
- **Regula 3:** Unghiurile celor două asimptote sunt:

$$\varphi_{1,2} = \frac{(l-1) \cdot 360^\circ}{2} = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases} \quad \text{Iar centru lor este la } \alpha = \frac{(-4) - (6)}{3-1} = -5$$

$(-4) = \text{suma rădăcinilor numitorului}$

- **Regula 4:** Calculăm cele două rădăcini complexe:  $s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = -2 \pm 3 \cdot j$

O ramură pleacă din  $-2+3j$ , cu un unghi

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) + 90^\circ + 360^\circ \cdot (l-1) = -69.443 + 33.690 + 90 + 360(l-1) = -54.247^\circ$$

Similar pentru  $-2-3j$  ("în oglindă").

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 4 = Desenarea unui loc negativ (2)

$$\begin{cases} 1 + K \cdot \frac{s-6}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 13)} = 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

- **Regula 5 (stabilitate, criteriul Routh):** Ecuația caracteristică se obține:

$$s^3 + 4 \cdot s^2 + (13 + K) \cdot s - 6 \cdot K = 0$$

**Criteriul Routh**

$s^3$	1	$13 + K$
$s^2$	4	$-6K$
$s$	$\frac{4 \cdot (13 + K) + 6K}{4} = 2.5K + 13$	0
$s^0$	$-6K$	

Criteriul Routh sugerează limita de stabilitate la  $K = -5.2$

$$K = -5.2 \Rightarrow s^3 + 4 \cdot s^2 + 7.8 \cdot s + 31.2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -4 \\ s_2 = 2.792 \cdot j \\ s_3 = -2.792 \cdot j \end{cases}$$

- pentru  $K > 0$ , instabilitate
- pentru  $K < 0$ ,  $K > -5.2$ , stabilitate
- pentru  $K < -5.2$ , instabilitate

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 4 = Desenarea unui loc negativ (3)

$$\begin{cases} 1 + K \cdot \frac{s-6}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 13)} = 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

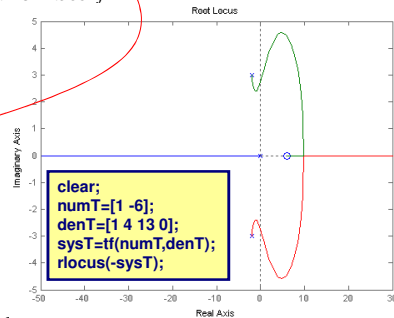
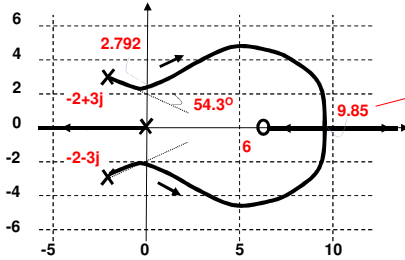
- Regula 6 (rădăcini multiple, puncte de ramificație):

$$\left( b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0 \Rightarrow ((s-6) \cdot (3 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 13) - (s^3 + 4 \cdot s^2 + 13 \cdot s)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot s^3 + 8 \cdot s^2 + 13 \cdot s - 18 \cdot s^2 - 48 \cdot s - 78 - s^3 - 4 \cdot s^2 - 13 \cdot s = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot s^3 - 14 \cdot s^2 - 48 \cdot s - 78 = 0 \Leftrightarrow s^3 - 7 \cdot s^2 - 24 \cdot s - 39 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 9.85 \\ s_2 = -1.425 + 1.388 \cdot j \\ s_3 = -1.425 - 1.388 \cdot j \end{cases}$$

Selectăm doar rădăcinile de pe locul rădăcinilor (9.85)



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

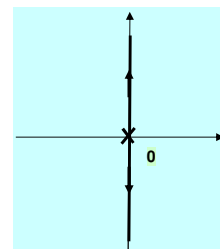
### Exemplul 5 = Control Proporțional

$$L(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow 1 + k_p \cdot \frac{1}{s^2} = 0$$

- Exemplul corespunde controlului cu reacție unitară și control proporțional (**P**), a unui sistem caracterizat prin  $1/s^2$ .
- Regula 1: Avem 2 ramuri care pleacă din  $s = 0$ .
- Regula 2: Nu avem locul rădăcinilor pe axa reală ( $2x = par$ ).
- Regula 3: Avem două asimptote cu originea la  $s = 0$ , și aflate la unghiuri de  $\pm 90^\circ$ .
- Regula 4: Locul pleacă din 0 la unghiuri de  $\pm 90^\circ$ .
- Regula 5: Locul rămâne pe axa imaginară pentru toate valorile lui  $k_p$ .
- Regula 6: Punctul de ramificare este la  $s=0$ .

#### Despre stabilitate

- Răspunsul tranzitoriu al unui astfel de sistem va fi oscilatoriu
- Sistemul este la limita de instabilitate ("oscilații întreținute")



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 6 = Control PD Ideal

Vom încerca îmbunătățirea răspunsului tranzitoriu prin aplicarea unui control în buclă închisă, cu control PD. Ecuația caracteristică va deveni:  $1 + (k_p + k_D \cdot s) \cdot \frac{1}{s^2} = 0 \Leftrightarrow s^2 + k_D \cdot s + k_p = 0$

- Vom nota  $K=k_D$ , și  $k_p/k_D=1$ , care simplifică analiza în ecuația caracteristică  $1 + K \cdot \frac{s+1}{s^2} = 0$

- **Regula 1:** Avem 2 ramuri care pornesc din  $s=0$ , una se termină la  $s=-1$ , alta este asimptotă la infinit.
- **Regula 2:** Toată axa reală la stânga lui  $s=-1$  este parte din loc.
- **Regula 3:** Din  $n-m=1$ , asimptota este de-a lungul axei negative reale ( $180^\circ$ ).
- **Regula 4:** Unghiurile de plecare din polul dublu  $s=0$ , sunt  $\pm 90^\circ$  (v. "→").
- **Regula 5:** Criteriul Routh pentru ecuația caracteristică  $s^2 + K \cdot s + K = 0$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & K \\ s & K & \\ s^0 & K & \end{array}$$

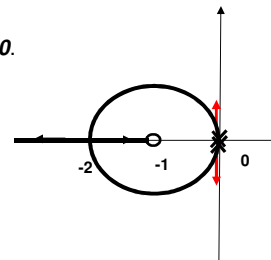
→ nu intersectează axa imaginară pentru oricare  $K > 0$ .

- **Regula 6:**

$$\left( b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0 \Rightarrow (s+1) \cdot (2 \cdot s) - 1 \cdot s^2 = 0 \Rightarrow s^2 + 2 \cdot s = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = 0 \end{cases}$$

$s = -2$  este pe loc → rădăcină dublă, sau punct de ramificație.

**Adăugarea unui zero a mutat locul rădăcinilor către stânga planului complex, îmbunătățind stabilitatea.**



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 7 = Control PD Practic (1)

Controlul PD NU poate fi implementat în exact aceeași formă, din cauza operatorului de diferențiere. Implementarea practică devine:

$$D(s) = k_p + \frac{k_D \cdot s}{s+1} = K \cdot \frac{s+z}{s+p} \text{ unde } p \gg z$$

(Acest control se mai numește **compensare cu avans de fază, v.cursul următor**)

- Ecuația caracteristică devine  $1 + K \cdot \frac{s+z}{s^2 \cdot (s+p)} = 0$

Să considerăm un caz numeric pentru a ilustra efectul acestei legi de control

$$1 + K \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s+1}{s+12} = 0 \Rightarrow s^3 + 12 \cdot s^2 + K \cdot s + K = 0$$

- **Regula 1:** Vom avea 3 ramuri, două pleacă din  $s=0$ , una din  $s=-12$ ; una se termină la  $s=-1$ , două asimptote.

- **Regula 2:** Porțiunea dintre  $s=-12$  și  $s=-1$  este parte din locul rădăcinilor.

- **Regula 3:** Cele două asimptote sunt centrate la

$$\alpha = \frac{-12 - (-1)}{2} = -\frac{11}{2}$$

$$\phi_l = \frac{180 + 360 \cdot (l-1)}{2} = \pm 90^\circ \Leftrightarrow l=1,2$$

- **Regula 4:** Unghiurile de plecare a ramurilor de la  $s=0$  sunt  $\pm 90^\circ$ .

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 7 = Control PD Practic (2)

- Regula 5: Criteriul Routh pentru ecuația caracteristică

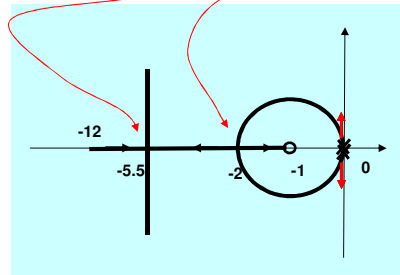
$s^3$	1	$K$
$s^2$	12	$K$
$s$	$\frac{11}{12}K$	
$s^0$	$K$	

Nu intersectează axa imaginară pentru oricare  $K > 0$ .

- Regula 6 (puncte de ramificație):

$$\left(b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds}\right) = 0 \Rightarrow (s+1) \cdot (3 \cdot s^2 + 24 \cdot s) - 1 \cdot (s^3 + 12 \cdot s^2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot s^3 + 15s^2 + 24s = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2.31 \\ s_3 = -5.18 \end{cases}$$

Locul rădăcinilor ne arată un sistem stabil



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

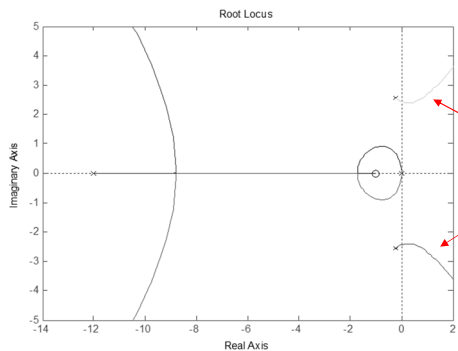
### Exemplul 8 = Sistem cu flexibilitate, sau oscilații - Model

vezi ora 02, p.9

**Caz practic:** După proiectarea sistemului de control pentru un sistem mecanic, dereglarea unor componente a născut mici vibrații (oscilații) mecanice.  
Cât sunt de periculoase pentru stabilitatea sistemului și cum le putem elimina?

Termeni ce produc oscilații introduc sistem cu un grad de flexibilitate.

$$H(s) = D(s) \cdot G(s) = \left(\frac{s+1}{s+12}\right) \cdot \left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64}\right) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64}$$



INSTABIL pentru anumite valori ale lui K

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 8 = Sistem cu flexibilitate, sau oscilatii – Control (1)

- Am dori să eliminăm acest efect prin control.
- **NU** putem adăuga un termen **identic** cu numitorul în funcția de control, din considerente practice legate de implementare, sau de precizia modelului.
  - Dacă am putea introduce un termen identic, am putea simplifica

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64} \cdot [s^2 + k_1 \cdot s + k_2]$$

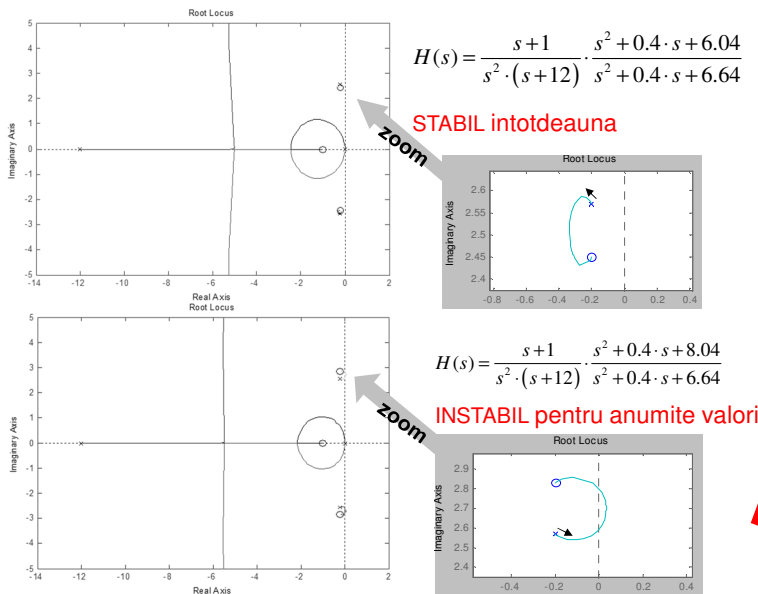
- Se aproximează polii din modelul instalației (modelul este oricum o aproximare a realității)

- Pentru diferite alegeri a valorii aproximative (de compensare), observăm schimbarea proprietății de stabilitate → **Rolul metodei locului rădăcinilor în analiză.**

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.04}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64} \quad ? \quad H(s) = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s+12)} \cdot \frac{s^2 + 0.4 \cdot s + 8.04}{s^2 + 0.4 \cdot s + 6.64}$$

2019 \*\*\* Systeme Automate de Control

### Exemplul 8 = Sistem cu flexibilitate, sau oscilații – Control (2)



2019 \*\*\* Systeme Automate de Control

Observați importanța studiului  
locului rădăcinilor, pentru  $1 + k \neq 0$   
-Vezți unghiul de plecare a locului  
de la poli de lângă axa imag

### Sumar = Reguli pentru desenarea unui loc pozitiv sau negativ

- **REGULA 1:** Cele " $n$ " ramuri ale locului rădăcinilor pleacă întotdeauna din poli lui  $L(s)$ , iar " $m$ " ramuri se termină în zerourile lui  $L(s)$ .
- **REGULA 2:** Toate ramurile locului rădăcinilor se situează pe axa reală, la stânga unui număr impar (par) de poli sau zerouri.
- **REGULA 3:** Pentru valori mari ale lui  $s$  și  $K$ ,  $n-m$  ramuri ale locului sunt asimptote după unghiurile  $\phi_l$  ce pleacă din punctul  $a$  de pe axa reală unde

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^{n-m} z_i}{n-m}$$

$$\phi_l = \frac{360^\circ \cdot (l-1)}{n-m} \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n-m} p_i - \sum_{i=1}^{n-m} z_i}{n-m}$$

- **REGULA 4 (consecință a definiției):**

Unghiul de plecare a unei ramuri a locului dintr-un pol de multiplicitate  $q$  este dat de:

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum_{i=1}^q \psi_i - \sum_{i=1}^q \phi_i - 180^\circ - 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$q \cdot \phi_{l,dep} = \sum_{i=1}^q \psi_i - \sum_{i=1}^q \phi_i - 360^\circ \cdot (l-1)$$

Unghiul de sosire a unei ramuri a locului într-un zero de multiplicitate  $q$  este dat de:

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum_{i=1}^q \phi_i - \sum_{i=1}^q \psi_i + 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

$$q \cdot \psi_{l,dep} = \sum_{i=1}^q \phi_i - \sum_{i=1}^q \psi_i + 360^\circ \cdot (l-1)$$

- **REGULA 5:** Locul rădăcinilor traversează axa imaginară în puncte unde criteriul Routh arată o tranziție de la rădăcini în stânga planului complex către rădăcini în partea dreaptă a planului complex.
- **REGULA 6:** Locul va avea rădăcini multiple în puncte de pe locul rădăcinilor unde

$$\left( b \cdot \frac{da}{ds} - a \cdot \frac{db}{ds} \right) = 0$$

Ramurile vor sosi într-un punct cu  $q$  rădăcini la unghiuri separate de  $\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{q}$  și vor pleca cu aceeași separație între unghiuri.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{q} \\ \frac{360^\circ \cdot (l-1)}{q} \end{array} \right.$$

## Curs #4

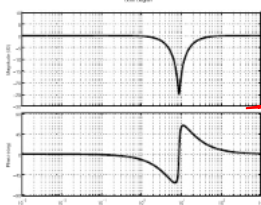
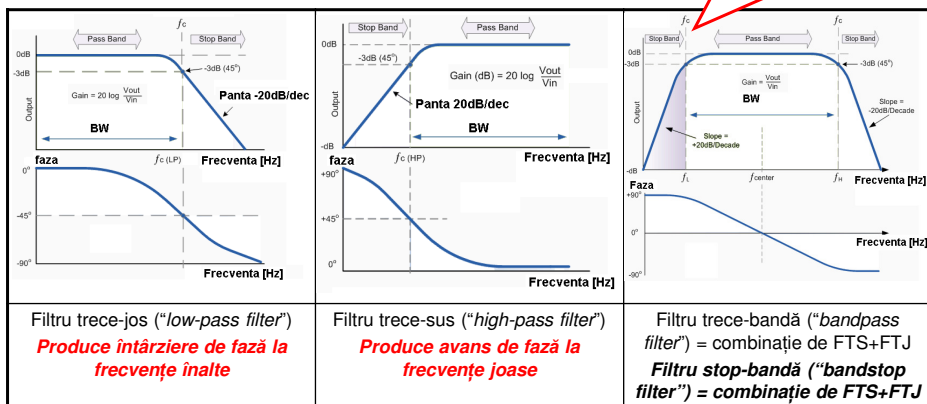
### Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

- Modul 15 = Compensarea sistemelor automate de control



## Recapitulare – Filtre de ordinul 1

La produsul a două funcții de transfer, câștigul se înmulțește, iar faza se adună.



Filtru "notch"

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Compensarea dinamică a sistemelor

- Proiectarea unui sistem de control este foarte importantă pentru performanța sistemului.

### Etape de proiectare:

- Se studiază modelul sistemului ce urmează a fi controlat
  - => Sistemul poate fi schimbat prin adăugarea de amortizare (*compensare cu avans de fază* = control PD) sau eliminarea unei flexibilități (*compensare notch*).
- Se convertesc datele de proiectare referitoare la regimul tranzitoriu în cerințe pentru locația rădăcinilor.
- Se observă dacă un control proporțional simplu nu ar fi de ajuns pentru îndeplinirea acestor cerințe. Dacă NU, atunci se continuă cu o proiectare a unei **compensări dinamice (în frecvență)**.
- Cele mai utilizate rețele (legi) de compensare:
  - Compensare cu întârziere de fază ("lag") – aproximează un control PI
  - Compensare cu avans de fază ("lead") – aproximează un control PD
  - Compensare de tip "notch"
- Exprimarea matematică a controlului

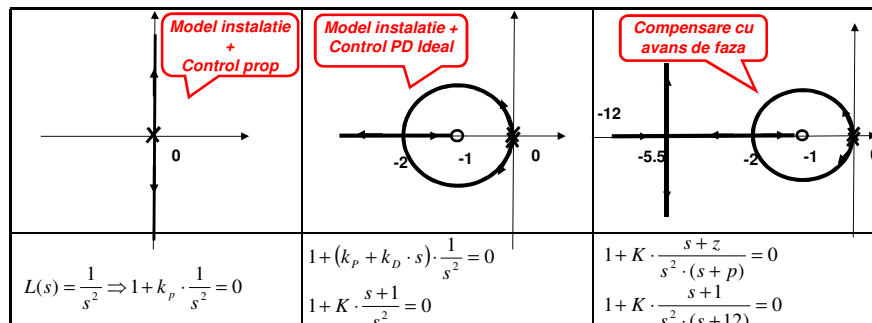
$$D(s) = K \cdot \frac{s + z}{s + p}$$

- Avans de fază pentru  $z < p$  (conține zero-ul)
- Întârziere de fază pentru  $z > p$  (conține polul)
- Implementarea se poate realiza
  - Circuite analogice
  - Circuite digitale

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 1)

- Să recapitulăm rezultatele din ora trecută, pentru exemplul considerat.



- **Observație** – Valorile numerice au fost alese pentru exemplificare și nu ca urmare a unei proiectări impuse de performanță.
- Se observă îmbunătățirea stabilității prin deplasarea către stânga a locului rădăcinilor.
- Se observă și că diferite aspecte ale performanței răspunsului tranzitoriu se pot obține prin selectarea corespunzătoare a **zero**-ului și **câștigului** (de exemplu: factorul de amortizare, frecvența naturală, s.a.m.d).
- **Controlul PD nu este practic** din cauza dificultății de implementare și a efectului secundar de amplificarea a zgomotului senzorilor.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 2)

- Legea de control cu compensare cu avans de fază este dată de:

$$D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$$

- **Zero**-ul se alege conform cu controlul PD, iar polul se alege în afara domeniului de control ( $p \gg z$ ), pentru a nu afecta efectele dinamice ale controlului convențional PD.
  - Cu cât  $p$  este mai mare, cu atât locul rădăcinilor și răspunsul sistemului va fi mai asemănător cu cel din controlul ideal PD
  - Altfel spus, la frecvențe joase sistemele se comportă asemănător cu PD; iar la frecvențe înalte polul își face simțită prezența, prin modificarea răspunsului (popular spus: "filtrează zgomotul de înaltă frecvență").
  - Deoarece efectul global este văzut în faza sistemului, se numește **compensare cu avans de fază**.
- Proiectarea unui control cu avans de fază (selecția lui  $z$  și  $p$ ):
  - Proiectarea are un caracter empiric, bazată pe experiență.
  - **Zero**-ul se plasează în apropierea frecvenței  $\omega_n$  (ca o consecință rezultată din timpul de creștere și timpul de stabilizare, [vezi modulul 6](#)).
  - **Polul** se plasează la o frecvență de 5-20 ori mai mare.
    - Compromis între zgomot redus printr-un pol la frecvențe joase (filtrare), și o valoare mare care să nu influențeze controlul dat de **zero**.
    - Efectul polului se vede puțin în timpul de creștere a sistemului controlat.

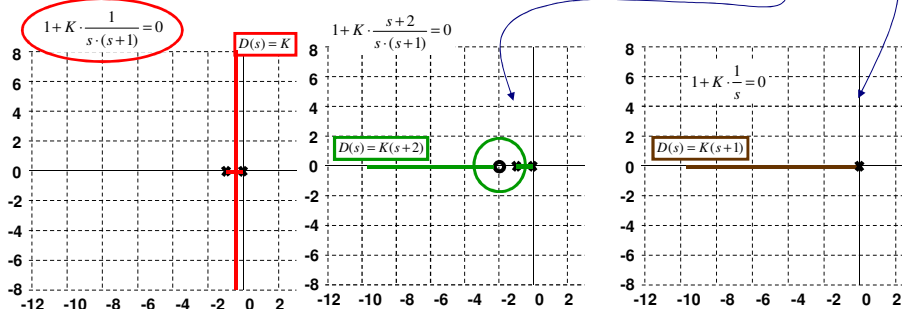
2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control



## Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 5)

### Discuție – selecția componentei derivate (D)

- Neglijăm efectul polului de la frecvențe înalte
- Un caz particular ar coincide selecția componentei derivate cu polul funcției de transfer în bucla deschisă ("se simplifică").
- Nu se poate realiza în practică  $\Rightarrow$  Se preferă cazul mai general în care componenta derivativă este **lângă** polul funcției de transfer a sistemului controlat "plant".



- ~~~ proiectăm pentru o posibilă variație a parametrilor (modelul nu este precis, sau nu avem o compensare precisă.)

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

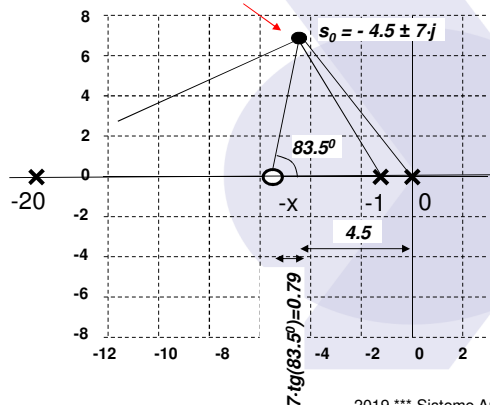
## Compensarea cu avans de fază ("lead compensation", 6)

### Altă metodă de proiectare

- Incepem invers – prin alegerea unui pol la distanță foarte mare de polii și zerourile din funcția de transfer a instalației. În cazul nostru  $p = 20 \gg 0 \& 1$

$$D(s) = K \frac{s+x}{s+20} \Rightarrow 1 + K \cdot \frac{s+x}{s+20} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+1)} = 0$$

- Alegem o poziție din planul complex pentru locul rădăcinilor cf. condițiilor de proiectare.



Punctul  $s_0 = -4.5 + 7j$  trebuie să fie pe loc

Se calculează contribuția la fază a fiecărui pol și zero

$$\varphi = \angle(-x) - \angle(0) - \angle(-1) - \angle(-20) = 180^\circ$$

$$\varphi = \angle(-x) - 122.7 - 116.5 - 24.3 = 180^\circ$$

$$\angle(-x) = 83.5^\circ \rightarrow x = -(0.79 + 4.5) = -5.29$$

$$D(s) = 120 \cdot \frac{s+5.29}{s+20}$$

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Exemplul 2

**Problema:** Proiectați un control cu avans de fază pentru un sistem cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Astfel încât polii dominanți ai sistemului în buclă închisă să fie la  $-2 \pm 2i$ .

**Soluție:**

Considerăm  $D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$

- Funcția de transfer în buclă închisă:

$$\frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} = \frac{K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{s^2}}$$

- Ecuția caracteristică devine:

$$(s+p) \cdot s^2 + K \cdot (s+z) = 0 \Rightarrow s^3 + p \cdot s^2 + K \cdot s + K \cdot z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 16 - 2K + Kz = 0 \\ 16 - 8p + 2K = 0 \end{cases}$$

- Adoptăm  $p = 20 \Rightarrow K = 72, z = 1.78$ .

- 3 necunoscute, 2 ecuații  $\Rightarrow$  un grad de libertate disponibil.
- Am fi putut beneficia de gradul de libertate oferit, și impune o altă condiție de proiectare.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Compensarea cu întârziere de fază ("lag compensation")

- Adresează răspuns nesatisfăcător la frecvențe joase sau eroarea staționară.
- Am arătat că tipul sistemului (care arată cum o funcție de transfer polinomială poate urmări o referință variabilă) este dat de ordinul polilor ( $1/s$ ) în funcția de transfer  $D(s)G(s)$  (vezi modulul 11).

I, PI: Adăugăm termeni " $1/s$ "  
LAG: Creștem K la  $s=0$

	Semnal de intrare ("Referință")		
	Treapta ("Pozitie")	Rampa ("Viteza")	Parabola ("Acceleratie")
	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t \cdot 1(t)$	$r(t) = t^2 \cdot 1(t)$
Tipul "0"	$\frac{1}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
Tipul "1"	0	$\frac{1}{K_v}$	$\infty$
Tipul "2"	0	0	$\frac{1}{K_a}$

- Pentru reducerea erorii staționare, trebuie să creștem câștigul la frecvențe joase fără a influența comportarea la frecvențe înalte. Vom utiliza:

$$D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p} \text{ unde } z > p, \text{ și ambele } z, p \text{ sunt mai mici decât } \omega_n$$

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplul 3

**Problemă:** Proiectați un control cu întârziere de fază pentru un sistem cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}$$

Astfel încât polii dominanți ai sistemului în buclă închisă să fie la  $-1 \pm i$ .

**Soluție:**

Considerăm  $D(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$

- Funcția de transfer în buclă închisă:

$$\frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} = \frac{K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}}{1 + K \cdot \frac{s+z}{s+p} \cdot \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}}$$



$$\begin{aligned} (s+p)(s+2)(s+3) + K(s+z) &= 0 \\ s^3 + (5+p)s^2 + (6+5p+K)s + 6p + Kz &= 0 \\ \begin{cases} -4 - K + p + Kz = 0 \\ -2 + 3p + K = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Pentru a avea două rădăcini complexe în funcția de transfer în buclă închisă, situate la dreapta rădăcinilor inițiale (-2, -3), vom aștepta un control asemănător cu PI (pol lângă origine, dat de datele problemei  $|p| < 1$ ).

- Alegem  $z=3$  (ca să obținem PI,  $z \gg p$ ). Obținem:

$$\begin{cases} -4 + p + 2K = 0 \\ -2 + 3p + K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ K = 2 \end{cases}$$

- Legea de control se reduce la un control PI ( $p=0$ ,  $z=3$ ,  $K=2$ ).

- Altă soluție posibilă  $\begin{cases} z = 5 \\ p = 4/11 \\ K = 10/11 \end{cases}$

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

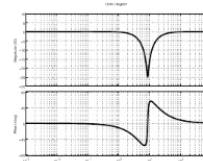
### Compensarea de tip "notch"

- Dacă un sistem în buclă închisă prezintă oscilații la o anumită frecvență, trebuie să corectăm acest lucru
  - Am putea adăuga încă un termen cu întârziere de fază capabil să scadă câștigul pe buclă la acea frecvență, cu dezavantajul alterării răspunsului tranzitoriu.

**SAU**

- ar fi util să adăugăm un termen capabil să înlăture doar acea frecvență (ca un filtru "notch") prin adăugarea unui **zero** la frecvența de rezonanță, ce va avea ca efect adăugarea de fază și deplasarea locului rădăcinilor în partea stângă a planului complex.
- O lege generică de realizare a compensării "notch" devine:  $D_{notch}(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}{(s + \omega_0)^2}$ 
  - Câștigul se alege egal cu 1 pentru a nu influența efectul celorlalte componente din sistem.
  - $\omega_0$  se alege aproape de frecvența de rezonanță din sistemul în buclă deschisă.
  - Rămâne ca o decizie de proiectare dacă această frecvență să fie sub sau deasupra frecvenței de rezonanță a sistemului.

(revedeți modulul 14, p.11)



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Compensarea de tip "notch". Exemplul 4

- Sistemul dat prin funcția de transfer în bucla deschisă:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

- Am adoptat legea de compensație:

$$D(s) = 70 \cdot \frac{s+2}{s+10}$$

- Să considerăm acum existența unor oscilații în modelul instalației care sunt exprimate prin:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)} \cdot \frac{2500}{s^2 + s + 2500}$$

- Efectul se poate vedea și în răspunsul la semnal treaptă (v. pagina următoare)

- Se propune eliminarea acestor oscilații printr-o compensare *notch* situată lângă polii rezonanți.

$$D_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot 60 \cdot s + 60^2}{(s+60)^2} \Rightarrow D(s) = 70 \cdot \frac{s+2}{s+10} \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot 60 \cdot s + 60^2}{(s+60)^2}$$

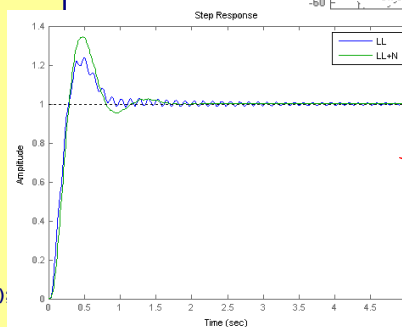
- Răspunsul la semnal treaptă al acestei noi legi de control, pentru  $K=1$  (sistem stabil).
- Problema în acest caz este selecția corespunzătoare a frecvenței compensării notch.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

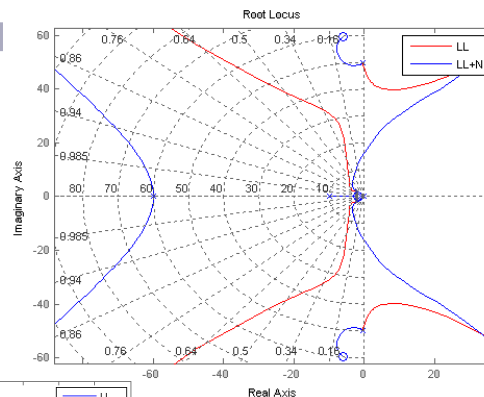
## Compensarea de tip "notch". Exemplul 4

```
clear;
numT=[2500];
denT=conv([1 1 0], [1 1 2500]);
sysT=tf(numT,denT);
numD=70*[1 2];
denD=[1 10];
sysD=tf(numD,denD);
OL1=sysT*sysD;
CL1=feedback(OL1,1);
numN=[1 12 3600];
denN=[1 120 3600];
sysN=tf(numN,denN);
OL2=sysD*sysT*sysN;
CL2=feedback(OL2,1);

step(CL1); hold on;
step(CL2);
legend('LL','LL+N');
figure;
rlocus(OL1,'r',OL2,'b');
sgrid;
legend('LL','LL+N');
```



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control



LL = Fără compensare notch  
LL+N = Cu compensare notch

Rezultate pentru  $K = 1$ ,  
bucă închisă  
( $D(s)$  precedent)

## Stabilizarea de fază

Compensarea notch se folosește pentru a obține stabilitate în sistemele cu amortizare redusă și cu posibile oscilații.

În funcție de faza sistemului la frecvența de rezonanță, se folosește una dintre formele

- Considerăm polii la frecvențe foarte mari față de frecvența **notch** (poate fi privit ca un filtru notch obișnuit plus efect de avans de fază = adăugare de fază)

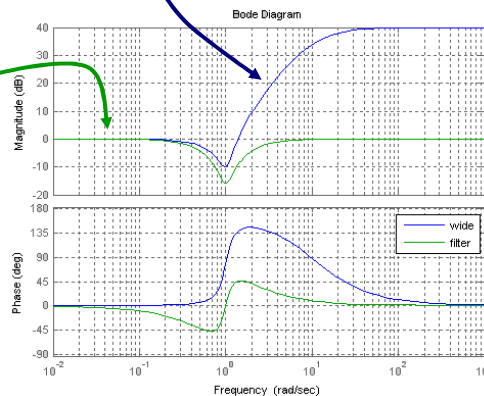
$$D_2(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_o^2}{(s + \omega_2)^2}, \omega_2 \gg \omega_o$$

- Considerăm polii la aceeași frecvență ca și cea rezonantă (filtru)

$$D_1(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_o^2}{(s + \omega_o)^2}$$

Procesul de selecție a valorii corespunzătoare compensării notch în vederea menținerii fazei sistemului în buclă închisă la valori ce implică stabilitate, se numește stabilizare de fază.

~ spre deosebire de stabilizarea amplificării care presupune obținerea stabilității prin scăderea câștigului la frecvențe înalte.



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## Observații finale – Compensare

- Cu întârziere de fază ("lag")
  - Legea se consideră pentru  $z > p \leftarrow$  efectul polului dominantă
  - Aproximează un control PI
  - Îmbunătățește eroarea staționară în timp ce pastrează răspunsul tranzitoriu, prin creșterea câștigului (amplificării) de frecvență joasă.
  - De obicei degradează stabilitatea sistemului.

$$D(s) = K \cdot \frac{s + z}{s + p}$$

- Cu avans de fază ("lead")
  - Legea se consideră pentru  $z < p \leftarrow$  efectul zero-ului dominantă
  - Aproximează un control PD
  - Are efectul de a muta locul rădăcinilor către stânga, îmbunătățind stabilitatea, amortizarea sistemului, și rapiditatea regimului tranzitoriu.
- Compensarea "notch"
  - Folosită mai rar, de obicei împreună cu altă lege de control.
  - Are efectul de a înlătura oscilații pe o frecvență fixă.

$$D_{notch}(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_o^2}{(s + \omega_2)^2}$$

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control



## Curs #4

### Proiectarea sistemelor automate de control cu metoda locului rădăcinilor

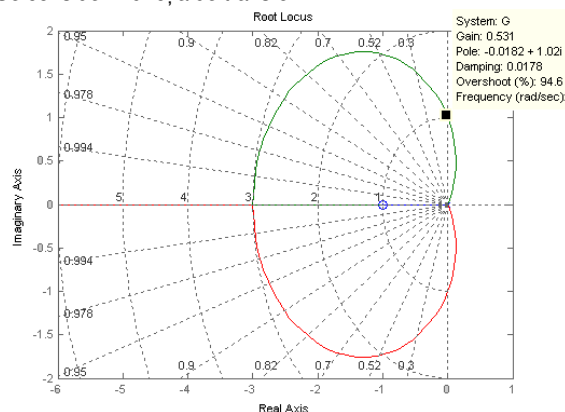
- Modul 16 = Exemple de proiectare avansată derivate din metoda locului rădăcinilor

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

#### Exemplul 5 - Sisteme cu stabilitate condițională

- Majoritatea sistemelor sunt stabile pentru valori mici ale lui  $K$  și devin instabile pentru valori mari ale lui  $K$ .
- Să vedem un exemplu diferit. Se consideră funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$$

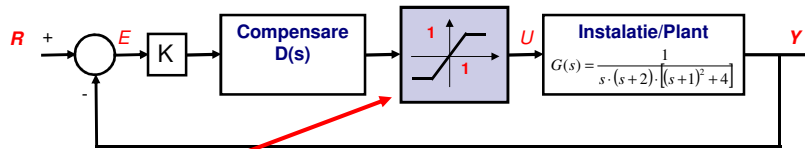


- În acest caz, se observă că locul rădăcinilor trece în partea dreaptă a planului complex pentru  $K$  între 0 și 0.5, și redevine stabil pentru valori mari ale lui  $K$ .
- Dacă câștigul  $K$  este limitat de implementarea fizică, se pot produce oscilații sau instabilitate.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

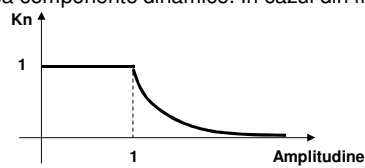
### Exemplu de proiectare (1)

Să se deseneze locul rădăcinilor și să se propună o compensare pentru un sistem cu saturație, dată de legea de transfer ("plant")  $T(s)$ .



#### SATURAȚIE

- Teoria prezentată anterior consideră sisteme liniare și invariabile în timp.
- Neliniaritatea poate fi considerată ca un câștig ce depinde de nivelul semnalului, fără a avea componente dinamice. În cazul din figură, acest câștig poate fi reprezentat:



- Din punct de vedere al locului rădăcinilor, acest lucru înseamnă că trebuie să analizăm comportarea sistemului pentru toate valorile mai mici decât K, și nu doar la o valoare anumită K.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplu de proiectare (2)

#### CONTROL PROPORTIONAL

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot [(s+1)^2 + 4]}$$

Să desenăm locul rădăcinilor pentru un control simplu,  $K > 0$ .

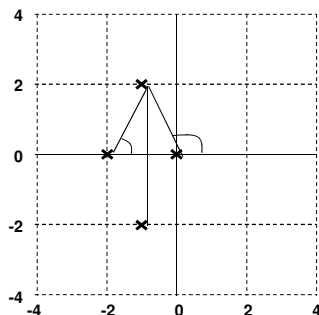
- Regula 1:** Vom avea 4 ramuri plecând din  $0, -2, -1 \pm 2j$ ; toate sunt 4 asimptote.
- Regula 2:** Locul conține axa reală pentru  $-2 < s < 0$ .
- Regula 3:** Centrul asimptotelor este la

$$\alpha = \frac{-2-1-1-0+0}{4-0} = -1$$

și unghiurile sunt  $45^\circ, 135^\circ, -45^\circ$  și  $-135^\circ$ .

- Regula 4:** Unghiul de plecare al locului rădăcinilor din rădăcina complexă  $-1+2j$ , este dat de

$$\phi_{dep} = -\phi_1 - \phi_2 - \phi_4 + 180^\circ = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) - 90^\circ + 180^\circ = -116.6^\circ - 63.4^\circ - 90^\circ + 180^\circ = -90^\circ$$



2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplu de proiectare (3)

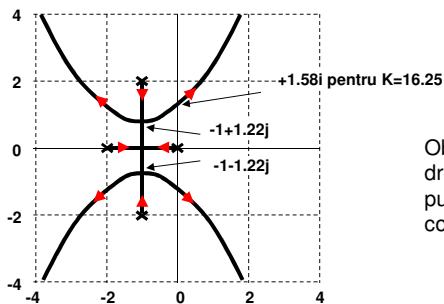
- Regula 5: ecuația caracteristică este  $s^4 + 4 \cdot s^3 + 9 \cdot s^2 + 10 \cdot s + K = 0$   
Criteriul Routh

$s^4$	1	9	$K$
$s^3$	4	10	
$s^2$	$\frac{26}{4}$	$K$	
$s$	$\frac{260-16K}{26}$		
$s^0$	$K$		

Determină  $K > 0$ ,  $K < 260/16=16.25$   
La  $K = 16.25$ , locul rădăcinilor  
traversează axa imaginară. →

$$\begin{aligned} & -2.0000 + 1.5811i \\ & -2.0000 - 1.5811i \\ & 0.0000 + 1.5811i \\ & 0.0000 - 1.5811i \end{aligned}$$

- Regula 6: Determinarea rădăcinilor multiple (puncte de ramificație a locului):  
 $\frac{da}{ds} = 0 \Rightarrow 4 \cdot s^3 + 12 \cdot s^2 + 18 \cdot s + 10 = 0 \Rightarrow (s+1) \cdot (4 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 + 1.22 \cdot j \\ s_3 = -1 - 1.22 \cdot j \end{cases}$



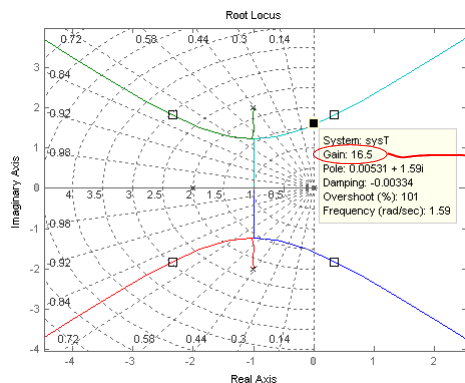
Observăm că locul rădăcinilor trece în partea dreaptă a planului complex pentru  $K > 16.25$ , punând probleme de stabilitate => este necesară o compensare dinamică.

### Exemplu de proiectare (4)

- Să urmărim reprezentarea în MATLAB a rezultatelor

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot [(s+1)^2 + 4]}$$

```
% reprezentarea unui loc
clear;
numG=[1];
denG=conv([1 2 0],[1 2 5]);
sysG=tf(numG,denG);
rlocus(sysG); sgrid;
%
% punctele de pe loc pentru un k dat
% aici, k=30, vezi patrate albe
hold on;
rlocus(sysT,30,'ks');
```



- Prezintă interes determinarea lui  $K$  la intersecția cu axa imaginară.

□ Acest lucru se face prin simplu click pe grafic =>  **$K=16.5$**

### Exemplu de proiectare (5)

#### COMPENSARE DINAMICA

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot [(s+1)^2 + 4]}$$

- Am văzut că putem compensa un sistem de tipul  $G(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$  cu o compensare cu avans de fază ( $|z| < |p|$ ).
- Prin analogie, vom considera compensarea cu avans de fază dată de funcția de transfer  

$$D_1(s) = K \cdot \frac{s+3}{s+20} \Rightarrow 1 + D(s) \cdot G(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + K \cdot \frac{s+3}{s+20} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 2s + 5)} = 0$$
- Dacă enunțul problemei ar cere și anumite performanțe dinamice, valorile "3" și "20" s-ar alege din acele cerințe (vezi modul 15). În lipsa unor cerințe speciale, adoptăm zero-ul lângă polii din modelul instalației.

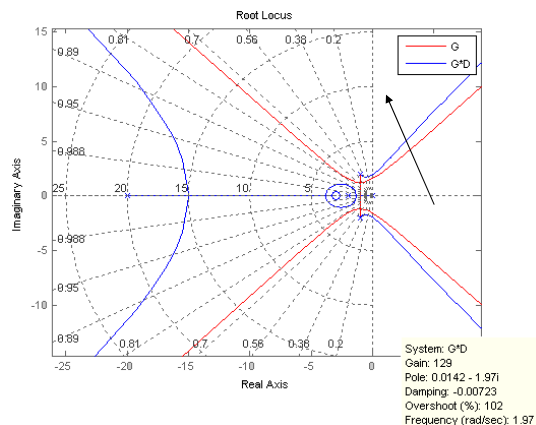
2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplu de proiectare (6)

#### COMPENSARE DINAMICA

- Să observăm locul rădăcinilor, pentru sistemul compensat ( $G \cdot D$ ).

```
clear;
numG=[1];
denG=conv([1 2 0],[1 2 5]);
sysG=tf(numG,denG);
numD=[1 3];
denD=[1 20];
sysD=tf(numD,denD);
sysT=sysG*sysD;
rlocus(sysG,'r',sysT,'b');
sgrid;
legend('G','G*D');
figure;
CLT=feedback(100*sysT,1);
step(CLT); grid on;
```



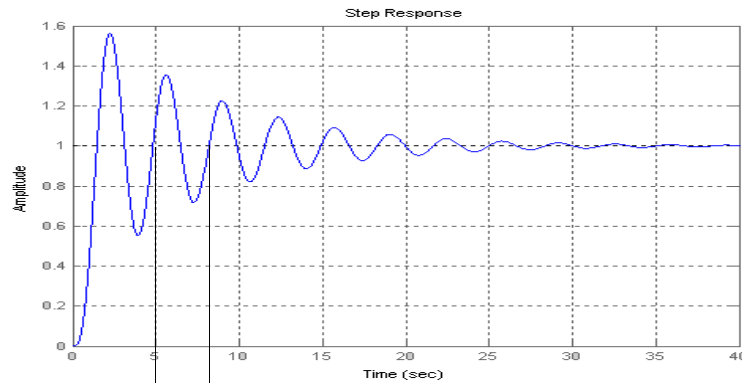
- Față de cazul precedent, observăm deplasarea locului către stânga, și o limită de stabilitate  $K = 130$ , la trecerea locului rădăcinilor în semiplanul drept.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplu de proiectare (7)

#### COMPENSARE DINAMICA

- Răspunsul la semnal treaptă pentru  $K = 100 < 130$  (dar aproape de instabilitate)..



$$T \sim 3.14 \text{ sec} \rightarrow \omega = 2\pi/3.14 = 2 \text{ rad/sec}$$

### Exemplu de proiectare (8)

#### COMPENSARE DINAMICA

- Putem continua îmbunătățirea rezultatelor prin adăugarea unei compensări asemănătoare celei "notch" pentru eliminarea oscilațiilor de frecvență  $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ 
  - Echivalența cu deplasarea locului către stânga, dată de o compensare cu avans de fază.
  - Ca o lege de compensare dublă cu avans de fază (compensare notch)

$$1 + K \cdot \underbrace{\left( \frac{144}{\omega_n^2} \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}{(s+12)^2} \right)}_{\text{Compensare notch } N(s)} \cdot \underbrace{\left( 100 \cdot \frac{s+3}{s+20} \right)}_{\text{Compensare } D(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 5)}}_{\text{Model Instalație } G(s)} = 0$$

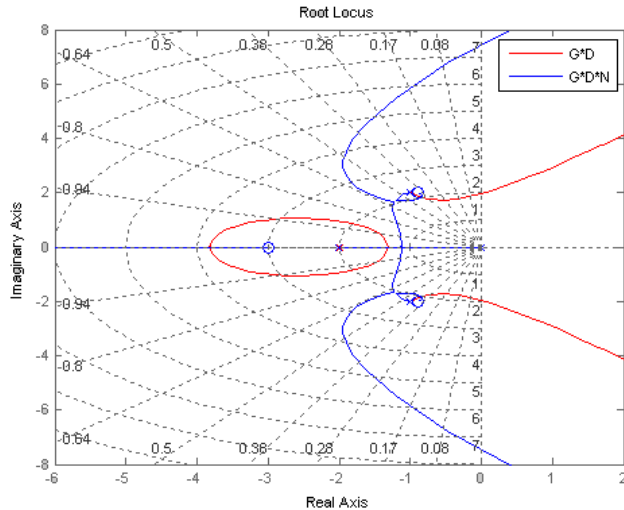
**Compensare notch**  
 $N(s)$ 
**Compensare**  
 $D(s)$ 
**Model Instalație**  
 $G(s)$

- Se pune problema alegerii frecvenței  $\omega_n$ 
  - Se urmărește în locul rădăcinilor, închiderea unei bucle scurte de la **pol**-ul din modelul instalației la noul **zero** introdus de compensarea **notch**, către interior.

### Exemplu de proiectare (9) COMPENSARE DINAMICA

$$\left( \frac{144}{(2.19)^2} \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot 0.41 \cdot 2.19 \cdot s + (2.19)^2}{(s+12)^2} \right) \cdot \left( 100 \cdot \frac{s+3}{s+20} \right) \cdot \frac{1}{s \cdot (s+2) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 5)}$$

```
clear;
numG=[1];
denG=conv([1 2 0],[1 2 5]);
sysG=tf(numG,denG);
numD=100*[1 3];
denD=[1 20];
sysD=tf(numD,denD);
z=0.41; wn=2.19;
KK=144/(wn*wn);
numN=[1 2*z*wn wn*wn];
denN=[1 24 144];
sysN=tf(numN,denN);
sysT=2*KK*sysG*sysD*sysN;
rlocus(sysG*sysD, 'r', sysT,'b');
axis([-6, 2, -8 8]);
sgrid;
legend('G*D','G*D*N');
figure;
CLT=feedback(sysT,1);
step(CLT); grid on;
```



Se obține **Kmax=5**, înainte de instabilitate (adițional la **K=100** considerat în D(s)).

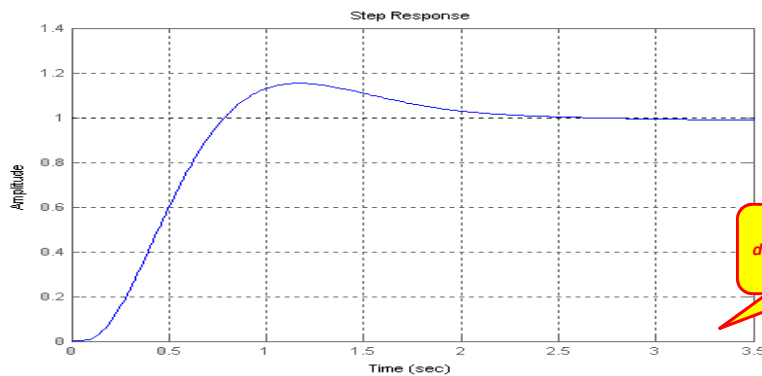
2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Exemplu de proiectare (10) COMPENSARE DINAMICA

Răspuns la semnal treaptă pentru K=2

Legea de control devine

$$D(s) = 2 \cdot \left( 30.024 \cdot \frac{s^2 + 1.7958 \cdot s + 4.7961}{(s+12)^2} \right) \cdot \left( 100 \cdot \frac{s+3}{s+20} \right)$$

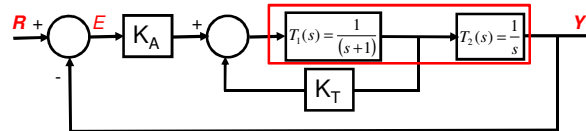


Atenție la  
diferențele din baza  
de timp!!!

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Considerarea a doi parametri. Sistem de control în cascadă.

- Metoda locului rădăcinilor consideră un singur parametru pentru reprezentarea grafică.
- O metodă practică de control poate considera două bucle de control, în cascadă, una rapidă (internă), și alta mai lentă (externă).
- Proiectarea unui astfel de sistem folosește un algoritm bazat pe închiderea succesivă a buclelor de control.
- Se consideră sistemul de control automat:



- Funcția de transfer intrare-iesire:

$$H(s) = \frac{K_A \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_T \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}} \Rightarrow 1 + \frac{K_A}{s \cdot (s+1)} + \frac{K_T}{s+1} = 0 \Rightarrow s^2 + s + K_A + K_T \cdot s = 0$$

- Alegem o valoare pentru  $K_A$  (de exemplu,  $K_A = 4$ ), și desenăm locul rădăcinilor pentru  $K_T$ .
- Optimizăm selecția lui  $K_T$ , apoi definim  $K_A = 4 + K_i$
- Considerăm locul rădăcinilor în funcție de  $K_i$ .
- După optimizarea în funcție de  $K_i$ , putem reveni la locul rădăcinilor pentru  $K_T$  și optimiza din nou.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

### Observații finale – Exemple pentru proiectarea cu locul rădăcinilor

- Proiectarea sistemelor de control se bazează pe experiență.
- Discuția unor cazuri particulare și exemple permit dezvoltarea cunoașterii despre domeniu.

2019 \*\*\* Sisteme Automate de Control

## TEMA DE CASĂ #4

Tema de casă trebuie adusă la laboratorul din 17 mai.

### Capitolul 5 \*\*\* Proiectarea cu metoda locului rădăcinilor

#### **Problema**

Considerati sistemul prezentat in figura.

- (a) Folositi criteriul de stabilitate Routh pentru determinarea valorile lui K care asigura stabilitatea.
- (b) Desenati locul radacinilor ecuatiei caracteristice in functie de  $K > 0$ . Indicati pe figura toate punctele de interes.

