1. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBEDEN VE BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

1.1 GİRİŞ

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

biçiminde yazılabilen denklemlere birinci mertebeden ve birinci dereceden diferensiyel denklem denir. Eğer

$$f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{2}$$

biçiminde ise (1) denklemi

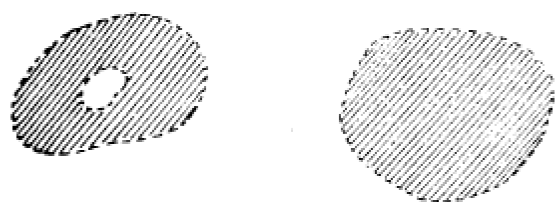
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

şelini alır. Gerçekte (1) ve (3) birbirine denktir.

2. Bölümün sonunda verilecek varlık teoremi, f ve $\partial f/\partial y$ nin sürekli olduğu her noktada (1) denkleminin tek bir çözümünün olduğunu güvenceye bağlar. Bu nedenle bir denklemin çözümü aranırken bu çözümün tanımlı olduğu bölgeyi

belirtmek gereklidir. Burada bölge sözü ile xy- düzleminde basit bağlantılı açık nokta kümesi demek istiyoruz. Bilindiği üzere bir açık nokta kümesinin içinde bulunan her basit kapalı bir c eğrisinin içindeki tüm noktalar da bu nokta kümesinin içinde kalıyorlarsa, bu kümeye **basit bağlantılı bölge** denir (1.1. Şekil). Örneğin, bir dikdörtgenin içi, $y > 0$ yarı düzlemi birer bölgedir.

f fonksiyonu (2) biçiminde verilmişse, $Q(x, y) = 0$ denklemini sağlayan noktalarda f süreksiz ve $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ denklemini sağlayan (x, y) noklarında ise f belirsizdir denir. f nin süreksiz ve belirsiz olduğu noktalara (3) denkleminin **tekil noktaları** denir. Varlık teoremi tekil noktalardaki çözüm hakkında bir fikir vermez. Bu nedenle sözkonusu noktalar ayrıca incelenmelidir.



Basit bağlantılı bölge değil — Basit bağlantılı bölge

1.1. ŞEKİL

1.2 DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DENKLEMLER

$$y' = h(x)g(y) \tag{1}$$

şeklinde yazılabilen denklemlere **değişkenlerine ayrılabilen denklemler** denir. Burada, $h(x)$ ve $g(y)$ fonksiyonlarının belli bir bölgede sürekli olduğu varsayılır. (1) denklemi

$$h(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy = 0$$

ya da daha genel olarak

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{2}$$

biçiminde yazılabilir. (2) denklemini çözmek için terim terime integral almak yeterlidir. Buna göre,

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \tag{3}$$

ifadesi ile tanımlanan y fonksiyonu (2) nin genel çözümünü verir.

Uyarı: Genel çözümü veren (3) bağıntısında iki keyfi sabit kullanmaya gerek yoktur. Çünkü (3) den

$$\int M(x)dx + c_1 + \int N(y)dy + c_2 = 0$$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = -(c_1 + c_2)$$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

yazılabilir. Burada c keyfi sabit olup $c = -(c_1 + c_2)$ dir.

1. ÖRNEK:

$$y' = e^y sinx$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: Verilen denklem,

$$sinxdx - e^{-y}dy = 0$$

şeklinde yazılır. Sonra terim terime integral alınarak,

$$-\,cosx + e^{-y} = c$$

genel çözümü bulunur.

2. ÖRNEK:

$$y' = \frac{y - y^2}{x + x^2}, \;\; y(2) = 1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Verilen denklem,

$$\frac{dx}{x^2 + x} + \frac{dy}{y^2 - y} = 0$$

şeklinde yazılır. Denklem basit kesirlere ayrılarak,

$$(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx + (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})dy = 0$$

biçiminde yazılır. Terim terime integral alınırsa genel çözüm,

$$ln|x| - ln|x+1| + ln|y-1| - ln|y| = c$$

ya da

$$ln|\frac{x(y-1)}{y(x+1)}| = c \tag{4}$$

olur. (4) de c yi lnc olarak seçmek daha uygundur. Çünkü bu durumda (4) ü

$$lna = lnb \Rightarrow a = b$$

bağıntısını kullanarak

$$|\frac{x(y-1)}{y(x+1)}| = |c|$$

biçiminde yazabiliriz..

Şimdi $x = 2$ için $y = 1$ olacak şekilde c yi belirleyelim. Buna göre

$$c = 0$$

bulunur. c nin bu değeri yerine konulduğunda

$$x(y-1) = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ya da } x = 0$$

çözümleri bulunur. Bunlardan $y = 1$ verilen yan koşulu sağladığı için istenen çözümdür. $x = 0$ da bir çözümdür. Çünkü verilen diferensiyel denklemde x bağımlı değişken, y bağımsız değişken gibi düşünülerek denklem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + x^2}{y - y^2}$$

biçiminde yazıldığında $x = 0$ doğrusunun bu denklemi sağladığı kolayca görülür. Buna karşın $x = 0,$ verilen başlangıç koşulunu sağlamadığı için istenen çözüm değildir.