1.2. KISIM ÜZERİNE ALIŞTIRMALAR

1. $y' = y\,tanx$

2. $y' = \sqrt{xy}$

3. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

4. $y' = (1+y^2),\ y(0) = 1$

5. $dx + cotxdy = 0,\ \ y(0) = 2$

6. $y' = \frac{x}{y},\ y(x_0) = y_0,\ y_0 > 0$

7. $y' = tanx.tany,\ y(0) = \frac{\pi}{6}$

8. $y'=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

9. $x\sqrt{1-y^2}dx = dy$

10. $cos^2x\frac{dy}{dx}\ + y = 2$

11. $y'(1+y) - (1+y)^2x = x$

12. $y' - y^2 = \ -9$

13. $y^2dx + (x+1)dy = 0,\ \ y(0) = 1$

14. $(1+lnx)dx + (1+lny)dy = 0$

denklemlerinin genel çözümünü ve karşılarında başlangıç değerleri verilenlerin istenen çözümünü bulunuz.

1.3 TAM DİFERENSİYEL DENKLEM

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y),\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \tag{1}$$

olacak şekilde düzlemin belli bir B bölgesinde sürekli türevleri olan bir $u(x,y)$ fonksiyonu varsa

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

denklemine **tam diferensiyel denklem** denir. Bu tanımdan, (2) biçiminde verilen her denklemin tam diferensiyel olacağı anlamı çıkarılmamalıdır. Çünkü, $y' = f(x,y)$ şeklinde verilen her denklem (2) biçiminde yazıldığı halde birçoğu tam diferensiyel değildir.

1. TEOREM: Eğer, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ve türevleri düzlemin bir B bölgesinde sürekli ve $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ise $Pdx + Qdy = 0$ denklemi tam diferensiyeldir.

İSPAT: B bölgesinde sabit bir (x_0, y_0) noktası gözönüne alarak,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt \tag{3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (3) ün her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dt \tag{4}$$

olur. Hipotez gereğince, $\partial Q(x,t)/\partial x = \partial P(x,t)/\partial t$ olup, bu değer (4) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} dt \\ &= P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) \\ &= P(x,y) \end{aligned} \tag{5}$$

bulunur.

Bu kez $u(x,y)$ fonksiyonunu

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt \tag{6}$$

şeklinde tanımlayalım. (6) nın her iki yanının y ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(s,y)}{\partial y} ds + Q(x_0,y) \tag{7}$$

olur. Hipotez gereğince, $\partial P(s,y)/\partial y = \partial Q(s,y)/\partial s$ olup, bu değer (7) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(s,y)}{\partial s} ds + Q(x_0, y) \qquad (8)\\ &= Q(x,y) + Q(x_0,y) - Q(x_0,y)\\ &= \mathrm{Q}(x,y)\end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse, (5), (8) eşitlikleri ve tanım gereğince, $Pdx + Qdy$ tam diferensiyeldir.

2. TEOREM: Eğer $\partial P(x,y)/\partial y$ ve $\partial Q(x,y)/\partial x$ türevleri düzlemin bir B bölgesinde sürekli ve $Pdx + Qdy = 0$ denklemi tam diferensiyel ise,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (9)$$

dir.

İSPAT: $Pdx + Qdy = 0$ tam diferensiyel olduğundan tanım gereğince,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. Yukarıdaki eşitliklerden birincisinin y ye ikincisinin x e göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (10)$$

olur. Hipotez gereğince $\partial P/\partial y$ ve $\partial Q/\partial x$ sürekli olduğundan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad (11)$$

dir. Öyleyse, (10) un ikinci yanları da özdeş olmalıdır. Buradan, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ sonucuna varılır.

3. TEOREM: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denklemi tam diferensiyel olsun ve $\partial u/\partial x = P$ ve $\partial u/\partial y = Q$ olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu bulunsun. Bu taktirde, $y = F(x)$ in diferensiyel denklemin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$u(x,y) = c \tag{12}$$

denklemini sağlamasıdır.

İSPAT: Önce $y = F(x)$ in bir çözüm olduğunu varsayarak, bir $u(x,y) = c$ bağıntısı bulalım. Verilen diferensiyel denklemde P ve Q yerine hipotezle verilmiş olan $P = \partial u/\partial x$, $Q = \partial u/\partial y$ değerleri yazılırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \tag{13}$$

olur. Hipotez gereğince (13) tam diferensiyel olduğundan

$$du(x,y) = 0 \tag{14}$$

yazılır. Buradan,

$$u(x,y) = c$$

elde edilir.

Şimdi de, $y = F(x)$ in $u(x,y) = c$ denklemini sağladığını varsayarak göstermeliyiz ki; $y = F(x)$, tam diferensiyel denklemin bir çözümüdür. Kapalı fonksiyonların türevi kuralına göre (12) nin türevi alınırsa

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

ya da

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = 0 \qquad (15)$$

elde edilir. (15) de $\partial u/\partial x$ ve $\partial u/\partial y$ yerine hipoteze göre $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ konulduğunda,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

bulunur. Bu bize $y = F(x)$ in bir çözüm olduğunu gösterir.

1. Teoremden anlaşılmaktadır ki $\partial P/\partial y \equiv \partial Q/\partial x$ özdeşliği varsa denklem tam diferensiyeldir. O nedenle, bu özdeşliğe **tam diferensiyellik koşulu** denir. Böylece yukarıdaki özdeşliğin sağlanıp sağlanmamasına göre bir denklemin tam diferensiyel olup olmadığına karar verilir. 3. Teorem bir tam diferensiyel denklemin çözümü hakkında fikir verir.

Şimdi verilen bir tam diferensiyel denklemin nasıl çözüleceğini araştıralım. Her ne kadar, (3) formülü yardımıyla verilen bir denklemin çözümünü bulmak mümkün ise de böyle bir formülü akılda tutmaya gerek kalmadan başka yöntemlerle de bir tam diferensiyel denklemi çözmek olasıdır. Bunu örnekler üzerinde açıklayalım.

1. ÖRNEK:

$$(x^2 + y)dx + (x + e^y)dy = 0$$

denkleminin tam diferensiyel olduğunu gösteriniz ve çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$P(x,y) = x^2 + y\ ,\quad Q(x,y) = x + e^y$$

dir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

olduğundan denklem tam diferensiyeldir. Öyleyse,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = x^2 + y, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x + e^y$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. Birinci denklemin x e göre integrali alınırsa,

$$u(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy + h(y)$$

bulunur. Burada, $\partial h/\partial x = 0$ olacağından h, y nin herhangi bir fonksiyonu olabilir. Şimdi $h(y)$ yi belirleyelim. Son denklemde u nun y ye göre türevi alınarak yukarıda yerine konulduğunda,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x + \frac{dh(y)}{dy} = x + e^y$$

olur. Buradan

$$\frac{dh(y)}{dy} = e^y \;\Rightarrow\; h(y) = e^y + c_1$$

bulunur. $h(y)$ nin bu değeri yukarıda yerine konulduğunda

$$u(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy+e^y+c_1=c_2$$

elde edilir. Öyleyse çözüm,

$$\frac{x^3}{3}+xy+e^y=c,\ \ (c=c_2-c_1)$$

denklemi ile tanımlanır.

2. ÖRNEK:

$$(2xy^3-2y^2)dx+(3x^2y^2-4xy)dy=0$$

denkleminin tam diferensiyel olduğunu gösteriniz ve çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$P(x,y)=2xy^3-2y^2\ ,\ \ Q(x,y)=3x^2y^2-4xy$$

dir. Buradan,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-4y\ \ ,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-4y$$

ve $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$ olduğundan denklem tam diferensiyeldir. Öyleyse,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xy^3-2y^2,\ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=3x^2y^2-4xy$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. Buradan, birinci denklemin x e göre integrali alınırsa,

$$u(x,y) = x^2y^3 - 2xy^2 + h(y)$$

dir. Bu ifadenin y ye göre türevi,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4xy + \frac{dh(y)}{dy}$$

dir. $\partial u/\partial y$ nin bu değeri yukarıda yerine konulursa,

$$\frac{dh(y)}{dy} = 0 \;\Rightarrow\; h(y) = c_1$$

bulunur. $h(y)$ nin bu değeri yukarıda yerine yazılırsa genel çözümü veren,

$$x^2y^3 - 2xy^2 + c_1 = c_2 \;\Rightarrow x^2y^3 - 2xy^2 = c$$

bağıntısı elde edilir. Burada $c = c_2 - c_1$ dir.

Uyarı: Eğer verilen diferensiyel denklem tam ise, tam denklemin terimlerini yeniden gruplayarak $u(x,y)$ fonksiyonunu doğrudan doğruya bulabiliriz ve bu durumda genel çözüm yalnızca bir integrasyon gerektirir. Örneğin,

$$(siny - ysinx)dx + (xcosy + cosx)dy = 0$$

diferensiyel denklemi yeniden gruplandırıldığında

$$(sinydx + xcosydy) + (-ysinxdx + cosxdy) = d(xsiny) + d(ycosx) = 0$$

yazılabildiğinden

$$du = d(xsiny + ycosx)$$

dir. Buradan integral almak suretiyle

$$u(x,y) = xsiny + ycosx = c$$

elde edilir. Ancak, (9) tam diferensiyellik koşulunu uygulamaksızın bir diferensiyel denklemin tam olduğunu, $u(x,y)$ fonksiyonunu bularak söylemek genellikle mümkün değildir.

1.3. KISIM ÜZERİNE ALIŞTIRMALAR

1. $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$
2. $e^x dx-2dy=0$
3. $(x-ysinx)dx+cosxdy=0$
4. $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$
5. $(3ye^{3x}-2x)dx+e^{3x}dy=0$
6. $(2x^3+3y)+(3x+y-1)y'=0$
7. $(\frac{x}{y})dy+(1+lny)dx=0$
8. $(y^2+1)cosxdx+2ysinxdy=0$
9. $(1-lnxy)dx+(1-\frac{x}{y})dy=0$
10. $2xyy'=x^2-y^2$
11. $(\frac{3-y}{x^2})dx+(\frac{y^2-2x}{xy^2})dy=0$

denklemlerinin tam diferensiyel olduğunu gösteriniz ve genel çözümünü bulunuz.

12. $\phi(x,y)dx+(2x^2y^3-x^4y)dy=0$
13. $sinxcosydx+\phi(x,y)dy=0$
14. $2x^2\phi(x,y)dx+(x^2+y^2)dy=0$

denklemlerinin tam diferensiyel olması için $\phi(x,y)$ ne olmalıdır.

1.4 İNTEGRAL ÇARPANI

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

biçiminde verilen ve tam diferensiyel olmayan denklemleri çözmek için çoğu kez onları tam diferensiyel yapacak olan bir **integral çarpanı** bulunur. Diyelim ki böyle bir integral çarpanı $\lambda(x,y)$ olsun. Bu taktirde,