2. $(y')^2 + 2xy = x$

3. $y'' - 3xy' + y = sin^2 x$

4. $(y'')^3 + 2(y')^5 + 4y^2 = 0$

5. $(y' + 1)y'' = 0$

6. $xy''' - 3y'' + 2y' + 5xy = x - 1$

7. $yy'' = 0$

8. $y^{(v)} + 2xy'' - y = e^x$

10. $(cosx)dx - dy = 0$

11. $(1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0$

12. $y' = \sqrt{1 + y''}$

13. $y' = cos(x + y)$

14. $y' = xe^{x+y}$

denklemlerinin hangi mertebe ve dereceden olduklarını belirtiniz ve lineer olup olmadıklarını araştırınız.

0.3 ÇÖZÜMLER

Bilindiği gibi cebirde, bir cebirsel denklemi sağlayan sayıların bulunması istenir. Eğer varsa cebirsel denklemi sağlayan sayılara denklemin çözümleri (veya kökleri) denir. Örneğin, $x = 1$ sayısı $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ denklemini sağladığından denklemin bir çözümüdür. Şüphesiz denklemin başka çözümleri de mevcuttur. Diferensiyel denklemlerde ise, bir diferensiyel denklemi sağlayan fonksiyonların bulunması istenir. Böyle bir fonksiyona diferensiyel denklemin çözümü denir. Bu nedenle bir denklemin çözümü denilince ne anlaşılması gerektiğini iyi bilmek gerekir.

1. TANIM:

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

denklemi verilmiş olsun. Belli bir $a < x < b$ aralığında (ya da tüm reel eksende) tanımlı ve ilk n mertebeden türevi olan

$$y = F(x) \tag{2}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer (1) deki y ve türevleri yerine (2) deki $F(x)$ ve türevleri konulduğunda denklem özdeş olarak sağlanırsa $y = F(x)$ fonksiyonu (1) denkleminin bir **çözümüdür** denir. $y = F(x)$ in grafiğine de (1) in **integral eğrisi** denir.

Bir diferensiyel denklemin çözümü varsa bu çözüm tek ya da çok olabilir. Çözümün tek olup olmamasının koşulları gelecek bölümlerde ayrıntılı olarak incelenecektir. Ancak bu bölümde bazı örnekler ele alarak onların çözümlerini inceleyelim.

1. ÖRNEK:

$$y' + 3y = 0 \tag{3}$$

denkleminin bir çözümü

$$y = e^{-3x} \tag{4}$$

olduğu gibi bunun herhangi bir sabitle çarpımı olan

$$y = ce^{-3x} \tag{5}$$

fonksiyonu da çözümdür. Gerçekten, (5) fonksiyonu (3) denkleminde yerine konulduğunda

$$-3ce^{-3x} + 3ce^{-3x} = 0$$

olup, c keyfi sabitinin her değeri için denklemin sağlandığı görülür. Burada çözümün tanımlı olduğu aralık, $-\infty < x < +\infty$ dur.

2. ÖRNEK:

$$y'' - y = 0 \tag{6}$$

denklemini gözönüne alalım.

$$y_1 = e^x, \qquad y_2 = e^{-x} \tag{7}$$

fonksiyonları (6) nın çözümleri olduğu gibi,

$$y_1 = c_1 e^x, \qquad y_2 = c_2 e^{-x} \tag{8}$$

fonksiyonları da aynı denklemin çözümleridir. Bundan başka bu fonksiyonların toplamı olan

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \tag{9}$$

fonksiyonu da (6) nın çözümüdür. Gerçekten, (9) fonksiyonu (6) denkleminde yerine konulduğunda

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} - (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = 0$$

olup denklemin sağlandığı görülür. Bu çözüm de $-\infty < x < +\infty$ aralığında tanımlıdır.

Yukarıdaki örneklerden görülmektedir ki, bir denklemin çözümleri tek bir formül içinde sunulabileceği gibi parçalı olarak da sunulabilir. Bu ayrıcalığı belirtmek için genel çözüm ve özel çözüm diye iki tür çözümden sözedilir.

2. TANIM: $c_1, c_2, ...c_n$ birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere,

$$F(x, y, c_1, ..., c_n) = 0 \tag{10}$$

bağıntısıyla tanımlanan n parametreli bir fonksiyon ailesini gözönüne alalım. Eğer ailedeki her fonksiyon (1) denkleminin bir çözümü ise, bu fonksiyon kümesine (1) denkleminin **genel çözümü** denir. Genel çözümde denklemin mertebe sayısı kadar keyfi sabit vardır.

Örneğin, (3) denklemi birinci mertebeden olup, (5) onun bir keyfi sabit içeren genel çözümüdür. Aynı şekilde (6) denklemi ikinci mertebeden olup, (9) onun iki keyfi sabit içeren genel çözümüdür.

3. TANIM: Keyfi sabitlere özel değerler vererek genel çözümden elde edilen çözümlere **özel çözüm** denir.

Örneğin, (4) fonksiyonu (3) denkleminin ve (7) fonksiyonları da (6) denkleminin birer özel çözümüdür. Kuşkusuz (5) ve (9) fonksiyonlarındaki keyfi sabitlere daha farklı değerler vererek özel çözümlerin sayısını dilediğimiz kadar artırabiliriz.

Bir diferensiyel denklemi yazabilmemiz gerçeği, onun bir çözüme sahip olmasını garanti etmek için yeterli değildir. Örneğin,

$$(y')^2 + y^2 = -1$$

diferensiyel denklemi (reel değerli) çözüme sahip değildir. Çünkü negatif olmayan sayıların toplamı negatif olamaz. Benzer bir muhakame ile

$$(y')^2 + y^2 = 0$$

diferensiyel denklemi bir tek çözüme sahip olup, bu çözümün $y = 0$ olduğu görülür.

1. ve 2. Örneklerdeki denklemlerin çözümlerinin nasıl bulunduğu sorusu akla gelebilir. Bu aşamada çözüm yöntemleri henüz görülmediği için o çözümleri doğrudan doğruya yazdık. Bununla beraber, bazı basit denklemlerin çözümlerini bu bilgilerimizle de bulabiliriz.

3. ÖRNEK:

$$y' = 2x$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz ve bazı özel çözümlerini yazınız.

ÇÖZÜM: $y' = dy/dx$ olduğundan verilen denklem

$$dy = 2xdx$$

yazıldıktan sonra her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int dy = \int 2xdx + c \Rightarrow y = x^2 + c$$

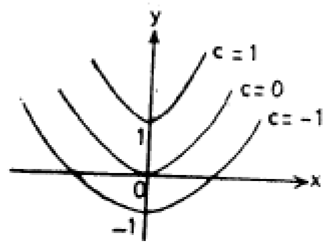
genel çözümü bulunmuş olur.

Görüldüğü gibi genel çözümü veren fonksiyon bir parabol denklemi olup c değiştikçe parabolün grafiği de birbirine paralel olarak yer değiştirir. $c = 0$, $c = \pm 1$ için çizilen bu paraboller 0.1.Şekilde görülmektedir. $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$ birer özel çözümdür.

4. ÖRNEK:

$$y'' = e^x - sinx$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.



0.1. ŞEKİL

ÇÖZÜM: Denklem ikinci mertebeden olduğundan y yi bulmak için iki kez integral almak gerekir. $y'' = d^2y/dx^2$ yi verilen denklemde yerine koyarak denklemi

$$d^2y = (e^x - sinx)dx^2$$

şeklinde yazalım. Denklem birinci integral sonunda

$$dy = (e^x + cosx + c_1)dx$$

şeklini alır. Bunun da tekrar integrali alınırsa

$$y = e^x + sinx + c_1x + c_2$$

genel çözümü bulunur.

Uygulamalı bilimlerde genellikle bir diferensiyel denklemin genel çözümünden çok, önceden verilen yardımcı koşulları sağlayan çözümünün bulunması istenir. Örneğin,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (11)$$

şeklinde verilen bir denklem için bu yardımcı koşullar

$$y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_1\,,\, ...,\, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{12}$$

biçiminde verilir. İşte (11) denkleminin (12) yardımcı koşullarını sağlayan çözümünü bulma problemine **başlangıç değer problemi** denir. Görüldüğü gibi n. mertebeden bir denklem için n tane yardımcı koşul verilmiştir. (12) ile verilen bu yardımcı koşullara **başlangıç koşulları** denir. Birinci mertebeden bir denklem için yalnız bir başlangıç koşuluna gereksinme vardır.

5. ÖRNEK:

$$y' = 2x, \quad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Bu problem bir başka şekilde şöyle ifade edilebilirdi. $y' = 2x$ denkleminin $x = 0$ için $y = 1$ olan çözümünü bulunuz. Öyleyse önce genel çözümü bulalım. 3. Örnekte de görüldüğü gibi genel çözüm

$$y = x^2 + c$$

dir. Genel çözümde $x = 0,\ y = 1$ yazılırsa,

$$c = 1$$

bulunur. O halde istenen çözüm

$$y = x^2 + 1$$

dir. Görülüyor ki başlangıç değer probleminin çözümü aslında verilen denklemin bir özel çözümüdür. Bu problem geometrik olarak $y' = 2x$ denkleminin $(0, 1)$ noktasından geçen integral eğrisinin bulunması demektir.

6. ÖRNEK:

$$y'' = e^x, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Yine önce genel çözümü bulalım. Birinci integral sonunda

$$y' = e^x + c_1$$

elde edilir. Bunun da tekrar integrali alınarak

$$y = e^x + c_1 x + c_2$$

genel çözümü bulunur. Verilen başlangıç koşullarını son iki denklemde kullanarak c_1 ve c_2 sabitlerini belirleyelim. Son denklemde $x = 0, \; y = 0$ yazıldığında

$$c_2 = -1$$

ve $y' = e^x + c_1$ denkleminde $x = 0, \; y' = 1$ yazıldığında

$$c_1 = 0$$

bulunur. Öyleyse aranan çözüm

$$y = e^x - 1$$

fonksiyonudur.

Bununla birlikte bir diferensiyel denklemin bir $a \leq x \leq b$ aralığının uç noktalarında belli sınır değerlerini sağlayan çözümünün bulunması da istenebilir. Yani, x in birden fazla değeri için verilen yardımcı koşulları sağlayan çözüm de bulunabilir. Böyle problemlere **sınır değer problemi** denir.

7. ÖRNEK: $y'' = sinx, \;\; y(0) = y_1, \; y(\pi) = y_2$

sınır değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Denklemin genel çözümü

$$y = -sinx + c_1 x + c_2$$

dir. Verilen sınır değerleri genel çözümde yerlerine konulursa

$$y_1 = c_2,\ y_2 = c_1 \pi + c_2$$

cebirsel denklemleri ve buradan da

$$c_1 = \frac{y_2 - y_1}{\pi},\ c_2 = y_1$$

bulunur. Böylece verilen sınır değer probleminin çözümü

$$y = -sinx + \frac{y_2 - y_1}{\pi} x + y_1$$

dir.

0.3. KISIM ÜZERİNE ALIŞTIRMALAR

1. $y = cx^2, \quad xy' - 2y = 0$
2. $y = cos2x, \quad y'' + 4y = 0$
3. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}, \quad y'' - 9y = 0$
4. $y = sin(x+a), \quad (y')^2 = 1 - y^2$
5. $y = 9, \quad y' + 4y = 36$
6. $y = Ax + B, \quad y'' = 0$