GİRİŞ BÖLÜMÜ

TEMEL KAVRAMLAR

0.1 GİRİŞ

Diferensiyel denklemler ilk kez, Onyedinci Yüzyılda Sir Isaac Newton tarafından ortaya konuldu. Newton, diferensiyel denklemleri parçacık ve gezegen hareketlerinin incelemesinde kullandı. Bu konu Ondokuz ve Yirminci Yüzyılda gelişerek modern matematiğin bir kolu oldu. Diferensiyel denklemlerin gelişmesinde, Birkhoff, Cauchy, Lyapunov, Picard, Poincare ve Riemann' ın önemli katkıları olmuştur. Bu matematikçiler ve bunlardan sonra gelenlerin elde ettiği kuramsal sonuçlar birçok bilimde uygulama alanı bulmuştur.

Fizik ve bazı diğer bilimlerde bir olayı açıklamak ya da bir problemi çözmek, çoğu kez bir diferensiyel denklem kurmayı ve onu çözmeyi gerektirir. Bu nedenle diferensiyel denklemleri sınıflandırmak ve onların çözülebilirlik durumlarını araştırmak diferensiyel denklemler kurmanın başlıca konusunu oluşturur. Uygulamada daha çok, bir diferensiyel denklem verildiğinde onun çözümü bulunur ve bu çözümün özellikleri incelenir. Biz burada her denklem türü için uygun çözüm yöntemleri verirken çözümün varlığı, tekliği (ya da tek olmaması) ve analitik olup olmadığı üzerinde de duracağız. Başka bir değişle, her denklem sınıfı için varlık ve teklik teoremi verip, bunların ispatını en kolay anlaşılacak şekilde yapmaya çalışacağız. Bunu yaparken sadece çözümleri tam olarak bulunabilen özel denklem sınıflarını ele alacağız ve bunlar için geçerli olan bilinen çözüm yöntemlerini vereceğiz. Göreceğiz ki uzun zamandan beri incelenmiş ve hala incelenmesi yoğun olarak sürmesine rağmen çözülebilen yani integre edilebilen denklemler oldukça kısıtlıdır. Fakat çözümü tam olarak bulunamayan denklemler için sayısal ve yaklaşık yöntemler uygulanabilir. Bu yöntemler oldukça ayrıntılıdır ve özel bir inceleme alanıdır.

Bu amaçla, birinci, ikinci ve daha yüksek mertebeden denklemler anlatılırken ilgili bölümlerin sonuna varlık ve teklik teoremleri konulacak ve bunlar örneklerle açıklanacaktır.

0.2 DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Diferensiyel denklemler genel olarak adi diferensiyel denklem ve kısmi diferensiyel denklem diye iki grup altında incelenir. Bu kitapta yalnız adi diferensiyel denklemlerden söz edilecek ve gereksinme duyulmadıkça adi sıfatı kullanılmayacaktır.

Eğer bir diferensiyel denklem, bir değişkenin bir veya daha çok değişkene göre türevlerini içeriyorsa, türevi alınan değişkene bağımlı değişken, türevin alındığı değişkene veya değişkenlere bağımsız değişken denir. Bağımlı değişkene bilinmeyen fonksiyon da denir. Örneğin,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

denkleminde x bağımlı değişken, t bağımsız değişken

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 3x - 2y$$

denkleminde ise u bağımlı değişken x ve y bağımsız değişkendir.

1. TANIM: Tek bir bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme **adi diferensiyel denklem** denir. Bu denklemler en genel olarak,

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

biçiminde yazılır. Burada $y^{(n)}$, y nin x e göre n. türevi demektir.

$$y' = 0 \tag{2}$$

$$(x - y)dx + x^2 dy = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = e^x \tag{4}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x^2y = x + 1 \tag{5}$$

denklemleri birer adi diferensiyel denklemdir.

Bu kitapta incelenecek denklemlerin pek çoğunu

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{6}$$

biçiminde yazılabilenler oluşturur. Yani en yüksek mertebeli türeve göre çözülebilen denklemler. Örneğin,

$$siny'' + e^{y'} + 5xy'' - y = 0$$

denklemi (1) türünde bir denklemdir. Çünkü bu denklem y'' ne göre çözülemez. Halbuki,

$$y'' - 2xy' + 3xy - 5 = 0$$

denklemi (6) türündedir. Gerçekten bu denklemi,

$$y'' = 2xy' - 3xy + 5$$

şeklinde yazmak mümkün olmaktadır.

2. TANIM: İki ya da daha çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun, bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir denkleme **kısmi diferensiyel denklem** denir. Birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem en genel olarak

$$f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

biçiminde yazılır. Burada $z = z(x, y)$ dir. Örneğin,

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - (3x + y)\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

denklemleri kısmi diferensiyel denklemdir.

Gerek adi gerekse kısmi diferensiyel denklemler incelenirken onlar da kendi aralarında türlere ayrılır. Bu alt sınıflandırmalar yapılırken mertebe, derece ve lineerlik kavramları kullanılır.

3. TANIM: Bir diferensiyel denklemde görülen en yüksek türevin mertebesine o diferensiyel denklemin **mertebesi** denir.

(2) ve (3) denklemleri birinci mertebeden, (4) denklemi ikinci, (5) denklemi ise dördüncü mertebedendir. (1) ve (6) denklemleri $n.$ mertebedendir.

4. TANIM: Eğer bir diferensiyel denklem, var olan tüm türevlere göre bir polinom denklem biçiminde ise en yüksek mertebeden türevin kuvvetine (üssüne) o denklemin **derecesi** denir.

(2), (3) ve (4) denklemleri birinci dereceden (5) denklemi ise ikinci derecedendir. Diğer bir örnek olarak

$$(y'')^{3/2} = (xy + y') \tag{7}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Denklemin mertebesi ikidir. Denklemin dercesini bulmak için denklemin her iki tarafının 2. kuvvetini alarak

$$(y'')^{3} = (xy + y')^{2}$$

elde edilir. Böylece (7) denkleminin derecesi üçtür.

Her diferensiyel denklem var olan türevlere göre polinom denklem biçiminde yazılamaz. Örneğin,

$$y'' + (y')^2 = lny''$$

denklemi ikinci mertebeden olup derecesi tanımlı değildir.

Bazı diferensiyel denklemlerden söz edilirken lineer sıfatı da birlikte kullanılır. Esasen lineer diferensiyel denklemler, diferensiyel denklemlerin en önemli bölümünü oluşturur.

5. TANIM: Tüm türevlere göre bir polinom denklem biçiminde olan bir diferensiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden olup, bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorlarsa denkleme **lineerdir** denir. Adi lineer diferensiyel denklemler en genel olarak,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = b(x) \qquad (7)$$

biçiminde yazılır. (7) denklemine $\boldsymbol{n}$**. mertebeden adi lineer diferensiyel denklem** denir. Eğer $b(x) \equiv 0$ ise denklem **homojen (ikinci tarafsız) adi lineer diferensiyel denklem** diye adlandırılır. Örneğin (2) ve (3) denklemleri lineer, (4) ve (5) denklemleri lineer değildir.

Bir lineer diferensiyel denklem birinci derecedendir ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin,

$$y' + xy^2 = 1 \quad \text{ve} \quad y'' + (x+y)y' = cosx$$

denklemleri birinci derecedendir fakat lineer değildir.

0.2. KISIM ÜZERİNE ALIŞTIRMALAR

1. $y' = x^2y - 1$

9. $(1+x^2)y' - xy = 3$