elde edilir. Ancak, (9) tam diferensiyellik koşulunu uygulamaksızın bir diferensiyel denklemin tam olduğunu, $u(x,y)$ fonksiyonunu bularak söylemek genellikle mümkün değildir.

1.3. KISIM ÜZERİNE ALIŞTIRMALAR

1. $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$

2. $e^x dx-2dy=0$

3. $(x-ysinx)dx+cosxdy=0$

4. $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$

5. $(3ye^{3x}-2x)dx+e^{3x}dy=0$

6. $(2x^3+3y)+(3x+y-1)y'=0$

7. $(\frac{x}{y})dy+(1+lny)dx=0$

8. $(y^2+1)cosxdx+2ysinxdy=0$

9. $(1-lnxy)dx+(1-\frac{x}{y})dy=0$

10. $2xyy'=x^2-y^2$

11. $(\frac{3-y}{x^2})dx+(\frac{y^2-2x}{xy^2})dy=0$

denklemlerinin tam diferensiyel olduğunu gösteriniz ve genel çözümünü bulunuz.

12. $\phi(x,y)dx+(2x^2y^3-x^4y)dy=0$

13. $sinxcosydx+\phi(x,y)dy=0$

14. $2x^2\phi(x,y)dx+(x^2+y^2)dy=0$

denklemlerinin tam diferensiyel olması için $\phi(x,y)$ ne olmalıdır.

1.4 İNTEGRAL ÇARPANI

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

biçiminde verilen ve tam diferensiyel olmayan denklemleri çözmek için çoğu kez onları tam diferensiyel yapacak olan bir **integral çarpanı** bulunur. Diyelim ki böyle bir integral çarpanı $\lambda(x,y)$ olsun. Bu taktirde,

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

denklemi tam diferensiyel olur. Tam diferensiyellik koşulu (2) denklemine uygulanarak

$$\frac{\partial[\lambda(x,y)P(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\lambda(x,y)Q(x,y)]}{\partial x} \tag{3}$$

ya da

$$Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) \tag{4}$$

parçalı diferensiyel denklemi elde edilir. (4) denkleminden λ yı çözebilmek için, parçalı diferensiyel denklemleri bilmeye gereksinme vardır. Ancak, λ nın yalnız x ya da yalnız y ye bağlı olması halinde (özel hal) (4) denklemi adi diferensiyel denkleme indirgenir. Bu nedenle, λ nın bu özel halleri için bir integral çarpanının nasıl bulunacağını görelim.

Önce $\lambda = \lambda(x)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\partial\lambda/\partial y = 0$ olacağı için (4) denklemi

$$Q\frac{d\lambda}{dx} = \lambda(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) \tag{5}$$

ya da

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Q}dx \tag{6}$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir. Böylece (6) dan bulunacak olan $\lambda(x)$ çarpanı verilen denklemin her terimi ile çarpılırsa denklem tam diferensiyel olur.

Şimdi de $\lambda = \lambda(y)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\partial\lambda/\partial x = 0$ olacağı için (4) denklemi

$$-P\frac{d\lambda}{dy} = \lambda(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) \tag{7}$$

ya da

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{-\mathrm{P}}dy \tag{8}$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir. Benzer şekilde (8) den bulunacak olan $\lambda(y)$ çarpanı verilen denklemin her terimi ile çarpılarak denklem tam diferensiyel yapılmış olur.

Burada karşımıza şu soru çıkabilir. Verilen bir denklemin integral çarpanının yalnız x ya da yalnız y ye bağlı olduğunu nasıl anlarız? Bu sorunun yanıtını önceden bilmeye gereksinme vardır. Çünkü, λ yalnız x e bağlıysa (6) denklemi, yalnız y ye bağlıysa (8) denklemi kullanılır. Yukarıdaki sorunun yanıtı (6) ve (8) denklemlerinden görülebilir. Gerçekten,

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} \tag{9}$$

ifadesi yalnız x e bağlı ise, $\lambda = \lambda(x)$ olup λ yı bulabilmek için (6) denklemini kullanmak gerekir. Aynı şekilde

$$\frac{P_y - Q_x}{-\mathrm{P}} \tag{10}$$

ifadesi yalnız y ye bağlı ise, $\lambda = \lambda(y)$ olup λ yı bulabilmek için (8) denklemini kullanmak gerekir.

Eğer (9) ve (10) ifadeleri hem x hem de y ye bağlı ise λ ancak (4) denkleminden bulunabilir.

1. ÖRNEK:

$$(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$$

denkleminin tam diferensiyel olup olmadığını kontrol ediniz. Eğer tam diferensiyel değilse, bir integral çarpanı bularak denklemi tam diferensiyel yaptıktan sonra çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$P(x,y) = x^2 + y^2, \quad Q(x,y) = xy$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\ , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

olup $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ olduğundan denklem tam diferensiyel değildir. Şimdi integral çarpanının hangi değişkene bağlı olduğunu araştıralım.

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

olduğundan $\lambda = \lambda(x)$ dir. Öyleyse λ yı

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Q} dx$$

denkleminden bulabiliriz. Buradan,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dx}{x} \Rightarrow ln\lambda = lnx \Rightarrow \lambda = x$$

bulunur. Verilen denklemin her iki yanı x ile çarpılarak,

$$(x^3 + xy^2)dx + x^2 y dy = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Denklem tam diferensiyel olduğundan

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = (x^3 + xy^2) \ , \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 y$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. Buradan, birinci denklemin x e göre integrali alınırsa,

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + h(y)$$

olup bu ifadenin y ye göre,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 y + \frac{dh(y)}{dy}$$

türevi ikinci denklemde yerine konulursa,

$$\frac{dh(y)}{dy} = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

bulunur. O halde verilen denklemin genel çözümü,

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+c_1=c_2 \Rightarrow x^4+2x^2y^2=c$$

kapalı fonksiyonu ile tanımlanır.

2. ÖRNEK:

$$ydx+(2xy^2+x)dy=0$$

denkleminin tam diferensiyel olup olmadığını kontrol ediniz. Eğer tam diferensiyel değilse bir integral çarpanı bularak denklemi tam diferensiyel yaptıktan sonra çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$P(x,y)=y,\ Q(x,y)=2xy^2+x$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y^2+1$$

dir. $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ olduğundan denklem tam diferensiyel değildir.

Bir integral çarpanını bulalım.

$$\frac{P_y-Q_x}{-\mathrm{P}}=\frac{1-(2y^2+1)}{-y}=2y$$

olduğundan $\lambda=\lambda(y)$ dir. Öyleyse λ yı

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{P_y-Q_x}{-\mathrm{P}}dy$$

denkleminden bulabiliriz. Buradan,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = 2ydy \Rightarrow ln\lambda = y^2 \Rightarrow \lambda = e^{y^2}$$

bulunur. Verilen denklemin her iki yanı e^{y^2} ile çarpılarak

$$ye^{y^2}dx + (2xy^2 + x)e^{y^2}dy = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Denklem tam diferensiyel olduğundan

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = ye^{y^2}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = (2xy^2 + x)e^{y^2}$$

olacak şekilde bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır. Buradan, birinci denklemin x e göre integrali alınırsa,

$$u(x,y) = xye^{y^2} + h(y)$$

olur. Bu ifadenin y ye göre

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2} + \frac{dh(y)}{dy}$$

türevi ikinci denklemde yerine konulursa,

$$\frac{dh(y)}{dy} = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

bulunur. O halde verilen denklemin genel çözümü,

$$xye^{y^2} + c_1 = c_2 \Rightarrow xye^{y^2} = c$$

kapalı fonksiyonudur.