1章: 線形代数

- スカラー: 普通の数
- ベクトル: スカラーのセットで表す。向き、大きさを示す。
- 行列：スカラーを表にしたもの。ベクトルを並べたもの。

行列の積

行列の積は「行」×「列」で求める

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 6*1+4*2 \\ 3*1+5*2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 6+8 \\ 3+10 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$

連立1次方程式と行列の積

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \end{cases}$$

この連立方程式を行列、ベクトルを使用して表すと以下の通り。
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

行基本変形（行列の変形）

連立方程式を上記のような行列を用いた式で表した時、
行列を変形し、以下のような形式にすることで解を求めることが可能。
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
この時、x1=a, x2=bとなる。

行列の変形方法は以下。

- i行目をc倍する
- s行目にt行目のc倍を加える
- p行目とq行目を入れ替える

単位行列と逆行列

- 単位行列
  - かけても、かけられても相手が変化しない「1」のような行列
  - 斜めの要素だけが1となり、他の部分が0
  - Iで表す
- 逆行列
  - 元の行列をAとした時、Aとの乗算結果が単位行列となる行列を逆行列という
  - A^{-1}で表す
  - $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

逆行列の求め方

掃き出し法を使用して逆行列を求めることが可能。
掃き出し法とは行列Aの右となりに単位行列をつけ、行基本変形を行い、
行列A=単位行列I*行列Bの形に変形する。
Aの逆行列:A^{-1}=Bとなる。

逆行列が存在しない条件

行列Aを二つのベクトル$\vec{v_1}, \vec{v_2}$の組み合わせと捉え、
2つのベクトルに囲まれる平行四辺形の面積=0だと逆行列が存在しない。
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{pmatrix}$

行列式

上記で2つのベクトルに囲まれる平行四辺形の面積$ad - bc$を行列式という。

行列式の特徴

- 同じ行ベクトルが含まれていると行列式は0
- 1つのベクトルがλ倍されると行列式はλ倍される
- 他の成分が全て同じでi番目のベクトルだけが違う場合、行列式の足し合わせになる。
- 行列式の行を入れ替えると行列式の符号は逆になる。

固有値・固有ベクトル

ある正方行列Aに対し、以下の式を満たすとき、係数λを固有値、行列$\vec{x}$を固有ベクトルという。
$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

- NxN行列では固有値はN個存在する。

固有値・固有ベクトルの求め方

例：
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$の固有値・固有ベクトルを求める。

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (※1)
$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$
$\vec{x} \neq 0$より
$|A - \lambda I| = 0$

$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$
$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$
λ=5 or -1となる。
（※1）式にλ=5 or -1を代入。

- λ=5のとき、$x_1 = x_2$
- λ=-1のとき、$x_1 = -2x_2$

したがって、

- λ=5のとき、$\vec{x}$=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$の定数倍
- λ=-1のとき、$\vec{x}$=$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$の定数倍

固有値分解

正方行列A、固有値λ_1, λ_2, ...を対角線上に並べた行列Λ、固有ベクトルを並べた行列Vとしたとき、

$A = V\Lambda V^{-1}$ と表すことが出来る。

行列の累乗の計算が簡単になる利点がある。

特異値・特異ベクトル

行列Mに対し、転置行列M^Tとの積、MM^Tを正方行列とみなし、MM^Tの固有値を求めることで、以下を算出可能。

- 左特異ベクトル
- 特異値の2乗

特異値分解は画像の圧縮などに使用されている。