

---

## Développements limités usuels en 0

---

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

---


$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

---


$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

## Développements en série entières usuels

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n \quad (a \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}, |x| < |a|)$$

$$\frac{1}{(a-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}, |x| < |a|)$$

$$\frac{1}{(a-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}, |x| < |a|)$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^{2n-1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\operatorname{Argth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

$$\operatorname{Argsh} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

## Fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de définition
$x^n$ $n \in \mathbb{Z}$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x$ $\mathbb{R}$	$x^{-1}$	$\mathbb{R}_+$
$e^x$ $\mathbb{C}$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$a^x$ $a \in \mathbb{R}_+$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}$
$\log_a x$ $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cotan x$	$-1 - \cotan^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth} x$	$1 - \operatorname{coth}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$\operatorname{Arccos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$\operatorname{Arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argsh} x$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argch} x$	$\frac{1}{x^2-1}$	$]1; +\infty[$
$\operatorname{Argth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$] -1; 1[$

## Primitives usuelles

### I Polynômes et fractions simples

Fonction	Primitive	Intervalles
$(x - x_0)^n$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{-1\}) :$ $x \in ]- \infty ; x_0[ , ]x_0 ; + \infty [$
$(x - x_0)^n$ $x_0 \in \mathbb{C}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$	$x \in ]x_0 ; + \infty [$
$(x - z_0)^n$ $z_0 \in \mathbb{C}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{(x - z_0)^{n+1}}{n+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x - a}$ $a \in \mathbb{R}$	$\ln x - a $	$x \in ]- \infty ; a[ , ]a ; + \infty [$
$\frac{1}{x - (a + ib)}$ $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{2} \ln(x - a)^2 + b^2$ $+ i \operatorname{Arctan} \frac{x - a}{b}$	$x \in \mathbb{R}$

### II Fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$x \in ]0 ; + \infty [$
$e^x$ $x \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{-} e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$x \in ]-\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k$
$\cotan x$	$\ln \sin x $	$x \in ]k\pi ; (k+1)\pi [$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{coth} x$	$\ln \operatorname{sh} x $	$x \in ]- \infty ; 0[ , ]0 ; + \infty [$

### III Puissances et inverses de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$-\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k$
$\cotan^2 x$	$-\cotan x - x$	$]k ; (k+1) [$
$\operatorname{sh}^2 x$	$\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}^2 x$	$\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth}^2 x$	$x - \operatorname{coth} x$	$] -\infty ; 0 [ , ] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \tan \frac{x}{2}$	$]k ; (k+1) [$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \tan \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$	$-\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k$
$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$	$] -\infty ; 0 [ , ] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{Arctan} e^x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2 x$	$-\cotan x$	$]k ; (k+1) [$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$-\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{coth}^2 x - 1$	$-\operatorname{coth} x$	$] -\infty ; 0 [ , ] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^4 x}$	$-\cotan x - \frac{\cotan^3 x}{3}$	$]k ; (k+1) [$
$\frac{1}{\cos^4 x}$	$\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$	$-\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k$

# IV Fonctions d'Arct et de fonctions réciproques

Fonction	Primitive	Intervalles
$\frac{1}{1+x^2}$	Arctan x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$ a > 0	$\frac{1}{a} \text{Arctan } \frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	Argth x $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$] -1; 1[$ $] -\infty; -1[$ , $] 1; +\infty[$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ a > 0	$\frac{1}{a} \text{Argth } \frac{x}{a}$ $\frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$	$] -a; a[$ $] -\infty; -a[$ , $] a; +\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	Arcsin x	$] -1; 1[$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ a > 0	$\text{Arcsin } \frac{x}{a}$	$] -a; a[$
$\frac{1}{x^2+1}$	Argsh x = $\ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2-1}$	Argch x $-\text{Argch}(-x)$ $\ln \left  x + \sqrt{x^2-1} \right $	$] 1; +\infty[$ $] -\infty; -1[$ $] -\infty; -1[$ ou $] 1; +\infty[$
$\frac{1}{x^2+a}$ a > 0	$\ln \left( x + \sqrt{x^2+a} \right)$	a > 0 : $\mathbb{R}$ a < 0 : $] -\sqrt{-a}; \sqrt{-a}[$ ou $] \sqrt{-a}; +\infty[$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2} \text{Arctan } x + \frac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2} \text{Arctan } x - \frac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$

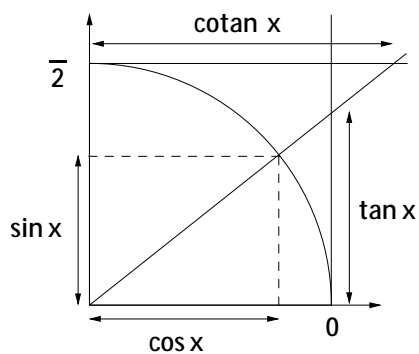
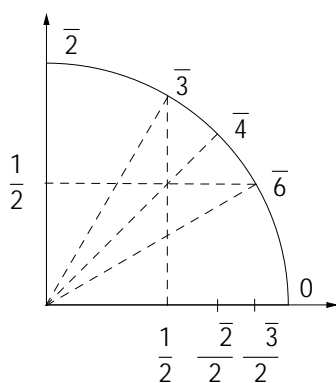
# Trigonométrie

## I Fonctions circulaires

### 1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cotan x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$
Parité	impair	pair	impair	impair
$f(-x)$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cotan x$
$f(x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cotan x$
$f(\frac{\pi}{2} - x)$	$\cos x$	$\sin x$	$\cotan x$	$\tan x$
$f(\frac{\pi}{2} + x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cotan x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$-1 - \cotan^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

### 2 Valeurs remarquables



	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\cotan x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

## II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

### 1 Définition

Les périodicité et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type  $\sin x = a$ . Par exemple,  $\pi/6$ ,  $5\pi/6$  et  $\pi/6 + 4\pi$  ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin, Arccos, Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont pas périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si  $\sin x = a$ ,  $a \in [-1; 1]$ , alors  $x = \text{Arcsin } a \pmod{2\pi}$   
ou  $x = \pi - \text{Arcsin } a \pmod{2\pi}$
- Si  $\cos x = a$ ,  $a \in [-1; 1]$ , alors  $x = \text{Arccos } a \pmod{2\pi}$   
ou  $x = -\text{Arccos } a \pmod{2\pi}$
- Si  $\tan x = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $x = \text{Arctan } t \pmod{\pi}$
- Si  $\cotan x = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $x = \text{Arccot } t \pmod{\pi}$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si  $x = \text{Arcsin } a$ , alors  $\sin x = a$ .

### 2 Propriétés

	Arcsin x	Arccos x	Arctan x	Arccot x
Ensemble de définition	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[-\pi/2; \pi/2]$	$[0; \pi]$	$]-\pi/2; \pi/2[$	$]0; \pi[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$] -1; 1[$	$] -1; 1[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$

### 3 Relations

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} + \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ \pi/2 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arccot} x = \begin{cases} \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 1/x = \operatorname{sign}(x) \times \pi/2$$

## III Formules

### 1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

### 2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

### 3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant  $t = \tan \frac{x}{2}$  comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

#### 4 Formule de Moivre

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos 3a &= \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a \\ &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3a &= 3 \cos^2 a \sin a - \sin^3 a \\ &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a \end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

#### 5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

### IV Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \quad \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \quad \operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \quad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \quad \operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ &= 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 \\ &= 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x \end{aligned} \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + 1} = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x}$$

En notant  $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ , on a :

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch} na + \operatorname{sh} na$$

d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 3a &= \operatorname{ch}^3 a + 3 \operatorname{ch} a \operatorname{sh}^2 a \\ &= 4 \operatorname{ch}^3 a - 3 \operatorname{ch} a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 3a &= 3 \operatorname{ch}^2 a \operatorname{sh} a + \operatorname{sh}^3 a \\ &= 4 \operatorname{sh}^3 a + 3 \operatorname{sh} a \end{aligned}$$

$$\operatorname{th} 3a = \frac{3 \operatorname{th} a + \operatorname{th}^3 a}{1 + 3 \operatorname{th}^2 a}$$