Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2018-2019
Logique mathématique

TD 1: Raisonnement mathématique

Exercice 1. **1.** *Démontrer par induction (récurrence) que* $n^2 \geq 2n+3$ *pour* $n \geq 3$.

2. *Démontrer par induction sur* n *que pour tout* $n \geq 1$, $1+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. *Soit la suite définie par* $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3$ *et* $d_{n+3} = d_{n+2} + d_{n+1} + d_n$ *pour tout entier strictement positif. Montrer que* $d_n < 2^n$ *pour tout* $n \geq 1$.

Exercice 2. *Soit* $f(m,n)$ *une fonction avec* $f(1,1) = 2$ *et* $f(m+1,n) = f(m,n)+2(m+n)$ *et* $f(m,n+1) = f(m,n)+2(m+n-1)$. *Montrer par récurrence que pour tout* $m,n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $f(m,n) = (m+n)^2-(m+n)-2n+2$.

Exercice 3. *Soient* A, B *et* C *trois ensembles avec* $A \cup B = A \cup C$. *Est-il vrai que* $B = C$ *? Quel type de démonstration avez-vous utilisé?*

Exercice 4.

1. *Suivant la définition par induction des entiers* $\mathbb{N}$*(vue dans le cours) donner une définition par récurrence de l'addition en utilisant la fonction successeur.*

2. *En utilisant l'addition donner une définition de la multiplication par récurrence.*

3. *Donner une définition par récurrence de la fonction factorielle.*

Exercice 5. *Où est l'erreur dans le raisonnement suivant ?*

1. *Soit* a *et* b *deux entiers non nuls, on pose :* $a = b$
2. *On multiplie chaque membre par* a *:* $a^2 = a \times b$
3. *On soustrait* b^2 *:* $a^2 - b^2 = a * b - b^2$
4. *On factorise :* $(a-b) \times (a+b) = b \times (a-b)$
5. *On divise par* $(a-b)$ *:* $a+b = b$
6. *Comme* $a = b$, *on remplace* a *par* b *:* $2b = b$
7. *On divise par* b *et on obtient* $2 = 1$.

Exercice 6. *Soit la preuve suivante :*

1. $x^2 - x + 1 = 0$.
2. $(1) \Leftrightarrow x^2 = (x-1)$.
3. $(1) \Leftrightarrow x(x-1)+1 = 0$
4. *On remplace dans (3)* $x-1$ *par* x^2 *d'après (2).*
5. *(3)* $\Leftrightarrow x^3 = -1$
6. *On obtient* $x = -1$.
7. *On trouve en remplaçant* x *par* -1 *dans (1)* $3 = 0$. *Trouver l'erreur dans ce raisonnement!*

Exercice 7. ***En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?!***
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

- *$\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.*
- *Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.*

  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- *On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.*

Exercice 8. *En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que :*

1. *La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.*
2. *La racine carré d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.*

Exercice 9. *A l'aide d'un raisonnement par contraposé, démontrer que :*

1. *Si $n^2, n \in \mathbb{N}$, est impair alors n est impair.*
2. *Soit a un réel. Si $\forall \epsilon > 0$ $a \leq \epsilon$ alors $a \leq 0$.*
3. *Soit a un réel. Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.*

Exercice 10.

1. *Partager un carré en 4 carrés, puis en $6, 7, 8, 9$ et 10 carrés.*
2. *Peut-on partager un carré en 3 ou 5 carrés?*
3. *Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence (de 3 en 3) que tout carré peut être partagé en n carrés, $n \geq 6$. Pour le plaisir, vous pouvez faire participer vos petits frères pour les deux premières questions.*

Exercice 11.

1. *Un tournoi de tennis commence aux 64 ème de finale avec 128 joueurs en lice. A la fin du tournoi, combien de matchs ont été joués?*
2. *Un tournoi avec 765 participants est organisé de façon telle les matchs font s'affronter 2 adversaires et que le gagnant va au tour suivant, alors que le perdant est éliminé. Si lors d'un tour, le nombre de participants est impair, le joueur sans adversaire passe automatiquement au tour suivant. Dans cette logique, combien de matchs se disputeront dans ce tournoi ?*

Exercice 12. *On rappelle q'une relation binaire est totale si pour tout x, il existe un y tel que x est en relation avec y. Montrer que toute relation binaire symétrique, transitive et totale est réflexive.*