

多层热传导模型的数值求解与思维创新

摘 要

本文研究了在高温环境下,多层材料构成的专用防护服及其内假人皮肤表面的温度分布情况,其实质是多层介质下的热传递问题。

对于问题一,我们综合考虑热传导和热辐射两种热传递方式,建立了偏微分方程模型,依次使用离散差分、RBF 配置、变分迭代三种手段求近似解。首先,由于热辐射对热传递过程的影响远小于热传导,我们对简化后的热传导方程进行讨论,使用一维热传导方程的第三类边界条件,结合两层材料交界面上的温度梯度关系,利用前项差分法求解出了多层介质下各点的温度分布规律;其次,我们利用 RBF 径向基函数配置逼近法,将偏微分方程转化为一套线性完备系统,为该问题的求解提供一种新思路;最后,我们运用泛函分析中的变分迭代原理,获得了多层介质下综合考虑热辐射和热传导的抛物型偏微分方程的收敛数值解。

对于问题二,我们利用第一问中的差分模型,获得第 II 层厚度与 60 分钟时的体表温度的变化关系,遵循效果最好、成本最低、厚度最薄的评价原则,以使得体表温度在 55 分钟时到达 44°C 的临界厚度值作为最优解。

对应问题三,我们先采用极端原理缩减优化算法的搜索空间,之后考虑用户体验和成本代价,以第 II 层与第 IV 层厚度之和最小为目标函数建模,采用改进的遗传算法求解模型,得出最优解,并结合 3D 温度热力图进行可视化处理。

由于前向差分法的稳定性与选取的时间和空间步长有关,因此我们对问题一的求解结果进行了稳定性分析。我们改造了 Crank—Nicolson 方法使之适用于求解多层热传导问题,由于该方法具有无条件稳定性,将求解结果与问题一中前向差分法结果进行比较,验证了我们所得到的温度分布的准确性。

关键词: 多层热传导模型、有限差分法、RBF配置、变分迭代、遗传算法

一、问题重述

1.1 问题背景

在高温作业中，专用的隔热防护服是必不可少的装备。一种常见的的专用服装由三层织物构成，且最内层与人体皮肤之间的空隙构成第四层。为设计专用服装，将内温控制在 37°C 的假人放在实验室模拟出的高温环境中，测得了一些假人皮肤外侧温度变化数据。为进一步降低资金和时间成本，现希望通过已有数据和相关的理论知识，建立数学模型，确定假人皮肤外侧温度变化并解决有关问题。

1.2 需要解决的问题

问题一：附件一给出了专用服装材料的部分参数值，附件二给出了在环境温度 75°C ，II层厚度为6mm、IV层厚度为5mm情况下所测得的90分钟内假人皮肤外侧温度数据。利用所给数据以及热力学原理，建立数学模型，计算专用服装即假人皮肤表面各层的数据分布，并生成数据表格。

问题二：当环境温度变为 65°C ，IV层厚度变为5.5mm且工作时间为60分钟时，在确保假人皮肤外侧温度不超过 47°C 且超过 44°C 的时间不超过5分钟的情况下，根据建立的数学模型，确定II层的最优厚度。

问题三：当工作时间为30分钟时，在确保假人皮肤外侧温度不超过 47°C 且超过 44°C 的时间不超过5分钟的情况下，综合确定II层和IV层的最优厚度。

二、问题分析

2.1 问题一

附件中给出了服装材料的相关参数以及假人皮肤表面的温度变化，要想得到各层的温度分布，需要建立外界到假人的热传递方程。热传递有热传导、热辐射和热对流三种方式，综合考虑实验所处环境和已知条件，可以首先忽略热对流和热辐射的影响，求解热传导方程。该问题的难点在于，由于每一层材料的边界条件不全，无法对每一层分别使用分离变量法求解。对于该方程的求解，我们提出了三种思路：

- 一种从热力学方程本身出发，利用有限差分法和相关热力学定律，求解出不同厚度处的温度分布。
- 另一种思路利用径向基函数的逼近性质，直接写出方程解的级数形式带回原方程进行倒推，结合已知条件及相关定理，确定出级数的各项系数。
- 我们也可以利用变分迭代的技巧讨论引入热辐射后一个完整热传递模型的数值解法。

2.2 问题二

在问题一中我们已经得到了温度分布规律，对于每一个给定的第II层厚度值，都可以得到对应的温度。因此我们可以按照题目规定的第II层厚度值范围，在一定精度下进行搜索，找出满足题目温度要求厚度值。再综合考虑服装的成本、舒适度等因素，即可得到厚度的最优解。

2.3 问题三

问题三与问题二求解思路类似，但由于有两层厚度值均无法确定，逐一进行遍历所需的

时间成本太高，为此，我们首先采用极端假设的方法，先将II层和IV层的厚度设成最大范围，求出对应另一方的满足题设条件的临界厚度，从而缩小搜索空间。

从理论物理模型的角度，介质厚度与隔热效果显见为正相关关系，但为结合实际生活，考虑用户体验与成本投资等诸多因素，我们以性价比最高为原则，以服装的总厚度最小为目标函数，利用遗传算法结合3D热力图求解II层和IV层的厚度最优值。

三、模型假设与约定

1、忽略热对流对热量传递的影响

由于实验采用的假人无生命体所具有的呼吸、排汗等新陈代谢现象，且服装材质紧密，与皮肤之间的空气层十分狭窄闭塞，因此可忽略气体流动对热量传递的影响，仅考虑热传导和热辐射两种方式。

2、热传导垂直于皮肤表面进行

热传导的方向为高温物体传向低温物体。由于热源均匀分布于整个实验空间内，因此热传导方向可视为垂直于假人皮肤表面进行，热传导方程是一维的。

3、专用服装的各层材质结构均匀且不变

假设服装同一层的各个位置均满足附件所给数据，且实验过程中未发生热溶解等现象。

4、忽略温度对材料比热容和热传导率的影响

由于温度对比热容和热传导率的影响较小且难以得到定量关系，为简化模型求解过程，在整个实验过程中，认为比热容和热传导率始终为一常量。

四、符号说明及名词定义

符号	说明
κ	材料的热传导率
C_A	材料的显热容
ρ	材料密度
c	材料的比热容
$T(x,t)$	t 时刻，距最外层 x 处的温度
ξ	材料的辐射系数
$F_L、F_R$	向左、向右热辐射量
l_i	第 i 层材料厚度

五、模型建立与求解

5.1 数据分析

为建立在热传导过程中温度的时空分布模型，既需要用“自顶向下”的方法，从物理本质、机理的角度解释现象，又需要用到“自底向上”的方法，从数据出发，得到经验公式与拟合模型，并试图从中挖掘出有意义的概念或变量，从而促进理论方面的建模工作。因此，我们首先从数据入手建立模型。

依据题目中给出的数据，可以得到在问题一设定的条件下，皮肤外侧温度随时间的变化曲线：

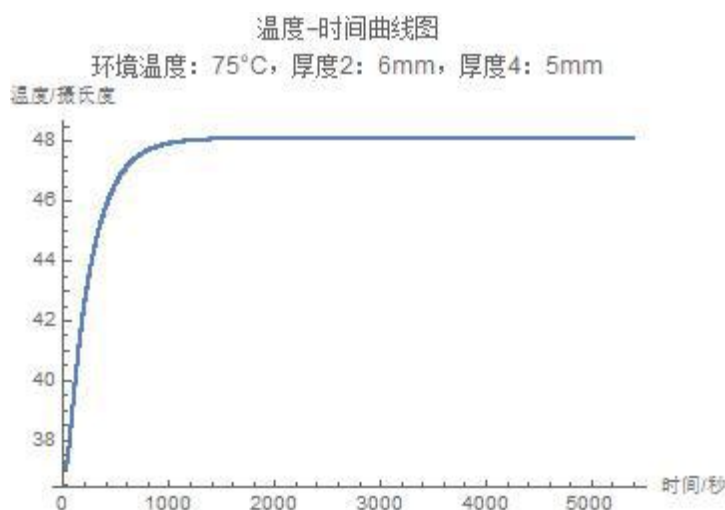


图 1 温度-时间曲线图

进一步仔细观察数据可以发现，温度-时间曲线大致可以分为四段：

- 从 0s~15s，皮肤外侧温度维持在体温 37°C 不变；
- 从 15s 到大约 45s，升温速度由慢转快；
- 从 45s 到大约 1645s，开始时温度迅速上升，随后温度变化趋于平缓；
- 从 1645s 到 5400s，温度达到稳态，保持不变。

重点研究第二、三段的曲线特性，可以得到体表温度随时间的分段变化规律。通过 Mathematica 进行数据拟合可以得到，第二段曲线近似服从指数变化规律：

$$T = 36.83 + 74.68e^{0.046t^* - 6.22}, \quad t^* = t - 14, \quad 15 \leq t \leq 45$$

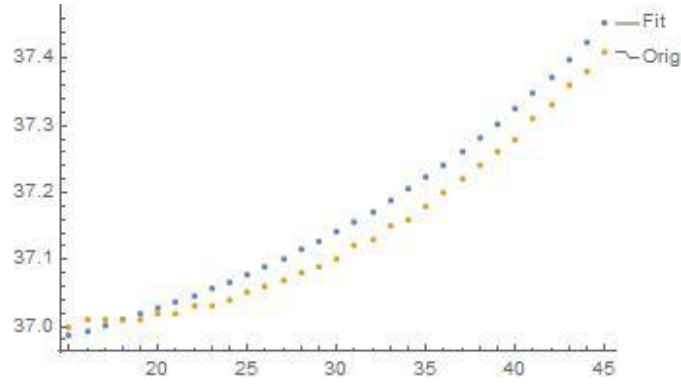


图 2 第二段曲线拟合图

对于第三段曲线，通过计算可以发现，在此时段内，大约每隔 158s，体表温度与最终稳态温度的温差减半。由体表温度与稳态温度的温差具有的“半衰期”性质，我们猜想第三段温度-时间曲线具有如下形式：

$$T = T_{\text{末}} - (T_{\text{末}} - T_{\text{初}}) e^{-\ln 2 \cdot \frac{t}{t_{1/2}}} = 48.08 - 11.08 e^{-\ln 2 \cdot \frac{t}{158}}$$

通过作图的方式验证温度-时间曲线的经验公式的公式的合理性：

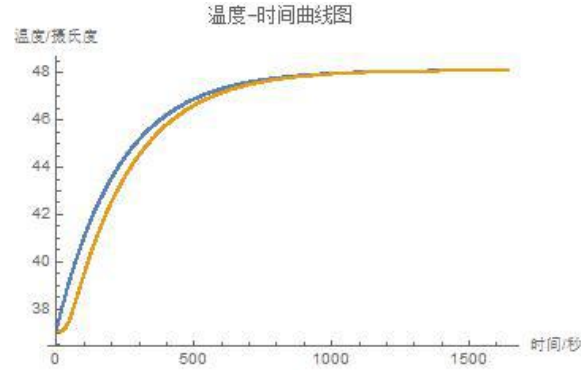


图 3 温度-时间经验公式曲线

其中黄色曲线为实测数据曲线，蓝色曲线为模型拟合数据曲线，由此可见，上述猜想的经验公式能够较好地反映实际的温度变化规律。

简单的多物理阶段模型：

通过对于实验数据的分析，我们认为，由环境通过多层材料与介质向人体传热的过程具有多个阶段：

阶段一，服装 I~III 层未充分受热，未达到热平衡状态，此时空隙层 IV 基本未受热，因而体表温度维持不变。

阶段二，III、IV 层交界面的温度动态上升，空隙层 IV 开始受热，体表温度开始增高。

阶段三，I~III 层基本达到稳态温度，III、IV 层交界面的温度比较稳定，第 IV 层由非稳态导热的非正规状况阶段转为非稳态导热的正规状况阶段^[1]。

阶段四，第 IV 层达到稳态温度，体表温度维持恒定。

5.2 问题一

5.2.1 模型的建立

根据假设1，该服装的热传递过程仅由热传导和热辐射决定。对于每一层材料，其热传递的一般规律相同，因此可建立每一层的热传递模型^[2]：

$$C_{Ai} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_{Li}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial F_{Ri}(x, t)}{\partial x}, (x, t) \in (0, l_i) \times (0, T) \quad (1)$$

其中 i 表示第 i 层, C_A 为材料的显热容, $C_A = \rho \cdot c$, κ 为材料的热传导率, l_i 为该层的厚度, β_i 为该层材料单位面积对辐射的吸收能力与黑体吸收能力的比值, F_L 、 F_R 分别为向左、向右的热辐射量, 且

$$\frac{\partial F_{Li}(x,t)}{\partial x} = \beta F_{Li}(x,t) - \beta_i \sigma T^4(x,t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_{Ri}(x,t)}{\partial x} = -\beta F_{Li}(x,t) + \beta_i \sigma T^4(x,t) \quad (3)$$

方程①的初始条件为:

$$T(x,0) = T_{初}(x), x \in (0,l) \quad (4)$$

$T_{初}(x)$ 为初始时刻不同厚度处的温度分布, $l = \sum_i l_i$, 为四层材料的总厚度。

边界条件为:

$$\begin{cases} T(x,t)|_{x=0} = T_0(t) \\ T(x,t)|_{x=l} = T_l(t) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $T_0(t)$ 为服装外表面温度, $T_l(t)$ 为空气层内表面温度。

5.2.2 模型求解

5.2.2.1 模型简化

在热传递过程中, 实验环境与假人皮肤表面温差较大, 因此热传导对热传递的影响要远大于热辐射。由于题目未给定专用服装各层织物的材料种类, 无法得到材料的辐射系数等相关参数, 为了简化模型, 我们首先只考虑一维热传导方程:

$$C_{Ai} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_i \frac{\partial T}{\partial x}), (x,t) \in (0,l_i) \times (0,T) \quad (6)$$

求解热传导方程最常用的方法是分离变量法, 由于每层的 C_{Ai} 和 κ_i 值不同, 该方法需要对每一层分别求解, 即需要每一层的初始条件和边界条件。由附件中所给数据只能得到 I 层外侧和 IV 层内侧的边界条件, 分离变量法无法求解。为此, 我们提出了两种模型进行求解, 第一种模型从方程式的角度出发, 结合物理背景及数学知识, 利用有限差分法求解方程; 另一种思路是从方程解的角度出发, 首先设出方程解的级数形式, 再由边界条件及相关热力学定理, 求解出级数解的各项系数。

5.2.2.2 第一类边界条件下的 matlab 模拟

利用⑤式的边界条件, 假设第一层外侧装温度为实验环境温度, 第四层材料内侧温度与假人温度相同, 即

$$\begin{cases} T(x,t)|_{x=0} = T_{env}(t) = 75 \\ T(x,t)|_{x=l} = T_{hum}(t) = 37 \end{cases}$$

根据能量守恒定律及傅里叶定律, 有:

$$dQ = -k_i \frac{\partial T_i}{\partial n_i} dS dt = -k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial n_{i+1}} dS dt$$

因而有交界面上的温度梯度关系:

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial n_i} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial n_{i+1}} \quad (7)$$

其中 i 表示第 i 层材料, k_i 、 k_{i+1} 分别为第 i 层、第 $i+1$ 层材料的热传导系数, $\frac{\partial T_i}{\partial n_i}$ 、 $\frac{\partial T_{i+1}}{\partial n_{i+1}}$ 分别为在第 i 层、第 $i+1$ 层界面处, 温度场沿界面法向的方向导数。

此外, 在第 i 层与第 $i+1$ 层界面处 $x_{i,i+1}$, 温度应满足连续性分布条件, 即

$$T_i(x_{i,i+1}, t) = T_{i+1}(x_{i,i+1}, t) \quad (8)$$

通过 Matlab 的 PDE 工具箱可以直接求解出在上述条件下达到稳态时的温度分布情况:

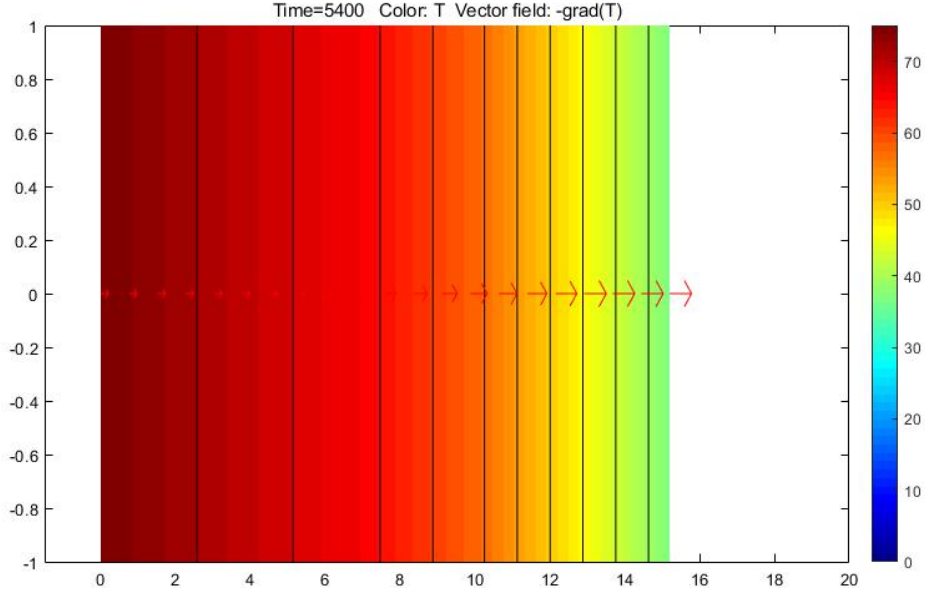


图 4 第一类边界条件下温度分布

从图中可以看出, 通过模型仿真得到的人体表面的空隙层IV的温度接近于 37°C , 这与实验数据测得的体表稳态温度 48.08°C 有较大的差异, 这说明上述模型假设与实际情况不符。

5.2.2.3 有限差分法求解

一、对流换热系数的引入

通过查阅相关资料, 我们发现, 与物体接触的 (流体) 介质的温度和物体表面的温度往往不相同^[3]。由 Newton 定律与 Fourier 定律有:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt = k_1 (T - T_1) dS dt$$

整理后得:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = k_1 (T_1 - T) \quad (9)$$

其中 k 为物体的热传导系数, $\partial T / \partial n$ 为物体一侧温度沿界面法向的方向导数, k_1 为介质的对流换热系数, T_1 为介质在界面处的温度。

上式表明, 为了使模型更好地符合实际, 需要在固体与流体的界面上引入热传导方程的第三类边界条件, 以此来替换第一类边界条件:

$$\left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial n} + \sigma T(x, t) \right]_{x=l} = g \quad (10)$$

二、前项差分法的引入

对于一维热传导问题, 常用的有限差分求解方法有前项差分法、后向差分法和克兰克-尼克尔森方法等。综合考虑结果的精确度和计算量, 本题选取前项差分法作为该题的求解方

法^[4]。

将待求解区域分成无数多个二维矩形网格,用每一个网格的温度近似代替该位置的真实温度,将温度在二维平面对空间和时间进行前项差分。

对于传统的单层热传导问题,两个边界条件均已知,对于每一个网格点,均可以按时间方向由前面已知的三个值确定。求解思路如图所示,其中红色点代表已知点,灰色点代表待求解的点。

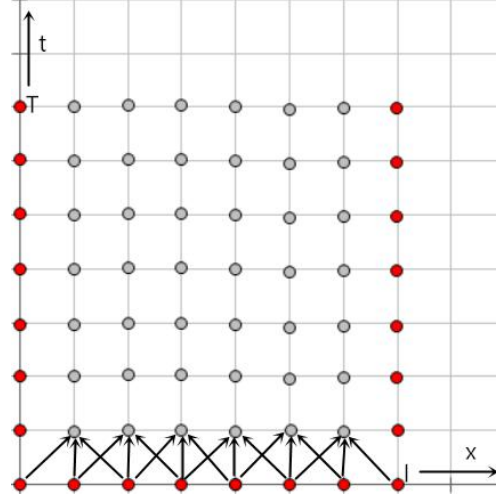


图 5 传统的前项差分方法

首先将时间和空间网格化,设空间步长为 h ,时间步长为 τ ,用 T_{ij} 表示 (x_j, t_k) 处的近似解,

对于前项差分法,时间和空间步长的取值会直接影响解的稳定性。我们可以用 Von Neumann 稳定性分析的方法对于前向差分法求解偏微分方程得到的解的稳定性进行分析。相关结论^[5]告诉我们,当 $2ck < h^2$ 时,前向差分方法稳定。其中 k 为 t 轴方向的网格步长, h 为 x 轴方向的网格步长, c 为偏微分方程 $\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 的系数。

在本问题中,必须保证 x 轴方向的网格精度。否则,求解第二问、第三问的搜索精度将无法保证。然而,在稳定性条件 $2ck < h^2$ 的约束下, x 轴方向上的网格精度每提高 10 倍, t 轴方向上的网格精度就需要提高 100 倍。为保证 x 轴方向上的网格精度,同时控制总的求解运算量,我们对于第一问,给出网格步长如下:

第 I ~III 层: x 轴方向上的步长为 0.1mm, 第四层, x 轴方向上的步长为 1mm。时间轴上的步长统一设定为 0.01s。

经一系列推导可以得到,在时间方向上的每一项可以由前项表示为:

$$\begin{aligned} T_{j,k+1} &= T_{j,k} + \frac{\kappa_i \tau}{h^2} (T_{j+1,k} - 2T_{j,k} + T_{j-1,k}) \\ &= rT_{j+1,k} + (1-2r)T_{j,k} + rT_{j-1,k} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $r = \frac{\kappa_i \tau}{h^2}$,在同一种材料中为常数。

在该问题中,由于边界条件不足,对于每一层的边界处,只有两个前项值已知,不足以用来求解,因此首先用前项差分求出每层内部网格的温度,再利用有关定律,确定出边界处网格的值。

Step 1: 做一次前项差分,对于每层内部的网格,仍然可以通过三组值确定每个网格的值,其求解过程与传统前项差分方法一致,示意图如下所示。

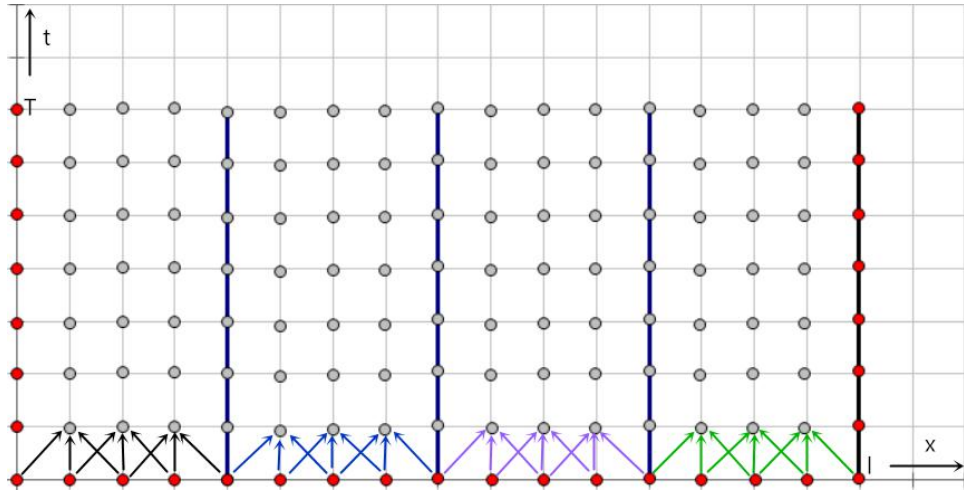


图 6 四层前项差分法步骤一

Step 2: 由⑦式，交界面上的温度梯度关系为

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial n_i} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial n_{i+1}}$$

利用该关系式可获得边界处的温度值。

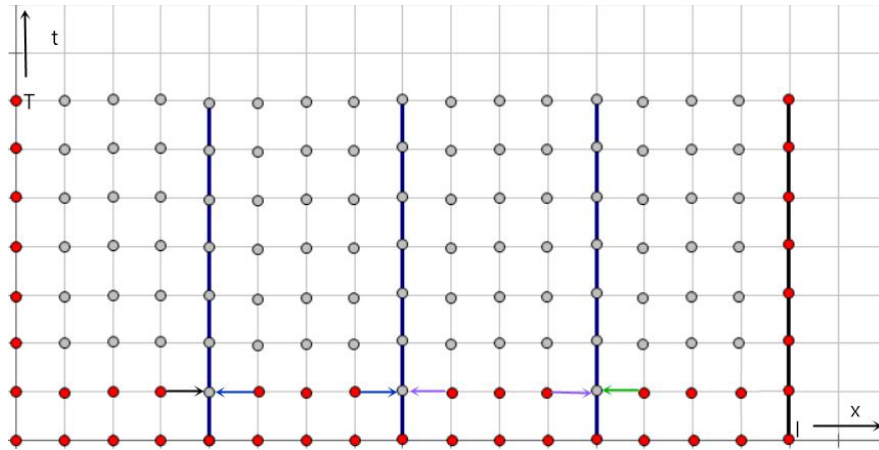


图 7 利用热传导定律求解每层边界处温度分布

Step 3: 重复 step 1 和 step 2，直到获得 T 时刻的温度分布

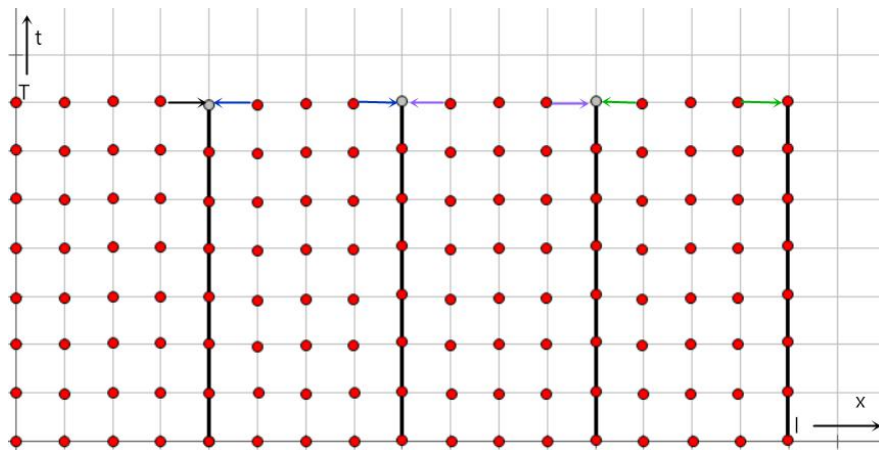


图 8 得到全部温度分布

三、不同层数和参数模型的引入

在本题描述的情景下，服装 I 层与外界环境、服装 III 层与空隙层 IV、空隙层 IV 与人体的交界面均属于固体与流体的交界面。为了使得模型在符合实际的同时保持简洁性，我们仅在关键的交界面上引入第三类边界条件，对于其它的交界面，我们忽略介质与物体的温度差。

以下，我们分别建立了单层单参模型、双层单参模型、双层双参模型和三层模型，并比较了它们对于实际情况的解释力。

1、单层单参模型：

与原始模型类似地，我们引入服装 I 层与外部环境的交界面 $x=0$ 上的温度边值条件：

$$T(x,t)|_{x=0} = T_{env}(t) = 75$$

引入 I-II、II-III、III-IV 的交界面上的温度梯度关系：

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial n_i} \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial n_{i+1}} \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} \quad (i=1,2,3)$$

以及 I-II、II-III、III-IV 的交界面上的温度连续性条件：

$$T_i(x,t) \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} = T_{i+1}(x,t) \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} \quad (i=1,2,3)$$

与原始模型不同，假设空隙层 IV 与人体的交界面上满足第三类边界条件：

$$k_4 \frac{\partial T_4}{\partial n} = k_{s1} (T_{hum} - T_4|_{x=l})$$

其中 k_{s1} 为空隙层 IV 与人体界面之间的对流换热系数。这样，便可以解释人体内部相对稳定的温度 $T_{hum} = 37$ 与人体表面的介质温度 $T_4|_{x=l}$ 之间的较大差异。

这样，在本模型中有一个满足第三类边界条件的界面，有一个待定参数 k_{s1} 。

2、双层单参模型：

单层单参模型已经能够解释人体内部温度与人体表面介质温度之间的差异，但对于发生在各固-气界面上的热传导、热交换过程的物理细节仍多有忽略，因此，单层单参模型与实际情况仍可能有一定的偏差。为增加模型的解释力，我们陆续将服装 III 层与空隙 IV 层的交界面以及服装 I 层与环境的交界面的热交换过程考虑进来，建立双层单参、双层双参以及三层模型。

在双层单参模型中，服装 I 层与外部环境的交界面 $x=0$ 上的温度边值条件不变：

$$T(x,t)|_{x=0} = T_{env}(t) = 75$$

I-II、II-III 的交界面上的温度梯度关系不变：

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial n_i} \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial n_{i+1}} \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} \quad (i=1,2)$$

I-II、II-III 的交界面上的温度连续性条件不变：

$$T_i(x,t) \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} = T_{i+1}(x,t) \bigg|_{x=\sum_{j=1}^i l_j} \quad (i=1,2)$$

空隙层 IV 与人体的交界面上满足第三类边界条件不变：

$$k_4 \frac{\partial T_4}{\partial n} = k_{s1} (T_{hum} - T_4|_{x=l})$$

在双层单参模型中，我们额外假设服装 III 层与空隙 IV 层的交界面上满足第三类边界条

件，且界面III-IV的对流换热系数 k_{s2} 与人体-空隙IV层界面的对流换热系数 k_{s1} 相等，即：

$$k_3 \frac{\partial T_3}{\partial n} = k_{s2} (T_3 - T_4) \Big|_{x=l_1+l_2+l_3},$$

$$k_{s1} = k_{s2}$$

这样，在双层单参模型中，我们引入了两个满足第三类边界条件的界面，同时引入了一个待定参数 k_{s1} 。

3、双层双参模型：

在双层单参模型的基础上，我们假设III-IV界面的对流换热系数 k_{s2} 和人体-空隙IV层界面的对流换热系数 k_{s1} 不相等，即我们假设：

$$k_3 \frac{\partial T_3}{\partial n} = k_{s2} (T_3 - T_4) \Big|_{x=l_1+l_2+l_3}$$

其余模型假设与双层单参模型相同，这样，我们就得到了双层双参模型，该模型引入了两个满足第三类边界条件的界面，同时考虑了两个界面上待定的对流换热系数 k_{s1} 、 k_{s2} 。

4、三层模型：

最后，我们把外部环境 with 服装 I 层界面上的热交换过程考虑进来，认为在外部环境 with 服装 I 层界面上满足第三类边界条件：

$$k_{s3} (T_{env} - T_1 \Big|_{x=0}) = k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}$$

其中 k_{s3} 为外部环境 with 服装 I 层之间的对流换热系数。

除了外部环境 with 服装 I 层界面上的边界条件以外，我们令其余模型假设与双层双参模型相同，就得到了描述环境-服装-人体间传热过程的三层模型。该模型中考虑了全部固-气界面上可能的温度突变问题，该模型包含了三个待定的参数 k_{s1} 、 k_{s2} 、 k_{s3} 。

四、模型参数的评价准则：

我们需要验证各模型的仿真结果与实际数据的拟合程度，以确定哪些物理过程属于次要因素，可以忽略，而哪些物理过程是主要因素，必须考虑，由此建立起一个既符合实际，又做出必要简化假设的优化模型。

由于我们研究的是服装的高温防护效果问题，因此我们首要研究的变量是人体表面处的温度-时间变化曲线。

结合第二问的题目要求以及现实考虑，如果按照模型预测的体表温度值低于实际情况下的体表温度值，则该模型会使得高温防护性能不合格的产品通过检验，这将给高温作业人员带来极大的风险与伤害，因此，提出准则一：

$$T_{p_1, \dots, p_n}^* (l, t) - T(l, t) \geq 0$$

其中 $x=l$ 是模型中的体表边界， T_{p_1, \dots, p_n}^* 表示以 p_1, \dots, p_n 为参数的模型预测的温度-时空分布， T 表示实际情况下的温度-时空分布。准则一的意义是，为保护高温作业人员，只允许模型对温度做出高估，而不允许模型对温度做出低估。

另一方面，过于严格的检验标准将使得开发高温防护服的技术难度和资金成本大大增加，因此我们要求模型对于温度的预测要尽量准确。由此，我们提出准则二：

$$\int_0^\infty |T_{p_1, \dots, p_n}^* (l, t) - T(l, t)| dt \text{ 达到最小值}$$

在这样的模型评价准则下，我们基本能够兼顾技术研发人员、生产销售部门与实际高温作业人员的需要，筛选出具有安全性、经济性、性价比高的防护服产品。

在实际操作中，准则二的 $\int_0^\infty |T_{p_1, \dots, p_n}^* (l, t) - T(l, t)| dt$ 对于参数 p_1, \dots, p_n 的极值点不容易确定，我们可以运用更为直观的变量替代准则二，作为模型的评价标准：

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} T_{p_1, \dots, p_n}^*(l, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(l, t) \\ \sup_{t \in (0, \infty)} (T_{p_1, \dots, p_n}^*(l, t) - T(l, t)) \text{ 达到最小值} \end{cases}$$

五、模型参数的确定与评价：

通过查阅资料我们知道，在自然对流条件下，空气与其它材料构成的界面上的对流换热系数约为 $5 \sim 25 W / (m^2 \cdot K)$ ，这为我们限定了参数搜索的合理范围。

通过逐步调整模型参数，可以确定，在单层单参模型假设下，当空隙层IV与人体的界面上的对流换热系数 $k_{s1} = 8.6 W / (m^2 \cdot K)$ 时，模型对实际情况的拟合程度最高，此时体表温度-时间关系的实际情况和拟合曲线分别如下图所示：

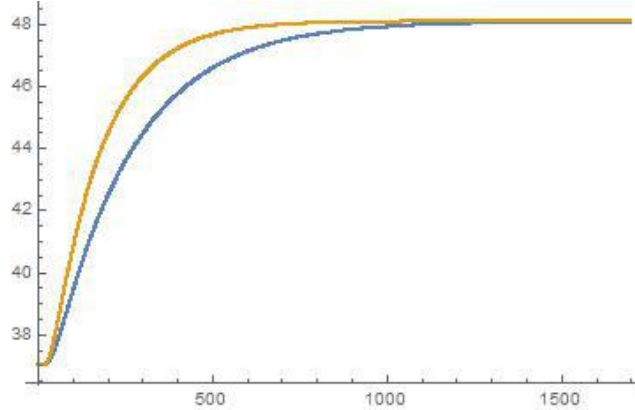


图 9 单层单参模型拟合结果

此时， $T^* - T$ 的最大值约为 2.011， $t = 1700s$ 时， $T^* - T = 0.011$ 。

由此可见，在单层单参模型假设下，模型预测的温度-时间关系与实际情况拟合程度较高，但仍有一部分误差是模型无法解释的，这提示我们应当对模型的物理过程做出更为复杂的假设。

在双层单参模型假设下，当空隙层IV与人体的界面对流换热系数 k_{s1} 、空隙层IV与第III层的界面对流换热系数 k_{s2} 满足 $k_{s1} = k_{s2} = 11 W / (m^2 \cdot K)$ 时，模型对于实际情况的拟合程度最高，此时体表温度-时间关系的实际情况和拟合曲线分别如下图所示：

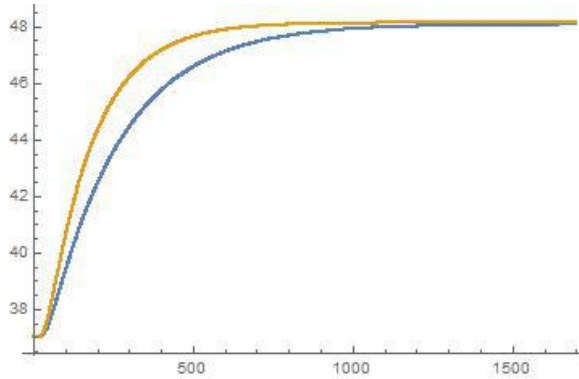


图 10 双层单参模型拟合结果

此时， $T^* - T$ 的最大值约为 1.882， $t = 1700s$ 时， $T^* - T = 0.058$ 。

受限于搜索精度，我们无法对 $t = 1700s$ 时 $T^* - T$ 的值做出进一步的优化，但通过单层单参模型与双层单参模型的 $T^* - T$ 的最大值的比较，我们仍然可以认定，双层单参模型对于实际物理过程的解释更加准确，因此，相对于单层单参模型，双层单参模型的解释力更高，预测精度更好。

在双层双参模型假设下，当空隙层IV与人体的界面对流换热系数 $k_{s1} = 9.5 W / (m^2 \cdot K)$ ，空隙层IV与第III层的界面对流换热系数 $k_{s2} = 20 W / (m^2 \cdot K)$ 时，

模型与实际情况拟合程度较好，此时体表温度-时间关系的实际情况和拟合曲线分别如下图所示：

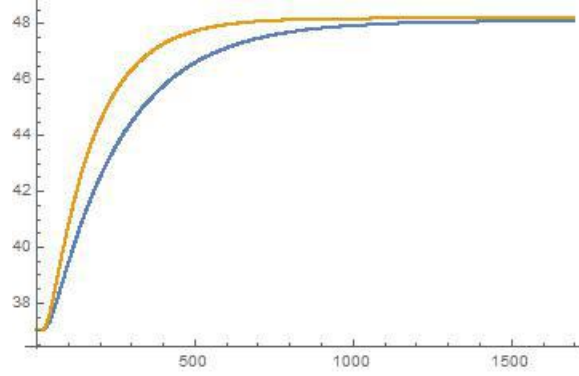


图 11 双层双参拟合结果

此时， $T^* - T$ 的最大值约为 2.011， $t = 1700s$ 时， $T^* - T = 0.0997$ 。

对双层双参模型进行参数搜索时，我们发现，相比于双层单参模型，双层双参模型的参数复杂度提高了，但模型预测的准确度没有显著的改变，且我们对于 k_{s1} 、 k_{s2} 的相对大小的设定比较随意，缺乏实证的支撑，由此我们可以看出，双层双参模型并不比双层单参模型更为优越。

在三层模型的假设下，我们认为服装 I 层与外部环境的接触界面上的空气流动性较强，因而对流换热系数 k_{s3} 的值相对较大；相反地，空隙层 IV 与人体、空隙层 IV 与第 III 层的界面上的空气流动性较弱，因而对流换热系数 k_{s1} 、 k_{s2} 的值相对较小。为定性分析方便起见，我们取 $k_{s1} = k_{s2} = 9W / (m^2 \cdot K)$ ， $k_{s3} = 25W / (m^2 \cdot K)$ ，通过数值计算进行仿真，得到在此参数条件下温度的时空分布图：

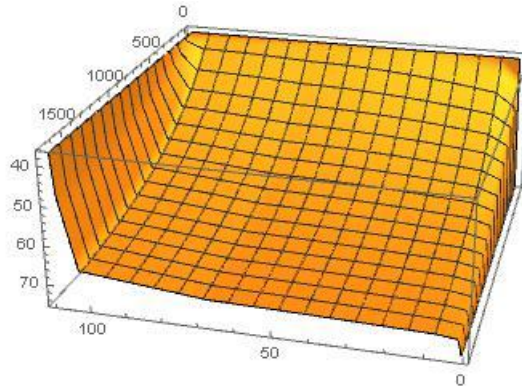


图 12 三层模型下温度的时空分布图

由此可见，外部环境 with 服装界面上出现了较大的温度突变，服装内部各层升温缓慢，从定性分析的角度看，在 0~1700s 的时限内，其升温曲线处于非稳态导热的非正规状况阶段，也就是前文论述过的升温过程的阶段二。上述情况与实际情况明显不符，这提示我们三层模型不适合用于此类现实问题的求解。

通过上述模型比较我们可以看出，双层单参模型是兼具解释力与简洁性的最优模型。在双层单参模型中，空隙层 IV 与人体、服装 III 层的两个界面上都满足第三类边界条件，这能够体现出空气绝热层实现衣物与人体间“小气候”的实际情况。另一方面，双层单参模型的参数简单，无需大量主观猜测，这也是双层单参模型的优势所在。因此，在下文中对于模型的数值求解过程中，我们都运用双层单参模型进行求解、计算，其中对流换热系数取 $k_{s1} = k_{s2} = 11W / (m^2 \cdot s)$ 。

依据双层单参模型，我们给出第一问的求解结果：

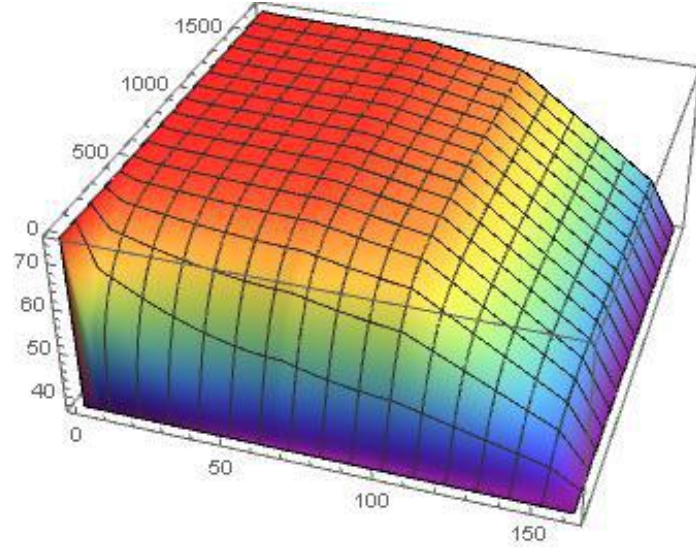


图 13 第一问求解结果

5.2.2.4 径向基函数逼近法求解

对于偏微分方程的直接求解一直是比较困难的问题。由上述有限差分法的求解过程可以看出，直接从热力学原理出发，正推出较为精确的最终结果，对于近似计算的方法以及边界调节等要求十分严格。因此，我们提出了另外一种思想，直接设出最终的结果带回，并结合已知条件和相关原理，从而确定出待定系数。

对于每一层分别列写偏微分方程，理论上可以得到解析解。利用径向基函数的逼近性质，将方程的解写为级数形式，则第 i 层的解可以表示为：

$$T_i(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i,k} \varphi_{i,k}(x, t)$$

其中 $T_i(x, t)$ 为第 i 层的温度分布函数， $\alpha_{i,k}$ 为第 i 层级数展开式的第 k 项系数， $\varphi_i(x, t)$ 表示人为选取的径向基函数。

为了实现计算机求解，选取无穷级数的前 m_i 项近似代替方程的解，则第 i 层的解可简化为

$$T_i(x, t) = \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_{i,k} \varphi_{i,k}(x, t) \quad (12)$$

认为该级数解可以分离变量：

$$T_i(x, t) = \sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k} X_{i,k}(x) \cdot \sum_{k=1}^{m_i} \mu_{i,k} Y_{i,k}(t) + c \quad (13)$$

在每一点处的温度不能发生跳变，则由温度的连续性，有

$$\sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k} X_{i,k}(x_{i,i+1}) = \sum_{k=1}^{m_{i+1}} \lambda_{i+1,k} X_{i+1,k}(x_{i,i+1}) \quad (14)$$

$x_{i,i+1}$ 表示第 i 层和第 $i+1$ 层的交界位置。

与⑦式同理，有

$$\kappa_i \sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k} \frac{\partial X_{i,k}}{\partial n} = \kappa_{i+1} \sum_{k=1}^{m_{i+1}} \lambda_{i+1,k} \frac{\partial X_{i+1,k}}{\partial n} \quad (15)$$

带入边界条件：

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1,k} X_{1,k}(0) \sum_{k=1}^{m_1} \mu_{1,k} Y_{1,k}(t) + c = T_0(t) \\ \sum_{k=1}^{m_4} \lambda_{4,k} X_{4,k}(l) \sum_{k=1}^{m_4} \mu_{4,k} Y_{4,k}(t) + c = T_l(t) \end{cases} \quad (16)$$

$T_0(t)$ 为第一层材料外层温度, $T_l(t)$ 第四层材料内侧温度。

规定初始时刻有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m_1} \mu_{1,k} Y_{1,k}(0) = 0 \\ \sum_{k=1}^{m_4} \mu_{4,k} Y_{4,k}(0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

可以确定出 c 的值为 37°C 。

将级数解带入原方程, 等式应成立:

$$C_{Ai} \sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k} X_{i,k}(x) \sum_{k=1}^{m_i} \mu_{i,k} \frac{dY_{i,k}}{dt} = \kappa_i \sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k} \frac{d^2 X_{i,k}}{dx^2} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_{i,k} Y_{i,k}(t) \quad (18)$$

联立方程⑬-⑱, 由该线性方程组的完备性, 理论上可求解出式⑬, 得到温度分布的级数形式。

5.2.3 模型优化

忽略热辐射的影响会对温度分布结果造成一定偏差, 现重新考虑方程①, 即

$$C_{Ai} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_{Li}(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial F_{Ri}(x,t)}{\partial x}, (x,t) \in (0, l_i) \times (0, T)$$

将方程②、③带入该方程, 整理可得:

$$\begin{aligned} C_{Ai} \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(k_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \beta_i^2 \sigma e^{\beta_i x} \left[\int_0^x e^{-\beta_i y} T^4(y,t) dy + c_2 \right] \\ & + \beta_i^2 \sigma e^{-\beta_i x} \left[\int_0^x e^{\beta_i y} T^4(y,t) dy + c_1 \right] - 2\beta_i T^4(x,t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 = & \frac{\xi_{i1}}{\beta_i} T^4(0,t) - (1 - \xi_{i1}) c_2 \\ c_2 = & \frac{1}{(1 - \xi_{i2}) \beta_i (1 - \xi_{i1}) e^{-\beta_i l} - \beta_i e^{\beta_i l}} \left[(1 - \xi_{i2}) \beta_i e^{-\beta_i l} \int_0^l e^{\beta_i x} T(x,t) dx \right. \\ & \left. + \beta_i e^{\beta_i l} \int_0^l e^{\beta_i x} T(x,t) dx + (1 - \xi_{i2}) \xi_{i1} e^{-\beta_i l} T^4(0,t) + \xi_{i2} T(l,t) \right] \end{aligned}$$

ξ_1, ξ_2 为织物内、外覆盖从层的辐射系数^[6]。

该方程可以使温度分布的解更加精确, 但其形式非常复杂, 为此我们选用变分迭代法讨论该方程的具体求解方法。

首先, 我们写出问题的一般形式:

$$\begin{aligned} T_i &= k_1 T_{xx} + q_1 T_x + f_1(x,t), x \in (0, l_1), t \in (0, T] \\ T_i &= k_2 T_{xx} + q_2 T_x + f_2(x,t), x \in (0, l_2), t \in (0, T] \\ T_i &= k_3 T_{xx} + q_3 T_x + f_3(x,t), x \in (0, l_3), t \in (0, T] \\ T_i &= k_4 T_{xx} + q_4 T_x + f_4(x,t), x \in (0, l_4), t \in (0, T] \end{aligned}$$

初始边界条件为:

$$T(0,t) = h_1(t), t \in (0, T]$$

$$T(\sum_{i=1}^4 l_i, t) = h_2(t), t \in (0, T]$$

使用变分迭代法求解该方程组，用到的一对变换如下：

$$w(x,t) = T(x,t)e^{\left(\frac{q}{2}x\right)} r(t)$$

$$r(t) = e^{-\int_0^t (p(s) - \frac{q^2}{4}) ds}$$

应用该变换将原始抛物型转化为下列问题：

$$w_t = w_{xx} + r(t)e^{\left(\frac{q}{2}x\right)} f(x,t), x \in (0,1), t \in (0, T]$$

$$w(0,t) = h_1(t)r(t), t \in (0, T]$$

$$w(\sum_{i=1}^4 l_i, t) = h_2(t)r(t)e^{\left(\frac{q}{2}\right)}, t \in (0, T]$$

显见初始问题与转化后的问题等价，根据变分迭代法，考虑如下形式的 t -方向的校正泛函：

$$w_{n+1}(x,t) = w_n(x,t) + \int_0^t \lambda \left[\frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} - \overline{w_{nxx}}(x,\tau) - \frac{\overline{w_n(x^*,\tau)}}{E(\tau)} e^{\left(-\frac{q}{2}x^*\right)} e^{\left(\frac{q}{2}x\right)} f(x,\tau) \right] d\tau$$

其中 λ 是广义 Lagrange 乘子，其解通过变分原理得到； w_0 为初始近似值， $\overline{w_n}$ 为限制变分，

为了得到其最优解，我们对上述方程进行变分，最后得到迭代公式为：

$$w_{n+1}(x,t) = w_n(x,t) - \int_0^t \left[\frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} - \overline{w_{nxx}}(x,\tau) - \frac{\overline{w_n(x^*,\tau)}}{E(\tau)} e^{\left(-\frac{q}{2}x^*\right)} e^{\left(\frac{q}{2}x\right)} f(x,\tau) \right] d\tau \quad (20)$$

由此，我们可在理论上得到该问题的收敛近似解。

由于服装的三层材料均未知，无法得到与辐射问题相关的具体参数值，且热辐射对整个热传递过程的影响不大，因此这里我们不对该方程进行具体求解。但若将热辐射过程引入热传递方程，理论上会使 5.2.2 中求解出的温度分布曲线更接近于实际值，具有研究意义。

5.3 问题二

5.3.1 模型的建立

本题所需满足的条件为：60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。首先，我们说明 55 分钟时 $T < 44^\circ\text{C}$ 与该题干要求互为充要条件：

- 如果 55 分钟时 $T > 44^\circ\text{C}$ ，则显然不满足题意；
- 如果 55 分钟时 $T < 44^\circ\text{C}$ ，满足题干中第二个条件，而由假人表面皮肤外侧的温度分布在 60min 左右时呈现指数型衰减，观察 5.1 数据分析中提到的半衰期，易得此时假人皮肤外侧的温度明显无法达到 47°C ；

故证毕。

接下来，我们遵循效果最好，厚度最薄，成本最低的原则，利用问题一中的差分模型，调整第 II 层的厚度参数，使得假人体表温度在 55min 时达到 44°C 的临界点，以此作为第 II 层的最优厚度参数。

5.3.2 模型的求解

利用问题一中得到的温度分布，以 0.1mm 为精度进行搜索，可以得到第 II 层不同厚度值下 55min 和 60min 时的温度值。部分温度值数据以及温度曲线分别如下所示：

表 1 第 II 层不同厚度值下 55min 和 60min 时的温度值

第 II 层厚度	55min 时温度	60min 时温度
0.007	44.6383	44.6383
0.008	44.6117	44.6177
0.012	44.5032	44.5032
0.0190	44.0971	44.1638
0.0195	44.0449	44.1201
0.0197	44.023	44.1017
0.198	44.0118	44.0923
0.0199	44.0005	44.0828
0.020	43.9891	44.0732

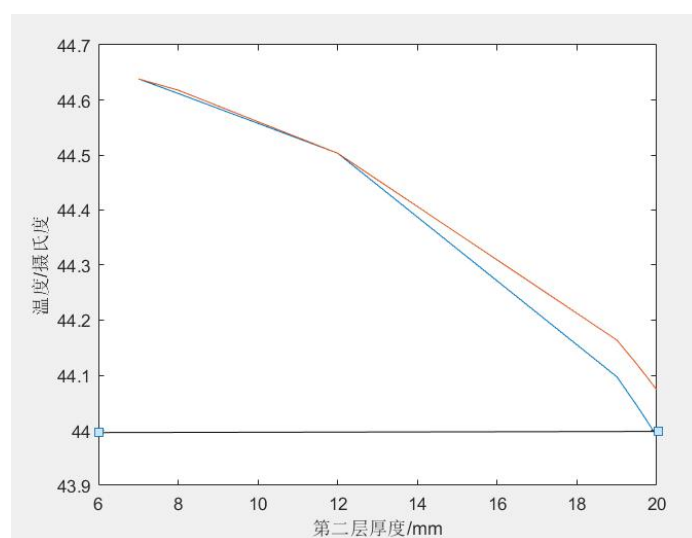


图 14 第 II 层不同厚度值下 55min 和 60min 时的温度分布

故在题设要求下，我们利用前向差分离散化求解的手段，发现 55min 时体表恰达到 44°C 的第 II 层的最优厚度约为

$$l_2 = 19.8mm$$

5.4 问题三

5.4.1 模型的建立

问题三需要同时确定第二层和第四层的厚度，仍然利用问题一中所得温度分布结论进行搜索，选出最优解。若以 0.1mm 为精度进行搜索，搜索量十分巨大。因此，我们首先采用极端假设的方法，先将 II 层和 IV 层的厚度设成最大范围，求出对应另一方的最优厚度，进而缩小搜索空间，提高运行效率。

首先，我们假设 IV 层的厚度为最大：6.4mm，则 II 层的厚度-温度变化图如下所示：

表 2 $l_4 = 6.4mm$ 时 II 层的厚度-温度变化

厚度	0.007	0.008	0.012	0.019	0.0195	0.197	0.198	0.02
55 分钟 后温度	44.6383	44.6117	44.5032	44.0971	44.0449	44.023	44.0118	43.9891
60 分钟 后温度	44.6383	44.6177	44.5032	44.1638	44.1201	44.1017	44.0923	44.0732

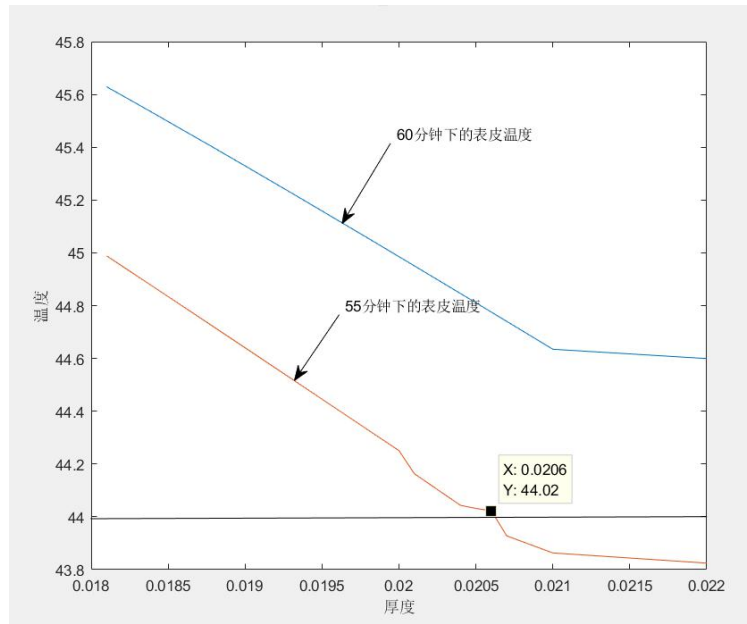


图 15 $l_4 = 6.4mm$ 时 II 层的厚度-温度变化

易得：此时II层的最优厚度为20.63mm。

接着，我们假设II层的厚度为最大：25mm，则IV层的厚度-温度变化图如下所示：

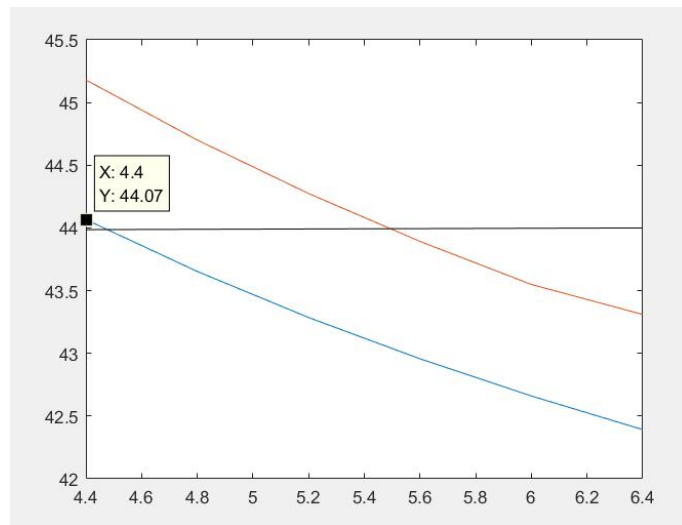


图 16 $l_2 = 25mm$ 时 IV 层的厚度-温度变化

易得：此时IV层的最优厚度为4.47mm

最后，我们得到了计算性能允许下的合理搜索范围：

$$d_4 \in (4.47, 6.4), d_2 \in (20.63, 25) (\text{单位: } mm)$$

5.4.2 模型的求解

我们结合题设与生产成本、生活经验，使用遗传算法，综合得出应有的解，，步骤如下：

1、随机选取II层的厚度 l_2 ，IV层的厚度 l_4 ，若

$$|T_{t=25} - 44| > \epsilon \text{ 或者 } T_{t=30} > 47$$

即某厚度值不满足题设条件，则将目标函数值加上惩罚值，使个体在寻求目标函数最小值的竞争过程中趋向于被淘汰。

2、在满足防护条件的情况下，服装材料越薄生产成本越低，且舒适度更高，因此在被

选择的下一代个体中，以 $\min(l_2 + l_4)$ 为目标函数进行迭代进化。

3、最后得到最优解

程序运行结果的三维图和俯视图如下所示。水平面上的纵横坐标分别为第 II 层和第 IV 层的厚度值，z 轴为这种厚度状态下的表皮温度。

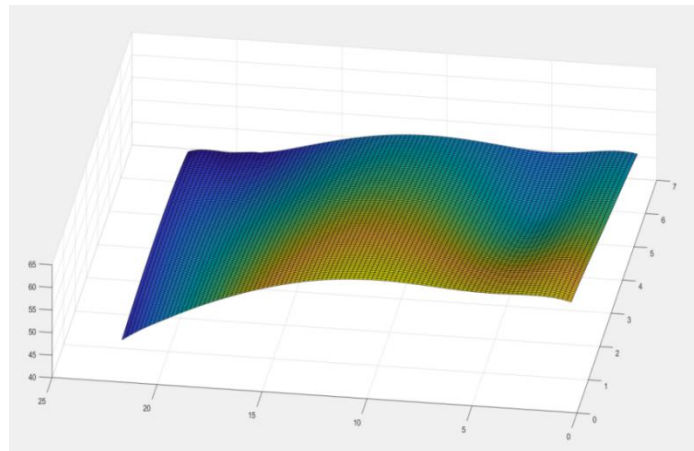


图 17 表皮温度与第 II 层、第 IV 层的厚度值的关系

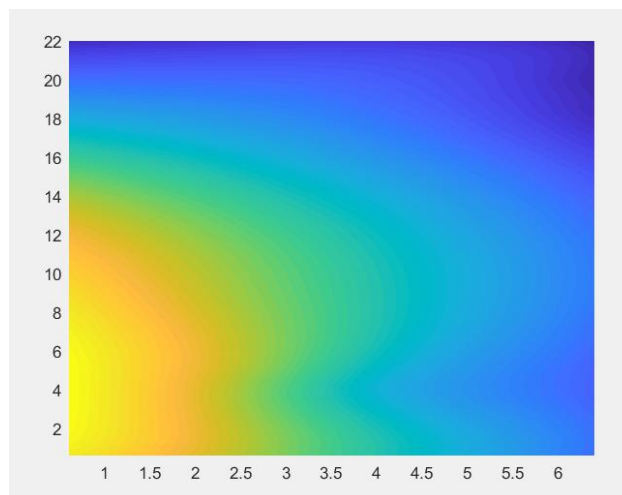


图 18 温度分布俯视图

我们选取 $z=44$ 作为横截面，位于截面 $z=44$ 之下为可以选择的点。

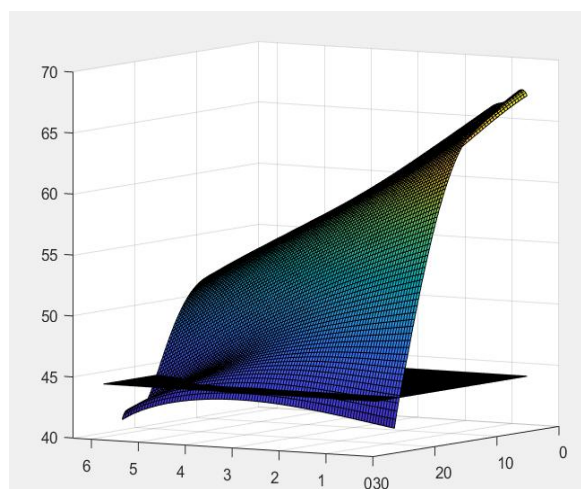


图 19 作出表皮温度为 44 度时的平面

遵循 $l_2 + l_4$ 最小的原则，我们做分界面的切线，得到的最优解答为：

$$l_2 = 21.0mm, l_4 = 5.9mm$$

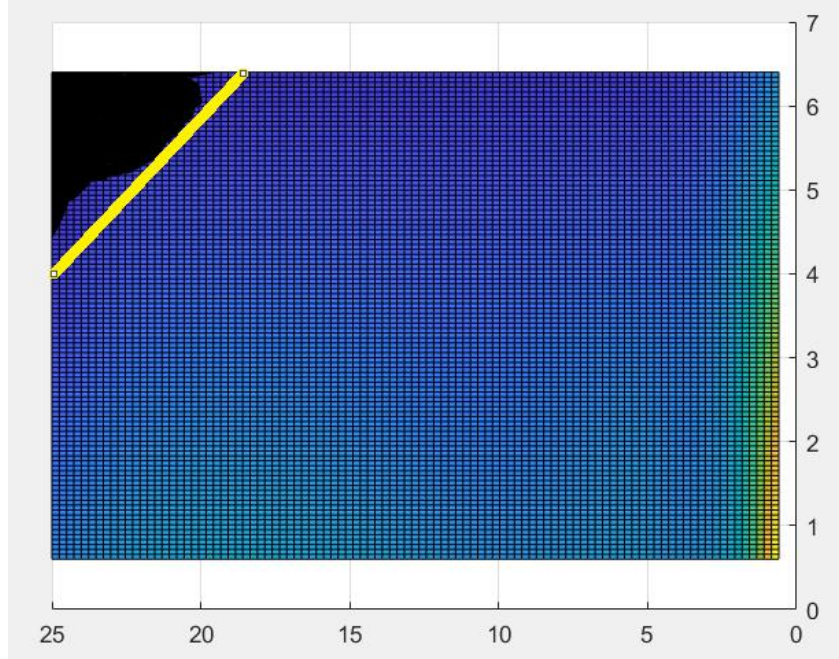


图 20 作出分界面的切线，切点即为最优解

六、稳定性分析

在问题一中，考虑到程序的运行效率，我们采用前向差分法。这种算法的公式相对简单，运行效率较高，但稳定性无法得到保证。因此，我们采用Crank—Nicolson差分法^[7]检验前向差分法的稳定性。该模型具有无条件稳定性，我们设计了求解多层介质的Crank—Nicolson差分法，求出温度分布，与前向差分所得结果进行对比，从而检验前向差分法所得结果的稳定性。

普通 Crank—Nicolson 差分法的求解思路为：仍然将待求解区域分成无数多个二维矩形网格，空间步长为 h ，时间步长为 τ ，设每一个网格的温度为 $T(j \cdot h, k \cdot \tau)$ ，用网格温度近似代替该位置的真实温度，记做 $T_{j,k}$ 。将温度在二维平面对时间进行 $t_{k+1/2}$ 的中间差分，对空间 x_j 进行二阶中央差分，则方程可离散化为：

$$\frac{T_{j,k+1} - T_{j,k}}{\tau} = \frac{\kappa_i}{2h^2} [(T_{j+1,k+1} - 2T_{j,k+1} + T_{j-1,k+1}) + (T_{j+1,k} - 2T_{j,k} + T_{j-1,k})]$$

引入变量 $r = \frac{\kappa_i \tau}{2h^2}$ ，则对于每一层介质， r 为一常量。将 r 带入方程上式，整理得：

$$-rT_{j+1,k+1} + (1+2r)T_{j,k+1} - rT_{j-1,k+1} = rT_{j+1,k} + (1-2r)T_{j,k} + rT_{j-1,k}$$

位于每一层的边界处的网格，同样借助边界温度梯度相等，即：

$$-\kappa_i \frac{\partial T_{j,k}}{\partial x} = -\kappa_{i+1} \frac{\partial T_{j,k}}{\partial x}$$

可得到第 i 层与第 $i+1$ 层交界处的温度值。

下面将 Crank-Nicolson 方法用于多层传热模型的求解。

将 Crank-Nicolson 方法用于多层传热模型的求解的主要难点在于确定两层交界处附近的格点递推方程。

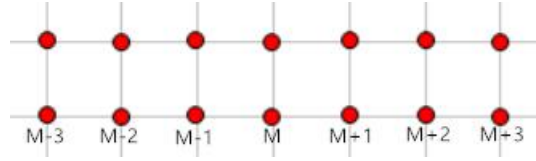


图 21 Crank-Nicolson 传热模型

如图所示, $i = M$ 的格点位于交界面上, 则对于 $i < M - 1$ 与 $i > M + 1$ 的情况, 格点递推方程:

$$-\sigma\omega_{i-1,j} + (2+2\sigma)\omega_{i,j} - \sigma\omega_{i+1,j} = \sigma\omega_{i-1,j-1} + (2-2\sigma)\omega_{i,j-1} + \sigma\omega_{i+1,j-1} (*)$$

仍然适用, 因而我们只需要确定 $i = M - 1, M, M + 1$ 时的格点递推方程。

如果我们在格点 (M, j) 的左右两侧各取一点, 分别记为 (M^*, j) 与 (M^{**}, j) , 其中 (M^*, j) 与 (M, j) 的距离、 (M^{**}, j) 与 (M, j) 的距离为 $o(x)$, 由于温度分布在界面上的连续性, 我们可以认为:

$$-\sigma\omega_{M-2,j} + (2+2\sigma)\omega_{M-1,j} - \sigma\omega_{M^*,j} = \sigma\omega_{M-2,j-1} + (2-2\sigma)\omega_{M-1,j-1} + \sigma\omega_{M^*,j-1}$$

$$-\sigma\omega_{M^{**},j} + (2+2\sigma)\omega_{M+1,j} - \sigma\omega_{M+2,j} = \sigma\omega_{M^{**},j-1} + (2-2\sigma)\omega_{M+1,j-1} + \sigma\omega_{M+2,j-1}$$

我们令 $o(x) \rightarrow 0$, 则上述两式可以化为:

$$-\sigma\omega_{M-2,j} + (2+2\sigma)\omega_{M-1,j} - \sigma\omega_{M,j} = \sigma\omega_{M-2,j-1} + (2-2\sigma)\omega_{M-1,j-1} + \sigma\omega_{M,j-1}$$

$$-\sigma\omega_{M,j} + (2+2\sigma)\omega_{M+1,j} - \sigma\omega_{M+2,j} = \sigma\omega_{M,j-1} + (2-2\sigma)\omega_{M+1,j-1} + \sigma\omega_{M+2,j-1}$$

即(*)式在 $i = M - 1, i = M + 1$ 时仍然成立。

对于 $i = M$ 的情况, 我们只需将界面上的温度梯度关系差分化即可:

对于满足 $k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}$ 的界面, 我们有:

$$\frac{k_1}{\Delta x_1}(\omega_{M,j} - \omega_{M-1,j}) = \frac{k_2}{\Delta x_2}(\omega_{M+1,j} - \omega_{M,j})$$

其中 k_1, k_2 为材料 1, 2 的热传导系数, $\Delta x_1, \Delta x_2$ 为界面两侧空间的网格化步长。

对于满足 $k_s(T_1 - T) = k \frac{\partial T}{\partial x}$ 的界面, 我们有:

$$k_s(\omega_{M,j} - \omega_{M-1,j}) = \frac{k}{\Delta x}(\omega_{M+1,j} - \omega_{M,j})$$

这样, 我们仍然可以得到关于 $X = (\omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \omega_{3,j}, \dots, \omega_{N,j})^T$ 的线性方程组 $AX = B$, 从而我们可以计算出全部格点处 $\omega_{i,j}$ 的值。

假定共有两层不同的材料, 每层材料内部的 x 轴向网格数分别为 N_1, N_2 , 则有 $A \in P^{(N_1+N_2+2) \times (N_1+N_2+2)}$:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 2+2\sigma_1 & -\sigma_1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & -\sigma_1 & 2+2\sigma_1 & -\sigma_1 & & & & & \\ & & & -\frac{k_1}{\Delta x_1} & \frac{k_1}{\Delta x_1} + \frac{k_2}{\Delta x_2} & -\frac{k_2}{\Delta x_2} & & & & \\ & & & & -\sigma_2 & 2+2\sigma_2 & -\sigma_2 & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & -\sigma_2 & 2+2\sigma_2 & -\sigma_2 & \\ & & & & & & & -\frac{k_2}{\Delta x_2} & \frac{k_2}{\Delta x_2} + k_s & -k_s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \in P^{(N_1+N_2+2) \times 1} :$$

$$B = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \omega_{1,j-1} + (2-2\sigma_1) \omega_{2,j-1} + \sigma_1 \omega_{3,j-1} \\ \vdots \\ -\sigma_1 \omega_{N_1-1,j-1} + (2-2\sigma_1) \omega_{N_1,j-1} + \sigma_1 \omega_{N_1+1,j-1} \\ 0 \\ -\sigma_2 \omega_{N_1+1,j-1} + (2-2\sigma_2) \omega_{N_1+2,j-1} + \sigma_2 \omega_{N_1+3,j-1} \\ \vdots \\ -\sigma_2 \omega_{N_1+N_2-1,j-1} + (2-2\sigma_2) \omega_{N_1+N_2,j-1} + \sigma_2 \omega_{N_1+N_2+1,j-1} \\ 0 \\ \omega_{1,j} \\ \vdots \\ \omega_{N_1+N_2+2,j} \end{pmatrix}$$

根据同样的原理，可以得到差分方法求解四层材料传热模型时的矩阵 A 、 B 的形式，该矩阵形式过于复杂，限于篇幅所限，在本文中不再具体给出。

（误差分析）用 Crank-Nicolson 方法对前向差分法的计算结果进行检验：

抛物型偏微分方程的常用数值解法包括前向差分法、后向差分法和 Crank-Nicolson 方法。其中，稳定性较差的前向差分法和稳定性很好的后向差分法在稳定时的截断误差估计均为 $O(k+h^2)$ ，其中 h 为 x 轴方向步长， k 为 t 轴方向步长。相比之下，Crank-Nicolson 方法具有无条件稳定、误差仅为二阶项 $O(k^2+h^2)$ 的优点，可以用于检验前向差分法求解的准确性。

从前文中我们已经看到，用前向差分法求解的模型预测值与实际测量值有一定的误差，这种误差既可能来自模型假设的不准确，也可能来自前向差分计算过程的不准确。为排查误差产生的原因，我们用 Mathematica 实现了用 Crank-Nicolson 方法求解四层传热问题的代码，用于演算前向差分法的计算精确度。

当 x 轴方向的网格步长以及 t 轴方向的网格步长取值与前向差分法相同时，经计算，我们得到的 Crank-Nicolson 方法的计算结果与前向差分法高度一致，这说明前向差分法的计算误差不是模型误差的主要来源，相反，对于辐射等物理过程的忽略更可能是模型产生误差的主要原因。

七、模型评价

8.1 模型优点

- 不同数学领域的灵活映射与转化：既有经典的离散差分方法，利用微积分特性将连续问题转换为离散问题，又有新颖的RBF函数配置逼近方法，利用级数特性将非线性系统映射成线性系统，转化简洁优美。

- 可操作性与可拓展性并行，使用经典差分方法对简化的热传导方程进行运算，运算整齐简洁，已经得出较为理想的数值结果，误差较小，可操作性强；又有泛函变分观点下的迭代技巧，适合对方程进行加细与拓展，概括性高，可拓展性强。

- 经典性与创新性共存。在经典的 Crank—Nicolson 差分算法的基础上创新地实现了多介质串联情形下的离散操作；在传统的级数法解微分方程的基础上延伸出最新的径向基逼近技巧；在第三问中，利用 3D 热力图简洁巧妙地进行图形建模，操作简单，精确性高，且与遗传算法可以相互印证。

8.2 模型缺点

由于实际的热传递问题十分复杂，且题目所给出的材料参数不足，因此很难用简洁模型将整个过程解释全面；在求解过程中，利用有限差分法需要将每个小网格内视为温度相同，利用径向基函数逼近法需要用级数的前 n 项和近似代替无穷级数和。均导致最终求解结果与实际数据之间存在不可回避的误差。

八、模型推广

- 该模型采用的是基本一维热传递方程，难点在于对热量在不同介质中传递过程的分析。因此除了研究防护服的热传递以外，对于其他多层介质中的热传递问题同样具有普适性。例如，利用该模型可以研究不同材料的保温效果，为保温杯、房屋保温墙的设计提供理论依据。在现实生活中，大多热传递过程的介质都不是单一材料、分布均匀的，因此该模型在实际生活中有着十分广泛的作用。
- 由于扩散方程与热传导方程具有相同的形式，因此不同介质中热传导过程可推广到粒子在不同介质中扩散情况。如液体的渗透问题、气体的扩散问题。
- 本文中，推广的多介质 Crank—Nicolson 差分算法，推广的多元径向基函数逼近技巧等，为求解更为广泛的偏微分方程提供了有力的切入口和工具。

九、参考文献

- [1] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[M]. 第四版. 北京市: 高等教育出版社, 2018 年 4 月
- [2] 潘斌. 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题[D]. 浙江理工大学, 2017.
- [3] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 郑宋穆, 谭永基. 数学物理方程[M]. 第二版. 北京市: 高等教育出版社, 2002 年 7 月: 46-48
- [4] Timothy Sauer. 数值分析[M]. 第二版. 北京市: 人民邮电出版社, 2011 年 12 月: 356-360.
- [5] Timothy Sauer. 数值分析[M]. 第二版. 北京市: 人民邮电出版社, 2011 年 12 月: 361

- [6] 卢琳珍. 多层热防护服装的热传递模型及参数最优决定[D].浙江理工大学,2018.
- [7] Timothy Sauer.数值分析[M].第二版.北京市:人民邮电出版社, 2011 年 12 月: 364-367

十、附录

```
%matlab代码
%Eval函数
function w=Eval(x2s,x4s)

Rho1s = 300;
C1s = 1377;
k1s = 0.082;
Rho2s = 862;
C2s = 2100;
k2s = 0.37;
Rho3s = 74.2;
C3s = 1726;
k3s = 0.045;
Rho4s = 1.18;
C4s = 1005;
k4s = 0.028;
ks = 11;
a1s = k1s/(C1s*Rho1s);
a2s = k2s/(C2s*Rho2s);
a3s = k3s/(C3s*Rho3s);
a4s = k4s/(C4s*Rho4s);
x1s = 0.0006;
x3s = 0.0036;
totalTime = 1800;
envTem = 80;
bodyTem = 37;
limTem = 47;
endureTem = 44;
% x4s = 0.004;
dx4 = x4s/5;
endureTime = 300;
dy = 0.01; dx1 = 0.0001; dx2 = 0.0001; dx3 = 0.0001;
sigma1 = a1s*dy/(dx1*dx1); sigma2 = a2s*dy/(dx2*dx2); sigma3 = a3s*dy/(dx3*dx3); sigma4 =
a4s*dy/(dx4*dx4);
N2 = x2s/dx2;
N2=int16(N2);
NSol = 49 + N2;
```

```

Sol=zeros(NSol,(1+100*totalTime))

for i=1:(1+100*totalTime)
    Sol(1,i)=envTem;
    Sol(NSol,i)=bodyTem;
end

for i=2:NSol
    Sol(i,1)=bodyTem;
end

    for j=2:(1+100*totalTime)

        for i=2:6
            Sol(i,j)=sigma1*Sol(i+1,j-1)+sigma1*Sol(i-1,j-1)-(2*sigma1-1)*Sol(i,j-1);
        end

        for i=8:(6+N2)
            Sol(i,j)=sigma2*Sol(i+1,j-1)+sigma2*Sol(i-1,j-1)-(2*sigma2-1)*Sol(i,j-1);
        end

        for i=(8+N2):(42+N2)
            Sol(i,j)=sigma3*Sol(i+1,j-1)+sigma3*Sol(i-1,j-1)-(2*sigma3-1)*Sol(i,j-1);
        end

        for i=(44+N2):(47+N2)
            Sol(i,j)=sigma4*Sol(i+1,j-1)+sigma4*Sol(i-1,j-1)-(2*sigma4-1)*Sol(i,j-1);
        end

Sol(7,j)=(Sol(8,j)-Sol(6,j))/(k1s/dx1+k2s/dx2)*k2s/dx2+Sol(6,j);
Sol((7+N2),j)=(Sol((8+N2),j)-Sol((6+N2),j))/(k2s/dx2+k3s/dx3)*k3s/dx3+Sol(6+N2,j);

Sol(43+N2,j)=(Sol(44+N2,j)-Sol((42+N2),j))/(k3s/dx3+ks)*ks+Sol(42+N2,j);

Sol(48+N2,j)=(Sol((49+N2),j)-Sol(47+N2,j))/(k4s/dx4+ks)*ks+Sol(47+N2,j);

end

```

```

Sol(48+N2,1+100*totalTime)
w= Sol(48+N2,1+100*(totalTime-endureTime))

if Sol(48+N2,1+100*totalTime)>47||Sol(48+N2,1+100*(totalTime-endureTime))>44
    eva=-1

else eva=1/x2s
end
end

%%%绘制曲面图
A=[6.4 7 44.6383;
    6.4 8 44.6117;
    6.4 12 44.5032;
    6.4 19 44.09;
    6.4 20 43.989;
    0.6 0.6 65;
    4.4 25 44.1;
    6.4 25 42.4;
    4.8 25 43.5;
    0.6 1 59;
    0.6 10 50;
    6.4 0.6 50;
    2,5,50
];%x,y,z 轴坐标
x=A(:,1);y=A(:,2);z=A(:,3);
scatter3(x,y,z)%散点图
figure
[X,Y,Z]=griddata(x,y,z,linspace(min(x),max(x))',linspace(min(y),max(y))','v4');%插值
pcolor(X,Y,Z);shading interp%伪彩色图
figure,contourf(X,Y,Z) %等高线图
figure,surf(X,Y,Z);%三维曲面
hold on
m=0.6:0.01:6.4;
n=0.6:0.1:25;
[x,y]=meshgrid(m,n);
z=x*0+44;
surf(x,y,z)

```

```

(*mathematica 代码*)
(*Crank-Nicolson 验证稳定性算法*)
Rho1s = 300;
C1s = 1377;
k1s = 0.082;
Rho2s = 862;
C2s = 2100;
k2s = 0.37;
Rho3s = 74.2;
C3s = 1726;
k3s = 0.045;
Rho4s = 1.18;
C4s = 1005;
k4s = 0.028;
ks = 11;
a1s = k1s/(C1s*Rho1s);
a2s = k2s/(C2s*Rho2s);
a3s = k3s/(C3s*Rho3s);
a4s = k4s/(C4s*Rho4s);
CrankNicolson[x1_, x2_, x3_, x4_, t_, N1_, N2_, N3_, N4_, Nt_, TemH_,
  TemL_] := Module[
  {Sol, i, j, ii, jj, kk, cnt, dt, dx1, dx2, dx3, dx4, matA, matB,
   matX},
  {
    Sol = Table[0, {i, 1, N1 + N2 + N3 + N4 + 2}, {j, 1, Nt + 1}];
    For[cnt = 1, cnt <= Nt + 1, cnt++, Sol[[1]][[cnt]] = TemH;
      Sol[[N1 + N2 + N3 + N4 + 2]][[cnt]] = TemL
    ];
    For[cnt = 2, cnt <= N1 + N2 + N3 + N4 + 2, cnt++,
      Sol[[cnt]][[1]] = TemL
    ];
    dt = t/Nt; dx1 = x1/N1; dx2 = x2/N2; dx3 = x3/N3; dx4 = x4/N4;
    sigma1 = a1s*dy/(dx1*dx1);
    sigma2 = a2s*dy/(dx2*dx2);
    sigma3 = a3s*dy/(dx3*dx3);
    sigma4 = a4s*dy/(dx4*dx4);
    For[j = 2, j <= Nt + 1, j++,
      {
        matA =
          Table[0, {ii, 1, N1 + N2 + N3 + N4 + 2}, {jj, 1,
            N1 + N2 + N3 + N4 + 2}];
        matB = Table[0, {ii, 1, N1 + N2 + N3 + N4 + 2}];
        For[kk = 1, kk < N1, kk++,
          matA[[kk]][[kk]] = -sigma1;

```

```

matA[[kk]][[kk + 1]] = 2 + 2*sigma1;
matA[[kk]][[kk + 2]] = -sigma1;
matB[[kk]] =
  sigma1*Sol[[kk]][[j - 1]] + (2 - 2*sigma1)*
  Sol[[kk + 1]][[j - 1]] + sigma1*Sol[[kk + 2]][[j - 1]];
];
For[kk = N1 + 1, kk < N1 + N2, kk++,
  matA[[kk]][[kk]] = -sigma2;
  matA[[kk]][[kk + 1]] = 2 + 2*sigma2;
  matA[[kk]][[kk + 2]] = -sigma2;
  matB[[kk]] =
    sigma2*Sol[[kk]][[j - 1]] + (2 - 2*sigma2)*
    Sol[[kk + 1]][[j - 1]] + sigma2*Sol[[kk + 2]][[j - 1]];
];
For[kk = N1 + N2 + 1, kk < N1 + N2 + N3, kk++,
  matA[[kk]][[kk]] = -sigma3;
  matA[[kk]][[kk + 1]] = 2 + 2*sigma3;
  matA[[kk]][[kk + 2]] = -sigma3;
  matB[[kk]] =
    sigma3*Sol[[kk]][[j - 1]] + (2 - 2*sigma3)*
    Sol[[kk + 1]][[j - 1]] + sigma3*Sol[[kk + 2]][[j - 1]];
];
For[kk = N1 + N2 + N3 + 1, kk < N1 + N2 + N3 + N4, kk++,
  matA[[kk]][[kk]] = -sigma4;
  matA[[kk]][[kk + 1]] = 2 + 2*sigma4;
  matA[[kk]][[kk + 2]] = -sigma4;
  matB[[kk]] =
    sigma4*Sol[[kk]][[j - 1]] + (2 - 2*sigma4)*
    Sol[[kk + 1]][[j - 1]] + sigma4*Sol[[kk + 2]][[j - 1]];
];
matA[[N1]][[N1]] = -k1s/dx1;
matA[[N1]][[N1 + 1]] = k1s/dx1 + k2s/dx2;
matA[[N1]][[N1 + 2]] = -k2s/dx2;
matA[[N1 + N2]][[N1 + N2]] = -k2s/dx2;
matA[[N1 + N2]][[N1 + N2 + 1]] = k2s/dx2 + k3s/dx3;
matA[[N1 + N2]][[N1 + N2 + 2]] = -k3s/dx3;
matA[[N1 + N2 + N3]][[N1 + N2 + N3]] = -k3s/dx3;
matA[[N1 + N2 + N3]][[N1 + N2 + N3 + 1]] = k3s/dx3 + ks;
matA[[N1 + N2 + N3]][[N1 + N2 + N3 + 2]] = -ks;
matA[[N1 + N2 + N3 + N4]][[N1 + N2 + N3 + N4]] = -k4s/dx4;
matA[[N1 + N2 + N3 + N4]][[N1 + N2 + N3 + N4 + 1]] = k4s/dx4 + ks;
matA[[N1 + N2 + N3 + N4]][[N1 + N2 + N3 + N4 + 2]] = -ks;
matA[[N1 + N2 + N3 + N4 + 1]][[1]] = 1;
matB[[N1 + N2 + N3 + N4 + 1]] = Sol[[1]][[j]];

```

```

matA[[N1 + N2 + N3 + N4 + 2]][[N1 + N2 + N3 + N4 + 2]] = 1;
matB[[N1 + N2 + N3 + N4 + 2]] = Sol[[N1 + N2 + N3 + N4 + 2]][[j]];
matX = LinearSolve[matA, matB];
For[kk = 2, kk < N1 + N2 + N3 + N4 + 2, kk++,
  Sol[[kk]][[j]] = matX[[kk]];
];
}
];
};
Sol
]
mesh = CrankNicolson[0.0006, 0.006, 0.0036, 0.005, 1700, 6, 60, 36, 5,
  170000, 75, 37];
mesh[[108]]

```

```

(*mathematica 代码*)
(*双层单参模型的差分求解*)
Rho1s = 300;
C1s = 1377;
k1s = 0.082;
Rho2s = 862;
C2s = 2100;
k2s = 0.37;
Rho3s = 74.2;
C3s = 1726;
k3s = 0.045;
Rho4s = 1.18;
C4s = 1005;
k4s = 0.028;
ks = 11;
a1s = k1s/(C1s*Rho1s);
a2s = k2s/(C2s*Rho2s);
a3s = k3s/(C3s*Rho3s);
a4s = k4s/(C4s*Rho4s);
x1s = 0.0006; x2s = 0.006; x3s = 0.0036; x4s = 0.005; ts = 1700;
Sol = Table[0, {i, 1, 109}, {j, 1, 170001}];
For[cnt = 1, cnt <= 170001, cnt++, Sol[[1]][[cnt]] = 75;
  Sol[[109]][[cnt]] = 37
]
For[cnt = 2, cnt <= 109, cnt++, Sol[[cnt]][[1]] = 37
]
dy = 0.01; dx1 = 0.0001; dx2 = 0.0001; dx3 = 0.0001; dx4 = 0.001;
sigma1 = a1s*dy/(dx1*dx1); sigma2 = a2s*dy/(dx2*dx2); sigma3 =
  a3s*dy/(dx3*dx3); sigma4 = a4s*dy/(dx4*dx4);

```

```

For[j = 2, j <= 170001, j++,
{
  For[i = 2, i <= 6, i++,
    Sol[[i]][[j]] =
      sigma1*Sol[[i + 1]][[j - 1]] +
      sigma1*Sol[[i - 1]][[j - 1]] - (2*sigma1 - 1)*Sol[[i]][[j - 1]]
  ];
  For[i = 8, i <= 66, i++,
    Sol[[i]][[j]] =
      sigma2*Sol[[i + 1]][[j - 1]] +
      sigma2*Sol[[i - 1]][[j - 1]] - (2*sigma2 - 1)*Sol[[i]][[j - 1]]
  ];
  For[i = 68, i <= 102, i++,
    Sol[[i]][[j]] =
      sigma3*Sol[[i + 1]][[j - 1]] +
      sigma3*Sol[[i - 1]][[j - 1]] - (2*sigma3 - 1)*Sol[[i]][[j - 1]]
  ];
  For[i = 104, i <= 107, i++,
    Sol[[i]][[j]] =
      sigma4*Sol[[i + 1]][[j - 1]] +
      sigma4*Sol[[i - 1]][[j - 1]] - (2*sigma4 - 1)*Sol[[i]][[j - 1]]
  ];
  Sol[[7]][[
    j]] = (Sol[[8]][[j]] - Sol[[6]][[j]])/(k1s/dx1 + k2s/dx2)*
    k2s/dx2 + Sol[[6]][[j]];
  Sol[[67]][[
    j]] = (Sol[[68]][[j]] - Sol[[66]][[j]])/(k2s/dx2 + k3s/dx3)*
    k3s/dx3 + Sol[[66]][[j]];
  Sol[[103]][[
    j]] = (Sol[[104]][[j]] - Sol[[102]][[j]])/(k3s/dx3 + ks)*ks +
    Sol[[102]][[j]];
  Sol[[108]][[
    j]] = (Sol[[109]][[j]] - Sol[[107]][[j]])/(k4s/dx4 + ks)*ks +
    Sol[[107]][[j]]
  }
]
mesh = Table[Sol[[i]][[100*j + 1]], {i, 1, 109}, {j, 0, 1700}];

```