

改进的 SEIRS 模型与混沌现象

王思恢

信息与通信工程学院 2016211110 班

摘要: 本文将复杂网络模拟仿真的办法引入 SEIRS 模型, 提出了改进的 SEIRS 模型, 研究了模型参数对于系统均衡状态的影响。仿真结果显示, 网络的连边概率对于系统的稳态有重要影响, 当连边概率接近一特定数值时, 系统将呈现出高度不稳定的混沌状态。

关键词: SEIRS 模型; 复杂网络; 连边概率; 混沌

Chaotic Phenomenon in Advanced SEIRS Model

Wang Sihui

School of Information and Communication Engineering, BUPT.

Abstract: By employing the simulation methods and simulating the behavior of the complex networks, we are able to develop an advanced SEIRS model. In this paper, model parameters are investigated as to how they interact with the equilibrium state of the system. The result shows that the linkage possibility of the network imposes significant influence on the equilibrium state of the system. When a certain value is assigned to the linkage possibility, the system might become highly unstable or chaotic, leading to uncertain consequences.

Key words: SEIRS model; complex network; linkage possibility; chaotic

引言

在对于信息与舆论的传播的建模领域, SIR 模型是一个经典模型。基于 SIR 模型, 后继的研究者在其中加入潜伏态 E, 成为刻画疾病与信息传播的 SEIR 模型。如果我们允许免疫节点 R 重新转变为易感节点 S, 则 SEIR 模型变为 SEIRS 模型。

SEIRS 模型建立在经典模型的基础之上, 但该模型没有考虑到复杂网络的拓扑结构, 没有考虑到各粒子节点的个体性质所造成的影响, 没有刻画个体节点交互的微观动力学。在本文中, 我们运用复杂网络的模拟仿真方法, 对 SEIRS 模型进行改进, 并着重研究了改进后的模型的混沌现象。

1 模型的建立

1.1 节点的定义

我们将舆论网络中的节点分为易感节点 (S)、观望节点 (E)、传播节点 (I) 以及免疫节点 (R)。

其中, 各节点的定义以及所对应的现实意义是:

易感节点: 表示暂时没有接触到特定舆论信息的节点, 也可以表示某种舆论经过改头换面而使得一些个体失去了“免疫力”(可以类比于病毒的变异、进化)。我们既可以用一个节点表示一个特定的个体, 也可以用节点表示在人口学中的一个群体, 在后一种情况下, 易感节点可以代表不断更新进入舆论网络的涉世未深的年轻人群。

观望节点 (E): 表示已经接触过特定的舆论信息, 在主观上持将信将疑的态度, 在行为层面尚未主动传播信息的节点。

传播节点 (I): 表示主动向其它节点传播特定舆论信息的节点。

免疫节点 (R): 表示接触过特定的舆论信息, 但持麻木、抵触或反对的意见, 不再向外传播该舆论信息的节点。

作者简介: 王思恢, 学号 2016210271

1.2 节点的属性

在经典的 SIR、SIRS、SEIR 或者 SEIRS 模型中，我们忽略个体差异对实际结果的影响，而且我们不考虑节点所构成的网络的拓扑结构造成的影响，这相当于我们讨论了一个“各向同性”的“全连通网络”中的舆论传播过程；在上述经典模型中，我们用宏观参数变量来刻画节点间的转化关系，例如，在 SEIRS 模型中，我们有：

$$\frac{dS}{dt} = \lambda R - \alpha IS$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha IS - \beta E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \lambda R$$

其中， α 为传播率， β 为（舆论或病毒的）活化率， γ 为（受众的）免疫率， λ 为遗忘率。虽然 α ， β ， γ ， λ 这些宏观参数变量在直观上具有一定的意义，但经典模型没有尝试从微观的节点间的动力学上解释上述参数的形成机制。也就是说，上述经典模型是一类从宏观入手的、基于先验的直觉的、忽略节点间个体差异性的、基于微分方程组的模型。为了试图刻画节点间的个体差异性，刻画网络的拓扑结构，揭示节点间交互的微观动力学，我们尝试引入复杂网络模型。

为刻画网络中的节点的相互作用关系，我们需要定义我们所关心的节点属性。

1.2.1 节点的个体属性

在这里，我们定义节点 i 对于特定信息 M 的兴趣程度 $M(i), i = 1, 2, 3, \dots, N$ ， N 为节点的总数。我们用 $0 \sim 1$ 的实数来表示节点 i 对于特定信息 M 的兴趣程度，其中 $M(i)$ 数值越高，表示节点 i 对于信息 M 的关注程度越高。

1.2.2 节点的关系属性

我们引入节点间的态度矩阵 A 和兴趣相似度矩阵 S 。其中 A 中的元素 a_{ij} 表示节点 i 与节点 j 之间

的关系好坏程度或者相互的主观态度。我们令 $0 \leq a_{ij} \leq 1$ ，且 a_{ij} 数值越大，表示节点 i 与节点 j 的关系越好。为方便起见，我们假定 A 为对称矩阵，即 $a_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq N$ 。

假定节点 i, j 对于一系列的信息 M_k 的兴趣程度为 $M_k(i), M_k(j)$ ，则我们根据下式定义节点 i 与节点 j 的兴趣相似程度 s_{ij} ：

$$s_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n M_k(i) M_k(j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n M_k^2(i)} \sqrt{\sum_{k=1}^n M_k^2(j)}}$$

我们令兴趣相似度矩阵 S 的第 i 行，第 j 列元素为 s_{ij} 。可以看出， S 为对称方阵， s_{ij} 为 $-1 \sim +1$ 之间的实数，其数值越大，表示节点 i 与节点 j 的兴趣越相似。

1.3 网络的特性

我们定义节点间的信息传递网络为无向图 $G(V, E)$ ，其中点集 V 为全部节点 $i=1, 2, 3, \dots, N$ 的集合，而 E 表示节点间的连边关系。如果节点 $i \in V, j \in V$ 之间存在一条边 $e_{ij} \in E$ ，说明节点 i 与节点 j 之间存在一条信息沟通的渠道，即在舆论的传播过程中，节点 i 与节点 j 能够发生直接的互动与相互影响。

我们用节点间的连边概率 p 来控制网络的结构。其中 p 的意义为：

$$p = E \left[\frac{d(i)}{N-1} \right]$$

其中 $d(i)$ 表示节点 i 的度， N 表示 G 中的节点总数。 E 表示对于每个节点的连边频率求取期望。

1.4 传播动力学的刻画

1.4.1 易感节点 S 的转化条件

我们假设易感人群 S 在传播者 I 的作用下发生变化，这与经典模型中 $\frac{dS}{dt} = \lambda R - \alpha IS$ 的 $-\alpha IS$ 项相对应。

与经典模型不同的是，我们假设（1）传播节点 $i \in I$ 对易感节点 $j \in S$ 能够施加影响的充要条件是 i, j 间存在连边 $e_{ij} \in E$ ；（2）传播节点 $i \in I$ 对于易感节点 $j \in S$ 造成的实际影响取决于 i, j 的关系好坏以及兴趣相似程度。

<1>具体而言，如果 i 与 j 的关系 a_{ij} 大于关系阈值 a_0 ，且 i 与 j 的兴趣相似程度 s_{ij} 大于阈值 s_0 ，则在 i 的影响下， j 倾向于直接转变为传播节点 I，这表示传播节点 I 对于同自己关系好且兴趣相近的节点有最强的传播力。

<2>如果 i 与 j 的关系 a_{ij} 大于关系阈值 a_0 ，但 i 与 j 的兴趣相似程度 s_{ij} 不大于阈值 s_0 ，则在 i 的影响下， j 倾向于转变为观望节点 E，这表示两个人关系好，存在信任关系，但对彼此的兴趣不能充分理解的情形下，在传播作用下，易感节点 S 转化为观望节点 E。

<3>如果 i 与 j 的关系 a_{ij} 小于关系阈值 a_0 ，且 i 与 j 的兴趣相似程度 s_{ij} 小于阈值 s_0 ，则在 i 的影响下， j 倾向于直接转变为免疫节点 R，这表示主观的恶感与兴趣的迥异会带来“物以类聚，人以群分”的区分效果，使得两者在接触后产生抵触心理，使其中的易感节点 S 直接转变为免疫节点 R。

在每一个时间节点 t ，每个易感节点 S 会与大量与其有连边关系的节点发生作用，假设对于易感节点 $i \in S$ ，在与其具有连边关系的传播节点中，满足条件<1>的节点个数为 $n_i(I)$ ，满足条件<2>的节点

个数为 $n_i(E)$ ，满足条件<3>的节点个数为 $n_i(R)$ ，则我们假定易感节点 i 向传播节点 I、观望节点 E、免疫节点 R 发生转化的概率 $p_i(I)$ 、 $p_i(E)$ 、 $p_i(R)$ 分别为：

$$p_i(I) = \frac{n_i(I)}{d(i)}$$

$$p_i(E) = \frac{n_i(E)}{d(i)}$$

$$p_i(R) = \frac{n_i(R)}{d(i)}$$

1.4.2 观望节点 E 的转化条件

我们假定，随着观望节点 E 对于特定舆论的态度逐渐明朗化，观望节点 E 将要么转变为主动传播的节点 I，要么转变为免疫节点 R。我们假设，E 向 I 或 R 的转变过程取决于社会强化与遗忘过程。具体而言，我们这样刻画节点 E 的转化机制：

在时间窗口 T 内，假定观望节点 $i \in E$ 接触到的传播节点总数 n 小于阈值 N_1 ，则我们认为 i 将遗忘所传播的信息，或者抵制所传播的信息，此时观望节点 E 将转变为免疫节点 R。

在时间窗口 T 内，假定观望节点 $i \in E$ 接触到的传播节点总数 n 大于阈值 N_2 ，则我们认为在高频度的信息“轰炸”之下，观望节点 E 将“活化”为主动的传播节点 I。

在时间窗口 T 内，假定观望节点 $i \in E$ 接触到的传播节点总数 n 满足 $N_1 \leq n \leq N_2$ ，则节点 i 会认为收集到的信息不足以做出判断，会继续保持观望状态。

1.4.3 传播节点 I 的转化条件

我们假定，被动免疫和主动免疫两个过程决定了传播节点 I 向免疫节点 R 的转化。

如果对于节点 $i \in I$ ，当与其具有连边关系的节点中的绝大多数节点都属于传播节点时，我们认为节点 i 将失去传播的动力，或者产生麻木和逆反的心理，从而转变为免疫节点 R 。

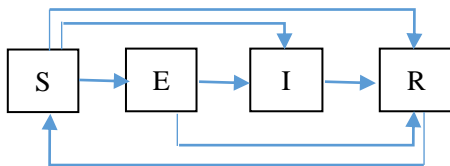
如果对于节点 $i \in I$ ，当与其具有连边关系的节点中的绝大多数节点都属于免疫节点时，我们认为节点 i 将依赖从众心理，从而转变为免疫节点 R 。

以上的转变取决于传播节点 $i \in I$ 的邻接节点的属性，我们称这种转变为被动免疫。

同时，我们假定在传播节点 I 中存在着主动免疫过程，即在每个时间节点 t ， $i \in I$ 以一定的概率 p_r 向免疫节点 R 发生转变，这表明个体由于反省对比、独立思考、经验积累、利益受损或者热情不再等原因向免疫节点发生转变。

1.4.4 免疫节点 R 的转化条件

借鉴艾宾浩斯遗忘曲线的指数特性，我们假定在每个时间节点 t ，免疫节点 $i \in R$ 以一定的概率 p_f 发生遗忘，从而重新转化为易感节点 S 。这模拟了个体的遗忘过程，也模拟了没有经验的年轻人、社会“新鲜人”不断进入社会网络，实现节点更新的过程。由此我们得到节点 S 、 E 、 I 、 R 之间的转化关系：



1.5 求解算法

为求解本模型编写的程序框图如下图所示：

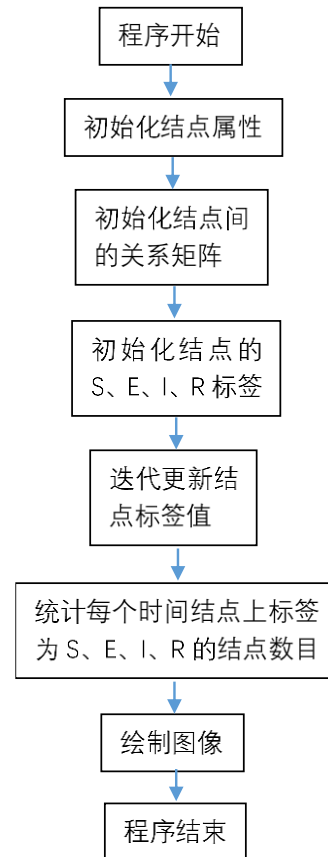


图 1 改进的 SEIRS 模型的求解程序框图

在结点标签的具体迭代过程中，我们对于上一时刻即 $t-1$ 时刻的结点按照其标签的不同进行分别处理。

对于在 $t-1$ 时刻标签为 S 的结点，我们通过邻接矩阵查询所有与其有连边关系的结点，我们记录其中满足条件 $\langle 1 \rangle$ 、 $\langle 2 \rangle$ 、 $\langle 3 \rangle$ 的结点数目，并计算出理论上 S 结点向 I 结点、 E 结点、 R 结点的转化概率，然后我们运用轮盘赌算法生成随机数，模拟 S 向 I 、 E 、 R 的转化过程。

为了追踪结点 E 的变化情况，我们需要维护一个时间标数组 $LastTime$ 和一个记录信息暴露次数的数组 $NTimes$ 。每当 S 结点转化为 E 结点时，我们将 $LastTime$ 数组中对应结点的时间标更新为当前时间 t ，把 $NTimes$ 数组中对应结点的信息暴露次数重置为 0。在随后的观察期 $[t, t + T]$ ，我们根据邻接矩阵记录结点 E 所能接触到的 I 结点的总数，如果观察期结束前或结束时该总数大于阈值 N_2 ，则我们将结点 E 更新为结点 I ，同时将 $LastTime$ 数值重置为 -1， $NTimes$ 数值重置为 0；如果观察期结束时，

结点 E 接触到的 I 结点总数小于阈值 N_1 ，则我们将结点 E 更新为结点 R，同时将 LastTime 数值重置为 -1，NTimes 数值重置为 0；如果观察期满时，结点 E 对结点 I 的接触总数介于阈值 N_1 与 N_2 之间，则我们保持该结点的标签 E 不变，同时将 LastTime 数值更新为现在的时间 t' ，将 NTimes 数值重置为 0，重新开始在新的观察期的考察。

对于 I 结点，我们需要通过查询邻接矩阵，计算与其有连边关系的全部结点中 I 结点与 R 结点的比例，如果上述两个比例之一大于阈值 p_r ，则我们将该结点标签更新为 R。然后我们运用轮盘赌算法模拟剩余 I 结点以一定的免疫率向 R 结点的转化过程，我们将转化结点标签更新为 R，把其余结点标签更新为 I。

对于 R 结点，我们运用轮盘赌算法模拟其以一定的遗忘率向 S 结点的转化过程，我们将转化结点标签更新为 S，将其余结点标签更新为 R。

基于以上步骤，我们就完成了一次迭代，即完成了由 $t-1$ 时刻的标签生成 t 时刻的标签的过程。

2 模型的求解

2.1 实验环境

本文实验在 Windows10 操作系统的 Visual Studio 开发环境下进行，利用 c++ 进行模型编程，生成数据文件，然后用 Mathematica 调用数据文件并完成图像绘制功能。

2.2 实验结果

我们令节点数目 $N = 10000$ ，连边概率 $p = 0.2$ ，初始条件下 S 节点数目为 8000，E 节点数为 1000，I 节点数为 500，R 节点数为 500，我们设定 E 节点向 I 节点转化的时间窗 $t = 2$ ，E 节点转化为 R 节点的信息暴露阈值 $N_1 = 100$ ，E 节点转化为 I 节点的信息暴露阈值 $N_2 = 300$ 。我们设定节点的主动免疫率为 0.03，节点的遗忘率为 0.04。我们假定节点间的主观态度、兴趣相似度、连边关系分别随机且相

互独立。在上述条件下，我们得到 S、E、I、R 节点数目随时间的演变情况如下图所示：

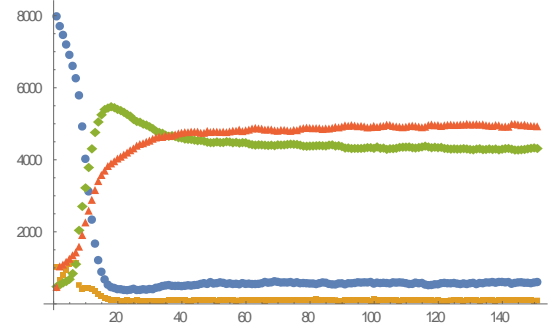


图 2 $p=0.2, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

如上图所示，蓝色曲线为易感态节点 S 的时间变化曲线，橙色曲线为观望态节点 E 的时间变化曲线，绿色曲线为传播态节点 I 的时间变化曲线，红色曲线为免疫态节点 R 的时间变化曲线。

可以看出，通过本模型求解得到的 S、E、I、R 节点数目随时间变化的曲线形态与经典的 SEIRS 模型的求解结果比较相似，这在一定程度上说明了，从微观入手，通过刻画节点间的信息传播动力学，同样可以解释宏观尺度上的现象。

2.3 结果的分析

2.3.1 实验结果的初值无关性

对于经典的 SEIRS 模型，我们可以证明，各节点数目的稳态值与初值无关，其证明如下：

证明：当 S、E、I、R 的数目 $S(t)$ 、 $E(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 达到稳定时，有：

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

根据 SEIRS 模型所建立的微分方程组，我们有：

$$\begin{cases} \lambda R - \alpha I S = 0 \\ \alpha I S - \beta E = 0 \\ \beta E - \gamma I = 0 \\ \gamma I - \lambda R = 0 \end{cases}$$

经整理可得：

$$\begin{cases} S = \frac{\gamma}{\alpha} \\ \frac{R}{\alpha\beta\gamma} = \frac{E}{\alpha\gamma\lambda} = \frac{I}{\alpha\beta\lambda} \end{cases}$$

由上式即可求出系统达到均衡时，各节点的均衡数目 S 、 E 、 I 、 R 。由此，我们就证明了，在经典的 SEIRS 模型的假设下，系统的均衡态与系统初值无关。

我们可以看出，在 SEIRS 模型看来，达到均衡状态时，易感态节点的数目 S 由 α 与 γ 决定，且一般来说这个数目小到可以忽略不计；而 E 、 I 、 R 节点的均衡数目则由宏观参数 α 、 β 、 γ 、 λ 的相对大小所确定。

由于我们建立的模型具有一定的动态性，我们不大容易严格从数学上证明其稳态与系统初值的无关性，但通过改变参数进行大量实验，我们可以基本确认，在多数情况下，在我们的模型假设下， S 、 E 、 I 、 R 节点的均衡数目与系统初值无关，而是取决于系统宏观变量以及节点间微观传播动力学的共同影响。

2.3.2 连边概率与信息曝露阈值成比例变化时的仿真结果

假设观望节点 E 的信息曝露阈值 N_1 、 N_2 随连边概率而变化，即：

$$N_1 = \frac{N \cdot p \cdot p(I_0)}{2}$$

$$N_2 = \frac{3N \cdot p \cdot p(I_0)}{2}$$

其中 N 为节点总数， p 为连边概率， $p(I_0)$ 为初始状态下传播节点在总节点中占有的比例。

以下分别是连边概率 $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.4, 0.6$ 时， S 、 E 、 I 、 R 节点数目随时间的演变情况：

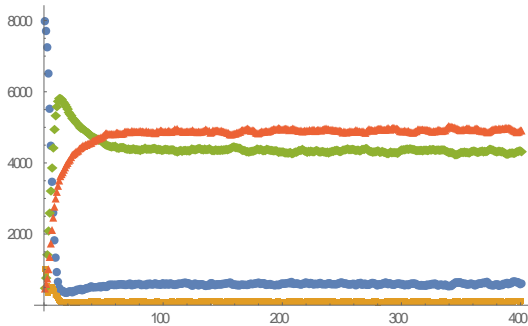


图 3 $p=0.01$, N_1, N_2 成比例增减时的仿真结果图

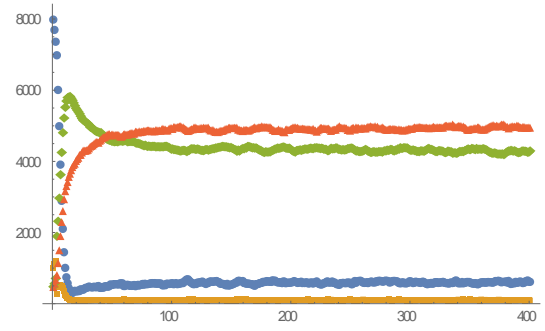


图 4 $p=0.05$, N_1, N_2 成比例增减时的仿真结果图

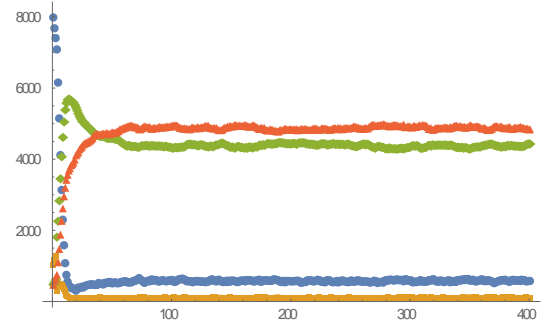


图 5 $p=0.1$, N_1, N_2 成比例增减时的仿真结果图

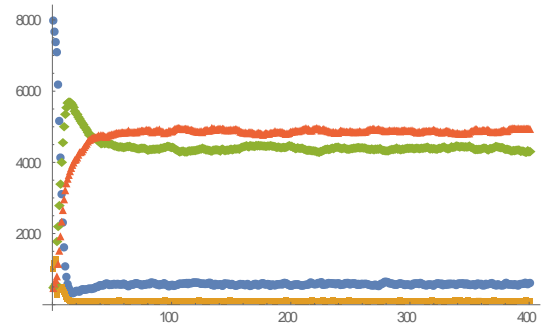


图 6 $p=0.4$, N_1, N_2 成比例增减时的仿真结果图

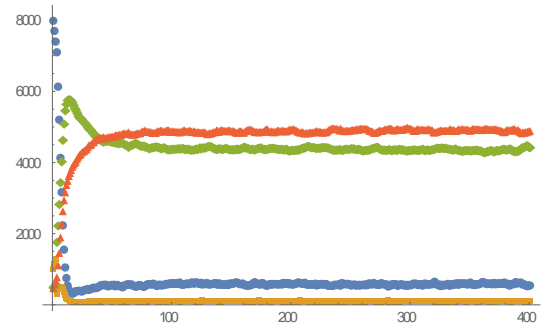


图 7 $p=0.6$, N_1, N_2 成比例增减时的仿真结果图

按照我们的预期，当连边概率降低时，个体间的信息交互减少，因而模型演变得应当缓慢一些，而连边概率提高时，个体间的信息交互增多，因而模型应当演变得更快一些，信息交互越频繁，则系统越能够快速达到平衡。

然而，通过仿真实验我们可以看出，与我们的预期相反，尽管 p 的取值从 0.01、0.05、0.1、0.2、

0.4 到 0.6 变化不等,但除了随机项的扰动外, S、E、I、R 曲线的演变规律基本相同。

究其原因,在我们的模型假设中, S 节点向 E、I、R 节点转化的概率是由每个个体认识的人中的具有特定属性的传播者的比例决定的,而从统计的角度看,连边概率的改变并不能造成上述人数比例的改变,这就使得连边概率不同时,在统计的意义上, S 节点以相同的概率向 E、I、R 节点发生转化。同理,我们定义信息曝露阈值 N_1 、 N_2 随连边概率 p 成比例变化,这就使得 E 节点转化为 I 节点和 R 节点的概率不随连边概率 p 的改变而改变。同样地,我们可以看出 I 节点、R 节点的转变概率也不随 p 的改变而改变,正是由于我们的模型做出了这样的设定,使得我们的模型仿真结果基本不随 p 而变化,因而保持了一定的“比例不变性”。

2.3.3 连边概率与信息曝露阈值不成比例变化时的仿真结果

在研究连边概率 p 对于仿真结果的影响时,我们假定信息曝露阈值 N_1 、 N_2 随 p 等比例增减,这一假设有一定的合理性,其现实意义是:当连边概率 p 值较小时,每个人平均认识的人数也较少,只需要其中一定比例的个体成为传播节点,就能够使得观望者转变为传播者,反之,连边概率 p 值较大时,每个人平均认识的人也比较多,只有个体接触到的传播节点达到一定的比例,才有可能对个体施加影响,使其变为传播者。

然而,我们并不能够排除另外一种可能性,即当连边概率较低时,个体不仅需要接触到一定比例的传播者,还需要传播者的数量达到一个最低限度,才能够产生记忆强化与社会强化的有效传播效果;而考虑到人类的生理、认知、记忆极限,人类能够维系的关系网络一般最大容量不超过 150 人,也就是说,当连边概率较大时,传播者的比例可能失去了实际的意义,此时个体并不能量化感知数量庞大的传播者的比例变化。

此外,在“连边概率与信息曝露阈值成比例变化时的仿真结果”一节,我们已经看出,这种“人口比例一定,则转化概率一定”的模型具有比例不变性,这并不太符合我们的直觉预期,因而,我们应当尝试改变这种固定比例的参数设置。

基于上述分析,我们认为,对于信息曝露阈值 N_1 、 N_2 的设定,我们不一定要遵从比例原则,也可以尝试遵从数量原则。

鉴于人类能够维系的人际关系网络的最大容量不超过 150 人,我们设定信息曝露下限阈值 $N_1 = 100, N_2 = 300$,我们研究在此条件下,模型的仿真结果。

以下是信息曝露阈值取固定值 $N_1 = 100, N_2 = 300$,而连边概率 p 分别取 0.01, 0.03, 0.05, 0.08, 0.10 时的仿真结果。

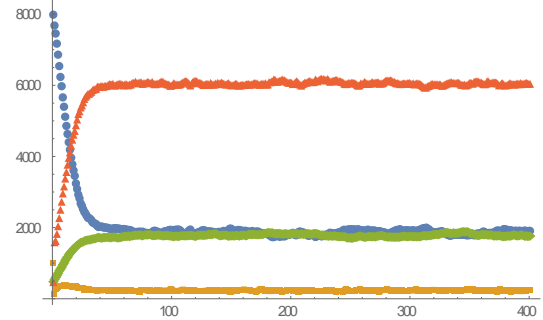


图 8 $p=0.01, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

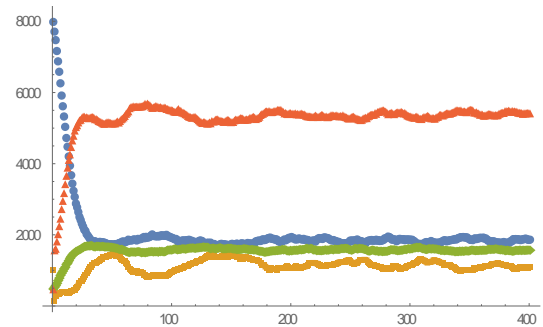


图 9 $p=0.03, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

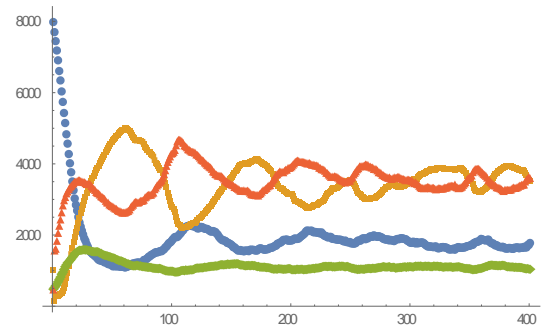


图 10 $p=0.05, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

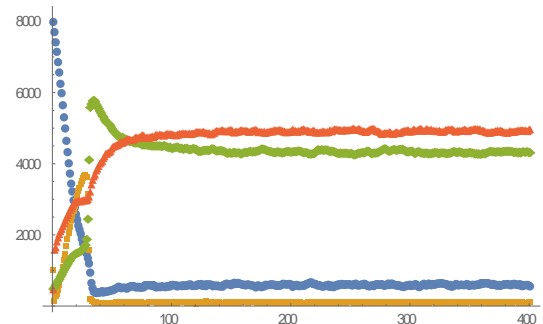


图 11 $p=0.08, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

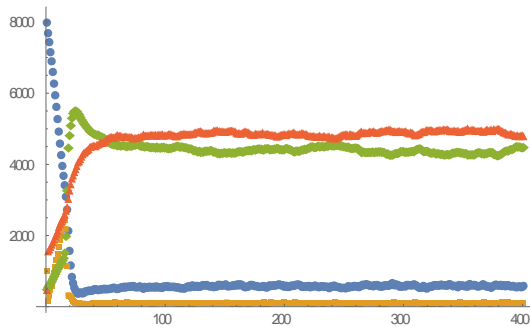


图 12 $p=0.1, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

从某种角度看, $p=0.01$ 和 $p=0.1$ 是两个具有典型意义的取值。当 $p=0.01$ 时, 几乎任何个体都不可能在一个 $T=2$ 的时间周期内遇到 $n > N_1$ 个传播者, 也就是说所有观望节点 E 都将迅速转变为免疫节点 R , 从仿真结果图中很容易验证这一点。

当 $p=0.1$ 时, 对于传播者比例的初值

$p(I_0) = 0.05$ 而言, $N_1 = 100$ 恰好为一个节点在 $T=2$ 的时间周期内能够遇到的传播者个数的期望值。也就是说, 当 $p=0.1$ 时, 在传播初期, 观望节点大约有一半的概率被“淘汰”成为免疫者, 而只有较小的概率跨过 $N_2 = 300$ 的门槛, 成为传播者。

然而, 从仿真结果图中我们可以看到, $p=0.1$ 时的仿真结果与 $p=0.2$ 时的仿真结果差异并不大。当 $p=0.2$ 时, E 节点在传播初期成为 I 节点的门槛并不高, 因而可以预见, 传播者 (绿色曲线) 应当迅速增高。而当 $p=0.1$ 时, E 节点在传播初期成为 I 节点的门槛是比较高的, 而 $p=0.1$ 时网络达到的最终稳态与 $p=0.2$ 的稳态状况的差距并不大。

通过详细分析系统在 $t=0\sim 50$ 时段的各节点数量关系, 我们可以看出, 由于传播门槛较高, E 节点数量 (橙色曲线) 首先快速下降, 然后迅速被 S 节点向 E 节点的转化过程所补充。随着 S 节点向 E 节点与 I 节点的转化, 当 E 节点与 I 节点达到一定的数目时, 较大的基数似乎克服了传播门槛, 使得 $t=20$ 之后, E 节点迅速转化为 I 节点。

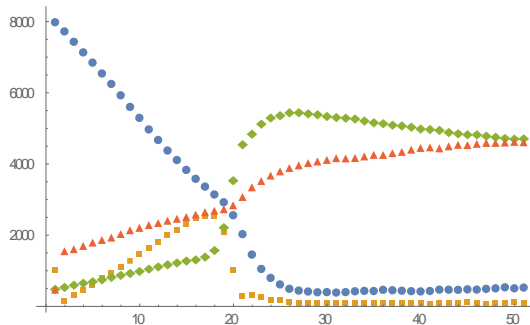


图 13 $p=0.1, N_1=100, N_2=300$ 时的系统初期仿真图

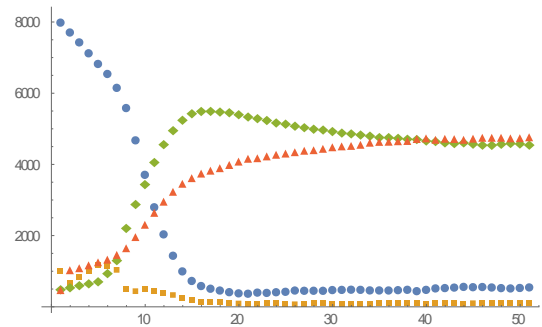


图 14 $p=0.2, N_1=100, N_2=300$ 时的系统初期仿真图

由此可见, $p=0.1$ 和 $p=0.2$ 时, 虽然系统的最终均衡状态相似, 但其中间所经历的历程并不相同。与 $SEIRS$ 模型相比, 在本模型中, 系统经历的过程不再是连续的、单一的、单调的, 而是多阶段的。在多种因素的相互作用下, 每个阶段呈现出不同的主要矛盾, 因而使得每个阶段具有不同的特性。

而最值得注意的情况, 是 $p=0.05\sim 0.08$ 时的情形。

当 p 从 0.01 向 0.1 增长时, 随着 E 节点转变为 I 节点的门槛的降低, 我们看到, 当 $p=0.03$ 时, 与 $p=0.01$ 的情况相比, 观望节点 E 的数量已大幅增加, 而且 E 节点与 R 节点的数目已经出现了波动。

当 $p=0.05$ 时, 我们看到, E 、 I 、 R 节点的数目都出现了大幅度的波动, 其波动呈现一定的周期性, 该周期与我们的参数设定 $T=2$ 没有简单而直接的联系。我们看到, 在这一波动过程中, S 、 R 节点大致同相, 而 S 与 E , R 与 E 均大致呈现反相的关系。

尽管在上面的图像中, $p=0.05$ 时, E 、 I 、 R 的波动似乎呈现振荡收缩的趋势, 然而如果我们绘制 $p=0.05$, $t=0\sim 1000$ 时的 S 、 E 、 I 、 R 节点数量曲线, 我们就会发现, 节点数目的波动似乎是持续的, 并没有衰减的趋势。

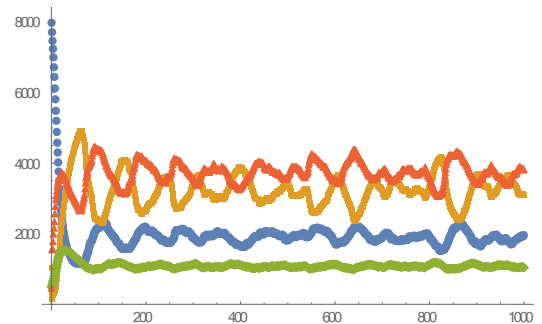


图 15 $p=0.05, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

$p=0.06$ 时, 我们看到, E 节点数目的振荡幅度更为明显:

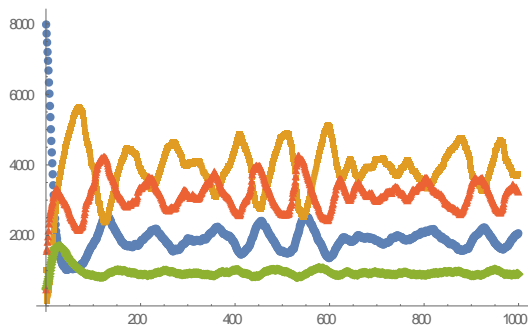


图 16 $p=0.06, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

$p=0.07$ 时，我们看到 E 节点数目的振荡幅度继续增大：

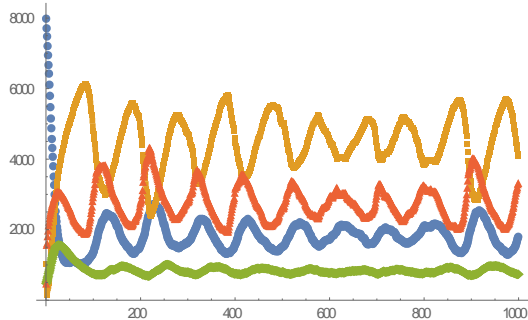


图 17 $p=0.07, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图

当 $p=0.08$ 时，节点数目的变化规律迅速呈现为一种迥异的模式。

事实上，当 $p=0.08$ 时，仿真结果出现了某种不确定性。在多次实验时，以 $p=0.08$ 的条件分别能够得到以下多种仿真结果。

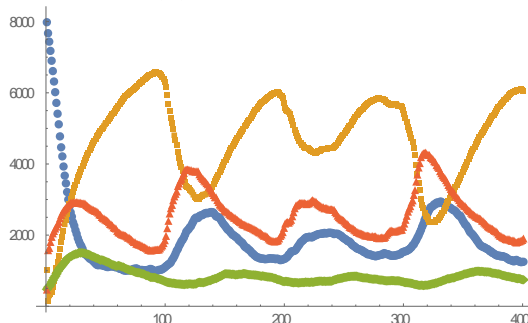


图 18 $p=0.08, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图（一）

在第一种情况下，E 节点数目的波动幅度近乎达到极大，而 S、E、R 节点数目波动的周期比起 p 较小时，有了很大的延长，这种周期的延长，似乎可以看作“波动态”到“定常态”的一种过渡。

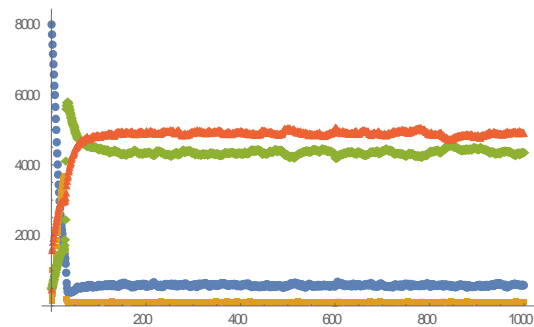


图 19 $p=0.08, N_1=100, N_2=300$ 时的仿真结果图（二）

在第二种情况下，尽管给予 $p=0.08$ 这一相同的初始条件，但仿真结果与 $p=0.07$ 时完全不同，而与 $p=0.1\sim 0.2$ 时的仿真结果高度相似。对于这一现象的确切成因，我暂时无法给出明确的结论，我的推测性的意见是，本仿真模拟了节点转化过程中的随机性，而 p 接近于 0.08 这一临界值时，仿真结果变得对于各种随机因素十分敏感，这就造成了在随机因素的扰动下，仿真计算结果变得高度不稳定的情况。

3 讨论

由于在现实生活中，每个人的信息来源有限，交往范围也比较有限，因而类比传染病模型，将网络构建成全通的、可用微分方程求解的形式，这一做法存在着某种改进的余地。

对于节点数 $N=10000$ 的情况，我们研究了连边概率 p 值较小时，系统的演化模式与演化结果。

我们固定了信息暴露下限阈值 $N_1 = 100$ 以及信息暴露上限阈值 $N_2 = 300$ 。考虑到个人所能维系的人际圈的容量上限大约为 150，这一阈值选择可能具有一定的现实意义。

当我们固定了 N_1, N_2 的数值后， p 的大小就成为了衡量信息传播门槛的指标， p 值越大，传播门槛越低， p 值越小，传播门槛越高。

我们看到，当 p 值极小时，信息传播门槛很高，此时在系统达到的均衡态中，免疫型 R 节点占了大多数，而传播型 I 节点只占一小部分，作为过渡形态出现的观望态 E 节点的数目很少。我们看到，当信息的传播门槛很高时，在人群中始终存在着一定比例的没有经验的易感型 S 节点。

当 p 值较大时，系统进入另一种均衡态，在该均衡态下，无经验的易感态 S 节点与呈现过渡性质的观望态 E 节点的稳态数目均维持在很低的水平，

而 I 节点的数目则稳定在较高的水平,至少与 R 节点旗鼓相当、势均力敌。这种情况,就类似于现代的广告和教育的传播情况。

后一种 p 值较大的情况又可以细分为两种情况。

在我们的模型中,信息的传播主要有两种途径,一是易感人群通过接触私人关系好且志趣相投的传播者而转化为传播者,二是观望者通过在一定的时段内暴露在充足的传播者的信息轰炸中,从而转变为传播者。我们的模型表明,当 p 值不够大时,信息的公开传播受阻, E 节点最初的信息暴露量不足,是私人关系造成的信息传播造就了信息初始的散布;而当 p 值足够大时, E 节点最初就能接收到充足的信息暴露,此时公开渠道的信息暴露成为信息传播的主要途径,而私人关系造成的信息散布则居于次要位置。

当 p 值介于上述两种稳态之间时,我们观察到了系统的波动、振荡、不稳定乃至“混沌”的现象。

从现实的角度考虑,公害、社会禁忌被严格禁止,其传播极其受限,这就类似于我们的模型中系统达到的第一种稳态。在这种状态下, I 节点的传播受到抑制,最多只能形成一种亚文化。而 E 节点数目很少,说明多数人的立场分明。由于对于传播的控制严密,在人群中确实存在相当数量的未接触相关舆论信息的 S 节点。

对于无害的、双赢的、具有正外部性的信息,其传播通常畅通无阻,这就类似于我们的模型中系统达到的第二种稳态。在这种状态下,几乎所有人都耳濡目染,极少有 S 节点,也极少有人没有形成成熟的意见(E 节点)。虽然 I 节点占了相当的数目,但 R 节点一般来说数目也并不少,这就好比在科学昌明的社会中会有很多人对科学保持怀疑态度。

对于那些在短期看来富有诱惑力,而从长期看来无效乃至有害的信息,如行骗、谣言,又比如那些富有诱惑力又经常改头换面的信息,例如时尚,我们可以用我们的模型中的不稳定状态来类比。在这种状态下,态度不明确的观望者成为了多数,而

且各群体人数的对比发生周期性的波动,使得事态呈现不稳定的特性。联想到时尚的周而复始的特性,又或者联想到一些骗术的长盛不衰、常用常新,抑或联想到谣言的复杂性、反复性,我们不难理解我们的模型所推导出的不稳定状态的用武之地。

在我们的仿真中,当 p 接近于 0.08 时,系统仿真结果具有高度的不确定性,其结果有时接近于 $p=0.05\sim 0.07$ 时的仿真结果,有时接近于 $p=0.1\sim 0.2$ 时的仿真结果,有时又能够呈现出过渡的状态,这种混沌状态,则可以代表在人心思变的变革时期,系统(社会)运转的最终的不确定的结果。

4 结束语

与经典的 SEIRS 模型相比,本模型考虑了网络拓扑结构的特性,考虑了节点个体属性的影响,刻画了个体节点间信息交互的微观动力学,与基于微分方程建立的模型相比,本模型能够更好地刻画与反映复杂的现实。

另一方面,本模型对于现实的刻画还比不够精细,本模型中混沌现象的产生机制也尚不清楚,这些都指明了今后的改进与研究方向。

参考文献:

- [1] 王更. 信息传播中社会加强效应和遗忘机制的研究. 西安理工大学专业学位论文, 2018.4.
- [2] 杨瑞琪,张月霞, 基于复杂网络的 IC-SEIR 网络舆情传播模型研究. 测控技术 2018 年第 37 卷第 11 期. 1000-8829(2018)11-0072-06.
- [3] 丁学君. 基于 SIR 的 SNS 网络舆情话题传播模型研究[J]. 计算机仿真, 2015, 32(1): 241-247.
- [4] 游新年,刘群. 基于传染病模型的微博信息传播预测研究[J]. 计算机应用与软件. 2016, 33(5): 53-56.
- [5] 王林,戴冠中. 复杂网络中的社团发现——理论与应用[J]. 科技导报, 2005, 23(8): 62-66.
- [6] 王林,李海林. 病毒传播模型的瞬态仿真研究[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2005, 2(2): 39-44.