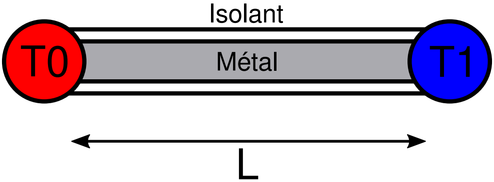
Modélisation de la diffusion thermique.

Josselin SCOUARNEC

Mai 2021

Présentation de l'expérience



On note $T(x,t)$ la température de la barre à la position x et à l'instant t. La température vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

La variation de température en x par rapport à t est proportionnelle à une certaine variation de température par rapport à x. Rq : Elle est nulle pour un profil linéaire.

Discrétisation du problème

On approxime les variations par des coefficients d'accroissement.
Intuitivement la variation d'ordre 2 est la variation de la variation.
On remplace :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow \frac{T(t+\Delta T) - T(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{(T(x+\Delta x) - T(x)) - (T(x-\Delta x) - T(x))}{\Delta x^2}$$

L'équation devient :

$$\boxed{T(x, t+\Delta t) = T(x,t) + k\Delta t \frac{T(x+\Delta x, t) + T(x-\Delta x, t) - 2T(x,t)}{\Delta x^2}}$$

Normalisation et conditions limites

On pose $\theta(x,t) = \frac{T(x,t)-T_1}{T_0-T_1}$ la température normalisée, ainsi les paramètres T_0 et T_1 n'interviennent plus.

On a les conditions suivantes sur les extrémités de la barre :
$\theta(0,t) = 1$ et $\theta(L,t) = 0$.

Comme $T = \theta(T_0 - T_1) + T_1$ on trouve une équation très similaire :

$$\boxed{\theta(x,t+\Delta t) = \theta(x,t) + \Delta t \frac{\theta(x+\Delta x,t) + \theta(x-\Delta x,t) - 2\theta(x,t)}{\Delta x^2}}$$

On peut poser $k = 1$ et $L = 1$.

Résolution numérique

À partir des paramètres L, t_f, Δx et Δt, on défini un tableau que l'on va remplir avec les valeurs que l'on va calculer. On peut déjà renseigner les conditions initiales et limites.

x, t	t_0	t_1	t_2	...	t_f
0	$\theta_{0,0}$	1	1		1
x_2	$\theta_{1,0}$	$\theta_{1,1}$	$\theta_{1,2}$		$\theta_{1,f}$
x_3	$\theta_{2,0}$	$\theta_{2,1}$	$\theta_{2,2}$		$\theta_{2,f}$
...	...	...	...		...
$x_n = L$	$\theta_{n,0}$	0	0		0

Chaque colonne décrit un instant et peut être calculée à partir de la colonne précédente en appliquant la formule de récurrence à chaque valeur.

Implémentation

Initialisation

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#constantes
L  = 10.0
dx = 0.1
tf = 50.0
dt = 0.001

#vérification humaine si le pas est trop grand
if (delta := dt/(dx*dx) ) > 0.1 :
    input(f'Delta = {delta}, continuer ?')


n_x = int(L/dx)  #nombre de valeurs de X
n_t = int(tf/dt) #nombre de valeurs de t

thet = np.zeros((n_x, n_t)) #matrice de résultats

thet[:, 0].fill(0) #conditions initiales
thet[0].fill(1)    #conditions limites
thet[-1].fill(0)

#différentielle
d_theth = lambda x,t : (thet[x+1][t-1] + thet[x-1][t-1] - 2*thet[x][t-1])/(dx*dx)
```

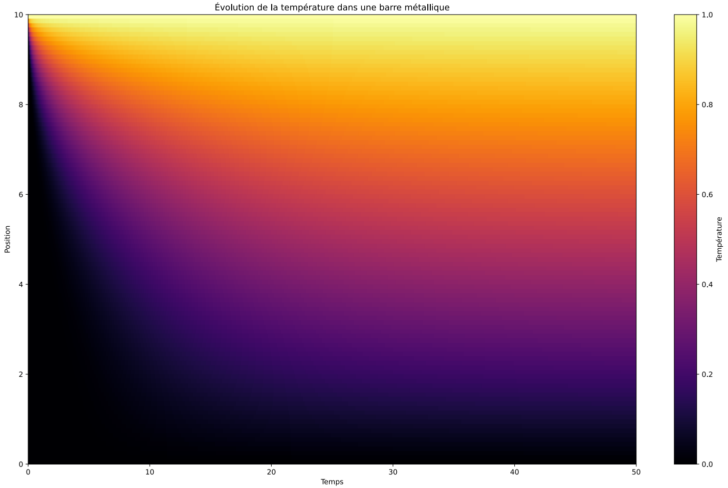
Implémentation

Exécution

```
#argument des ranges : ignorer les conditions initiales/limites
#évite les erreurs d'indices

for t in range(1, n_t) :

    #traité comme un système de n_x équations
    for x in range(1, n_x-1) :
        thet[x][t] = thet[x][t-1] + d_theth(x,t) * dt

    #pourcentage de complétion
    print(f'Simulation {round(t/n_t*100)}%', end='\r')

print("\nOK")


#affichage histogramme 2D
plt.imshow(thet, extent=(0, tf, 0, L), cmap='inferno', interpolation='nearest', aspect='auto')
cb = plt.colorbar()

#titre et légendes
cb.set_label('Température')
plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('Position')
plt.title('Évolution de la température dans une barre métallique')

plt.show()
```

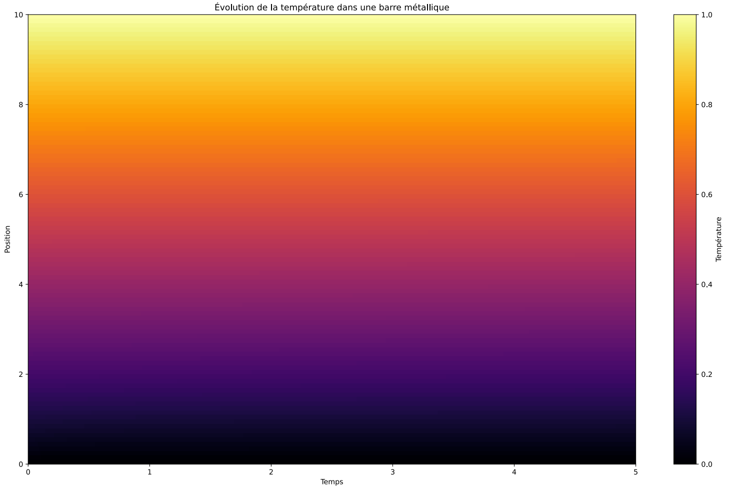
Résultats

Profil initial uniforme en 0



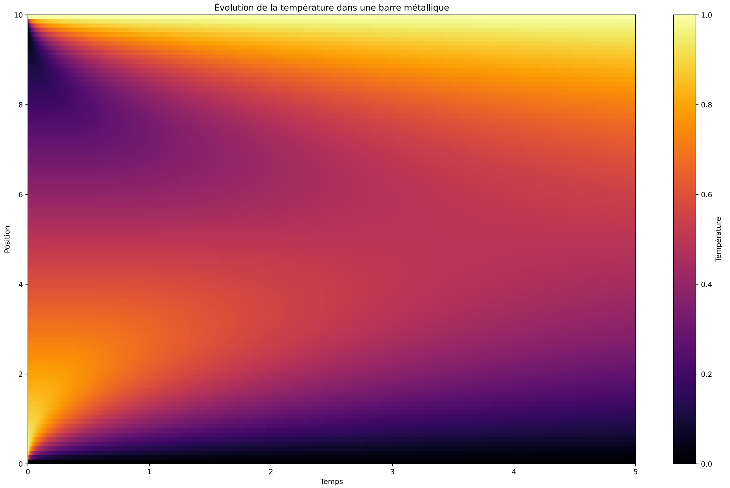
Résultats

Profil initial linéaire



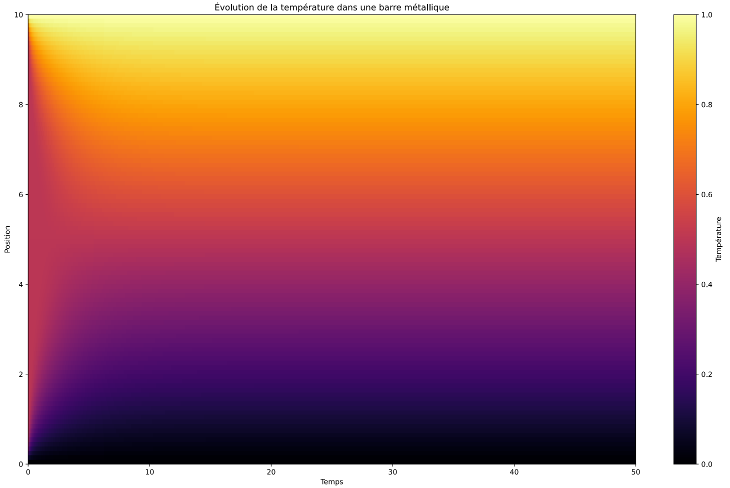
Résultats

Profil initial linéaire "inversé"



Résultats

Profil initial uniforme en 0.5



Résultats

Profil initial sinusoïdal (2 périodes, tf=5)