

# Odwrotna Notacja Polska

## Wprowadzenie teoretyczne do tematu

Odwrotna notacja polska<sup>1</sup> (ONP, ang. Reverse Polish Notation, RPN) – jest sposobem zapisu wyrażeń arytmetycznych, w którym znak wykonywanej operacji umieszczony jest po operandach (zapis postfiksowy), a nie pomiędzy nimi jak w konwencjonalnym zapisie algebraicznym (zapis infiksowy) lub przed operandami jak w zwykłej notacji polskiej (zapis prefiksowy). Zapis ten pozwala na całkowitą rezygnację z użycia nawiasów w wyrażeniach, jako że jednoznacznie określa kolejność wykonywanych działań.

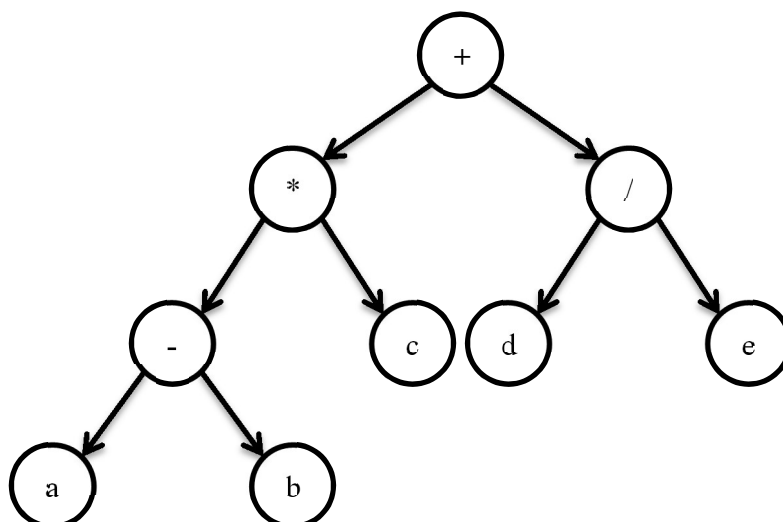
Poniższa tabelka przedstawia kilka wyrażeń arytmetycznych w zapisie tradycyjnym oraz w Odwróconej Notacji Polskiej. Przy zapisie tradycyjnym korzystanie z nawiasów jest konieczne w celu określenia kolejności wykonywania działań. W ONP nie używa się nawiasów.

Zapis infiksowy (tradycyjny)	Zapis postfiksowy (ONP)
$a + b$	$a b +$
$a + b + c$	$a b + c +$ (ab+ stanowi pierwszy argument drugiego dodawania)
$(a + b) * c$	$a b + c *$
$c * (a + b)$	$c a b + *$
$(a + b) * c + d$	$a b + c * d +$
$(a + b) * c + d * a$	$a b + c * d a * +$
$(a + b) * c + d * (a + c)$	$a b + c * d a c + * +$
$(a + b) * c + (a + c) * d$	$a b + c * a c + d * +$

## Drzewa wyrażeń arytmetycznych

Jedno z zastosowań drzew binarnych to reprezentacja wyrażeń arytmetycznych. Wyrażenia arytmetyczne można reprezentować jako drzewa, gdzie w liściach pamiętane są liczby, a w węzłach symbole operacji arytmetycznych. W zależności od wybranego sposobu poruszania się po takim drzewie można uzyskać tradycyjny zapis (inorder), Notację Polską (preorder) lub Odwróconą Notację Polską (postorder).

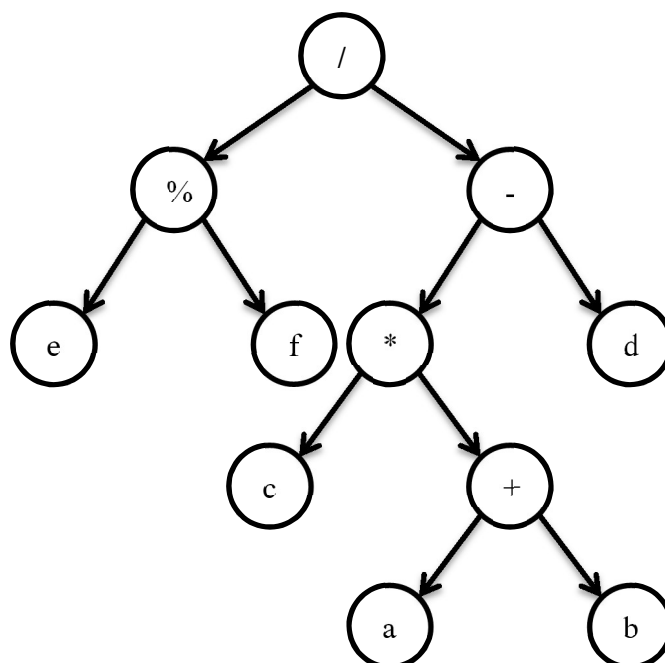
<sup>1</sup> [http://pl.wikipedia.org/wiki/Odwrotna\\_notacja\\_polska](http://pl.wikipedia.org/wiki/Odwrotna_notacja_polska)



Wyrażenie zapisane na powyższym drzewie można zapisać zatem na trzy sposoby:

1. Zapis tradycyjny (infiksowy):  $((a-b)*c)+(d/e)$
2. Notacja Polska (prefiksowa):  $+*-abc/de$
3. Odwrotna Notacja Polska (postfiksowa):  $ab-c*de/+$

Możliwe jest również tworzenie drzew wyrażeń arytmetycznych na podstawie zapisu wyrażenia w dowolnej notacji. Przykładowo dla zapisu w tradycyjnej notacji drzewo wyrażenia będzie wyglądało następująco:  $(e\%f)/((c*(a+b))-d)$ .

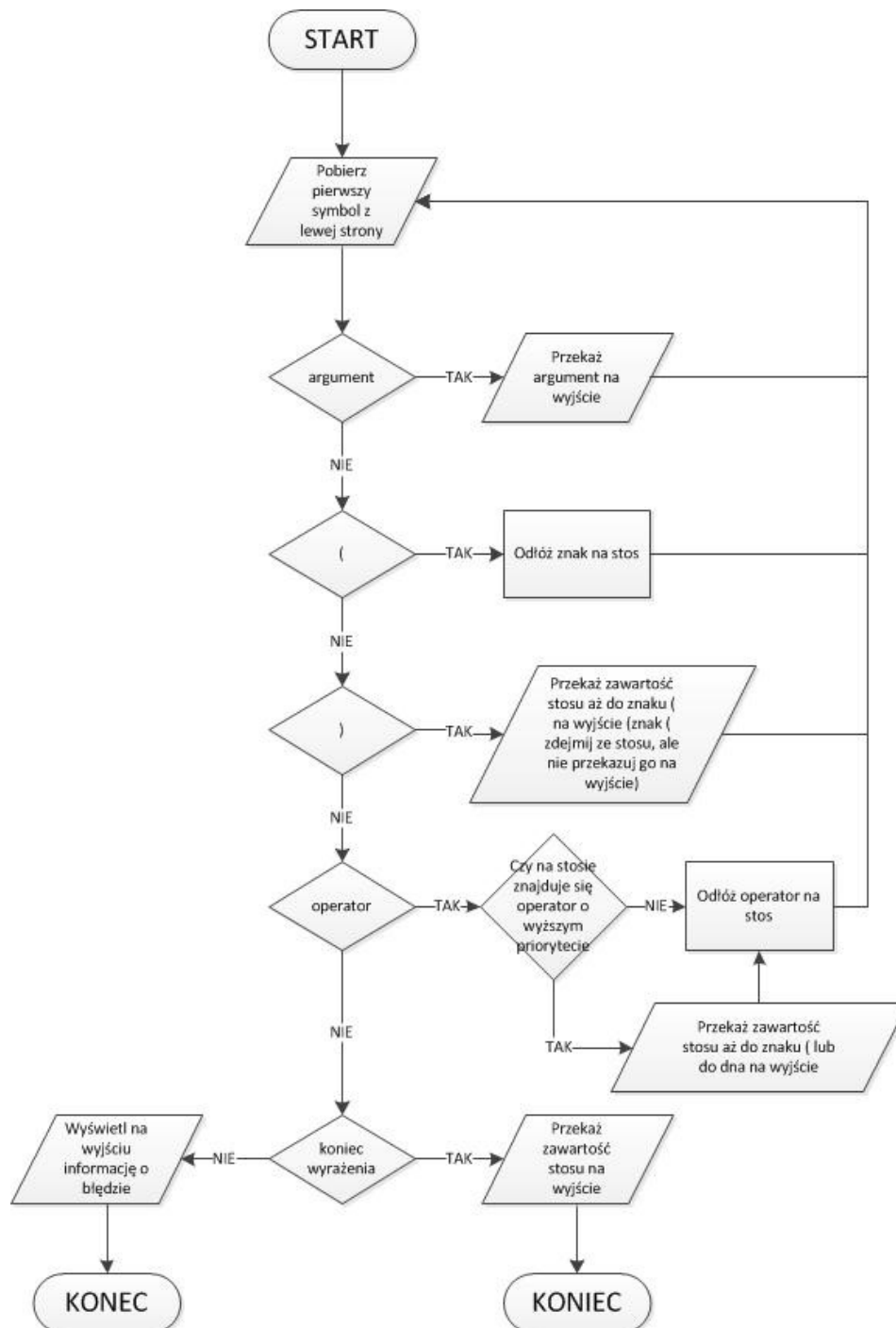


To samo wyrażenie w notacji postfiksowej  $(ef\%cab+*d-/)$  i prefiksowej  $(/\%ef-*c+abd)$ .

Przy tworzeniu drzewa wyrażenia arytmetycznego ma znaczenie, po której stronie znajdzie się węzeł. Nie jest to dowolne.

Tworzenie drzewa dla notacji postfiksowej jest nieco trudniejsza gdyż zaczynamy od liści i kończymy na korzeniu. Z kolei dla notacji prefiksowej jest to łatwiejsze z uwagi na to, iż rozpoczynamy od korzenia i zmierzamy do liści.

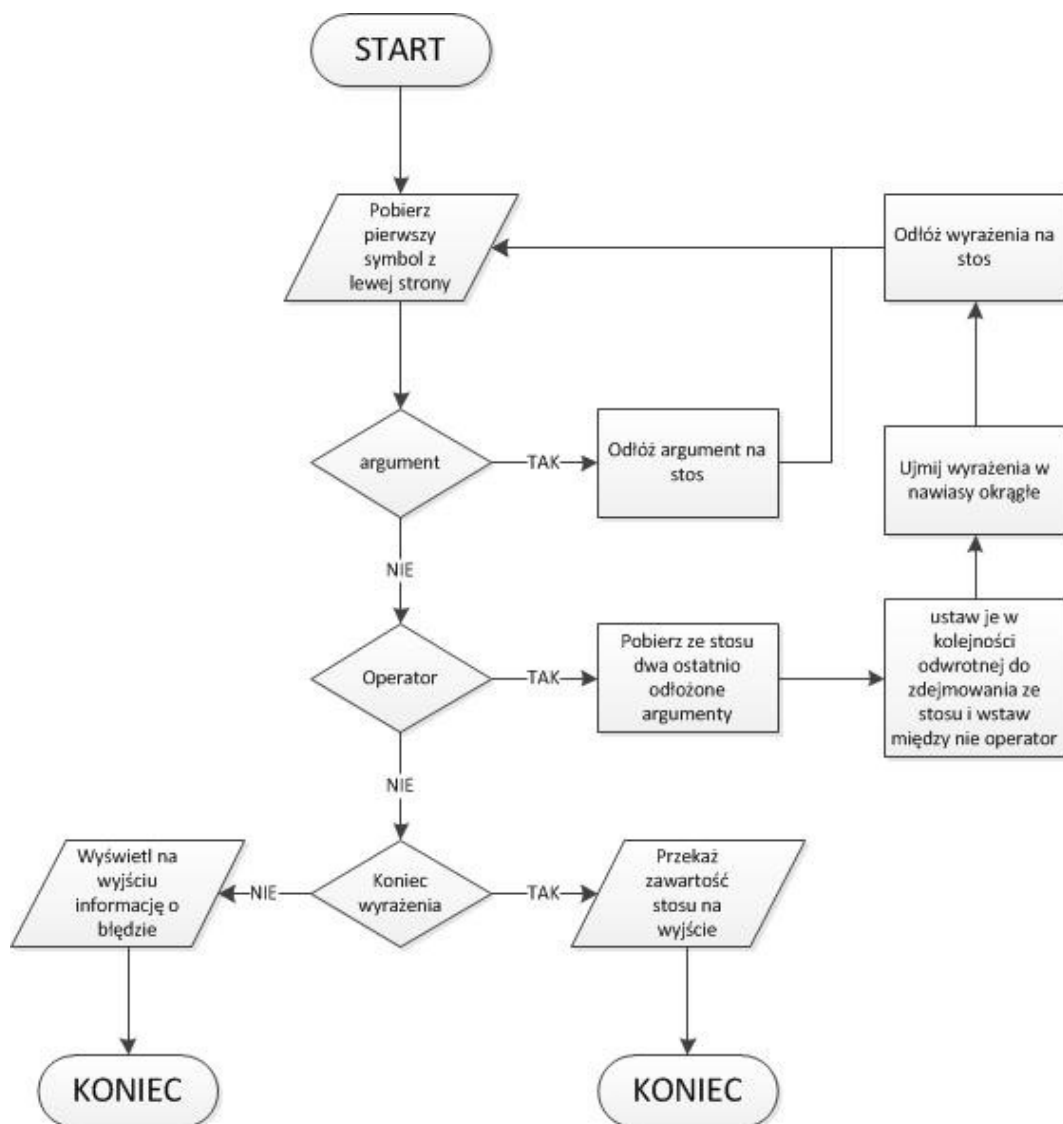
### Konwersja z notacji algebraicznej do ONP



Powyższy schemat blokowy przedstawia algorytm konwersji wyrażenia z notacji algebraicznej do notacji ONP. Poniżej znajduje się operacja konwersji przykładowego wyrażenia krok po kroku według tegoż algorytmu.

Wyrażenie:  $(e-f)+(a*b+c/d)$ 

Numer kroku	Wejście	Stos	Wyjście
1	(	(	
2	e	(	e
3	-	(-	e
4	f	-	ef
5	)		ef-
6	+	+	ef-
7	(	+(	ef-
8	a	+(	ef-a
9	*	+(*	ef-a
10	b	+(*	ef-ab
11	+	+(+	ef-ab*
12	c	+(+	ef-ab*c
13	/	+(+ /	ef-ab*c
14	d	+(+ /	ef-ab*cd
15	)	+(+	ef-ab*cd/
16	Koniec wyrażenia		ef-ab*cd//

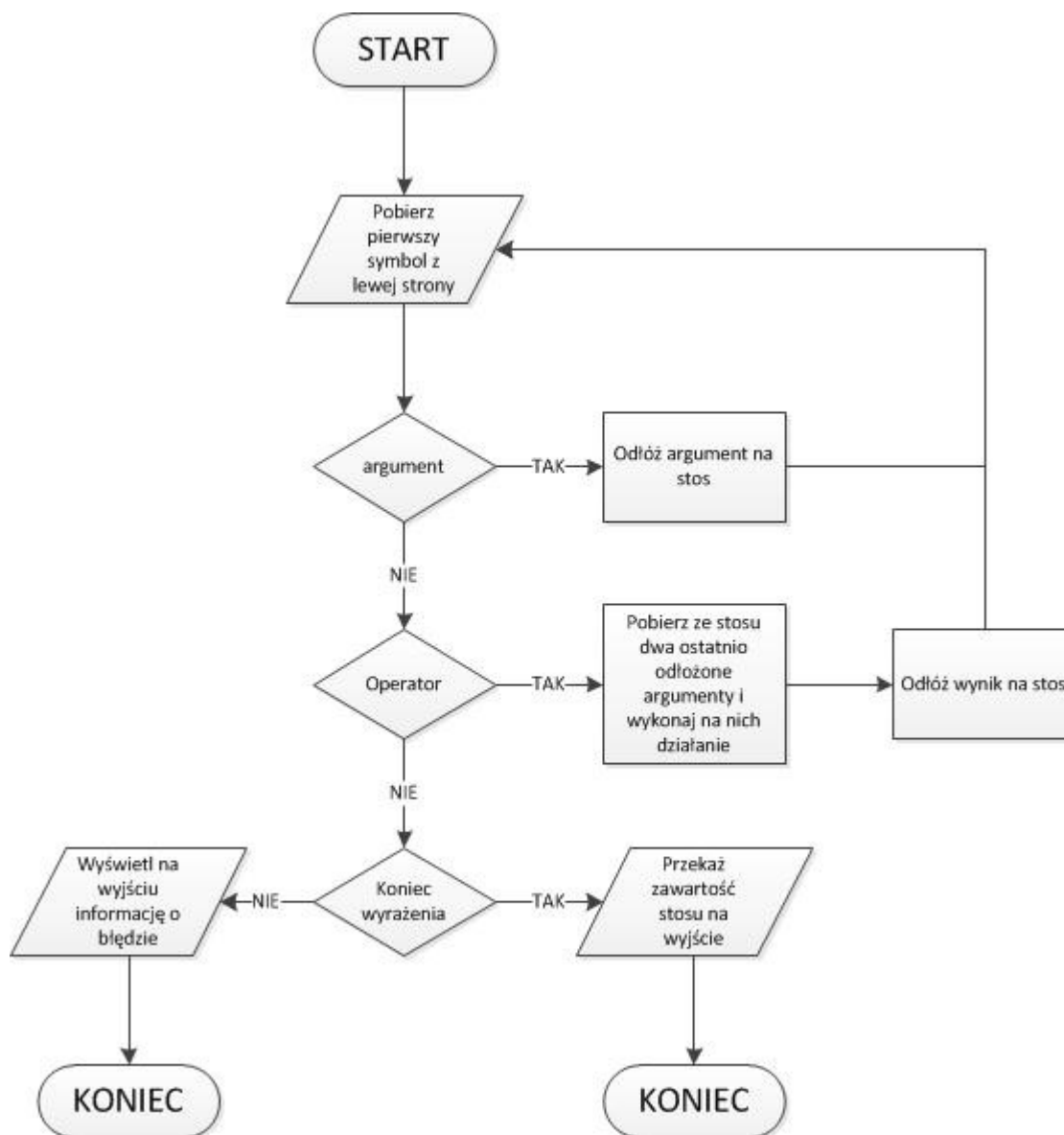
**Konwersja z notacji ONP do algebraicznej**

Powyższy schemat blokowy przedstawia algorytm konwersji wyrażenia z notacji ONP do notacji algebraicznej. Poniżej znajduje się operacja konwersji przykładowego wyrażenia krok po kroku według tegoż algorytmu.

Wyrażenie:  $ef \cdot ab * cd / ++$

Numer kroku	Wejście	Stos	Wyjście
1	e	e	
2	f	ef	
3	-	(e-f)	
4	a	(e-f)a	
5	b	(e-f)ab	
6	*	(e-f)(a*b)	
7	c	(e-f)(a*b)c	
8	d	(e-f)(a*b)cd	
9	/	(e-f)(a*b)(c/d)	
10	+	(e-f)((a*b)+(c/d))	
11	+	(e-f)+((a*b)+(c/d))	
12	Koniec wyrażenia		(e-f)+((a*b)+(c/d))

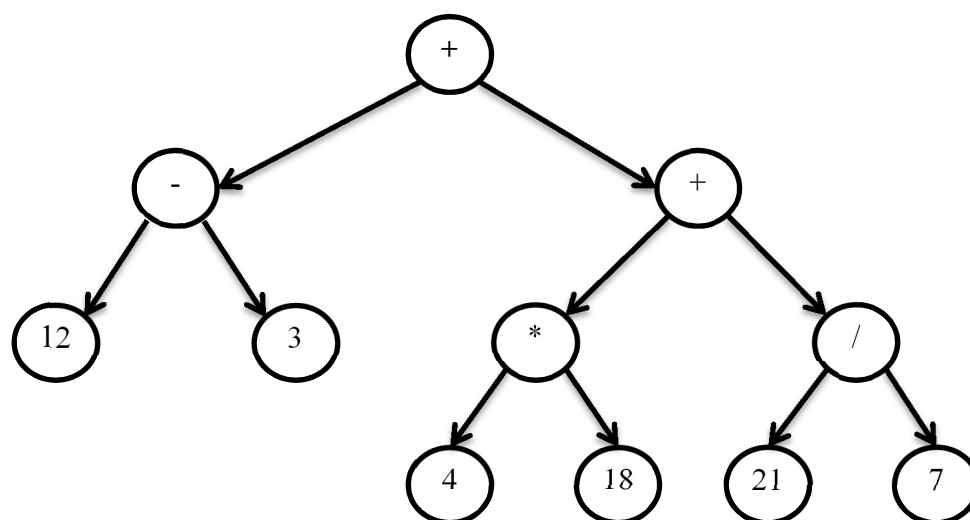
Można zauważyć, iż pomimo, że po ponownej konwersji zostały dołożone nawiasy, kolejność działań nie uległa zmianie.

**Obliczanie wartości wyrażeń zapisanych przy pomocy ONP**

Powyższy schemat blokowy przedstawia obliczanie wartości wyrażenia zapisanego w ONP. Poniżej znajduje się operacja obliczania wartości przykładowego wyrażenia krok po kroku według tegoż algorytmu.

Wyrażenie: 12 3 - 4 18 \* 21 7 / + +

Numer kroku	Wejście	Stos	Wyjście
1	12	12	
2	3	12 3	
3	-	9	
4	4	9 4	
5	18	9 4 18	
6	*	9 72	
7	21	9 72 21	
8	7	9 72 21 7	
9	/	9 72 3	
10	+	9 75	
11	+	84	
12	Koniec wyrażenia		84



Powyższe drzewo obrazuje przykładowe wyrażenia, którego wartość została obliczona.