

Лабораторная работа № 9

Эффективное кодирование

Цель работы: изучить метод оптимального кодирования Шеннона–Фано и Хаффмана

Задание на лабораторную работу:

1. Взять фотографию размером 128x128 с глубиной цвета 256 градаций серого
2. Взять центральную строку пикселей $T: X [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ и выполнить ее квантование по формуле $X = \text{round}(X / 20) * 20$. Эта строка будет представлять собой сообщение
3. Для каждого уникального символа вычислить его частоту появления в цифровой последовательности (строке)
4. Проанализировать первичный алфавит: количество символов алфавита, значение энтропии, среднюю минимальную длину двоичного кода
5. Построить двоичный равномерный односимвольный код
6. Сформировать коды Шеннона–Фано для выделенных символов
7. Сформировать коды Хаффмана для выделенных символов
8. Оценить среднюю длину кодовой комбинации для кодов Хаффмана и Шеннона–Фано
9. Оценить степень сжатия сообщения, закодированного равномерным односимвольным кодом и кодом Шеннона–Фано, а также односимвольным кодом и кодом Хаффмана
10. Оценить избыточность для сформированных кодов Хаффмана и Шеннона–Фано

Методические указания:

Исходные данные для работы – упорядоченные по не возрастанию частоты встречаемости (вероятности появления) символы первичного алфавита.

Результат – кодовые таблицы и кодовое дерево.

Алгоритм формирования кодовых комбинаций по методу Шеннона–Фано:

1. Алфавит разбивается на два подмножества с примерно одинаковыми суммарными вероятностями. Верхнее подмножество получает префикс 1, нижнее – 0.
2. Полученные подмножества рекурсивно делятся и получают соответствующие двоичные цифры в префиксном коде до тех пор, пока в каждом подмножестве не остается по одному элементу.

Алгоритм формирования кодовых комбинаций по методу Хаффмана:

1. Символы входного алфавита образуют список свободных узлов. Каждый лист имеет вес, который может быть равен либо вероятности, либо количеству вхождений символа в сжимаемое сообщение.
2. Выбираются два свободных узла дерева с наименьшими весами.
3. Создается их родитель с весом, равным их суммарному весу.
4. Родитель добавляется в список свободных узлов, а двое его детей удаляются из этого списка.
5. Одной дуге, выходящей из родителя, ставится в соответствие бит 1, другой — бит 0.
6. Шаги, начиная со второго, повторяются до тех пор, пока в списке свободных узлов не останется только один свободный узел. Он и будет считаться корнем дерева.

Анализ алфавита:

Энтропия независимых случайных событий x с n возможными состояниями (от 1 до n):

$$H(x) = -\sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i)$$

Значение двоичных разрядов кода в п. 4 определяется по теореме Шеннона.

Первичный алфавит А содержит N знаков со средней информацией на знак, определенной с учетом вероятностей их появления, $I_1^{(A)}$. Вторичный алфавит В содержит М знаков со средней информационной емкостью $I_1^{(B)}$. Исходное сообщение, представленное в первичном алфавите, содержит n знаков, а закодированное сообщение – m знаков.

Отношение m/n характеризует среднее число знаков вторичного алфавита, которое приходится использовать для кодирования одного знака первичного алфавита – длина кода $K^{(B)}$.

Относительная избыточность кода (Q):

$$Q = 1 - \frac{I^{(A)}}{I^{(B)}} = 1 - \frac{I_1^{(A)}}{K^{(B)} I_1^{(B)}}$$

Эффективность кода определяется средним числом двоичных разрядов для кодирования одного символа:

$I_{cp} = \sum_{i=1}^m f_i k_i$, где k - число двоичных разрядов для кодирования символа, f - частота символа.

Содержание отчета:

1. Титульный лист с названием лабораторной работы, фамилией студента и группы.
2. Исходное изображение и фотография в заданном формате.
3. Полученная цифровая последовательность (первичный алфавит):
 - a. Если выделение цифровой последовательности выполнялось путем написания программы, то приводится листинг кода с подробными комментариями.
 - b. Если выделение цифровой последовательности выполнялось путем использования готового программного обеспечения, то приводятся скриншоты на каждый этап работы.
4. Упорядоченные символы первичного алфавита с указанием частоты встречаемости (вероятности появления). Количество символов алфавита, значение энтропии. Расчетная длина двоичного кода.
5. Коды Шеннона–Фано.
6. Кодовое дерево Хаффмана.
7. Коды Хаффмана для символов.
8. Закодированное равномерным кодом сообщение, длина кодового слова, количество переданной информации при передаче сообщения.
9. Закодированная полученным кодом Шеннона–Фано последовательность, длина кодового слова, количество переданной информации при передаче сообщения.
10. Закодированная полученным кодом Хаффмана последовательность, длина кодового слова, количество переданной информации при передаче сообщения.
11. Расчеты по п. 8 – 10 задания на лабораторную работу.
12. Выводы по работе – оценка степени сжатия при разных методах кодирования.