Surreale Zahlen

Wie mit Go die Unendlichkeit besiegt wurde

Facharbeit von *Julian Fleischer* im Fach *Mathematik*

26. Januar 2006 - 09. März 2006

Betreuende Lehrerin: *Frau H. Smidt*

Die Arbeit wurde am 09. März 2006 eingereicht

Note: noch sehr gut Punkte: 13

Unterschrift der Fachlehrerin

H. Smidt

Inhaltsverzeichnis

0. Einführung: x > x ^ x = x?

Im Mathematikunterricht sind wir bei der Limes-Betrachtung von Exponential- und Logarithmusfunktionen oft auf ein Problem gestoßen. Nimmt man z.B. die Funktion $x \mapsto e^x - x^2$ und führt eine Limes-Betrachtung für $x \to \infty$ durch, so erhält man als scheinbares Ergebnis $\infty - \infty = 0$. Zeichnet man die Funktion, so scheint als Ergebnis jedoch ∞ einzig möglich zu sein. Mit Verstand betrachtet sieht man auch, dass das exponentielle Glied der Funktion viel größer wird als das quadratische. In mathematischer Schreibweise ließe diese Behauptung sich wie folgt ausdrücken:

$$\lim_{x\to\infty} e^x > \lim_{x\to\infty} x^2$$

…mit tragischen Folgen:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \wedge \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \wedge \lim_{x\to\infty} e^x > \lim_{x\to\infty} x^2$$
$$\Rightarrow \infty > \infty$$

Dies ist ein klarer Widerspruch; denn logischerweise wird ∞ gleich sich selbst sein. Daraus muss aber wieder die Schlussfolgerung resultieren, dass unsere Aussage $\infty > \infty$ unmöglich wahr sein kann, denn was gleich etwas anderem ist kann nicht gleichzeitig größer oder kleiner sein – insbesondere es nicht sich selbst. In dieser Grauzonensituation bekommt man dann im Unterricht die Antwort, dass das exponentielle Glied „eben dominanter" sei.

Bei meiner Suche nach einer Antwort habe ich das Konzept von *infinitesimalen und transfiniten* Zahlen gefunden, welches genau dieses Phänomen der Unendlichkeit versucht zu beschreiben. Infinitesimale Zahlen sind vom Betrag her (teilweise) unendlich, dennoch lassen sich klare Werte und Gesetzmäßigkeiten zwischen ihnen aufstellen. Mit einer umwerfenden Eleganz und mathematischen Schönheit ist mir dabei am meisten das Konzept der Surrealen Zahlen ins Auge gestochen. Diese Zahlen, die ich im Weiteren beschreiben will, wurden erfunden (manche bevorzugen es, dass man „entdeckt" sagt) von einem amerikanischen Professor namens John H. Conway. Er trug damit sehr der kombinatorischen Spieltheorie bei. Die Idee zu den Surrealen Zahlen wie es sie nun gibt, kamen ihm beim Spielen eines alten asiatischen Spiels – dem Go. Zwar ist Go selbst kein Spiel, das mittels der Surrealen Zahlen vollständig beschrieben werden kann, aber immerhin teilweise. Ich möchte im Folgenden einen Einblick geben, wie man von Go auf diese Zahlen kommen kann – und später was sie eigentlich sind und was ihr großes Potenzial ist.

1. Ein „kurzer" Exkurs: Go

Go ist auf den ersten Blick ein recht simples Spiel, aber vermutlich genau deswegen umso komplexer. Es gibt mehrere verschiedene Regelsätze die aber nur in Kleinigkeiten variieren. Wir werden im Weiteren die japanischen Regeln verwenden.

1.1. Die Spielregeln

Go wird traditioneller Weise auf einem Spielfeld bestehend aus 19 vertikalen und 19 horizontalen Linien gespielt, die zusammen 361 Schnittpunkte bilden. Es gibt kein Limit der Spielsteine, außer der natürlichen Grenze durch die Größe des Spielfeldes. Es spielen zwei Spieler gegeneinander, Schwarz und Weiß, wobei standardmäßig Schwarz beginnt. Abwechselnd setzen die beiden Spieler nun ihre Steine auf noch freie Schnittpunkte. Einmal gesetzte Steine dürfen nicht mehr bewegt werden, es sei denn sie werden geschlagen. Mehrere aneinandergrenzende Steine bilden eine Gruppe, so z.B. die drei weißen Steine 3, 4 und 5 in *Fig. 1*.

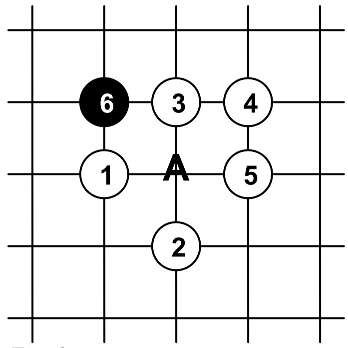

Fig. 1

Steine und Gruppen besitzen sog. Freiheiten, das sind die freien Schnittstellen die an sie angrenzen. Der schwarze Stein mit der Nummer 6 hat beispielsweise zwei Freiheiten, die weiße Gruppe bestehend aus den Steinen 3, 4 und 5 hat sechs Freiheiten. Wenn ein Stein oder eine Gruppe keine Freiheiten mehr hat, muss er/sie vom Spielfeld entfernt werden. Im Umkehrschluss bedeutet das natürlich auch, dass ein Stein der keine Freiheiten mehr hätte, wenn er gesetzt würde, gar nicht erst gesetzt werden darf (er würde ja ohnehin sofort wieder entfernt werden). In *Fig. 1* beispielsweise dürfte kein schwarzer Stein auf den Schnittpunkt *A* gesetzt werden.

Es gibt davon eine Ausnahme, und zwar wenn durch das Setzen eines Steines ein anderer Stein seine letzte Freiheit verliert und somit der neu gesetzte Stein wieder eine Freiheit hat. Solche Situationen nennt man Tsumego („Leben und Tod"), auf die ich hier nicht weiter eingehen möchte, da sie für das Verständnis von surrealen Zahlen nicht weiter wichtig sind. Im Anhang C sind der Vollständigkeit halber solche Situationen näher erläutert.

Weiterhin gibt es beim Setzen von Steinen die Regel, dass keine bereits einmal im Spiel vorgekommene Stellung wiederholt werden darf – da diese schon einmal vorkam und wiederum die selben Züge ermöglichen würde, die bereits getan wurden. Ein Spiel würde dann kein Ende mehr nehmen, käme nicht ein Spieler zur Einsicht. Diese Situation nennt man Ko, aber auch sie ist für das weitere Verständnis der Surrealen Zahlen nicht wichtig und hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

1.2. Das Ende des Spiels

Im Gegensatz zu Spielen wie Schach besteht beim Go kein Zugzwang, d.h., dass ein Spieler eine Runde passen darf, wenn er glaubt, seine Situation gerade durch keinen Zug verbessern zu können. Wenn beide Spieler hintereinander passen, endet das Spiel.

1.3. Auszählen der Punkte / Feststellen des Gewinners

Gewonnen hat, wer mehr Punkte hat. Die Gesamtzahl der Punkte setzt sich zusammen aus der Anzahl der gegnerischen Steine, die man geschlagen hat, und der kontrollierten Freiheiten.

Man kontrolliert eine Freiheit, wenn diese über die Gitternetzlinien ausschließlich zu Steinen der eigenen Farbe oder dem Spielfeldrand verbunden ist. In *Fig. 2* werden die mit *A* betitelten Felder von Weiß kontrolliert, das mit *C* betitelte Feld von Schwarz und die mit *B* betitelten Felder sind neutral, da sie Verbindungen zu weißen und zu schwarzen Steinen haben, somit also nicht eindeutig gesagt werden kann, wer sie kontrolliert.

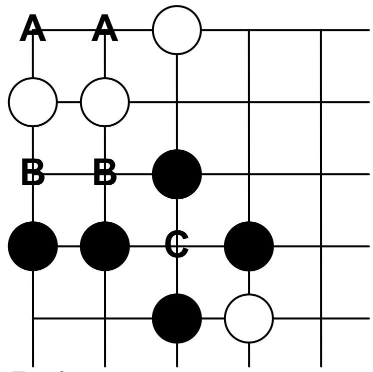

Fig. 2

Zur Vereinfachung beim Auszählen füllen wir die kontrollierten Freiheiten des jeweils gegnerischen Spielers mit den geschlagenen Steinen aus. Mit jedem geschlagenen Stein den ein Spieler somit abgibt, verliert er einen Punkt. Der Gegner jedoch verliert auch einen Punkt, da ja eine von seinen Freiheiten besetzt wird. Somit ergibt sich die gleiche Differenz zwischen den Spielern – und darauf kommt es an, denn wir wollen nicht wissen wie hoch wer gewonnen hat, sondern nur wer überhaupt gewonnen hat.

1.4. Eine typische Endsituation

Mit diesem neu erworbenen Wissen wollen wir uns jetzt mal ein Go-Spiel anschauen. Um den Überblick zu bewahren benutzen wir aber kein 19x19 großes Spielfeld, sondern eines mit den Abmessungen 9x9.

Fig. 3 zeigt eine typische Endsituation im Go.

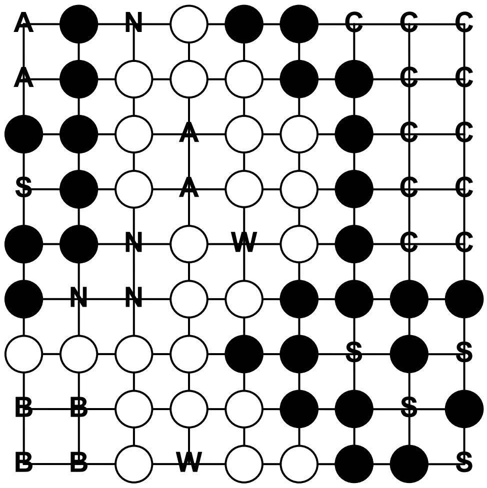

Fig. 3

Die mit *S* bezeichneten Schnittpunkte sind Freiheiten, die definitiv von Schwarz kontrolliert werden. Gleichermaßen sind die mit *W* bezeichneten Freiheiten die, die definitiv von Weiß kontrolliert werden. Die mit *N* markierten Schnittpunkte sind Neutrale Schnittpunkte – die Spieler haben hier gepasst, weil es keinem von beiden noch etwas bringen würde, hier einen Stein hinzusetzen; denn es zählen ja nur die kontrollierten Freiheiten, nicht die besetzten Schnittpunkte.

Besondere Beachtung wollen wir einmal den mit *A* markierten Regionen schenken. Hier hätte es für keinen der beiden Spieler Sinn gemacht einen Stein zu setzen. Sie selbst hätten sich eine kontrollierte Freiheit genommen; als Gegner hätten sie sie sofort wieder verloren, da der Rivale sofort einen Stein in die verbliebene Freiheit gesetzt hätte und somit der Zug für beide umsonst gewesen wäre. Dank der Weisheit die einem Go-Spieler beschieden ist, haben Schwarz und Weiß diesen Sachverhalt erkannt und hier gar nicht erst weitergespielt.

Analog, nur mit mehr Feldern, verhält es sich für die mit *B* und *C* bezeichneten Regionen.

Während des Spiels hat Schwarz 2 Steine von Weiß geschlagen, Weiß hat 5 Steine von Schwarz geschlagen. Wenn wir diese Steine nun wie in *Abschnitt 1.3* beschrieben in die noch vorhandenen Freiheiten einsetzen erhalten wir folgendes Bild (*Fig. 4*):

Wenn wir jetzt die kontrollierten Freiheiten zählen, so kommen wir auf einen Wert von 6 für Weiß und 13 für Schwarz – womit Schwarz eindeutig gewonnen hat.

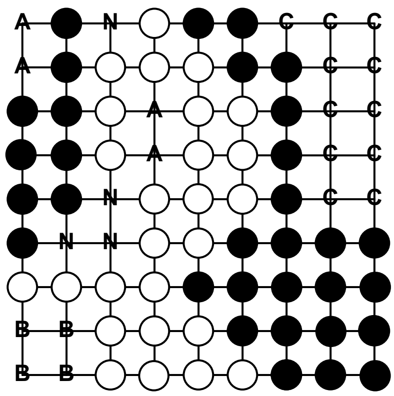

Fig. 4

2. Vom Spiel zur Zahl

2.1. Jede Situation ist ein geordnetes Paar

Schauen wir uns jetzt noch mal die Endsituation des Spiels wie in Fig. 3 dargestellt an: Wir stellen fest, dass es bestimmte Schnittstellen gibt auf die nur Schwarz setzen darf und welche auf die nur Weiß setzen darf. Von diesen abgesehen gibt es noch Stellen auf die Weiß und Schwarz setzen könnten, es aber nicht getan haben, da keiner dieser Züge ihnen einen Vorteil gebracht hätte.

Es gibt also für Schwarz und für Weiß beschränkte Zugmöglichkeiten, die nicht gleich sind. Diese Zugmöglichkeiten können wir als Mengen zusammenfassen. Wenn wir die Felder von links nach rechts und von oben nach unten durchnummerieren (wobei wir bei 1 beginnen, sodass das Feld oben links 1, oben rechts 9 und unten rechts 81 ist) können wir die Zugmöglichkeiten für Schwarz und für Weiß wie folgt als Mengen darstellen:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_a = \{1;3;7;8;9;10;17;18;22;26;27;28;31;35;36;39;44;45;47;48;61;63;64;65;71;73;74;81\} \\ W_a = \{1;3;7;8;9;10;17;18;22;26;27;31;35;36;39;41;44;45;47;48;64;65;73;74\} \end{array}}$$

Da die beiden Spieler in einer geordnete Aufstellung antreten (einer fängt an, der andere ist der zweite Spieler), können wir diese beiden Mengen wieder weiter zusammenfassen, nämlich als geordnetes Paar: $\boxed{P_a = (S_a \mid W_a)}$.

Wir haben vorhin herausgefunden, dass Schwarz und Weiß beide gepasst haben, da sie ihre jeweilige Situation nicht mehr verbessern konnten. Wir lassen sie diese sinnfreien Züge nun einmal durchführen und kommen so zu dieser Endsituation (*Fig. 5*):

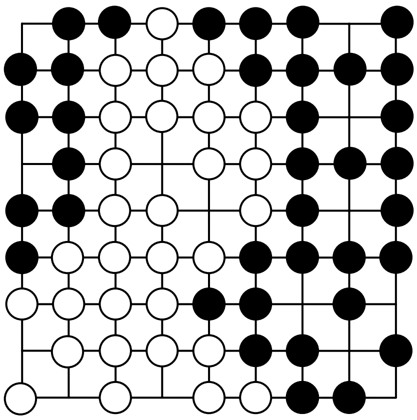

Fig. 5

Diese neue Situation lässt sich mathematisch gesehen jetzt so ausdrücken:

$$\boxed{P_b = (\{1;8;26;28;44;61;63;71;81\} \mid \{31;41;64;74;76\})}$$

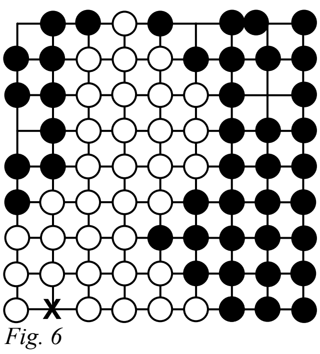

Fig. 6

Immer noch haben beide Spieler Zugmöglichkeiten. Jetzt macht es zwar spiellogisch absolut keine Sinn mehr, aber lassen wir sie auch die letzten möglichen Züge machen: Nach 4 Zügen (*Fig. 6*) hat Weiß keine Möglichkeiten mehr, Schwarz könnte weiß nun vernichten (ein schwarzer Stein auf X und Weiß hätte keine Freiheiten mehr). Die neue Situation: $\boxed{P_c = (\{1;8;26;28;74\} \mid \varnothing)}$

2.2. Allgemeine Situationen

Mittlerweile kennen wir schon drei bestimmte Situationen. Zeit, dass wir diese ein wenig verallgemeinern.

Anmerkung: Im Weiteren werden die Spieler Schwarz und Weiß, deren Zugmöglichkeiten durch die erste und zweite Menge unseres geordneten Paares dargestellt werden, synonym mit den Begriffen linker und rechter Spieler gesetzt. Dies dient der Vereinfachung der Begrifflichkeiten. Analog dazu wird auch von der linken und rechten Menge gesprochen.

2.2.1. ({…}|Ø} und (Ø|{…})

Wir wissen jetzt also, dass in der oben geschriebenen Situation $\boxed{P_c = (\{1;8;26;28;74\} \mid \varnothing)}$ der rechte Spieler verloren hat, da er keine Zugmöglichkeiten mehr hat. Am Beispiel aus *Fig. 6* sehen wir, dass der linke Spieler (Schwarz) einen Stein auf Schnittstelle 74 setzen könnte womit die letzte verbliebene weiße Gruppe ihre letzte Freiheit verlieren würde und vom Spielbrett entfernt werden müsste. Dies alles trifft nur zu, wenn beide Spieler unter Zugzwang stehen bis einer komplett geschlagen ist. Im Go würde es praktisch wohl nie zu dieser Situation kommen, theoretisch wäre sie jedoch – wie wir ja gesehen haben – denkbar.

Für uns allerdings ist nun mehr nur relevant der Fakt, dass in dieser Spielsituation der Spieler verloren hat, der keine Zugmöglichkeiten mehr hat, in diesem Fall der Rechte. Im Allgemeinen können wir sagen, dass in einer Situation $(\{\ldots\} \mid \varnothing)$ der rechte Spieler verloren hat. Analog dazu hat in der Situation $(\varnothing \mid \{\ldots\})$ der linke Spieler verloren.

2.2.2. (Ø|Ø)

Wie in der Einführung bereits beschrieben, ist Go eigentlich kein Spiel das sich komplett mit den Surrealen Zahlen beschreiben lässt. Ein Beispiel ist diese Situation: $(\varnothing \mid \varnothing)$. Aus dem was wir bisher wissen, können wir uns vorstellen, dass dies eine Situation ist, in der keiner der beiden Spieler noch eine Zugmöglichkeit hat. Im Go jedoch gibt es immer einen möglichen Zug. Lediglich durch die Ko-Regel (Verbot der wiederholten Herbeiführen einer bereits vorhandenen Situation) ist gegeben, dass dies irgendwann der Fall wäre – beispielsweise wenn der einzig mögliche Zug beider Spieler eine bereits vorhanden gewesene Situation wieder herbeiführen würde.

Behalten wir uns jedoch im Kopf: Es kann eine solche Situation geben, in dieser Situation hat keiner der beiden Spieler noch eine Möglichkeit einen Zug zu tun und das Spiel wäre logischerweise zu Ende.

2.3. Die erste surreale Zahl

Wenn wir uns die in *2.2.* beschriebenen Situationen genauer anschauen, können wir bestimmte Zusammenhänge ausmachen. Wie in *2.2.2.* beschrieben müsste $P = (\varnothing \mid \varnothing)$ die wirkliche Endsituation eines Spiels darstellen. Aber wie sieht die Situation davor aus?

Einen Zug zuvor war nur noch ein einziger Zug möglich – der letzte mögliche nämlich. Wir nehmen nun einmal an dass diese ominöse Zugmöglichkeit x die des linken Spielers gewesen ist: $Q = (\{x\} \mid \varnothing)$. Er nimmt diese Zugmöglichkeit nun wahr und es ergibt sich die bekannte Endsituation. Irgendwie kommt man also von $(\{x\} \mid \varnothing)$ zu $(\varnothing \mid \varnothing)$. Nur wie?

Betrachten wir das ganze einmal andersherum: Jetzt ist *P* die erste Situation überhaupt. Die zweite Situation *Q* ist daraufhin entstanden. Da es sich um dieselbe Partie handelt, kann man sogar sagen, dass Q *aus P* entstanden ist. Zudem wollen wir auf Zahlen hinaus, also definieren wir für die surreale Zahl 0 die Situation *P*.

[1]: $0 \equiv (\varnothing \mid \varnothing)$

Mittels dieser uns bekannten Zahl definieren wir die nächste Situation: $(\{0\} \mid \varnothing)$. Diese definieren wir als 1. Analog zu 1 gibt es auch die Situation $(\varnothing \mid \{0\})$. Nennen wir sie -1.

[2]: $1 \equiv (\{0\} \mid \varnothing)$ [3]: $-1 \equiv (\varnothing \mid \{0\})$

Zuvor im Go hatten wir für die einzelnen Elemente jeweils die Nummer des Feldes auf das ein Stein gesetzt werden konnte genommen. Welches Feld das nun wirklich war, ist im Endeffekt eigentlich egal. Wichtig ist nur, dass die noch möglichen Züge verschieden sind, insbesondere für den mathematischen Zugang über den Mengenbegriff: Denn für eine Menge ist es nur wichtig, dass ein Element überhaupt in ihr vorkommt.

Mit der Zahl 0 können wir aber noch eine weitere Zahl bilden, die auch tatsächlich eine mögliche Spielsituation darstellt: $(\{0\} \mid \{0\})$. In dieser Situation haben beide Spieler dieselben Zugmöglichkeiten. Es kommt nur darauf an, wer als nächster zieht.

Da diese neue Zahl nun gar nicht mehr schön in unser System passt und unsere Zahlen bislang auch einfach nur Symbole mit etwas Bedeutung sind, ist es eigentlich auch egal welches Symbol wir ihr geben. Nennen wir sie *.

Entsprechend der bisherigen Konstruktion können wir weitere Zahlen konstruieren: Mit unseren neuen Zahlen 0, 1, -1 und dem etwas seltsam anmutenden * sind Kombinationen der Art $(\{0,1,*\} \mid \{-1\}), (\varnothing \mid \{*\}), (\{*\} \mid \{*,0,1,-1\})$ möglich – wie viel Sinn das aber macht, werden wir später noch sehen.

2.4. Zwei Regeln für Surreale Zahlen

Wir haben nun ein ganzes Arsenal an Zahlen und könnten theoretisch immer weitere bilden, die lustigsten Symbole für sie Ausdenken und damit eine Menge Spaß haben. Auf Dauer bringt uns das aber kein bisschen weiter. Was uns für Zahlen wirklich fehlt, sind Unterscheidungsmöglichkeiten. Zahlen selbst, Nummern, sind daraus entstanden, dass man Dinge durchzählen konnte. Dass man bestimmen konnte, wie viel ist etwas. Und dass man diese dann vergleichen konnte. Nun hier werden wir für surreale Zahlen in der beobachtbaren Wirklichkeit nun wirklich nichts mehr finden. John H. Conway hat daher folgende zwei Regeln für die Konstruktion und den Vergleich von Surrealen Zahlen aufgestellt.

2.4.1. Konstruktion

Eine surreale Zahl x ist das geordnete Paar zweier Mengen von surrealen Zahlen. Diese Mengen sind die „linke Menge“ und die „rechte Menge“. Keine Zahl in der linken Menge darf größer oder gleich irgendeiner Zahl aus der rechten Menge sein.

$x = (L \mid R)$

[4]: $\exists x_L \in L, \exists x_R \in R : \neg(x_L \leq x_R)$

2.4.2. Vergleich

Eine surreale Zahl x, ist dann kleiner oder gleich einer surrealen Zahl y, dann, wenn kein Element der rechten Menge von y kleiner oder gleich x ist und wenn y keinem Element aus der linken Menge von x kleiner oder gleich ist.

$x = (L_x \mid R_x), y = (L_y \mid R_y)$

[5]: $x \leq y \Leftrightarrow \neg(\exists x_L \in L_x : y \leq x_L) \wedge \neg(\exists y_R \in R_y : y_R \leq x)$

2.4.3. Weitere Definitionen

Da Surreale Zahlen sich zunächst etwas komplett anderes als die uns bekannten Zahlen sind, können wir für sie auch nicht dieselben Dinge wie für die uns bekannten Zahlen annehmen. Wir wissen nicht ob 1 + 1 wirklich 2 ist, geschweige denn was 1, + und 2 überhaupt sind. Daher seien die grundlegendsten Symbole die wir bisher definieren können, hier definiert:

$x \leq y$	x kleiner oder gleich y
$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$	Wenn x kleiner gleich y ist, dann ist y auch größer gleich x
$x = (L \mid R)$	Eine surreale Zahl bestehend aus den Mengen L und R

2.5. Am ersten Tag schuf Conway 0, 1 und -1

Mit diesen Regeln können wir nun unsere bereits erstellten Zahlen 0, 1, -1 und * darauf überprüfen, ob sie wirklich surreale Zahlen sind. Nehmen wir zuerst 0, was ja $(\varnothing \mid \varnothing)$ ist. Ist 0 gemäß der Definition der 2.4.1. eine surreale Zahl? Hierzu müssen wir wissen, ob keine Zahl der Linken Menge kleiner oder gleich einer Zahl aus der rechten Menge ist. Was kleiner gleich ist, ist in 2.4.2. definiert – aber dies ist auch durch sich selbst definiert. Was kleiner gleich also ist, können wir gar nicht mit Bestimmtheit sagen. Glücklicherweise gibt es in der linken und rechten Menge von 0 aber gar keine Elemente! Auch ist unsere Zahl ein Paar von Mengen surrealer Zahlen – nämlich keinen, also leeren Mengen. Unsere erste surreale Zahl 0 ist also eine waschechte surreale Zahl.

Wie steht es mit 1 und der analog gebildeten -1? Beide bestehen aus $\{0\}$ und $\varnothing$, 0 ist eine surreale Zahl, wie wir gerade herausgefunden haben, und $\varnothing$ kann gar nicht falsch sein, da es ja keine nicht-surrealen Zahlen enthält. Und auch hier tritt wieder der Fall ein, dass in einer der beiden Mengen keine Zahl anzutreffen ist. Wir können also nicht sagen, dass irgendetwas hier nicht kleiner oder gleich irgendetwas anderem sei. Auch 1 und -1 sind waschechte surreale Zahlen.

Aber wie steht es um *? * ist $(\{0\} \mid \{0\})$, und hier haben wir dann unser Problem: Wir wissen nicht was kleiner oder gleich genau ist, können also die Zahlen der linken und die Zahlen der rechten Menge gar nicht vergleichen. Die Frage die uns nun beschäftigt ist:

2.5.1. Ist 0 ≤ 0 ?

Bei unseren Zahlen würde sich nie ein Mensch fragen, ob 0 kleiner gleich sich selbst ist – denn es scheint sonnenklar, dass etwas wenigstens gleich sich selbst sein muss. Aber was für alle uns bekannten Zahlen gilt, muss ja nicht für surreale Zahlen gelten. Dennoch wäre es recht sinnlos, wenn 0 nicht gleich sich selbst wäre. Versuchen wir also zu beweisen, dass 0 kleiner oder gleich sich selbst ist:

Beweis: Nach *[5]* müsste folgendes wahr sein, wenn unsere Behauptung stimmt:

[6]: $(\varnothing \mid \varnothing) \le (\varnothing \mid \varnothing) \Leftrightarrow \neg(\exists x_L \in : (\varnothing \mid \varnothing) \le x_L) \wedge \neg(\exists y_R \in \varnothing : y_R \le (\varnothing \mid \varnothing))$

Und das stimmt. Denn in $\varnothing$ gibt es keine Elemente für die das nicht zutreffen könnte.

■

2.5.2. Ist * nun eine surreale Zahl?

Nach dem, was wir in *2.5.1.* herausgefunden haben: Nein. Denn $0 \le 0$ ist wahr, und somit ist $* = (\{0\} \mid \{0\})$ keine surreale Zahl nach *2.4.1.*

2.5.3. Wie verhalten sich 0, 1 und -1 zueinander?

Interessant ist es nun noch, herauszufinden in wie fern die uns einzig bekannte Relation zwischen unseren einzigen bisher bekannten Zahlen wirkt.

Betrachten wir also 0 und 1. Ist $0 \leq 1$ wahr?

Beweis: Ebenso wie *[6]*:

[7]: $(\varnothing \mid \varnothing) \leq (\{0\} \mid \varnothing) \Leftrightarrow \neg(\exists x_L \in \varnothing : (\{0\} \mid \varnothing) \leq x_L) \wedge \neg(\exists y_R \in \varnothing : y_R \leq (\varnothing \mid \varnothing))$

Auch hier stimmt die Aussage dank der leeren Menge.

■

Selbiges lässt sich herausfinden für die Relation $-1 \leq 0$. Interessant ist da schon die Relation $-1 \leq 1$ - diese müsste ja logischerweise auch wahr sein:

Beweis: $(\varnothing \mid \{0\}) \leq (\{0\} \mid \varnothing) \Leftrightarrow \neg(\exists x_L \in \varnothing : (\{0\} \mid \varnothing) \leq x_L) \wedge \neg(\exists y_R \in \varnothing : y_R \leq (\varnothing \mid \{0\}))$

Auch diese Aussage ist wahr dank der leeren Menge.

■

Machen wir zur Sicherheit aber auch noch die Gegenprobe. Schließlich reden wir über „kleiner oder gleich“. Es wäre also durchaus möglich, dass alle bisher konstruierten Zahlen einander gleichen, doch dann würden uns diese Zahlen nicht wirklich viel bringen. Die Relation $1 \leq 0$ sollte also falsch sein:

Beweis: $(\{0\} \mid \varnothing) \leq (\varnothing \mid \varnothing) \Leftrightarrow \neg(\exists x_L \in \{0\} : (\varnothing \mid \varnothing) \leq x_L) \wedge \neg(\exists y_R \in \varnothing : y_R \leq (\{0\} \mid \varnothing))$

Sollte diese Relation also wahr sein, müssten beide Teilbedingungen der rechten Aussage wahr sein. $\neg(\exists y_R \in \varnothing : y_R \leq (\{0\} \mid \varnothing))$ ist wahr, hier werden wieder Elemente der leeren Menge – also keine Elemente – geprüft. Damit $\neg(\exists x_L \in \{0\} : (\varnothing \mid \varnothing) \leq x_L)$ hingegen falsch ist (und das müssen wir ja jetzt beweisen), muss die Aussage „es existiert ein Element in der Menge $\{0\}$ das größer oder gleich 0 ist“ wahr sein. Das einzige Element in $\{0\}$ ist 0, und dass $0 \leq 0$ wahr ist, das haben wir in *2.5.1.* mittels *[6]* bereits bewiesen.

■

2.5.4. Ein paar neue Definitionen

Mit unseren so gewonnen Erkenntnissen sind wir in der Lage, einige weitere neue Relationen herzustellen. Wir wissen nun, dass 0 kleiner oder gleich 1 ist, 1 aber nicht kleiner oder gleich 0 ist. Was wir daraus als einzige wahre Aussage ableiten können ist, dass 0 kleiner 1 ist. In *2.4.3.* haben wir definiert, dass „x kleiner oder gleich y“ genauso gut als „y kleiner oder gleich x“ ausgedrückt werden kann. Da $0 \leq 0$ und $0 \geq 0$ wahre Aussagen sind, 0 aber nicht zeitgleich kleiner als auch größer sich selbst sein kann, muss 0 gleich sich selbst sein.

Diese neuen Definitionen (kleiner gleich, größer gleich, gleich) sind uns nun also bekannt:

$x < y$	x kleiner y (äquivalent zu $x \le y \wedge \neg(y \le x)$)
$x = y$	x gleich y (gilt wenn $x \le y \wedge x \ge y$)

Diese Definitionen mögen unsinnig erscheinen, sind aber durchaus nicht selbstverständlich wenn wir über surreale Zahlen reden. Vor allen Dingen ist zu bemerken, dass wir sie aus nur zwei anfänglichen Definitionen logisch einwandfrei abgeleitet haben *(!)*.

2.6. Am zweiten Tag…

Aus dem Vorhergehenden wissen wir jetzt bereits, dass es die Zahlen 0, 1 und -1 gibt. Man sagt, diese Zahlen haben den Geburtstag 1 – da sie im ersten „Wurf“ konstruiert (= „geboren“) wurden. 0 als die Mutter aller Zahlen kann je nach Ansicht auch den Geburtstag 0 haben. Mittlerweile sind wir nach dieser Rechnung bereits am zweiten Tag angelangt. Mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden Zahlen können wir bereits eine ganze Armee von Zahlen aufstellen. Nach näherer Betrachtung fallen von diesen aber viele wieder raus, da sie der Konstruktionsregel aus *2.4.1.* nicht genügen. Die Zahlen die nun übrig bleiben sind:

$(\varnothing \mid \{-1\})$, $(\varnothing \mid \{-1;0\})$, $(\varnothing \mid \{-1;1\})$, $(\varnothing \mid \{-1;0;1\})$, $(\varnothing \mid \{0;1\})$, $(\{-1\} \mid \varnothing)$, $(\varnothing \mid \{1\})$, $(\{-1\} \mid \{1\})$, $(\{-1\} \mid \{0;1\})$, $(\{-1\} \mid \{0\})$, $(\{0\} \mid \{1\})$, $(\{-1;0\} \mid \{1\})$, $(\{-1;0\} \mid \varnothing)$, $(\{0;1\} \mid \varnothing)$, $(\{-1;1\} \mid \varnothing)$, $(\{-1;0;1\} \mid \varnothing)$, $(\{1\} \mid \varnothing)$

Wenn wir zwischen diesen Zahlen nun die uns bekannten Relationen aufzustellen versuchen finden wir heraus, dass einige sich gleichen, also dieselbe Zahl darstellen. Einige sind alte Bekannte und stellen 0, 1 und -1 dar – andere wiederum sind komplett neue Zahlen die zusammen vier uns bislang noch unbekannte Zahlen darstellen. Diese Zahlen (nennen wir sie x_1 bis x_4) gliedern sich wie folgt in unsere bereits bekannten Zahlen:

$$x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$$

Um ihnen neue Bezeichner zu vergeben wählen wir -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und 2. So könnten wir jetzt in mühsamer Kleinarbeit das Gebiet der surrealen Zahlen weiter erschließen, wir bekämen dann diesen Baum zu sehen:

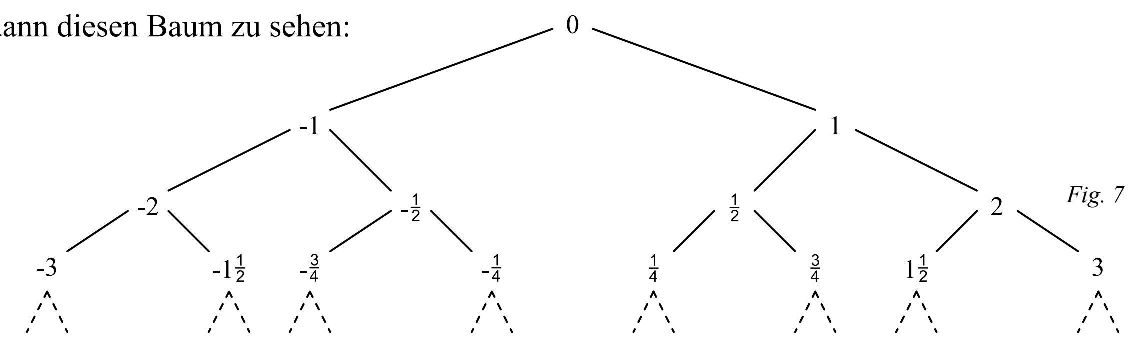

Fig. 7

3. Rechnen mit surrealen Zahlen

All diese Zahlen nutzen uns so weit aber noch nichts, denn alles was wir über sie aussagen können ist, dass es sie gibt und wie sie sich zueinander verhalten - größer, kleiner, gleich. Was fehlt sind Rechenarten mit denen wir mit den Zahlen arbeiten können. Können wir mit den Zahlen rechne wird sich auch herausstellen ob unsere bisherigen Vermutungen denn so alle richtig waren. Wir haben den Bezeichner $\frac{1}{2}$ beispielsweise nur willkürlich vergeben. Damit unser bisheriges Gedankengebäude nicht zusammenfällt müssen wir sehen, dass 1+1 tatsächlich 2, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ wirklich 1 ergeben, $-3+3=0$ usw. sind.

John Conway hat hierfür zwei weitere Regeln definiert – die der Addition und der Multiplikation. Aus diesen entspringen alle anderen Rechenregeln und Gesetze die wir von unseren Zahlen her kennen.

3.1. Addition

Jedes Element der linken Menge von *x* wird mit y addiert, jedes Element der linken Menge von *y* wird mit *x* addiert – die so erhaltenen Elemente bilden die linke Menge der neuen Zahl. Analog wird die rechte Menge gebildet mit Elementen der rechten Mengen der beiden Summanden.

$$x+y := (\{x^L+y; x+y^L\} \mid \{x^R+y; x+y^R\})$$

Hierbei ist zu beachten, dass x^L ein „typisches Element" der linken Menge von *x* ist, mit anderen Worten, dieser Schritt muss mit allen Elementen aus *x* gemacht werden. Selbiges gilt für x^R.[1]

3.2. Multiplikation

Die Multiplikation entspringt logisch eigentlich der Addition, und in der Tat ist sie auch die Summe ($\sum$) von y Additionen von *x* mit sich selbst. Dies ist definiert als:

$$x \cdot y := (\{x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L \cdot y^L; x^R \cdot y + x \cdot y^R - x^R \cdot y^R\} \mid_2$$
$$\{x^L \cdot y + x \cdot y^R - x^L \cdot y^R; x^R \cdot y + x \cdot y^L - x^R \cdot y^L\})$$

[1] „On Numbers And Games" (second edition) [ONAG], S. 17

[2] [ONAG] S. 18f

3.3. Negation

Zwar entspringt auch die Negation logisch aus der Konstruktions- und Vergleichsregel, dennoch sei auch diese Definition hier gegeben:

$-x = (\{-x^R\} \mid \{-x^L\})$ (man vertauscht die beiden Mengen und negiert alle Elemente)[3]

3.4. Eine Beispieladdition

Nehmen wir nun als Beispielrechnung einmal das obige Beispiel von 1+1 – es sollte zwei ergeben. Ist 1+1=2?

Beweis: Rufen wir uns noch einmal die Definitionen von 1 und 2 vor Augen:

$1 \equiv (\{0\} \mid \varnothing)$, $2 \equiv (\{0,1\} \mid \varnothing)$

Da die beiden Zahlen auch 0 enthalten sollten wir uns auch diese Definition noch mal anschauen: $0 \equiv (\varnothing \mid \varnothing)$

Die Addition nach *3.1.1.* ist nun leicht: $1+1 = (\{0+1;1+0\} \mid \varnothing)$

Die rechte Menge bleibt eine leere Menge da es hier keine Elemente zum Addieren gibt. Was sich uns nun auftut ist eine neue Rechnung, 0+1 und 1+0 (was dasselbe sein sollte):

$1+0 = (\{0+0\} \mid \varnothing)$ $0+1 = (\{0+0\} \mid \varnothing)$

Jetzt stehen wir bei $0+0$. Führen wir hier eine Addition durch, bleiben uns keine Elemente zum Addieren (man schaue sich die Definition von 0 an) – also ist $0+1 = (\{0\} \mid \varnothing)$. Dies ist, wie wir bereits wissen, 1. Womit wir als Ergebnis der Addition von 1+1 nun also folgendes erhalten: $1+1 = (\{0+1;1+0\} \mid \varnothing) = (\{1;1\} \mid \varnothing)$. Eine Menge kann ein Element nur einmal (oder keinmal) enthalten, weswegen {1;1} eigentlich {1} ist. Kennen wir die Zahl $(\{1\} \mid \varnothing)$, die also das Ergebnis dieser Addition ist, vielleicht bereits? Ist sie überhaupt eine surreale Zahl? Die Konstruktionsregel trifft zu, also ist sie eine. Wir kennen sie auch tatsächlich schon, es ist eine von den Zahlen die am zweiten „Tag“ konstruiert wurden. Vergleichen wir sie mit unseren bisherigen Zahlen finden wir heraus, dass sie gleich der Zahl ist, die wir mit 2 bezeichnet haben – also 2 ist.

■

---

[3] [ONAG], S. 5

4. Bis zur Unendlichkeit und darüber hinaus

Man kann sich leicht vorstellen, dass in dem obigen Baum (*Fig. 7*), würde man ihn fortführen, an der rechten Seite immer mehr natürliche Zahlen entstehen würden und auf der linken Seite ihre negativen Entsprechungen. Dazwischen entstehen Zahlen, die jeweils die Hälfte ihrer „Eltern“ und sich selbst sind – also Zahlen der Form $\frac{n_1}{2^{n_2}}$. Alle Zahlen die so entstehen sind uns bekannt als rationalen Zahlen. Jedoch werden so nicht alle Rationalen Zahlen gebildet, denn Zahlen wie $\frac{1}{5}$ fehlen hier noch. Wir vermissen auch Zahlen wie $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ - diese sind periodische Zahlen und haben schon ein wenig etwas mit der Unendlichkeit zu tun. Der Trick hierfür liegt nun einfach daran, dass wir noch einen „Schöpfungstag“ weitergehen, diesen „Tag“ nennen wir ω. Hier entsteht ganz unten rechts im Baum eine Zahl, die wir selbst ω nennen wollen: $(\{0;1;2;3;\ldots\}|)$ - dies ist die erste transfinite Zahl. Sie enthält in ihrer linken Menge alle bis dahin gebildeten natürlichen Zahlen – so wie alle vorigen natürlichen Zahlen ebenfalls ihre Vorgänger enthalten (man schaue sich z.B. die Zahl 1 an die so definiert war: $(\{0\}|)$, sie enthält ihren Vorgänger 0). Sie ist somit quasi die erste Zahl nach der letzten endlichen Zahl.

Auf der anderen Seite des Zahlenbaumes entsteht zur selben Zeit $-\omega$. Zwischen ω und $-\omega$ erhalten wir all die Zahlen die uns bis jetzt noch gefehlt hatten. Darunter sind nicht nur periodische Zahlen wie $\frac{1}{3}$, wir finden hier auch irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ und transzendentale Zahlen wie die eulersche Zahl e und die Kreiszahl π.

Diese bis dahin gefundenen Surrealen Zahlen stellen die uns bisher bekannten reellen Zahlen dar (mit Ausnahme von ω und $-\omega$, welche man profan mit ∞ übersetzen könnte). Die reellen Zahlen sind also eine echte Teilmenge der surrealen Zahlen, ebenso wie die natürlichen Zahlen: $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$.

Zusammen mit den Definitionen zum Rechnen ergeben diese Zahlen dieselben mathematischen Rechenregeln und Gesetze wie wir sie von unseren „normalen“ Zahlen her kennen.

4.1. Rechnen mit der Unendlichkeit

Wir können jetzt mit surrealen Zahlen rechnen und kennen eine unendliche Zahl ω. Es liegt nahe, mit ihr zu rechnen. Was ist $\omega+1$ bzw. $\omega-1$?

4.1.1. ω + 1

Um $\omega+1$ zu berechnen müssen wir – gemäß der Definition der Addition – jedes Element der linken Menge von ω mit 1 addieren und jedes Element der linken Menge von 1 mit ω; dasselbe auch für die rechte Menge. Mit der rechten Menge der beiden Zahlen haben wir keine Probleme, diese sind jeweils die leere Menge. Auch die Summe der linken Menge ist verhältnismäßig einfach: Jedem Element von ω eins hinzuzufügen, bedeutet, das kleinste Element aus ω zu entfernen (dies ist 0) und das größte um eins vergrößert hinzuzufügen. Das größte Element ist die größte endliche (natürliche) Zahl – nämlich $\omega-1$. Dieses um eins vergrößert ist ω. $\omega+1$ ist also gleich $(\{1;2;3;\ldots;\omega\}\mid\varnothing)$.

4.1.2. ω – 1

ω – 1 ist im Grunde nichts anderes als die Addition von ω und -1; -1 war der Definition nach gleich $(\varnothing\mid\{0\})$. Was ergibt das?

Die Rechnung hierfür ist denkbar einfach. Wir berechnen separat voneinander die linke und die rechte Menge der neuen surrealen Zahl – und was sehen wir da? Die rechte Menge von ω ist leer und die linke Menge von -1 ebenfalls. Die neue Zahl ist also: $\omega-1=(\{1;2;3;\ldots\}\mid\omega)$.

4.1.3. Nutzen dieser Rechnungen

Mit gutem Recht wird man sich fragen, wozu man diese Rechnungen braucht – zumal die Ergebnisse für den unerfahrenen Leser alles andere als aussagekräftig sein werden. Nun die Antwort ist ganz einfach: Statt diesen Beispielaufgaben hier könnten wir natürlich auch „echte" Aufgaben rechnen, die wir in die Welt der surrealen Zahlen übersetzen. Das Ergebnis das wir rausbekommen lässt sich mittels der Regeln für den Vergleich und die weitere Addition von Zahlen deuten und entsprechend interpretieren.

So können wir z.B. auch den aus der Einführung bekannten Grenzwert von $x\mapsto e^x-x^2$ berechnen.

4.2. $e^\omega - \omega^2 = ?$

Den Grenzwert der Funktion $x \mapsto e^x - x^2$ erhalten wir, indem wir den eigentlich unfassbaren Wert ∞ in die Funktionsgleichung einsetzen und das Ergebnis berechnen. In der Einführung haben wir bereits gesehen, dass sich das als schwierig erweisen kann. Mit unseren Erkenntnissen über surreale Zahlen sollte dies aber jetzt gar kein Problem mehr sein. Wir müssen auch nicht mehr auf einen Grenzwert vertrauen, denn wir können direkt den Wert für $e^\omega - \omega^2$ einsetzen. Zwar gibt es viele unendliche Werte von denen ω einer ist, jedoch kommt unsere Definition von ω der Vorstellung von ∞ bei der Grenzwertbetrachtung schon am ehesten gleich. Was aber ist $e^\omega - \omega^2$?

Unsere bisherigen Kenntnisse reichen leider noch nicht so weit, als dass wir sagen könnten, was *e* als surreale Zahl ausgedrückt ist – dementsprechend auch nicht wie *e* hoch *x* definiert ist, was ja die Exponentialfunktion ist.

Martin Kruskal[4] hat eine Definition von e und der Exponentialfunktion aufgestellt, deren Herleitung aus den uns bekannten Definitionen den Rahmen dieser Facharbeit leider sprengen würde. Wir übernehmen daher einfach die Definition für e^ω von ihm: $\exp(\omega) = e^\omega = (\{\omega^0;\omega^1;\omega^2;\omega^3;\ldots\} \mid \varnothing)$.[5]

Bevor wir uns die Mühe des Ausrechnens machen, werden wir zunächst die Relation zwischen diesen beiden Zahlen prüfen. Wären die beiden Zahlen gleich, so wüssten wir, dass das Ergebnis unserer Rechnung 0 wäre. Prüfen wir, ob $e^\omega \leq \omega^2$ falsch ist, denn gemäß unserer Vermutung aus der Einführung müsste dies eben so sein. Der Beweis ist leicht erbracht, denn gemäß der Definition dürfte kein Element der linken Menge von e^ω kleiner oder gleich ω^2 sein. Wir sehen aber in der Definition von e^ω, dass in dessen linken Menge ein solches Element existiert: ω^2 selbst nämlich. Wir wissen also mit Sicherheit, dass unser Grenzwert nicht 0 sein kann! Wie groß ist er aber konkret?

Rechnen wir ω^2 aus, so müssen wir ω mit sich selbst multiplizieren. Dies ist einfacher als es sich zunächst anhört, denn, da ω in seiner rechten Menge keine Elemente besitzt, können wir die Multiplikation auf die folgende Vorschrift verkürzen (alle Operationen in denen mit Elementen der rechten Menge gerechnet wird, fallen weg, da es keine gibt):

$$x = y \wedge R_x = \varnothing \Rightarrow x \cdot y := (\{x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L \cdot y^L\} \mid \varnothing)$$

---

[4] *Martin Kruskal* – US-Amerikanischer Mathematiker und Physiker

[5] [ONAG], S. 38 unten.

Wir können diesen Term noch weiter zusammenfassen, denn da $x = y$ können wir auch sagen, dass die Teiloperationen $x^L \cdot y$ und $x \cdot y^L$ dasselbe Ergebnis haben (wir rechnen ja mit denselben Teilelementen von Zahlen). Es ergibt sich daher:

$$x \cdot y := (\{x^L \cdot y + x^L \cdot y - x^L \cdot y^L\} \mid \varnothing)$$

Jetzt aber zur Rechnung:

$$\begin{aligned}
&\omega \cdot \omega \\
&= (\{0;1;2;\ldots\} \mid \varnothing) \cdot (\{0;1;2;\ldots\} \mid \varnothing) \\
&= (\{0 \cdot \omega + 0 \cdot \omega - 0 \cdot 0; 0 \cdot \omega + 0 \cdot \omega - 0 \cdot 1; 0 \cdot \omega + 0 \cdot \omega - 0 \cdot 2;\ldots;1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega - 1 \cdot 0; 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega - 1 \cdot 1;\ldots\} \mid \varnothing)
\end{aligned}$$

Zu unserem Leidwesen ergeben sich (im wahrsten Sinne des Wortes) unendlich viele neue Multiplikationen, die ihrerseits auch wieder Multiplikation ergeben werden, etc. Die Multiplikationen die 0 als Faktor enthalten, werden auch 0 zum Ergebnis haben (die Erklärung dafür ist simpel, 0 besteht aus zwei leeren Mengen in denen es simpel keine Elemente zum Multiplizieren gibt, das Ergebnis ist also wieder ein Paar aus leeren Mengen, welches 0 darstellt). Ein Element das in der neuen linken Menge enthalten sein wird ist also 0. Was ergeben die weiteren Multiplikationen?

Was wir sagen können ist, dass wirklich jede Zahl die in ω enthalten ist mit jeder Zahl multipliziert wird, in wirklich jeder möglichen Kombination. Durch die Addition und Subtraktion der drei Multiplikationen entsteht dabei auch wirklich jede Zahl zwischen 0 und ω^2 - was durchaus eine logische Folge ist. Die linke Menge von ω besteht z. B. auch aus allen Vorgängern von ω; ebenso die linke Menge von 2 ($= (\{0;1\} \mid \varnothing)$). Auch die linke Menge von $\omega + 1$ besteht aus all seinen Vorgängern, wie wir in *4.1.1.* gesehen haben. Und in der Tat ist das Ergebnis von ω^2 das folgende:

$$\omega^2 = (\{0;1;2;3;\ldots;\omega;\omega+1;\omega+2;\ldots;2\omega;2\omega+1;\ldots;3\omega;3\omega+1;\ldots\} \mid \varnothing)$$

Jetzt müssen wir ω^2 nur noch von e^ω abziehen. Dazu Addieren wir einfach das Negativ von ω^2 - welches nach *3.3.* dieses ist:

$$(\varnothing \mid \{0;-1;-2;-3;\ldots;-\omega;-(\omega+1);-(\omega+2);\ldots;-2\omega;-(2\omega+1);\ldots;-3\omega;-(3\omega+1);\ldots\})$$

Dank der leeren Mengen ergibt sich für unsere Addition (wie bei $\omega - 1$ in *4.1.2.*)

$$L_y = R_x = \varnothing \Rightarrow x + y = (\{x^L + y\} \mid \{x + y^R\})$$

Das Ergebnis der Addition ist dann:

$$a = (\{\omega^0 - \omega^2; \omega^1 - \omega^2; \omega^2 - \omega^2; \omega^3 - \omega^2;\ldots\} \mid \{0 + e^\omega; e^\omega - 1;\ldots;e^\omega - \omega; e^\omega - (\omega+1);\ldots;e^\omega - 3\omega;\ldots\})$$

4.2.1. Das Ergebnis unserer Rechnung

Mit der Definition dieser Zahl a alleine können wir noch nichts anfangen. Wir wollten herausfinden, was der Grenzwert unserer Funktion ist. Wirklich interessant für uns ist nunmehr nur, ob er gegen unendlich geht oder nicht – die Zahl die wir nun berechnet haben also transfinit ist oder nicht. Wir prüfen also ob $a \geq \omega$ wahr ist. Der Einfachheit halber überprüfen wir aber zuerst noch, ob $a \leq \omega$ falsch ist:

$$a \leq \omega \Leftrightarrow \neg(\exists a_L \in L_a : \omega \leq a_L) \wedge \neg(\exists \omega_R \in R_\omega : \omega_R \leq a$$
$$\Rightarrow \neg(a \leq \omega) \Leftrightarrow (\exists a_L \in L_a : \omega \leq a_L) \vee (\exists \omega_R \in R_\omega : \omega_R \leq a)$$
$$\exists x \in L_a : \omega \leq x$$

Es existiert ein Element in der linken Menge von a welches größer oder gleich ω ist ($\omega^3 - \omega^2$ z. B.), deswegen stimmt die Aussage, dass a nicht kleiner und nicht gleich ω ist. Die Folge daraus ist, dass a größer als ω ist – also wirklich ein transfiniter Wert.

Übersetzt in die „profane Notation" des uns bekannten Grenzwertes heißt das, dass $x \mapsto e^x - x^2$ für x gegen unendlich tatsächlich gegen unendlich konvergiert – und nicht gegen 0.

5. Nachwort

Ich hoffe mit dieser Facharbeit einen interessanten und doch verständlichen Einblick in die Welt der surrealen Zahlen gegeben haben zu können. Auch hoffe ich, den Gedanken wie man von einem Spiel wie Go – das irrwitzigerweise selber kein Spiel ist, das komplett mit surrealen Zahlen beschrieben werden kann – auf die Struktur kommt, die surreale Zahlen ja haben.

Es ist meiner Meinung nach eine sehr faszinierende Angelegenheit „mitzuerleben" wie aus einem Brettspiel zunächst eine mathematische Struktur entsteht und dann später aus einer Struktur die nichts anderes als ein Paar von leeren Mengen ist, Zahlen entstehen die nicht nur unsere reellen Zahlen beschreiben können, sondern auch transfinite und infinitesimale Zahlen ($\frac{1}{\omega}$ ist übrigens eine solche Zahl – sie liegt näher an 0 als jede reelle Zahl)!

Im Verlauf meiner Arbeit konnte ich wirklich zeigen, dass das Beispielproblem welches auf herkömmliche Art und Weise nicht ganz erklärt werden konnte, mit Hilfe von surrealen Zahlen tatsächlich gelöst werden kann – ein unendlicher Grenzwert also quasi mit Hilfe von Go nachgewiesen werden konnte.

Wer im Zuge des Lesens dieser Arbeit vielleicht angeregt wurde mehr über surreale Zahlen in Erfahrung bringen zu wollen, dem empfehle ich, die im Literaturverzeichnis angegebenen Bücher zu lesen. Aufgrund der Extravaganz dieses Themas und seinem geringen Alter (das Gedankengebäude der surreale Zahlen wie es hier beschreiben wurde ist gerade mal 20 bis 30 Jahre alt) sind die Bücher selbst für Nicht-Mathematiker recht spannend zu lesen – insbesondere Donald E. Knuths „Surreal Numbers – How Two Ex-Students Turned Onto Pure Mathematics And Found Total Happiness", welches in Form einer Novelle geschrieben ist.

Da surreale Zahlen heutzutage weniger in der Analysis gebraucht werden (hier fehlen noch einige entscheidende Definitionen das Integral spezieller Funktionen betreffend), als in der kombinatorischen Spieltheorie wird der ein oder andere bestimmt auch Freude finden an den zahlreichen Spielen, die erst mit Hilfe von surrealen Zahlen geschaffen wurden – insbesondere darf ich hier John H. Conways „Game Of Life" empfehlen.

Julian Fleischer
8. März 2005

Anhang A

Verwendete mathematische Symbole und Konventionen

Trotz internationaler Konventionen und Standards sind viele Zeichen und Symbole in der Mathematik bis heute unterschiedlich und nicht klar definiert. Daher hier eine eindeutige Klärung der verwendeten Symbole und Konventionen:

Symbol	**Bedeutung**
$M = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$	Menge *M* der Elemente e_1 bis e_n
$(a \mid b)$	geordnetes Paar mit den Elementen *a* und *b* (2-Tupel)
$\varnothing$, $\{\}$	Leere Menge
$\{x \mid \ldots\}$	Menge aller *x* für die gilt …
$e \in M$	Das Element *e* ist Element der Menge *M*
$L \subset M$	Die Menge *L* ist eine echte Teilmenge der Menge *M*
$L \subseteq M$	Die Menge *L* ist eine Teilmenge der Menge *M*
$a = b$	*a* ist gleich *b (a und b haben den gleichen Wert)*
$a \equiv b$	*a* ist identisch mit *b*
$a := b$	*a* wird definiert als *b*
$\forall x \in M$	Jedes *x* das Element der Menge *M* ist (<u>A</u>lle)
$\exists x \in M$	Irgendein Element *x* der Menge *M* (<u>E</u>xistiert)
$a \wedge b$	*a* und *b* sind wahr (Konjunktion)
$a \vee b$	*a* oder *b* (oder beide) sind wahr (Alternative)
$\neg a$	*a* ist nicht wahr (Negation)
$a \Rightarrow b$	Wenn *a* wahr ist, dann ist *b* wahr (Implikation)
$a \Leftrightarrow b$	*a* ist nur wahr, wenn *b* wahr ist; und umgekehrt (Äquivalenz)
$x : \ldots$	Für *x* gilt …
∞	unendlich
ω *(kleines gr. Omega)*	die „kleinste transfinite" Zahl
$\mathfrak{S}$ *(Fraktur-S)*	Zahlenkörper (Menge) der Surrealen Zahlen
$\mathfrak{R}$ *(Fraktur-R)*	Zahlenkörper (Menge) der Reellen Zahlen
$\mathfrak{N}$ *(Fraktur-N)*	Zahlenkörper (Menge) der Natürlichen Zahlen
■ *(Halmos)*	Das Ende eines Beweises

Anhang B

Allgemeine Begriffsklärung

infinitesimal

Dieser Begriff bezeichnet Werte, die „unendlich klein“ sind – eine positive infinitesimale Zahl beispielsweise kann näher an 0 liegen als die kleinste reelle Zahl, sie ist quasi „unendlich kleiner“.

Die *Infinitesimalrechnung* ist heute ein wichtiger Bestandteil der Analysis.

Quelle: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Infinitesimalrechnung&oldid=12368923

transfinit

Der Begriff setzt sich zusammen aus „trans“ (lat. über, hinaus) und „fin“ (lat. Ende), was soviel heißt wie „über das Ende hinaus“. Transfinite Werte sind also profan gesagt „unendliche“ Werte, können in ihrer Größe jedoch durchaus unterschiedlich sein.

Beispiel: Sowohl die Menge der natürlichen Zahlen als auch die Menge der reellen Zahlen sind transfinite Mengen, dennoch beinhaltet die Menge der reellen Zahlen mehr Elemente als die der natürlichen Zahlen.

Quelle: http://www.sgipt.org/wisms/geswis/mathe/ubegr0.htm

Transzendentale Zahl / Algebraische Zahl

Eine Transzendentale Zahl ist eine Zahl, die nicht die Lösung eines Polynoms n-ten Grades ist. Alle transzendentalen Zahlen sind irrational oder komplex. π und e sind solche Zahlen. Algebraische Zahlen hingegen sind Zahlen, die die Lösung eines Polynoms n-ten Grades mit algebraischen Koeffizienten darstellen.

Beispiel: $\sqrt{2}$ ist eine algebraische Zahl

Zwar ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl (d.h. dass ihre Darstellung als Dezimalbruch real nicht möglich ist, da die Anzahl der Nachkommastellen unendlich ist), dennoch ist sie algebraisch, denn sie ist die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.

π und e dagegen sind nicht algebraisch, da sie nicht durch eine solche Gleichung gefunden werden können, sondern Grenzwerte sind.

Anhang C: Spezielle Situationen im Go

Tsumego („Leben und Tod“)

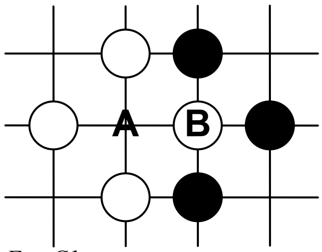

Fig. C1

In *Fig. C1* sieht man eine klassische Situation im Go: Schwarz dürfte keinen Stein auf *A* setzen, da der schwarze Stein dort keine Freiheiten hätte. Da aber durch diesen Zug der weiße Stein auf *B* keine Freiheiten mehr hätte, und somit entfernt werden müsste, darf Schwarz dennoch einen Stein auf *A* setzen und der weiße Stein auf *B* muss entfernt werden. Die Folgesituation sähe dann aus wie in *Fig. C2*.

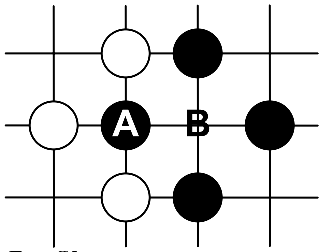

Fig. C2

Ko

Diese Situation entsteht in einem Fall wie in dem Beispielzug der in *Fig. C1* und *Fig. C2* zu sehen ist. Nachdem Schwarz gerade eben auf *A* gesetzt hat, hätte Weiß nun die Möglichkeit durch Setzen eines Steines auf *B* die in *Fig. C1* dargestellte Ausgangssituation wiederherzustellen. Dann wäre Schwarz aber wieder im Stande, die gerade eben rückgängig gemachte Situation aus *Fig. C2* wiederherzustellen, und das könnte sich unendlich so fortsetzen, wenn nicht einer der beiden Spieler sich eines Besseren besinnte und aufhörte. Um dies zu vermeiden ist die Ko-Regel entstanden, nach der eine bereits vorgekommene Situation nicht wiederholt werden darf. Nachdem Schwarz also in *Fig. C1* auf *A* gesetzt hätte, dürfte Weiß keinen Stein mehr auf *B* setzen.

Nach den japanischen Regeln dürfte jedoch, wenn die gesamte Brettsituation sich verändert, eine vorhergehende Teilsituation wiederkehren, da sie ja keine schon einmal da gewesene Brettsituation darstellt. Solche Haarspaltereien entstehen aber beim normalen Spielen von Go auch gar nicht, da normalerweise beide Spieler weise genug sind solchen Situationen vorzubeugen und höflich genug eine solche Situation, sollte sie doch einmal stattfinden, ehrenvoll zu meistern.

Literaturverzeichnis

[ONAG] **On Numbers And Games** (second edition)

John H. Conway

EAN 978156881127

[SN] **Surreal Numbers – How Two Ex-Stundents turned onto pure Mathematics and found total Happiness**

Donald E. Knuth

ISBN 0201038129

[ML] **Mengenlehre** (5. Auflage, Berlin 1965)

Prof. Dr. Erich Kamke

Sammlung Göschen (Band 999/999a)

Internetquellen

Wikipedia – die freie Enzyklopädie

http://de.wikipedia.org/

Artikel „**Surreale Zahl**“ in der Version von 17:16, 4. Feb 2006

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Surreale_Zahl&oldid=13368932

Artikel „**Infinitesimalrechnung**“ in der Version von 17:54, 7. Jan 2006

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Infinitesimalrechnung&oldid=12368923

Artikel „**Quod erat demonstrandum**“ in der Version von 21:49, 8. Feb 2006

http://de.wikipedia.org/wiki/Halmos (Redirect auf folgende Quelle:)

http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Quod_erat_demonstrandum&oldid=13525532

Wikibooks – die freie Bibliothek

http://de.wikibooks.org/

Buch „**Go**“ (Stand: 00:18, 23. Feb 2006)

http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Go&oldid=89562

http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Go:_Spielmaterial&oldid=99057

http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Go:_Einf%C3%BChrung_in_die_Regeln&oldid=108255

http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Go:_Spielabschnitte&oldid=104561

http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Go:_Das_Ende_einer_Go-Partie&oldid=88237

http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Go:_Leben&oldid=108180

http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Go:_tsumego01_loesung&oldid=108176

Selbstständigkeitserklärung des Verfassers

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit aus eigener Kraft und nur mit Hilfe der genannten Quellen im Zeitraum von 6 Wochen geschrieben habe.

Zitate und fremde Definitionen sind als solche gekennzeichnet und referenziert.

Alle Grafiken (Spielsituationen im Go) in dieser Arbeit habe ich selber erstellt.

Julian Fleischer

Bocholt, 8. März 2005