Universidad Andrés Bello
Facultad de Ingeniería
Ingeniería Civil Industrial

Curso: ICI 2207 - Taller de Modelamiento Mat.
Semestre: 1-2018
Profesores: Diego Beneventti, Samantha Reid
Juan Carlos Velásques

Solemne 1

Duración: 90 minutos.

Instrucciones:

- Responda las preguntas en el espacio dado. No se evaluarán respuestas escritas en otras ubicaciones u hojas anexas.
- No está permitido el uso de celulares, apuntes, bibliografía. Cualquier elemento se retirará y se evaluará con nota mínima.
- No están permitidas conductas poco éticas dentro de la evaluación. En caso de presentarse, se retirará la evaluación y se procederá a evaluar con nota mínima.
- En caso de no seguir rigurosamente las instrucciones de cada enunciado, se le descontará puntaje, sin posibilidad de objeción.

Nombre alumno: ____

1. PARTE I: Ejercicio de interpretación (40 puntos)

Una importadora se dedica a la venta y distribución de electrodomésticos (E) (tales como radios, televisores, vídeos, etc.), cuyo costo de compra (C), precio de venta (P) y cantidad máxima de importación (T) depende de cada producto. Los productos importados pueden almacenarse en bodegas (B) ubicadas a lo largo de la costa, cada una con distinta capacidad (A). Asimismo, existe un inventario inicial para cada bodega y producto (I).
La distribución de productos desde las bodegas a los centros de consumo (C) es realizada por flotas de camiones que dispone cada bodega. La flota de cada bodega tiene una capacidad limitada de transporte (F). La empresa no permite el transporte de productos entre bodegas y el costo de transporte unitario (E) está dado por la combinación de origen-destino del despacho. Además, cada centro de consumo tiene demandas máximas (D) y cantidades mínimas a entregar de cada producto (N).
En base a esto, se plantea el siguiente PL, el cual permite calcular el programa de importación, distribución y venta anual que maximiza la utilidad, medida como ingresos por venta menos costo de compra y costo de transporte.

$$
\begin{aligned}
max \quad & \sum_{e\in E}\sum_{c\in C} P_{ec}v_{ec} - \sum_{e\in E}\sum_{b\in B} C_e c_{eb} - \sum_{e\in E}\sum_{c\in C}\sum_{b\in B} E_{cb}d_{ecb} && && (1)\\
s.t. \quad & \sum_{b\in B} c_{eb} \leq T_e && && (2)\\
& \sum_{e\in E} i_{eb} \leq A_b && \forall b\in B && (3)\\
& i_{eb} = I_{eb} + c_{eb} - \sum_{c\in C} d_{ecb} && \forall e\in E, b\in B && (4)\\
& \sum_{e\in E}\sum_{c\in C} d_{ecb} \leq F_b && \forall b\in B && (5)\\
& d_{ecb} \geq v_{ec} && \forall e\in E, c\in C && (6)\\
& v_{ec} \leq D_{ec} && \forall e\in E, c\in C && (7)\\
& \sum_{b\in B} d_{ecb} \geq N_{ec} && \forall e\in E, c\in C && (8)\\
& v_{ec}, i_{eb}, c_{eb}, d_{ecb} \geq 0 && \forall e\in E, b\in B, c\in C && (9)
\end{aligned}
$$

Con respecto al modelo, se pide lo siguiente:

a) **(10 puntos)** Interprete claramente el significado de las variables del modelo.

b) **(20 puntos)** Interprete claramente el significado de la función objetivo y las restricciones del modelo. En casos de que exista un error en la formulación, indíquelo y vuelva a modelarlo correctamente.

c) **(10 puntos)** ¿Qué sucede si la capacidad de la flota es infinita?

Respuesta

a) Las variables serían:

- ◇ v_{ec} : venta del producto $e \in E$ en el centro de consumo $c \in C$.
- ◇ i_{eb}: inventario final del producto $e \in E$ en la bodega $b \in B$.
- ◇ c_{eb}: compra del producto $e \in E$ que se almacena en la bodega $b \in B$.
- ◇ d_{ecb}: despacho del producto $e \in E$ al centro de consumo $c \in C$ desde la bodega $b \in B$.

b) En cuanto a la formulación del modelo, se tiene:

(1) Maximiza la utilidad del modelo, considerando costos de compra y transporte.
(2) Importación máxima
(3) Capacidad máxima de almacenamiento en bodegas
(4) Balance de inventario
(5) Capacidad de la flota
(6) Relación de venta-despacho
(7) Demanda máxima
(8) Cantidad mínima de despacho

(9) Naturaleza de las variables

Las fórmulas que presentan error son la (2) y la (6), ya que en (2) que se respete la restricción por cada electrodoméstico:

$$\sum_{b \in B} c_{eb} \leq T_e \qquad \forall e \in E$$

Y la (6) que falta que se sume por cada bodega, del lado derecho, de la forma:

$$\sum_{b \in B} d_{ecb} \geq v_{ec} \qquad \forall e \in E, c \in C$$

c) Si es infinita, de igual manera estaría acotado el problema, debido a que existe una restricción de demanda máxima.

2. PARTE II: Ejercicios de desarrollo (80 puntos)

2.1. Ejercicio 1

Usted está interesado en la compra y venta de 3 divisas, contando para ello con un capital de $1000 USD, el cual **debe ser utilizado totalmente**. Las divisas que compre hoy pueden ser vendidas mañana.
El precio de compra de hoy y el precio de venta de mañana están dados en la tabla que se muestra al final del enunciado. Asimismo, debido a regulaciones en las transacciones, no se puede comprar ni vender más de una cierta cantidad de dinero en las distintas divisas, también mostradas en la tabla. Cabe destacar no puedo vender más divisas que las que dispongo.
El objetivo del problema es maximizar la utilidad de la inversión. Suponga que inicialmente no cuenta con ninguna divisa, sólo con el capital en efectivo. Además, considere que no se mantiene ningún remanente del capital (en dólares).

A continuación, se presenta la tabla con los valores a considerar:

Divisa	Precio Compra (USD$)	Precio Venta (USD$)	Límite de Compra (USD$)	Límite de Venta (USD$)
1	50	80	2000	1000
2	20	50	2200	1200
3	30	40	2500	1900

En base a esto, se pide:

a) **(20 puntos)** Plantee el modelo PL extendido, considerando las elecciones de compra y venta de divisas.

b) **(20 puntos)** Plantee el modelo PL parametrizado para n tipos de divisas (recuerde formular bien los conjuntos y parámetros a utilizar).

c) **(20 puntos)** Suponga ahora que sí se permite tener una decisión acerca del remanente del capital (es decir, cuantos dólares decidiré no invertir en divisas). Modifique el modelo considerando este nuevo elemento, tomando en cuenta que ahora puedo no invertir todo mi capital en divisas y que la función objetivo es maximizar el capital , luego de hacer vendido todas las divisas y/o haberme quedado con este remanente.

d) **(10 puntos)** Con respecto a c), considere que sólo deseo invertir en h cantidad de divisas. Modele esta variación como un problema PNL.

e) **(10 puntos)** Con respecto a c) (omitiendo el d)), integre la estocasticidad al problema (es decir, escriba el modelo FDE), considerando que ahora se tiene un precio de venta para cada escenario $s \in S$.

a) La formulación extendida queda de la siguiente manera:

Variables:

- x_i : Cantidad a comprar de divisas de la categoría $i = (1, 2, 3, 4)$.
- y_i : Cantidad a vender de divisas de la categoría $i = (1, 2, 3, 4)$.

Modelo matemático:

$$\begin{aligned}
Max \quad & \$50x_1 + \$20x_2 + \$30x_3 - \$80y_1 - \$50y_2 - \$40y_3 && (1)\\
s.t. \quad & \$50x_1 + \$20x_2 + \$30x_3 + = \$1000 && (2)\\
& \$50x_1 \leq \$2000 && (3)\\
& \$20x_2 \leq \$2200 && (4)\\
& \$30x_3 \leq \$2500 && (5)\\
& \$80y_1 \leq \$1000 && (6)\\
& \$50y_2 \leq \$1200 && (7)\\
& \$40y_3 \leq \$1900 && (8)\\
& y_1 \leq x_1 && (9)\\
& y_2 \leq x_2 && (10)\\
& y_3 \leq x_3 && (11)\\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 && (12)
\end{aligned}$$

Donde (1) representa la función objetivo que maximiza utilidad, (2) obliga a ocupar todo el capital, (3)-(5) es la limitación de compra de cada divisa, (4)-(6) es la limitación de venta de cada divisa, (9)-(11) me impide que venda más divisas de las que compré o dispongo y (11) es dominio de la variables.

b) Se establecen los conjuntos y parámetros

- n : Conjunto de divisas.
- b : Capital de inversión inicial.
- c_i : Precio de compra de divisa $i \in n$.
- v_i : Precio de venta de divisa $i \in n$.
- α_i :Límite de compra de divisa $i \in n$.
- β_i : Límite de venta de divisa $i \in n$.

Luego, el modelo queda:

$$\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{i \in n} (y_i v_i - c_i x_i) && && (1)\\
s.t. \quad & \sum_{i \in n} c_i x_i = b && && (2)\\
& c_i x_i \leq \alpha_i && \forall i \in n && (3)\\
& v_i y_i \leq \beta_i && \forall i \in n && (4)\\
& y_i \leq x_i && \forall i \in n && (5)\\
& x_i, y_i \geq 0 && \forall i \in n && (6)
\end{aligned}$$

c) Se definen las siguientes variables:

- x_i: Cantidad a comprar de divisa $i \in n$.
- y_i: Cantidad a vender de divisa $i \in n$.
- w: Cantidad de remanente (dinero que no invertí).

El modelo matemático queda:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{i\in n} y_i v_i + w && && (1)\\
s.t. \quad & \sum_{i\in n} c_i x_i + w = b && && (2)\\
& c_i x_i \leq \alpha_i && \forall i \in n && (3)\\
& v_i y_i \leq \beta_i && \forall i \in n && (4)\\
& y_i \leq x_i && \forall i \in n && (5)\\
& x_i, y_i, w \geq 0 && \forall i \in n && (6)
\end{aligned}
$$

Donde (1) representa la función objetivo, la cual maximiza el capital invertido, (2) permite destinar capital a divisas o a remanente, (3) es la limitación de compra de cada divisa, (4) es la limitación de venta de cada divisa, (5) evita que se venda más divisas de las que yo compré y (6) es el dominio de las variables.

d) Ahora se agrega una variable binaria, de la forma:

$$z_i : 1 \text{ si compro divisa } i \in n, \ 0 \text{ si no.}$$

Y se modifica el modelo de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{i\in n} y_i v_i + w && && (1)\\
s.t. \quad & \sum_{i\in n} c_i x_i z_i + w = b && && (2)\\
& c_i x_i z_i \leq \alpha_i && \forall i \in n && (3)\\
& v_i y_i \leq \beta_i && \forall i \in n && (4)\\
& y_i \leq x_i z_i && \forall i \in n && (5)\\
& \sum_{i\in n} z_i \leq h && && (6)\\
& x_i, y_i, w \geq 0 && \forall i \in n && (7)\\
& z_i \in \{0,1\} && \forall i \in n && (8)
\end{aligned}
$$

e) Incorporando estocasticidad en la demanda, y considerando que las variables de primera etapa son x_i y w (divisas a comprar y el remanente) y la de segunda etapa es y_i (divisas a vender), nos queda el siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & w + \sum_{s \in S} p_s \sum_{i \in n} y_i^s v_i^s && && (1)\\
s.t. \quad & \sum_{i \in n} c_i x_i + w = b && && (2)\\
& c_i x_i \leq \alpha_i && \forall i \in n && (3)\\
& v_i y_i^s \leq \beta_i && \forall i \in n, s \in S && (4)\\
& y_i^s \leq x_i && \forall i \in n, s \in S && (5)\\
& x_i, y_i^s, w \geq 0 && \forall i \in n, s \in S && (6)
\end{aligned}
$$