Característica	**Costo (millones)**
Belleza (cirujías, gimnasio, etc.)	\$ 25
Inteligencia (cursos de capacitación)	\$ 7
Personalidad (cursos de desarrollo)	\$ 7
Simpatía (cursos de desarrollo y manejo)	\$ 7
Traje típico (diseño y confección)	\$ 8
Traje de noche (diseño y confección)	\$ 12

Table 1: Concurso de Belleza

2. Suponga que al local pueden ingresar todas las personas que lo deseen, i.e., la restricción de capacidad máxima del local ya no existe. ¿Cambia el resultado del problema?

2.3 Concurso de Belleza

Con el fin de reposicionar la belleza de la mujer chilena en el mundo, una organización que dispone de un capital de \$40.000.000 decide buscar a la mujer ideal para que gane el concurso internacional. Para esto deciden contratar una agencia, con personas muy capacitadas, para que realize un estudio que indique cuáles son las características que esta mujer debe tener para que la posibilidad de ganar sea máxima. Las bases del concurso indican que el puntaje que asigna el jurado se distribuye en las diferentes características (x_i) de la siguiente manera: de 0 a 20 puntos por belleza (x_1) (por ejemplo, si $x_1 = 1$ hay 20 puntos, si $x_1 = 0.5$ hay 10 puntos y si $x_1 = 0$ hay 0 puntos); de 0 a 20 puntos por intelecto (x_2), de 0 a 5 por personalidad (x_3), de 0 a 15 puntos por simpatía (x_4), de 0 a 10 puntos por presentación en traje típico (x_5), y lo mismo para la presentación en traje de noche (x_6); y finalmente de 0 a 10 puntos extra (x_7), a criterio del jurado para favorecer a la candidata si es que ella lo amerita. La agencia, con bastante experiencia en mujeres y en este tipo de eventos, tiene sus propias estadísticas a priori, las cuáles indican que el porcentaje de belleza más inteligencia, es menor o igual al 100% ($x_1 + x_2 \leq 1$), que la relación entre simpatía e inteligencia, se da de dos formas: $x_4 + 3x_2 \leq 3$ y $x_4 + \frac{x_2}{3} \leq 1$; que la relación entre el carácter y los posibles puntos extras ganados puede ser: $3x_3 + x_7 \leq 3$ ó $x_3 + 2x_7 \leq 2$; y que la relación entre belleza y puntos extras es $x_1 + 2x_7 \leq 2$. Por otra parte, la agencia cuenta con personas especializadas para reforzar las áreas más débiles (y_i) de cada candidata, asegurando éxito total y cobrando según sea el caso. La lista de precios se presenta en la Tabla 1.

¿Cómo tendrá que ser la candidata para obtener un puntaje máximo en la competencia internacional?

SOLUCIÓN[3]

Se desea maximizar el resultado obtenido por la candidata en el concurso de belleza, para ello se debe determinar el porcentaje de cada característica que posee y el porcentaje de cada característica que puede obtener con ayuda de la agencia, para esto se consideran las siguientes variables de decisión:

x_i = Porcentaje de la característica i en la candidata, $i = 1, ...7$.
y_i = Porcentaje de la característica i a cargo de la agencia, $i = 1, ...6$.

El objetivo del modelo es maximar la cantidad de puntos obtenidos por la candidata, sujeto a las restricciones de que la suma de la característica intrínseca de la candidata más la característica reforzada por la agencia no puede ser mayor a 1,de cumplir las relaciones obtenidas según estudios de la agencia, y de que el capital máximo a invertir para reforzar a la candidata no puede superar los \$40 millones, además de la no negatividad de las variables. Por lo tanto, el problema de optimización es:

$$P) \quad Max \quad 20(x_1 + y_1) + 20(x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) + 15(x_4 + y_4) + 10(x_5 + x_6 + x_7 + y_5 + y_6)$$

[3] Felipe Mera, Juan Guiresse, Optimización 1996.

1.	Personal de carabineros	18 %
2.	Implementos para carabineros	10 %
3.	Recintos penales	2 %
4.	Personal de seguridad en recintos penales	3 %
5.	Recintos hospitalarios	24 %
6.	Personal médico	20 %
7.	Proyectos de investigación en salud	8 %
8.	Aseo y ornato	4 %
9.	Areas verdes	7 %
10.	Eventos	4 %

Table 2: Presupuesto Comunal

$$\begin{aligned}
x_i + y_i &\leq 1 \quad \forall i = 1, ..., 6\\
x_1 + x_2 &\leq 1\\
x_1 + 3x_4 &\leq 3\\
3x_1 + x_4 &\leq 3\\
3x_3 + x_7 &\leq 3\\
x_3 + 2x_7 &\leq 2\\
x_1 + 2x_7 &\leq 2\\
25y_1 + 7y_2 + 7y_3 + 7y_4 + 8y_5 + 12y_6 &\leq 40\\
x_i, y_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, ..., 7
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos:

1. Si la agencia a modo de oferta decide rebajar en un 50% todos sus precios, ¿cambian las características de la mujer que se debe encontrar?

2. Analice que ocurre si el descuento se aplica a un sólo item de la lista.

3. Suponga usted que el presidente del jurado fuera chileno, y que por su sentimiento patriota asegure 10 puntos extras (el máximo) a favor para la candidata. Replantee el modelo considerando este nuevo dato e indique como varían (si es que lo hacen) las características que debe tener la candidata.

2.4 Presupuesto Comunal

Un alcalde con planes de reelección desea demostrar preocupación extrema por su comuna, por lo que realiza una encuesta con el fin de conocer las prioridades de los habitantes de ella, para así distribuir de una forma más eficiente los fondos municipales, que ascienden a \$100.000.000. Con esto dejará más contenta a la gente y asegurará también votos para la elección. La encuesta constaba de 10 puntos, a cada uno de los cuales había que asignarle un porcentaje de preferencia que indicara el beneficio que les gustaría entregarle a las diferentes áreas, cuidando que la suma total fuera de un 100%. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2.

Ahora, en conocimiento de los porcentajes (p_i) de preferencia, el alcalde necesita conocer el monto (x_i) que deberá destinar a cada una de las áreas para poder cumplir su objetivo de reelección. La experiencia señala que existe una directa relación entre la obtención de votos y el desempeño del alcalde, de la forma $\sum_{i=1}^{10} x_i c_i$, es decir, mientras mayor sea esta cifra, mayor será la cantidad de votos obtenida por el alcalde.

Por otra parte, las exigencias mínimas impuestas por el consejo municipal indican que el gasto en el área de seguridad (los primeros cuatro items) no debe ser menor a \$37.000.000, mientras que los montos asignados al desarrollo de la salud (items 5 ,6 y 7), deben ser al menos \$52.000.000. Finalmente, en los últimos 3 items, la inversión no debe ser superior a los \$25.000.000, y en particular, en ningún item se podrá invertir menos de \$1.000.000.

SOLUCIÓN[4]

El alcalde desea conocer la cantidad de dinero que debe destinar a cada una de las areas para cumplir su objetivo de reelección, luego emplearemos la variable de decisión:

x_i = Cantidad en dinero destinada al desarrollo del punto i, $i = 1, ..., 10$.

El objetivo del problema es que el alcalde obtenga la mayor cantidad de votos, considerando las restricciones de capital total disponible, inversión mínima en seguridad y salud, inversión máxima en las otros áreas y que en cada área se deben invertir al menos \$1.000.000.

Por lo tanto, el problema de optimización es:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{10} c_i x_i$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{10} x_i & \leq & 100.000.000 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & \geq & 37.000.000 \\ \sum_{i=5}^{7} x_i & \geq & 52.000.000 \\ \sum_{i=8}^{10} x_i & \leq & 25.000.000 \\ x_i & \geq & 1.000.000 \quad \forall i \end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. Si por cada \$500.000 adicionales que se inviertan en salud el alcalde se asegura 10 votos en la elección, y se sabe que con 400 votos sale reelegido. ¿Como afectará esto las decisiones del alcalde?

2. Si un nuevo estudio señala que por cada \$100.000 invertidos en el área seguridad el alcalde se asegura 2 votos, en el área de salud 3 votos y en las otras áreas 1 voto. Plantee un nuevo modelo considerando que el objetivo del alcalde es ser reelegido, lo que se consigue con un mínimo de 400 votos.

2.5 Habilitación de un Avión Comercial

Una línea aérea decide incorporar un nuevo avión para vuelos comerciales a su flota. Para habilitarlo necesita conocer cuál es el número óptimo de asientos por clase (x_i), la cantidad requerida de azafatas (y_1) y auxiliares de vuelo (y_2), de tal manera que la utilidad sea máxima. Existen 3 tipos de clases: Primera, Ejecutiva y Económica. Por políticas internas se debe ofrecer un mínimo de asientos por clase de 25, 80 y 120 respectivamente. Además un estudio de mercado indicó que la demanda máxima para cada clase es de 45, 100 y 210, por lo que tener un número superior de asientos por clase no tendrá ningún sentido. Por otra parte, el número de azafatas y auxiliares también está acotado. Por un lado, el avión no puede funcionar con menos de 8 azafatas y 2 auxiliares de vuelo; y por límite de espacio no podrán ser más de 18 azafatas y 5 auxiliares de vuelo. Además, para entregar un buen servicio en cada clase, deberá haber al menos 1 azafata por cada 10 pasajeros de Primera, por cada 20 de Ejecutiva y por cada 40 de Económica. También deberá haber un auxiliar de vuelo por cada 100 pasajeros del avión. El sueldo de cada azafata es de \$200 dólares y el de un auxiliar de \$120 dólares. El avión dispone de 420 m^2 para distribuir los asientos (el espacio para pasillos, cabinas y baños no esta incluído), y habrá que considerar que un asiento de Primera ocupa $1,8$ m^2, uno de Ejecutiva $1,4$ m^2 y uno de Económica 1 m^2. El valor de un pasaje en cada una de las clases es de $\$2.000, \$1.300$ y \$900 dólares respectivamente, mientras que el costo de la comida para cada una de las clases es de $\$80, \$60$ y \$50 dólares. El costo de mantención del avión es de \$75.000 dólares. Finalmente, tras un

[4] Yamille Del Valle K.Marcos Orchard C. Optimización 1^{er} Semestre 1996.

cuidadoso estudio de servicio e imagen, la línea aérea concluyó que por cada azafata que tuviera por sobre el mínimo, recibiría un beneficio total equivalente a \$100 dólares, y por cada auxiliar de vuelo adicional el beneficio sería de \$50 dólares; esto debido a que entregarían un mejor servicio y los clientes preferirían viajar en su línea.

SOLUCIÓN[5]

Para plantear el modelo es necesario identificar dos grupos de variables, un grupo que identifique la cantidad de asientos a instalar en cada clase y otro grupo que permita decidir la cantidad de personal (azafatas y auxiliares de vuelo) que debe ser asignado a cada avión.

$x_i =$ Número de asientos en la clase i, $i = \{1 =$Primera, $2 =$Ejecutiva, $3 =$Económica$\}$
$y_i =$ Cantidad de personal i, $i = \{1 =$Azafatas, $2 =$Auxiliares de vuelo$\}$

El objetivo del problema es maximizar la utilidad de la línea aérea, esto es la diferencia entre ingresos (pasajes vendidos y beneficios por servicio) y costos (costo de comida y costo de mantención). El modelo debe considerar las restricciones del problema, las que incluyen un número máximo y mínimo de asientos por cada clase, además del espacio disponible para su instalación; y un nivel mínimo de servicio reflejado en la cantidad de azafatas y auxiliares de vuelo por clase.

Por lo tanto, el problema de optimización se puede expresar como sigue:

$$P) \quad Max \quad [1.920x_1 + 1.240x_2 + 840x_3 + (y_1 - 8)100 + (y_2 - 2)50] - [200y_1 + 120y_2 + 75.000]$$

$$\begin{array}{rcl}
1,8x_1 + 1,4x_2 + x_3 & \leq & 420 \\
0.1x_1 + 02x_2 + 0.4x_3 & \leq & y_1 \\
\sum_{i=1}^{3} x_i & \leq & 100 \cdot y_2 \\
25 & \leq & x_1 \leq 45 \\
80 & \leq & x_2 \leq 100 \\
120 & \leq & x_3 \leq 210 \\
8 & \leq & y_1 \leq 18 \\
2 & \leq & y_2 \leq 5
\end{array}$$

Es importante destacar que éste corresponde al problema relajado del modelo original, ya que no se está considerando que el número de azafatas y de auxiliares de vuelo (y_i) debe ser un número entero.

Problemas Propuestos:

1. ¿Cómo cambia el problema si el sueldo de los auxiliares de vuelo fuera el mismo que el de las azafatas? Plantee el nuevo modelo.

2. Si no existiera la restricciones de máximo y mínimo para el personal del avión, ¿cuántas azafatas y auxiliares convendrá llevar abordo?

3. Por reformas internas, la línea área decide fusionar sus dos primeras clases a una sola, promediando todas las especificaciones que cada una tiene por separado, para tener las nuevas especificaciones de esta clase. Replantee el modelo y analice su resultado. La cantidad de asientos que debe tener esta nueva clase, ¿es un promedio de la cantidad de asientos óptima encontrada en el modelo original de las clases Primera y Ejecutiva?

[5] Andrés Flores M. Michael Ridell H. Optimización 1^{er} Semestre 1996.

2.6 Fabricación de un Cohete

Una fábrica de cohetes, desea conocer la cantidad y tipo óptimo de combustible (x_{ijk}) que debe tener cada cohete con el fin de que recorra la mayor cantidad de kilómetros por litro. La fábrica tiene asignado un valor máximo (M) para gastar en combustible por cada viaje del cohete. Se cuenta con 3 proveedores (i), los cuáles a su vez ofrecen gasolina con y sin plomo (j), de 3 octanajes diferentes (k): 93, 95 y 97 octános. Cada litro de combustible tiene asociado un rendimiento (r_{ijk}) km/l, distinto para cada proveedor, como también un costo (c_{ijk}) y un peso (p_{ijk}) por litro. Como los cohetes ya están diseñados, ya tienen un peso y volumen específico, y por lo tanto estos datos no afectarán el problema. Lo que sí es importante, y por eso se mencionó, es el peso del litro de combustible, ya que limitará la cantidad que podrá llevar el cohete para que no incida en la distancia recorrida por éste, este peso no podrá ser mayor a P kilos.

SOLUCIÓN[6]

El objetivo del problema es determinar la cantidad y tipo de combustible que se debe adquirir para maximizar el rendimiento del cohete, para esto consideraremos las siguientes variables de decisión:

x_{ijk} = Cantidad de combustible que se debe comprar al proveedor i, del tipo j, con k octános;
$i = \{1, 2, 3\}, j = \{1 = \text{con plomo}, 2 = \text{sin plomo}\}$
$k = \{1 = 93 \text{ octános}, 2 = 95 \text{ octános}, 3 = 97 \text{ octános}\}$

El modelo debe considerar, además, las restricciones de capital asignado a cada viaje del cohete y el peso máximo de combustible que puede transportar. Obteniéndose el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} r_{ijk}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} c_{ijk} &\leq M \\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} p_{ijk} &\leq P \\ x_{ijk} &\geq 0 \quad \forall i, j, k \end{aligned}$$

Problemas Propuestos:

1. Uno de los proveedores decide igualar sus precios a otro de los proveedores. ¿Cómo se puede modificar el modelo para que se vea representada esta situación?.
2. Nuevamente, uno de los proveedores decide, a modo de oferta, bajar sus precios, igualándolos todos al de la gasolina más barata. ¿Cómo sería el nuevo modelo?

2.7 Instalación de Central de Telecomunicaciones

Se quiere evaluar la instalación de una central de telecomunicaciones en una zona austral, optimizando la cantidad de servicios que se presten con el fin de maximizar las ganancias. Esta empresa ofrece 3 tipos de servicios: telefonía, TV cable e Internet, los cuáles pueden ser contratados individualmente o en combos de 2 o 3 servicios, en los cuáles se les hace un descuento a los clientes. Por lo tanto, consideraremos que la empresa ofrece 7 servicios (x_i) (los 3 individuales, 3 combinaciones de a 2 y 1 con los 3 servicios juntos), cada uno con un valor (y_i) y un costo para la empresa (c_i). El valor de cada servicio depende exclusivamente de la empresa, ya que no existe competencia en la zona. Además, estos valores son tarifas planas, y en el

[6] Mariangel Arratia L. Pedro Asencio H. Optimización 1^{er} Semestre 2003.