Unidad 1: Optimización Combinatoria

Samantha Reid C.
s.reidc@utem.cl
s.reid.cal@gmail.com

UTEM
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA METROPOLITANA

19 de agosto de 2022

Índice

Descripción del curso

Es una asignatura obligatoria de carácter teórico práctico que se imparte en el sexto semestre y que pertenece al ciclo de especialización. Tiene como requisito la aprobación de Estadística y Probabilidades
Los estudiantes identifican los fundamentos teóricos y prácticos en aplicaciones de ingeniería tales como optimización y algoritmos locales.
La asignatura contempla tópicos en el campo de la computación evolutiva con énfasis en los algoritmos locales.

Contenido del curso

1. Unidad 1: Optimización combinatoria.
2. Unidad 2: Constraint Satisfaction Problem (CSP).
3. Unidad 3: Consistencia.
4. Unidad 4: Búsqueda local.
5. Unidad 5: Algoritmos de búsqueda local.
6. Unidad 6: Algoritmos evolutivos.

Calendario Académico

Fecha	Unidad	Actividades
19-08-2022	Unidad 1	
26-08-2022	Unidad 1	
02-09-2022	Unidad 1	
09-09-2022	Unidad 2	Trabajo 1
16-09-2022	Feriado	
23-09-2022	Feriado	
30-09-2022	Unidad 3	
07-10-2022	Unidad 3	
07-10-2022	Unidad 4	
14-10-2022	Unidad 4	Prueba 1
21-10-2022	Unidad 4	Trabajo 2
28-10-2022	Unidad 5	
04-11-2022	Unidad 5	
11-11-2022	Unidad 5	
18-11-2022	Unidad 6	
25-11-2022	Unidad 6	Trabajo 3
02-12-2022		Prueba 2

Actividades

- Promedio Pruebas: 30 %.
- Promedio trabajos: 70 %.

¿Qué es un modelo?

- Es una descripción simplificada de un fenómeno, escrita de manera formal.
- Se usa para una estructura ya construida, con el propósito de exhibir ciertas características de algunos objetos (sólo algunos de estos elementos estarán en el modelo

Se utilizan para:

- Revelar relaciones que no son aparentes a simple vista.
- Analizar matemáticamente la situación y proponer sugerencias.
- Experimentar con un problema.

Representación

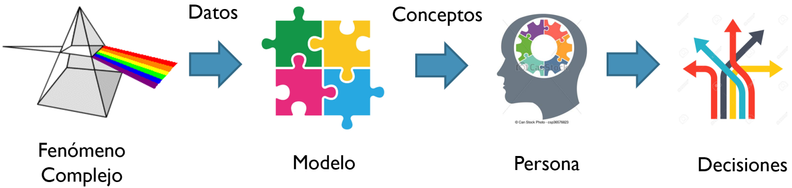


Figura: Representación de un modelo

Abstracción vs. realismo

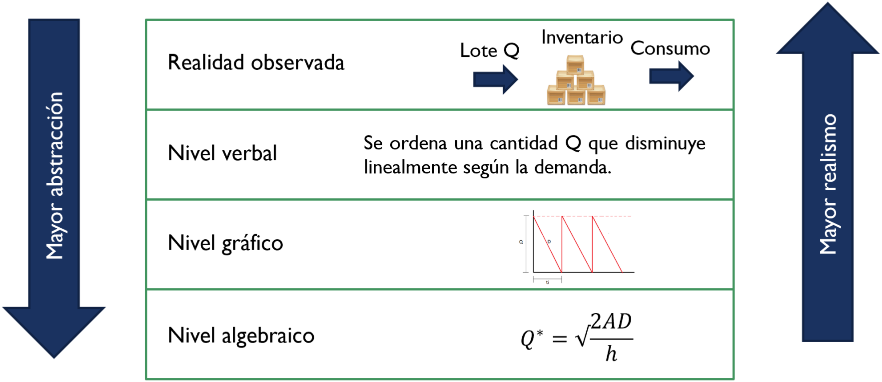


Figura: Niveles de abstracción y realismo de un modelo

Ejemplo

Una empresa puede producir 5 tipos de productos (Producto 1, Producto 2,.. Producto 5) usando dos procesos de producción: moler y perforar. Después de deducir los costos de materiales, cada producto aporta la siguiente utilidad:

PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
550	600	350	400	200

Cada unidad requiere un cierto tiempo de procesamiento, los cuales se indican a continuación:

Procesamiento	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
Molienda	12	20	-	25	15
Perforación	10	8	16	-	-

Ejemplo (cont.)

- Además, el ensamble de cada producto requiere de 20 horas hombre.
- La empresa tiene tres máquinas moledoras y dos máquinas perforadoras, las cuales trabajan 6 días a la semana, con dos turnos de 8 horas cada uno. Hay un total de 8 trabajadores en la parte de ensamblado, y cada uno trabaja un turno diariamente.
- El problema es averiguar cuánto de cada producto debe ser manufacturado para maximizar la utilidad.

Resolución: Parte 1

1. ¿Qué queremos hacer? $\rightarrow$ Maximizar utilidad.
2. ¿Qué elementos queremos determinar? $\rightarrow$ Determinar la cantidad a producir de cierto producto a la semana.
   - Cantidad de producto 1 a producir semanalmente.

     ...
   - Cantidad de producto 5 a producir semanalmente.
3. ¿Qué elementos sí sabemos? $\rightarrow$ Utilidad de cada producto: 550 el primero, 600 por el segundo y así...

$$550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$

Resolución: Parte 2

4. ¿Qué limitaciones tenemos?
   - Sólo contamos con 3 máquinas moledoras que trabajan 96 horas a la semana (cada una), dando un total de 288 horas de capacidad de molienda.
   - Sabemos que una unidad de producto 1 usa 12 horas de molienda, y así con los demás productos.

$$12x_1 + 20x_2 + 25x_4 + 15x_5 \leq 288$$

   - De la misma manera, tenemos que la capacidad de perforación de la empresa son 192 horas a la semana.

$$10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 192$$

   - Finalmente, solo 8 trabajadores trabajan en la empresa, dando un total de 384 horas (48 horas cada trabajador).

$$20(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \leq 384$$

Resolución: Parte 3

- Por lo tanto, el modelo queda representado por un modelo lineal o LP (Linear Programming).
- ¿La cantidad a producir de cada producto puede ser negativa? No, por lo tanto, también tenemos:

$$x_1, x_2, ..., x_5 \geq 0$$

- Resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned} MaxZ = \quad & 550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5 \\ & 12x_1 + 20x_2 + 25x_4 + 15x_5 \leq 288 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 192 \\ & 20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 \leq 384 \\ & x_1, x_2, ..., x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Resumen

- El ejemplo refleja algunas características especiales del modelo LP.
- Existe una única expresión lineal (función objetivo) a ser maximizada o minimizada. Existe una serie de restricciones lineales, las cuales no pueden exceder algunos valores específicos $\geq$ (lo es la única que existe).
- Los coeficientes 288, 192 y 384 del lado derecho de las restricciones suelen denominarse el **lado derecho de la columna**.

Resumen

Una manera sencilla es identificar parámetros y variables de decisión.

- **Parámetros:** Datos que se obtienen de la realidad. Exógenas.
- **Variables:** Cuantifican las decisiones a ser tomadas. Endógenas.
- **Función objetivo:** Expresión algebraica, de parámetros y variables, a ser optimizada. $\rightarrow$ Lo que se **quiere** hacer.
- **Restricciones:** Expresiones algebraicas que condicionan el valor que pueden tomar las variables. $\rightarrow$ Lo que se **puede** hacer.

Introducción a la Programación Lineal

- Los modelos de optimización de una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones se denomina programación matemática.
- Cuando las expresiones son lineales (potencia cero o uno), se denomina programación lineal.

Variables de decisión

- **Numéricas/Continuas:** Pueden tomar cualquier valor.
  - X: Cantidad a producir.
  - Q: Cantidad a transportar.
- **Enteras/Discretas:** Sólo pueden tomar valores discretos. Si sólo toma dos valores, se denominan binarias.
  - y_j: 1 si se instala bodega j, 0 si no.
  - w_j: 1 si se escoge el camino j, 0 si no.

Función objetivo

Algunos ejemplos son:

- Minimizar: Encontrar el menor valor posible.
    - Costos (producción, inventario, transporte, etc.).
    - Tiempo (tiempos de viaje, atención, etc.)
- Maximizar: Encontrar el máximo valor posible.
    - Utilidades
    - Producción
    - Cobertura

Restricciones

- $<$: Menor que.
- $>$: Mayor que.
- $\leq$: Menor o igual que.
- : Mayor o igual que.
- $=$: Igualdad.

Ejercicio 1

Una empresa dedicada a la fabricación del producto A y del producto B desea maximizar sus ventas por cada producto A recibe \$10 y por cada producto B recibe \$12. La fabricación del producto A requiere de 2 horas y de 1 tarro de pintura, en cambio el producto B requiere de 1.5 horas y de 2 tarros de pintura. La empresa dispone de 40 horas y 50 tarros de pintura.

Ejercicio 2

Una empresa dedicada a fabricación de mesas y sillas desea maximizar sus utilidades.

2*Piezas	Recursos requeridos		Total Recursos
	Mesas	Sillas	-
Piezas pequeñas	8	6	60
Piezas grandes	2	1	40

	Mesas	Sillas
Costos	20	18
Ganancias	60	50

Ejercicio 3

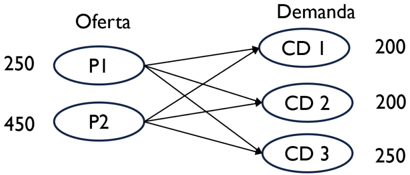
- Un inversionista desea maximizar la inversión de su cartera. El accionista cuenta con un capital de USD$250, pero tiene ciertas restricciones a la hora de invertir. Él desea que el valor de los bonos no represente menos del 30 % total de inversión, al igual que los certificados deben representar, al menos, el 40 % del a inversión, así como las acciones no pueden superar el 20 % del total de inversión.
- Suponga que ninguna de las posibilidades de inversión debe exceder la mitad de la inversión.
- Se exige que se gaste un total de USD$250.

Inversión	Rendimiento (%)
Bonos Gobierno	18
Acciones Florida	20
Acciones La Nación	25
Certificados de bancos	19

Ejercicio 4

Suponga que una empresa posee dos plantas que elaboran un determinado producto en cantidades de 250 y 450 unidades diarias. Dichas unidades deben ser transportadas a tres centros de distribución con demandas diarias de 200, 200 y 250 unidades. Los costos de transporte son:

	CD 1	CD 2	CD3
Planta 1	21	25	15
Planta 2	28	13	19



Introducción

Hasta ahora, sólo hemos visto problemas con forma estándar o extendida.

$$
\begin{aligned}
Max \qquad & 3x + 2y \\
x &\leq 4 \\
2y &\leq 12 \\
3x + 2y &\leq 18 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Programación lineal canónica o paramétrica

Sin embargo, existe otra manera de modelar el problema.

$$Max \quad c^T x \quad \Rightarrow \quad \text{Función Objetivo}$$

$$A^T x \leq b \quad \Rightarrow \quad \text{Restricciones}$$

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Condiciones de no negatividad}$$

Variables, costos y recursos (vectores)

¿Y qué significa x?

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Variables | Costos | Recursos

Modelo general (ecuaciones)

$$Max \quad [c_1,\ldots,c_n]^T \cdot [x_1,\ldots,x_n]$$

s.t.
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modelo general (ecuaciones) (cont.)

$$\begin{aligned}
Max \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

Modelo general (ecuaciones) (cont.)

$$\begin{aligned} Max \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j & \forall j = 1, ..., m \\ & x_i \geq 0 & \forall i = 1, ..., n \end{aligned}$$

Problema de dieta

Se tiene un paciente que desea hacer una tienda. Esta persona requiere saber cuánto debe consumir de cierto tipo de alimentos para así mantener una dieta saludable, la cual cumpla con todos los nutrientes necesarios.
Así, el problema consiste en indicarle al paciente cuánto debe comer de cierto alimento, mientras se cumpla con los nutrientes necesarios, al menor costo alimenticio posible.

Resolución manera estándar o extendida

Se cuenta con los siguientes datos, para una ingesta diaria:

Producto (100 gr)	Calorías	Grasas	Proteínas	Carbohidratos	Costo (1 kg)
Palta	161	14.74	2.01	8.58	3990
Carne	287	19.29	26.41	0	7490
Arroz	365	0.66	7.13	79.95	1100
Req. mín. diario	1600	60	56	100	-
Req. max. diario	2000	80	90	150	-

Resolución manera estándar o extendida (cont.)

- **Variables de decisión:**
  - x_A : Cantidad de palta a consumir diariamente (100 gr).
  - x_B : Cantidad de carne a consumir diariamente (100 gr).
  - x_C : Cantidad de arroz a consumir diariamente (100 gr).
- **Función Objetivo:**

$$MaxZ = 39{,}9x_A + 74{,}90x_B + 11{,}0x_C$$

- **Restricciones:**
  - Cantidad mínima de nutrientes a consumir diariamente.

$$\begin{aligned}161x_A + 287x_B + 365x_C &\geq 1600\\ 14{,}74x_A + 19{,}29x_B + 0{,}66x_C &\geq 60\\ 2{,}01x_A + 26{,}41x_B + 7{,}13x_C &\geq 56\\ 8{,}58x_A + 79{,}95x_C &\geq 100\end{aligned}$$

Resolución manera estándar o extendida (cont.)

- Cantidad máxima de nutrientes a consumir diariamente.

$$\begin{aligned} 161x_A + 287x_B + 365x_C &\leq 2000 \\ 14{,}74x_A + 19{,}29x_B + 0{,}66x_C &\leq 80 \\ 2{,}01x_A + 26{,}41x_B + 7{,}13x_C &\leq 90 \\ 8{,}58x_A + 79{,}95x_C &\leq 150 \end{aligned}$$

- La cantidad de alimentos no puede ser negativa (no negatividad):

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$

Resolución parametrizado

- **Conjuntos:**
  - N: Conjunto de alimentos.
  - M: Conjunto de nutrientes.
- **Variables:**
  - x_i : Cantidad a incluir de alimento $i \in N$.
- **Parámetros:**
  - a_{ij} : Cantidad de nutriente $j \in M$ contenido en alimento $i \in N$.
  - b_j: Mínimo requerido del nutriente $j \in M$.
  - d_j: Máximo requerido del nutriente $j \in M$.
  - c_i: Costo del alimento $i \in N$.

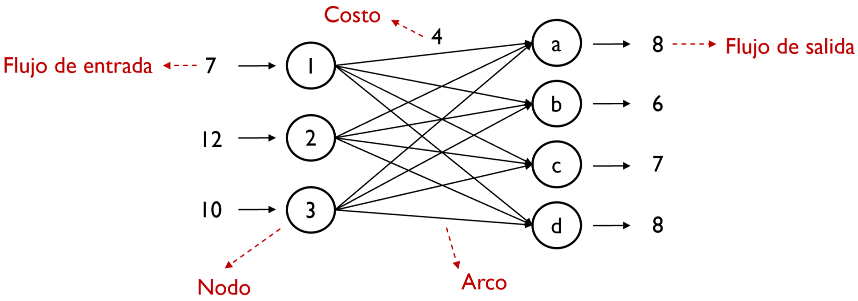
Resolución parametrizado (cont.)

- **Modelo:**

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \sum_{i \in N} c_i x_i & & (1)\\
& \sum_{i \in N} a_{ij} x_i \geq b_j & \forall j \in M \quad & (2)\\
& \sum_{i \in N} a_{ij} x_i \leq d_j & \forall j \in M \quad & (3)\\
& x_i \geq 0 & \forall i \in N \quad & (4)
\end{aligned}
$$

Problema de transporte

El problema de transporte consiste en minimizar el costo de despachar un flujo de productos desde varios orígenes a varios destinos (Anderson, Sweeney Williams, 1993). Visualmente se pueden representar de la siguiente manera (red de flujo):



Resolución extendida

- **Variables de decisión:**

  x_{ij} : Cantidad a transportar desde nodo $i = 1, 2, 3$ hasta nodo de salida $j = 1, 2, 3.$

- **Función objetivo:**

$$MinZ = 4x_{1a} + ... + 7x_{3d}$$

- No puede salir más de una cierta cantidad del flujo de entrada

$$\begin{aligned} x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} + x_{1d} &\leq 7 \\ x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} + x_{2d} &\leq 12 \\ x_{3a} + x_{3b} + x_{3c} + x_{3d} &\leq 10 \end{aligned}$$

- Se debe cumplir el mínimo de la demanda en el flujo de salida

$$\begin{aligned} x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} &\geq 8 \\ x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} &\geq 6 \\ x_{1c} + x_{2c} + x_{3c} &\geq 7 \\ x_{1d} + x_{2d} + x_{3d} &\geq 8 \end{aligned}$$

- No se pueden transportar unidades negativas

$$x_{1a}, x_{1b}, ..., x_{3d} \geq 0$$

Resolución parametrizada

- **Conjuntos:**
  - N: Nodos de origen.
  - M : Nodos de destino.
- **Variables:**
  - x_{ij} : Cantidad transportada desde $i \in N$ a $j \in M$.
- **Parámetros:**
  - c_{ij} : Costo de transporte entre origen $i \in N$ a destino $j \in M$.
  - a_i: Oferta en nodo de origen $i \in N$.
  - b_j: Demanda en nodo de destino $j \in M$.
- **Modelo:**

$$Min \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} c_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

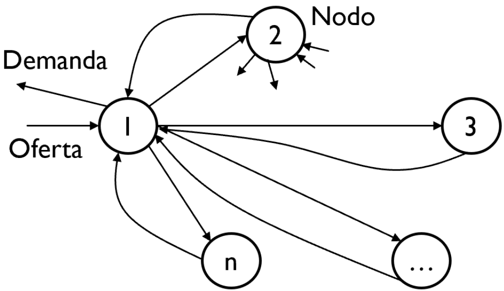
$$\sum_{j \in M} x_{ij} \leq a_i \qquad \forall i \in N \tag{6}$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} \geq b_j \qquad \forall j \in M \tag{7}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in N, j \in M \tag{8}$$

Modelo de transferencia o flujo

- Este modelo generaliza el problema de transporte.
- En lugar de definir ciertos nodos como de origen y otros de destino, permite que los nodos puedan cumplir una doble función.
- Un ejemplo de esto es un sistema eléctrico interconectado.



Ejemplo

- Tomando como ejemplo la imagen anterior, suponga un sistema eléctrico interconectado, el cual dispone de una cierta oferta máxima de energía entregada por empresas generadoras eléctricas, la cual, a su vez, debe satisfacer una demanda mínima.
- Dado que la oferta y la demanda de cada nodo usualmente no coinciden, el nudo puede enviar o recibir energía a un costo que depende del origen y del destino de la transferencia.
- La administración de la red planifica la transferencia de energía desde y hacia todos los nudos del sistema de manera de satisfacer la demanda. Se desea minimizar el costo de la dicha transferencia.

Resolución parametrizada

Conjunto:

- N: 1,2,3,... (nodos)

Parámetros:

- O_n : oferta máxima del nodo $n \in N$.
- D_n : demanda mínima del nodo $n \in N$.
- C_{np} : costo de transferencia desde el nodo $n \in N$ hasta el nodo $p \in N$. Si $n = p$, $C_{np} > 0$

Variables:

- o_n : oferta del nodo $n \in N$.
- d_n : demanda del nodo $n \in N$.
- x_{np} : energía transmitida desde el nodo $n \in N$ hasta el nodo $p \in N$.

Modelo matemático:

$$Min \sum_{n \in N} \sum_{p \in N} C_{np} x_{np}$$

$$o_n \leq O_n \qquad \forall n \in N \tag{1}$$

$$d_n \geq D_n \qquad \forall n \in N \tag{2}$$

$$o_n + \sum_{p \in N} x_{pn} = d_n + \sum_{p \in N} x_{np} \qquad \forall n \in N \tag{3}$$

$$x_{np} \geq 0 \qquad \forall n \in N, p \in N$$

Donde:

1. Oferta máxima.
2. Demanda mínima.
3. Flujo de equilibrio.

Ejercicio de desafío

En base al ejemplo del modelo de transferencia o flujo de la página 18-19, responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué problema podría darse con la solución óptima si algún C_{nn} fuera igual a cero?
- ¿Cómo se puede adaptar este modelamiento para considerar también el costo de generación eléctrica? El costo es diferente en cada nudo.
- La modelación supone implícitamente que la oferta total es capaz de satisfacer la demanda, pues en caso contrario, $o_i \leq O_i$ sería incompatible con $d_i \leq D_i$. Si no se cumple necesariamente tal supuesto, ¿cómo se puede incluir el "costo de falla", es decir, una penalización por no poder suplir la demanda en un cierto nudo? Suponemos que dicha multa es muy superior al costo de generación y transmisión de la red.

Optimización Entera

Definición Optimización Entera

Se dice que un modelo es de optimización entera cuando una o más variables son discretas y/o binarias.

Problemas:

- Uso de variables enteras aumentan considerablemente las posibilidades de modelado.
- A su vez, aumentan la complejidad computacional, ya que se deja de trabajar en un espacio continuo y se pasa a un espacio discreto.

Problema de la mochila

Se tienen distintos tipos de artículos, los cuales tienen un beneficio asociado y un peso o volumen. Además, por otro lado se tiene una mochila, donde se pueden introducir estos ítems, el cual soporta un peso máximo. El problema consiste en meter en la mochila los ítems de tal manera que se maximice el valor, siempre que no supere el peso máximo.

Resolución manera estándar o extendida

Un viajero está preparando su mochila con un peso de 40 kilos y desea maximizar la cantidad de nutrientes que llevará.

Tipo alimento	Nutrientes	Volumen
Alimento A	2	4
Alimento B	4	6
Alimento C	2.5	3

Resolución manera estándar o extendida (cont.)

- **Variables de decisión:**
  - x_A : Cantidad a llevar de alimento A.
  - x_B : Cantidad a llevar de alimento B.
  - x_C : Cantidad a llevar de alimento C.
- **Función objetivo:**

$$MaxZ = 2x_A + 6x_B + 3x_C$$

- **Restricciones:**

$$\begin{aligned} 4x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 40 \\ x_A, x_B, x_C &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolución manera parametrizada

- **Conjuntos:**
  - N: Conjunto de alimentos.
- **Variables:**
  - x_i : 1 si agrego alimento $i \in N$ en la mochila, 0 si no.
- **Parámetros:**
  - b_i: beneficio del alimento $i \in N$.
  - p_i: peso del alimento $i \in N$.
  - K : peso máximo que soporta la mochila.
- **Modelo:**

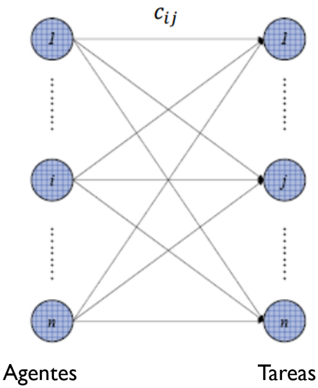
$$Max \quad \sum_{i \in N} b_i x_i \tag{9}$$

$$\sum_{i \in N} b_i p_i \leq K \tag{10}$$

$$x_i \in \{0,1\}^N \tag{11}$$

Problema de asignación

Existe una cantidad de agentes (o máquinas) y un número de tareas. Cualquier agente puede desarrollar cualquier tarea con un coste asociado (el cual dependerá del agente asignado a la tarea).
Por lo tanto, el problema busca asignar todas las tareas a un solo agente, de modo que el coste total sea el mínimo.



Resolución manera estándar o extendida

Una compañía desea realizar una jornada de mantenimiento preventivo a sus tres máquinas principales A, B y C. Teniendo en cuenta que según el grado de especialización de cada equipo prestador de servicios de mantenimiento el costo de la tarea varía para cada máquina en particular, por lo que debe de asignarse el equipo correcto a la máquina indicada con el objetivo de minimizar el costo total de la jornada. Los costos asociados se pueden observar en la siguiente tabla:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Equipo de mant. 1	10	9	5
Equipo de mant. 2	9	8	5
Equipo de mant. 3	6	7	7

Resolución manera estándar o extendida (cont.)

- **Variables de decisión:**

  x_{ij} : 1 si se asigna el equipo de mantenimiento (i=1,2,3) a la máquina (j=1,2,3), 0 en otro caso.

- **Función objetivo:**

$$MinZ = 10x_{11} + 9x_{12} + ... + 7x_{33}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{1,1} + X_{1,2} + X_{1,3} = 1 \\ X_{2,1} + X_{2,2} + X_{2,3} = 1 \\ X_{3,1} + X_{3,2} + X_{3,3} = 1 \end{array}\right\} \text{Cada equipo de mantenimiento está asignado a solo 1 máquina}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} = 1 \\ X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} = 1 \\ X_{1,3} + X_{2,3} + X_{3,3} = 1 \end{array}\right\} \text{Cada máquina requiere solo 1 equipo de mantenimiento}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Resolución parametrizada

- **Conjuntos:**
  - N: Conjunto de trabajadores.
  - M: Conjunto de máquinas.
- **Variables:**
  - x_{ij} : 1 si asigno al trabajador $i \in N$ a la máquina $j \in M$, 0 si no.
- **Parámetros:**
  - c_{ij}: costos de asignación del trabajador $i \in N$ a máquina $j \in M$.
- **Modelo:**

$$Min \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} c_{ij} x_{ij} \tag{12}$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in M \tag{13}$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in N \tag{14}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}^{N \times M} \tag{15}$$

Introducción

En muchos contextos, el servicio a los clientes depende de la distancia entre los clientes y los locales a los cuales son asignados (generalmente asignados al más cercano).

Definición cobertura

Cada nodo de demanda i tiene un subconjunto N_i de nodos candidatos j que pueden servir o cubrir el nodo de demanda.

La cobertura también puede establecerse como parámetro binario, tomando como valor 1 si una localización en el sitio candidato j puede ser cubierto por el nodo de demanda i, 0 en otro caso.

Set Covering Problem (SCP)

Problema: Se desea saber dónde localizar instalaciones, para así cubrir toda la demanda.

- **Conjuntos:**
  - N: Conjunto de sitios candidatos a localizar.
  - M: Conjunto de nodos de demanda.
- **Parámetros:**
  - a_{ij}: 1 si nodos $i \in M$ está cubierto por nodo $j \in M$, 0 si no.
- **Variables:**
  - x_j : 1 si localizo instalación en nodo $j \in N$, 0 si no.
- **Modelo:**

$$Min \quad \sum_{j \in N} x_j \tag{16}$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad \forall i \in M \tag{17}$$

$$x_j \in \{0,1\}^N \tag{18}$$

Maximum Covering Location Model (MCLM)

Problema: Se desea saber dónde localizar instalaciones, para así maximizar la demanda cubierta. Aquí no se desea cubrir a todos los nodos.

- **Parámetros:**
  - h_i: demanda en el nodo $i \in M$.
  - P: número máximo de instalaciones a localizar.
- **Variables:**
  - z_i : 1 si nodo $i \in M$ está cubierto, 0 si no.
- **Modelo:**

$$Max \quad \sum_{i \in M} h_i z_i \tag{19}$$

$$z_i \leq \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \qquad \forall i \in M \tag{20}$$

$$\sum_{j \in N} x_j \leq P \tag{21}$$

$$x_j, z_i \in \{0, 1\} \tag{22}$$

P-median problem

Problema: Se desea minimizar el costo total de localizar las instalaciones.

- **Parámetros:**
  - d_{ij}: distancia desde el nodo de demanda $i \in M$ hasta nodo $j \in N$.
- **Variables:**
  - x_j : 1 si se localiza instalación en nodo $j \in N$, 0 si no.
  - y_{ij} : 1 si la demanda en el nodo $i \in M$ es atendida por la instalación $j \in N$, 0 si no.

P-median problem (cont.)

- Función objetivo:

$$Min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} h_i d_{ij} y_{ij}$$

- (1) Todos los nodos de demanda deben estar asignados.

$$\sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in M$$

- (2) Asignación máxima de instalaciones.

$$\sum_{j \in N} x_j = P$$

- (3) Sólo se pueden asignar instalaciones a nodos de demanda si estos ya están instalados.

$$y_{ij} \leq x_j \qquad \forall i \in M, j \in M$$

- (4) Naturaleza de las variables

$$y_{ij}, x_j \in \{0, 1\}$$

Desafio: Reajustar la ecuación (3) para tener un menor número de restricciones. **HINT:** Recuerde que tanto x_j como y_{ij} son variables binarias.

TSP (Traveling Salesman Problem)

Problema: Se desea conocer cuál es la ruta más corta posible que visite cada nodo **exactamente una vez** y, al finalizar, regrese al nodo de origen.

- **Conjuntos:**
  - N: Nodos de origen.
  - M: Nodos de destino.
- **Variables:**
  - x_{ij} : 1 si la ruta incluye la secuencia de ir desde el nodo $i \in N$ hasta el nodo $j \in M$, 0 si no.
- **Parámetros:**
  - d_{ij}: distancia entre nodo $i \in N$ hasta nodo $j \in M$.
- **Modelo:**

$$Min \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} d_{ij} x_{ij} \tag{23}$$

$$\sum_{i \in N / i \neq j} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in M \tag{24}$$

$$\sum_{j \in M / j \neq i} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in N \tag{25}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}^{N \times M} \tag{26}$$

TSP (Continuación)

Sin embargo, esto puede generar que se generan "islas" o ciclos que no estén conectados, por lo que se debe agregar una variable auxiliar u_i, u_j y las siguientes restricciones:

$$\sum_{i \in U} \sum_{j \in U} x_{ij} \leq |U| - | \qquad \forall U / 2 \leq |U| \leq n-2 \tag{27}$$

$$u_1 = 1 \tag{28}$$

$$2 \leq u_i \leq n \qquad \forall u \neq 1 \tag{29}$$

$$u_i - u_j + 1 \leq (n-1)(1-x_j) \qquad \forall i \neq 1, j \neq 1 \tag{30}$$

Unidad 1: Optimización Combinatoria

Samantha Reid C.
s.reidc@utem.cl
s.reid.cal@gmail.com

UTEM
UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
METROPOLITANA

19 de agosto de 2022