2025年春季数值分析期末回忆版

成崔昊

1. 设 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$，则 f[0,1] =______， f[0,-1]=______, f[1,2,3,4,5](某个 5 阶差商，记不清了) = ______，若 f[-2,-1,0,1] = 2025，那 f[-1,0,1,2] = ______。
   答案：a+b, -a-b, 2025+4a

2. 浮点系 F(10,8,38,-38) 能表示的最大浮点数为 ______，一共可以表示______个数
   答案：$\mathbf{0.99999999 * 10^{38}}$, 13860000001

3. 牛顿迭代法的公式为____，一般是____阶收敛速度，区间法是____阶收敛速度。
   答案：$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x)}{f'(x)}$,二，一

4. 常微分方程的梯形公式为______， 它是一个__步__阶__式方法。
   答案：$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$,一，二，隐

5. 设 y=f(x)，有 (x_i, y_i)，i=1,2,⋯10， 10 个插值点构造拉格朗日插值多项式，则 $R_9(x)$=_______，
   $l_1(x_{10})$=_____，$\sum_{i=1}^{10} l_i(x)(2025x_i^2 + 2023x_i + 2022)$ =_____
   答案：$\frac{f^{(10)}(x)}{10!}\prod_{i=1}^{10}(x - x_i)$, 0, $\mathbf{2025x^2 + 2023x + 2022}$

6. 有 n+1 个插值点的求积公式最低代数精度为__，最高为____，此时称为____求积公式
   答案：n，2n+1,Gauss

解答题：

1. 设使用公式$e^x \approx = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}$ 计算e^4,如何计算能使精度最高？

2. 给定数据表

x	0	1	2	3
f(x)	1	0	5	52
f'(x)	2		2	

求插值以上数据不超过 5 次的多项式，并给出余项

答案：

x	f[.]	f[..]	f[...]	f[⋯.]	f[⋯..]	f[⋯⋯]
0	1					
0	1	2				
1	0	-1	-3			
2	5	5	3	3		
2	5	2	-3	-3	-3	
3	52	47	45	24	9	4

故$p(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 3x^2(x-1) - 3x^2(x-1)(x-2) + 4x^2(x-1)(x-2)^2$

$$R(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^2(x-1)(x-2)^2(x-3), \xi \in (0,3)$$

3. 系数矩阵为 A=[5,3,7]，b = [4] 求其 Jacobi 与 Gauss-Seidel 迭代格式，并判断当 a 取
[3,6,8], [5]
[7,8,a], [6]
何值时，$x_0 = [1,1,1]^T$ 可以收敛。

4. $x^3 - x - 1 = 0$ ，其在$x_0 = 1.3$ 附近有零点。设迭代格式为 $x^{k+1} = \sqrt[3]{x^k + 1}$ ，判断是否收敛，若不收敛，给出收敛的迭代格式。

解答：$\phi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{-2}{3}}$

$\phi''(x) = \frac{-2}{9}(x+1)^{\frac{-5}{3}}$

取区间[1,2],发现二阶导恒小于 0，即一阶导单调减。
$\phi'(1) = 0.20999$，$\phi'(2) = 0.16025$，故在区间[1,2]上$|\phi'(x)| \le |\phi'(1)| < 1$
因此收敛。