TRIGONOMETRÍA

PROGRAMA ACADÉMICO VIRTUAL

Ciclo Anual Cesar Vallejo
Docente: Rodolfo José Condori

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

INTRODUCCIÓN

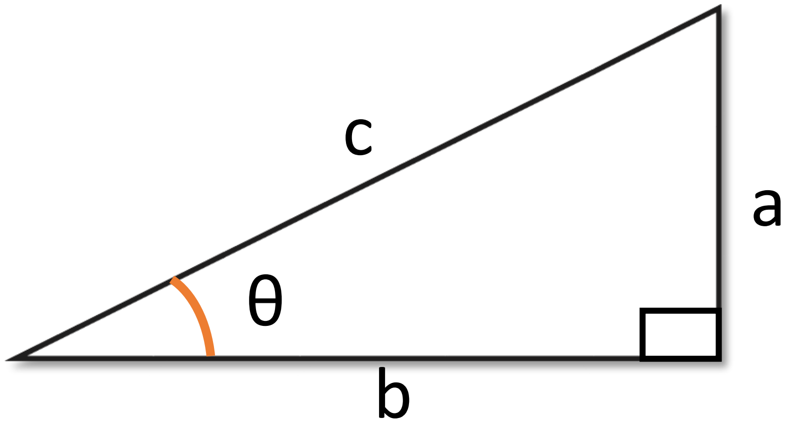
Las razones trigonométricas son útiles para el cálculo de distancias , en carreras como Ing. Civil , Ing. Minas ,Ing. Ambiental. Es común en ellas utilizar conocimientos de calculo de distancias con precisión sobre terrenos o construcciones . Para dichos cálculos se necesita conocer medidas angulares que se obtienen con un instrumento llamado **Teodolito.**

El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico universal que sirve para medir ángulos verticales y horizontales, ámbito en el cual tiene una precisión elevada. Con otras herramientas auxiliares puede medir distancias y desniveles.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Razón Trigonométrica

Es el cociente que se obtiene al dividir las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo con respecto a un ángulo agudo.



Teorema de Pitágoras

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Se cumple:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\textit{cateto opuesto a } \theta}{\textit{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\textit{cateto adyacente a } \theta}{\textit{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

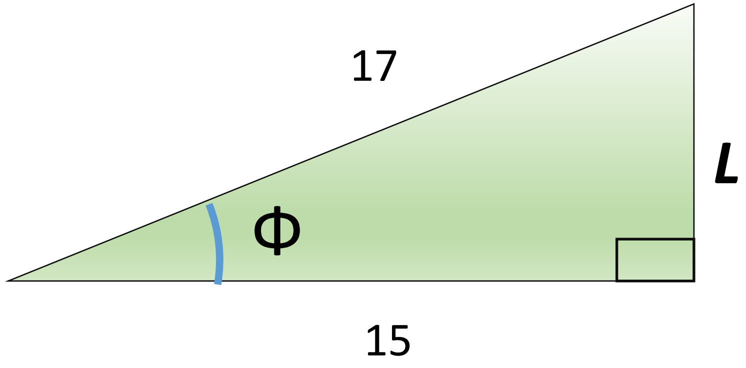
$$\tan\theta = \frac{\textit{cateto opuesto a } \theta}{\textit{cateto adyacente a } \theta} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{\textit{cateto adyacente a } \theta}{\textit{cateto opuesto a } \theta} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente a } \theta} = \frac{c}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto a } \theta} = \frac{c}{a}$$

Ejemplo



Teorema de Pitágoras

$$17^2 = 15^2 + L^2$$

$$17^2 - 15^2 = L^2$$

$$64 = L^2$$

$$8 = L$$

Hallamos las razones trigonométricas para el ángulo Φ

$$\operatorname{sen}\Phi = \frac{8}{17}$$

$$\cos\Phi = \frac{15}{17}$$

$$\tan\Phi = \frac{8}{15}$$

$$\cot\Phi = \frac{15}{8}$$

$$\sec\Phi = \frac{17}{15}$$

$$\csc\Phi = \frac{17}{8}$$

Se observa que existe una relación reciproca entre las razones trigonométricas señaladas , por ejemplo

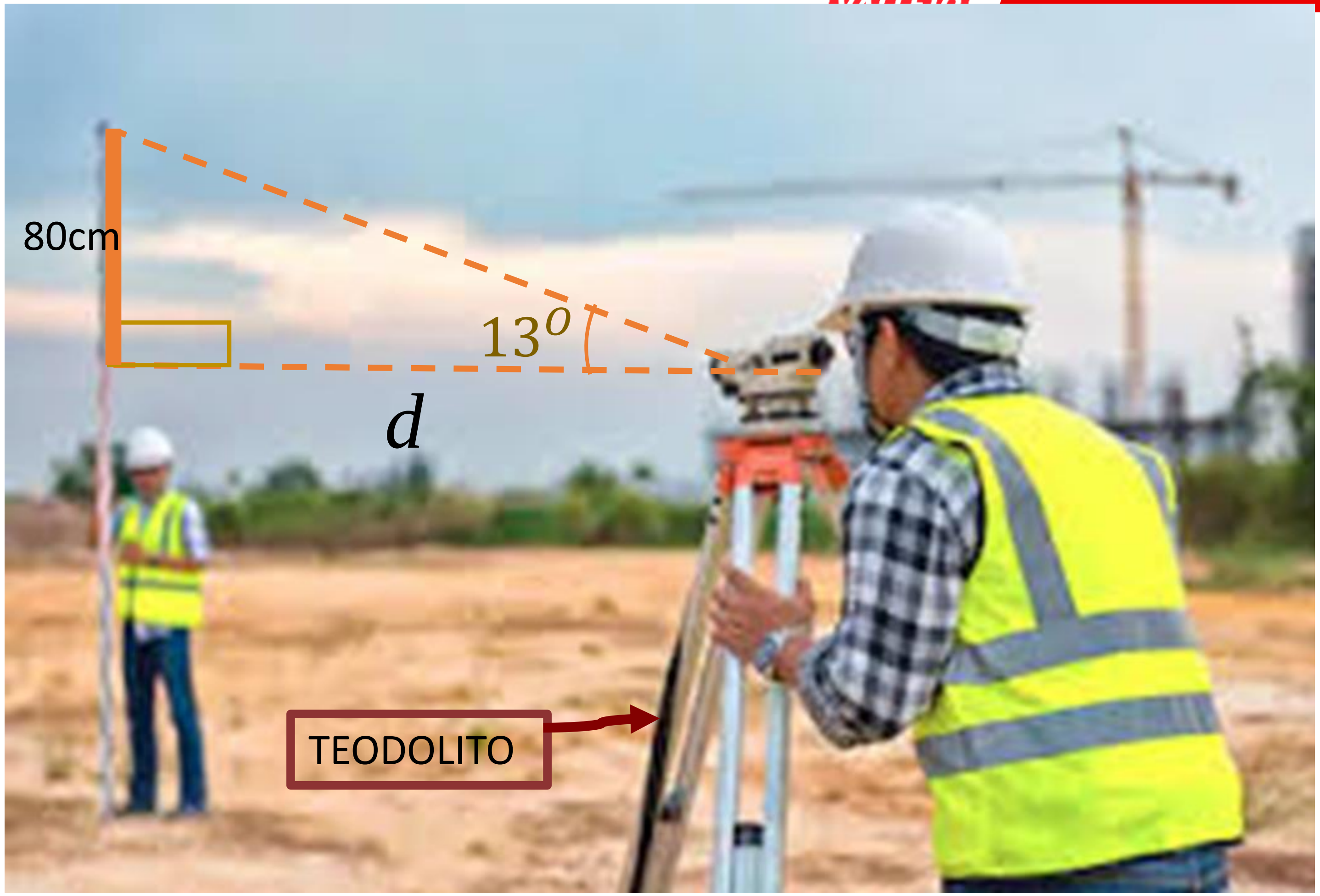
senΦ cscΦ=1

Aplicación 1

En el gráfico se observa a un ingeniero Civil que debe calcular la distancia d , sabiendo que el ángulo medido con el teodolito es de 13° y los valores de sus razones trigonométricas los tenemos en la siguiente tabla .

$\text{sen}13^o$	0.22
$\cos 13^o$	0.97
$\cot 13^o$	4.33

A)33.5cm B)346.4cm C)33 cm
D)33.8cm E)35cm



Resolución

Según los datos que tenemos en el gráfico y de la tabla decidimos usar la razón cotangente

Resolvemos la siguiente ecuación

$$\cot 13^o = \frac{d}{80cm}$$

$$4.33 = \frac{d}{80cm}$$

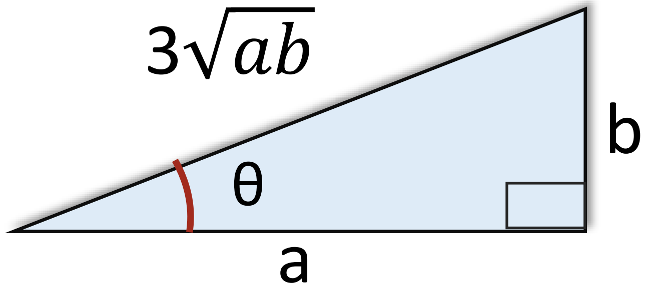
d=346.4cm

Clave B

Aplicación 2

En el gráfico , halle el valor de

H= tanθ+ cotθ



A) 9 B) 7 C) 5 D) 3 E)1

Resolución

Nos pide

H= tanθ+ cotθ

Reemplazamos del gráfico de tanθ y cotθ

$$H=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$$

$$H=\frac{b^2+a^2}{ab}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras

$$(3\sqrt{ab})^2=a^2+b^2$$

$$9ab=a^2+b^2$$

$$\underbrace{9ab}_{ab}=\underbrace{a^2}_{ab}+\underbrace{b^2}_{ab}$$

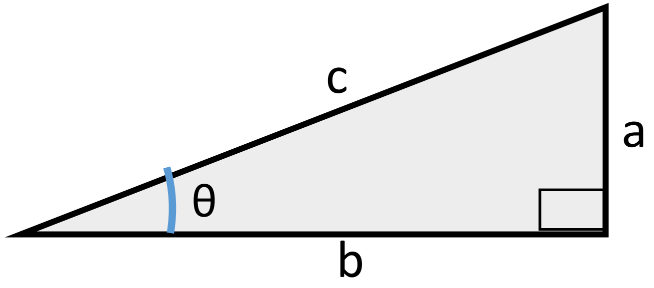
$$9=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

$$9=\underbrace{\cot\theta+\tan\theta}_{H=9}$$

Clave A

Aplicación 3

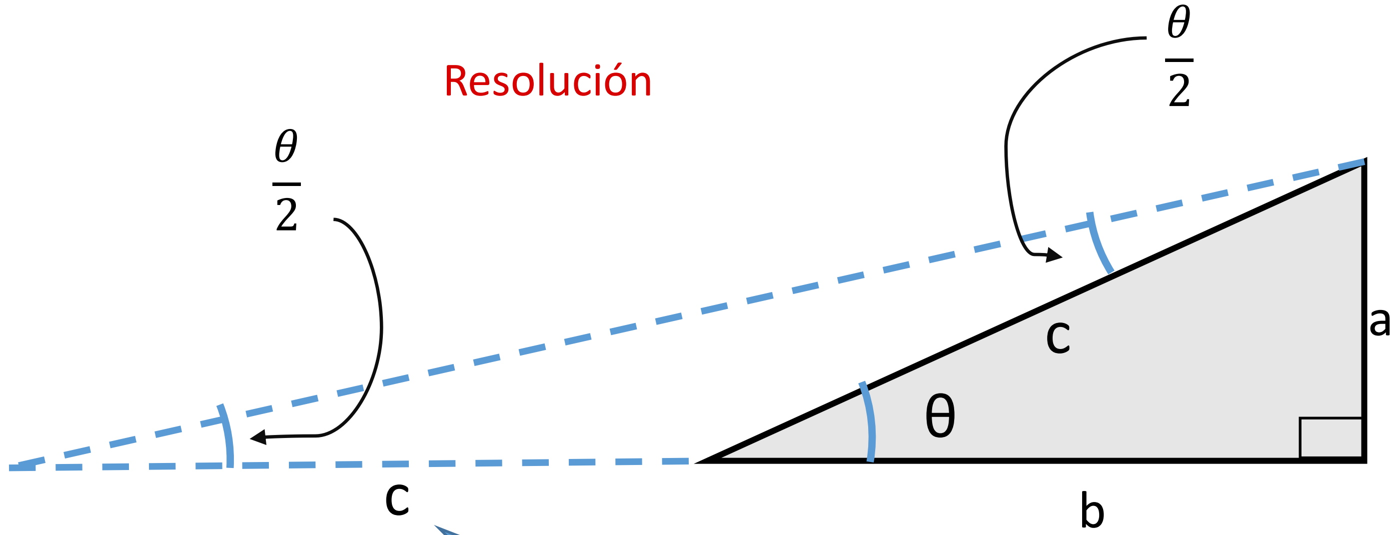
Del gráfico halle la $\tan\frac{\theta}{2}$



A) $\dfrac{a}{b-c}$ B) $\dfrac{a}{a-b}$ C) $\dfrac{a}{a+b}$

D) $\dfrac{a}{b-c}$ E) $\dfrac{a}{c+b}$

Resolución



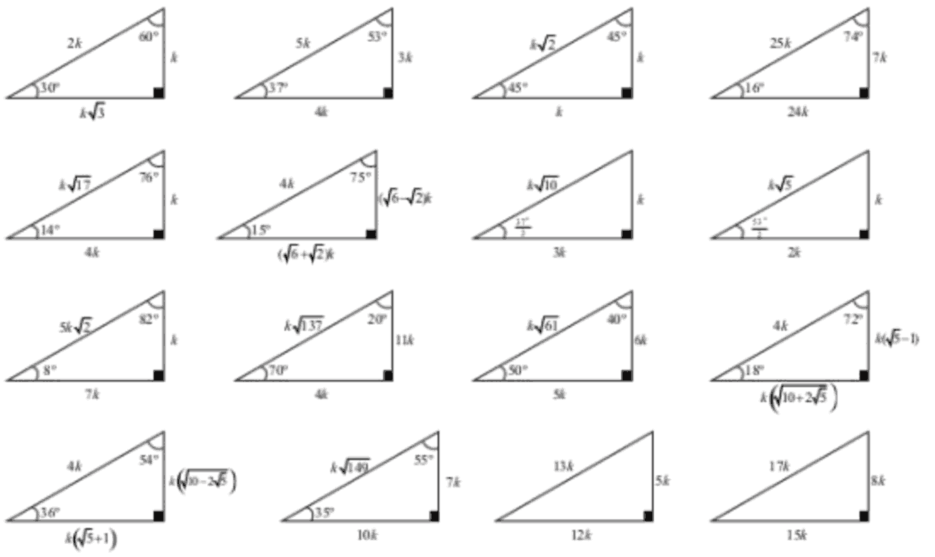
Prolongamos una longitud **c** igual a la hipotenusa

Del gráfico

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{a}{c+b}$$

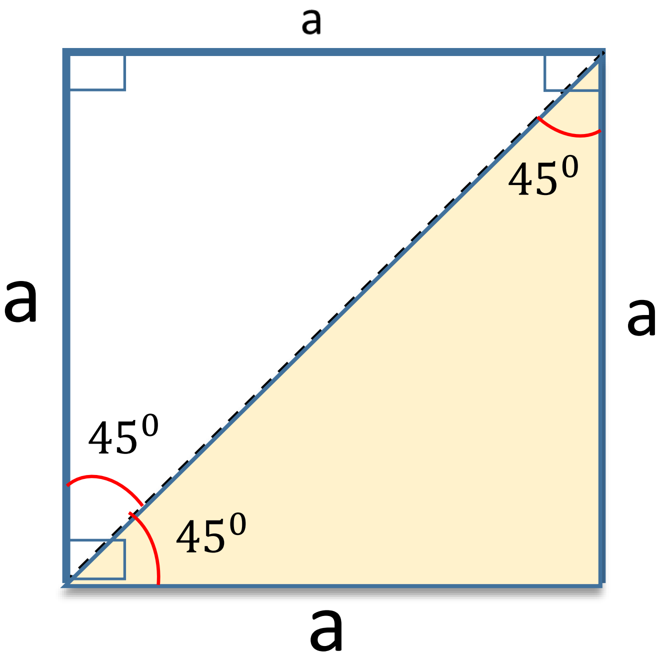
CLAVE E

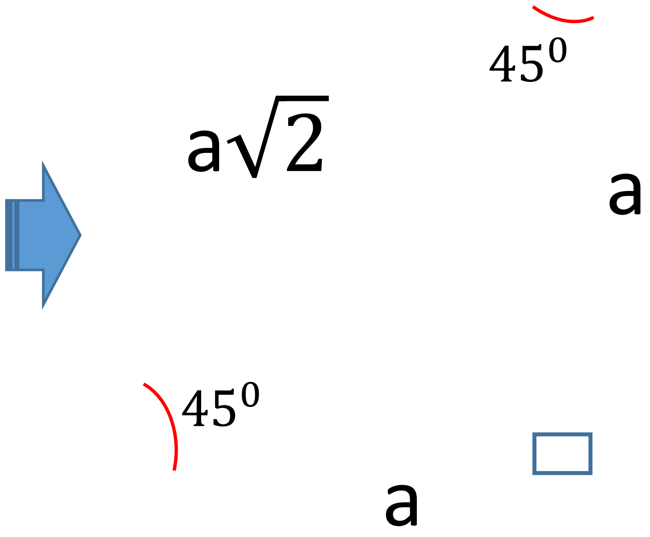
TRIANGULOS RECTANGULOS NOTABLES



Existen varios triángulos rectángulos notables clasificados como exactos y aproximados

TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLE DE 45°





Veamos todas sus razones trigonométricas

Del gráfico

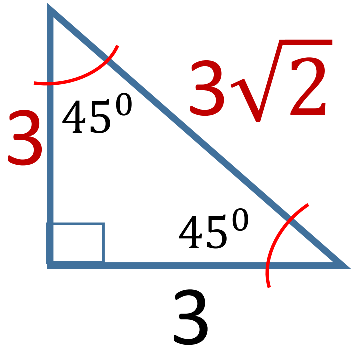
$$sen45^o = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}}$$

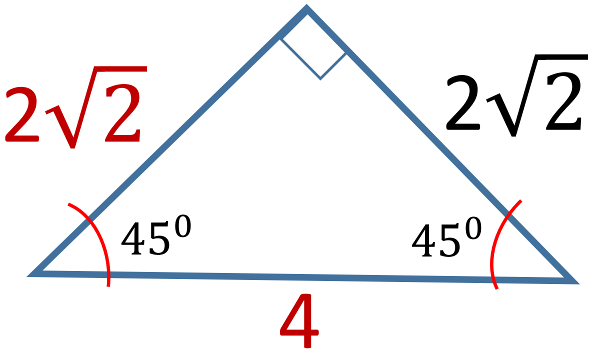
$$sen45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$sen45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

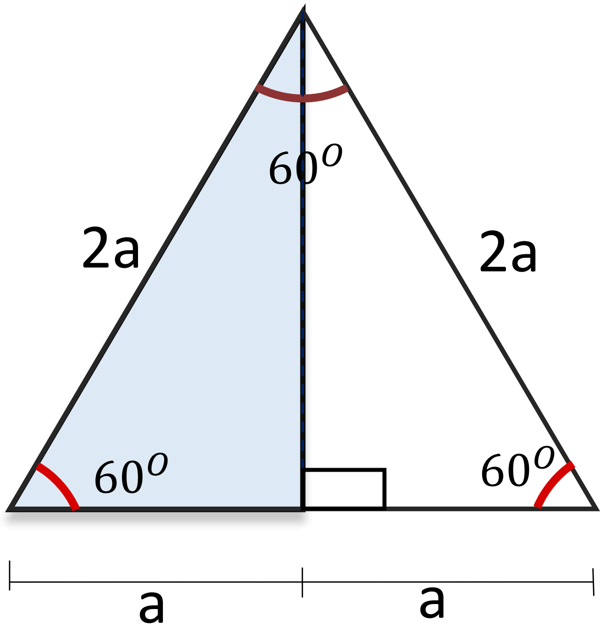
	45^o
sen	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1
cot	1
sec	$\sqrt{2}$
csc	$\sqrt{2}$

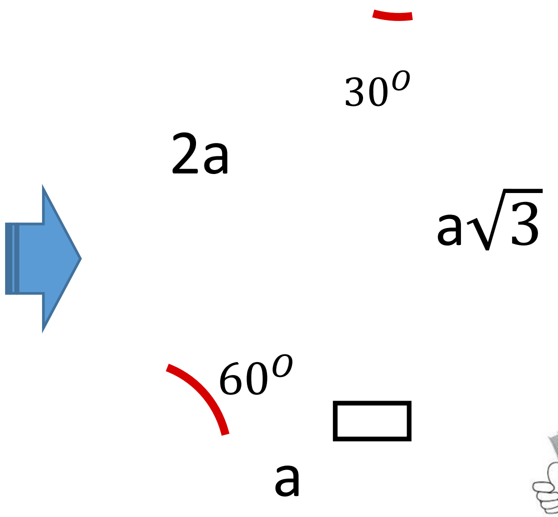
Ejemplos





TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLE DE 30 °y 60°





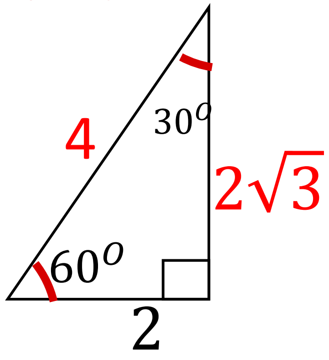
Veamos sus razones trigonométricas

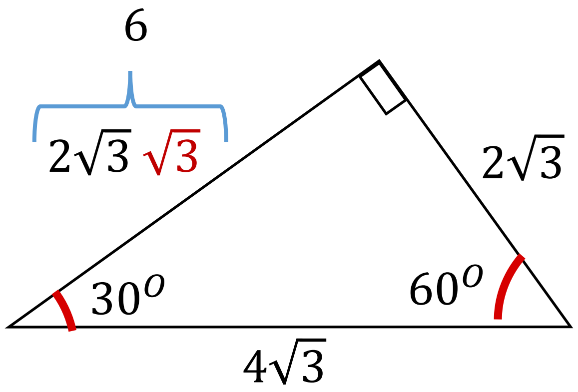
$$\text{sen}30^o = \frac{\cancel{a}}{2\cancel{a}}$$

$$\text{sen}30° = \frac{1}{2}$$

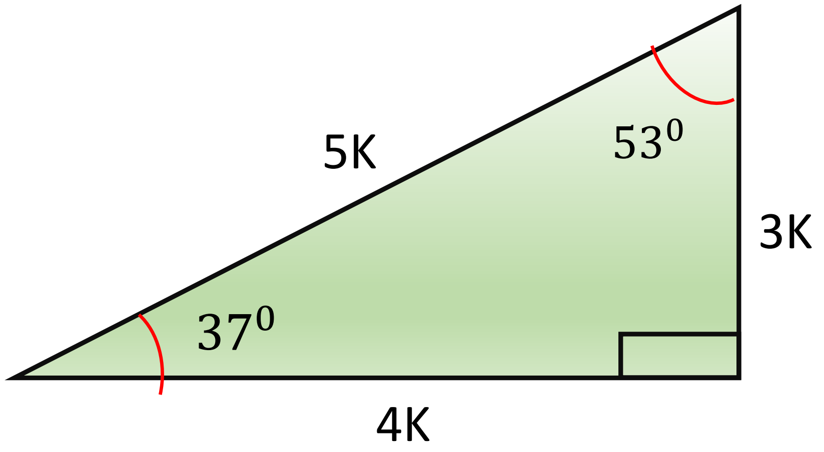
	30^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
cot	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
csc	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejemplos

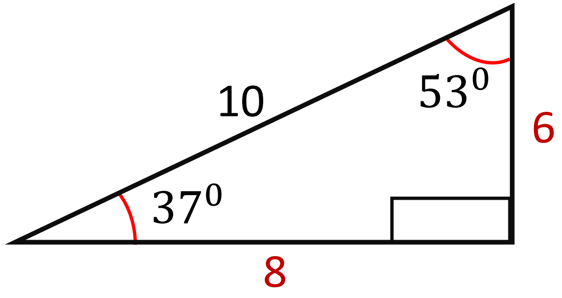


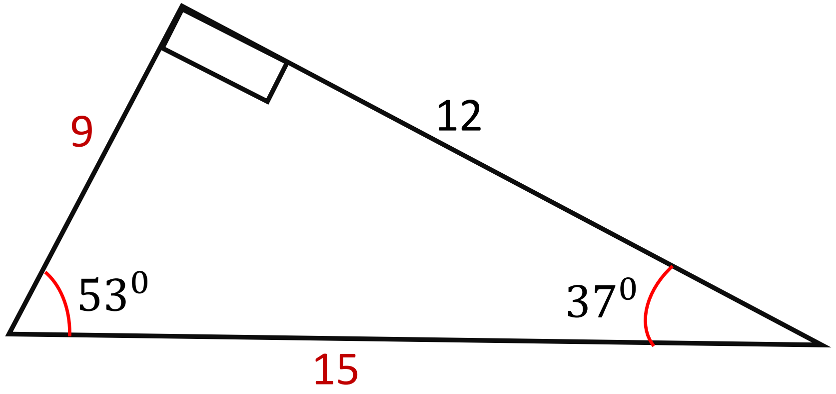


TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLE APROXIMADO DE 37° y 53°



Ejemplos



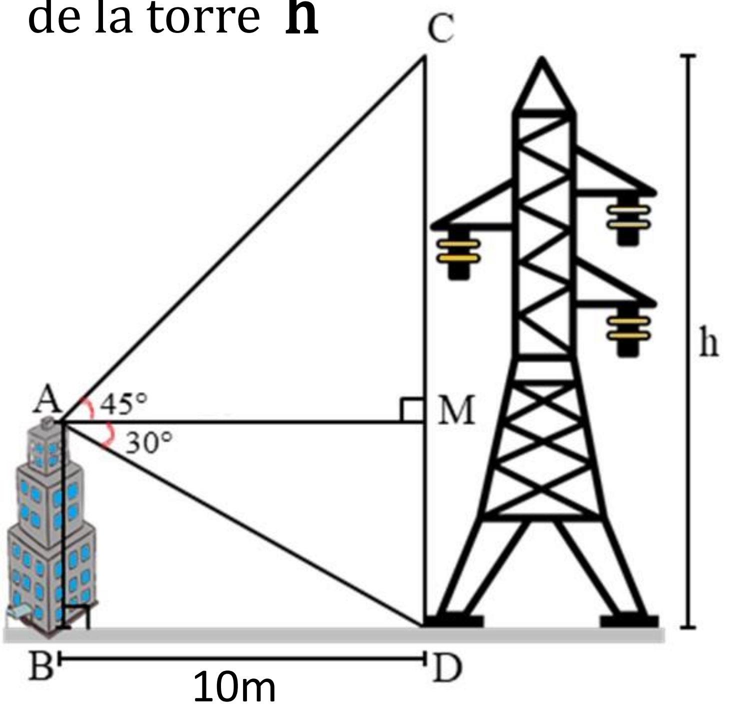


Veamos sus razones trigonométricas

	37^0	53^0
sen	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
cos	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
tan	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
cot	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
sec	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
csc	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

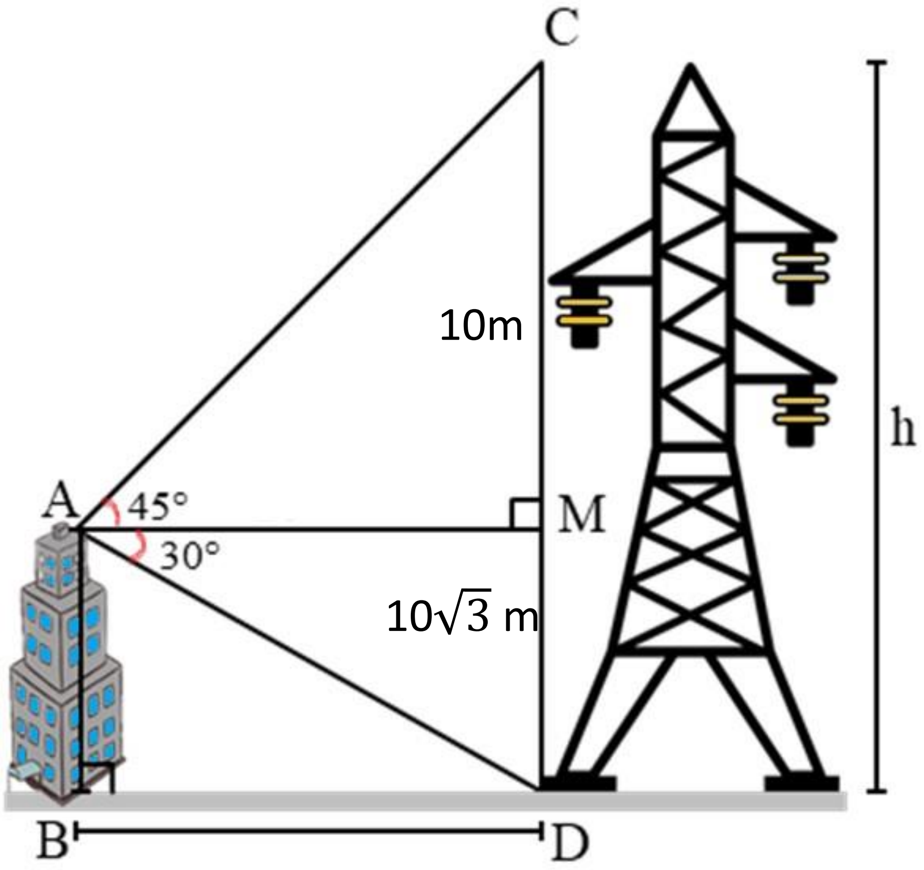
Aplicación 1

En el gráfico , calcule la altura de la torre **h**



A) 91.2m B) 27.3m C) 27.8m
D)32.3m E)10m

Resolución



Entonces

h= 10m+$10\sqrt{3}$m

h= 10m+10(1.73)m

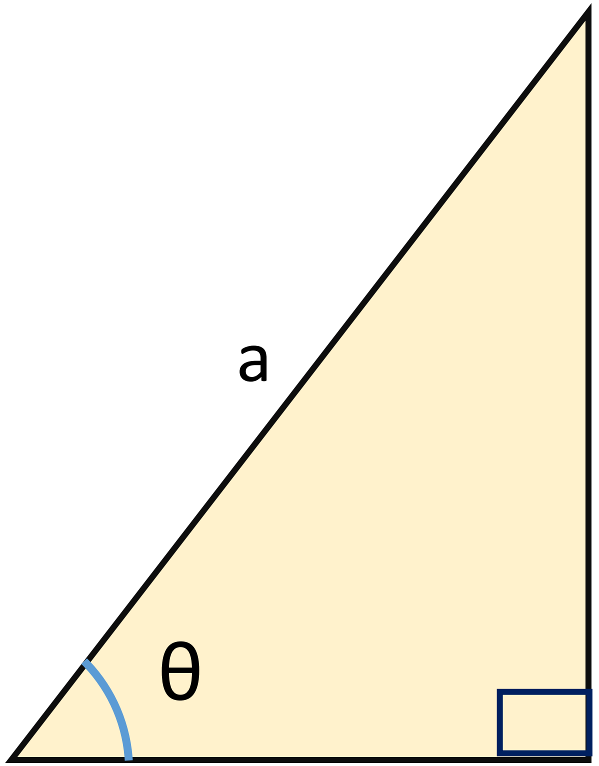
h= 27.3m

Clave B

PROPIEDADES

❑ Razones trigonométricas reciprocas

Sean θ y α ángulos agudos



Del gráfico:

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{c}{a}$ ∧ $\csc\theta = \dfrac{a}{c}$

Si multiplicamos ambas razones

$\text{sen}\ \theta \csc\theta = \left(\dfrac{\cancel{c}}{\cancel{a}}\right)\left(\dfrac{\cancel{a}}{\cancel{c}}\right)$

$\text{sen}\ \theta \csc\theta = 1$

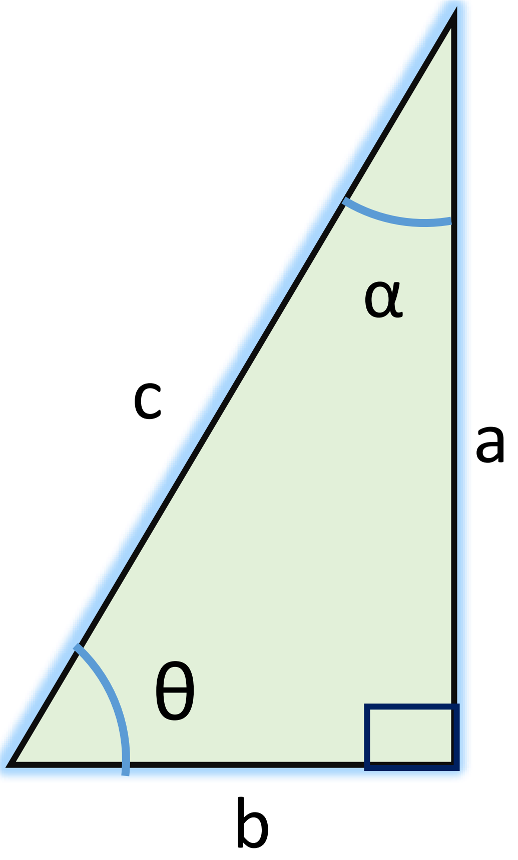
Análogamente para las demás razones trigonométricas se cumple

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{sen}\ \theta\ \text{Csc}\alpha = 1 & \leftrightarrow & \theta=\alpha \\ \tan\theta\ \text{Cot}\alpha = 1 & \leftrightarrow & \theta=\alpha \\ \cos\theta\ \text{Sec}\alpha = 1 & \leftrightarrow & \theta=\alpha \end{array}}$$

Ejemplos

- $\text{sen}25^o \csc 25^o = 1$
- $\tan 89^o \cot 89^o = 1$
- $\cos 46^o \sec 46^o = 1$
- $\text{sen}2\Phi \csc 62^o = 1$
  → $\Phi = 31^o$
- $\tan 40^o \cot(10^o + \beta) = 1$
  → $\beta = 30^o$
- $\text{Cos}(50^o - x)\sec 10^o = 1$
  → $X = 40^o$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios



Del gráfico:

sen θ= $\frac{a}{c}$ ∧ cosα = $\frac{a}{c}$

Igualando se verifica que

sen θ= cosα

Análogamente con las demás razones trigonométricas se cumple

sen θ=cosα ⟷ $\theta+\alpha=90^o$
tan θ =Cotα ⟷ $\theta+\alpha= 90^o$
sec θ= cscα ⟷ $\theta+\alpha= 90^o$

Ejemplos

- sen35^o =cos 55^o
- tan72^o =cot 18^o
- sec42^o =csc 48^o
- sen2β=cos3β
  → $2\beta+3\beta=90^o$
  $5\beta= 90^o$
  $\beta= 18^o$
- Tan(10^o+2x)=cot(55^o – x)
  $10^o + 2x + 55^o$ - x = 90^o
  $x = 25^o$

Gracias