# **TRIGONOMETRÍA**



PROGRAMA ACADÉMICO VIRTUAL

Ciclo Anual Virtual Cesar Vallejo

Docente: Rodolfo José

# RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

### **OBJETIVOS**

- Definir las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal.
- Determinar si las razones trigonometricas son positivas o negativas en cada cuadrante.
- □ Aplicar las definiciones de razones trigonométricas en la resolución de problemas dirigidos y tipo examen de admisión.
- Definir los ángulos cuadrantales y coterminales; determinar sus razones trigonométricas y propiedades relacionadas.

#### **HOY VEREMOS:**

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉ-TRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

R.T. DE UNÁNGULO CUADRANTAL

ÁNGULOS COTERMINALES Y SUS PROPIEDADES

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

#### INTRODUCCIÓN



Hoy en día utilizamos nuestro Smartphone con múltiples aplicaciones, entre ellas la calculadora.



¿Cómo hallamos las razones trigonométricas para un ángulo usando el smartphone?

Es muy sencillo, solo usamos la aplicación calculadora, ponemos la pantalla de forma horizontal y aparecerá en modo calculadora científica, y podremos ver los botones para las tres primeras razones trigonométrica **sin(** para seno) **cos** (para cosen y **tan** (para tangente).

Por ejemplo si ponemos la calculadora en grados (DEG) tan45° pulsando tan y digitamos 45 en la pantalla veamos para un angulo mayor a 90°

	tan(45)				an(45)	
						1
HISTORIAL	[mm]					×
⇒ 2nd	Rad	√	С	()	%	÷
sin	cos	tan	7	8	9	×
In	log	1/x	4	5	6	_
e <sup>x</sup>	X <sup>2</sup>	X <sup>y</sup>	1	2	3	+
x	π	е	+/-	0		=

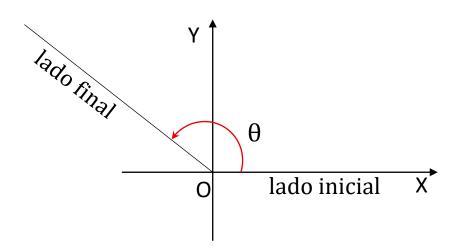
 $tan 135^{\circ}$  pulsando tan y digitamos 135 en la pantalla su resultado es -1

¿Cómo podríamos calcular este resultado sin calculadora?

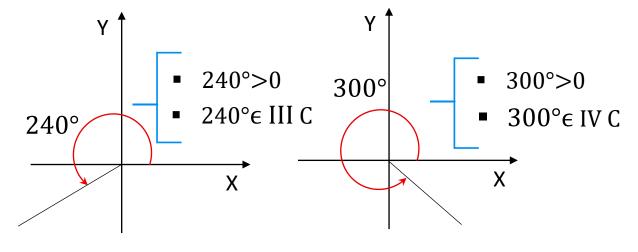
Tangente

#### ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Sean  $\theta$  un ángulo trigonometrico en posición normal

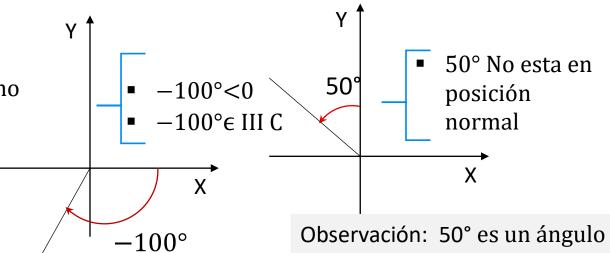


Ejemplos



Definimos a un ángulo en posición posicion normal , como aquel ángulo trigonométrico en el plano cartesiano con las siguientes características:

- ☐ Tiene como vertice el origen de coordenandas
- $\square$  Su lado inicial es el semieje  $\overrightarrow{OX}$

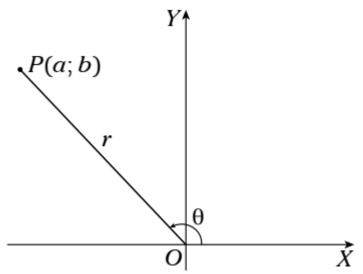


agudo

#### CÉSAR VALLEJO

# **DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉ – TRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL**

Sea θ un ángulo en posición normal y P(a; b) un punto que pertenecen a su lado final



#### Donde

r: radio vector del punto P

b: ordenada del punto P

a: abscisa del punto P

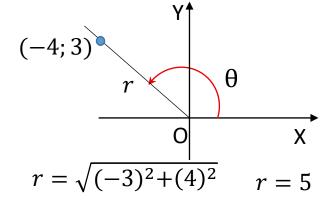
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad r > 0$$

$sen \theta =$	ordenada del punto P radio vector	$=\frac{b}{r}$
$\cos \theta =$	abscisa del punto P radio vector	$=\frac{a}{r}$
tan θ =	ordenada del punto P abscisa del punto P	$=\frac{b}{a}$
$\cot \theta =$	abscisa del punto P ordenada del punto P	$=\frac{a}{b}$
sec θ= $\frac{1}{a}$	radio vector bscisa del punto P	$=\frac{r}{a}$
$\csc \theta =$	radio vector ordenada del punto P	$=\frac{r}{b}$

Vemos que para el calculo de las razones trigonométricas solo necesitamos las coordenadas de un punto de su lado final

#### Ejemplo 1.

Halle las razones trigonométricas para θ



$$\circ \quad \sin \theta = \frac{3}{5} \quad \circ \quad \sec \theta = \frac{5}{-4}$$

$$\circ \cos \theta = \frac{-4}{5} \quad \circ \quad \cot \theta = \frac{-4}{3}$$

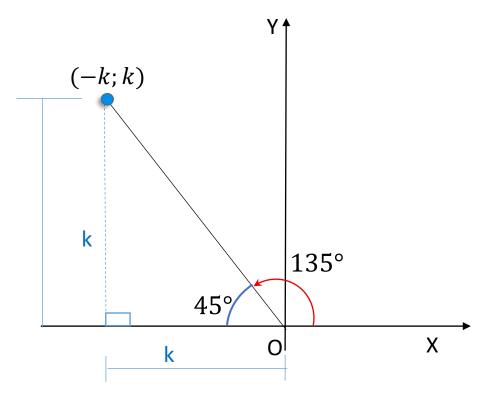
$$\circ \tan \theta = \frac{3}{-4} \quad \circ \quad \csc \theta = \frac{5}{3}$$

#### CÉSAR VALLEJO

#### CREEMOS EN LA EXIGENCIA

#### Ejemplo 2.

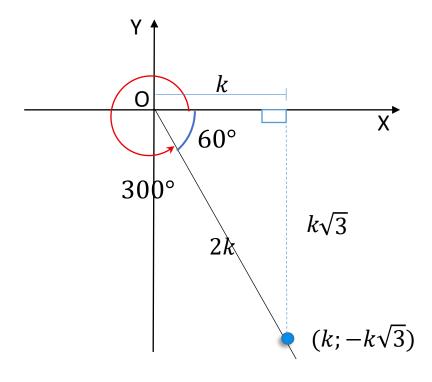
Halle la tan135°



$$\rightarrow tan135^{\circ} = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{k}{-k} = -1$$

#### Ejemplo 3.

Halle la cos300°

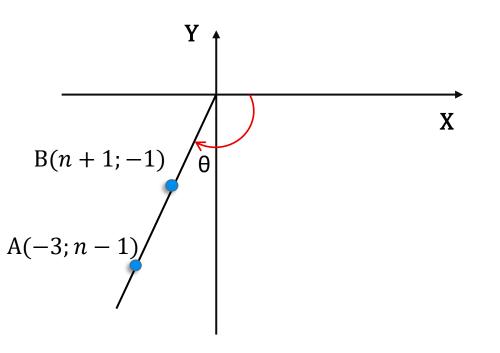


$$\rightarrow cos300^{\circ} = \frac{abscisa}{radio\ vector} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

#### CÉSAR VALLEJO

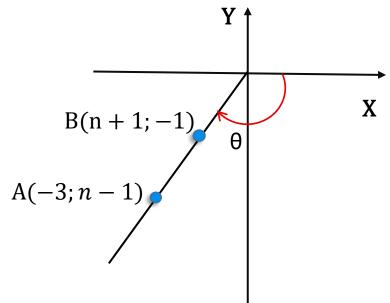
#### **Aplicación**

Del grafico halle la tangente del ángulo  $\boldsymbol{\theta}$ 



#### Resolución

Nos piden tan  $\theta$ 



Por definición

$$\tan \theta = \frac{n-1}{-3}$$

$$=\frac{-3}{-1}$$
  $=\frac{n-1}{-3}=\frac{n}{n}$ 

$$n^2 - 1 = 3$$

igualando

$$n=2$$
 ó  $n=-2$ 

Escogemos las coordenadas del punto A

$$A(-3; n-1)=A(-3; -3)$$

por definición

$$\tan \theta = \frac{-3}{-3} = 1$$

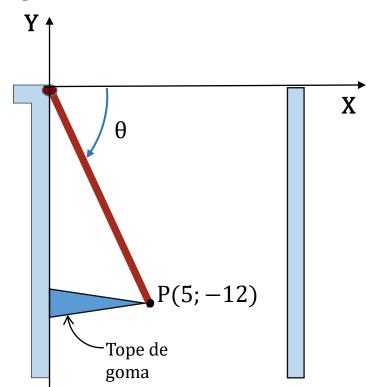
absurdo para el problema



#### SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS **EN LOS CUADRANTES**

Veamos la siguiente aplicación

En el gráfico se muestra el máximo ángulo que puede abrirse una puerta, visto desde arriba en un plano cartesiano



Del gráfico

$$r = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2}$$

$$r = 13$$

o senθ = 
$$\frac{-12}{13}$$
 negativo  
o cos θ =  $\frac{5}{13}$  positivo

$$\cos \theta = \frac{5}{13}$$
 positivo

$$\circ \tan \theta = \frac{-12}{5} \quad \text{negativo}$$

$$\cot \theta = \frac{5}{-12} \quad \text{negativo}$$

$$\circ \sec \theta = \frac{13}{5} \quad \text{positivo}$$

$$\circ$$
 csc $\theta = \frac{13}{12}$  negativo

se cumple para todo ángulo en posición normal que pertence al IV C

sen	-
cos	+
tan	
cot	1
sec	+
CSC	_





En general, dependiendo del cuadrante al que pertenece un ángulo en posición normal, sus razones trigonométricas pueden ser positivas o negativas.

	IC	IIC	IIIC	IVC
seno	+	+	_	_
coseno	+	_	_	+
tangente	+	_	+	_
cotangente	+	_	+	_
secante	+	_	_	+
cosecante	+	+	_	_

#### **Ejemplos**

$$\circ$$
 cot330° es (-)  $\in IVC$ 

$$\circ$$
 sec350° es (+)



#### ¿sabias que?

Es suficiente conocer el signo de dos razones trigonométricas diferentes que no sean reciprocas, para saber a que cuadrante pertenece el ángulo en Posición Normal

#### **Ejemplos**

○ Si sen
$$\theta$$
 > 0 y cos $\theta$  < 0  $\rightarrow \theta \epsilon$  II C

○ Si 
$$tan\theta > 0$$
 y  $sen\theta < 0 \rightarrow \theta \epsilon$  III C

○ Si 
$$\cos\theta < 0$$
 y  $\cot\theta < 0 \rightarrow \theta\epsilon$  II C

○ Si 
$$\cos\theta < 0$$
 y  $\sin\theta < 0 \rightarrow \theta \epsilon$  IIIC

○ Si 
$$\csc\theta < 0$$
 y  $\cos\theta > 0 \rightarrow \theta \epsilon$  IV C

#### Aplicación

Si γ es un ángulo en posicion normal que pertenece al tercer cuadrante y

$$\tan \gamma = \frac{5}{12}$$

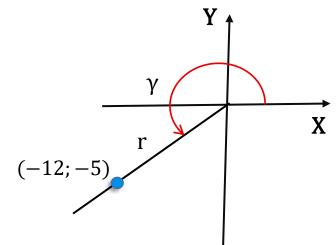
Halle M= $sen\gamma + cos\gamma$ 

#### Resolución

Nos piden

M=sen
$$\gamma$$
 + cos $\gamma$ 
del dato
 $tan\gamma = \frac{5}{12} = \frac{-5}{-12} = \frac{ordenada}{abscisa}$ 

Graficamos el ángulo en posición normal  $\gamma$ , considerando que tiene sentido de giro antihorario



$$r = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}$$
$$r = 13$$

Reemplazamos en lo pedido

$$M = \frac{-5}{13} + (\frac{-12}{13})$$

$$M = \frac{-17}{13}$$

#### **ÁNGULOS CUADRANTALES**

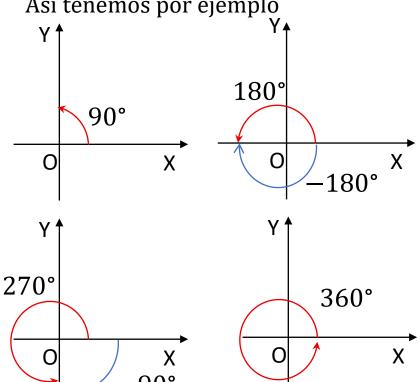
Son aquellos ángulos de la forma

tal que  $n \in Z \vee$ 90°n

$$\frac{\pi}{2}$$
k

tal que k∈ Z

Asi tenemos por ejemplo



Vemos que pueden ser positivos o negativos incluidos el cero

$$\dots -270^{\circ}, -180^{\circ}, -90^{\circ}, 0, {}^{\circ}\,90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}, 360^{\circ}, \ 450^{\circ} \dots \dots$$

#### **Aplicación**

Halle cuantos ángulos cuadrantales hay entre 100° y 1000°

#### Resolución

Si consideramos como la expresión general de un cuadrantal 90°n tal que n  $\in$  Z

según la condición

$$\frac{100^{\circ} < 90^{\circ}n < 1000^{\circ}}{90^{\circ}} \frac{700^{\circ}}{90^{\circ}}$$

como n∈Z

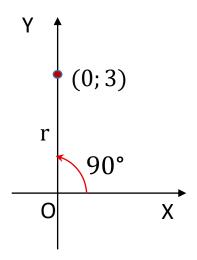
$$n = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$$

❖ Si hay 10 valores enteros para n. Entonces hay 10 ángulos cuadrantales



#### CALCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUADRANTAL

Veamos para el ángulo 90°



$$r = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2}$$

$$r = 3$$

$$\circ$$
 sen90° =  $\frac{3}{3}$  = 1

$$\circ \cos 90^{\circ} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\circ$$
 tan90° =  $\frac{3}{0}$  = N. D.

$$\circ \cot 90^{\circ} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\circ \sec 90^{\circ} = \frac{3}{0} = \text{N. D.}$$

$$\circ$$
 csc90° =  $\frac{3}{3}$  = 1

En general, tenemos los siguientes valores de las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales más conocidos, mediante el siguiente cuadro.

	0°	90°	180°	270°	360°
seno	0	1	0	-1	0
coseno	1	0	-1	0	1
tangente	0	N.D.	0	N.D.	0
cotangente	N.D.	0	N.D.	0	N.D.
secante	1	N.D.	-1	N.D.	1
cosecante	N.D.	1	N.D.	-1	N.D.

#### Donde

N.D.: No determinado

#### Observación

Si  $\alpha$  es un ángulo cuadrantal, entonces

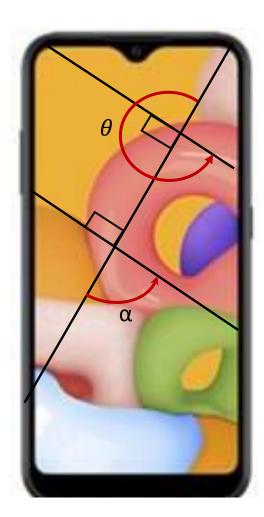
$$sen\alpha \in \{-1; 0; 1\}$$
  $tan\alpha = 0$ 

$$\cos\alpha \in \{-1; 0; 1\}$$
  $\cot\alpha = 0$ 



#### Aplicación 1

A Rosita de se cayó su celular, rajándose la pantalla y quedando finalmente como se muestra en el gráfico



Calcule el valor de

$$H = \frac{sen\theta - sen\alpha}{\cos(\theta - \alpha) - \cos((\theta + \alpha))}$$

#### Resolución

Del gráfico

$$\theta = 270^{\circ}$$
 y  $\alpha = 90^{\circ}$ 

Reemplazando en H

$$H = \frac{sen270^{\circ} - sen90^{\circ}}{\cos(270^{\circ} - 90^{\circ}) - \cos((270^{\circ} + 90^{\circ}))}$$

$$H = \frac{sen270^{\circ} - sen90^{\circ}}{\cos(180^{\circ}) - \cos(360^{\circ})}$$

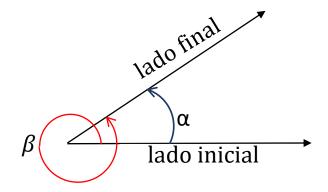
$$H = \frac{-1 - 1}{-1 - 1}$$

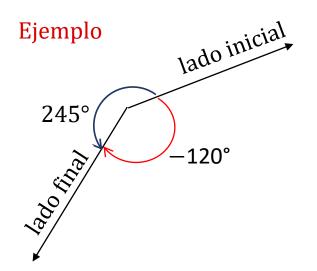
$$H = \frac{-2}{-2}$$

$$\star$$
 H = 1

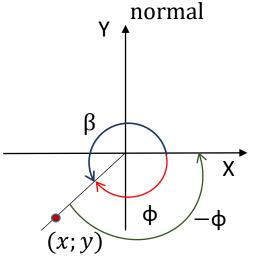
#### Ángulos coterminales

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial y lado final con un mismo vértice





Si se presentan estos ángulos en posición



Del gráfico:

$$\tan \beta = \frac{y}{x} \wedge \tan \phi = \frac{y}{x}$$

 $\rightarrow \tan \beta = \tan \phi$ 

Además:

$$\beta$$
+( $-\phi$ )=360°

#### **Propiedades**

Sean  $\theta$  y  $\alpha$  dos ángulos coterminales en posición normal

 Los ángulos coterminales tienen los mismos valores de razones trigonométricas.

$$R. T(\theta) = R. T. (\alpha)$$

o La diferencia entre dos ángulos coterminales es  $360^{\circ}$ K / K $\in$  Z

$$\theta - \alpha = 360^{\circ} \text{K}$$

#### Aplicación

Si  $\theta$  y  $\beta$  son ángulos coterminales,  $\theta$  pertenece al tercer cuadrante y

$$25\text{sen}^2\theta + 5\text{sen}\beta - 12 = 0$$

Halle 
$$J = \tan\theta + \tan\beta$$

#### Resolución

Como  $\theta$  y  $\beta$  son ángulos coterminales

Sen
$$\theta$$
=sen $\beta$ 

Reemplazamos en la ecuación

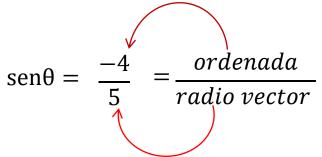
$$25\operatorname{sen}^{2}\theta + 5\operatorname{sen}\theta - 12 = 0$$

$$5\operatorname{sen}\theta - 3$$

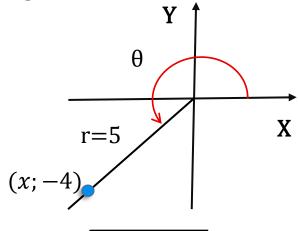
$$5\operatorname{sen}\theta + 4$$

$$5sen\theta - 3 = 0 \lor 5sen\theta + 4 = 0$$
$$sen\theta = \frac{3}{5} \qquad sen\theta = \frac{-4}{5}$$

## Como θ pertenece al tercer cuadrante la razón trigonométrica seno es negati*va*

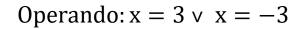


graficamos a  $\boldsymbol{\theta}$  onsiderando sentido de giro antihorario



$$r = \sqrt{x^2 + (-4)^2}$$
$$5 = \sqrt{x^2 + (-4)^2}$$

Este valor no cumple para el problema



como:  $tan\theta = tan\beta$ 

Reemplazando en lo pedido

$$J = \frac{-4}{-3} + \frac{-4}{-3}$$

$$J = \frac{8}{3}$$



# Gracias





# —CÓMO— COMO— COMPRAR

www.tiendaelumbreras.com.pe

