OBJETIVOS:

- *Conocer el teorema de Arquímedes para los sólidos de revolución*
- *Obtener el volumen de una esfera a partir del teorema de Arquímedes.*
- *Reconocer las diferentes partes de una esfera.*
- *Aprender a calcular las áreas de las distintas partes de la superficie esférica.*

ESFERA

- En el mundo de la física, hay una ley que dice que la materia siempre tenderá a descansar en la forma en que consuma la menor cantidad de energía. Las gotas son redondas porque, a medida que caen, sus moléculas se atraen mutuamente hasta establecer un balance de fuerzas tan cercano al nulo como sea posible.
- La mejor forma en la que una gota puede lograr esto es la redonda. Mientras la gota tiene esa forma, la atracción gravitatoria es estable entre todas las moléculas de la gota de agua.

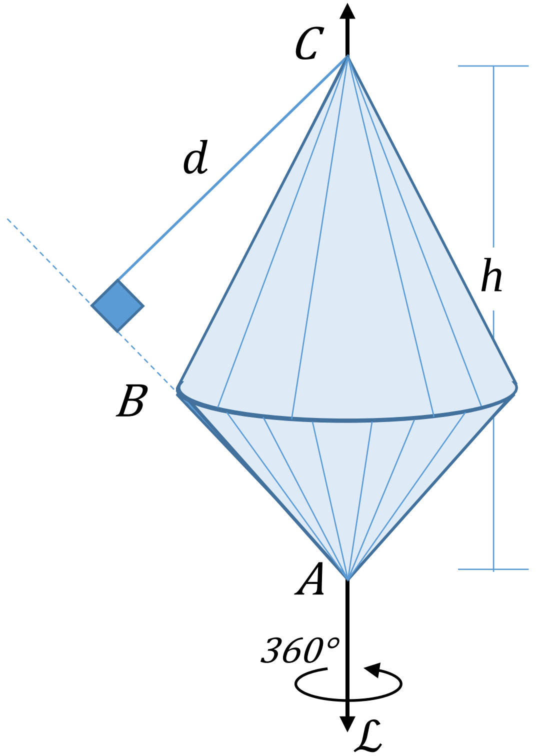
Heptagrama.com

- La forma de la esfera también a dado origen a la construcción de DOMOS, pequeñas cúpulas de forma esférica, ellos permiten generar estructuras rígidas y firmes usando poco material.

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

TEOREMA

El volumen del solido que genera una región triangular al girar respecto de una recta coplanar a ella y que contiene al menos uno de sus vértices es:



$$\mathbb{V}_{Solido.\,Generado} = \frac{1}{3}\mathbb{A}_{Sup.Gen(\overline{AB})}d$$

C

$Cono_1$

B

$Cono_2$

A

PRUEBA DEL TEOREMA

Cuando la región triangular ABC, gira una vuelta completa respecto de la recta $\overline{AC}$ el volumen del sólido generado por rotación es igual a la suma de los volúmenes de dos conos que comparten sus bases.

$$\mathbb{V}_{Cono1} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 \qquad \mathbb{V}_{Cono2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

Sea $h_1 + h_2 = h$:

$$\mathbb{V}_{Solido.\,Generado} = \mathbb{V}_{Cono1} + \mathbb{V}_{Cono1} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \ldots(i)$$

Pero: $$sen\theta = \frac{r}{AB} = \frac{d}{h} \;\Rightarrow\; rh = AB \cdot d$$

Reemplazando en *(i)*

$$\mathbb{V}_{Solido.\,Generado} = \frac{1}{3}\pi r ABd \qquad \ldots(ii)$$

como: $$\pi rAB = \mathbb{A}_{S.L(cono2)} = \mathbb{A}_{Sup.Gen(\overline{AB})}$$

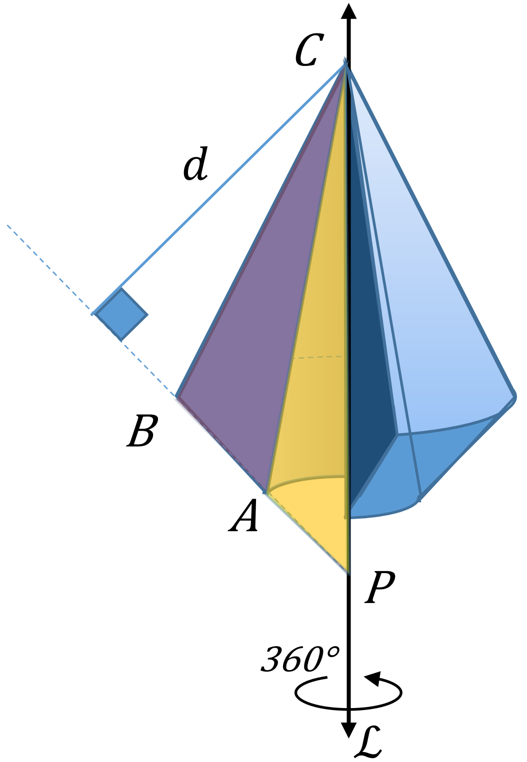
Reemplazando en *(ii)*

$$\mathbb{V}_{Solido.\,Generado} = \frac{1}{3}\mathbb{A}_{Sup.Gen(\overline{AB})}d$$

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

TEOREMA

El volumen del solido que genera una región triangular al girar respecto de una recta coplanar a ella y que contiene al menos uno de sus vértices es:



$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(CAB)} = \frac{1}{3}\mathbb{A}_{Sup.Gen(\overline{AB})}d$$

PRUEBA DEL TEOREMA

Calculemos el volumen del sólido generado por medio de diferencias de los volúmenes de dos sólidos en los que se pueda aplicar el teorema anterior.

$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(CAB)} = \underbrace{\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(CBP)}}_{\frac{1}{3}\mathbb{A}_{Sup.\,Gen(\overline{BP})}d} - \underbrace{\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(CAP)}}_{\frac{1}{3}\mathbb{A}_{Sup.\,Gen(\overline{AP})}d}$$

$$\mathbb{V}_{Sol.\,G(CAB)} = \frac{1}{3}(\mathbb{A}_{Sup.\,Gen(\overline{BP})} - \mathbb{A}_{Sup.\,Gen(\overline{AP})})d$$

Se reconoce fácilmente que:

$$\mathbb{A}_{Sup.\,Gen(\overline{BP})} - \mathbb{A}_{Sup.\,Gen(\overline{AP})} = \mathbb{A}_{Sup.\,Gen(\overline{AB})}$$

Finalmente queda demostrado que:

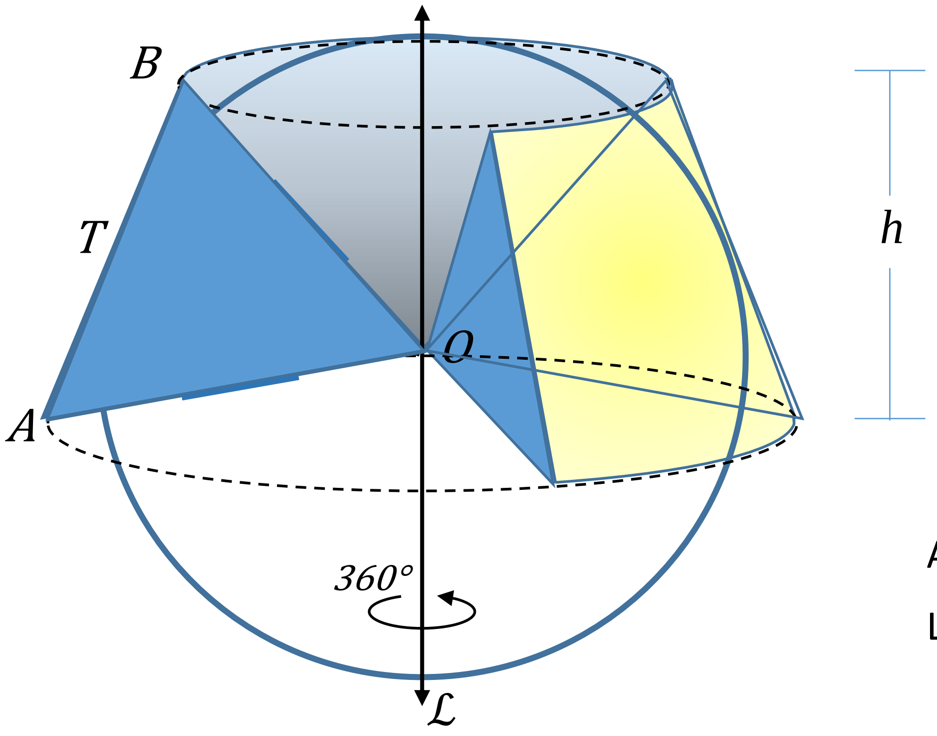
$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(CAB)} = \frac{1}{3}\mathbb{A}_{Sup.Gen(\overline{AB})}d$$

□

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

CASO PARTICULAR

Si la región AOB que gira es tal que OB = OA , entonces podemos escribir su volumen en función del radio de una circunferencia tangente a su base.



$$\boxed{\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(OAB)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

Sólido generado por rotación:

Sabemos del teorema anterior:

$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(OAB)} = \frac{1}{3}\mathbb{A}_{Sup.Gen(\overline{AB})}R$$

Al ser $AO = BO$, entonces el punto de tangencia T, es punto medio de $\overline{AB}$

Lo que implica que es posible aplicar el primer teorema de Arquímedes:

$$\mathbb{A}_{Sup.Gen(\overline{AB})} = 2\pi Rh$$

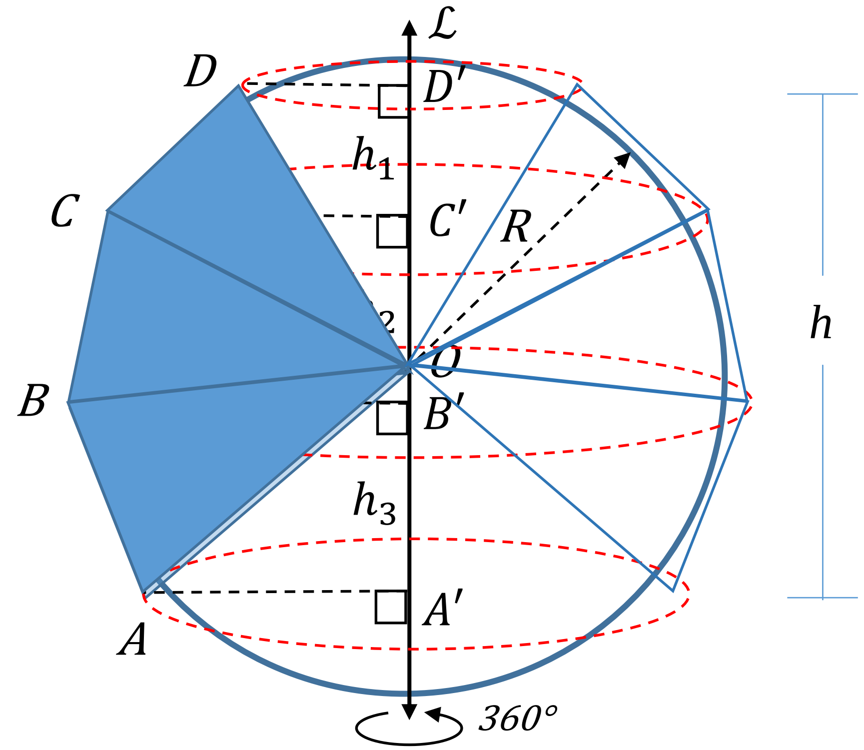
Reemplazando:

$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(OAB)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

SEGUNDO TEOREMA

Cálculo del volumen del sólido que genera una región poligonal regular al girar respecto de una recta coplanar a dicha región.



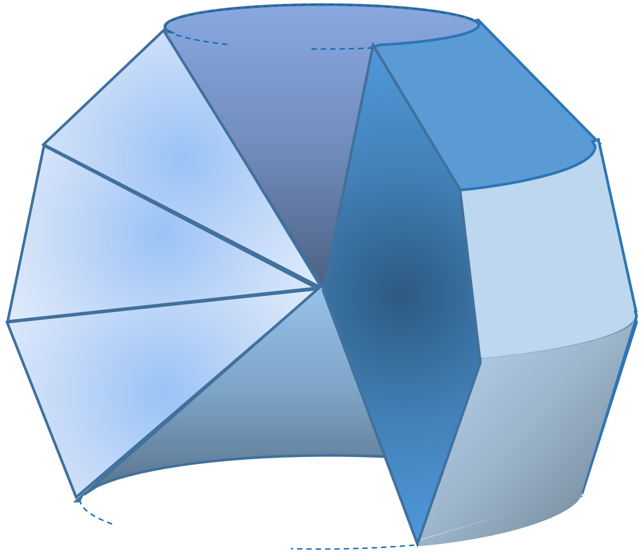
$$\boxed{\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(OABCD)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

Cuando la región $AOB \cup BOC \cup COD \cdots$ (unión de regiones limitadas por triángulos isósceles) gira una vuelta completa se genera un sólido de revolución.

Como la poligonal es regular, podemos trazar una circunferencia tangente a sus lados.

El volumen del sólido generado será función de R y h

■ PRUEBA DEL TEOREMA



Aplicando el teorema anterior:

$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(OAB)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h_3$$

$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(OBC)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h_2$$

$$\mathbb{V}_{Sol.\,Gen(OCD)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1$$

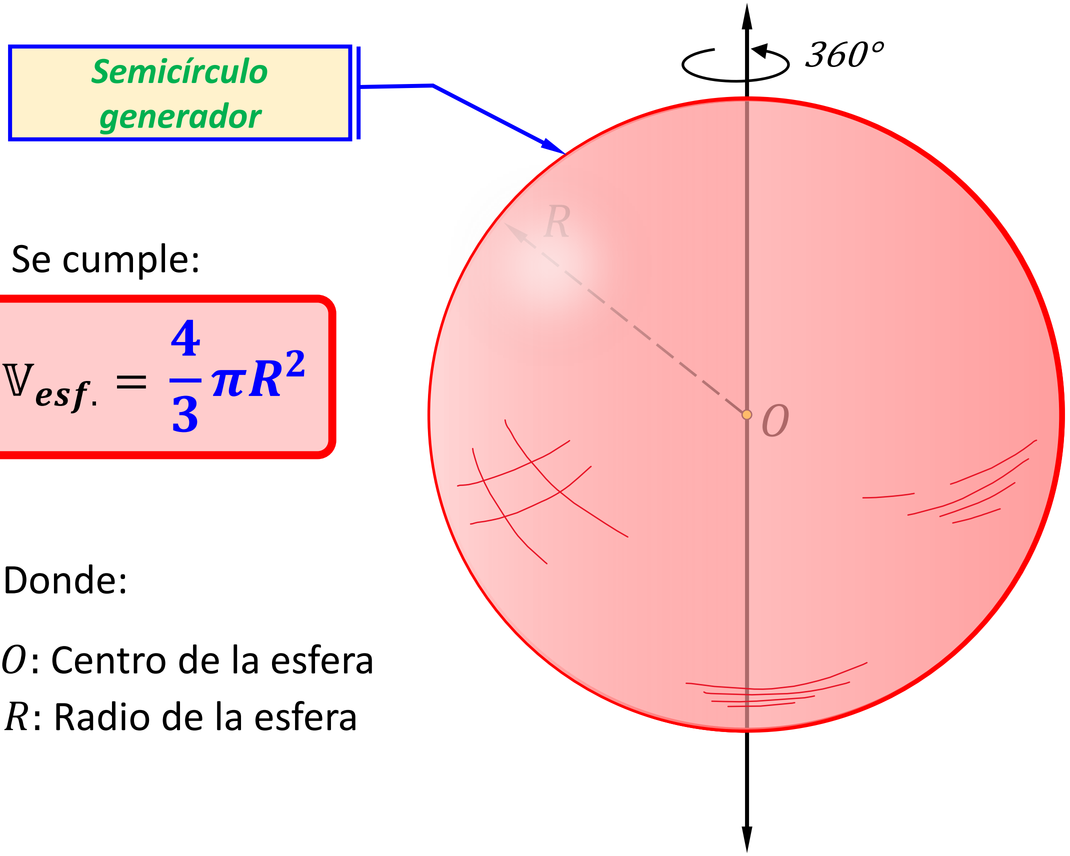
Sumando:

$$\mathbb{V}_{S.G\,(OABCD)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi R^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi R^2 h_3 = \frac{2}{3}\pi R^2 (h_1 + h_2 + h_3)$$

Pero: $h = h_1 + h_2 + h_3$ ➡ $\mathbb{V}_{Sol.Gen(OABCD)} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$

ESFERA

Si consideramos a la esfera, como el sólido generado por un semicírculo alrededor de su diámetro, aprovechando el teorema de Arquímedes en su caso general, se puede calcular el volumen de la esfera.



Se cumple:

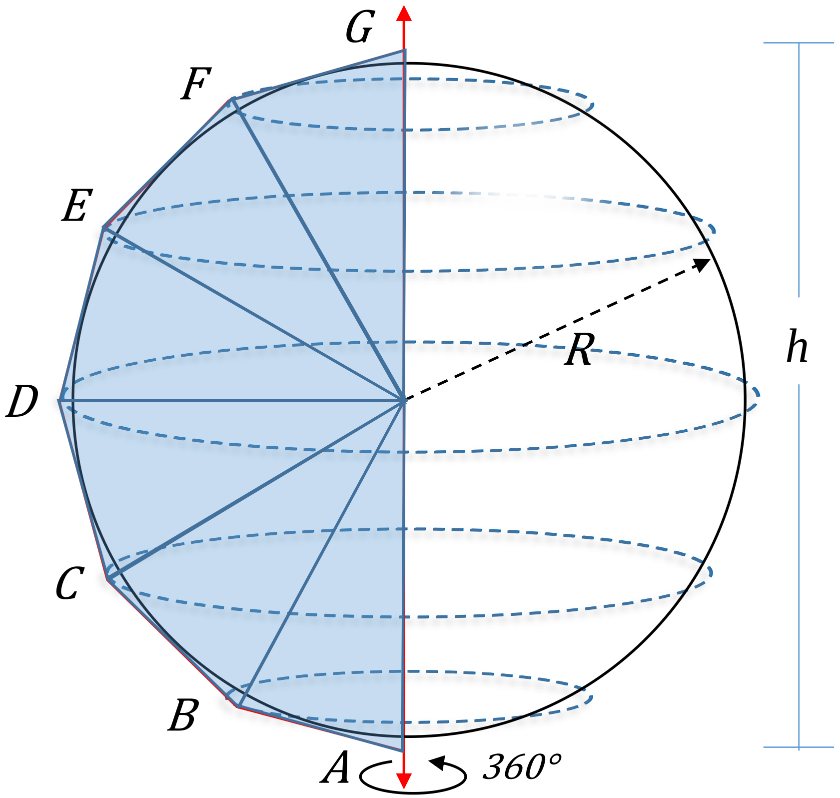
$$\mathbb{V}_{esf.} = \frac{4}{3}\pi R^2$$

Donde:

O: Centro de la esfera

R: Radio de la esfera

PRUEBA DEL TEOREMA



Ya que el segundo teorema de Arquímedes se verifica para cualquier región poligonal de las formas descritas anteriormente

Consideremos entonces una poligonal regular de un número grande de lados y circunscrita en una circunferencia de radio R , La región que determina con el centro de la circunferencia genera un solido cuyo volumen será: $2\pi R^2 h/3$

Basta considerar la poligonal de una cantidad infinita de lados, de modo que al girar obtenemos una esfera cada vez más perfecta y el teorema aún seguirá siendo válido:

$$\mathbb{V}_{Sol.\ Gen.} = 2\pi R^2 h/3$$

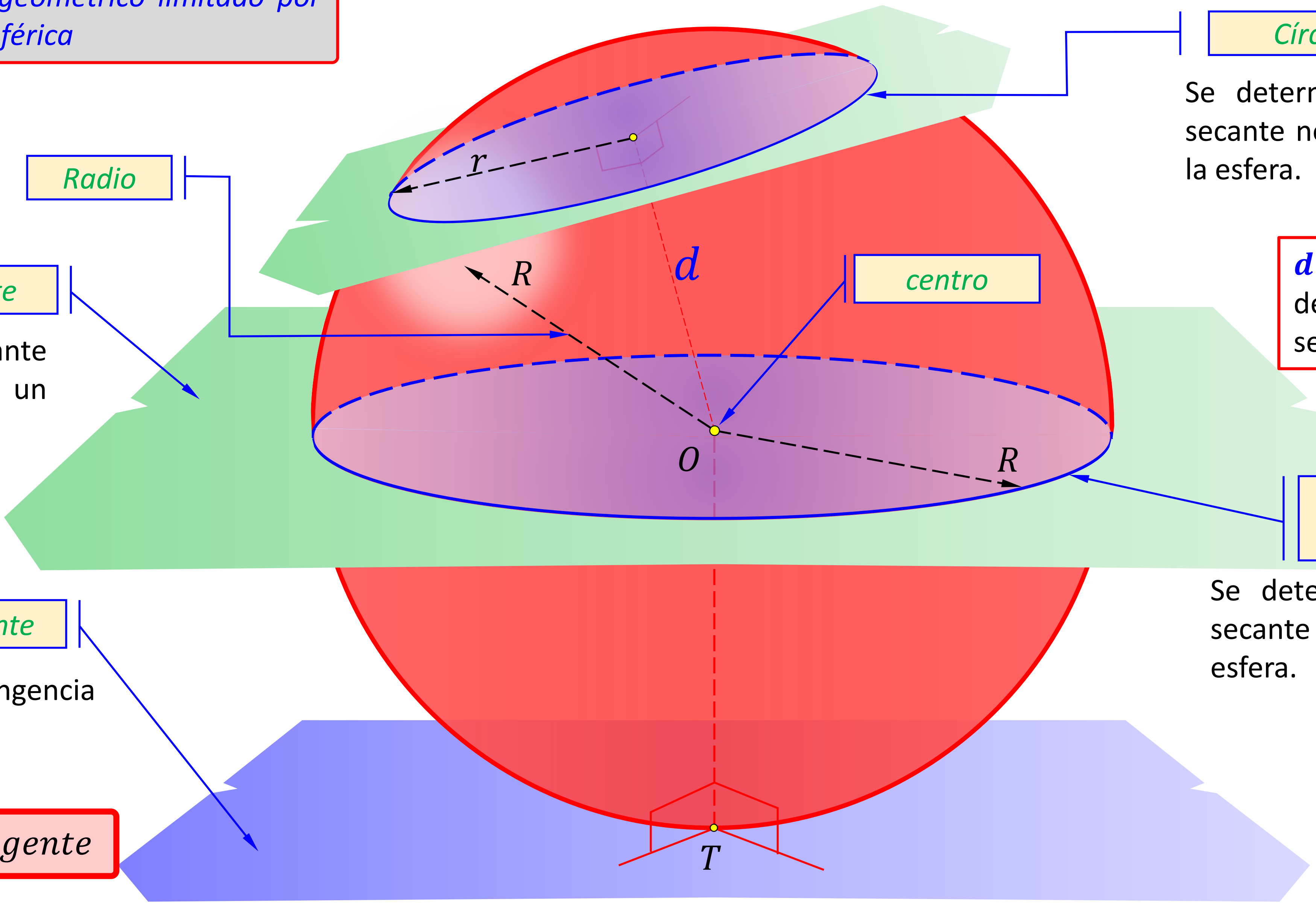
Pero ya que la poligonal $AB \ldots FG$ tiene sus extremos en el eje de giro, es fácil reconocer que debido a tener muchos lados: $h = 2R$. Reemplazando:

$$\mathbb{V}_{Sol.\ Gen} = 4\pi R^3/3$$

CURSO DE GEOMETRÍA

ESFERA

Es aquel sólido geométrico limitado por una superficie esférica



Radio

Plano secante

Todo plano secante determina un círculo.

Plano tangente

T: punto de tangencia

Se cumple:

$\overline{OT} \perp$ ■$tangente$

Círculo menor

Se determina cuando el plano secante no contiene al centro de la esfera.

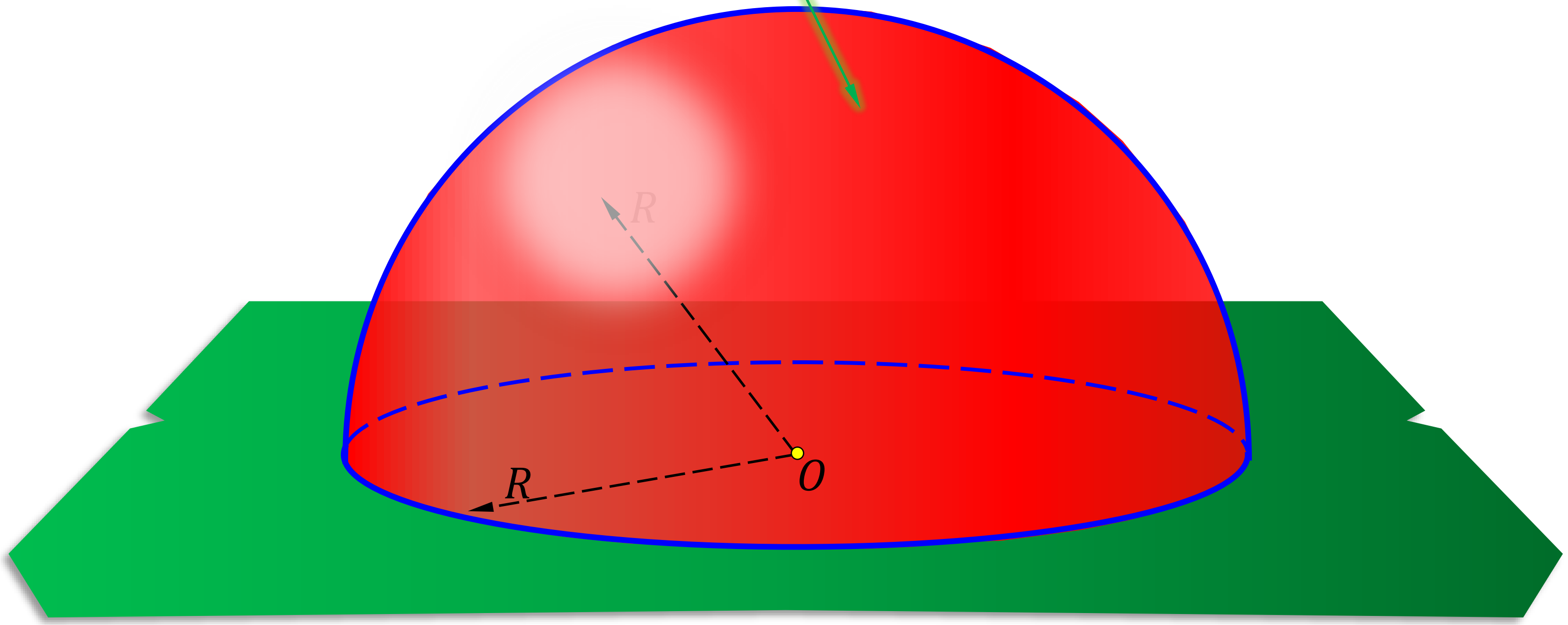
d: Es la distancia del centro de la esfera hacia el plano secante

Círculo mayor (máximo)

Se determina cuando el plano secante contiene al centro de la esfera.

SEMIESFERA

Todo plano secante que determina un círculo máximo en la esfera, la divide en dos semi esferas. En el gráfico se muestra una ***semi esfera***



Se cumple:

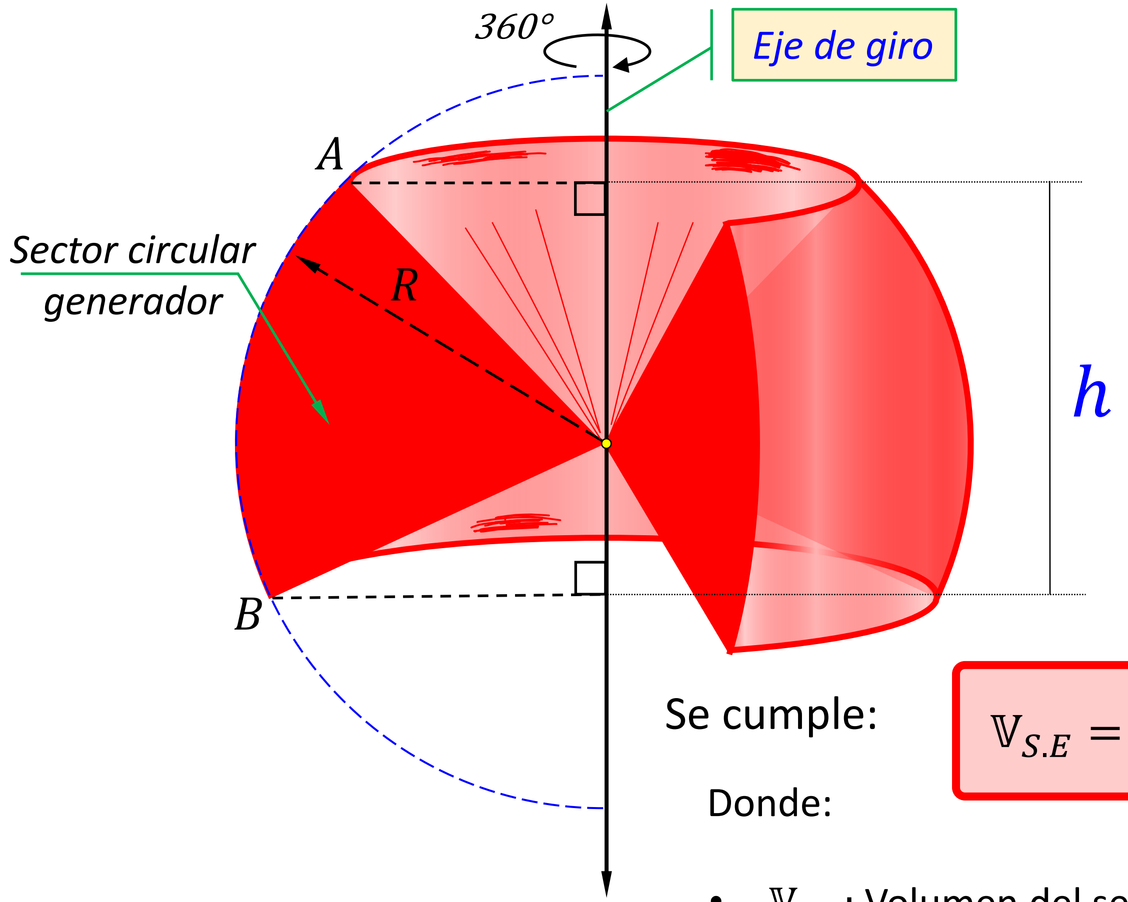
$$\mathbb{A}_{\substack{semi\\esfera}} = 3\pi R^2$$

$$\mathbb{V}_{\substack{semi\\esfera}} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

PARTES DE UNA ESFERA

SECTOR ESFÉRICO

Es el sólido generado por la rotación de 360° de un sector circular en torno a una recta que contiene al diámetro de la semicircunferencia que contiene al centro del sector.

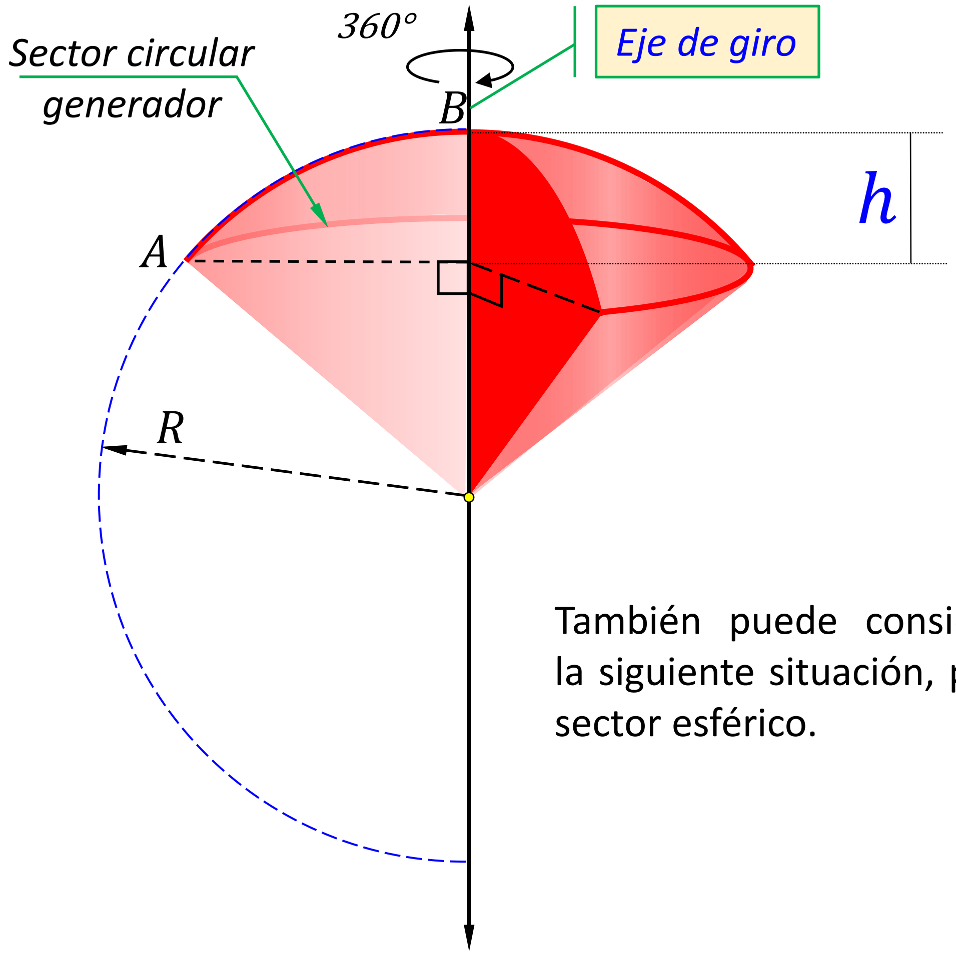


Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{V}_{S.E} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

Donde:

- $\mathbb{V}_{S.E}$: Volumen del sector esférico
- $\boldsymbol{h}$: longitud de la proyección ortogonal del arco AB sobre el eje de giro

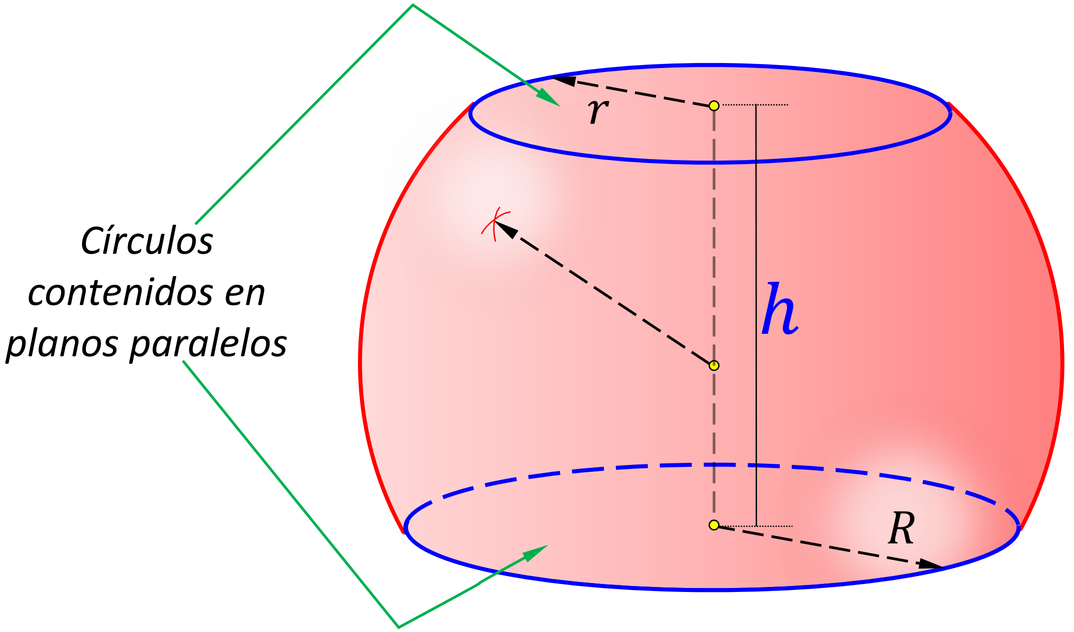


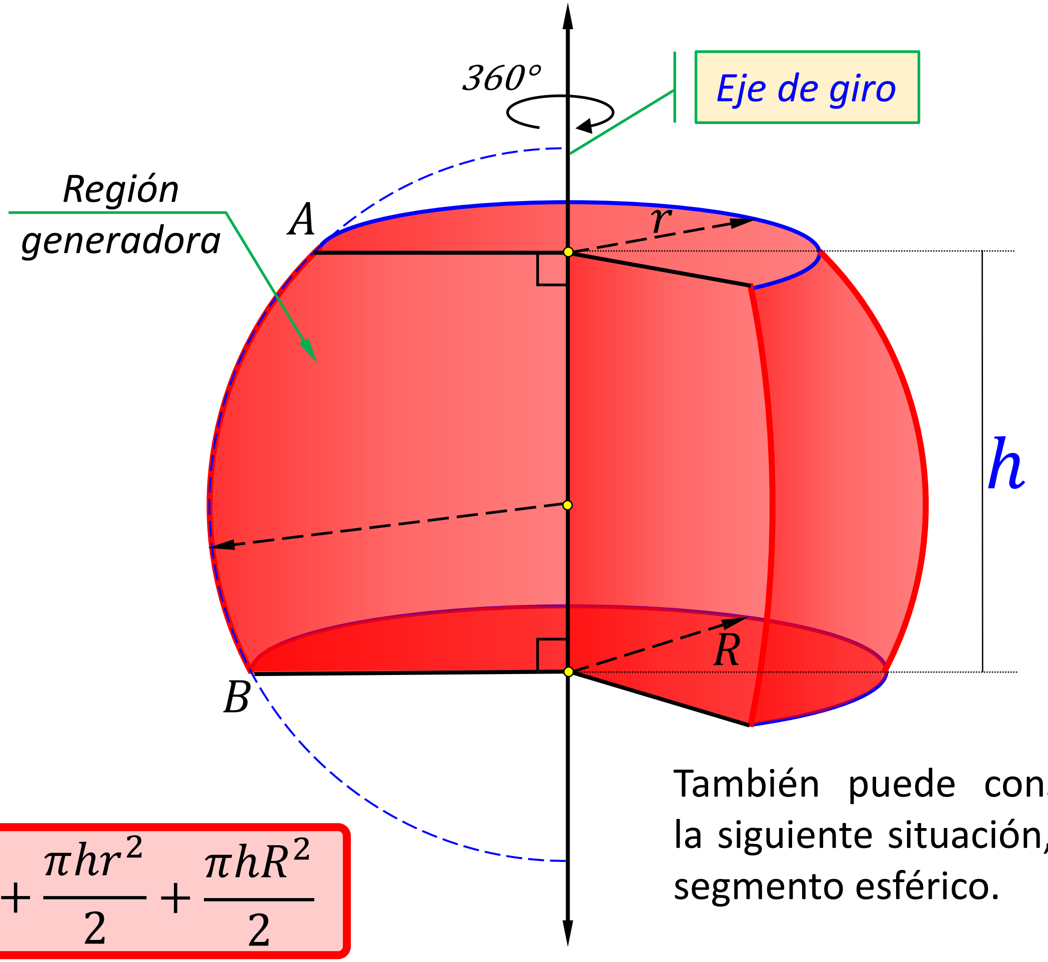
También puede considerarse la siguiente situación, para un sector esférico.

PARTES DE UNA ESFERA

SEGMENTO ESFÉRICO

Es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos y secantes a la esfera.





También puede considerarse la siguiente situación, para un segmento esférico.

Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{V}_{S.E} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h r^2}{2} + \frac{\pi h R^2}{2}}$$

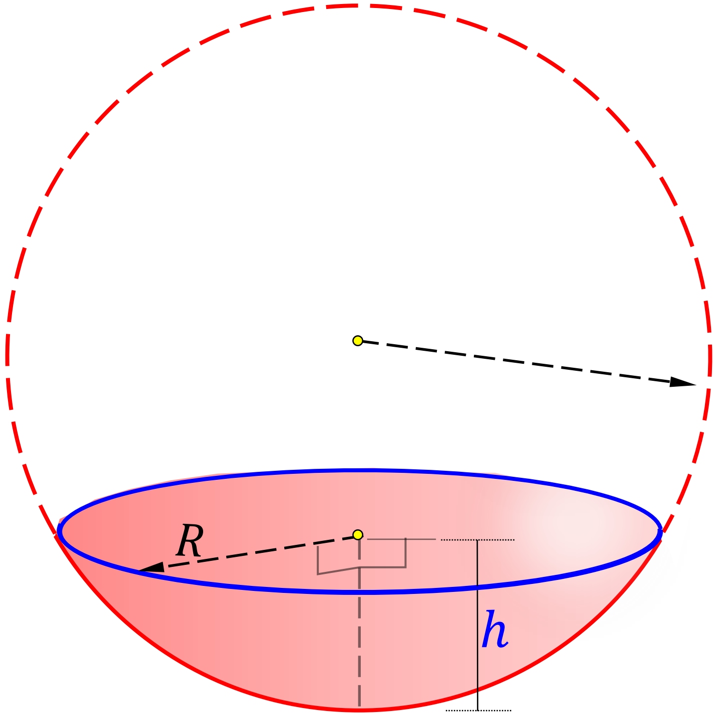
Donde:

- $\mathbb{V}_{S.E}$: Volumen del segmento esférico
- $\boldsymbol{h}$: altura del segmento esférico, longitud de la proyección del arco AB sobre el eje de giro.

PARTES DE UNA ESFERA

SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Es la porción de esfera determinada por un plano secante a la esfera.



Donde:

- $\mathbb{V}_{\substack{S.E \\ 1\ base}}$: Volumen del segmento esférico de 1 base
- $\boldsymbol{h}$: altura del segmento esférico

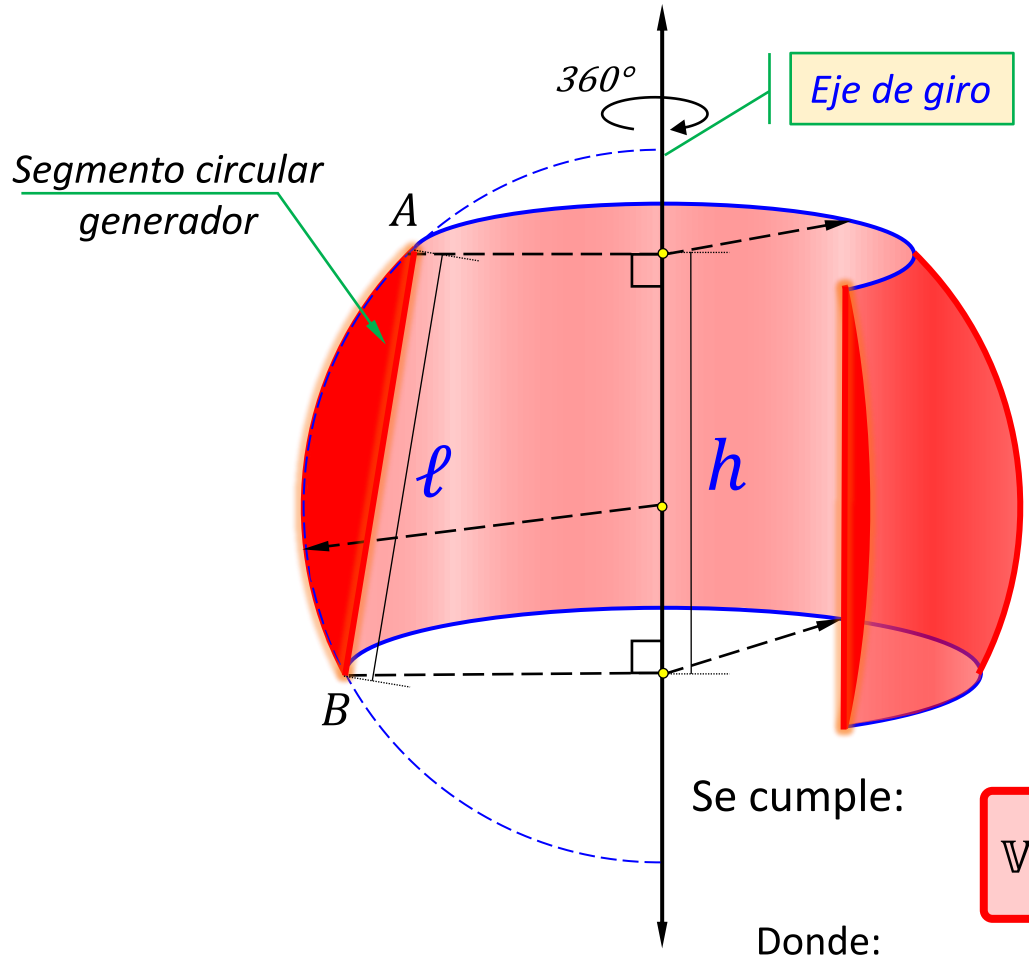
Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{V}_{\substack{S.E \\ 1\ base}} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h R^2}{2}}$$

PARTES DE UNA ESFERA

ANILLO ESFÉRICO

Es el sólido generado por un segmento circular al girar 360° en torno a una recta coplanar que contiene al diámetro

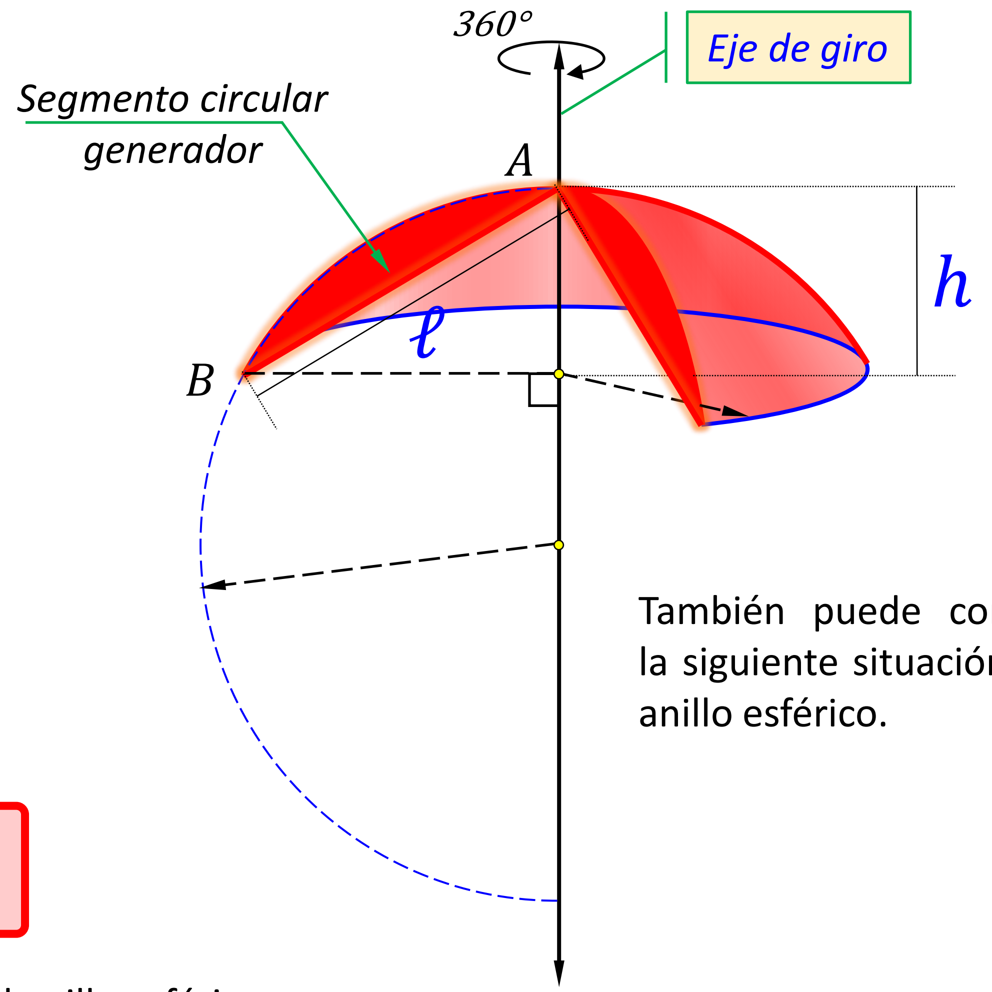


Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{V}_{A.E} = \frac{\pi h \ell^2}{6}}$$

Donde:

- $\mathbb{V}_{A.E}$: Volumen del anillo esférico
- $\boldsymbol{h}$: longitud de la proyección ortogonal de la cuerda $\boldsymbol{AB}$ el eje de giro.
- $\boldsymbol{\ell}$: longitud de la cuerda $\boldsymbol{AB}$

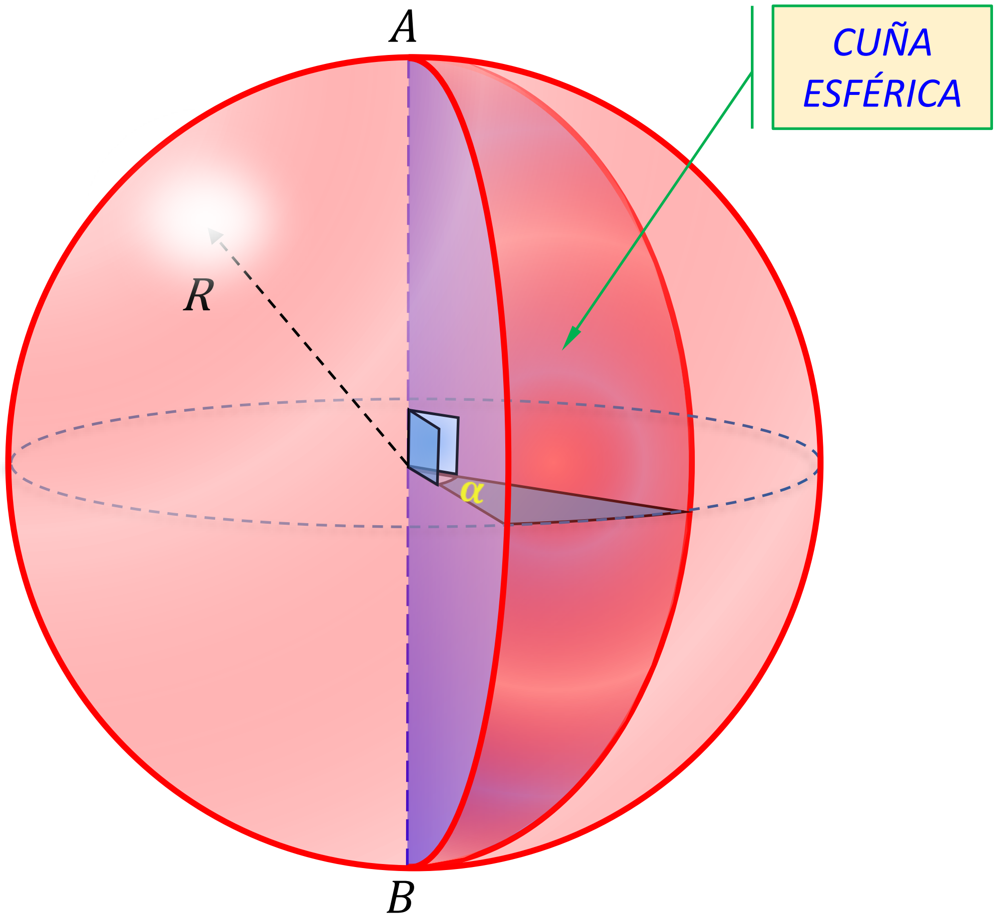


También puede considerarse la siguiente situación, para un anillo esférico.

PARTES DE UNA ESFERA

CUÑA ESFÉRICA

Es la porción esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tengan el mismo diámetro. También puede considerarse como el sólido generado por un semicírculo cuando gira respecto a uno de sus diámetros de tal manera que la medida del ángulo de giro sea menor a 360°.



- Para calcular el volumen de la cuña esférica, usaremos una regla de tres simple:

Volumen	***Medida del ∢ de giro***
$\frac{4}{3}\pi R^3$	360°
$\mathbb{V}_{C.E}$	α

- Despejamos $\mathbb{V}_{C.E}$ y tenemos:

$$\mathbb{V}_{C.E} = \frac{\alpha 4\pi R^3}{(3)(360°)}$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbb{V}_{C.E} = \frac{\alpha\pi R^3}{270°}}$$

Donde:

- $\mathbb{V}_{C.E}$: Volumen de la cuña esférica