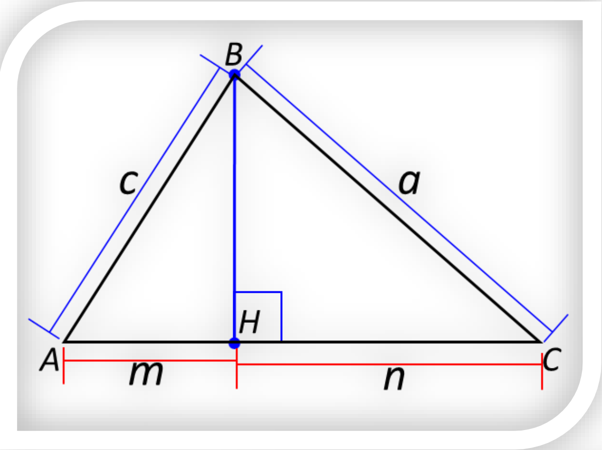
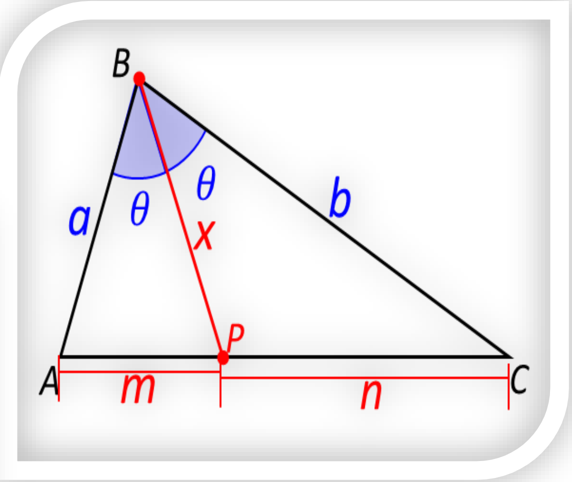
OBJETIVOS:

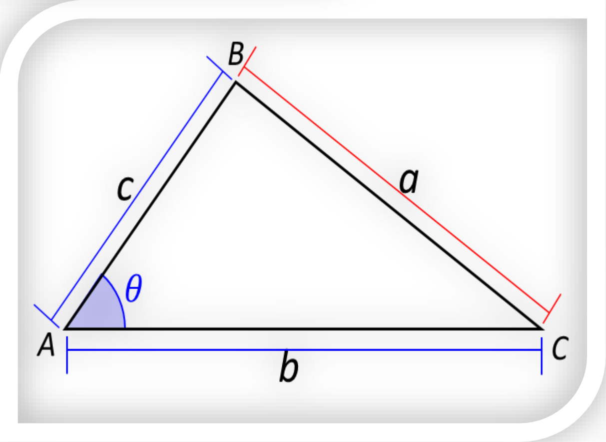
- *CONOCER LAS DIFERENTES RELACIONES MÉTRICAS DE LOS ELEMENTOS DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.*
- *CONOCER LOS CÁLCULO DE LAS LINEAS NOTABLES.*
- *SABER APLICAR LOS TEOREMAS EN LOS DIFERENTES PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISIÓN UNI.*

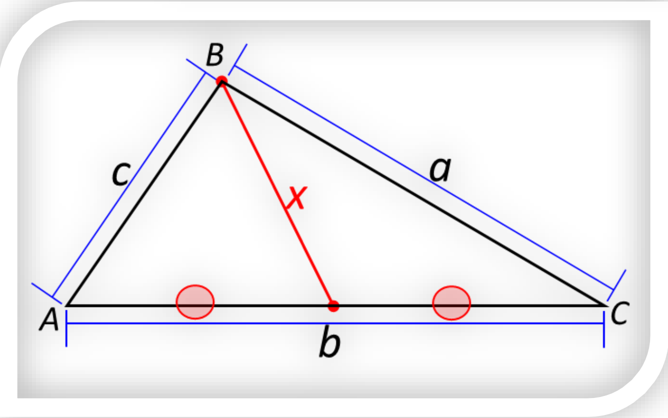
RELACIONES MÉTRICAS III

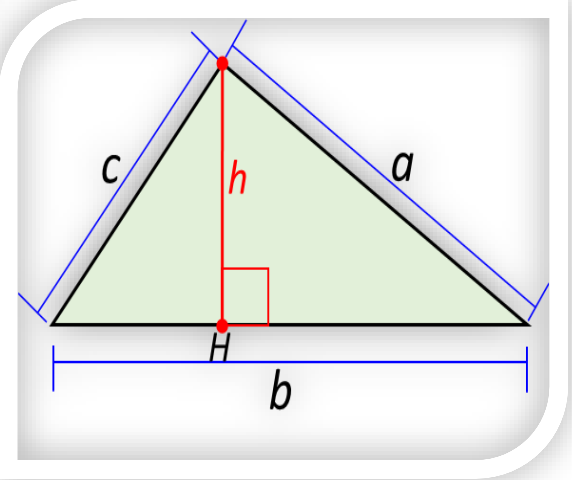
- TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO:
  - ✓ TEOREMA DE PROYECCIONES.
  - ✓ TEOREMA DE COSENO.
  - ✓ CÁLCULOS DE LINEAS NOTABLES.





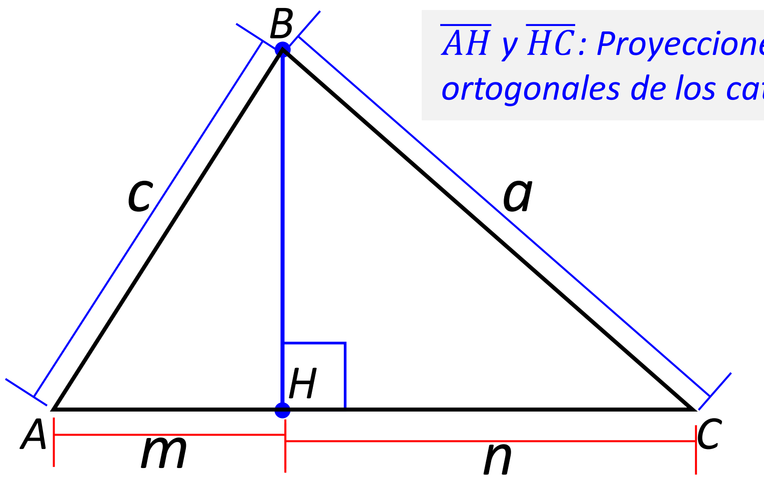






RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

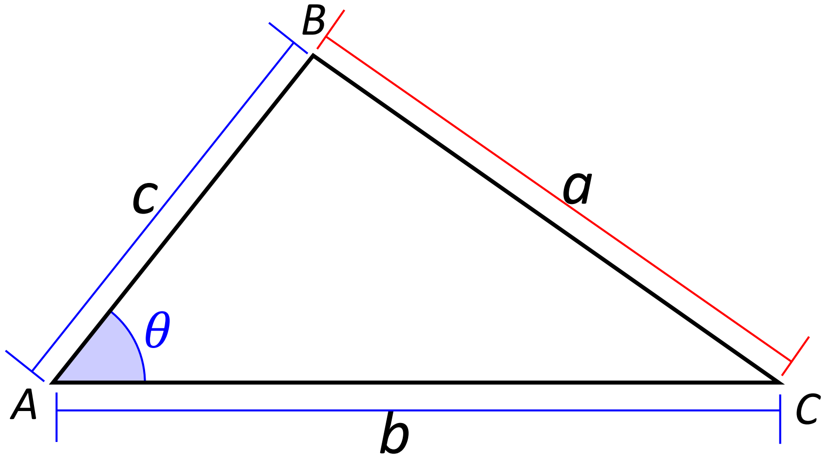
TEOREMA DE PROYECCIONES:



$\overline{AH}$ y $\overline{HC}$: Proyecciones ortogonales de los catetos.

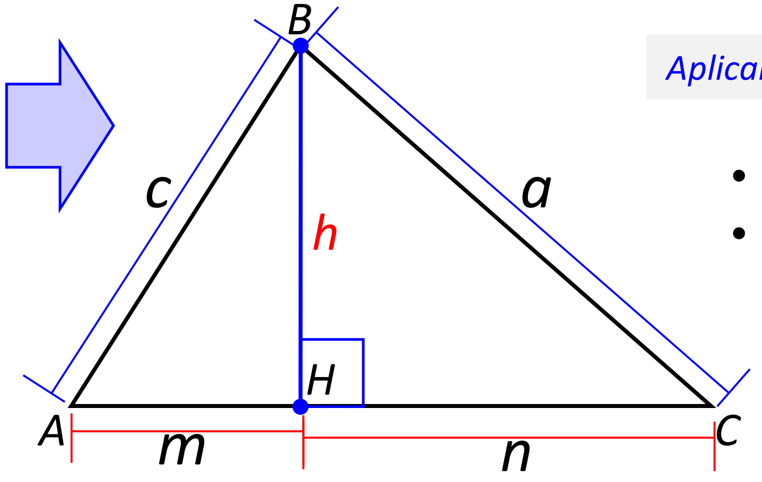
$$\boxed{a^2 - c^2 = n^2 - m^2}$$

TEOREMA DE COSENO:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.Cos\theta}$$

DEMOSTRACIÓN:



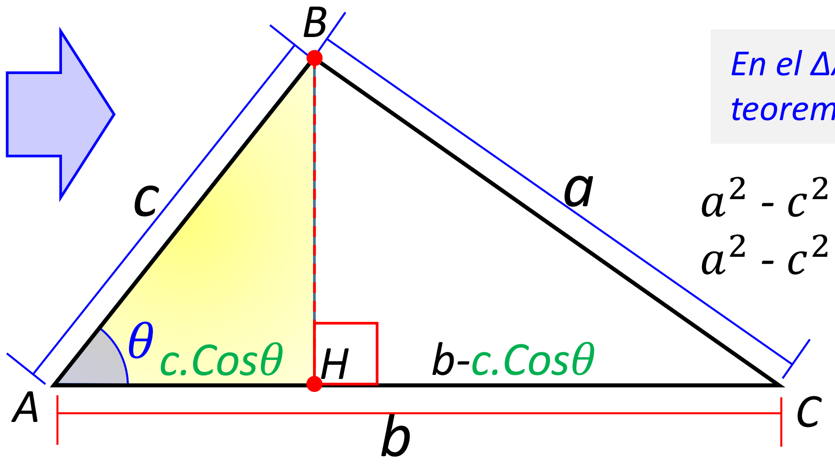
Demostrar que : $\boxed{a^2 - c^2 = n^2 - m^2}$

Aplicamos Pitágoras en los ⊿AHB y ⊿BHC.

- En el ⊿AHB: $c^2 = m^2 - h^2$
- En el ⊿BHC: $a^2 = n^2 - h^2$

-

$$\boxed{a^2 - c^2 = n^2 - m^2}$$



Demostrar que : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.Cos\theta}$

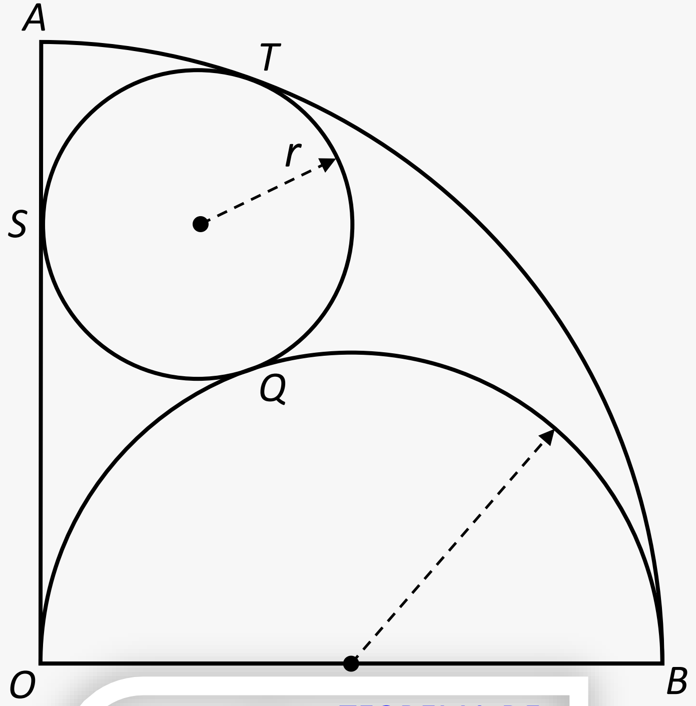
En el ΔABC trazamos la altura $\overline{BH}$ para aplicar el teorema de proyecciones.

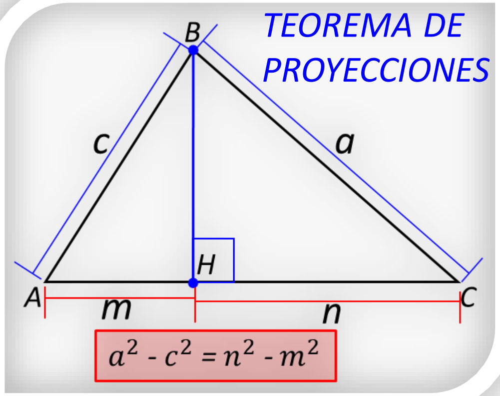
$$a^2 - c^2 = (b - c.Cos\theta)^2 - (c.Cos\theta)^2$$

$$a^2 - c^2 = b^2 + \cancel{(c.Cos\theta)^2} - 2bc.Cos\theta - \cancel{(c.Cos\theta)^2}$$

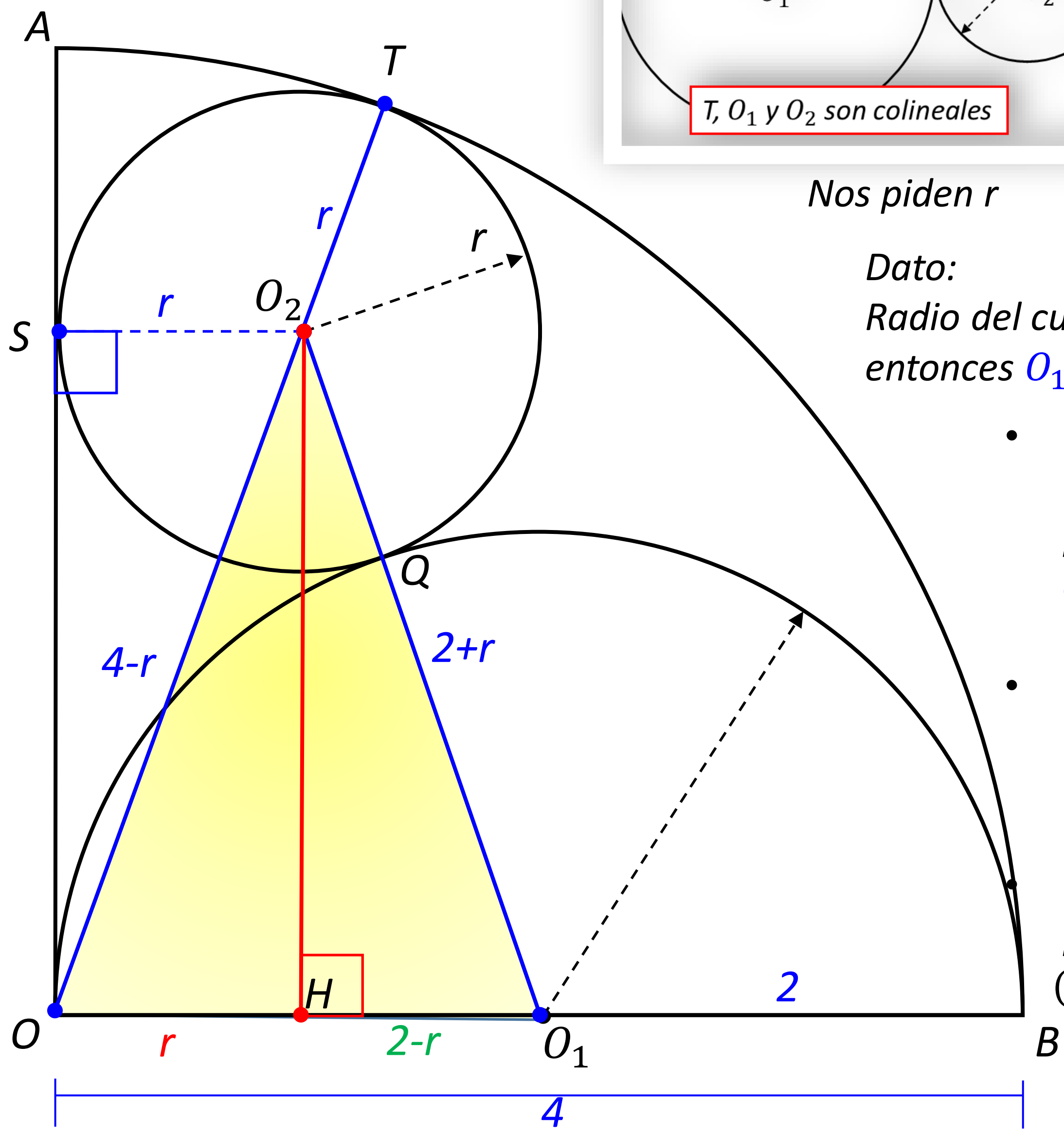
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.Cos\theta}$$

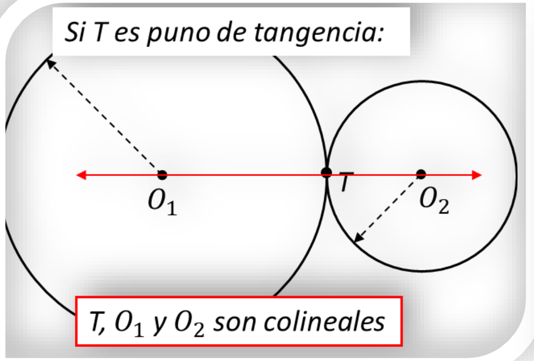
Del gráfico el radio del cuadrante AOB es 4, calcule r. (T, Q y S son puntos de tangencia)

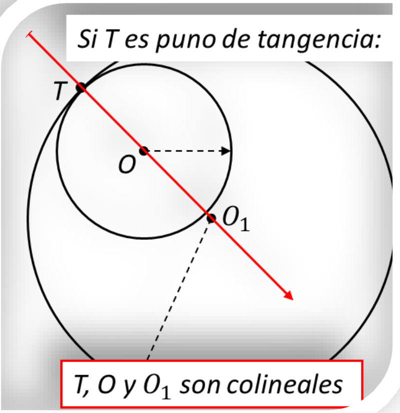




RESOLUCIÓN:







Nos piden r

Dato:
Radio del cuadrante AOB es 4, entonces $O_1B=2$

- De las observaciones, por la colinealidad de los centros y puntos de tangencia:
  $O_1O_2=2+r$ $\quad$ $OO_2=4-r$
- Trazamos $\overline{O_2S}$ y $\overline{O_2H} \perp \overline{OB}$:
  $O_2S=OH=r$
  $HO_1=2-r$

En el ΔOO_2O_1, por teorema de proyecciones:

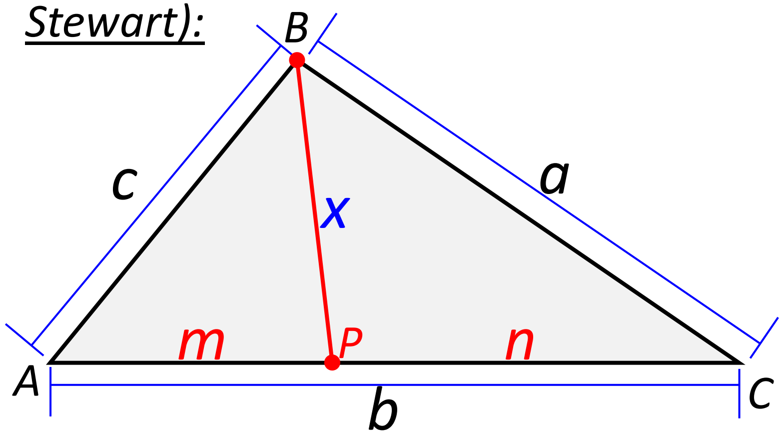
$$(4-r)^2 - (2+r)^2 = (r)^2 - (2-r)^2$$

$\boxed{\therefore r = 1}$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

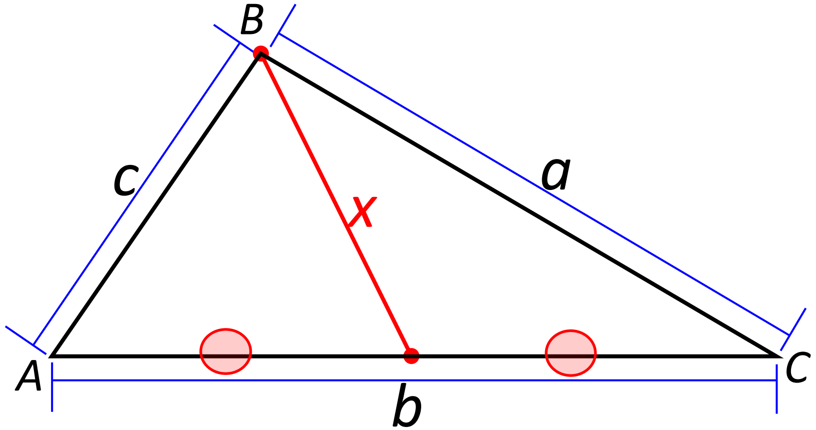
CÁLCULOS DE LINEAS NOTABLES

CÁLCULOS DE LA CEVIANA (teorema de Stewart):



$$\boxed{(a)^2m + (c)^2n = (x)^2b + bmn}$$

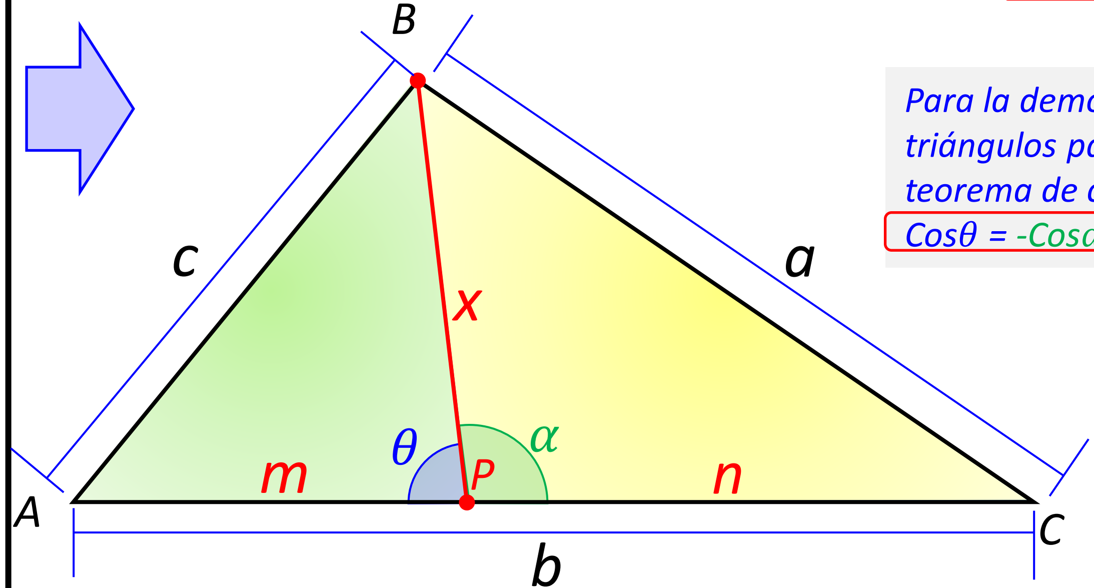
CÁLCULO DE LA MEDIANA:



$$\boxed{a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN:

Demostrar que : $\boxed{(a)^2m + (c)^2n = (x)^2b + bmn}$



Para la demostración analizaremos a los triángulos parciales APB y BPC mediante el teorema de coseno. Si $\theta+\alpha=180°$ entonces $\boxed{Cos\theta = -Cos\alpha}$

- *En el ΔAPB teorema de coseno:*

  $c^2 = x^2 + m^2 - 2xm.Cos\theta$ *(Multiplicamos n)*

  $c^2n = x^2n + m^2n - 2xm\cancel{n}.Cos\theta$ ...(I)

- *En el ΔBPC teorema de coseno:*

  $a^2 = x^2 + n^2 - 2xn.Cos\alpha$ *(Multiplicamos m)*

  $a^2m = x^2m + n^2m \underbrace{-2xnm.\underbrace{Cos\alpha}_{-Cos\theta}}_{+2xm\cancel{n}.Cos\theta}$ ...(II)

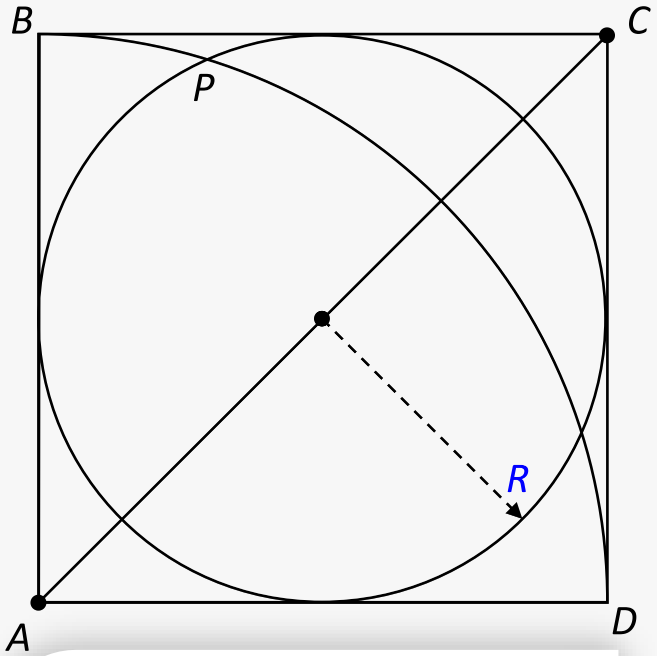
- Sumamos (I) y (II):

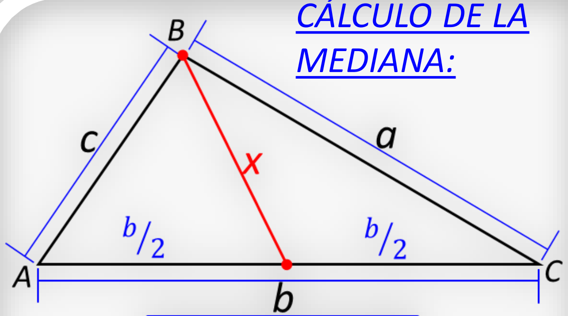
$(a)^2m+(c)^2n=x^2n+x^2m+m^2n+n^2m$

$(a)^2m+(c)^2n=x^2\underbrace{(m+n)}_{b}+\underbrace{(m+n)}_{b}m.n$

$$\boxed{(a)^2m + (c)^2n = (x)^2b + bmn}$$

Del gráfico la circunferencia esta inscrita en el cuadrado ABCD, si R=2. calcule PC

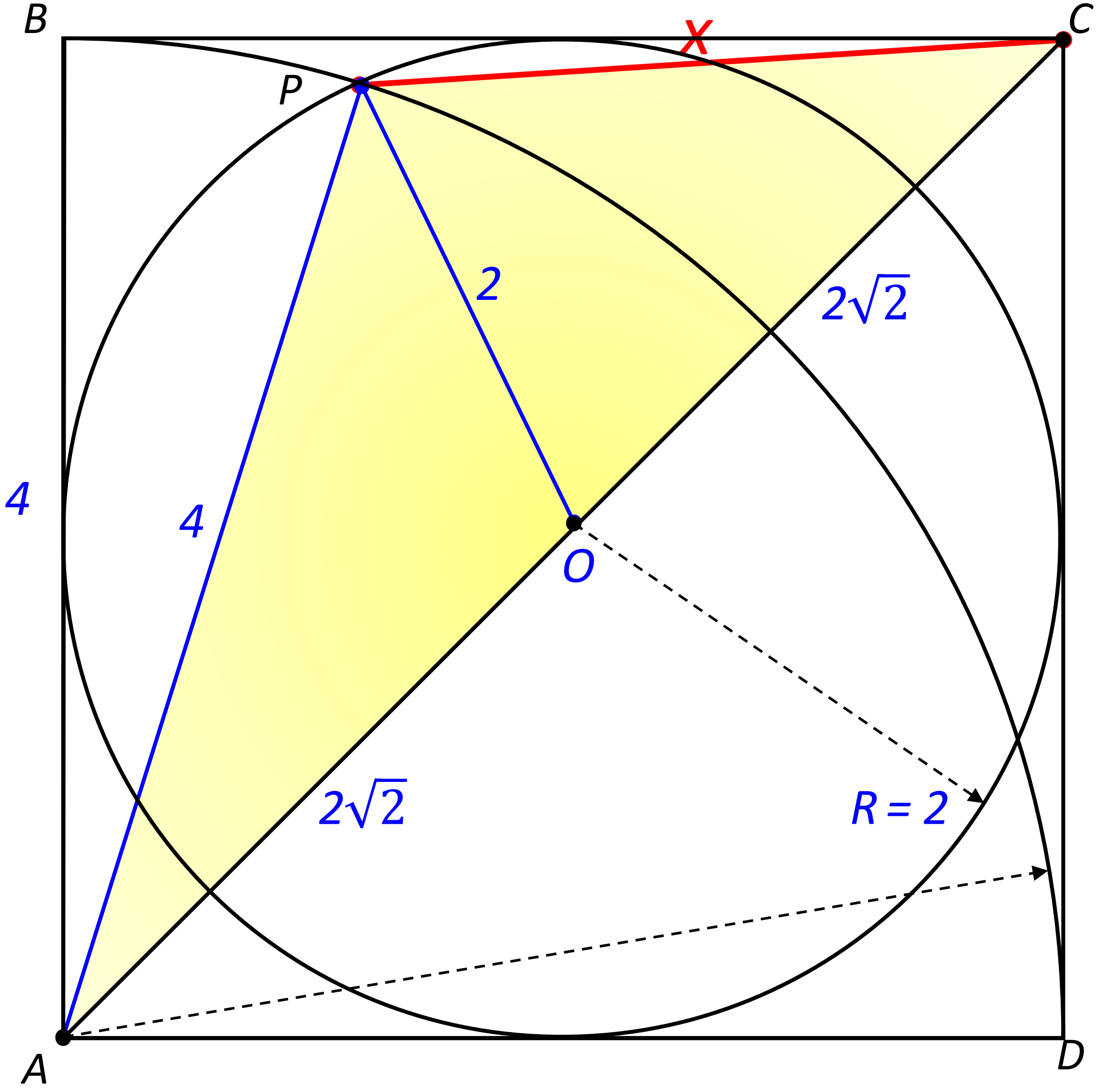




$$\boxed{a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}}$$

RESOLUCIÓN:

Nos piden PC = x



Dato:

$R = 2$

- Como la circunferencia esta inscrita al cuadrado ABCD:

  AB=AD=4

  OP=2

- Si O es centro del cuadrado:

  $AO=OC=2\sqrt{2}$

- Del cuadrante BAD:

  AP=4

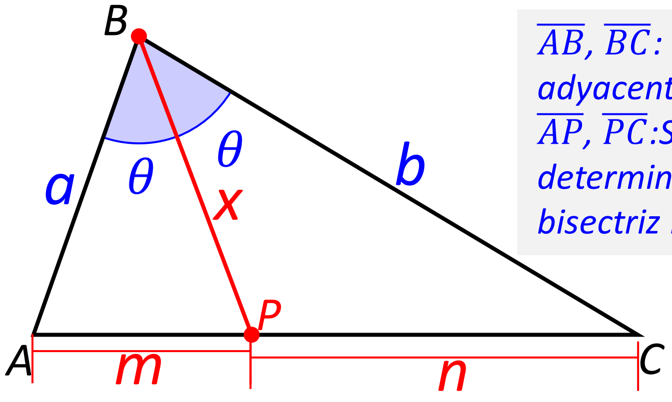
- En el ΔAPC, por cálculo de la mediana:

$$x^2 + 4^2 = 2(2)^2 + \frac{(4\sqrt{2})^2}{2}$$

$$\boxed{\therefore x = 2\sqrt{2}}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

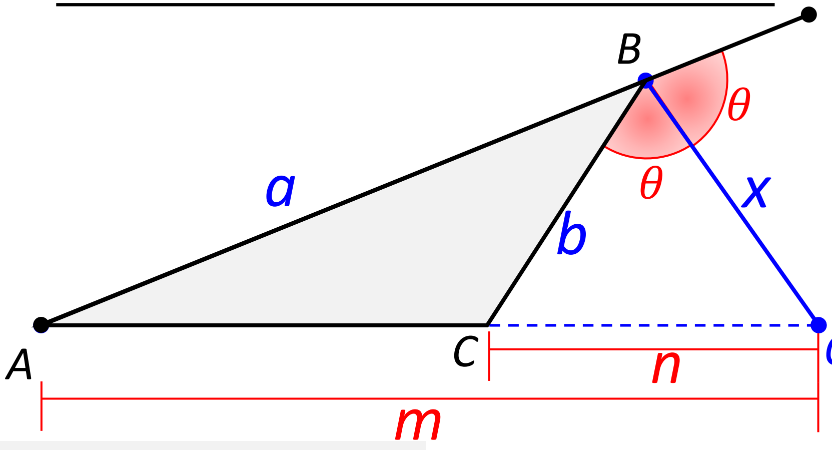
CÁLCULO DE LA BISECTRIZ INTERNA:



$\overline{AB}$, $\overline{BC}$: Lados adyacentes
$\overline{AP}$, $\overline{PC}$:Segmentos determinados por la bisectriz interior

$$x^2 = (a)(b) - (m)(n)$$

CÁLCULO DE LA BISECTRIZ EXTERIOR:



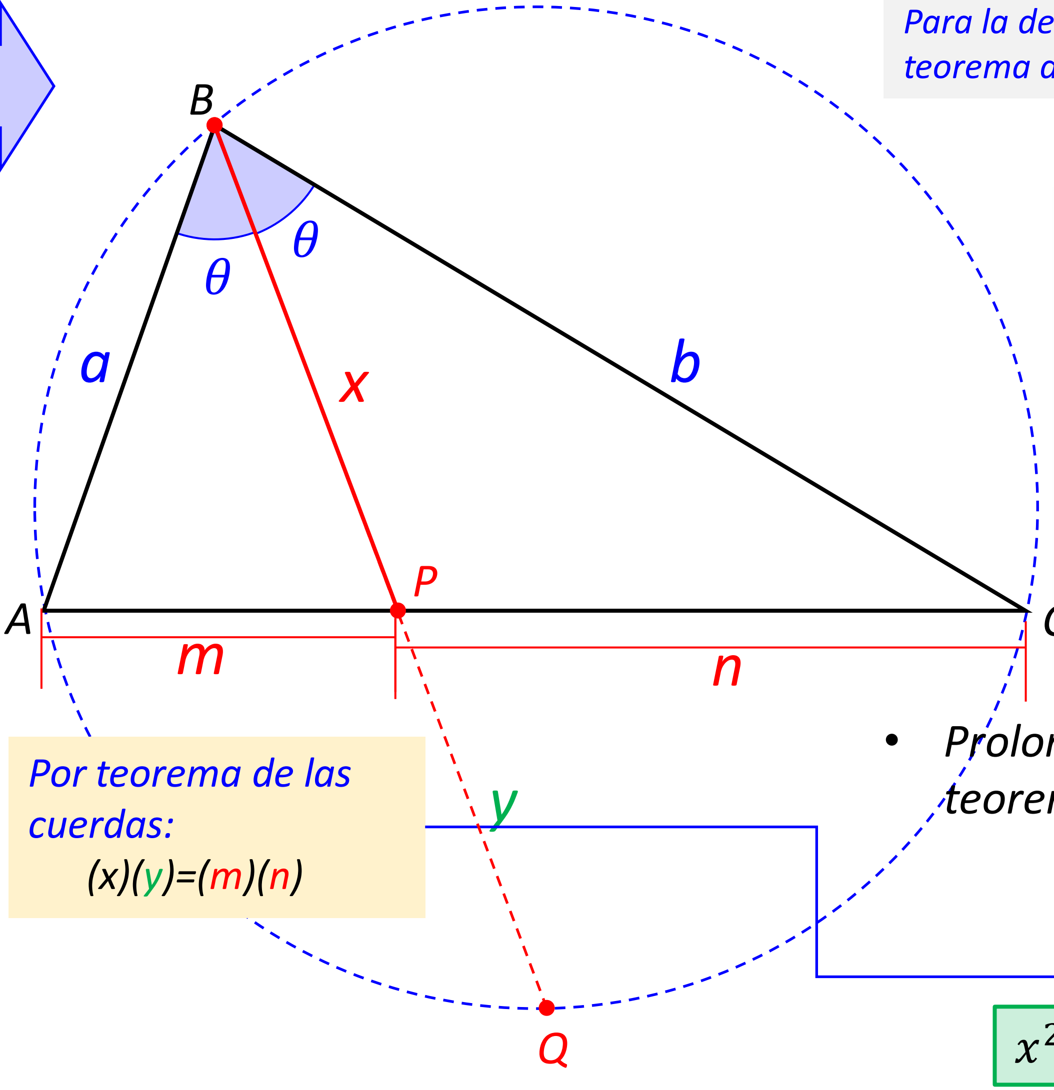
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$: Lados adyacentes
$\overline{AQ}$, $\overline{CQ}$: Segmentos determinados por la bisectriz exterior

$$x^2 = (m)(n) - (a)(b)$$

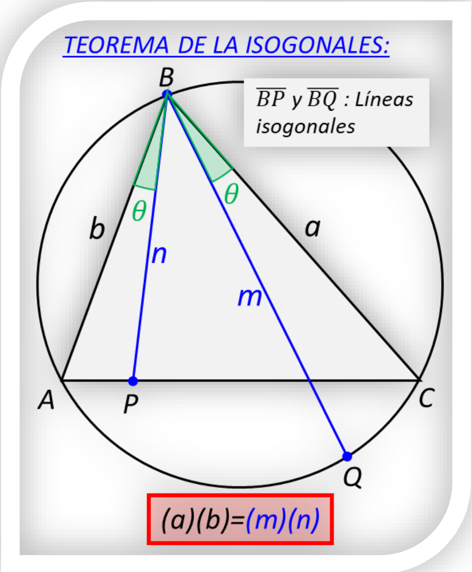
DEMOSTRACIÓN:

Demostrar que : $x^2 = (a)(b) - (m)(n)$

Para la demostración nos apoyaremos del teorema de las isogonales.



Por teorema de las cuerdas:
$(x)(y)=(m)(n)$



- Prolongamos $\overline{BP}$ hasta Q, por teorema de las isogonales:

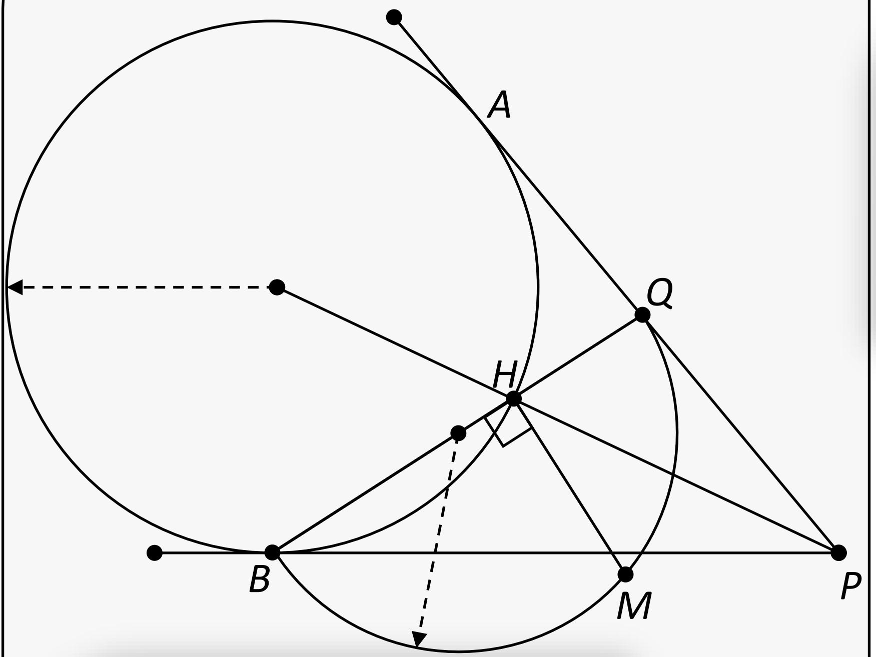
$(a)(b)=(x)(x+y)$

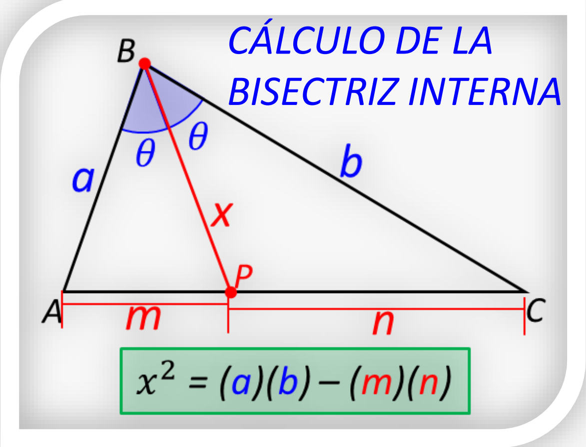
$(a)(b)=x^2+(x)(y)$

$(m)(n)$

$$x^2 = (a)(b) - (m)(n)$$

Del gráfico A y B son puntos de tangencia, si PQ=6 y AQ=5. calcule $(PH)^2 + (MH)^2$





RESOLUCIÓN:

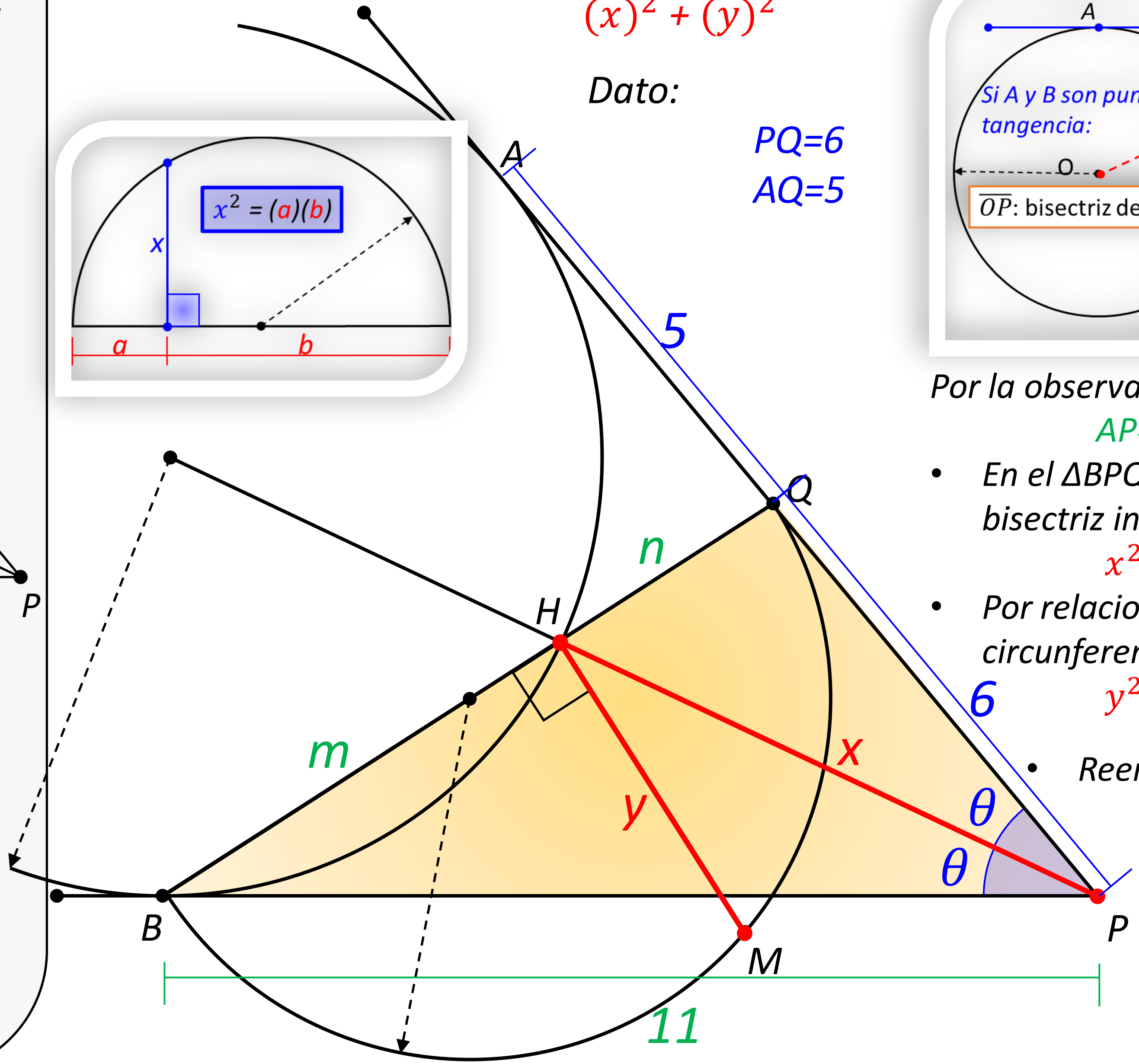
Nos piden $(PH)^2 + (MH)^2$

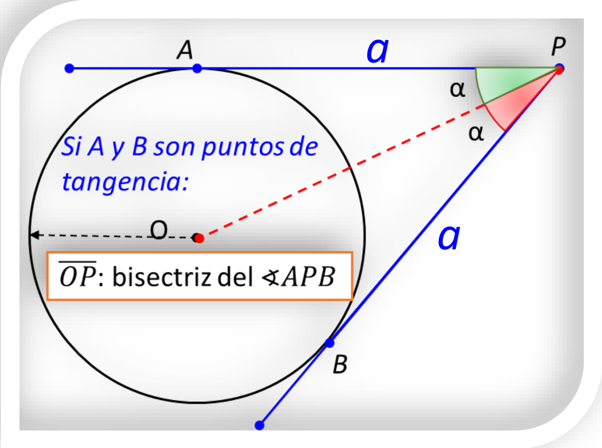
$(x)^2 + (y)^2$

Dato:

PQ=6

AQ=5





Por la observación, $\overline{PH}$ es bisectriz.

AP=PB=11

- En el ΔBPQ, por cálculo de la bisectriz interior:

  $x^2 = (6)(11) - (m)(n)$…(I)

- Por relaciones métricas en la semi circunferencia:

  $y^2 = (m)(n)$… (II)

- Reemplazando (II) en (I):

  $x^2 = 66 - y^2$

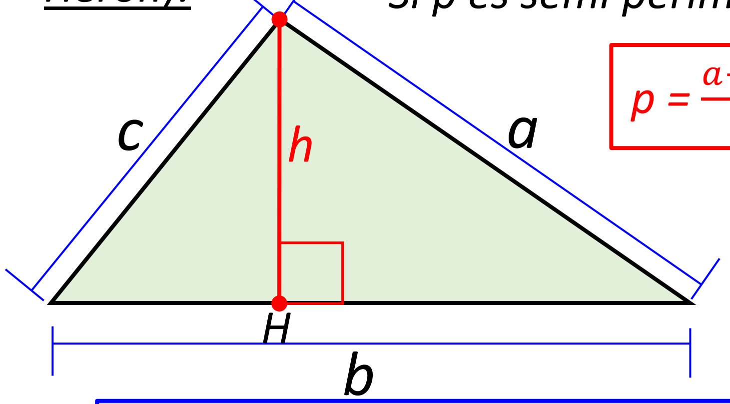
$\therefore x^2 + y^2 = 66$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

CÁLCULO DE LA ALTURA (Teorema de Heron):

Si p es semi perímetro

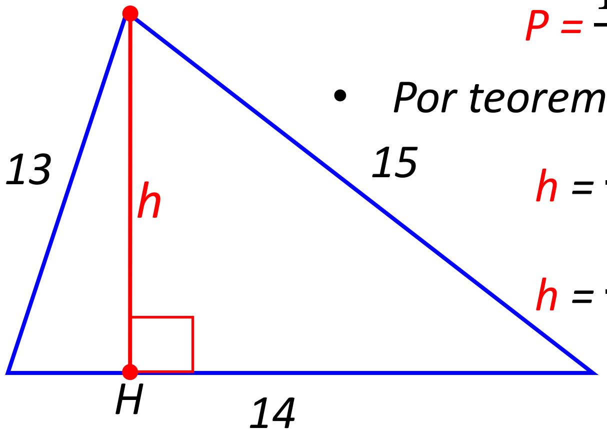
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Aplicación:

Calcule h.



- Calculamos el semi perímetro:

$$P = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

- Por teorema de Heron:

$$h = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$$

$$h = \frac{2}{14}\sqrt{(21)(6)(7)(8)}$$

$$\therefore h = 12$$

En un trapecio escaleno sus diagonales miden 10 y 17 y su base media 10,5. calcule la altura de dicho trapecio.

RESOLUCIÓN:

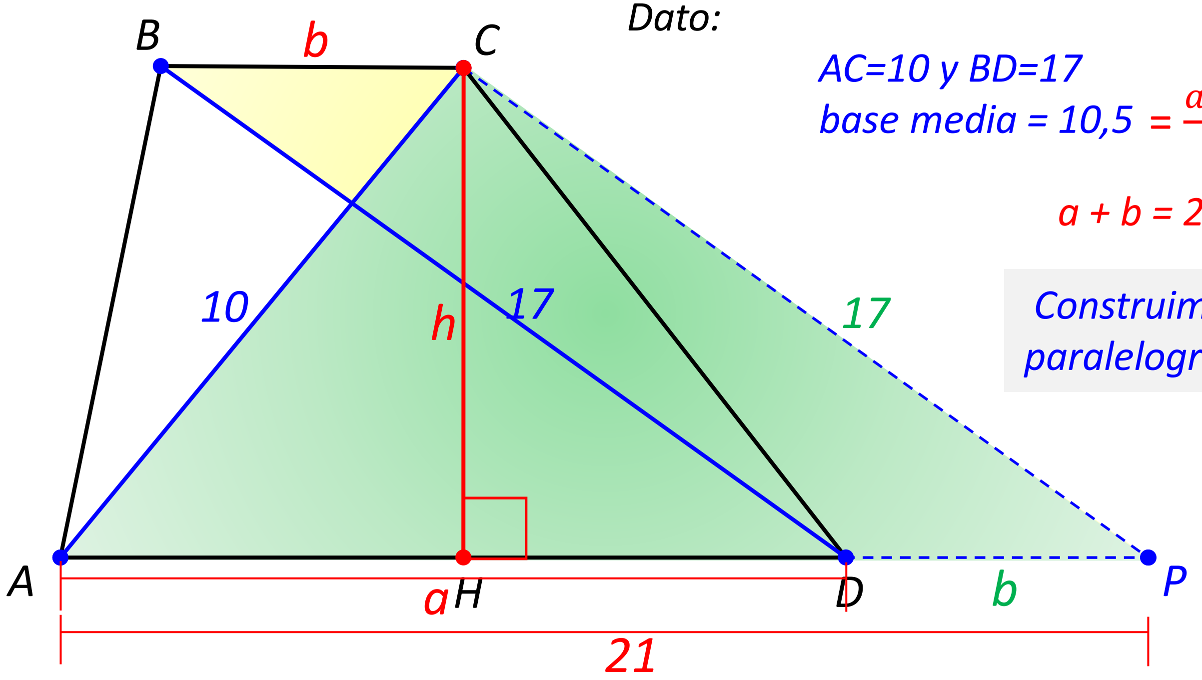
Nos piden altura del trapecio: h

Dato:

AC=10 y BD=17

base media = 10,5 $= \frac{a+b}{2}$

a + b = 21



Construimos el paralelogramo DBCP.

- Del paralelogramo DBCP:

CP=17 PD=b

AP= a + b = 21

- En el ΔACP, por teorema de Heron:

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24$$

- Entonces:

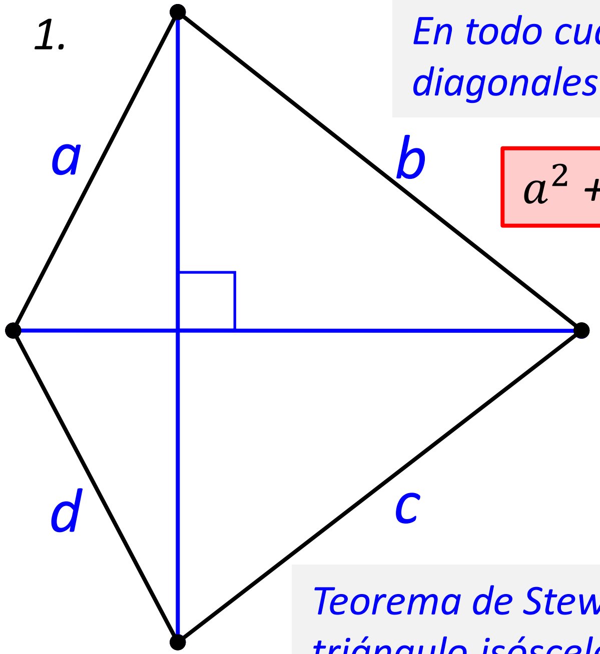
$$h = \frac{2}{14}\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}$$

$$h = \frac{2}{14}\sqrt{(24)(3)(7)(14)}$$

$$\boxed{\therefore h = 8}$$

TEOREMAS ADICIONALES:

1.

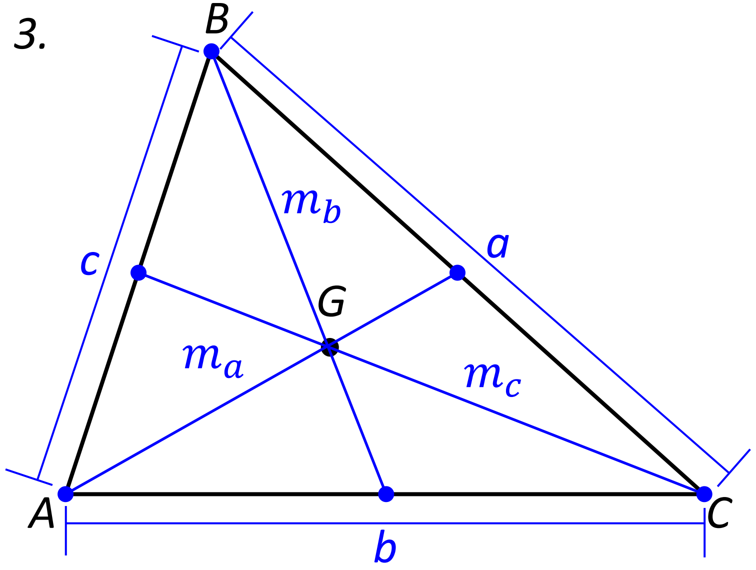


En todo cuadrilátero de diagonales perpendiculares

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Suma cuadrada de las medianas m_a, m_b y m_c

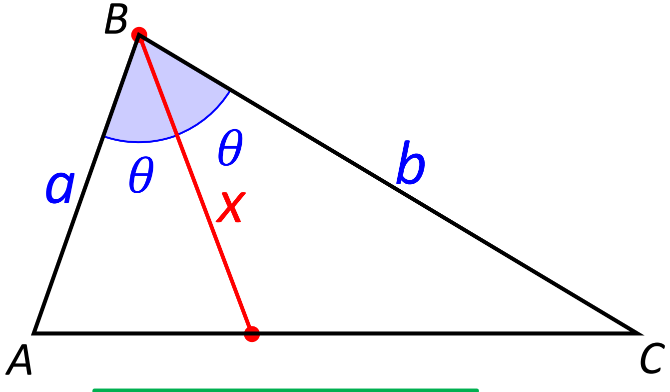
3.



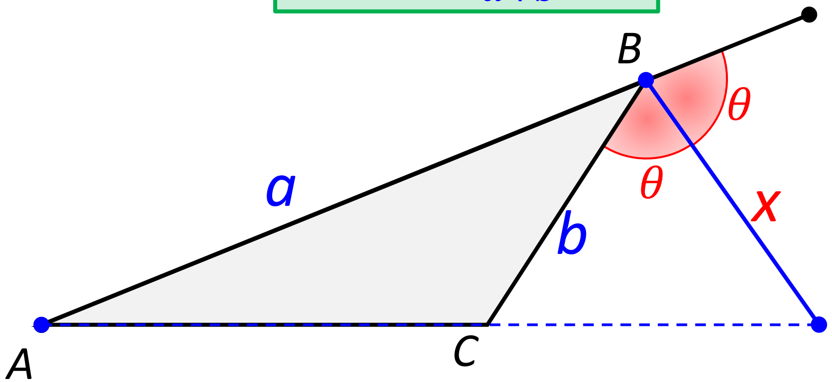
$$m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Cálculo de la longitud de la bisectriz apoyándonos de la trigonometría

4.



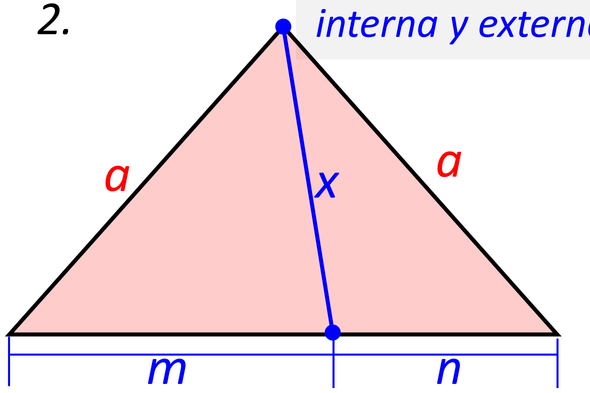
$$x^2 = \frac{2(a)(b)COS\theta}{a+b}$$



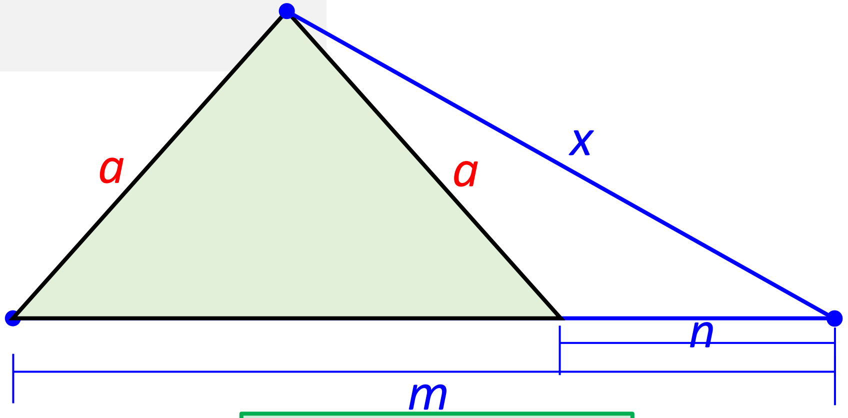
$$x^2 = \frac{2(a)(b)COS\theta}{a-b}$$

Teorema de Stewart aplicado en el triángulo isósceles con una ceviana interna y externa

2.



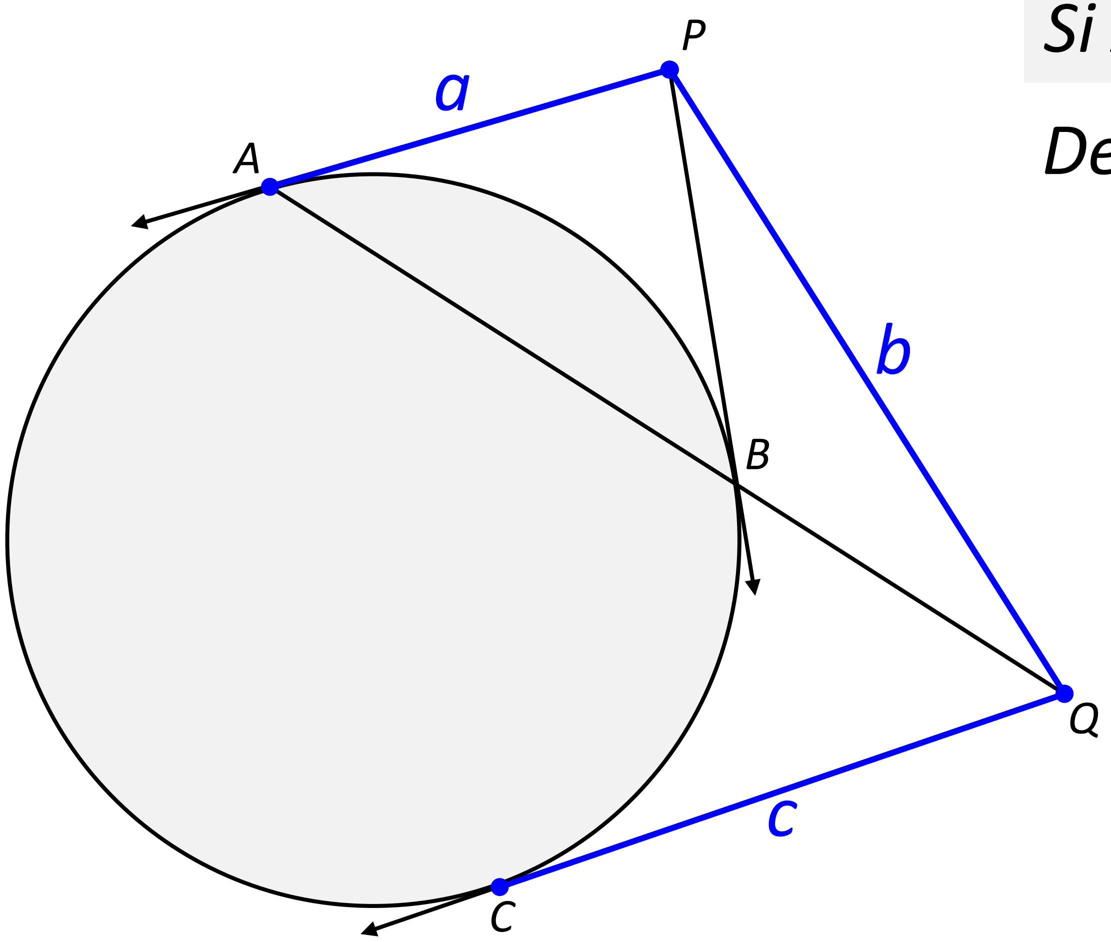
$$x^2 = a^2 - (m)(n)$$



$$x^2 = a^2 + (m)(n)$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

RETO DEL TEMA:



Si A, B y C son puntos de tangencia.

Demostrar que :

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2}$$