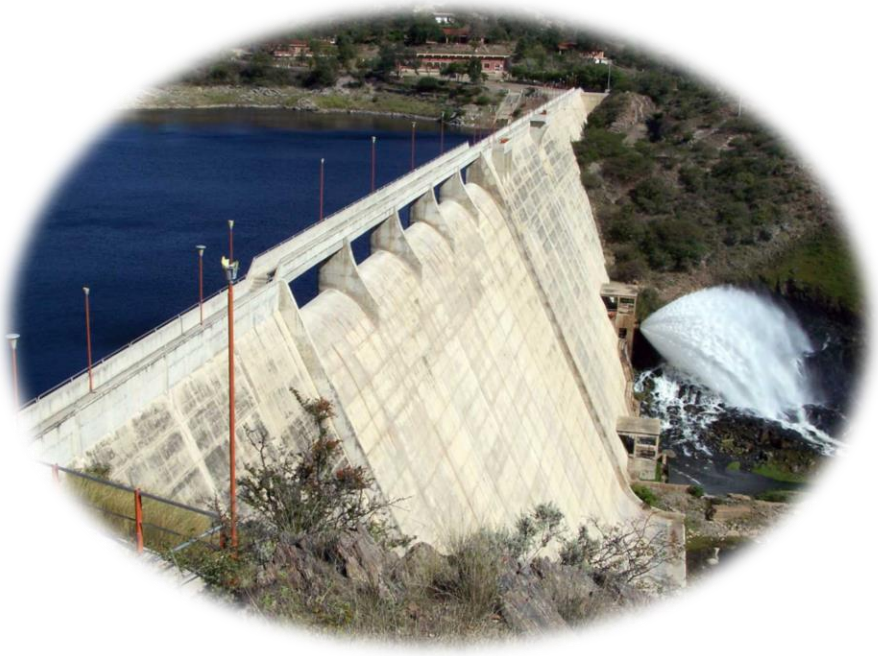
OBJETIVOS:

- *Conocer la definición y características de un prisma.*
- *Calcular la superficie y volumen de este sólido.*
- *Conocer la definición y características del tronco de prisma.*
- *Aplicar lo aprendido en los problemas tipo examen de admisión.*

INTRODUCCIÓN

Continuando con el estudio de los sólidos geométricos, en esta sesión desarrollaremos lo referente al prisma, una figura de bastante uso en las edificaciones arquitectónicas, seguramente por su sencillez y rigidez al momento de la construcción, además de poder adoptar diferentes bases, ésta característica hace que el arquitecto pueda idear los más impresionantes e imponentes diseños.

Así mismo esta forma suele ser muy útil en la construcción de diques para la contención de las aguas de una cierta zona geográfica para su posterior uso. Entonces debemos tener en cuenta la importancia de esta forma geométrica en la realidad como también su frecuencia en los distintos exámenes de admisión.



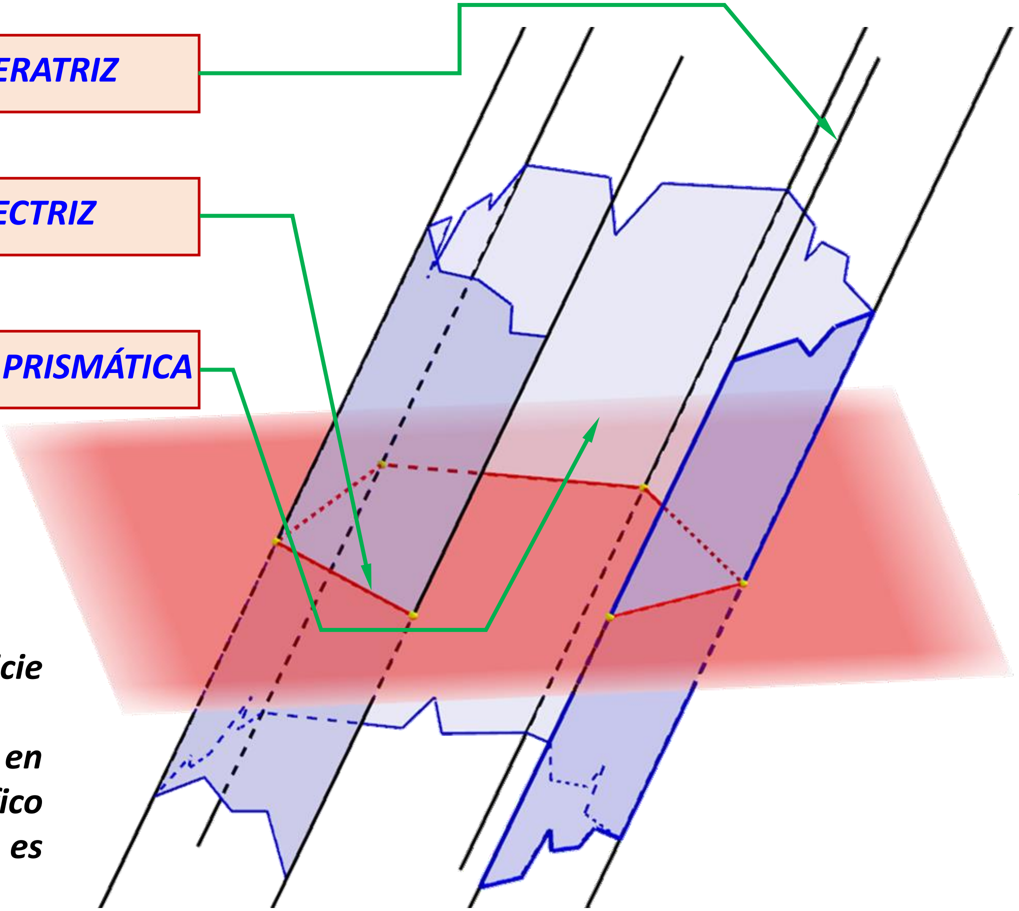
SUPERFICIE PRISMÁTICA

Se define así a la superficie que se genera cuando una línea recta llamada generatriz, recorre todos los puntos de una poligonal plana denominada directriz, de tal forma que lo realiza siempre paralela a si misma.

GENERATRIZ

DIRECTRIZ

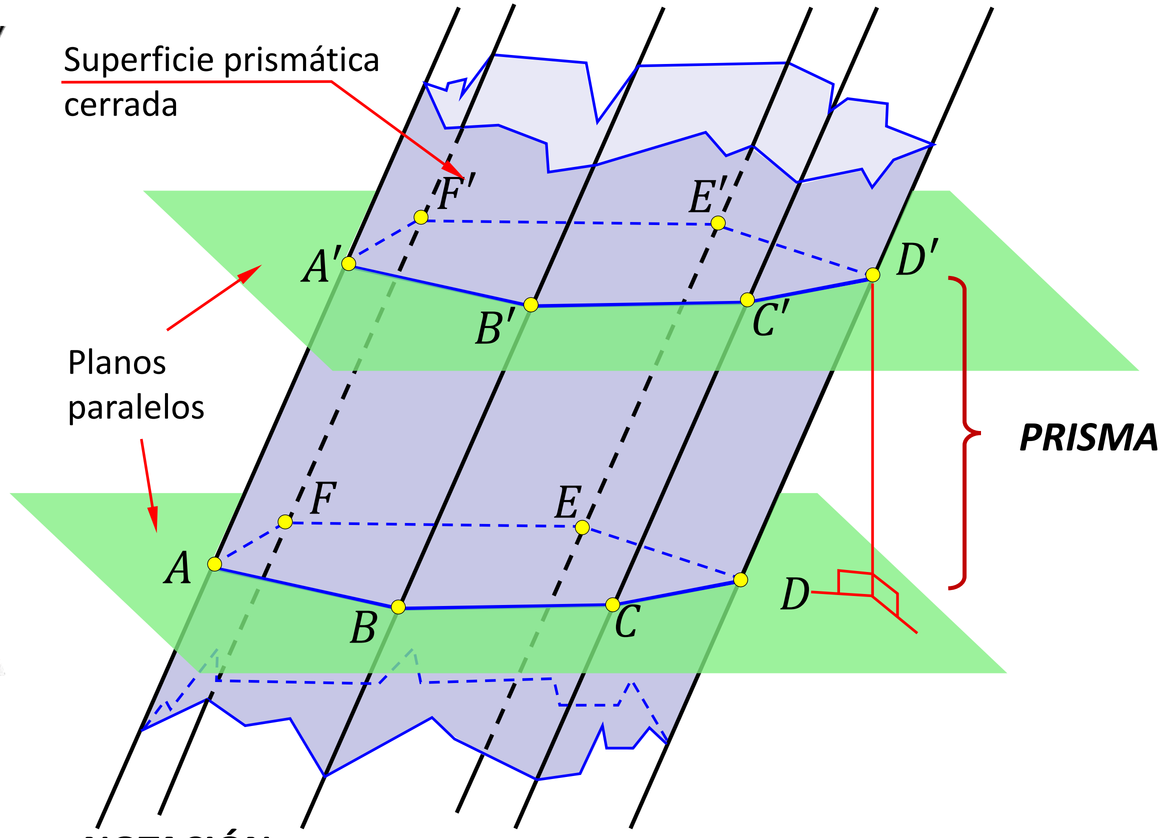
SUPERFICIE PRISMÁTICA



La superficie prismática generada en el gráfico mostrado es abierta.

PRISMA

Es el sólido geométrico que se encuentra limitado por una superficie prismática cerrada y dos planos paralelos y secantes a ella.



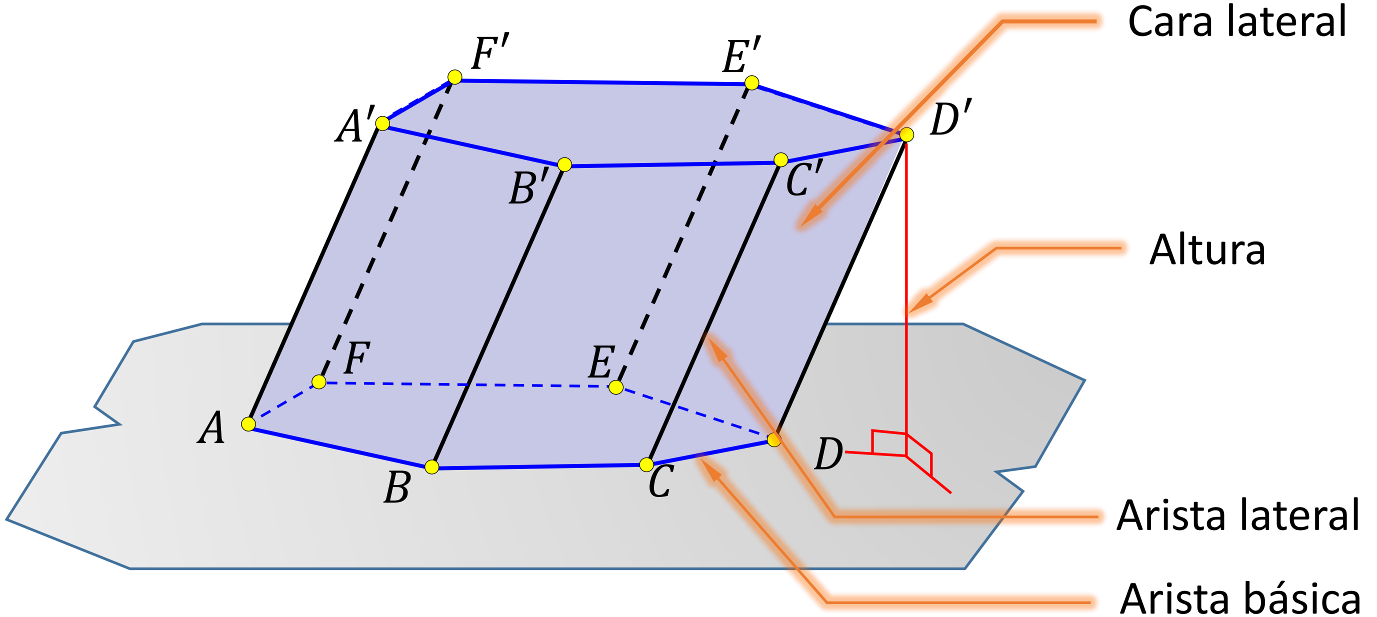
NOTACIÓN:

Prisma $ABCDEF$-$A'B'C'D'E'F'$

PRISMA

PRISMA

ELEMENTOS



características

- Las bases en todo prisma son paralelas y congruentes.
- Las caras laterales son regiones paralelográmicas.
- De lo anterior se deduce que las aristas laterales son paralelas y de longitudes iguales.

NOTACIÓN:

Prisma $ABCDEF\text{-}A'B'C'D'E'F'$

CURSO DE GEOMETRÍA

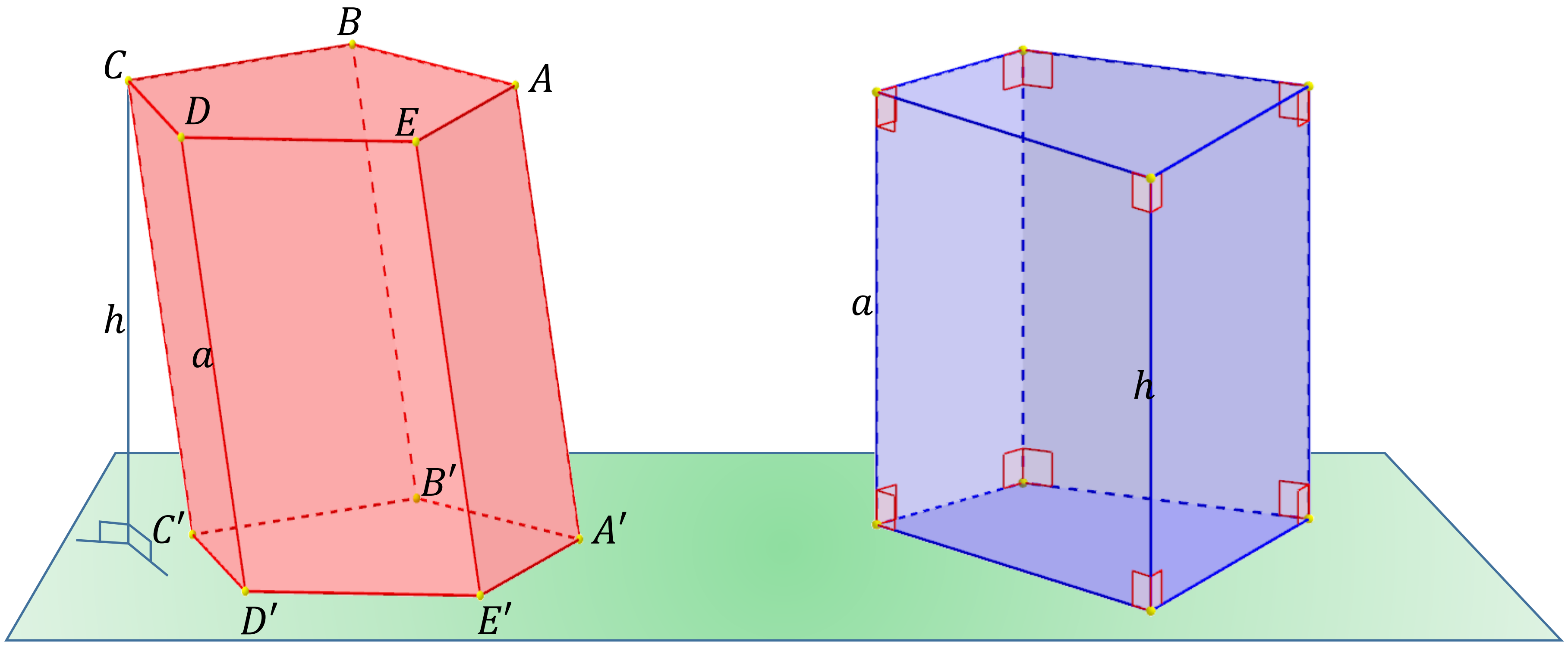
PRISMA
CLASIFICACIÓN

PRISMA ***Oblicuo***

Un prisma es oblicuo, cuando sus aristas laterales son oblicuas a las bases.

PRISMA ***Recto***

Un prisma es recto, cuando sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.



En un prisma oblicuo, la longitud de la altura es mayor que la longitud de la arista lateral.

En un prisma recto, la longitud de la arista lateral y de la altura son iguales.

Se cumple:

- ***Área de la superficie lateral***

$$\mathbb{A}_{S.L} = \sum \begin{matrix} \text{áreas de las} \\ \text{caras laterales} \end{matrix}$$

- ***Área de la superficie total***

$$\mathbb{A}_{S.T} = \mathbb{A}_{S.L} + 2\mathbb{A}_{base}$$

- ***Volumen***

$$\mathbb{V} = (\mathbb{A}_{base})(h)$$

PRISMA

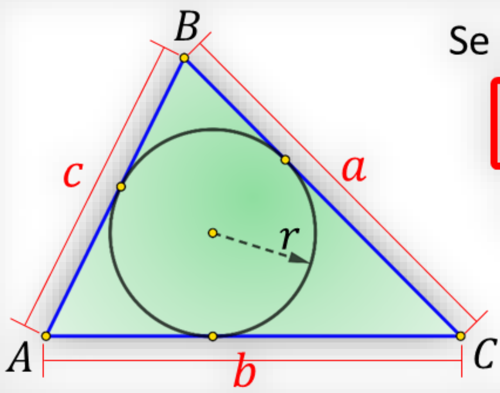
EXAMEN UNI **2011 – II**

El volumen y el área lateral de un prisma recto de base triangular son $50m^3$ y $200m^2$ respectivamente. Calcule el radio ($en\ m$) de la circunferencia inscrita en la base del prisma.

$A)\ 0{,}25$ $B)\ 0{,}5$ $C)\ 1$

$D)\ 2$ $E)\ 3$

Recordar:



Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{A}_{ABC} = p \cdot r}$$

Donde:

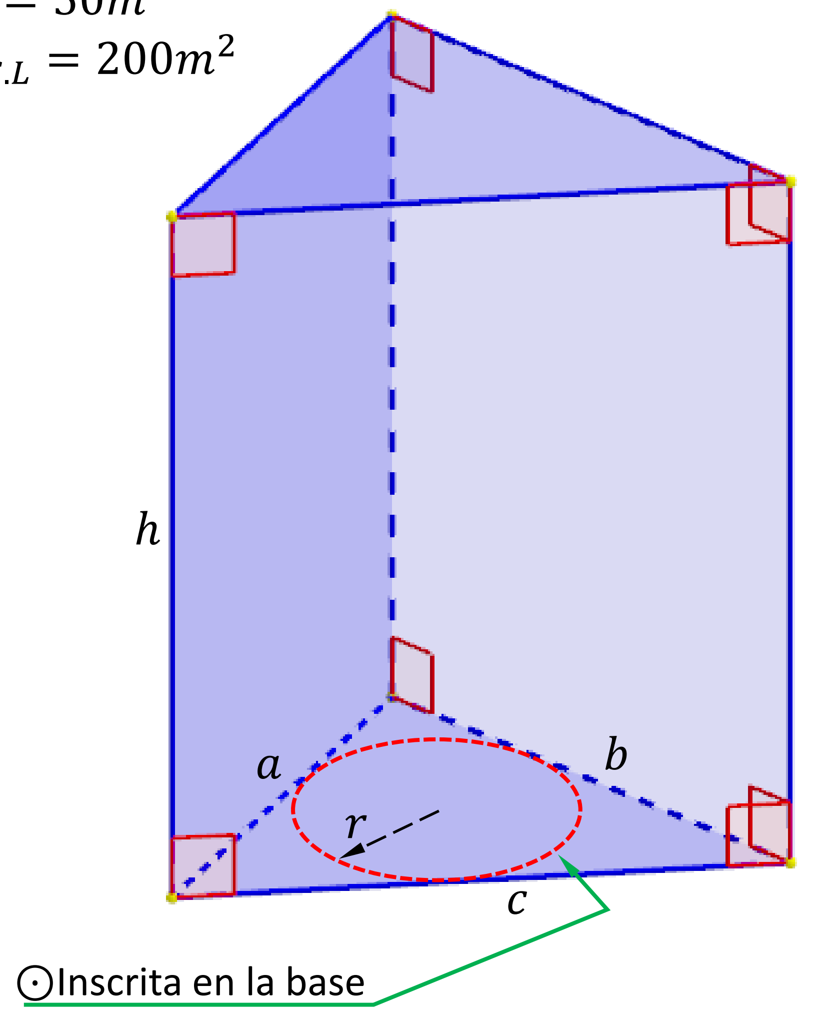
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Piden r

Dato:

$\mathbb{V} = 50m^3$

$\mathbb{A}_{S.L} = 200m^2$



- Del dato del volumen, sabemos:

$$\mathbb{V} = \underbrace{\mathbb{A}_{Base}}(h) = 50m^3$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)(r)(h) = 50m^3 \ \dots (i)$$

- Del dato de la superficie lateral, sabemos:

$$\mathbb{A}_{S.L.} = \underbrace{\sum \begin{matrix} \text{áreas de las} \\ \text{caras laterales} \end{matrix}} = 200m^2$$

$$(a+b+c)(h) = 200m^2 \dots (ii)$$

- Dividimos $(i) \div (ii)$:

$$\boxed{\therefore r = 0{,}5}$$

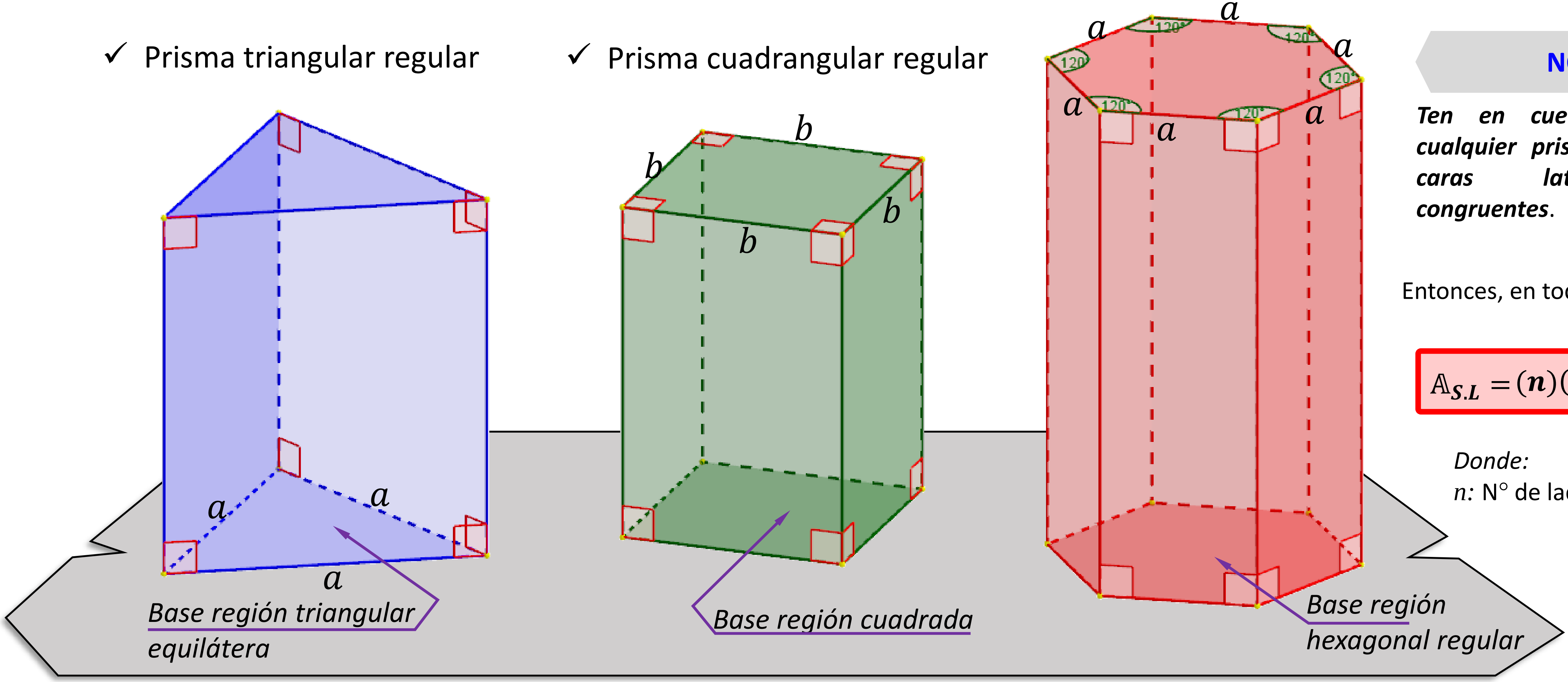
Clave **B**

PRISMA REGULAR

Es aquel prisma recto en el cual las bases son regiones poligonales regulares.

Veamos los casos más usuales:

- ✓ Prisma triangular regular
- ✓ Prisma cuadrangular regular
- ✓ Prisma hexagonal regular



NOTA:

Ten en cuenta que para cualquier prisma regular las caras laterales son congruentes.

Entonces, en todo prisma regular:

$$\boxed{\mathbb{A}_{S.L} = (\boldsymbol{n})(\mathbb{A}_{1\ cara\ lateral})}$$

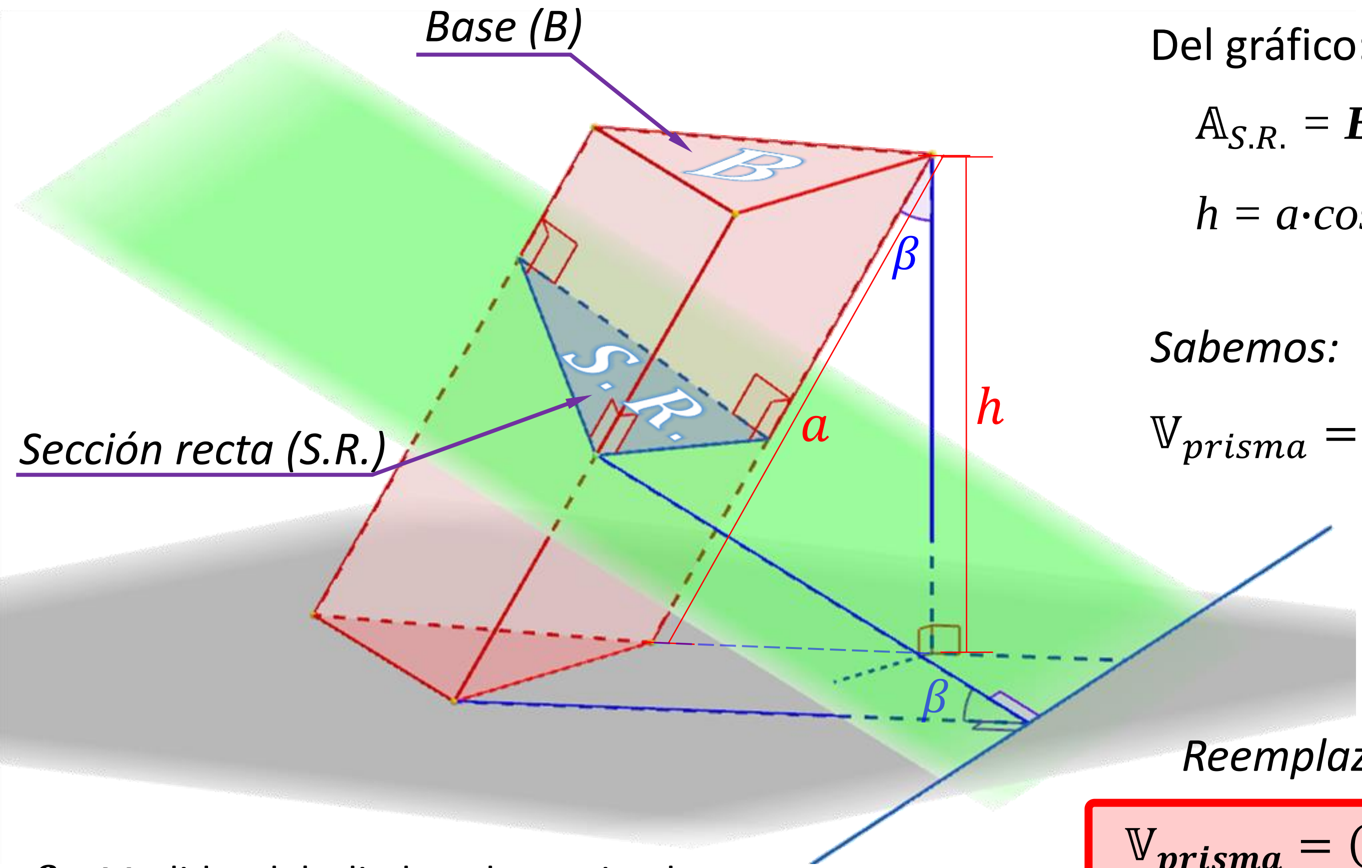
Donde:

n: N° de lados de la base

PRISMA

SECCIÓN RECTA

La sección recta de un prisma, es la sección que determina en él, un plano perpendicular a sus aristas laterales, dicha sección es la proyección ortogonal de las bases sobre dicho plano.



$\boldsymbol{\beta}$: Medida del diedro determinado por la base y la sección recta.

Del gráfico:

$$\mathbb{A}_{S.R.} = \boldsymbol{B}\cdot cos\theta$$

$$h = a\cdot cos\theta$$

Sabemos:

$$\mathbb{V}_{prisma} = (B)(h)$$

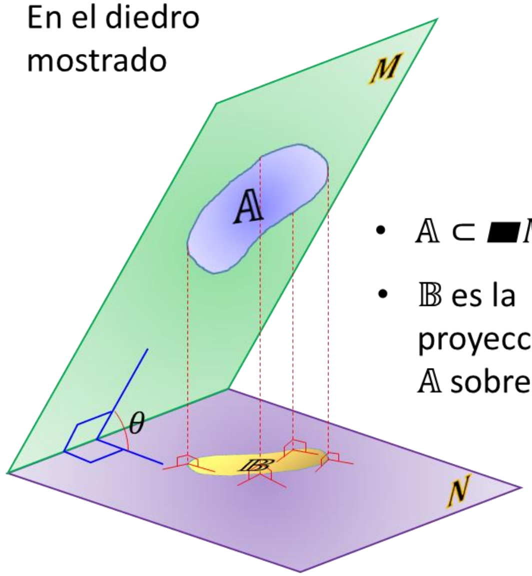
Reemplazando

$$\boxed{\mathbb{V}_{\boldsymbol{prisma}} = (\mathbb{A}_{\boldsymbol{S.R.}})(\boldsymbol{a})}$$

Recuerda:

TEOREMA:

En el diedro mostrado



- $\mathbb{A} \subset$ ▰M
- $\mathbb{B}$ es la proyección de $\mathbb{A}$ sobre ▰N

Se cumple: $\boxed{\mathbb{B} = \mathbb{A}(cos\theta)}$

También podemos indicar que: $\boxed{\mathbb{A}_{\boldsymbol{S.L}} = (\boldsymbol{2p_{S.R.}})(\boldsymbol{a})}$

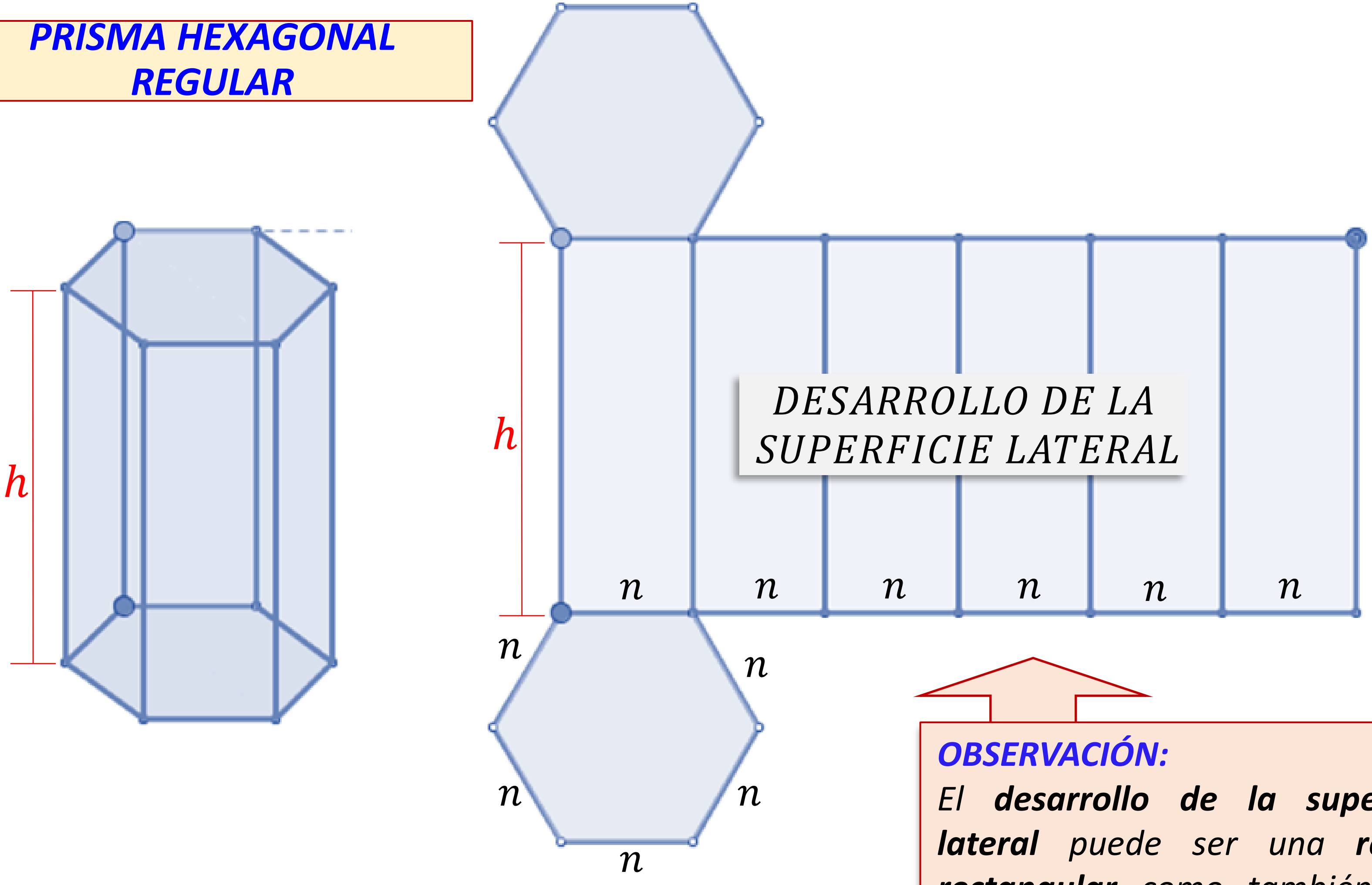
Donde:

$2p_{S.R}$: *Perímetro de la S.R*

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE

Veamos un caso particular:

PRISMA HEXAGONAL REGULAR



DESARROLLO DE LA SUPERFICIE TOTAL

OBSERVACIÓN:
El ***desarrollo de la superficie lateral*** *puede ser una* ***región rectangular*** *como también* ***una región cuadrada.***

Fuente de la imagen: www.ceiploreto.es/sugerencias/ceibal/Prismas/rea_del_prisma.html

PRISMA REGULAR

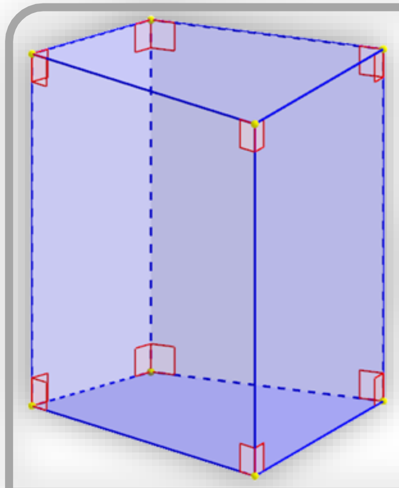
EXAMEN UNI 2017 – I

La superficie lateral de un prisma recto regular triangular es un rectángulo cuya diagonal mide $12m$ y su altura $6\sqrt{3}m$. Calcule el área total del sólido ($en\ m^2$).

$A)\ 38\sqrt{3}$ $B)\ 39\sqrt{3}$ $C)\ 40\sqrt{3}$

$D)\ 41\sqrt{3}$ $E)\ 42\sqrt{2}$

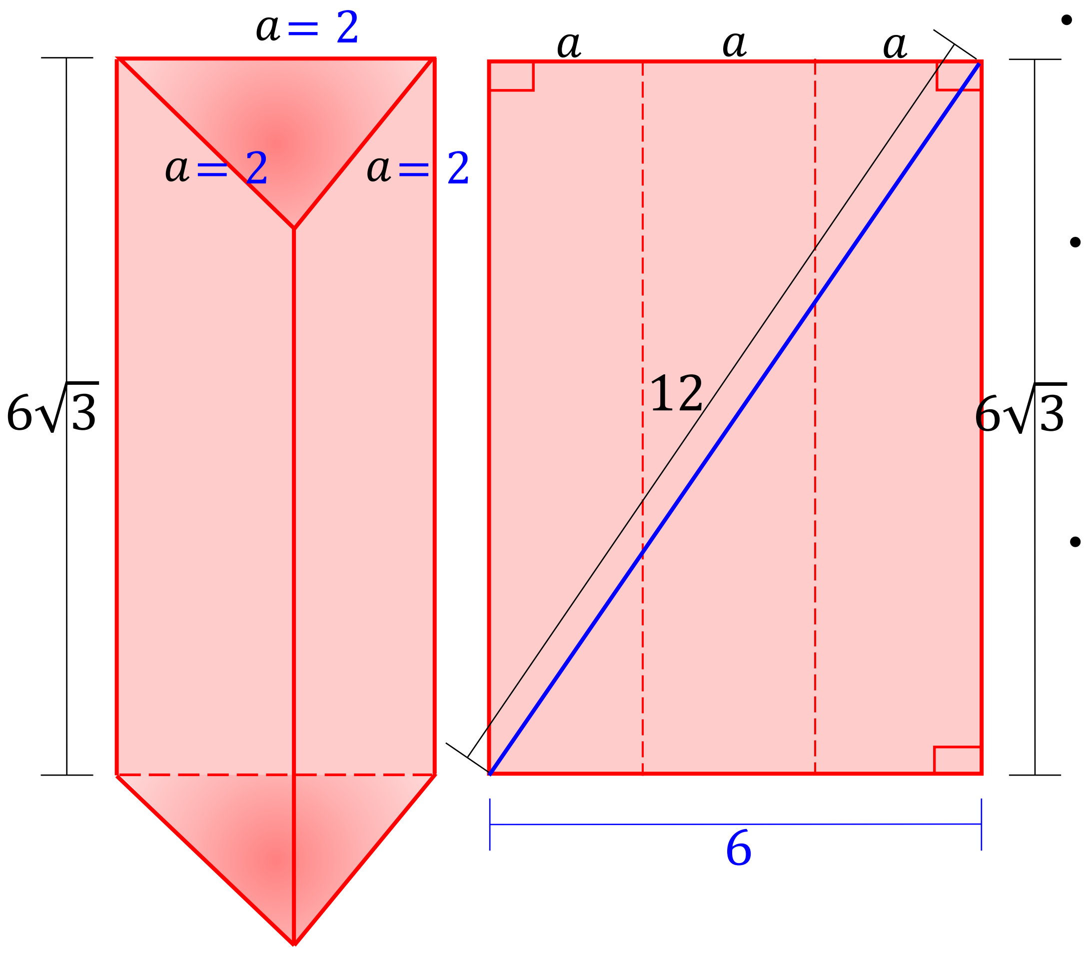
Ten en cuenta:



- Área de la superficie total

$$\boxed{\mathbb{A}_{S.T} = \mathbb{A}_{S.L} + 2\mathbb{A}_{base}}$$

Piden $\mathbb{A}_{S.T}$.



- Del desarrollo de la superficie lateral se observa:

$$3a = 6 \quad \rightarrow a = 2$$

- Luego, calculamos lo pedido:

✓ $\mathbb{A}_{S.L.} = (6)(6\sqrt{3})$

✓ $\mathbb{A}_{base} = \dfrac{(2^2)\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

- Con ello:

$$\mathbb{A}_{S.T} = 36\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

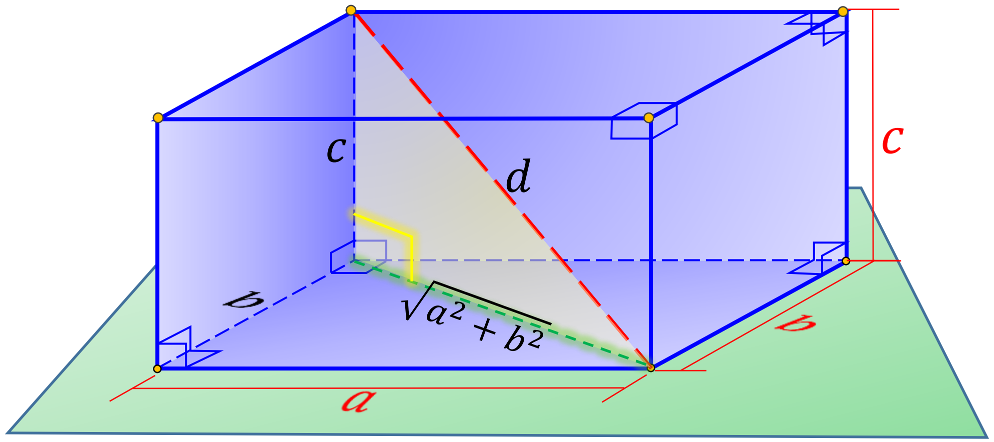
$$\boxed{\therefore \mathbb{A}_{S.T} = 38\sqrt{3}}$$

Clave **A**

PRISMA

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR

Es un paralelepípedo recto, cuyas bases son regiones rectangulares.



Del gráfico: a, b, c: Son las dimensiones del sólido.

d: Diagonal.

- **Diagonal**

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

- **Área de la superficie**

$$\boxed{\mathbb{A}_{S.T} = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}$$

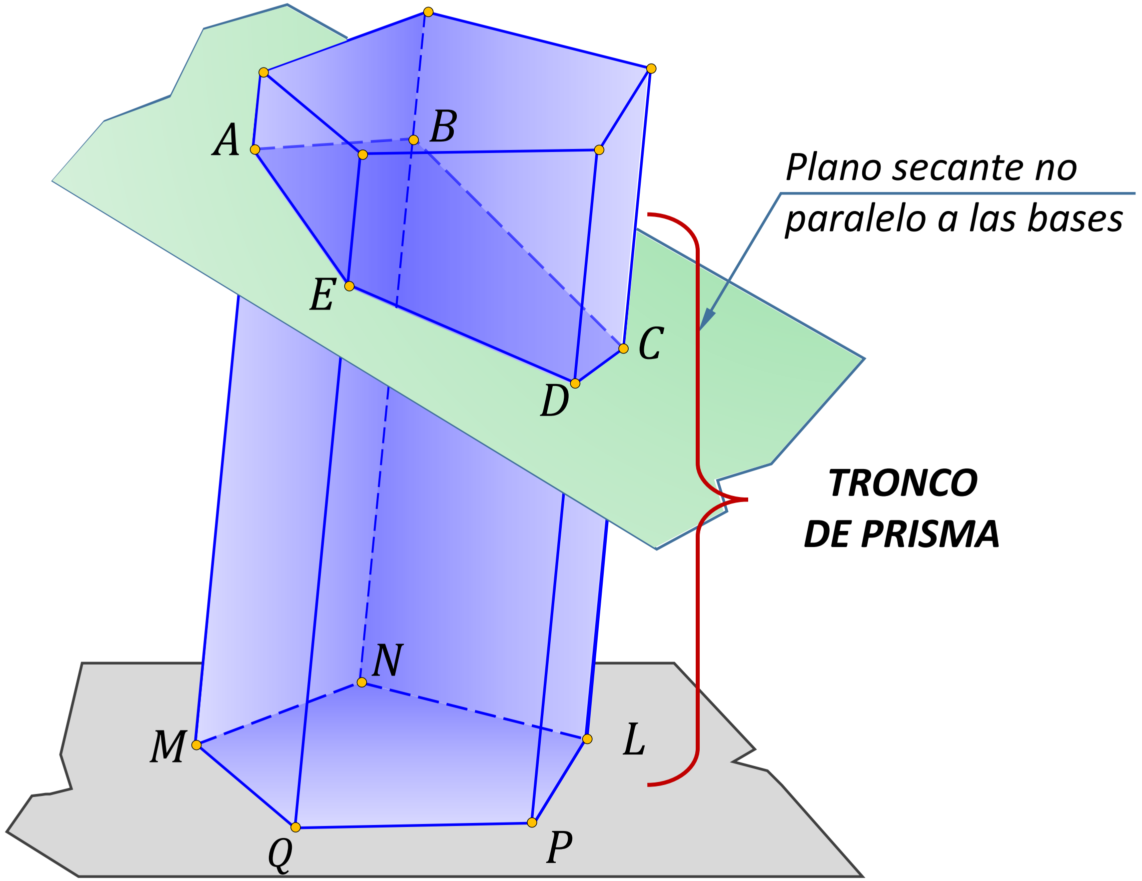
- **Volumen**

$$\boxed{\mathbb{V} = a \cdot b \cdot c}$$

TRONCO DE PRISMA

DEFINICIÓN

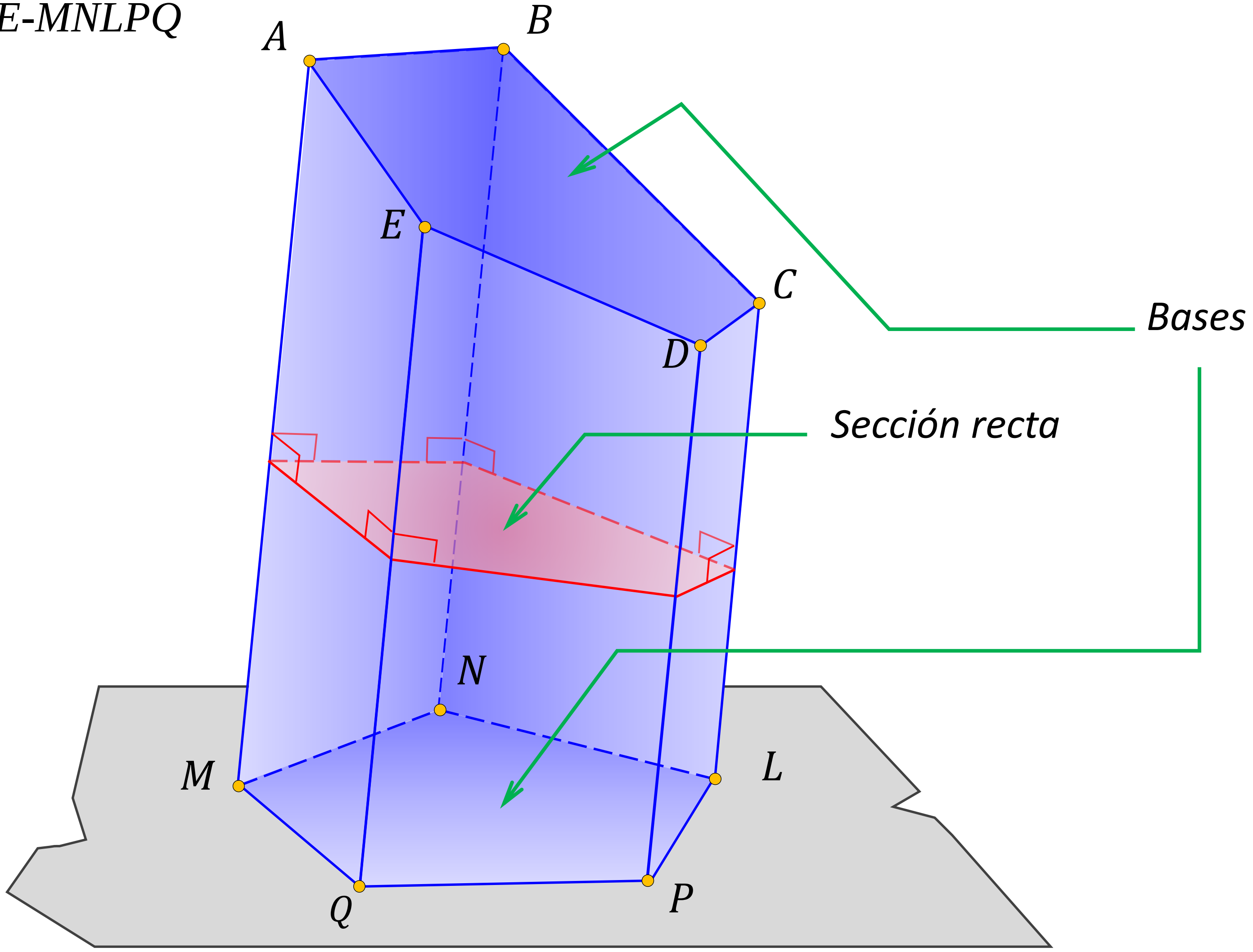
Un tronco de prisma es una porción del prisma comprendido entre una de sus bases y un plano secante al sólido no paralelo a sus bases.



TRONCO DE PRISMA

TRONCO DE PRISMA

ABCDE-MNLPQ



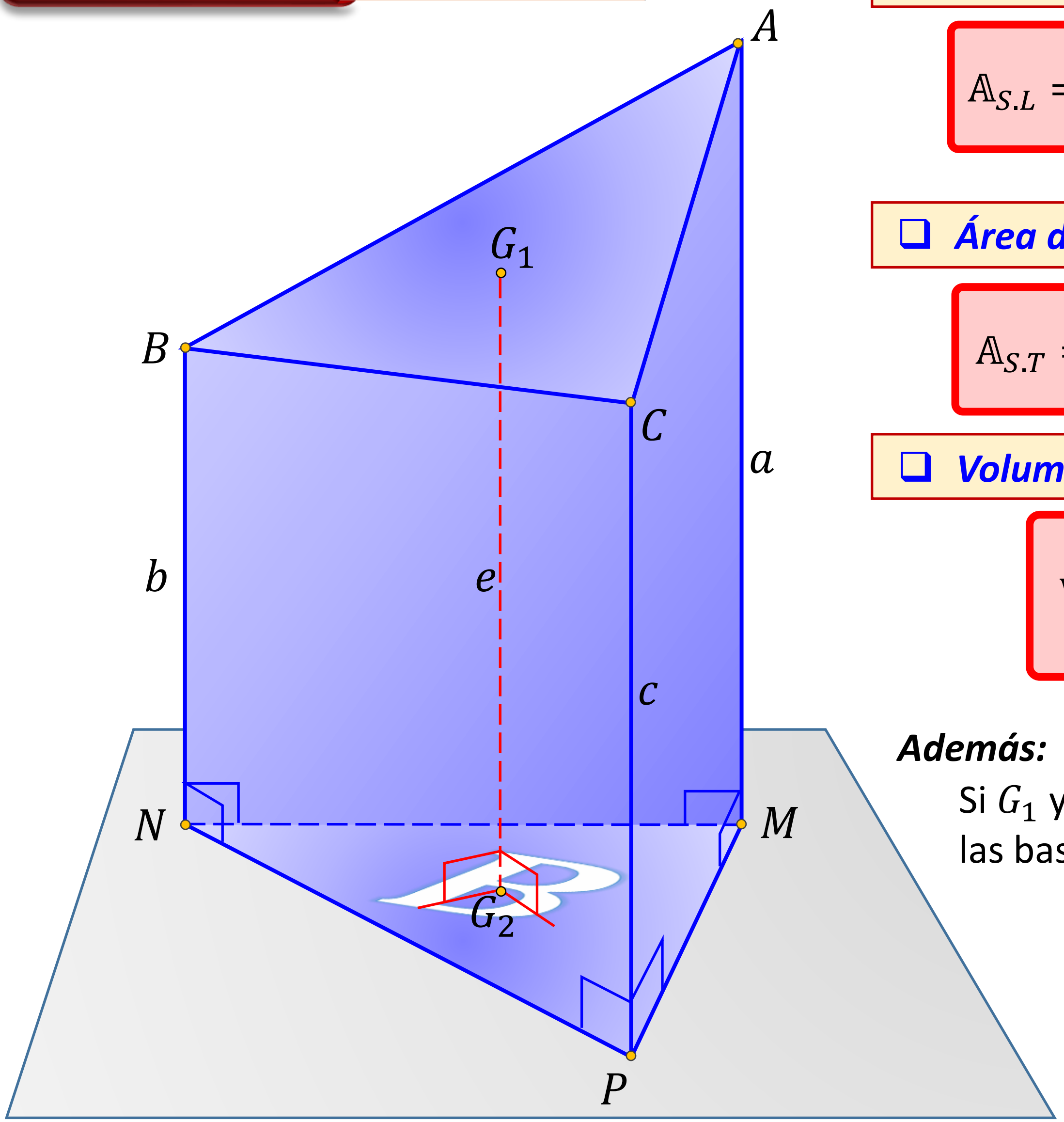
características

- Las bases en todo tronco de prisma no son paralelas.
- Las caras laterales son regiones trapeciales.
- De lo anterior se deduce que las aristas laterales son paralelas.

CURSO DE GEOMETRÍA

TRONCO DE PRISMA

TRONCO DE PRISMA — Triangular recto



❑ Área de la superficie lateral

$$\mathbb{A}_{S.L} = \sum \text{áreas de las caras laterales}$$

❑ Área de la superficie total

$$\mathbb{A}_{S.T} = \mathbb{A}_{S.L} + \sum \text{áreas de las bases}$$

❑ Volumen del tronco de prisma

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{B}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

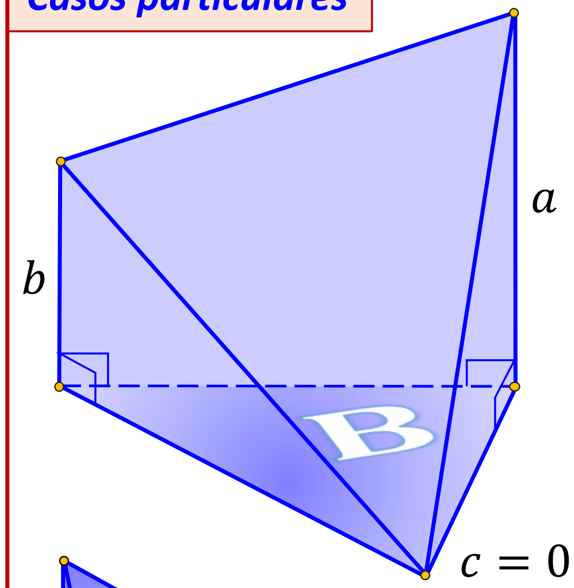
Además:

Si G_1 y G_2 son los baricentros de las bases ABC y MNP, se cumple:

$$e = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

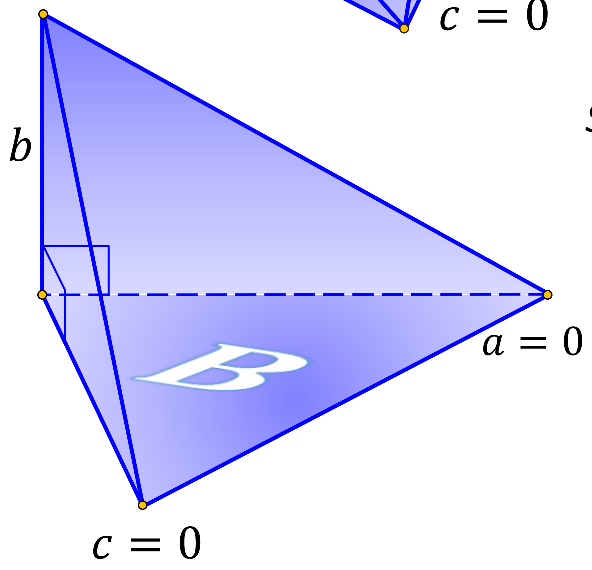
$$\mathbb{V} = \boldsymbol{B} \cdot e$$

Casos particulares



Se cumple:

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{B}\left(\frac{a+b}{3}\right)$$

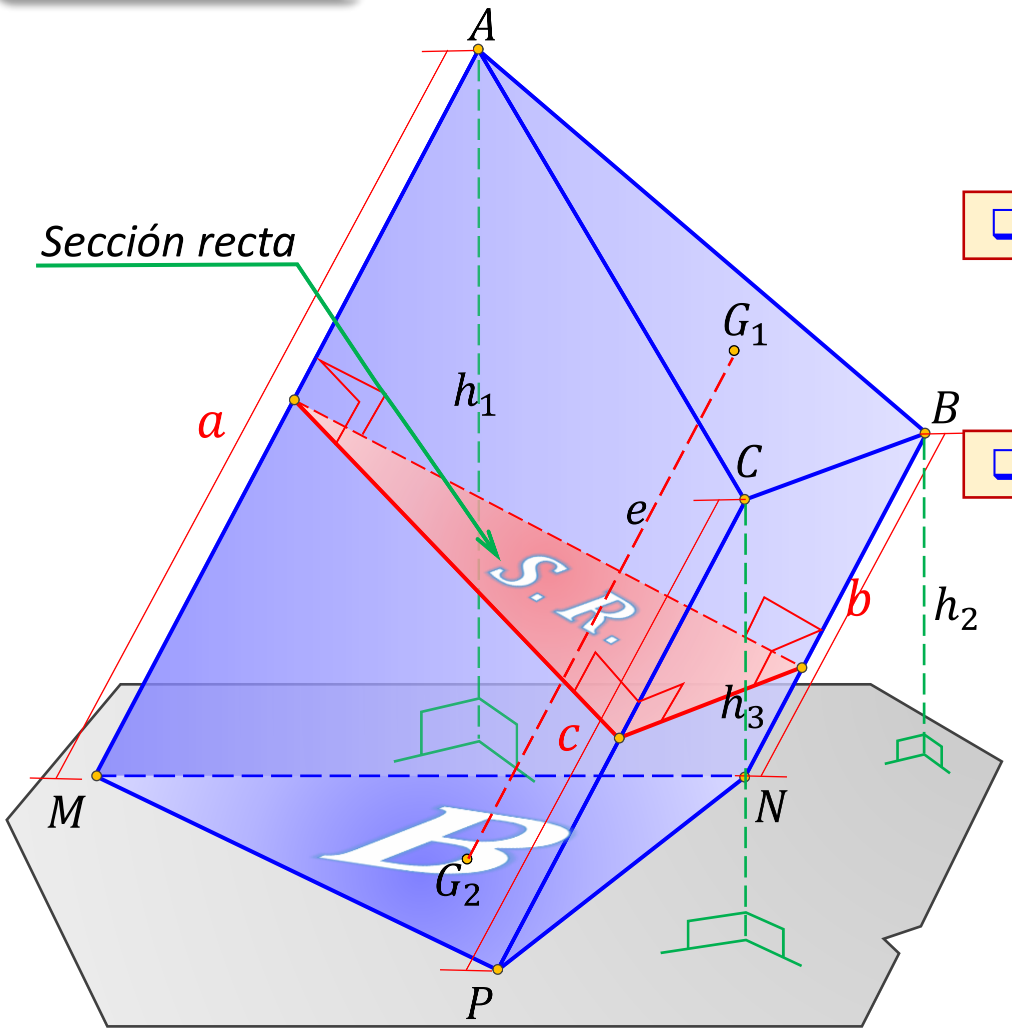


Se cumple:

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{B}\left(\frac{b}{3}\right)$$

TRONCO DE PRISMA

TRONCO DE PRISMA — **Triangular oblicuo**



Área de la superficie lateral

$$\mathbb{A}_{S.L} = \sum \text{áreas de las caras laterales}$$

Área de la superficie total

$$\mathbb{A}_{S.T} = \mathbb{A}_{S.L} + \sum \text{áreas de las bases}$$

Volumen del tronco de prisma

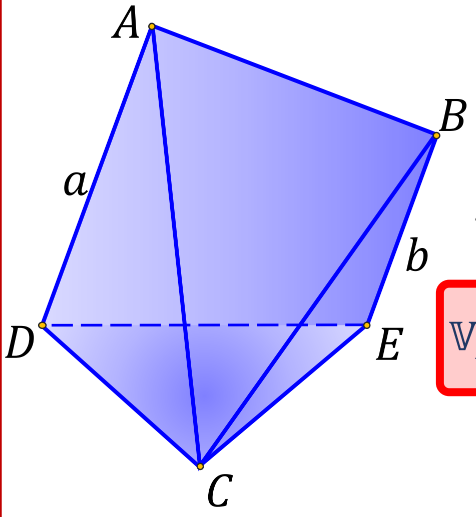
$$\mathbb{V} = \boldsymbol{B}\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\right)$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{A}_{S.R}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Además: Si G_1 y G_2 son los baricentros de las bases ABC y MNP, se cumple:

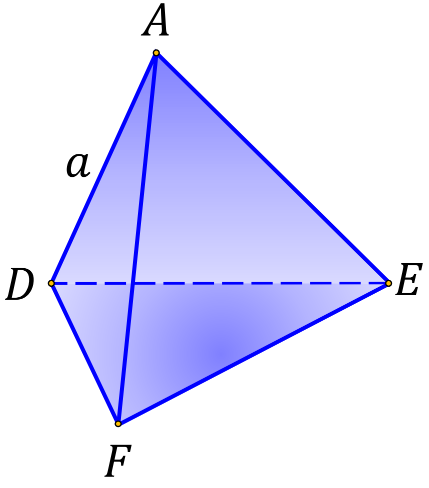
$$e = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Casos particulares



Se cumple:

$$\mathbb{V}_{ABC-DEC} = (\mathbb{A}_{S.R})\frac{(a+b)}{3}$$



Se cumple:

$$\mathbb{V}_{AEF-DEF} = (\mathbb{A}_{S.R})\frac{(a)}{3}$$

TRONCO DE PRISMA

EXAMEN UNI **2013 – II**

En un tronco de prisma triangular oblicuo, la longitud del segmento que une los baricentros de sus bases es 16 cm. Calcule la longitud de la menor arista ($en\ cm$), si éstas están en razón de 3, 4 y 5.

$A)$ 4 $B)$ 8 $C)$ 12

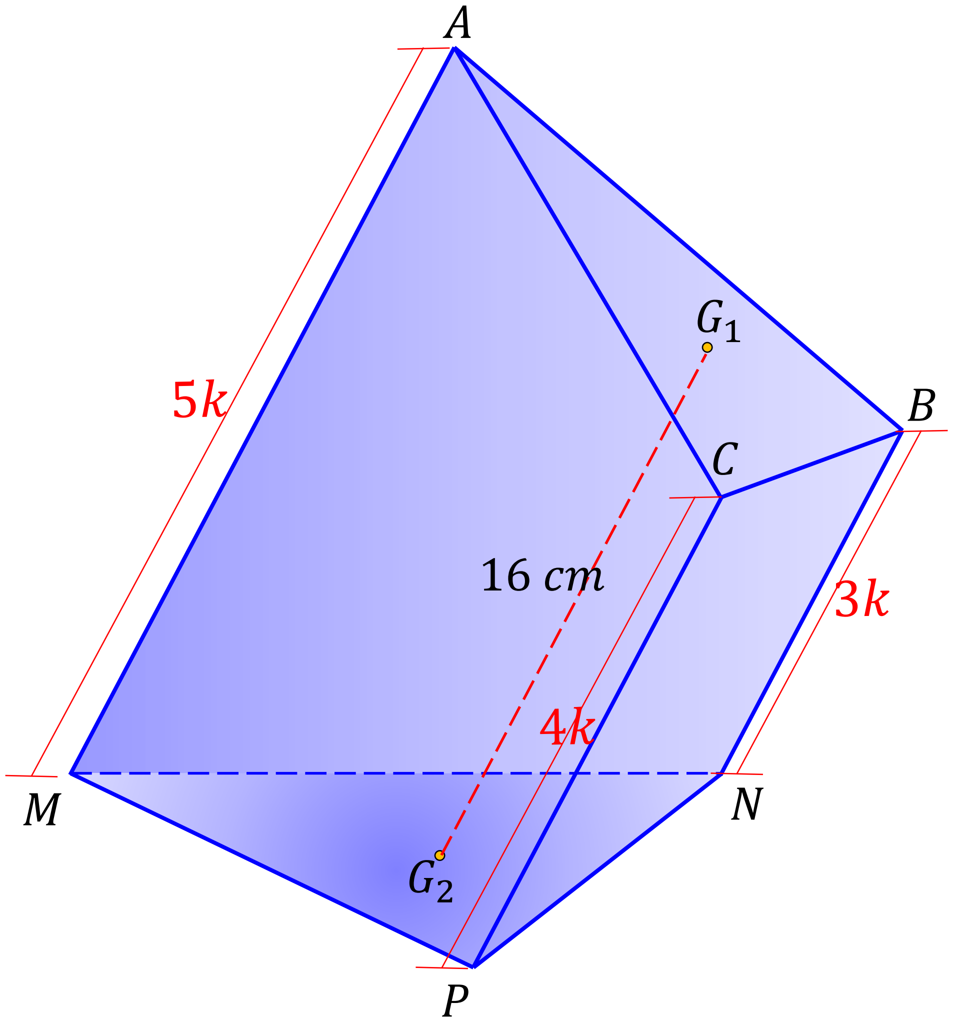
$D)$ 16 $E)$ 48

Ten en cuenta:

En el tronco de prisma triangular, si G_1 y G_2 son los baricentros de las bases ABC y MNP, se cumple:

$$G_1G_2 = \left(\frac{AM + BN + CP}{3}\right)$$

Piden $3k$



- Sean G_1 y G_2 son los baricentros de las bases ABC y MNP.

- Sabemos que:

$$16\ cm = \frac{3k + 4k + 5k}{3}$$

$$\rightarrow k = 4\ cm$$

$$\boxed{\therefore 3k = 12\ cm}$$

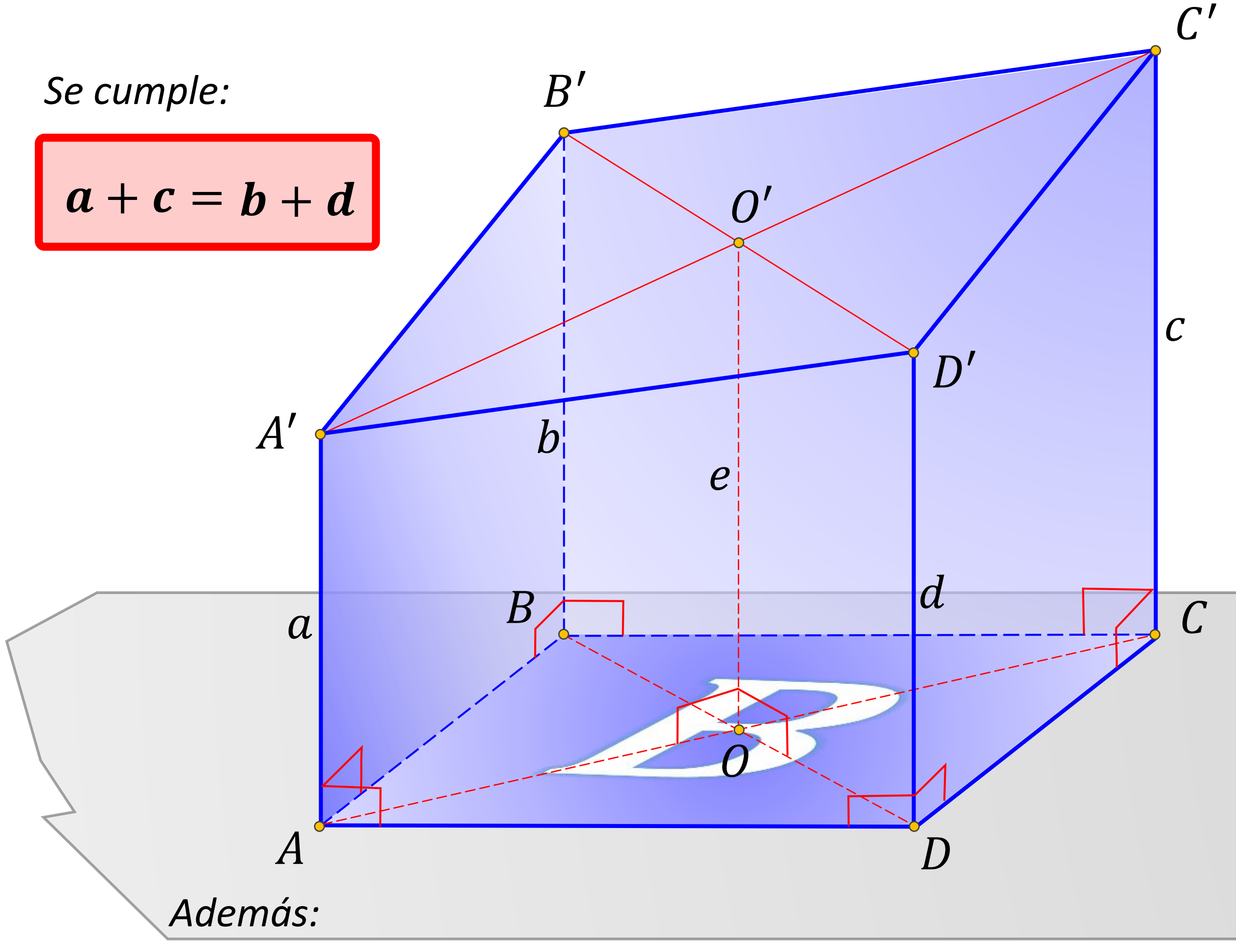
Clave **C**

TRONCO DE PRISMA

- TRONCO DE PRISMA CUADRANGULAR RECTO DE BASE PARALELOGRÁMICA

Se cumple:

$$\boldsymbol{a + c = b + d}$$

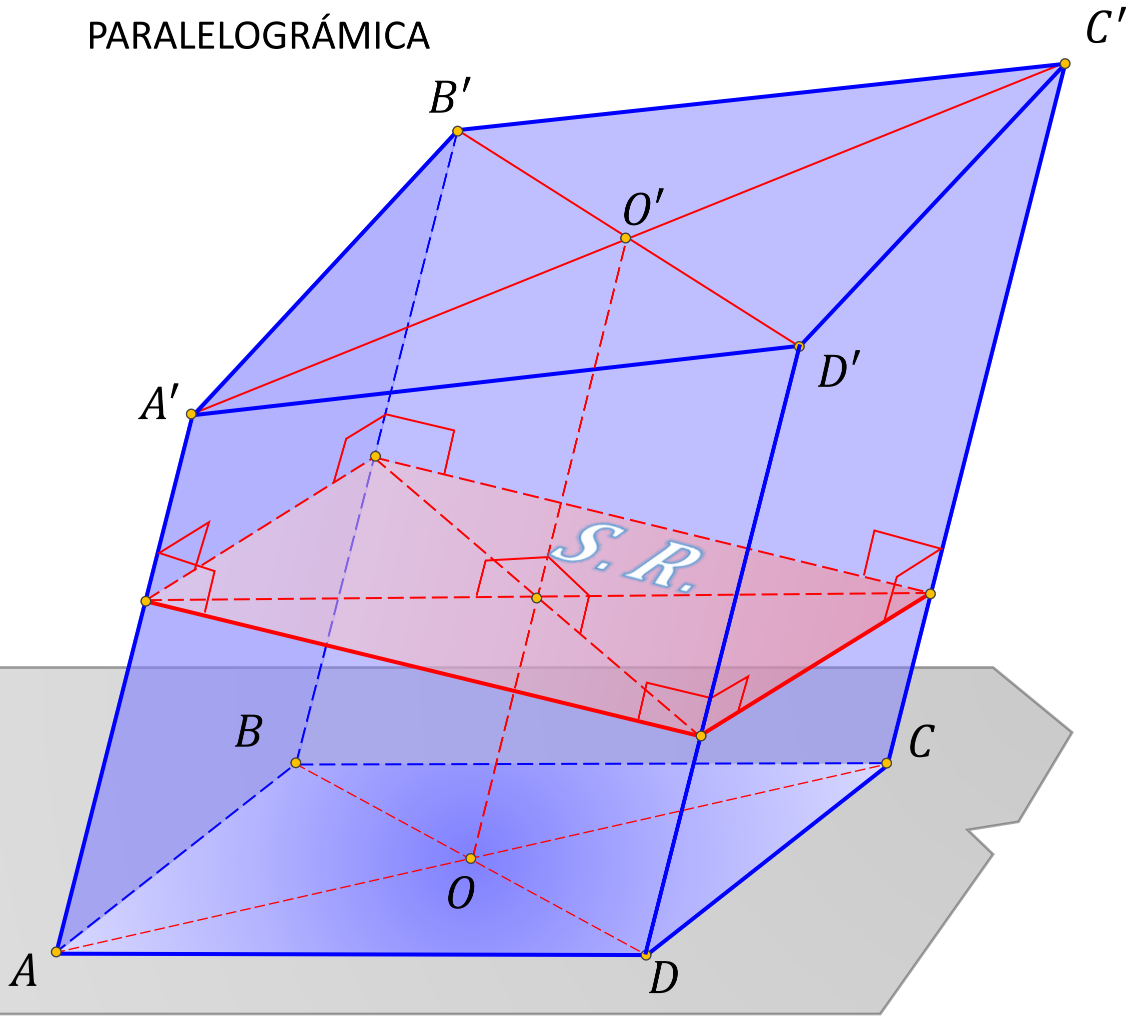


Además:

$$\boldsymbol{e = \frac{a + b + c + d}{4}}$$

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{B \cdot e}$$

- TRONCO DE PRISMA CUADRANGULAR OBLICUO DE BASE PARALELOGRÁMICA



Se cumple:

$$\mathbb{V} = (\mathbb{A}_{S.R.})(\boldsymbol{OO'})$$