OBJETIVOS:

- *Conocer la definición de ángulo triedro y su clasificación.*
- *Reconocer a los diedros que se construyen en esta figura geométrica.*
- *Aplicar adecuadamente los teoremas relacionados al triedro en los problemas.*
- *Conocer la definición de poliedro.*
- *Tener en cuenta la importancia del teorema de Euler en los poliedros.*

INTRODUCCIÓN

En las distintas construcciones que se realizan día a día en cualquier parte del mundo, desde los tiempos antiguos, el conocimiento de las propiedades geométricas de los cuerpos que conformaran dicha edificación es de vital importancia, ya que éstas permitirán darle la seguridad requerida ante cualquier eventualidad de desastre.

Es así que el estudio de los poliedros (sólidos geométricos) es para nosotros muy importante por que el ámbito de aplicación de éstos es muy amplia en el desarrollo de la ingeniería como en la vida diaria de la personas.

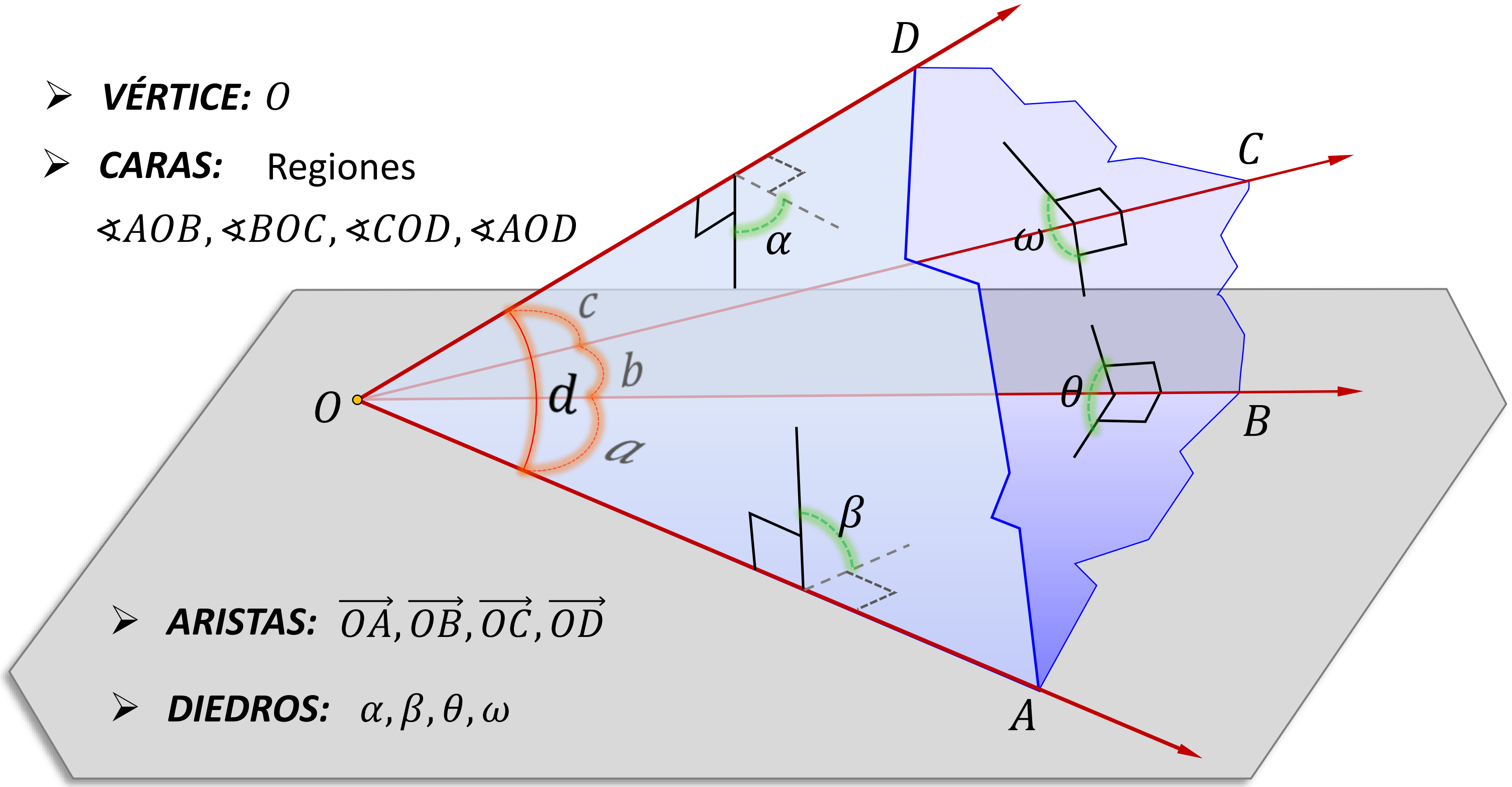
ÁNGULO POLIEDRO

DEFINICIÓN

Es la figura geométrica determinada por la unión de tres o más regiones angulares no coplanares con el vértice en común, de tal manera que dos a dos comparten un lado.

En todo ángulo poliedro convexo se cumple que la suma de las caras es mayor de 0° y menor de 360°.

- ***VÉRTICE:*** O
- ***CARAS:*** Regiones $\measuredangle AOB, \measuredangle BOC, \measuredangle COD, \measuredangle AOD$



- ***ARISTAS:*** $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$
- ***DIEDROS:*** $\alpha, \beta, \theta, \omega$

Del gráfico: $\boxed{0° < a + b + c + d < 360°}$

NOTA: *A los ángulos poliedros se les denomina según el número de caras, de tres caras ángulo triedro, de cuatro caras, ángulo tetraedro, de cinco caras, ángulo pentaedro y así sucesivamente.*

ÁNGULO TRIEDRO

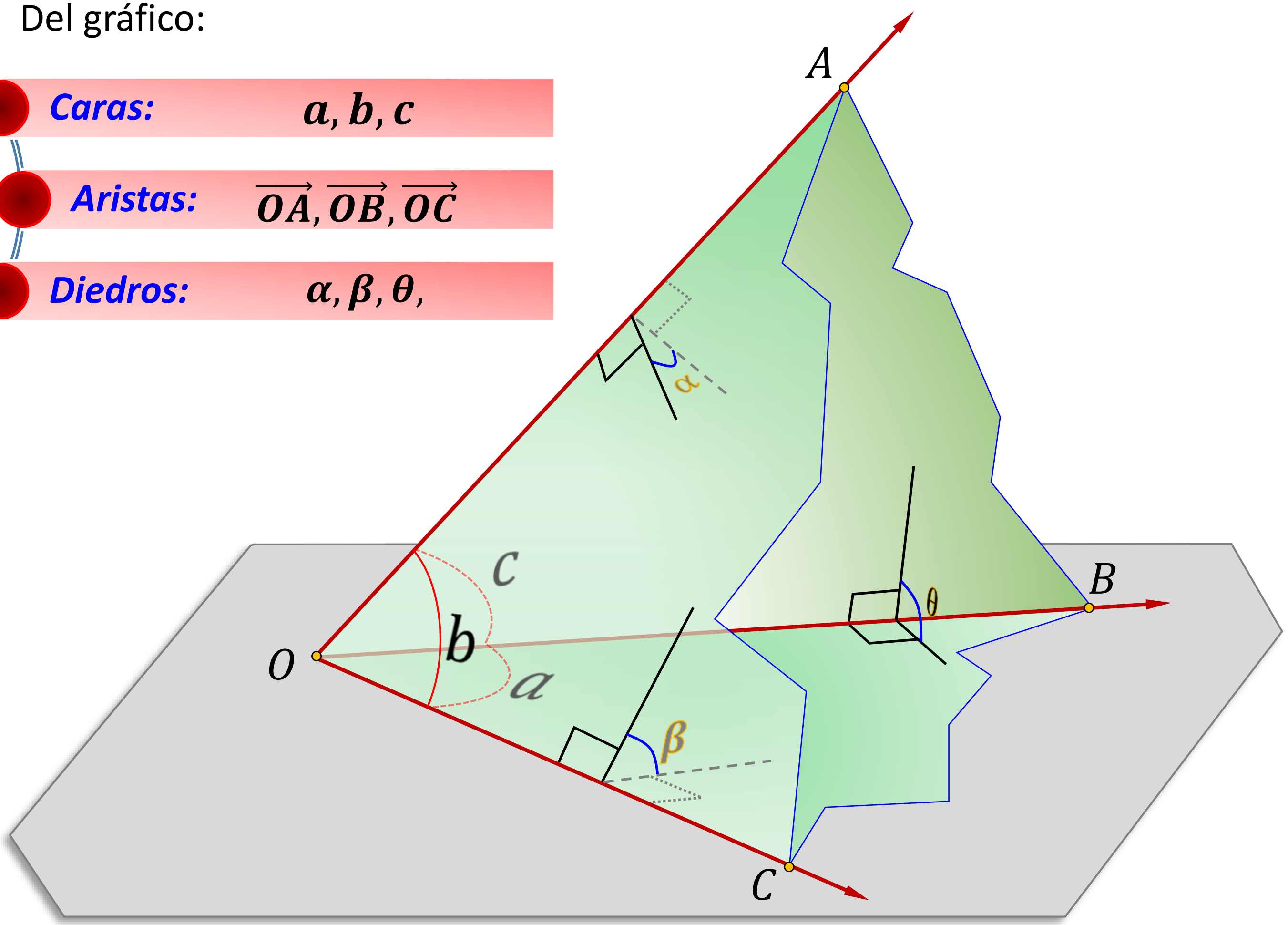
ÁNGULO TRIEDRO

DEFINICIÓN

Es un ángulo poliedro de tres caras

Del gráfico:

- **Caras:** a, b, c
- **Aristas:** $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$
- **Diedros:** $\alpha, \beta, \theta,$



A) Según la comparación entre la medida de sus caras

Triedro escaleno

- *Presenta sus tres caras de diferente medida.*

✓ $a \neq b$ ✓ $a \neq c$ ✓ $b \neq c$

Además:

• $\alpha \neq \beta$ • $\alpha \neq \theta$ • $\beta \neq \theta$

Triedro isósceles

- *Presenta sólo dos caras de igual medida.*

✓ $b = c$ ✓ $a \neq b$ ✓ $a \neq c$

Además:

• $\beta = \theta$ • $\alpha \neq \theta$ • $\alpha \neq \beta$

Triedro equilátero

- *Presenta sus tres caras de igual medida.*

✓ $a = b = c$

Además:

• $\alpha = \beta = \theta$

ÁNGULO TRIEDRO

B) Según cuantas caras rectas tiene

TRIEDRO RECTÁNGULO

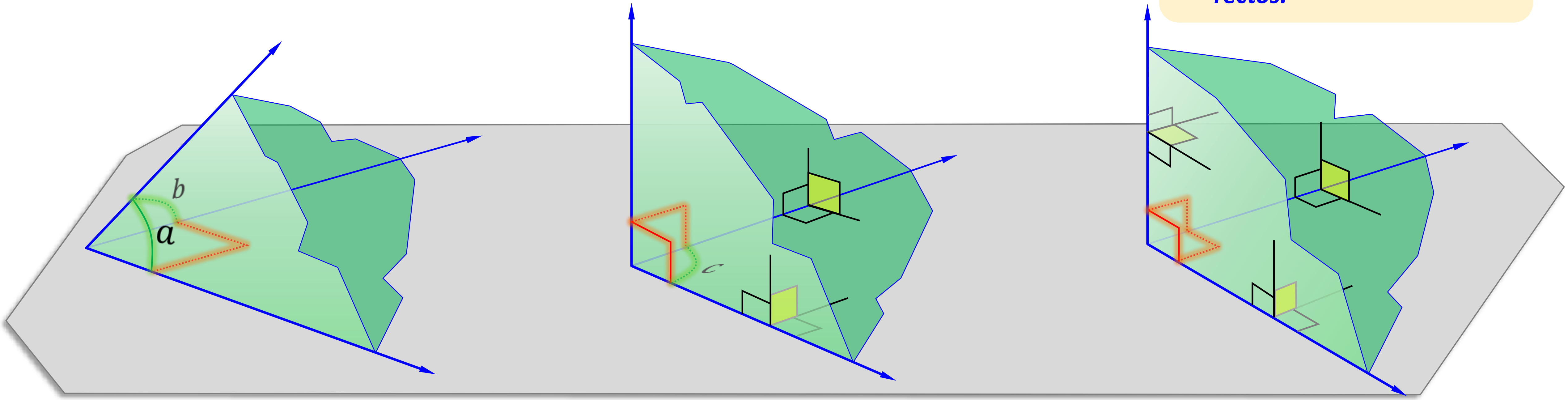
- *Presenta sola una cara recta.*

TRIEDRO BIRRECTÁNGULO

- *Presenta sólo dos caras rectas*

TRIEDRO TRIRRECTÁNGULO

- *Sus tres caras y sus tres diedros respectivos son rectos.*



Se cumple:

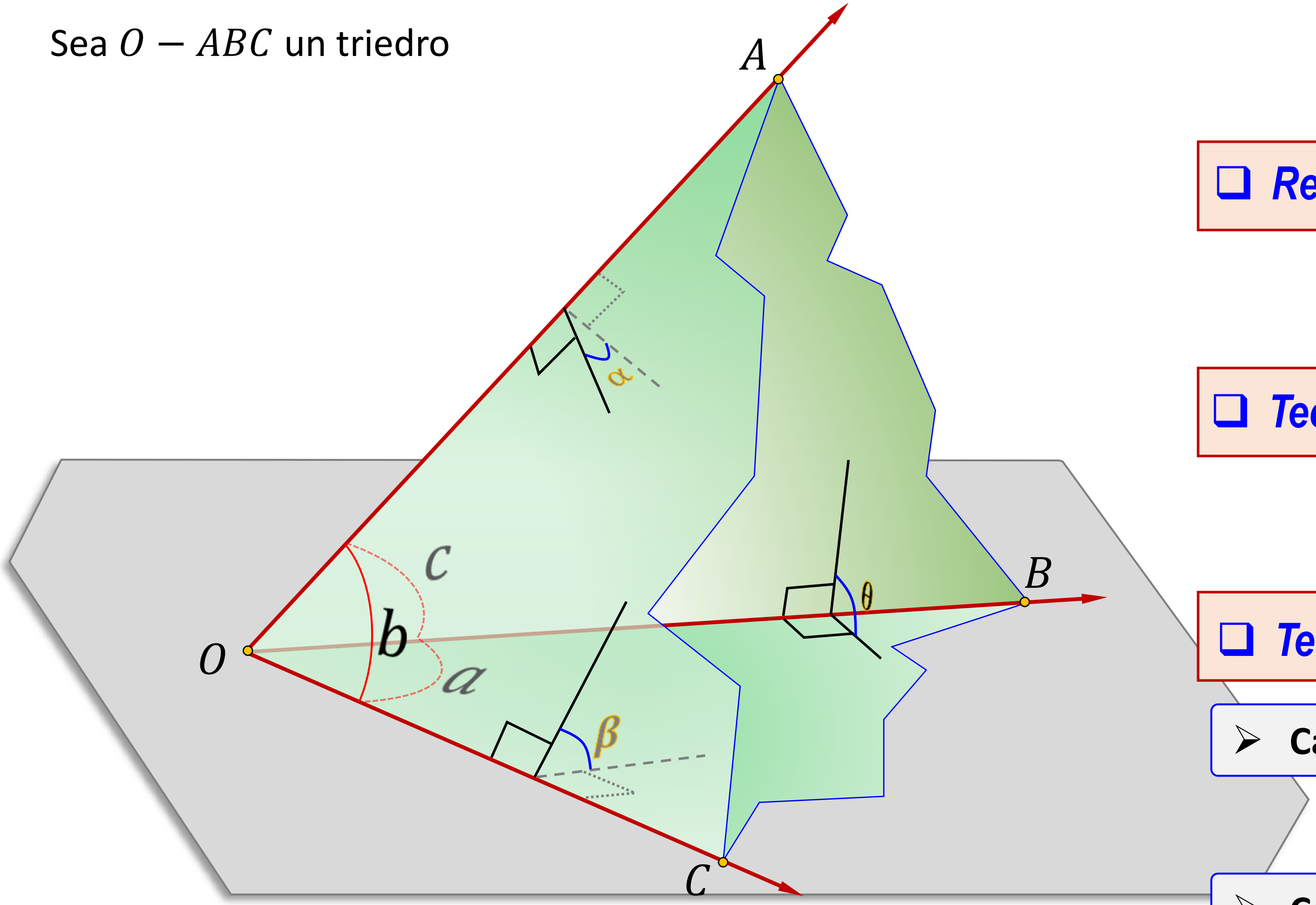
$a \neq 90°$ $\quad$ $b \neq 90°$

Se cumple: $\quad$ $c \neq 90°$

ÁNGULO TRIEDRO

TEOREMAS — Generales

Sea $O-ABC$ un triedro



❑ Respecto a las caras

$$0° < a+b+c < 360°$$

$$b-c < a < b+c$$

❑ Respecto a los diedros

$$180° < \alpha+\beta+\theta < 540°$$

$$\beta+\theta < \alpha+180°$$

❑ Teorema de correspondencia

Si $c < b \iff \beta < \theta$

❑ Teorema de coseno

➢ **Caso 1**

$$\cos(a) = \cos(b)\cdot\cos(c) + sen(b)\cdot sen(c)\cdot\cos(\alpha)$$

➢ **Caso 2**

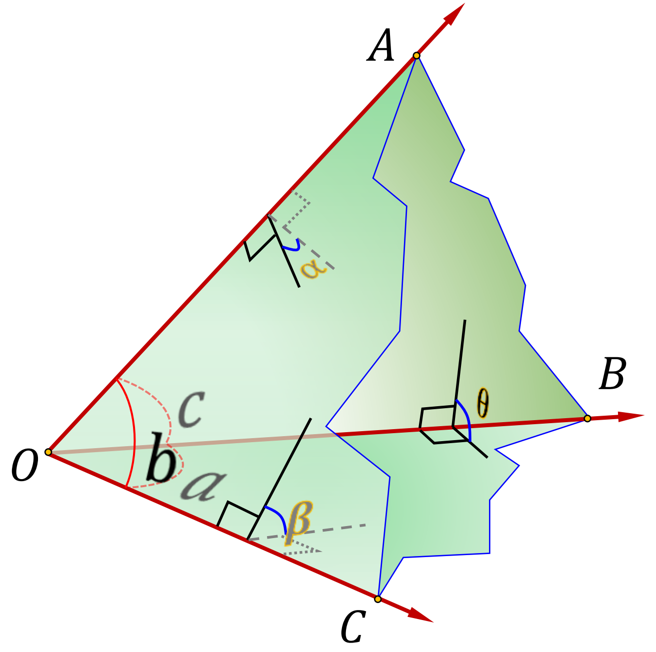
$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cdot\cos(\theta) + sen(\beta)\cdot sen(\theta)\cdot\cos(a)$$

EXAMEN UNI **2009 – II**

En un ángulo triedro, dos caras miden 45° y el ángulo diedro entre ellas mide 90°. Entonces la otra cara mide

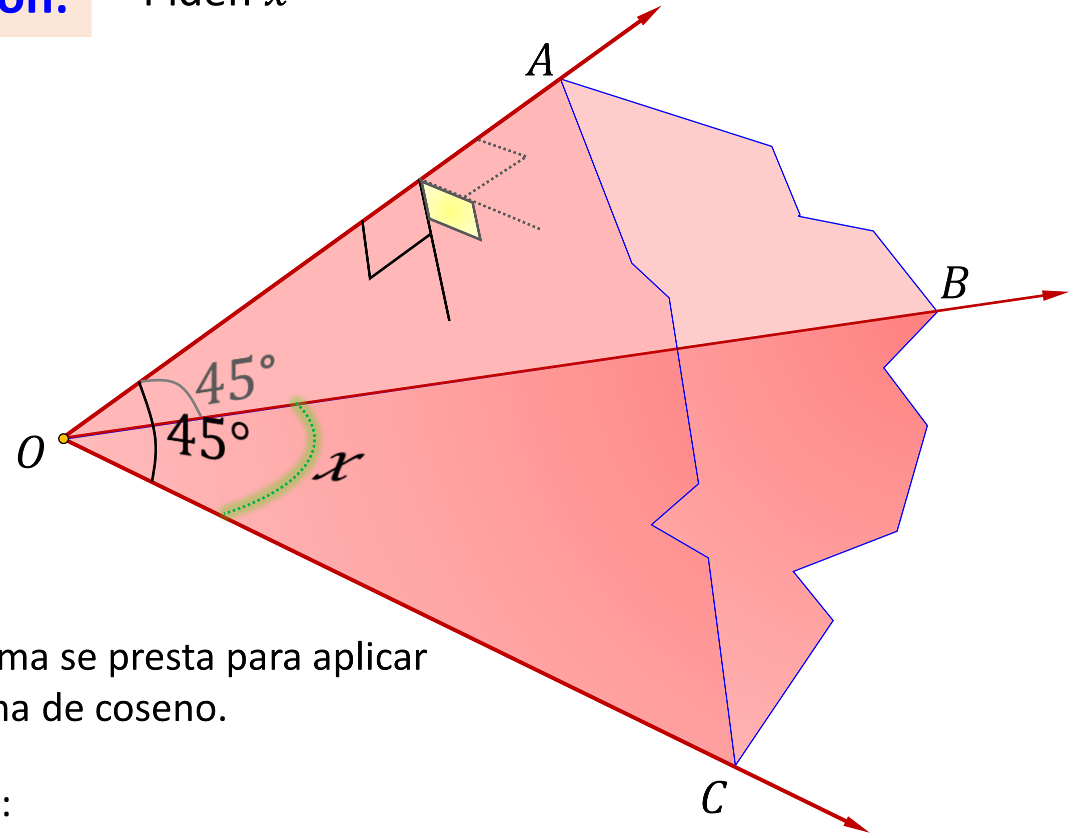
$A)$ 45° $B)$ 60° $C)$ 75°

$D)$ 90° $E)$ 120°



$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(\alpha)$$

Resolución: Piden x



- El problema se presta para aplicar el teorema de coseno.
- Entonces:

$$cos(x) = cos45° \cdot cos45° + \cancel{sen45° \cdot sen45° \cdot \underbrace{cos90°}_{0}}$$

$$cos(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \rightarrow cos(x) = \frac{1}{2}$$

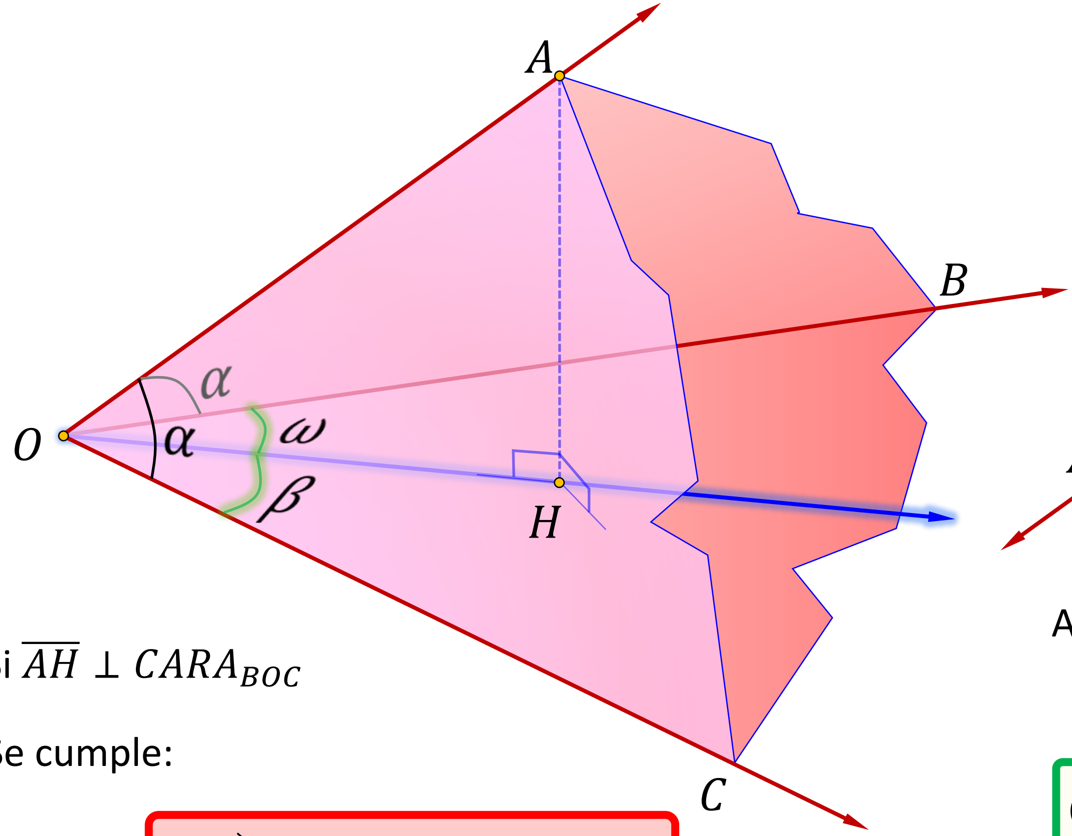
$$\boxed{\therefore x = 60°}$$

Clave **B**

ÁNGULO TRIEDRO

TEOREMAS — Particulares

Sea $O-ABC$ un triedro isósceles



Si $\overline{AH} \perp CARA_{BOC}$

Se cumple:

$\boxed{\overrightarrow{OH}\text{: Bisectriz del } \measuredangle BOC}$

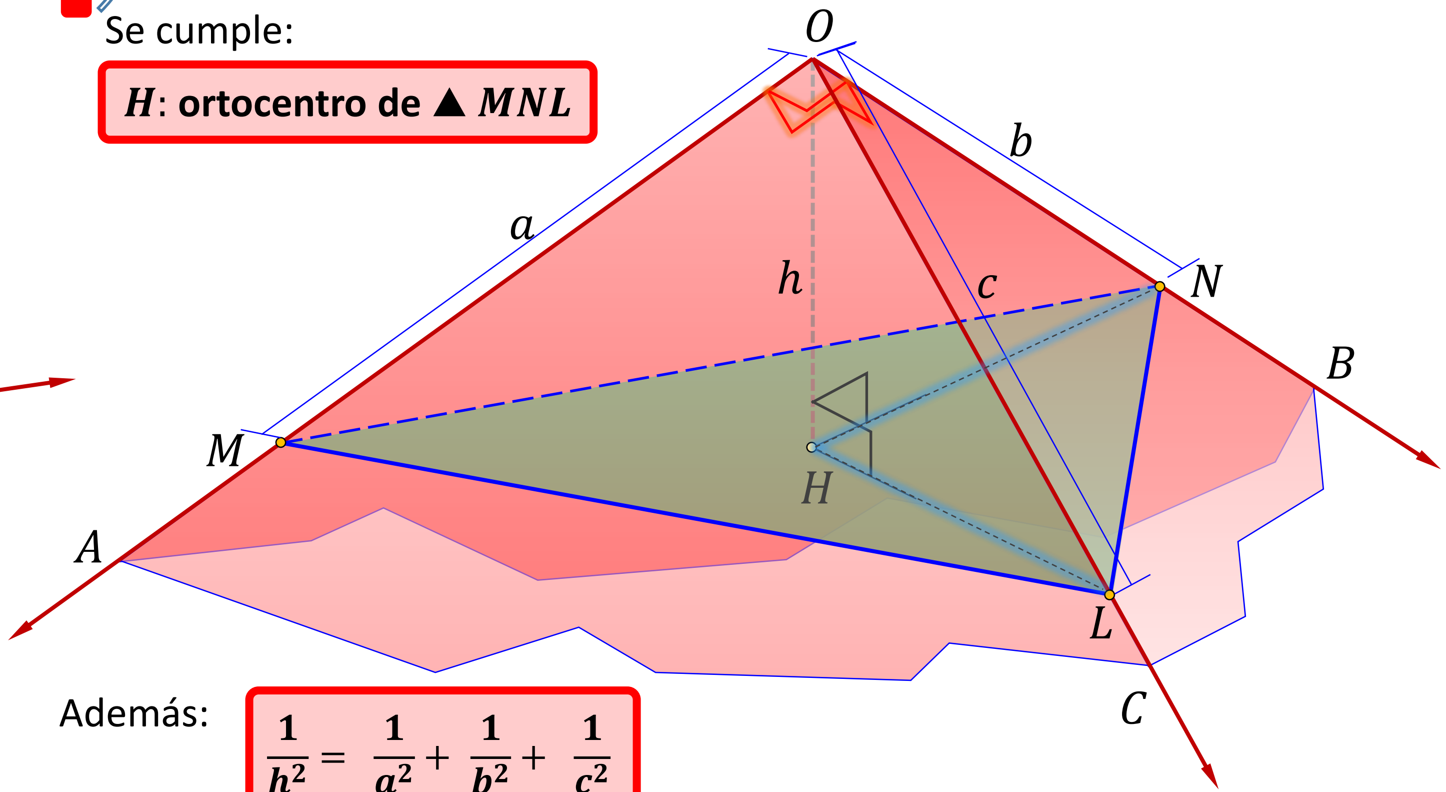
$\rightarrow \beta = \omega$

Sea $O-ABC$ un triedro trirrectángulo

Si $\overline{OH} \perp \blacktriangle MNL$

Se cumple:

$\boxed{H\text{: ortocentro de } \blacktriangle MNL}$



Además: $\boxed{\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$

$\boxed{(\mathbb{A}_{NOL})^2 = (\mathbb{A}_{NHL})(\mathbb{A}_{NML})}$ $\boxed{(\mathbb{A}_{MOL})^2 = (\mathbb{A}_{MHL})(\mathbb{A}_{NML})}$ $\boxed{(\mathbb{A}_{MON})^2 = (\mathbb{A}_{MHN})(\mathbb{A}_{NML})}$

De éstas expresiones se deduce: $\boxed{(\mathbb{A}_{MNL})^2 = (\mathbb{A}_{MOL})^2 + (\mathbb{A}_{NOL})^2 + (\mathbb{A}_{MON})^2}$

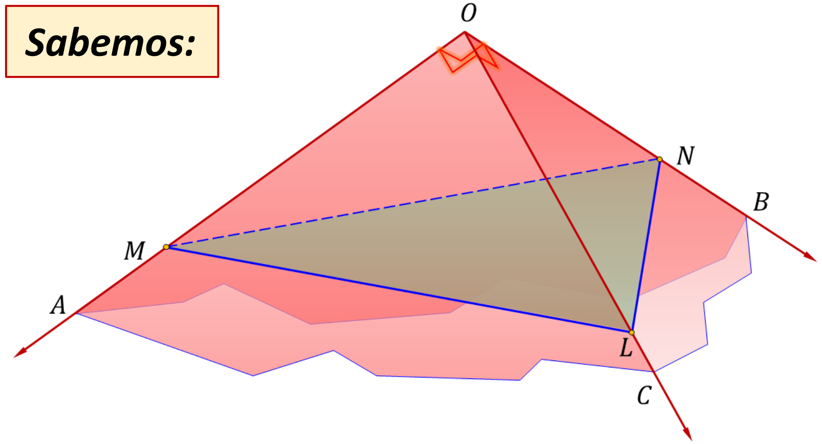
EXAMEN UNI **2017 – I**

En el triedro trirrectángulo $O-ABC$; si las áreas de las caras OAB, OBC y OAC miden respectivamente $\mathbb{S}, 2\mathbb{S}$ y $3\mathbb{S}$. Entonces el área de la región que determina un plano secante a las aristas y que pasa por A, B y C es

$A)\ 2\mathbb{S}\sqrt{2}$ $\quad B)\ 3\mathbb{S}\sqrt{2}$ $\quad C)\ \mathbb{S}\sqrt{14}$

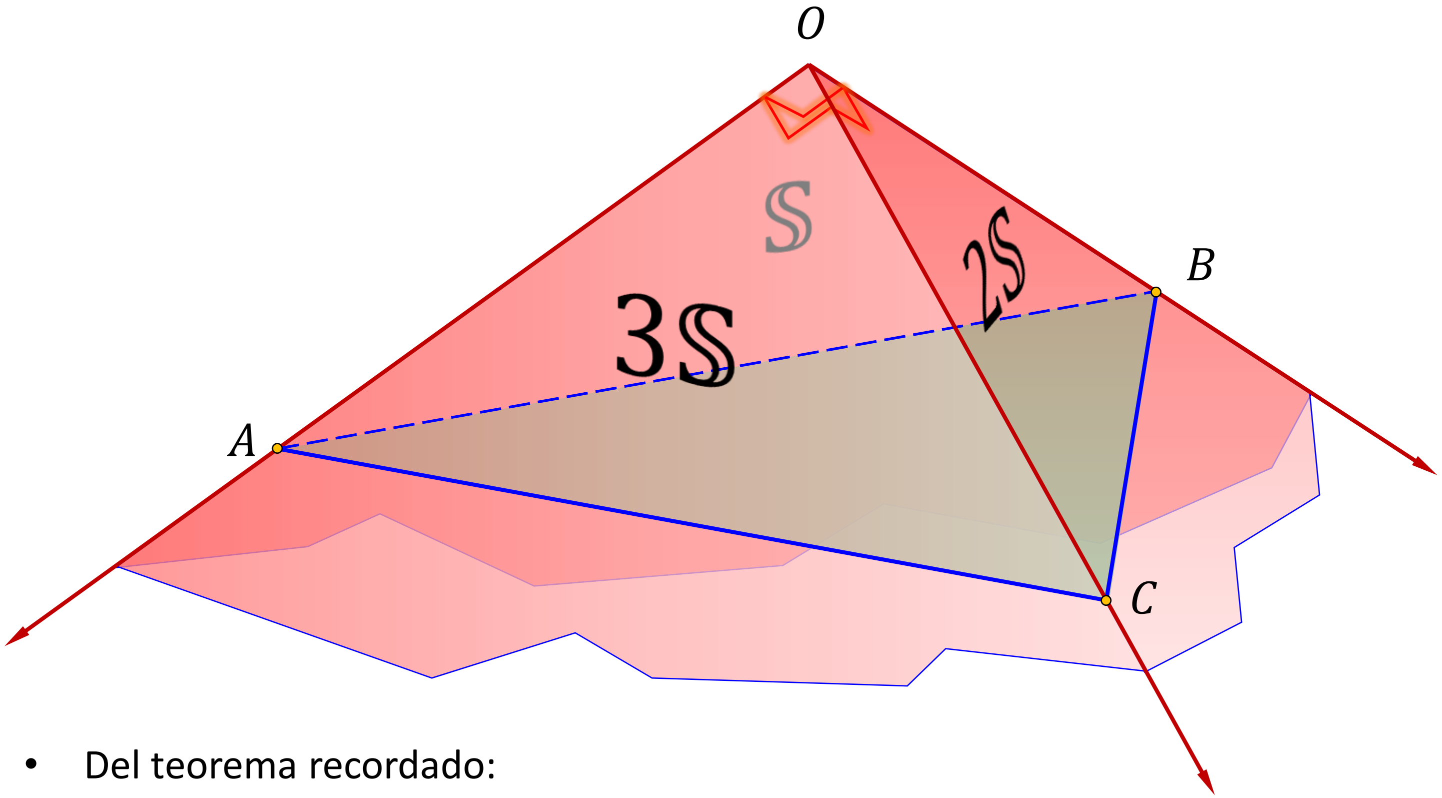
$D)\ 2\mathbb{S}\sqrt{3}$ $\quad E)\ \mathbb{S}\sqrt{15}$

Sabemos:



$$(\mathbb{A}_{MNL})^2 = (\mathbb{A}_{MOL})^2 + (\mathbb{A}_{NOL})^2 + (\mathbb{A}_{MON})^2$$

Resolución: Piden $\mathbb{A}_{ABC}$



- Del teorema recordado:

$$(\mathbb{A}_{ABC})^2 = (\mathbb{A}_{OAB})^2 + (\mathbb{A}_{OBC})^2 + (\mathbb{A}_{OAC})^2$$

$$(\mathbb{A}_{ABC})^2 = (\mathbb{S})^2 + (2\mathbb{S})^2 + (3\mathbb{S})^2$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{ABC} = 14\mathbb{S}^2$$

$$\boxed{\therefore \mathbb{A}_{ABC} = \sqrt{14}\mathbb{S}}$$

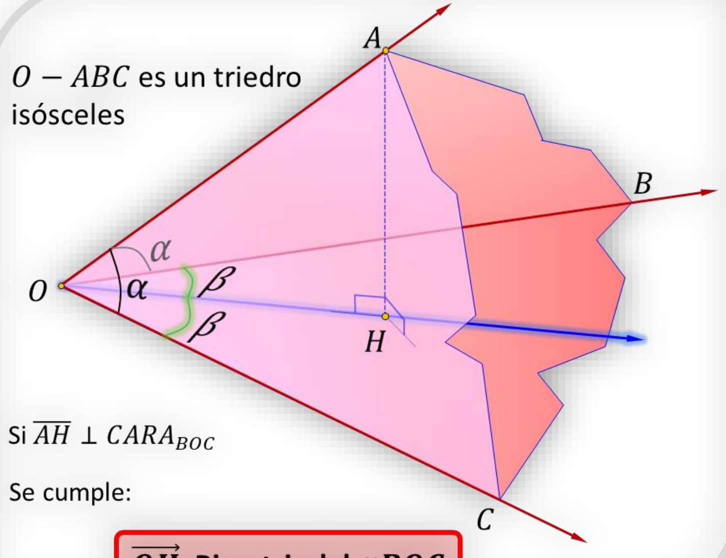
Clave C

EXAMEN UNI 2012 – I

En un triedro $O-ABC$, las caras, $B\hat{O}C, A\hat{O}B$ y $A\hat{O}C$ miden $90°, 60°$ y $60°$ respectivamente. Entonces la tangente del ángulo que determina OA con el plano OBC es:

$A)\ \frac{1}{3}$ $B)\ \frac{1}{2}$ $C)\ 1$

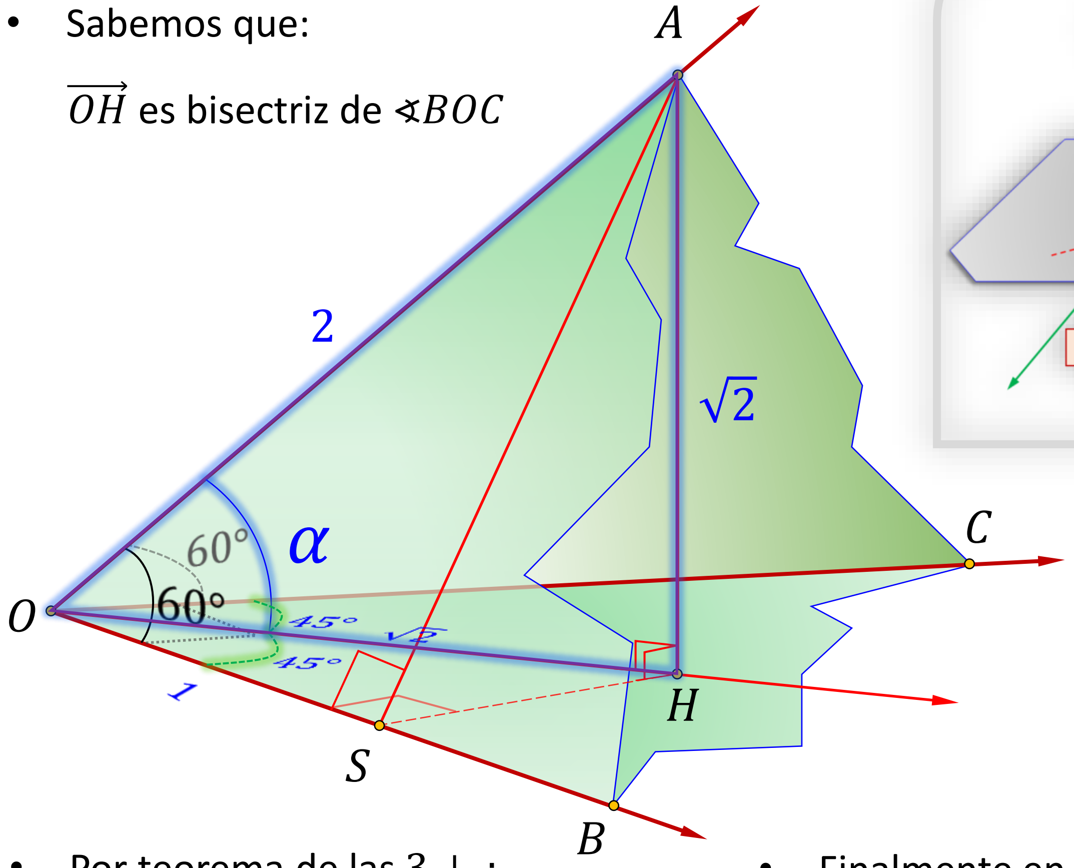
$D)\ 2$ $E)\ 3$

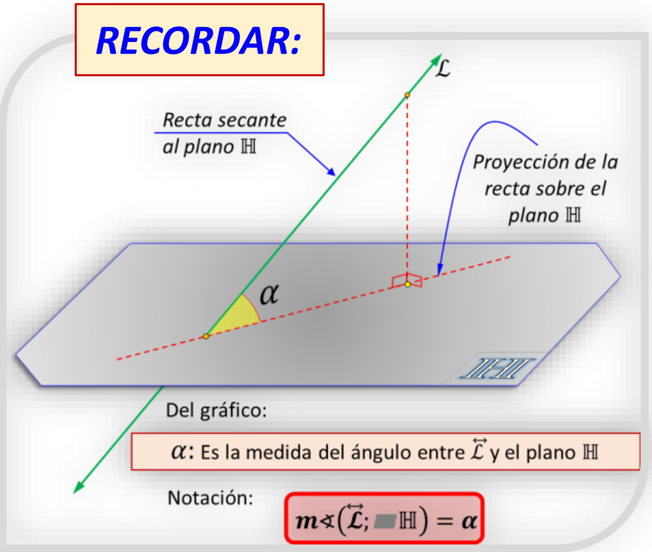


Resolución: Piden $tan\alpha$

- Sabemos que:

  $\overrightarrow{OH}$ es bisectriz de $\measuredangle BOC$





- Por teorema de las 3 $\perp_s$:

  $\triangle OHS$ y $\triangle OAS$ son notables

  $\rightarrow OH = \sqrt{2}, \quad OS = 1, \quad OA = 2$

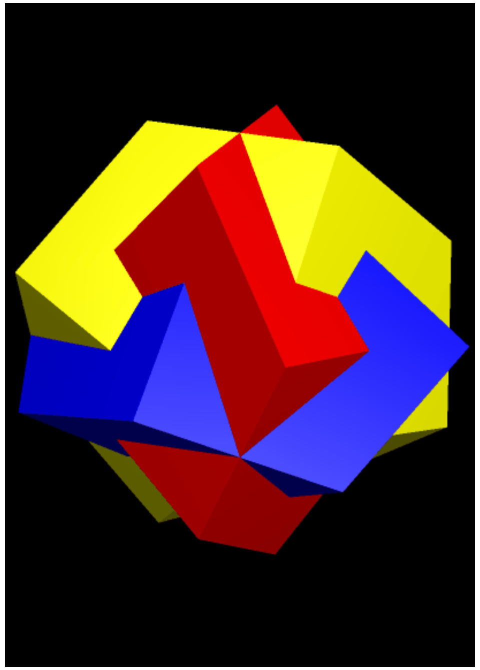
- Finalmente en $\triangle OAH$:

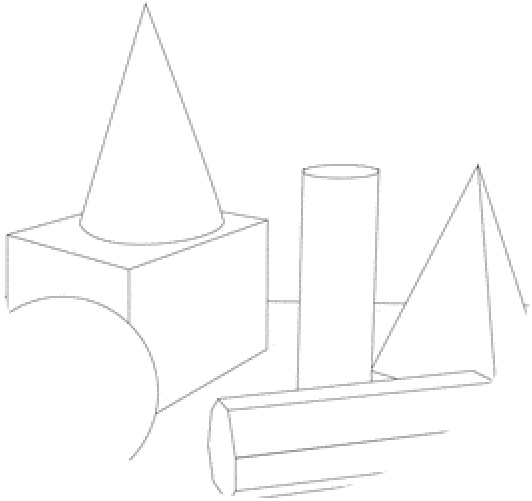
  $AH = \sqrt{2}$

  $\boxed{\therefore\ tan\alpha = 1}$

Clave C

POLIEDRO

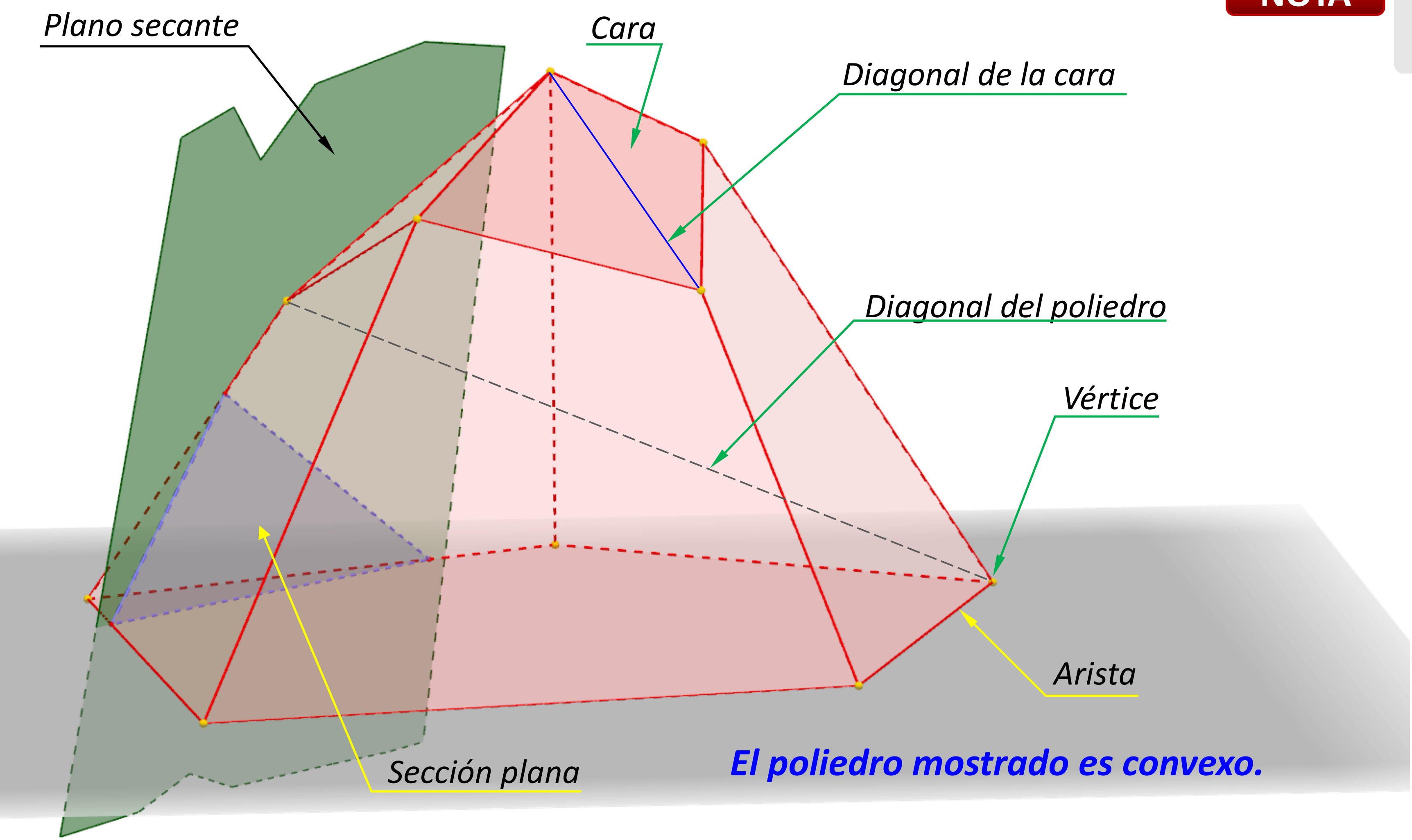




POLIEDRO

DEFINICIÓN ***Es el sólido geométrico que esta limitado por cuatro o más regiones poligonales no coplanares .***

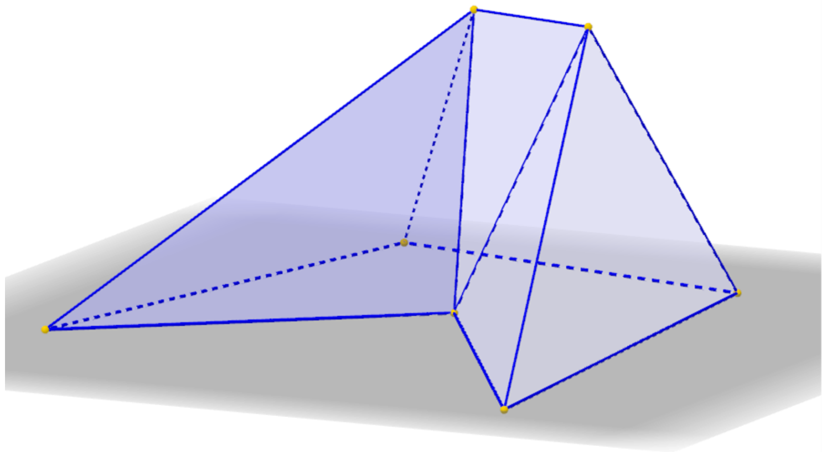
Del gráfico:



El poliedro mostrado es convexo.

NOTA *A los poliedros se les nombra según la cantidad de caras, de 4 caras es tetraedro, de 5 caras es pentaedro, y así sucesivamente.*

A continuación se muestra un poliedro no convexo.



POLIEDRO

TEOREMAS

TEOREMA DE EULER

Sea:

C: Número de caras
V: Número de vértices
A: Número de aristas

Se cumple:

$$\boxed{\boldsymbol{C + V = A + 2}}$$

Aplicación:

Un poliedro tiene 8 caras y 16 aristas, indique cuántos vértices tiene dicho poliedro.

Resolución: Piden V

Por teorema de Euler: $C = 8,\ A = 16$

$$\rightarrow 8 + V = 16 + 2$$

$$\therefore \boldsymbol{V = 10}$$

CÁLCULO DEL NÚMERO DE ARISTAS

Sea:

A: Número de aristas
C_1: cantidad de caras de l_1 lados
C_2: cantidad de caras de l_2 lados
C_3: cantidad de caras de l_3 lados
$\vdots$ $\vdots$
C_n: cantidad de caras de l_n lados

Se cumple:

$$\boxed{\boldsymbol{A = \frac{(C_1)(l_1) + (C_2)(l_2) + (C_3)(l_3) + \cdots (C_n)(l_n)}{2}}}$$

SUMA DE MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS DE LAS CARAS DE UN POLIEDRO $(S_{\sphericalangle C})$

Sea:

C: Número de caras
V: Número de vértices
A: Número de aristas

Se cumple:

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\sphericalangle C} = 360°(V - 2) = 360°(A - C)}}$$

Aplicación:

Un poliedro tiene 1 cara triangular, 6 caras cuadrangulares y 1 cara pentagonal, indique cuántas aristas tiene dicho poliedro.

Resolución: Piden A

Aplicamos el teorema del número de aristas.

$$A = \frac{(1)(3) + (6)(4) + (1)(5)}{2}$$

$$A = \frac{3 + 24 + 5}{2} = \frac{32}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{A = 16}$$

POLIEDRO

NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLIEDRO

Sea:

NDP: Número de diagonales del poliedro

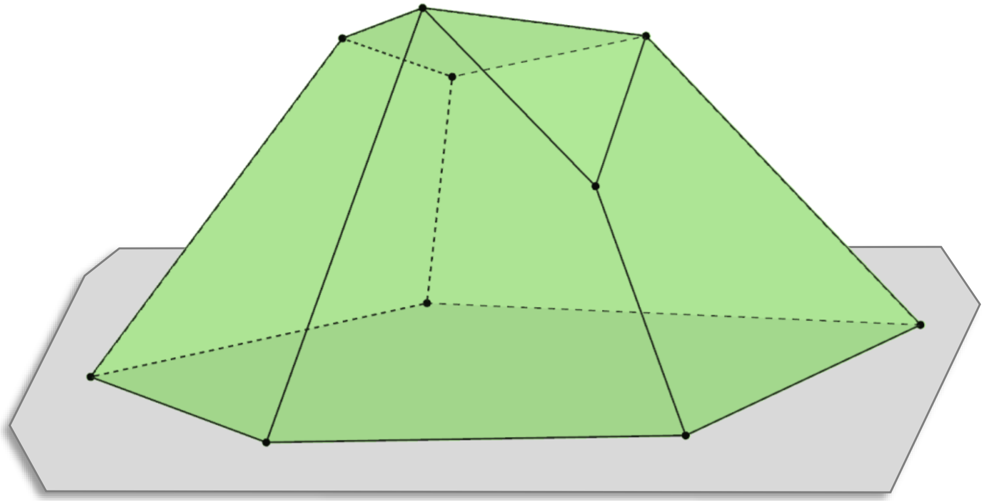
V: Número de vértices

A: Número de aristas

$SNDC$: Suma del número de diagonales de todas las caras

Se cumple:

$$\boldsymbol{NDP = \frac{V(V-1)}{2} - A - SNDC}$$



Aplicación:

Del gráfico mostrado calcule la cantidad de diagonales del poliedro.

Resolución: Piden NDP

Contabilizamos el número de vértices y el de aristas, tenemos:

$$V = 10 \qquad A = 16$$

Además se observa que las diagonales de las caras son:

- 1 cara, diagonales es 0.
- 6 caras, diagonales es $(2)(6) = 12$
- 1cara , diagonales es 5

$$\rightarrow SNDC = 17$$

Finalmente aplicamos el teorema para calcular el número de diagonales.

$$\boldsymbol{NDP} = \frac{10(10-1)}{2} - 16 - 17$$

$$\therefore \boldsymbol{NDP = 12}$$