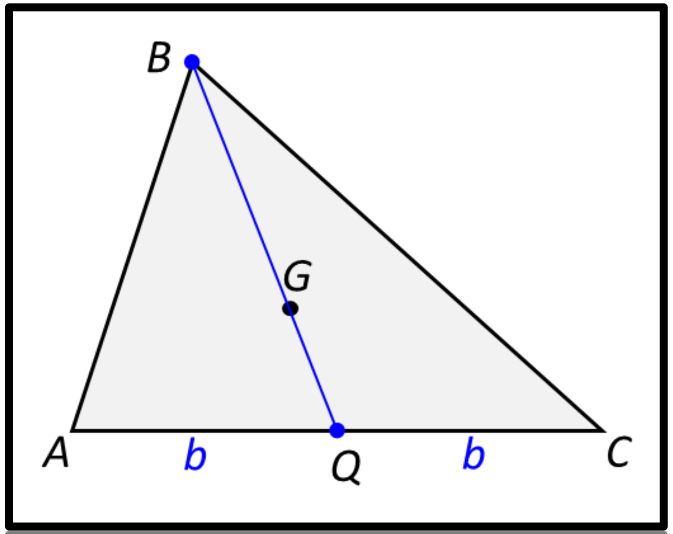
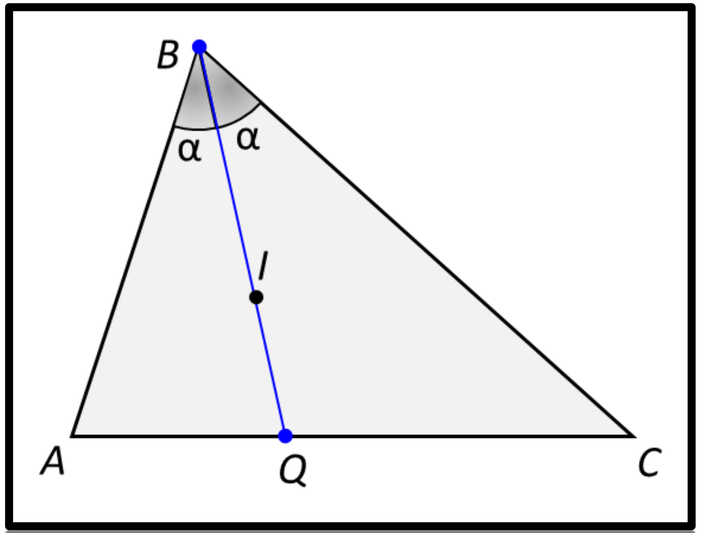
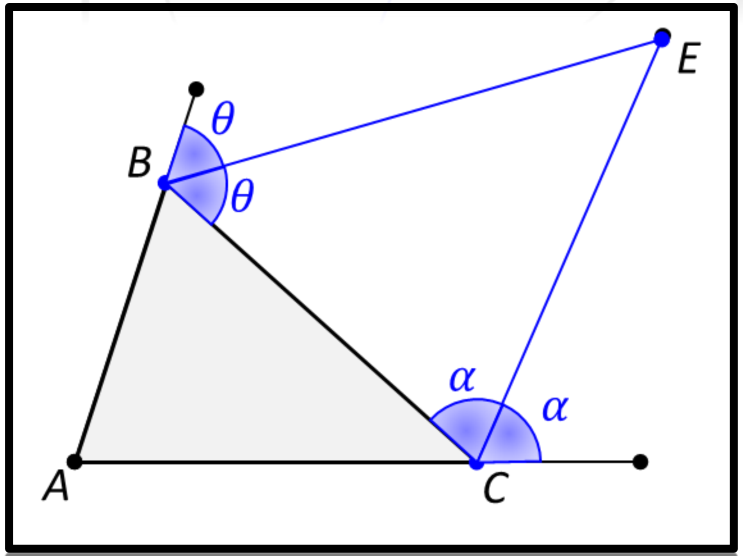
PUNTOS NOTABLES I

- *DEFINICIÓN DE PUNTOS NOTABLES.*
- *BARICENTRO.*
- *INCENTRO.*
- *EXCENTRO.*







PUNTOS NOTABLES I

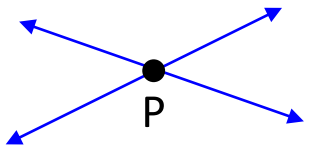
DEFINICIÓN:

Son aquellos puntos de concurrencia de líneas notables de la misma especie.

TENER EN CUENTA:

- *PUNTO DE INTERSECCIÓN*

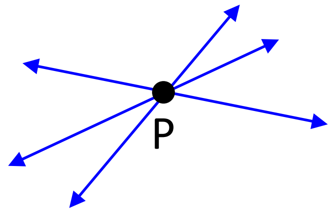
Es aquel punto en común de dos líneas.



P: punto de intersección

- *PUNTO DE CONCURRENCIA*

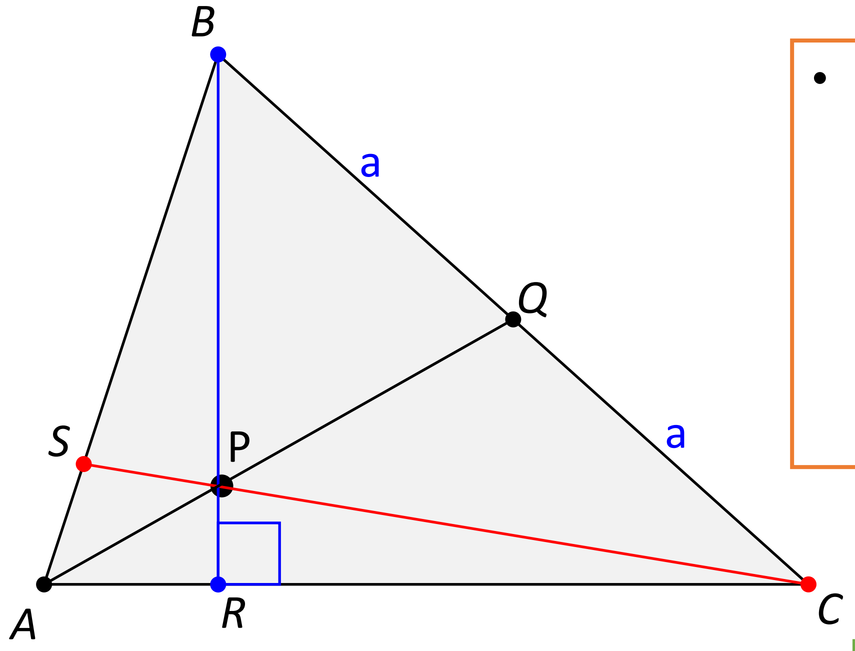
Es aquel punto en común de tres a más líneas.



P: punto de concurrencia

NOTA:

Si en un triangulo trazamos altura, mediana y una ceviana concurrentes en un punto, dicho punto es notable?



- *Para que sea punto notable, las líneas tienen que ser de la misma especie. Bien alturas, bien medianas o bien bisectrices, pero no se pueden combinarse.*

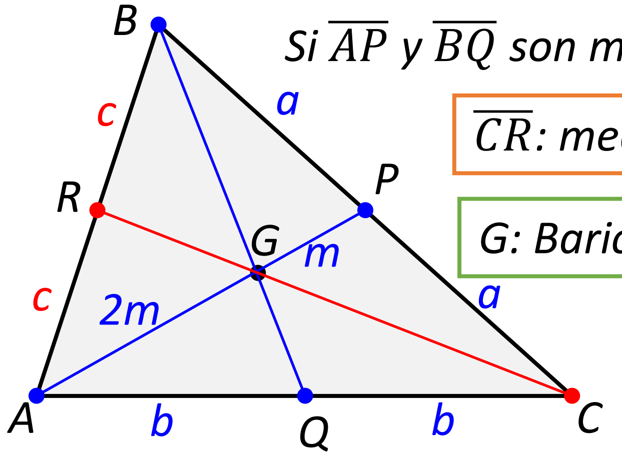
*Por lo tanto **P no es punto notable.***

PUNTOS NOTABLES I

BARICENTRO:

Es aquel punto de concurrencia de las tres medianas en todo triángulo.

Si $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ son medianas:



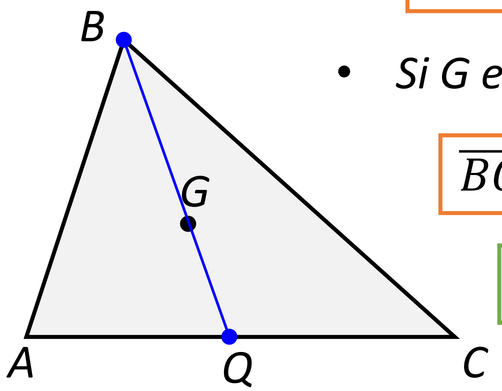
$\overline{CR}$: mediana

G: Baricentro

<u>Se cumple:</u>

AG = 2(GP)
BG = 2(GQ)
CG = 2(GR)

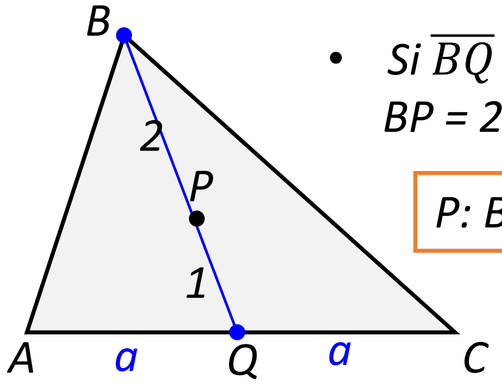
OBSERVACIONES:



- Si G es baricentro:

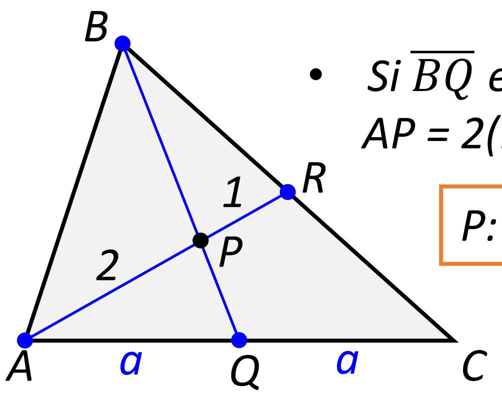
$\overline{BQ}$: Mediana

BG = 2GQ



- Si $\overline{BQ}$ es Mediana
  BP = 2(PQ)

P: Baricentro

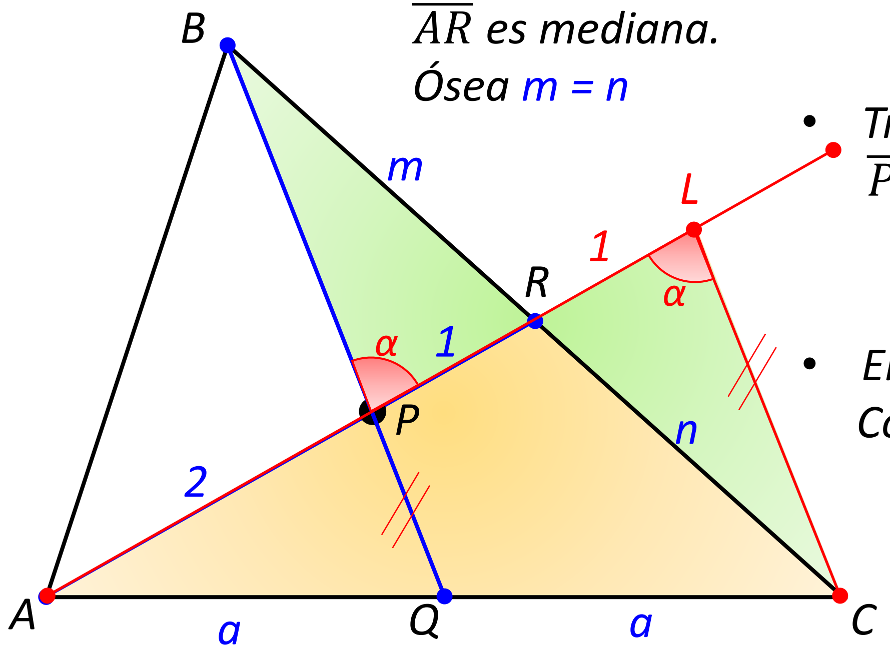


- Si $\overline{BQ}$ es Mediana
  AP = 2(PR)

P: Baricentro

DEMOSTRACIÓN:

Para demostrar que P es baricentro, debemos demostrar que $\overline{AR}$ es mediana.
Ósea m = n



- Trazamos $\overline{CL}$ // $\overline{PQ}$ y como AQ=QC=a:
  $\overline{PQ}$: Base media del ΔCAL.
  AP=PL=2
  RL=1
- El ΔPBR ≅ ΔCLR (ALA):
  Con respecto a α:

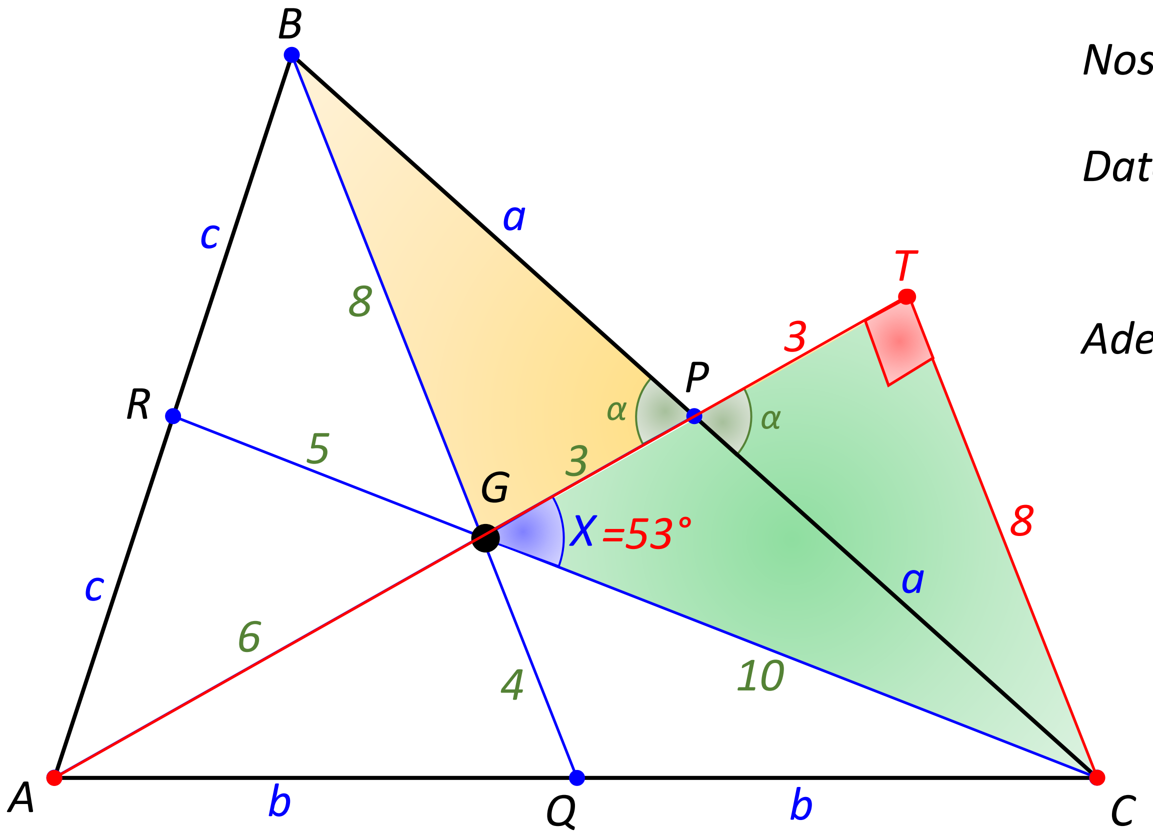
m=n

$\overline{AR}$ es mediana

P: Baricentro

PUNTOS NOTABLES I

Del gráfico $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ Y $\overline{CR}$ son medianas de longitudes 9, 12 y 15 respectivamente. Calcule medida del ángulo menor entre $\overline{AP}$ y $\overline{CR}$.



RESOLUCIÓN:

Nos piden la medida del ángulo menor entre $\overline{AP}$ y $\overline{CR}$: X

Dato: $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ Y $\overline{CR}$ son medianas:

G: Baricentro

$m\measuredangle PGC = X$

Además:	$AG = 2(GP)$	$AG=6$	$GP=3$
	$BG = 2(GQ)$	$BG=8$	$GQ=4$
	$CG = 2(GR)$	$CG=10$	$GR=5$

- *Prolongamos $\overline{AP}$ hasta T, tal que PT=3.*
- *El $\Delta GPB \cong \Delta TPC$ (LAL):*

  Con respecto a α:

  $TC=8$
- *Entonces el ΔGTC es notable de 37° y 53°:*

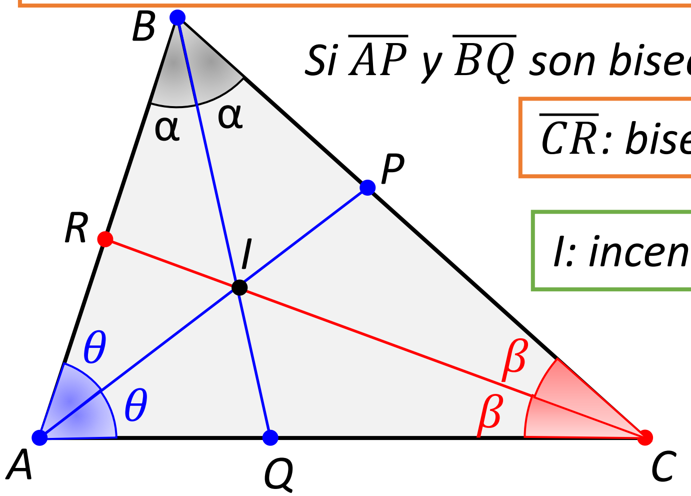
  $\therefore X = 53°$

CURSO DE GEOMETRÍA

PUNTOS NOTABLES I

INCENTRO:

Es aquel punto de concurrencia de las tres bisectrices interiores en todo triángulo.

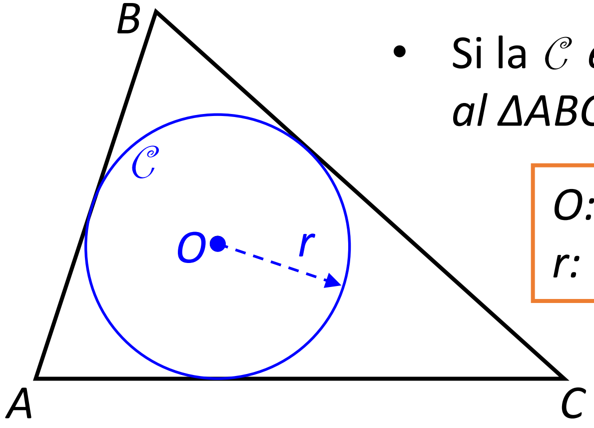


Si $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ son bisectrices:

$\overline{CR}$: bisectriz

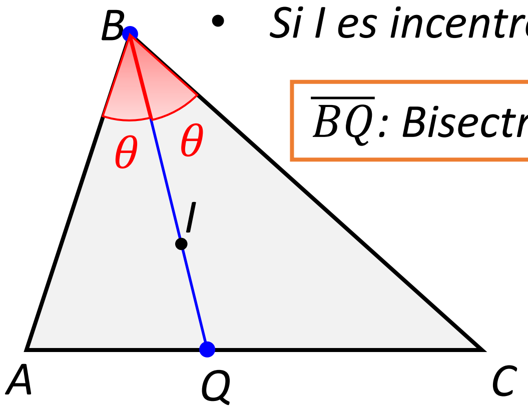
I: incentro

OBSERVACIÓN:



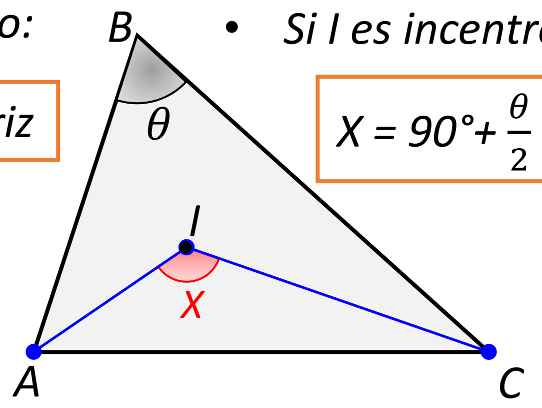
- Si la $\mathscr{C}$ es inscrita al ΔABC:

O: Incentro
r: Inradio



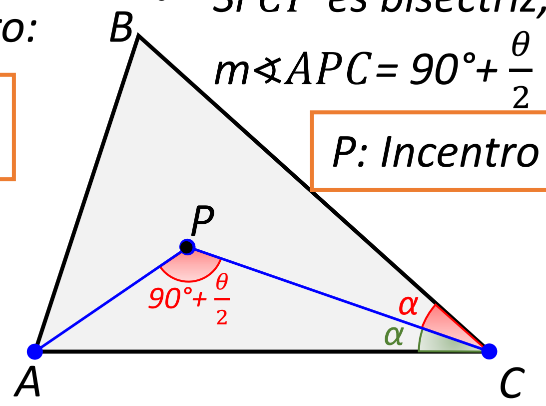
- Si I es incentro:

$\overline{BQ}$: Bisectriz



- Si I es incentro:

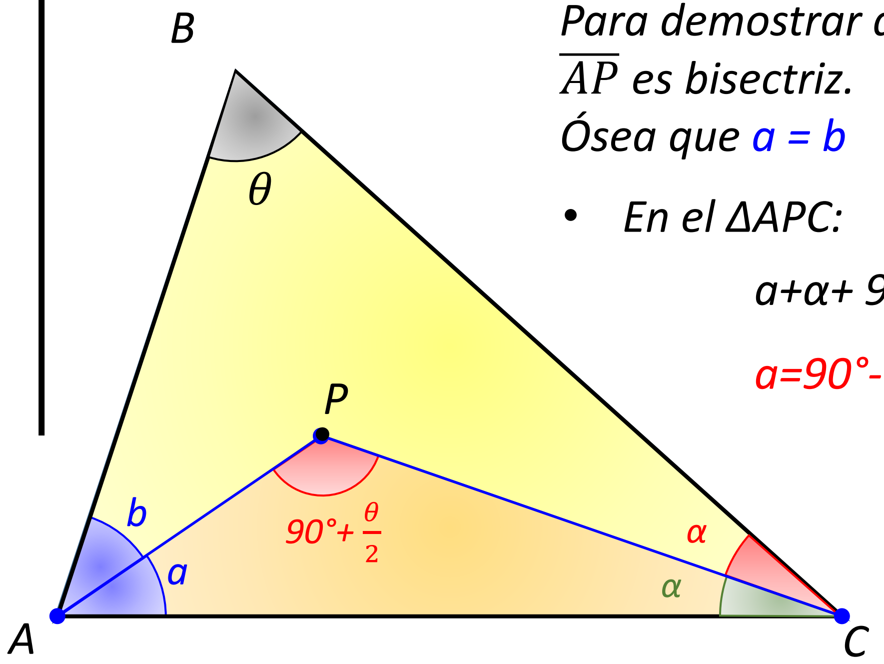
$X = 90° + \frac{\theta}{2}$



- Si $\overline{CP}$ es bisectriz, $m\measuredangle APC = 90° + \frac{\theta}{2}$:

P: Incentro

DEMOSTRACIÓN:



Para demostrar que P es incentro, debemos demostrar $\overline{AP}$ es bisectriz.
Ósea que $a = b$

- En el ΔAPC:

$$a+\alpha+90°+\frac{\theta}{2}=180°$$

$$a=90°-\alpha-\frac{\theta}{2}$$

- En ABCP:

$$b+\theta+\alpha=90°+\frac{\theta}{2}$$

$$b=90°-\alpha-\frac{\theta}{2}$$

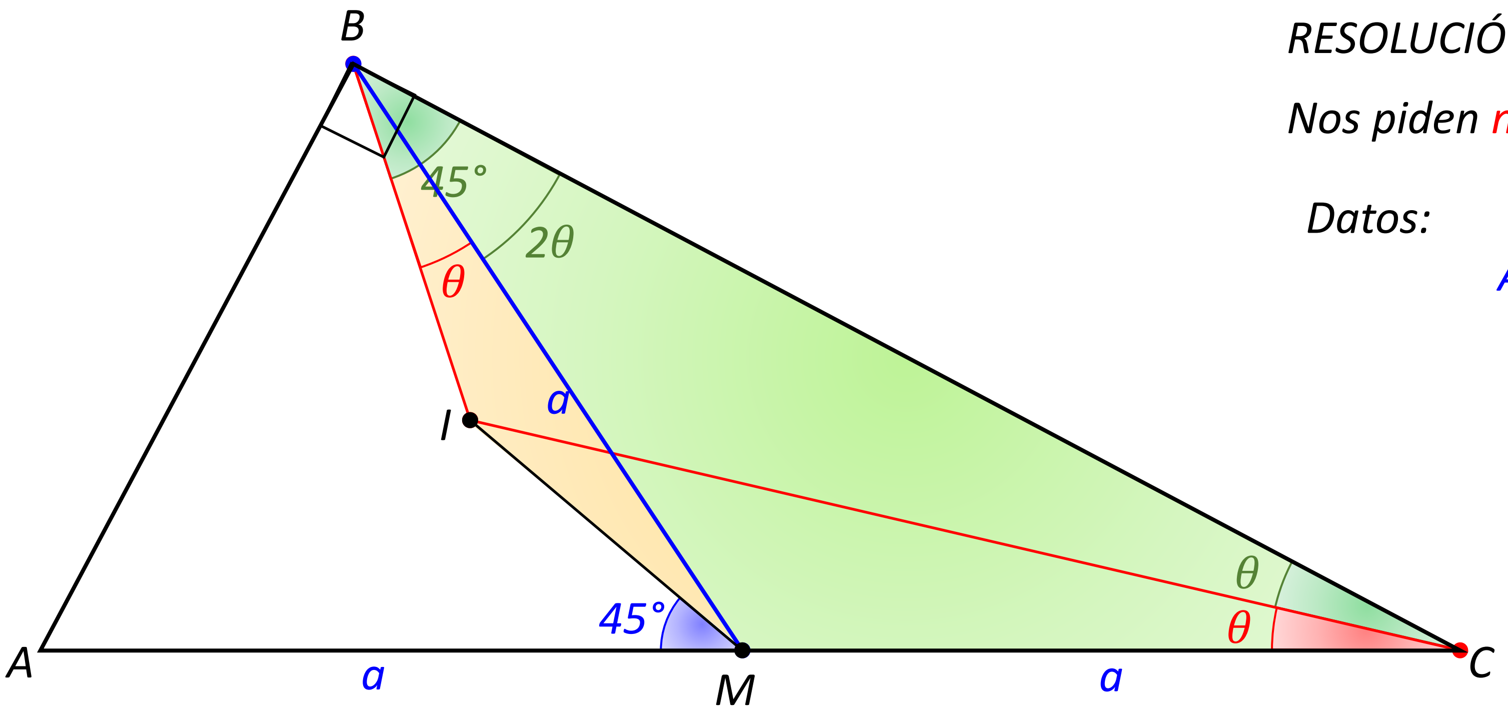
- Entonces: $\boxed{a=b}$

$\overline{AP}$ es bisectriz

P: Incentro

PUNTOS NOTABLES I

Del gráfico, I es incentro del ⊿ABC. Si AM=MC y m∢IMA=45°. Calcule m∢ICA



RESOLUCIÓN:

Nos piden m∢ICA = θ

Datos:

AM=MC=a

m∢IMA=45°

- *Como I es incentro del ⊿ABC:*
  $\overline{BI}$ *Y* $\overline{CI}$ *son bisectrices interiores*
  m∢ABI = m∢IBC = 45°
  m∢ACI = m∢ICB = θ
- *Por lo tanto MIBC es inscriptible:*
  m∢IBM = θ

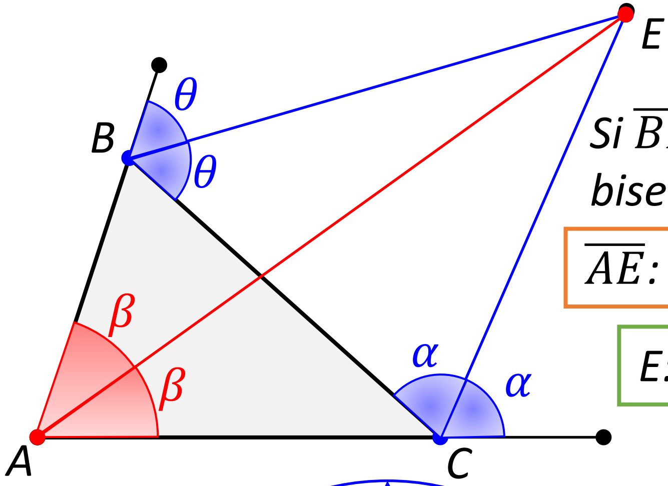
- *En el ⊿ABC como AM=MC=a, por mediana relativa a la hipotenusa:*
  AM=BM=MC=a
- *El ΔBMC es isósceles:*
  m∢MBC = 2θ
- *Finalmente:* $2\theta + \theta = 45°$
  $\therefore \theta = 15°$

CURSO DE GEOMETRÍA

PUNTOS NOTABLES I

EXCENTRO:

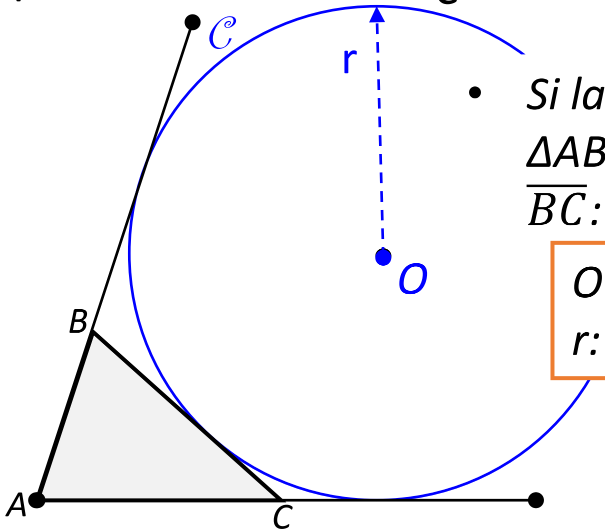
Es aquel punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y una interior en todo triángulo.



Si $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$ son bisectrices externas:

$\overline{AE}$: Bisectriz interna

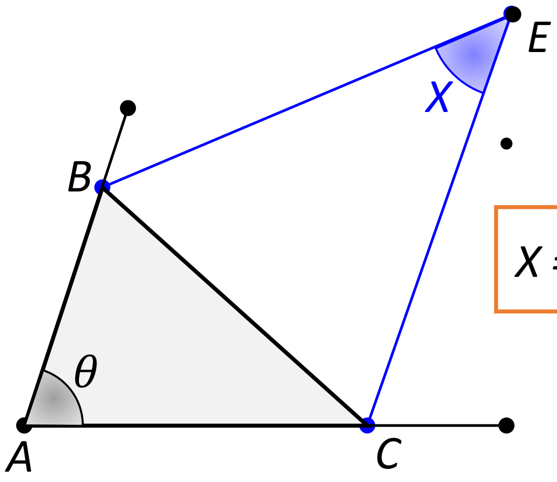
E: Excentro



- Si la $\mathscr{C}$ es exinscrita al ΔABC relativa al lado $\overline{BC}$:

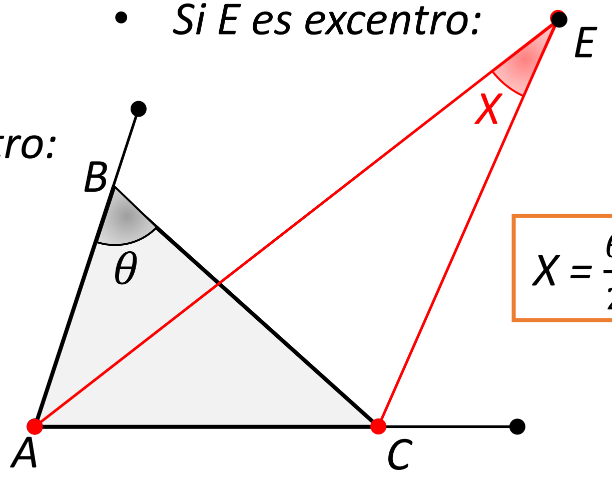
O: Excentro
r: Exradio

OBSERVACIONES:



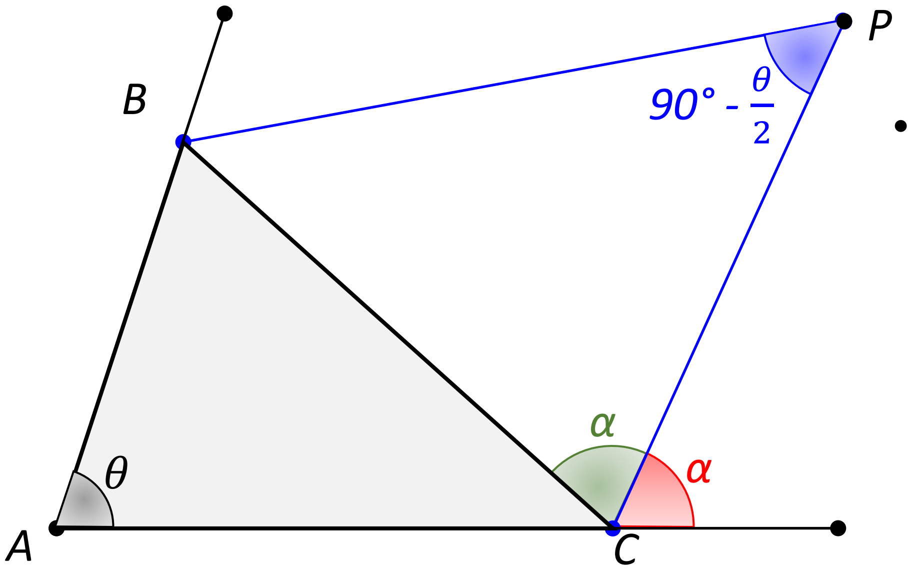
- Si E es excentro:

$X = 90° - \frac{\theta}{2}$



- Si E es excentro:

$X = \frac{\theta}{2}$

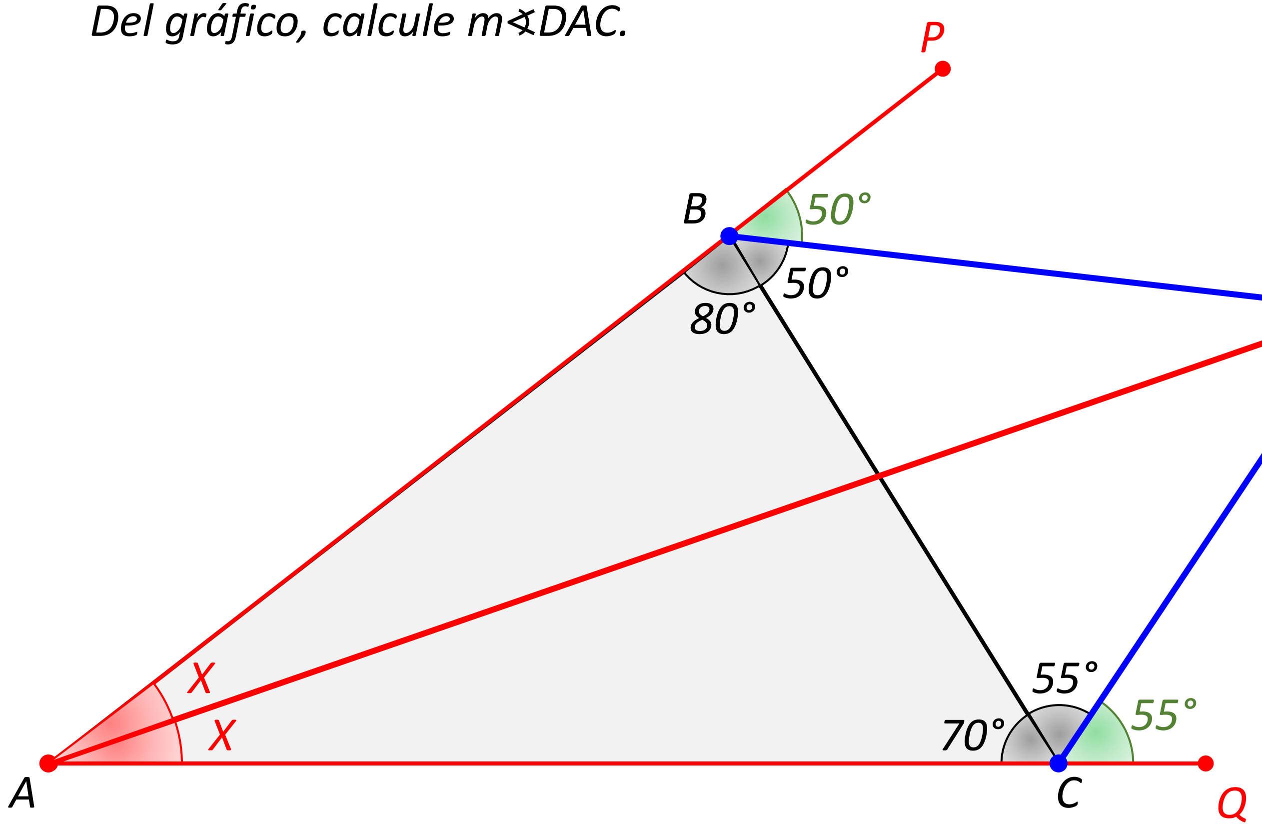


- Si $m\measuredangle BPC = 90° - \frac{\theta}{2}$
$\overline{CP}$ es bisectriz:

P: Excentro

PUNTOS NOTABLES I

Del gráfico, calcule m∢DAC.



RESOLUCIÓN:

Nos piden m∢DAC = X

- Analizando las medidas en B y C, prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$:

  m∢PBD=50°

  m∢QCD=55°

- Por lo tanto $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices exteriores del ΔABC.

  D: Excentro

- Entonces $\overline{AD}$ es bisectriz interior:

  m∢BAD= m∢DAQ=X

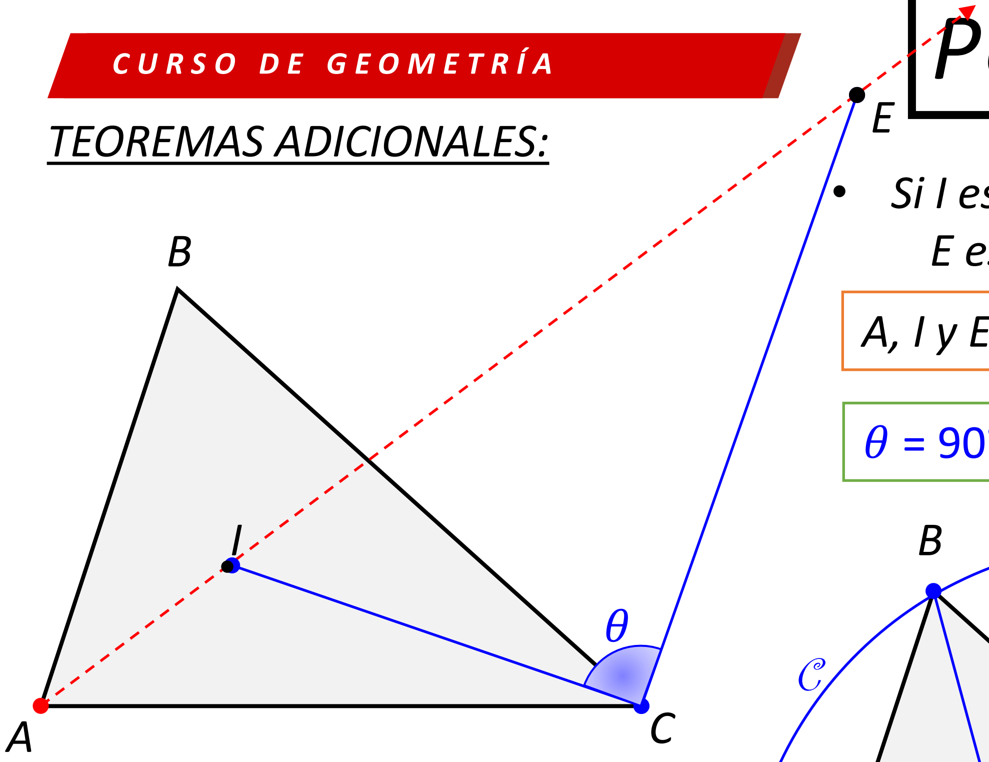
- En el ΔABC:

  2X + 80° + 70° = 180°

  ∴X=15

PUNTOS NOTABLES I

TEOREMAS ADICIONALES:



- *Si I es Incentro*
  E es Excentro

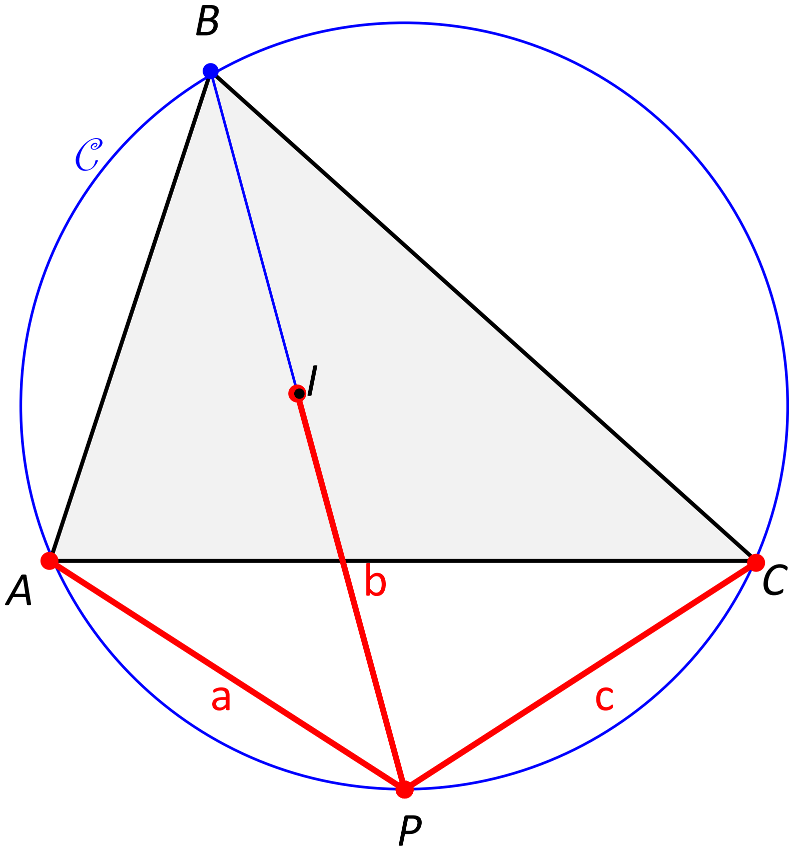
A, I y E: Colineales

$\theta = 90°$

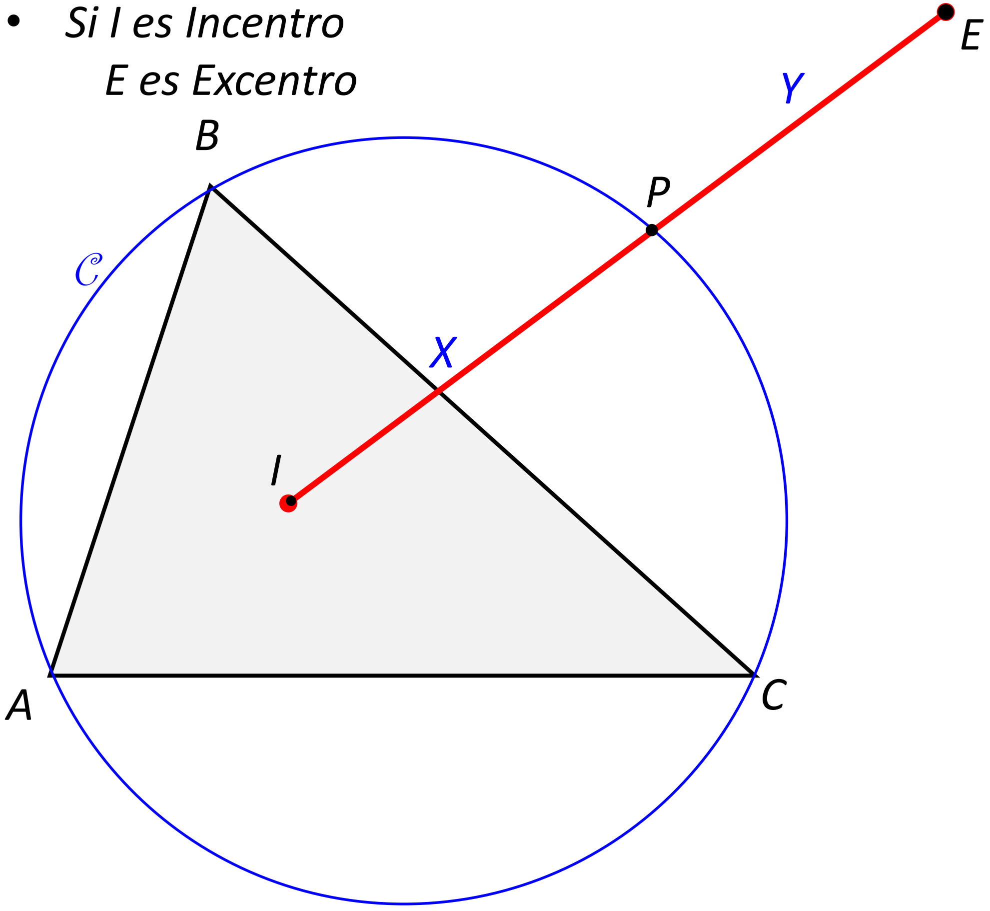
- *Si I es incentro ΔABC y prolongamos $\overline{BI}$ tal que interseca en P a la $\mathcal{C}$ circunscrita al ΔABC.*

AP=IP=CP

a = b = c



- *Si I es Incentro*
  E es Excentro



P es punto medio de $\overline{IE}$

X = Y