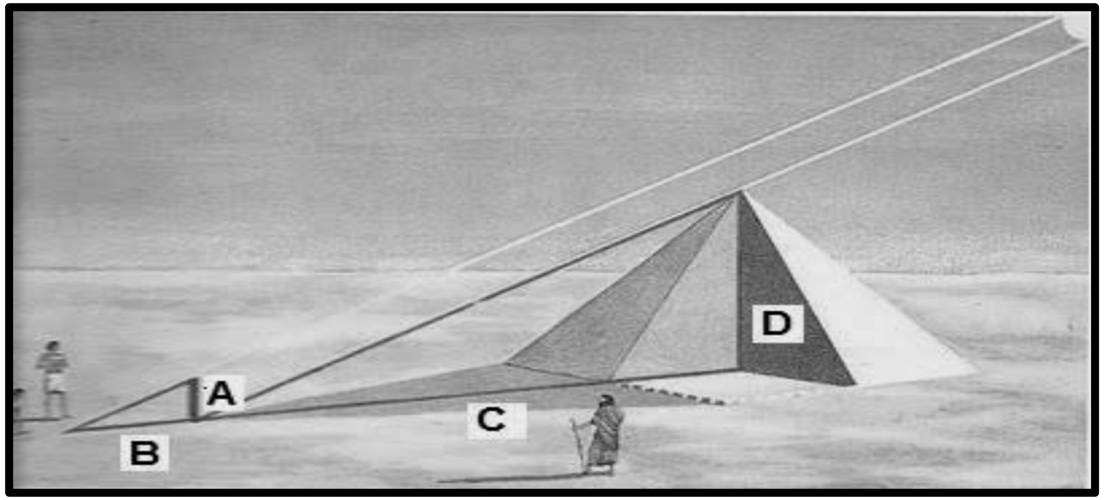
OBJETIVOS:

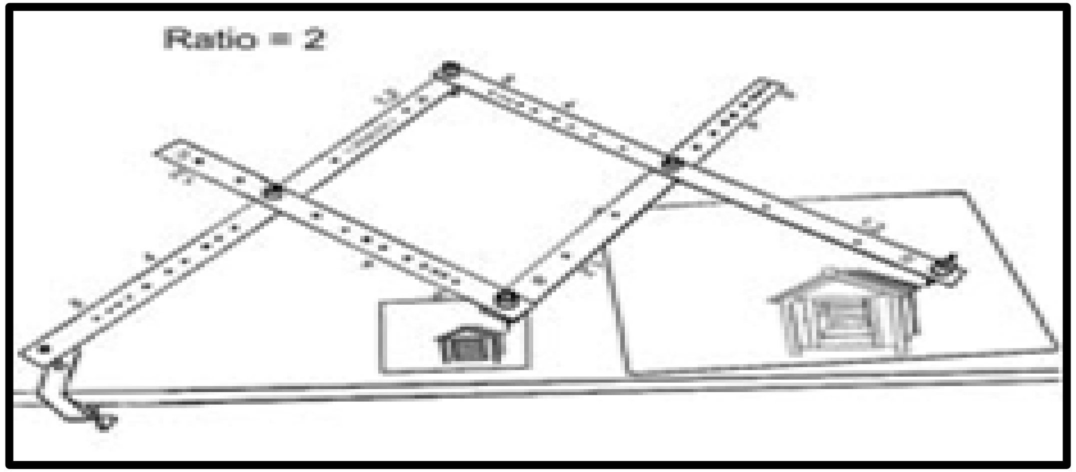
- *Conocer la semejanza de triángulos, definición, casos y diversos teoremas.*
- *Utilizar adecuadamente los teoremas de semejanza en la resolución de problemas tipo examen de admisión UNI.*
- *Relacionar los conceptos de semejanza con situaciones reales.*

SEMEJANZA

- DEFINICIÓN DE SEMEJANZA.
- CASOS DE SEMEJANZA.
- TEOREMA DE SEMEJANZA.
- CUATERNA ARMÓNICA.



Una aplicación clásica de la semejanza es el calculo de la altura de la pirámide

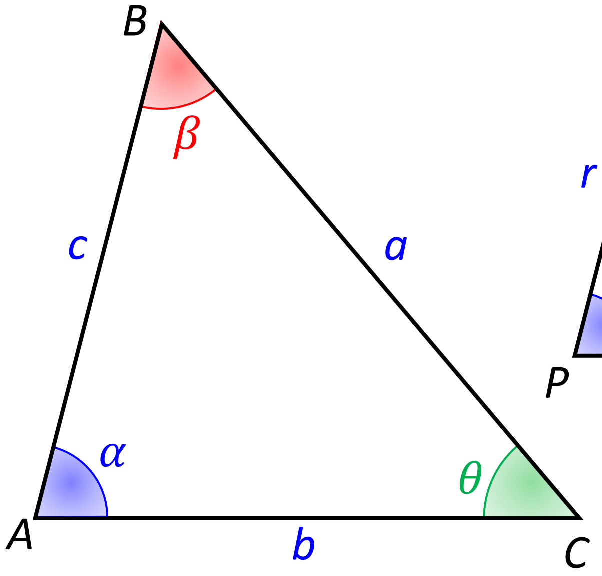


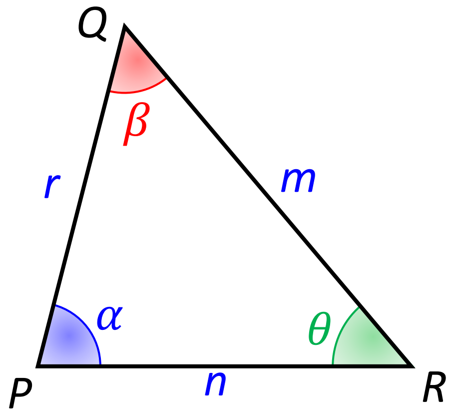
Pantógrafo, instrumento que nos ayuda a amplificar un dibujo.

SEMEJANZA

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS:

Dos triángulos son semejantes, si sus medidas angular internas son respectivamente iguales.





$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

~: Se lee "es semejante con"

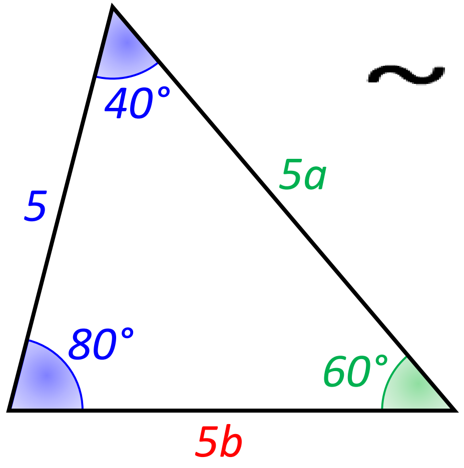
CONSECUENCIA:

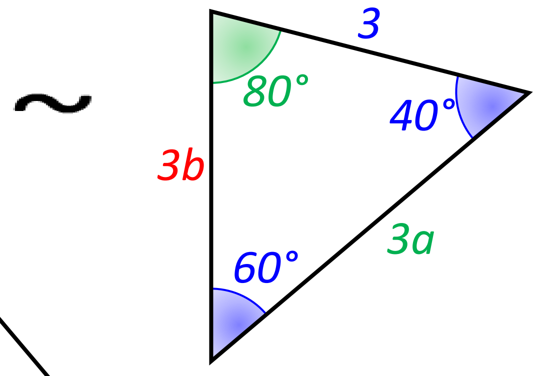
Los elementos homólogos (elementos comunes) son proporcionales.

$$\frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$$

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{r} = k$$

EJEMPLOS:





PREGUNTAS:

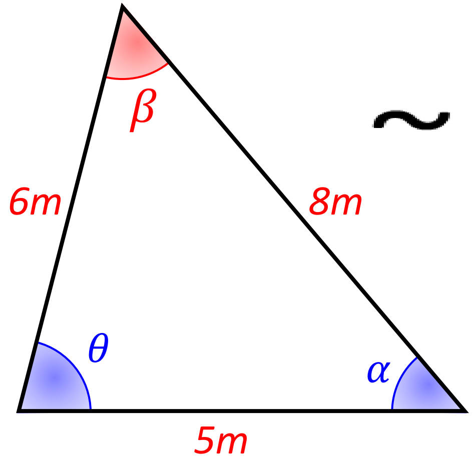
1. ¿Los triángulos son semejantes?

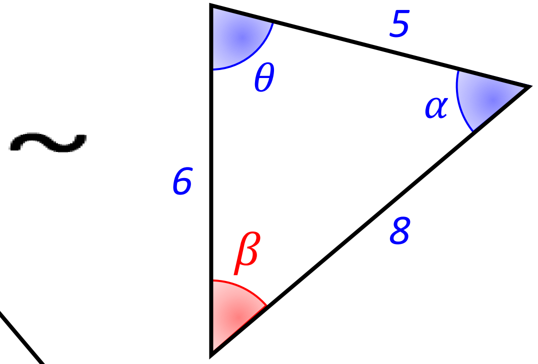
Rpta: SI

2. ¿En que relación se encuentran los triángulos?

Rpta: Los lodos están en una relación de 5 a 3.

Se recomienda completar las medidas para ubicar a los lados homólogos.





PREGUNTAS:

1. ¿Los triángulos son semejantes?

Rpta: SI

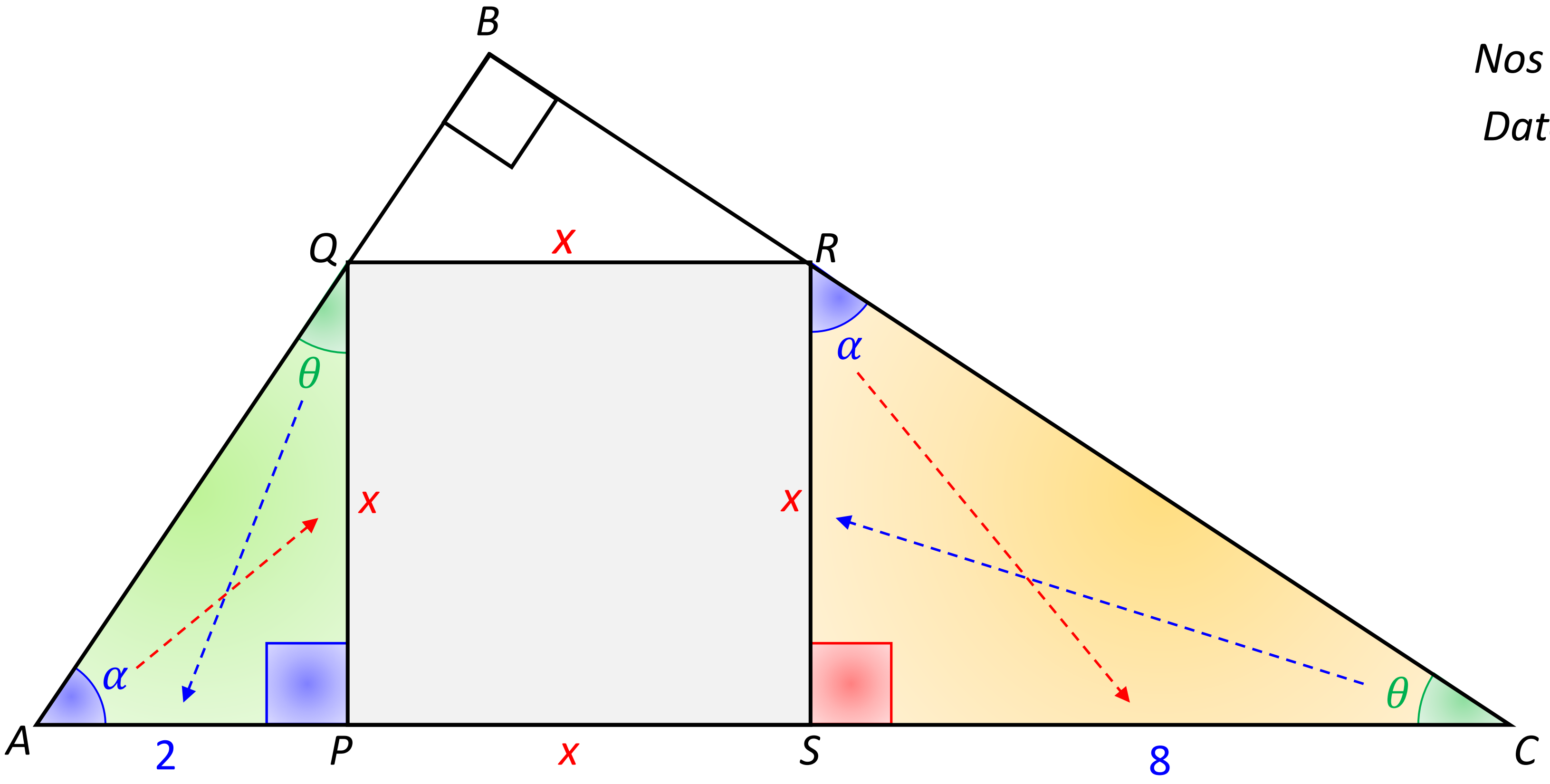
2. ¿Cómo se aprovecha la semejanza?

Rpta: Los lados homólogos mantienen la misma relación.

La semejanza se da mínimamente con dos medidas angulares respectivamente iguales.

SEMEJANZA

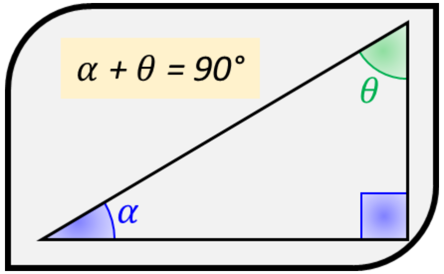
Del gráfico PQRS es un cuadrado, si AP=2 y SC=8. calcule QR



RESOLUCIÓN:

Nos piden QR = x

Dato: AP=2
SC=8



- Como ABCD es un cuadrado:
  PQ=PS=SR=x
- Completando las medidas en los ∆s APQ, ABC y RSC:
  $m\measuredangle QAP = m\measuredangle SRC = \alpha$
  $m\measuredangle AQP = m\measuredangle RCS = \theta$
- El ∆APQ ~ ∆RSC:

$$\frac{x}{8} = \frac{2}{x}$$

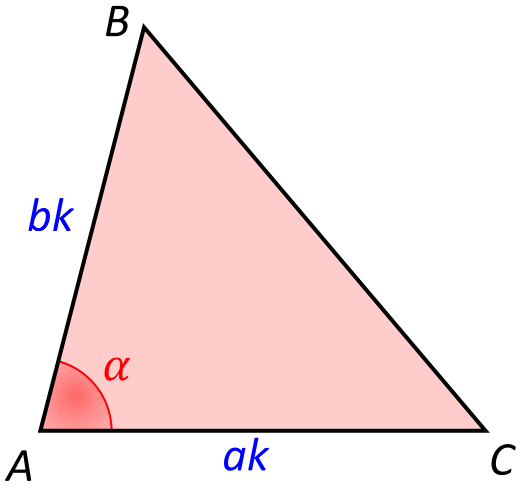
$$x^2 = 16$$

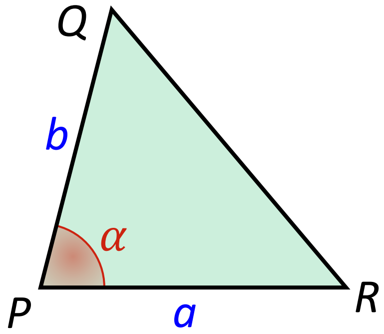
$$\boxed{\therefore x = 4}$$

SEMEJANZA

CASOS DE SEMEJANZA:

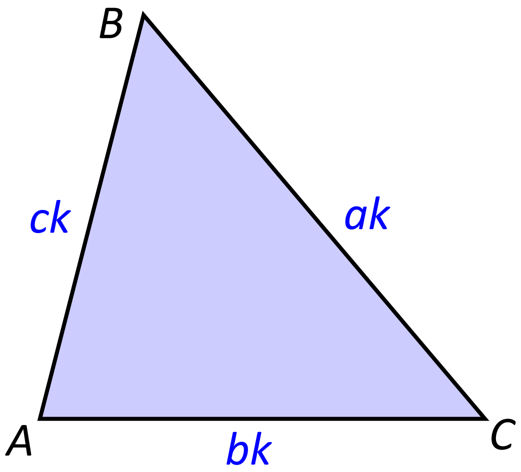
1. Si m∢BAC= m∢QPR=α y $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = k$

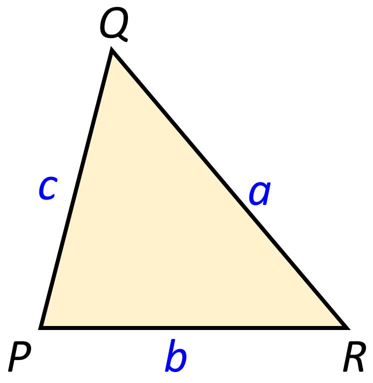




ΔABC ~ ΔPQR

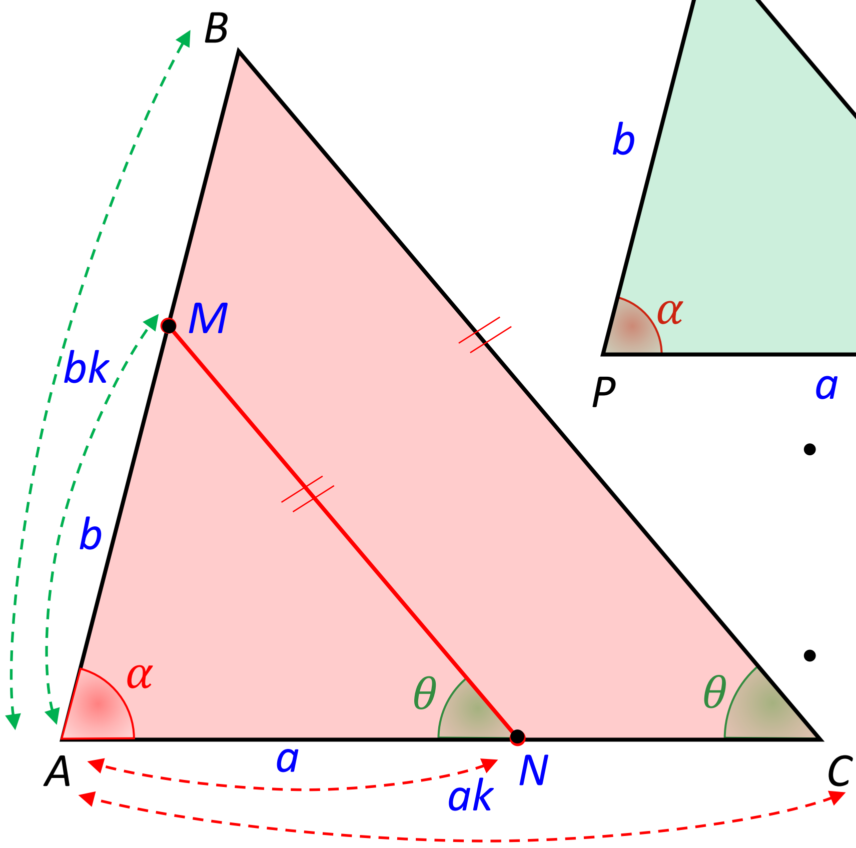
2. Si $\frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$

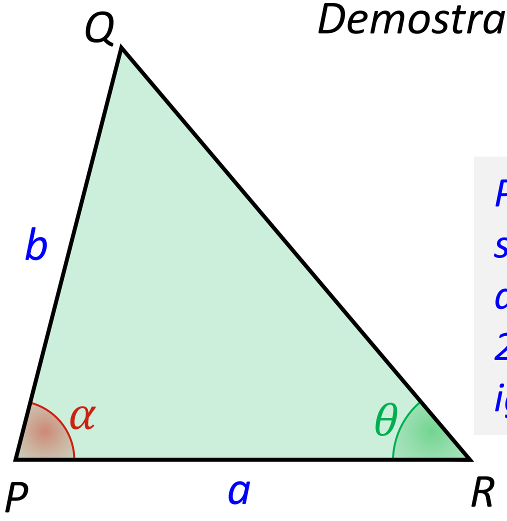




ΔABC ~ ΔPQR

DEMOSTRACIÓN:





Demostrar que :

ΔABC ~ ΔPQR

Para demostrar la semejanza, los triángulos deben tener mínimamente 2 medidas internas iguales.

- Sobre el lado AB y AC ubicamos los puntos M y N respectivamente, tal que AM=b y AN=a.
- Tazamos $\overline{MN}$, como $\frac{ak}{a} = \frac{bk}{b} = k$ son proporcionales:

  $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ (inversa de Thales)

  m∢ANM = m∢ACB =θ

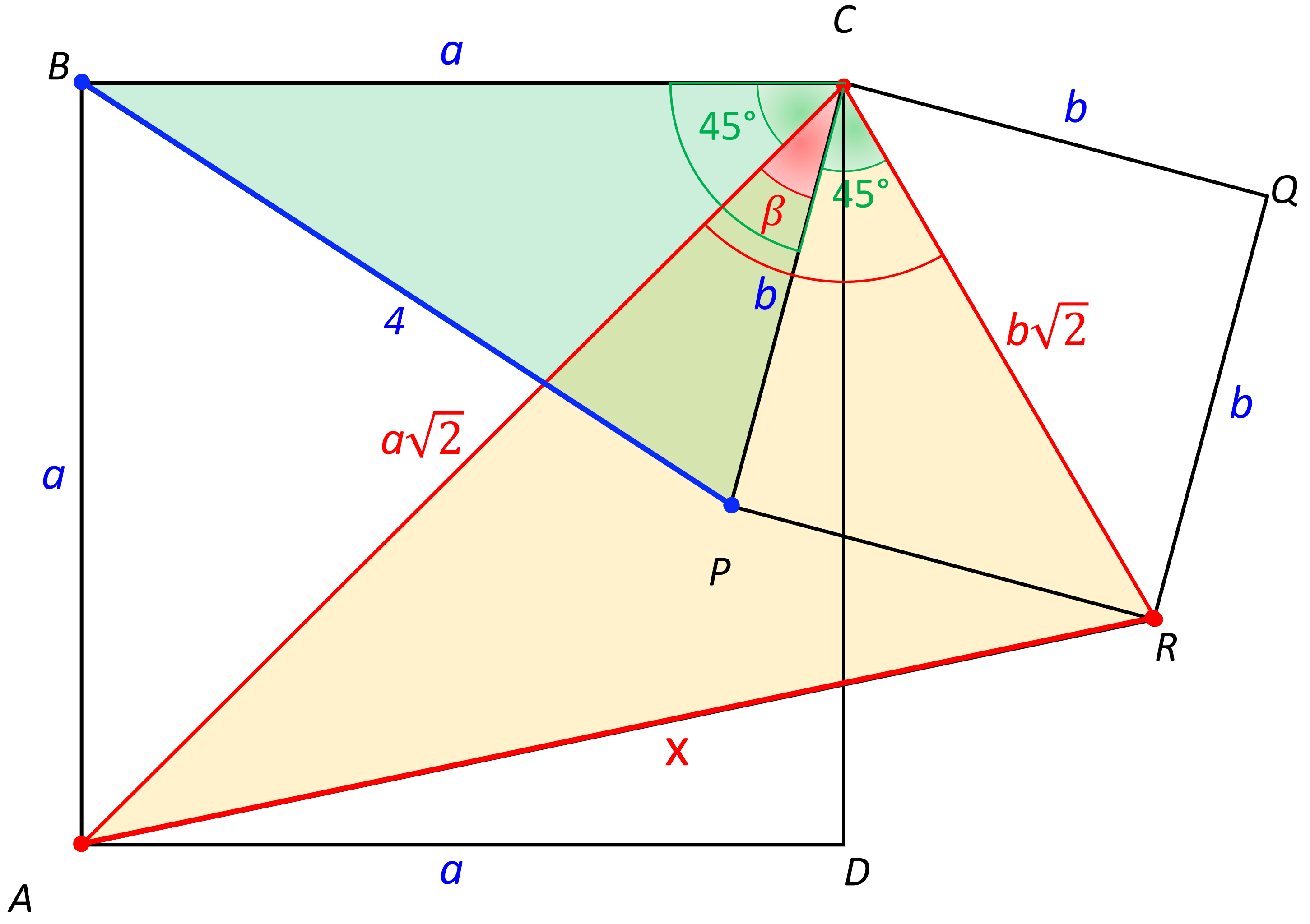
- Además el ΔAMN ≅ ΔPQR (LAL):

  m∢PRQ = θ

Como tienen 2 medidas internas iguales ⇒ ΔABC ~ ΔPQR

SEMEJANZA

Del gráfico ABCD y PCQR son cuadrados, si BP=4. calcule AR



RESOLUCIÓN:

Nos piden AR = x

Dato: $BP = 4$

- *Como ABCD y PCQR son cuadrados:*

  $AB=BC=a$

  $PC=CQ=b$

- *Y las diagonales:*

  $AC=a\sqrt{2}$ $\qquad$ $m\measuredangle BCA=45°$

  $CR=b\sqrt{2}$ $\qquad$ $m\measuredangle PCR=45°$

- *El ΔBCP ~ ΔACR (L A L):*

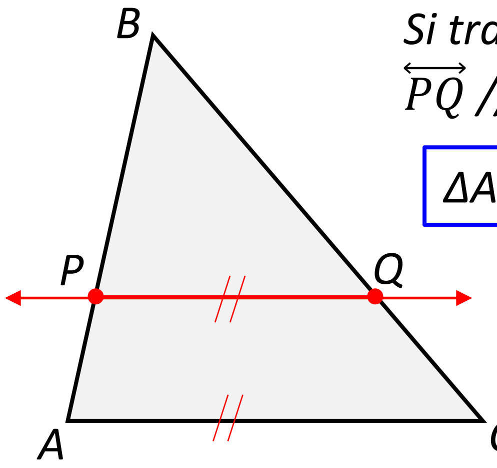
$$\frac{x}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{a}$$

$$\boxed{\therefore x = 4\sqrt{2}}$$

SEMEJANZA

<u>CASOS USUALES DE SEMEJANZA:</u>

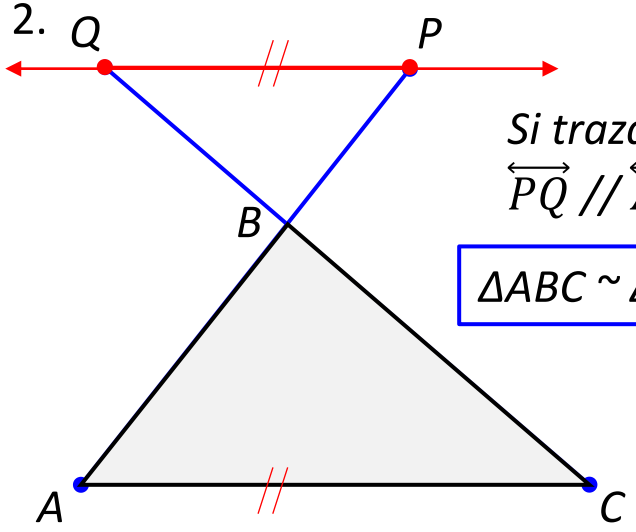
1.



Si trazamos $\overleftrightarrow{PQ} \,//\, \overleftrightarrow{AC}$:

$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta PBQ}$

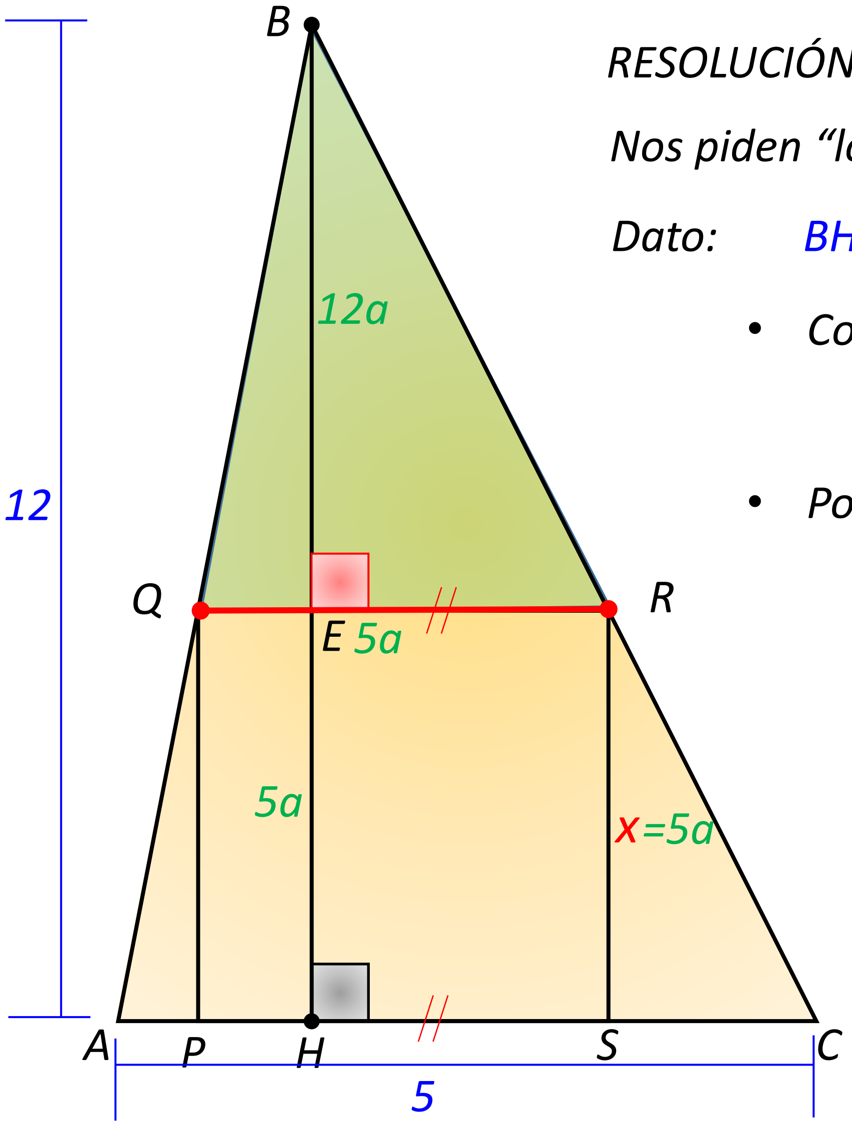
2.



Si trazamos $\overleftrightarrow{PQ} \,//\, \overleftrightarrow{AC}$:

$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta PBQ}$

Del gráfico PQRS es un cuadrado inscrito en el triangulo ABC, si BH=12 y AC=5. calcule la longitud del lado del cuadrado.



RESOLUCIÓN:

Nos piden "longitud del lado del cuadrado" = x =5a

Dato: BH=12 AC=5

- *Como PQRS es un cuadrado:*

  QR=RS=x

  $\overline{QR} \,//\, \overline{PS}$

- *Por 1° caso usual, ΔABC ~ ΔQBR:*

  $$\frac{BE}{QR} = \frac{12}{5} \Rightarrow \begin{matrix} BE=12a \\ QR=5a \end{matrix}$$

- *Entonces de* $\overline{BH}$:

  $12a + 5a = 12$

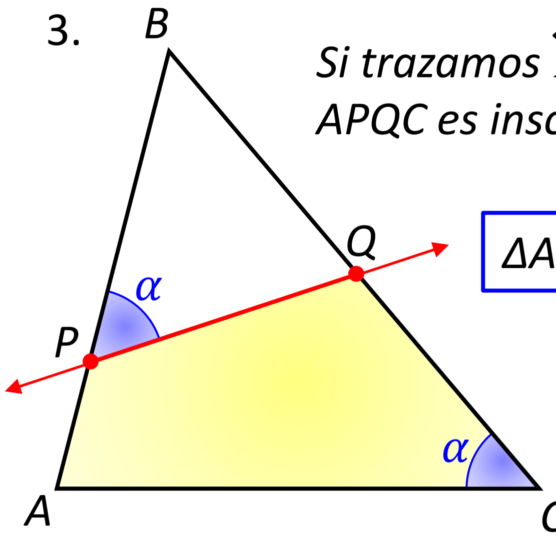
  $a = \frac{12}{17}$

  $\Rightarrow x = 5\left(\frac{12}{17}\right)$

$$\boxed{\therefore x = \frac{60}{17}}$$

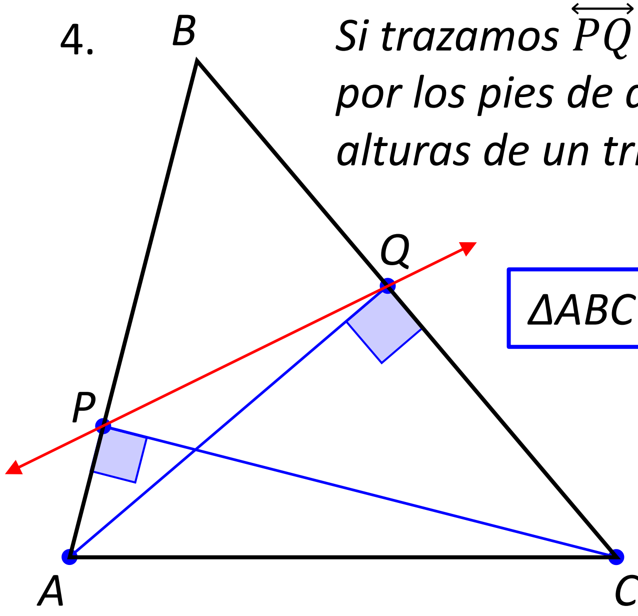
SEMEJANZA

3. Si trazamos $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que APQC es inscriptible:



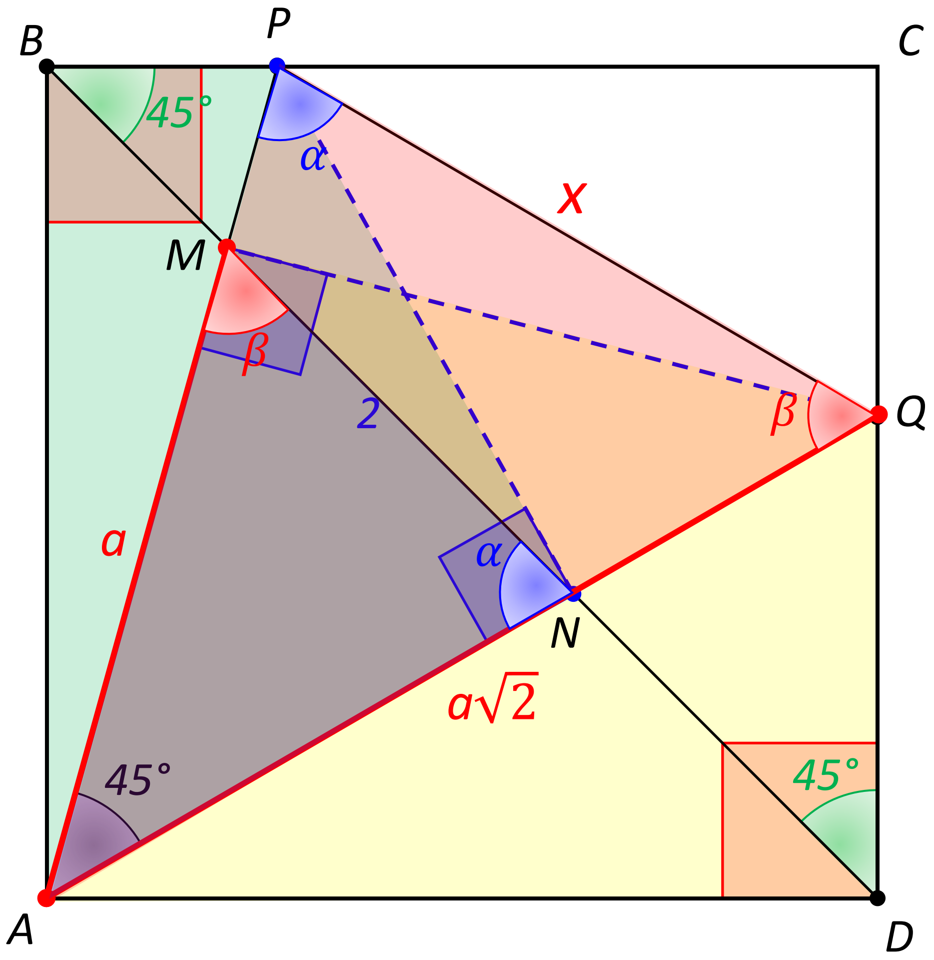
$\Delta ABC \sim \Delta QBP$

4. Si trazamos $\overleftrightarrow{PQ}$ que pasa por los pies de dos de las alturas de un triangulo:



$\Delta ABC \sim \Delta QBP$

Del gráfico ABCD es un cuadrado, si MN=2. calcule PQ.



RESOLUCIÓN:

Nos piden PQ=x

Dato: MN=2

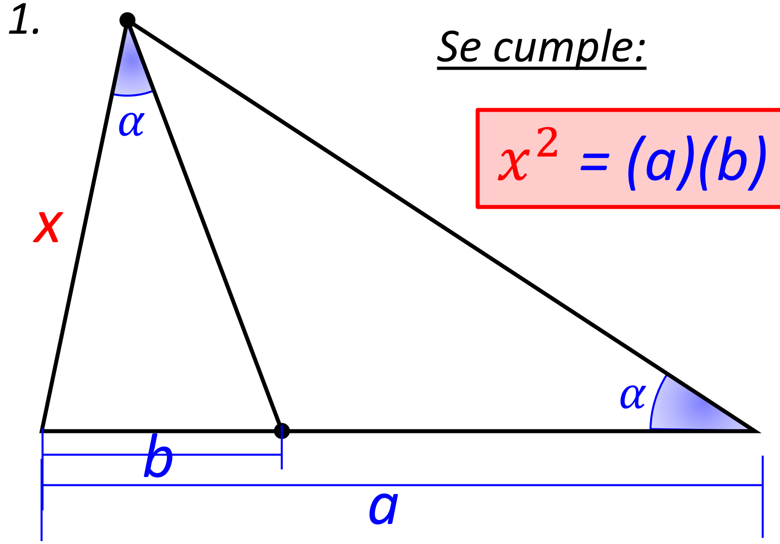
- Como ABCD es un cuadrado:
  $m\sphericalangle DBC=45°$
  $m\sphericalangle BDC=45°$
- Entonces AMQD y ABPN son inscriptible:
  $m\sphericalangle ANP=m\sphericalangle AMQ=90°$
- El ⊿AMQ es notable de 45°:
  $AM=a$ $\quad AQ=a\sqrt{2}$
- Por el 4to caso usual de semejanza el ΔAPQ ~ ΔANM:
  $$\frac{x}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{a}$$

$$\boxed{\therefore x = 2\sqrt{2}}$$

SEMEJANZA

TEOREMAS DE SEMEJANZA:

1.



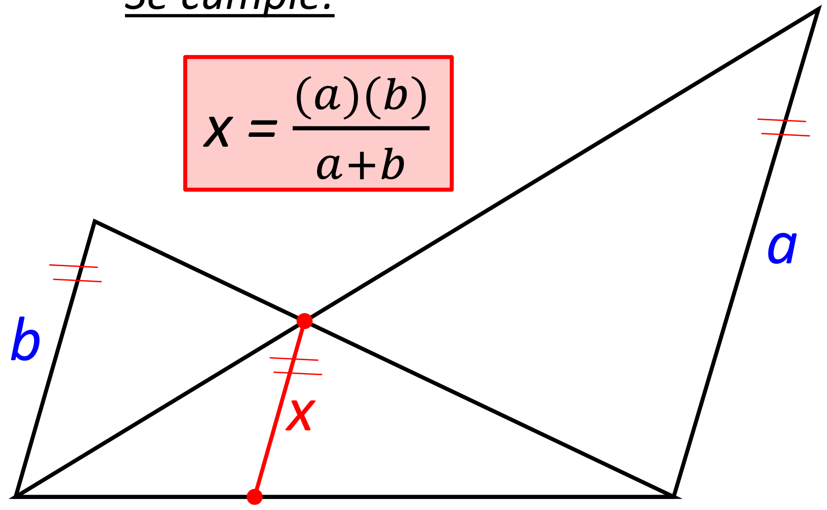
Se cumple:

$\boxed{x^2 = (a)(b)}$

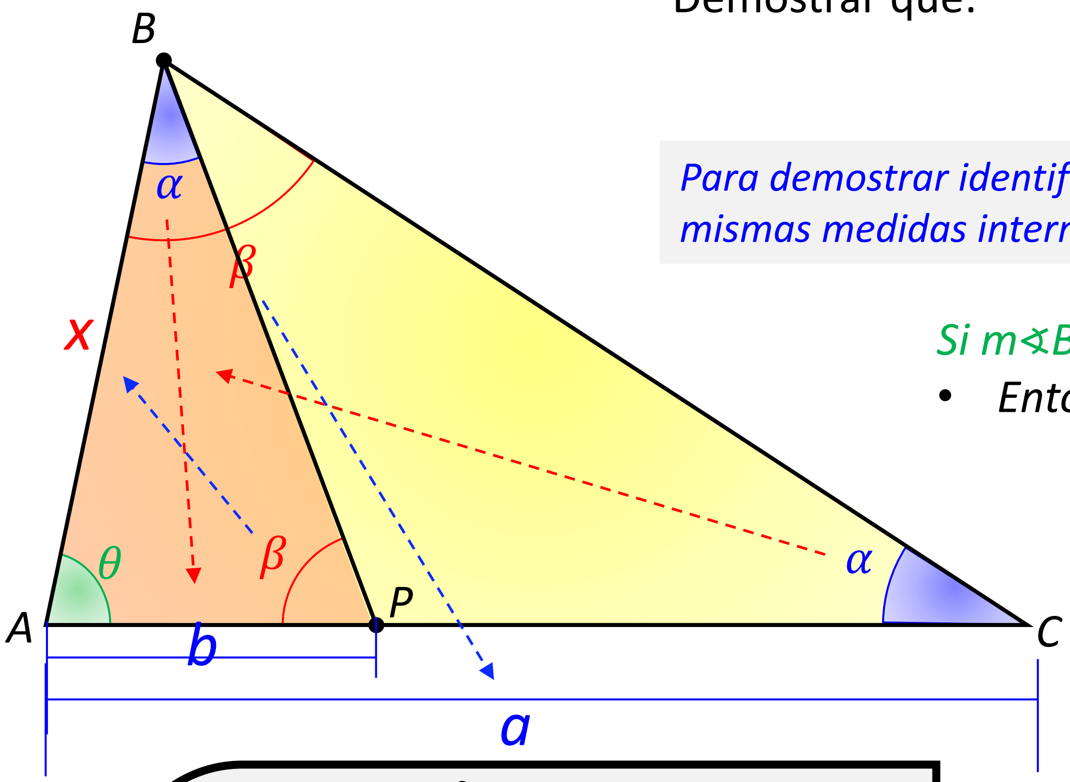
2.

Se cumple:

$\boxed{x = \dfrac{(a)(b)}{a+b}}$



DEMOSTRACIÓN:



Demostrar que: $\boxed{x^2 = (a)(b)}$

Para demostrar identifiquemos triángulos con las mismas medidas internas.

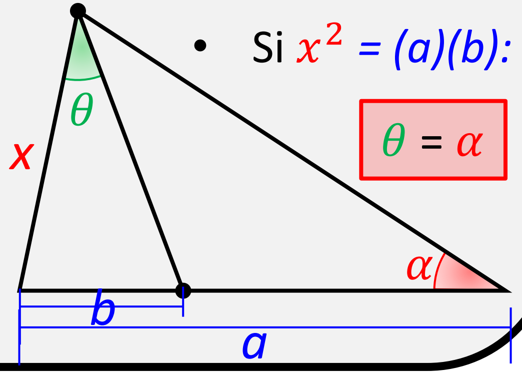
Si m∡BAC=θ

- *Entonces el ΔABC ~ ΔAPB:*

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

$\boxed{\therefore x^2 = (a)(b)}$

Observación: *Este teorema tiene su reciproco.*

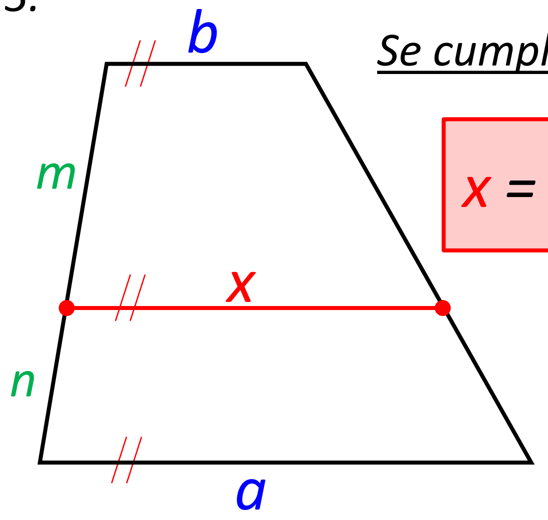


- Si $x^2 = (a)(b)$:

$\boxed{\theta = \alpha}$

SEMEJANZA

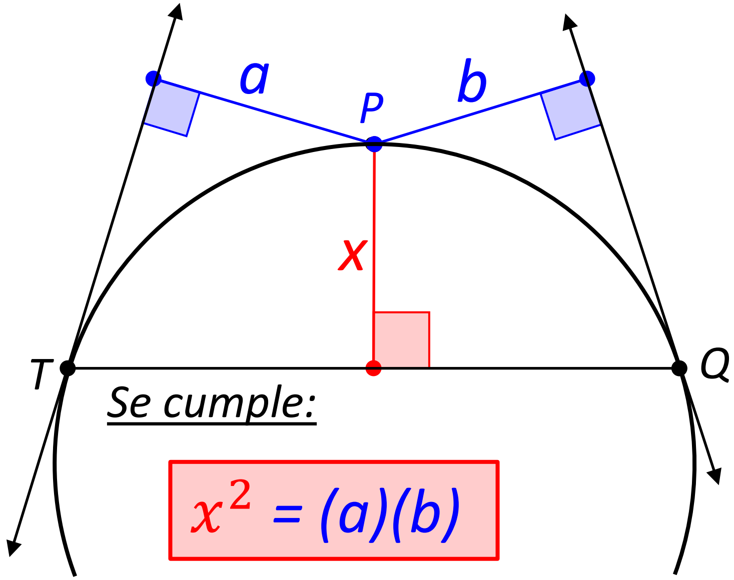
3.



Se cumple:

$$x = \frac{am + bn}{m+n}$$

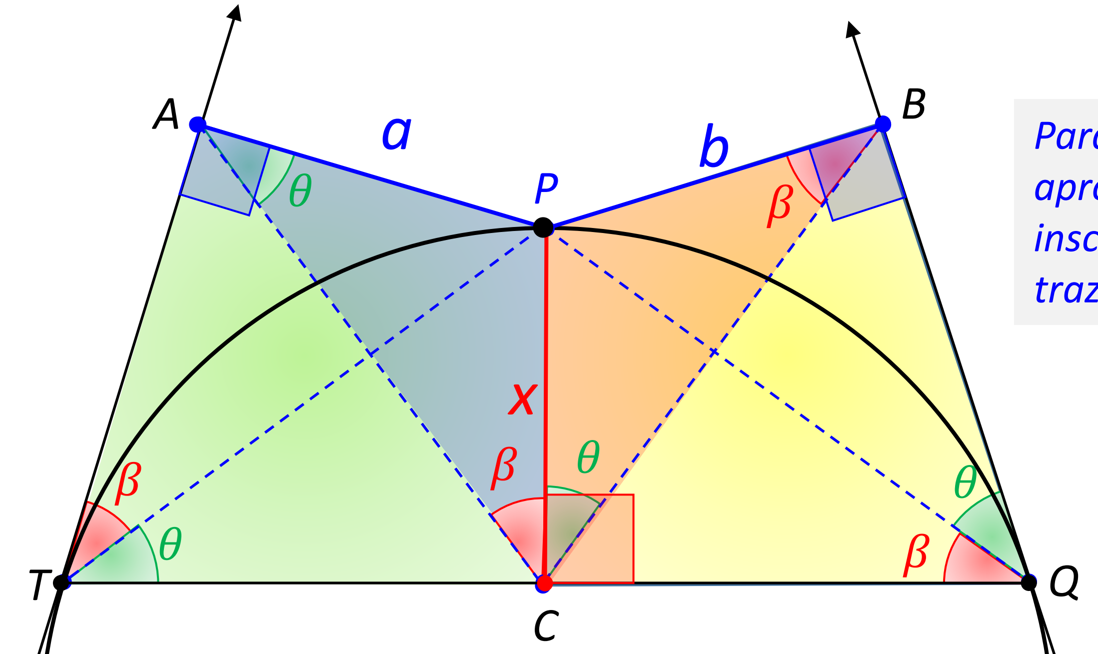
4. Si T y Q son puntos de tangencia



Se cumple:

$$x^2 = (a)(b)$$

DEMOSTRACIÓN:



- Como T y Q son puntos de tangencia, por observación:

  $m\measuredangle ATP = m\measuredangle TQP = \beta$

  $m\measuredangle BQP = m\measuredangle QTP = \theta$

- De TAPC y CPBQ inscriptible:

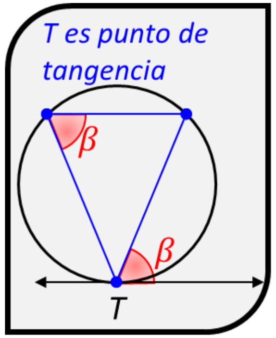
  $m\measuredangle ATP = m\measuredangle ACP = \beta$

  $m\measuredangle BQP = m\measuredangle PCB = \theta$

Demostrar que:

$$x^2 = (a)(b)$$

Para demostrar el teorema, aprovechemos los cuadriláteros inscriptible TAPC y CPBQ trazando las diagonales.



- Entonces el ΔAPC ~ ΔCPB:

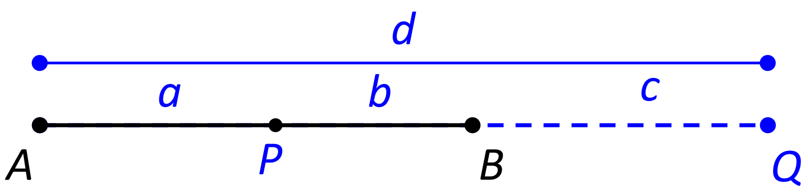
$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

$$\therefore x^2 = (a)(b)$$

SEMEJANZA

CUATERNA ARMÓNICA:

Es aquella razón constante (proporcional) generada por los segmentos determinados por un punto interno y externo a un segmento dado.



- Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{d}{c}$:

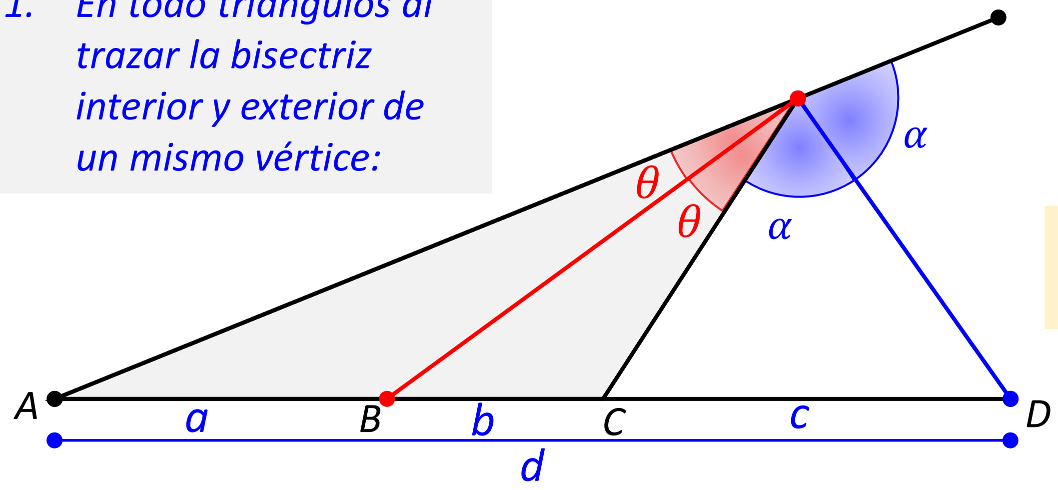
ENTONCES:
A, P, B y Q son puntos armónicos

DONDE:

- *P y Q son conjugados armónicos con respecto* $\overline{AB}$.
- *A y B son conjugados armónicos con respecto* $\overline{PQ}$.

TEOREMAS CON CUATERNA:

1. *En todo triángulos al trazar la bisectriz interior y exterior de un mismo vértice:*

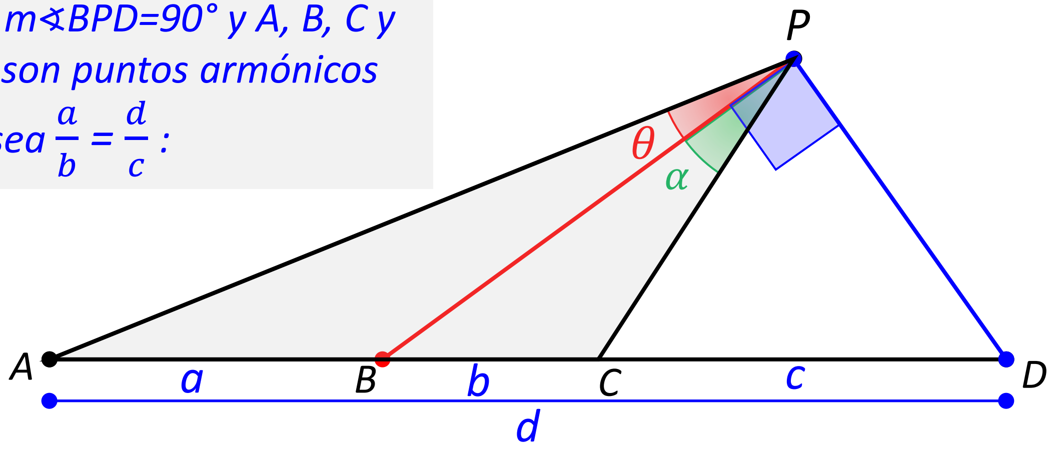


Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{d}{c}}$$

∴ A, B, C y D son puntos armónicos.

Observacion:
Si m∢BPD=90° y A, B, C y D son puntos armónicos ósea $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$:

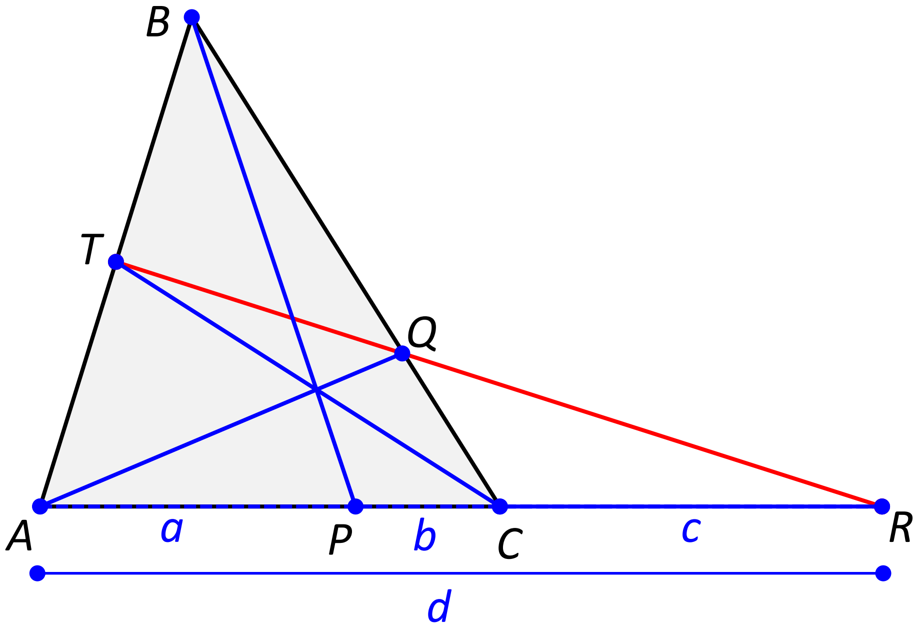


Se cumple:

$$\boxed{\theta = \alpha}$$

∴ $\overline{PB}$ *es bisectriz interior.*

2. *En todo triangulo al trazar la recta que pasa por los pies de dos de tres cevianas concurrentes:*

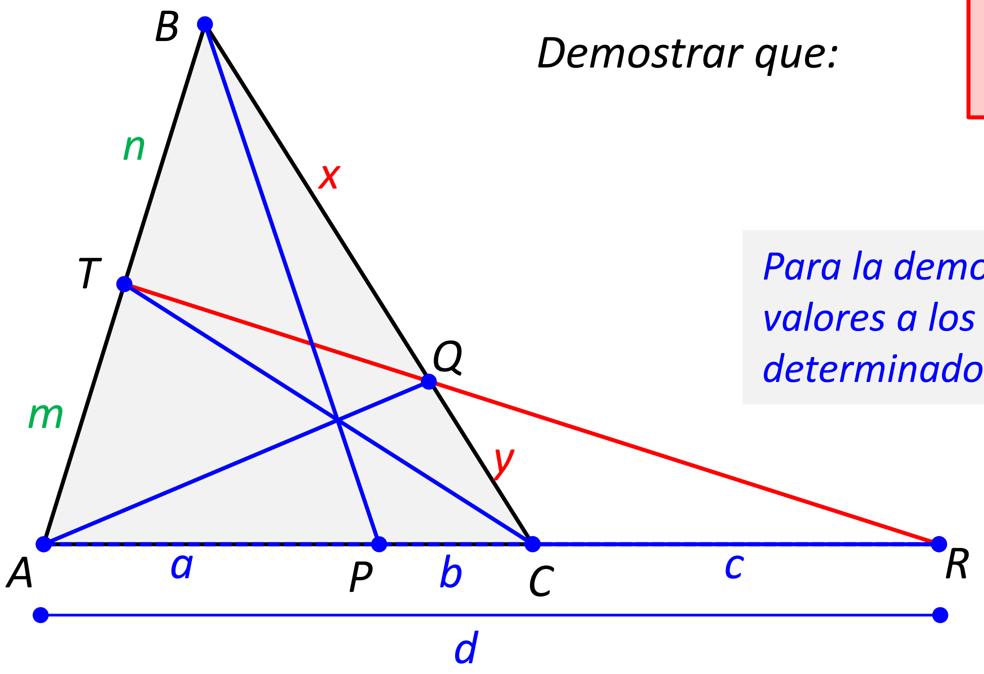


<u>*Se cumple:*</u>

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{d}{c}}$$

∴ A, P, C y R son puntos armónicos.

DEMOSTRACIÓN:



Demostrar que: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{d}{c}}$

Para la demostración le damos valores a los segmentos determinados por las cevianas

- *En el ΔABC, Por teorema de Ceva:*

$$(m)(x)(b)=(n)(y)(a)$$

- *Por teorema de Menelao:*

$$(m)(x)(c)=(n)(y)(d)$$

$$\div$$

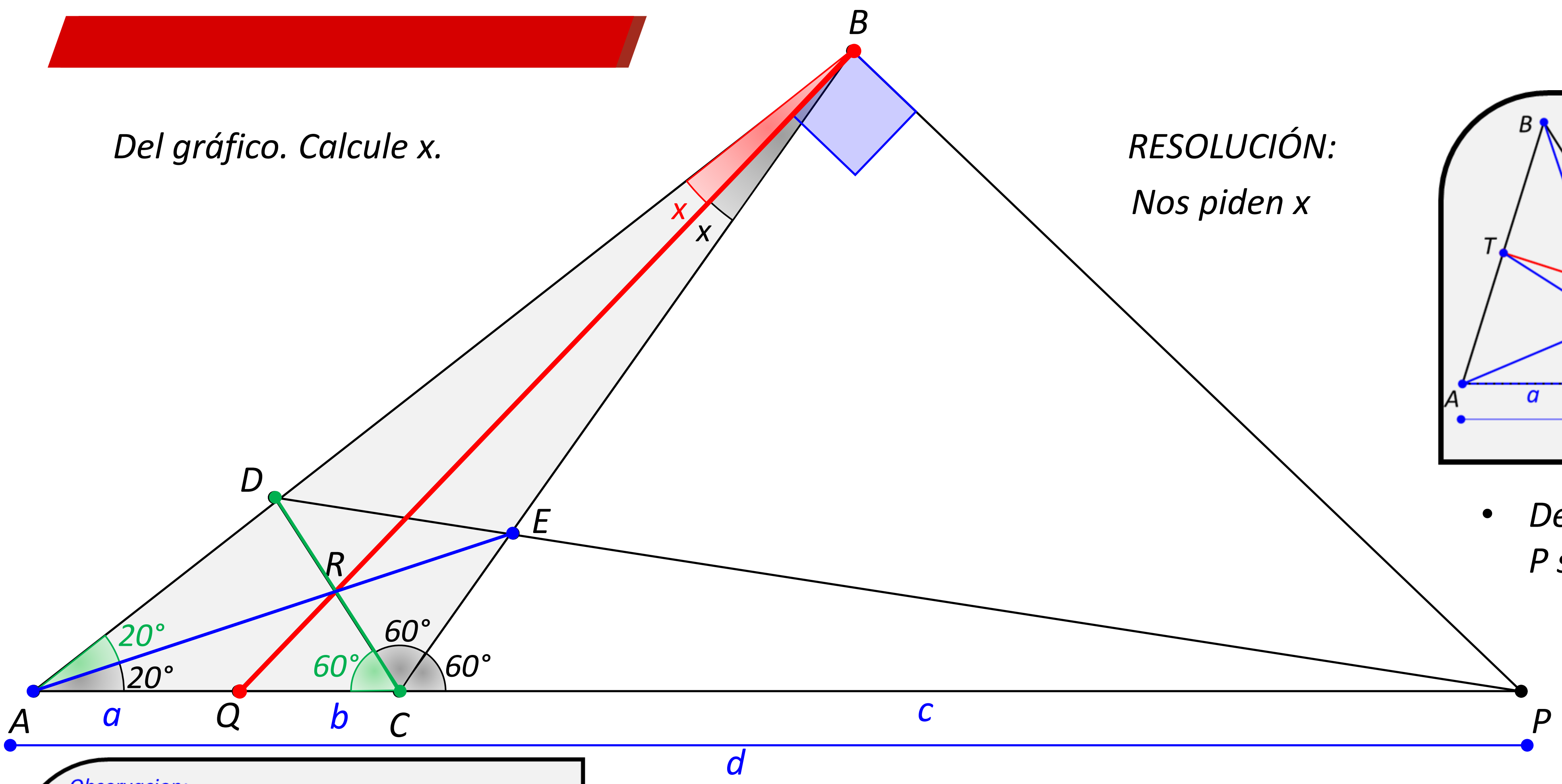
$$\frac{b}{c} = \frac{a}{d}$$

- *Dándole forma:*

$$\boxed{\therefore \frac{a}{b} = \frac{d}{c}}$$

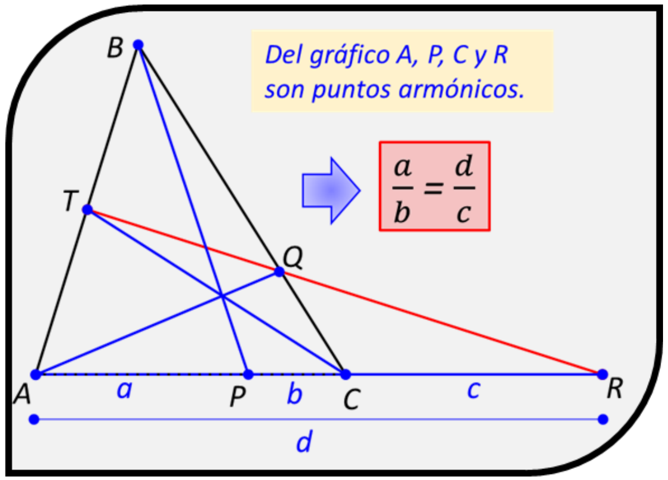
∴ A, B, C y D son puntos armónicos.

Del gráfico. Calcule x.



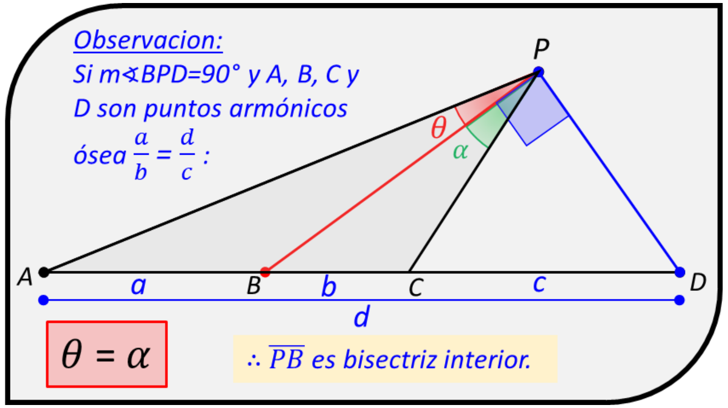
RESOLUCIÓN:

Nos piden x



- De la observación A, Q, C y P son puntos armónicos:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$



- Además m∢QBP=90° y A, Q, C y P son puntos armónicos:

  $\overline{BQ}$ es bisectriz.

  m∢ABQ=x

- Como $\overline{CD}$ es bisectriz:

  R es incentro del triangulo ABC

- Finalmente del ΔABC:

  2x+40°+120°=180°

  2x = 20°

$$\boxed{\therefore x = 10°}$$