OBJETIVOS:

- *Conocer el teorema de Arquímedes para las superficies de revolución*
- *Obtener el área de una superficie esférica a partir del teorema de Arquímedes.*
- *Reconocer las diferentes partes de una superficie esférica.*
- *Aprender a calcular las áreas de las distintas partes de la superficie esférica.*

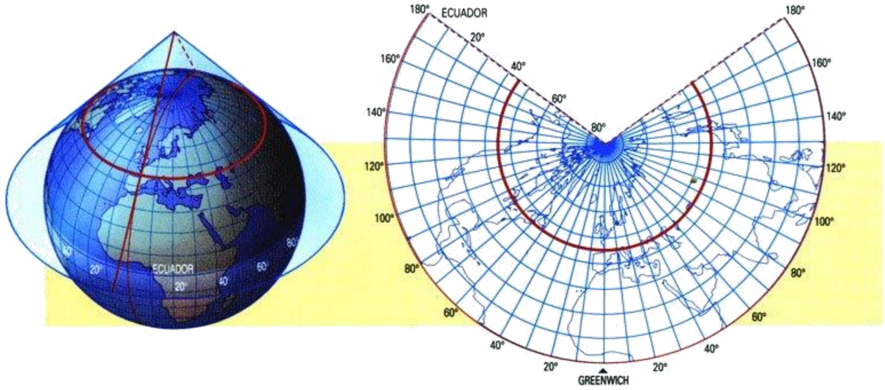
¿CÓMO SE CONSTRUYE UN MAPA TERRESTRE?

En cartografía para poder construir un mapa terrestre, se suelen usar diferentes tipos de proyecciones de la superficie terrestre (curva-esférica) sobre un plano (mapa). Claro está que cada una con ciertas ventajas y limitaciones, tenemos por ejemplo:

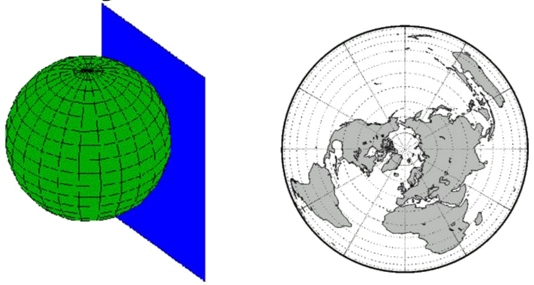
La proyección cilíndrica, consiste en proyectar la superficie esférica terrestre sobre un cilindro que es tangente a ella en el Ecuador, la más conocida en este tipo es la ***proyección de Mercator***

La proyección cónica, esta construcción se realiza proyectando la superficie terrestre sobre uno o varios conos tangentes a la misma, situando el o los vértices del o los conos en la recta que une los dos polos terrestres, la más importante es la ***proyección cónica de Lambert***

La proyección azimutal, consiste en proyectar la superficie terrestre sobre un plano tangente a ella tomando como base un punto interior o exterior al globo terráqueo, también se le conoce como ***proyección plana o cenital.***



Proyección azimutal



– La proyección se hace sobre un plano tangente a la esfera.

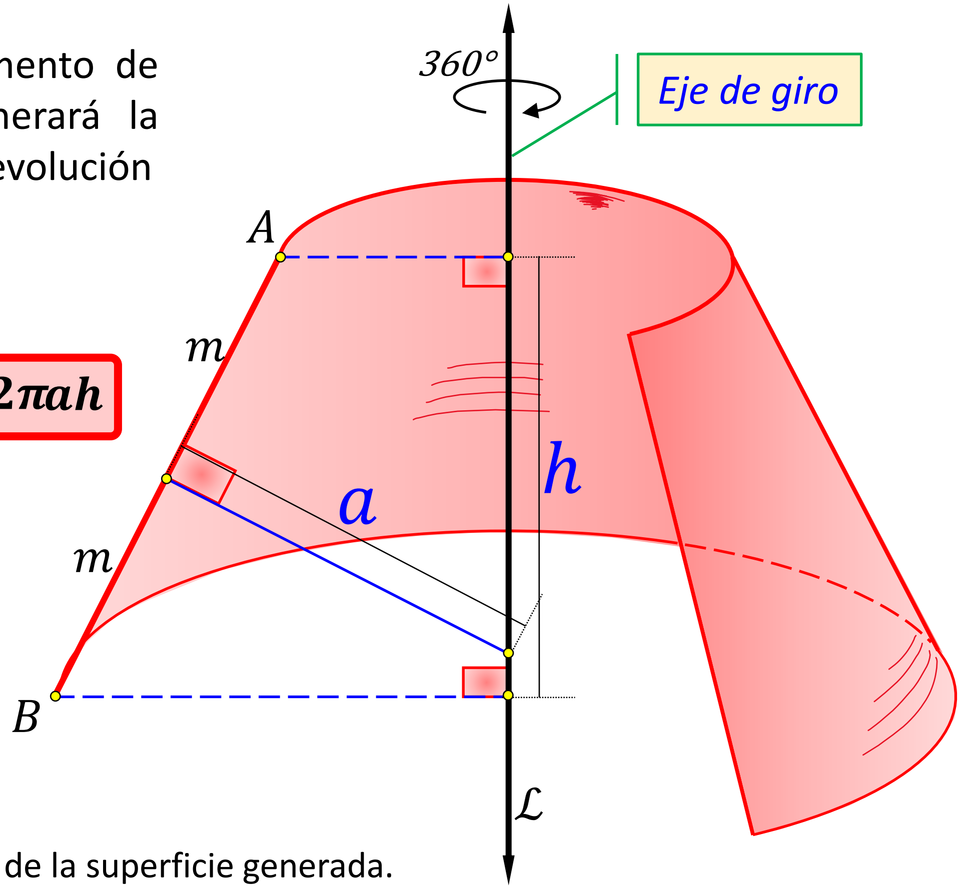
CURSO DE GEOMETRÍA

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

PRIMER TEOREMA

Sobre el cálculo del área de la superficie que genera un segmento de recta al girar 360° respecto de una recta coplanar a dicho segmento.

$\overline{AB}$ es el segmento de recta que generará la superficie de revolución



Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{A}_{sup.G_{\overline{AB}}} = \boldsymbol{2\pi a h}}$$

Donde:

$\mathbb{A}_{sup.G_{\overline{AB}}}$: Área de la superficie generada.

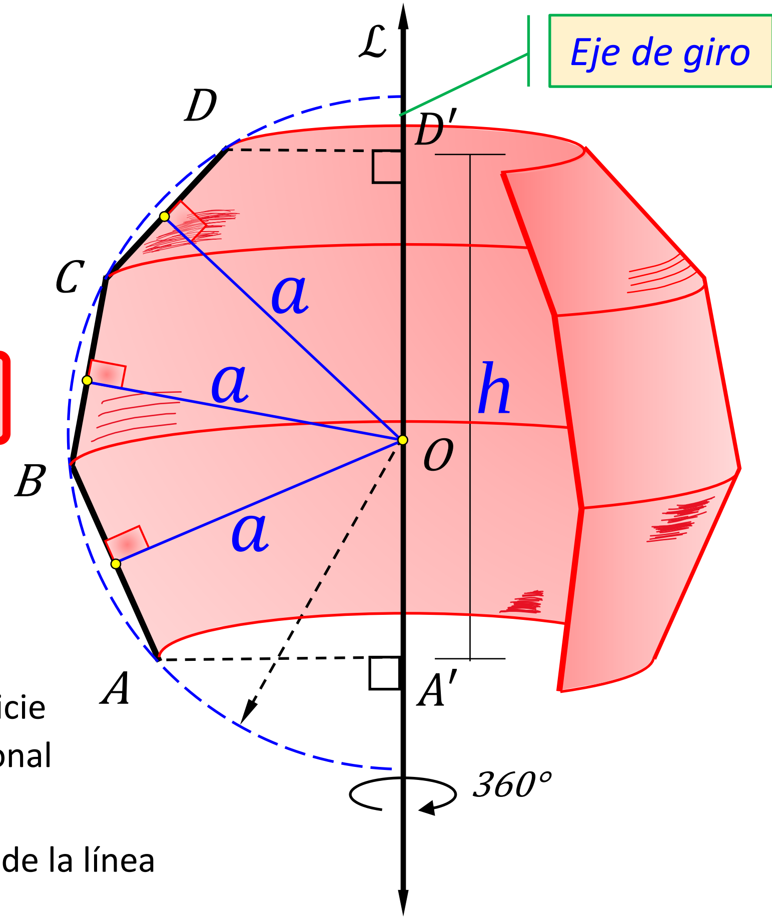
$\boldsymbol{a}$: Longitud del segmento mediatriz del $\overline{AB}$.

$\boldsymbol{h}$: Longitud de la proyección ortogonal del $\overline{AB}$ sobre el eje de giro.

GENERALIZACIÓN

Cálculo del área de la superficie que genera una poligonal regular al girar respecto de una recta coplanar a dicha poligonal.

$A - B - C - D$ es la línea poligonal regular que generará a la superficie de revolución



Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{A}_{Sup.\,Gen.} = \boldsymbol{2\pi a h}}$$

Donde:

$\mathbb{A}_{Sup.Gen}$: Área de la superficie generada por la línea poligonal regular.

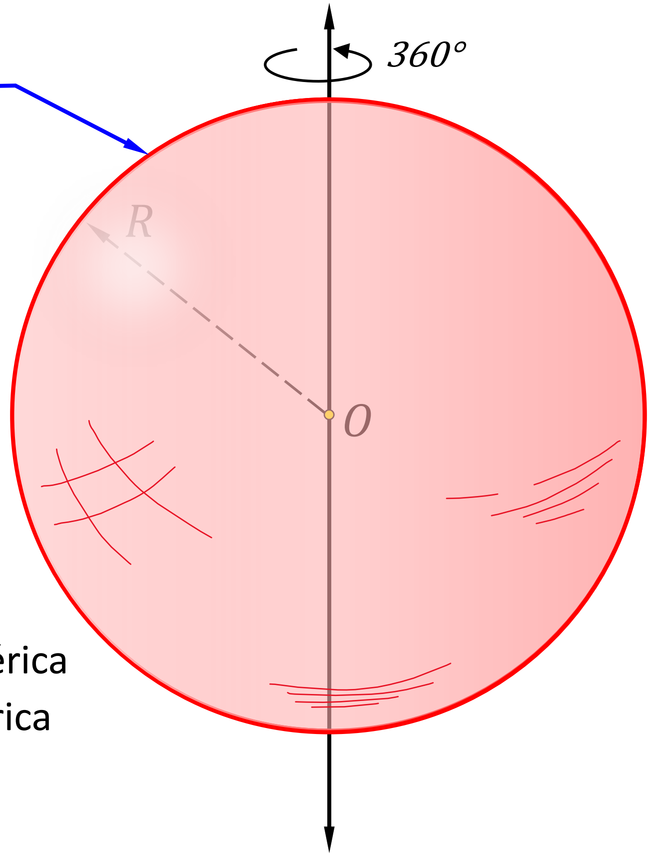
$\boldsymbol{a}$: Longitud de la apotema de la línea poligonal regular.

$\boldsymbol{h}$: Longitud de la proyección ortogonal de la línea poligonal regular sobre el eje de giro.

SUPERFICIE ESFÉRICA

Si consideramos a la superficie esférica, como la superficie generada por una semicircunferencia alrededor de su diámetro, aprovechando el teorema de Arquímedes en su caso general, se puede calcular el área de la superficie esférica.

Semicircunferencia generadora



Se cumple:

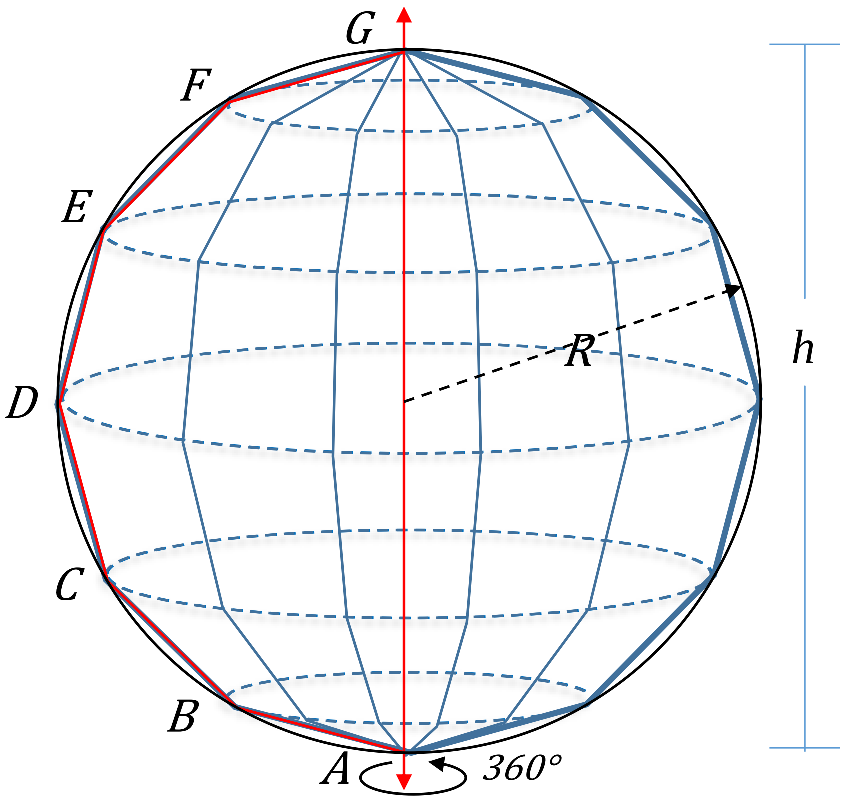
$$\boxed{\mathbb{A}_{\substack{sup.\\ esf.}} = \mathbf{4\pi R^2}}$$

Donde:

O: Centro de la sup. esférica

R: Radio de la sup. esférica

PRUEBA DEL TEOREMA



Ya que el teorema de Arquímedes se verifica para una poligonal regular de cualquier cantidad de lados:

Consideremos entonces una poligonal regular inscrita en una circunferencia de radio R que tenga una cantidad grande de lados, el área de su superficie generada por rotación seguirá siendo: $\mathbf{2\pi Rh}$

Basta considerar la poligonal de una cantidad infinita de lados, de modo que al girar obtenemos una superficie esférica cada vez más perfecta y el teorema aún seguirá siendo válido:

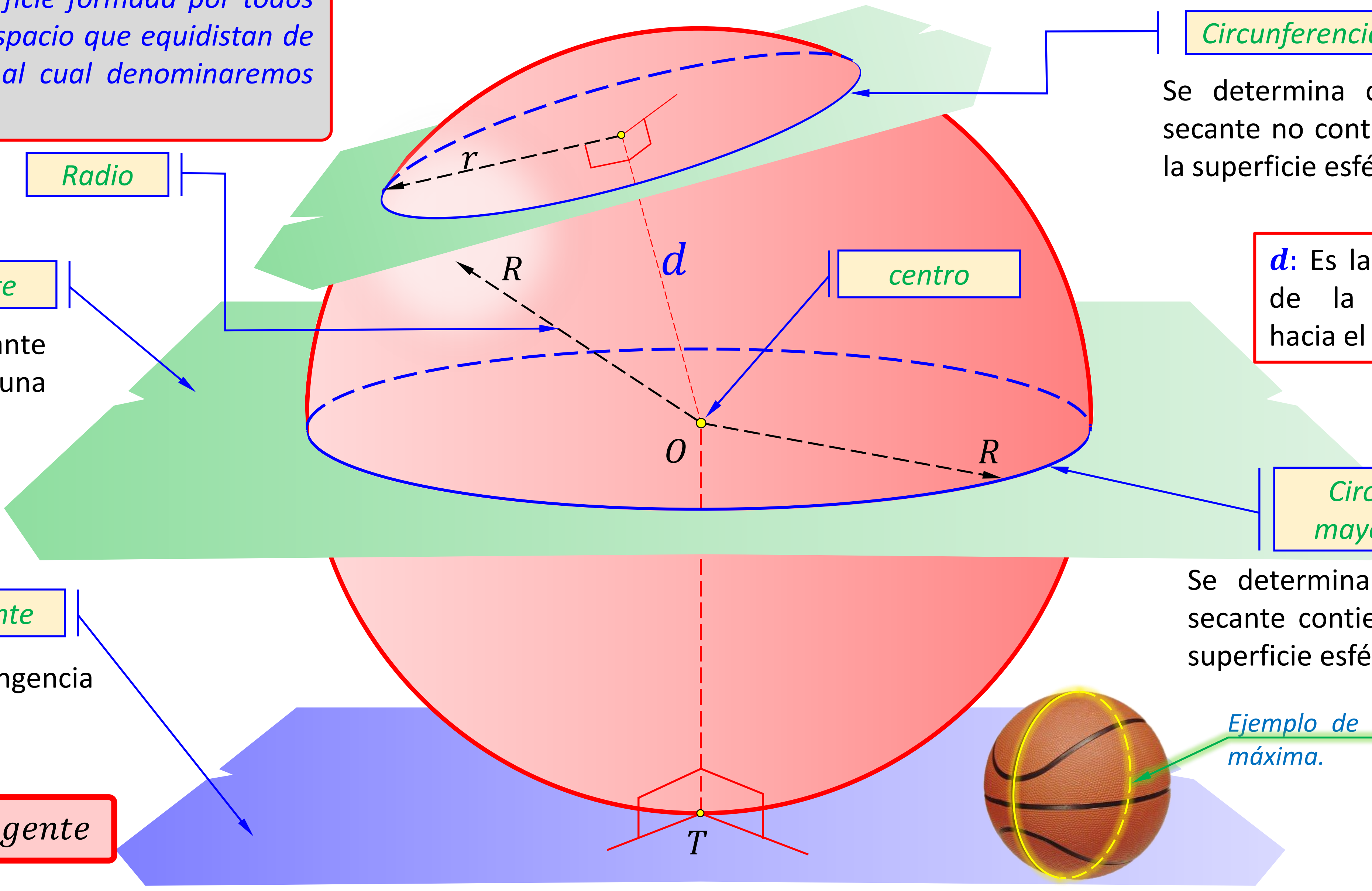
$$\mathbb{A}_{Sup.\,Generada} = 2\pi Rh$$

Pero ya que la poligonal AB ... FG tiene sus extremos en el eje de giro, es fácil reconocer que al tener muchos lados: $h = 2R$. Reemplazando:

$$\therefore \mathbb{A}_{\substack{Sup.\\ esf.}} = \mathbf{4\pi R^2}$$

SUPERFICIE ESFÉRICA

Es aquella superficie formada por todos los puntos del espacio que equidistan de otro punto fijo al cual denominaremos centro



Radio

Plano secante

Todo plano secante determina una circunferencia

Plano tangente

T: punto de tangencia

Se cumple:

$\overline{OT} \perp$ ■*tangente*

Circunferencia menor

Se determina cuando el plano secante no contiene al centro de la superficie esférica

centro

d: Es la distancia del centro de la superficie esférica hacia el plano secante

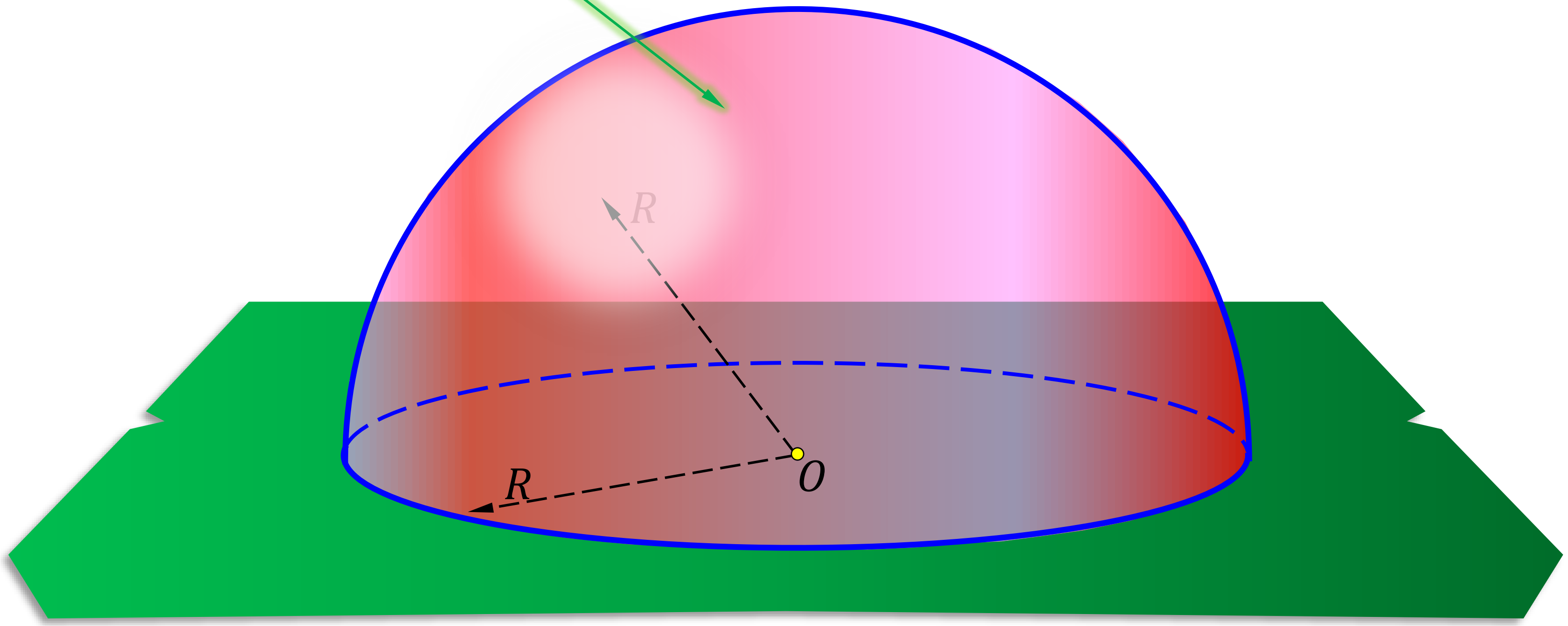
Circunferencia mayor (máxima)

Se determina cuando el plano secante contiene al centro de la superficie esférica

Ejemplo de circunferencia máxima.

SUPERFICIE ESFÉRICA

Todo plano secante que determina una circunferencia máxima en la superficie esférica la divide en dos semi superficies esféricas. En el gráfico se muestra una ***Semi superficie esférica***.



Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{A}_{\substack{\text{semi} \\ sup.esf.}} = 2\pi R^2}$$

Algunos ejemplos cotidianos los encontramos en lámparas como también en bandejas para alimentos.

SUPERFICIE ESFÉRICA

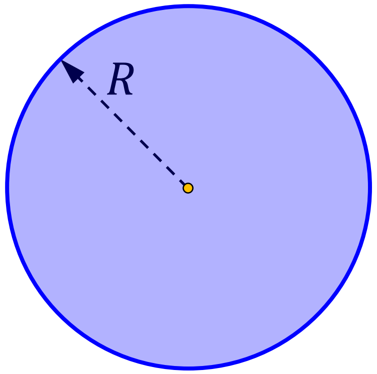
APLICACIÓN

Se tiene una superficie esférica, tal que su área y la longitud de la circunferencia máxima son numéricamente iguales. Calcule el área de dicha superficie.

$A)\ 2\pi$ $\quad B)\ \frac{\pi}{2}$ $\quad C)\ 4\pi$

$D)\ \pi$ $\quad E)\ \frac{\pi}{4}$

RECORDAR

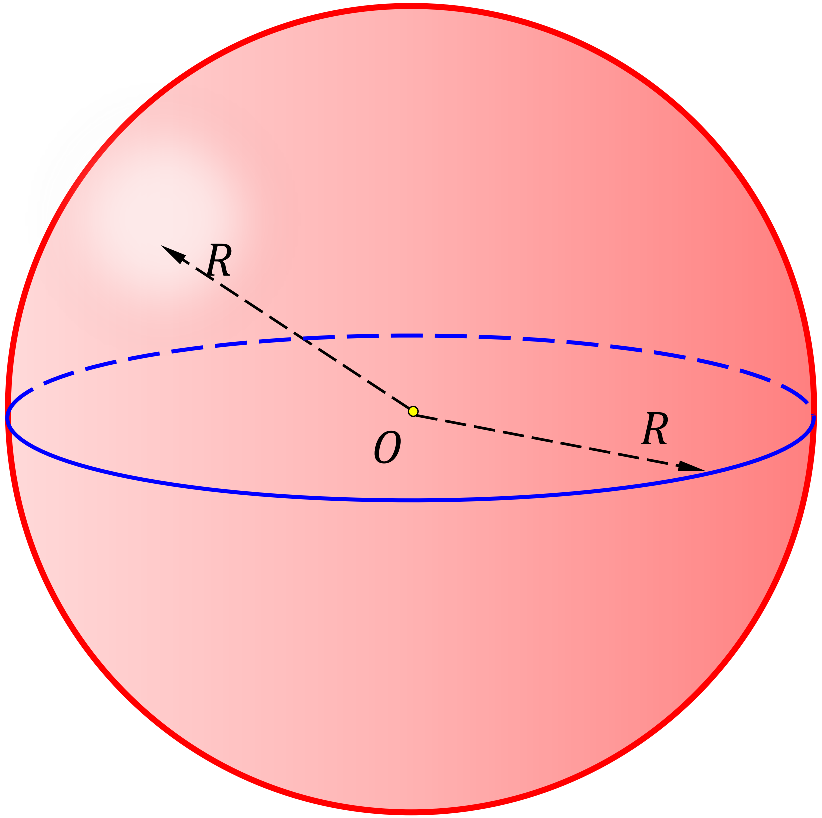


- Ten en cuenta que:

La longitud de la circunferencia $(\ell_{\odot})$ es igual a: $\boxed{\ell_{\odot} = 2\pi \cdot R}$

Resolución: Piden $\mathbb{A}_{sup.esf.} = 4\pi R^2 \ldots (i)$

Dato: $\mathbb{A}_{sup.esf.} = \ell_{\odot máx.}$



- Del dato:

$$\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} = \cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{R}$$

$$\rightarrow R = \frac{1}{2}$$

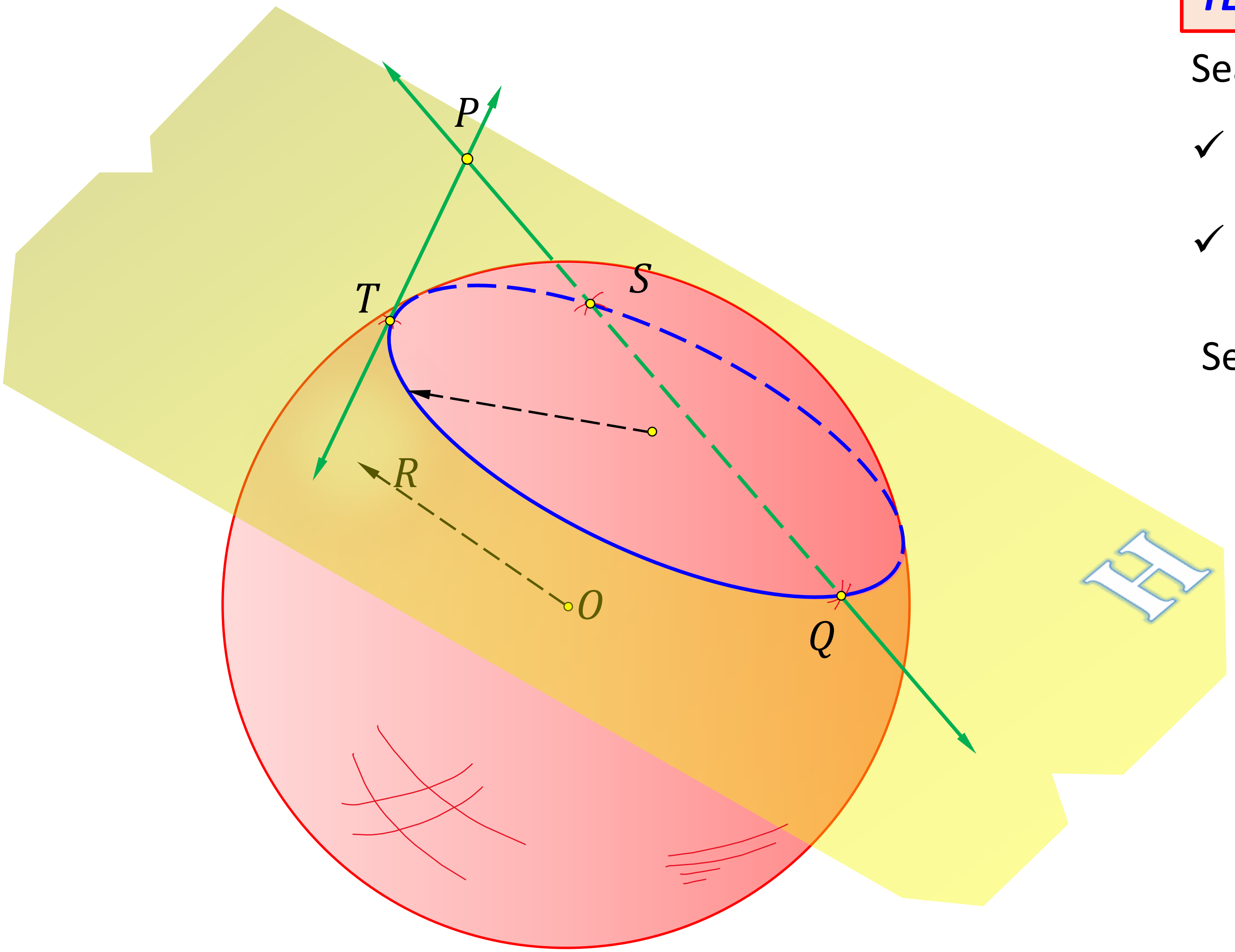
- Reemplazamos en (i):

$$\mathbb{A}_{sup.esf.} = 4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbb{A}_{sup.esf.} = \pi}$$

Clave **D**

SUPERFICIE ESFÉRICA



TEOREMA

Sea P un punto exterior a la superficie esférica

- ✓ $\overleftrightarrow{PT}$ tangente a la superficie esférica en T
- ✓ $\overleftrightarrow{PSQ}$ secante a la superficie esférica en S y Q

Se cumple:

$$\boxed{(PT)^2 = (PS)(PQ)}$$

Prueba:

- Como $\overleftrightarrow{PT}$ y $\overleftrightarrow{PSQ}$ son secantes, éstas determinan ▰H
- Luego T, S y Q no colineales, dichos puntos pertenecen a la circunferencia menor determinada en la superficie esférica por el plano H.
- En la circunferencia menor se cumple el teorema de la tangente, lo cual prueba el teorema.

SUPERFICIE ESFÉRICA

TEOREMA

Sea A un punto exterior a la superficie esférica

✓ $\overleftrightarrow{ADE}$ secante a la superficie esférica en D y E

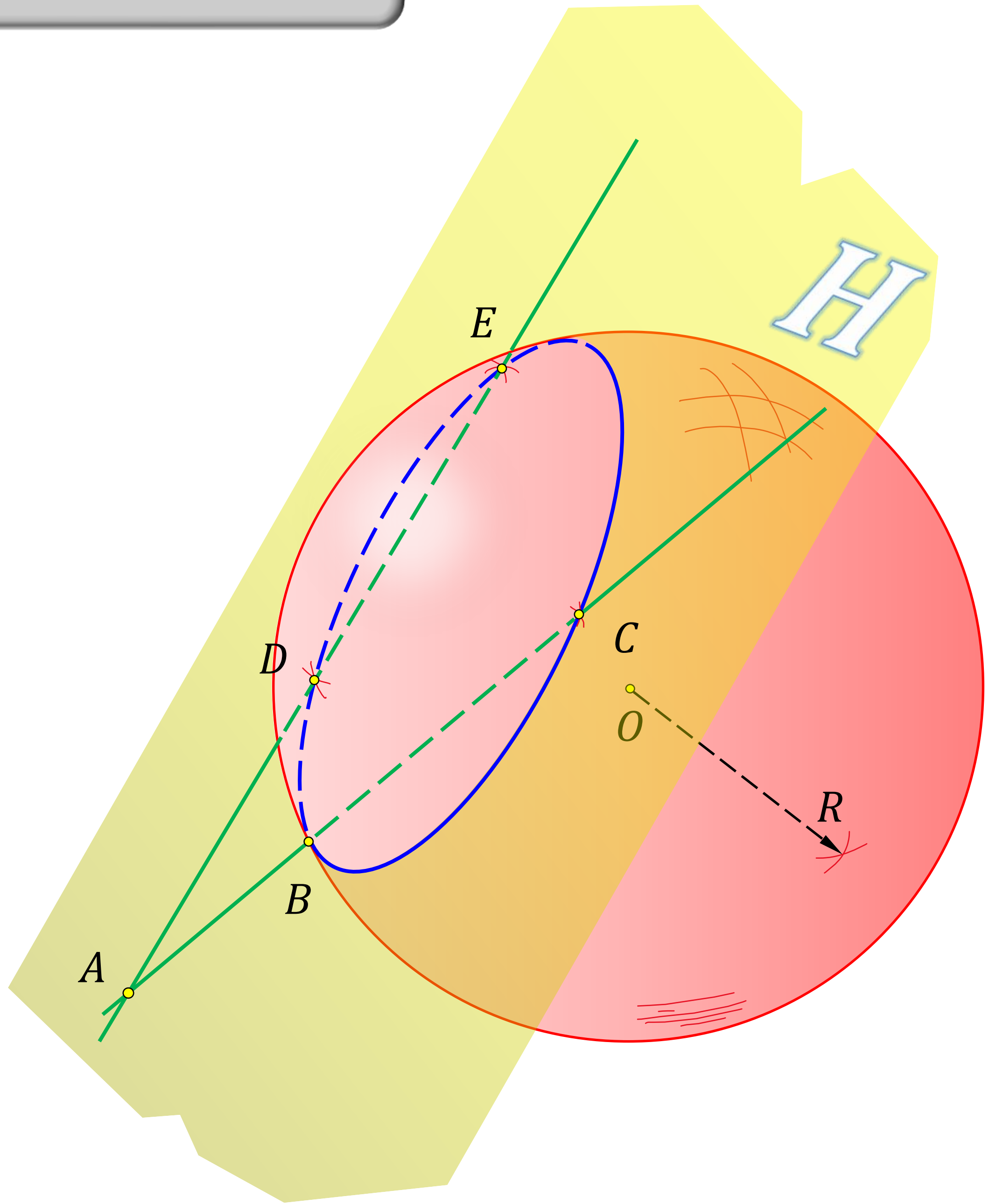
✓ $\overleftrightarrow{ABC}$ secante a la superficie esférica en B y C

Se cumple:

$$\boxed{(\boldsymbol{AD})(\boldsymbol{AE}) = (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AC})}$$

Prueba:

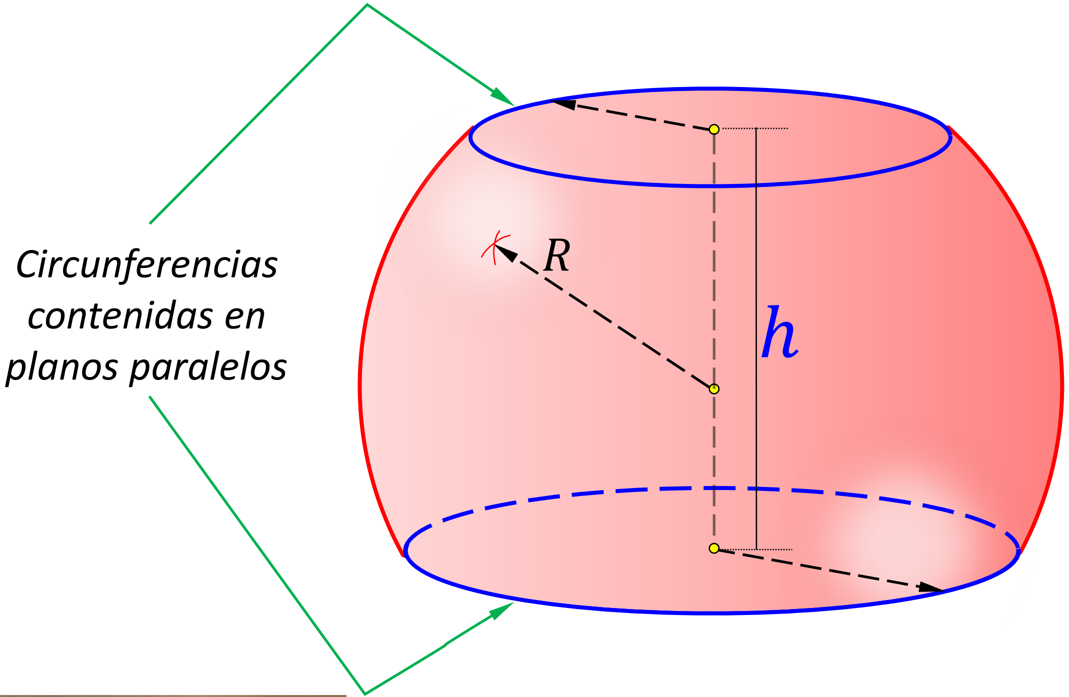
- Como $\overleftrightarrow{ADE}$ y $\overleftrightarrow{ABC}$ son secantes, éstas determinan ▰H
- Luego el plano H determina una circunferencia menor en la superficie esférica, donde las rectas mencionadas son secantes a dicha circunferencia en los puntos B, C, D y E.
- En la circunferencia menor se cumple el teorema de las secantes, lo cual prueba el teorema.

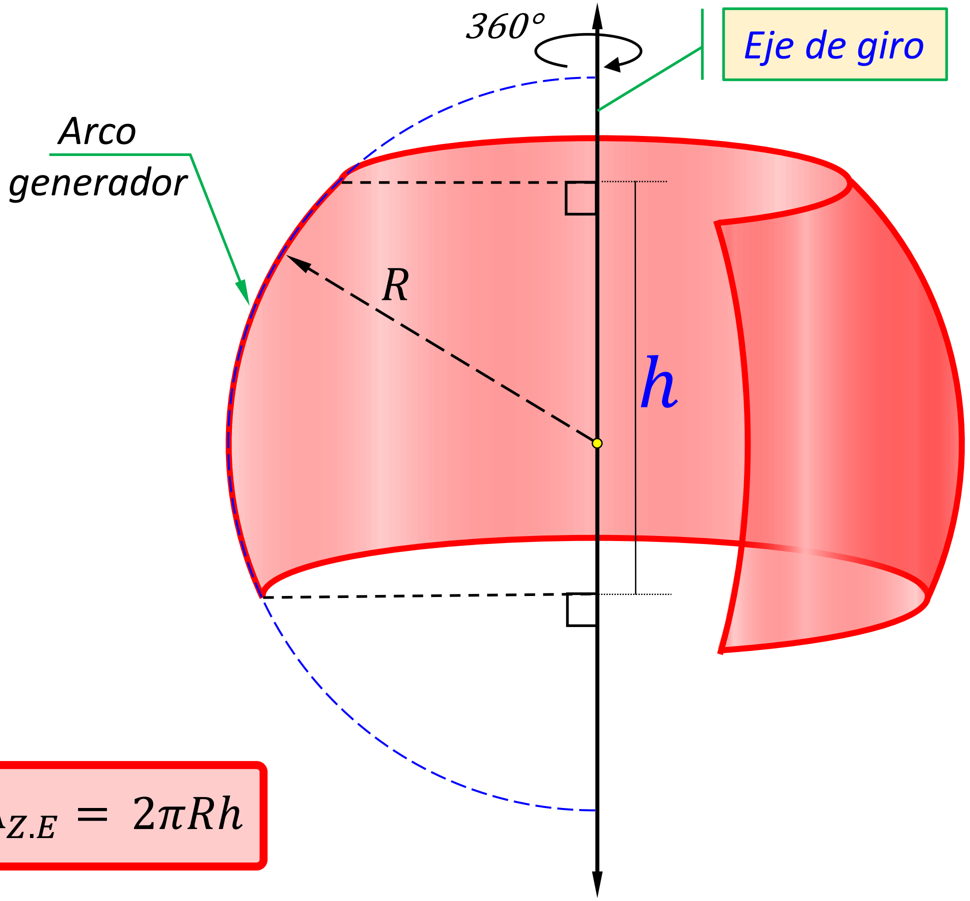


PARTES DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

ZONA ESFÉRICA

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos. También puede considerarse como la superficie generada por un arco de circunferencia que gira respecto al diámetro de la semicircunferencia que lo contiene.





Algunas bolas de billar nos pueden ejemplificar la idea de la zona esférica.

Se cumple: $\boxed{\mathbb{A}_{Z.E} = 2\pi R h}$

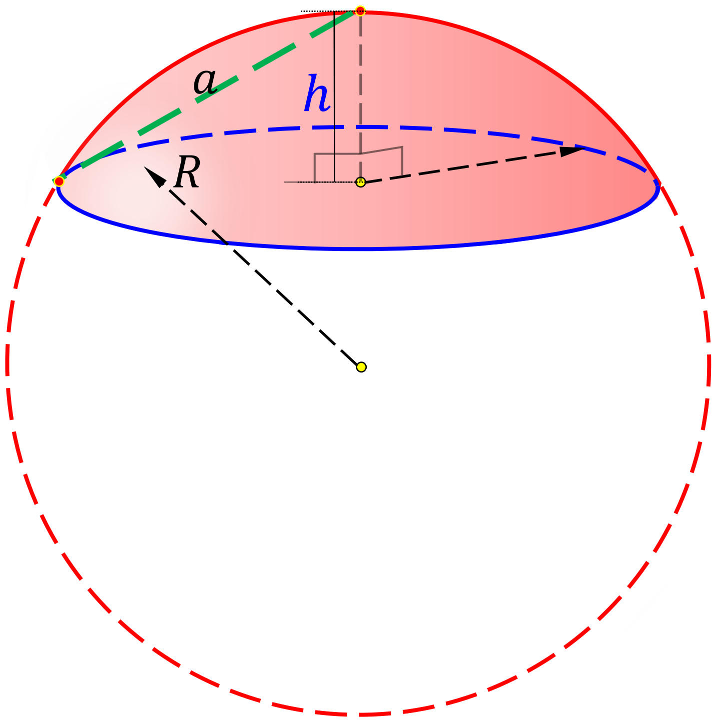
Donde:

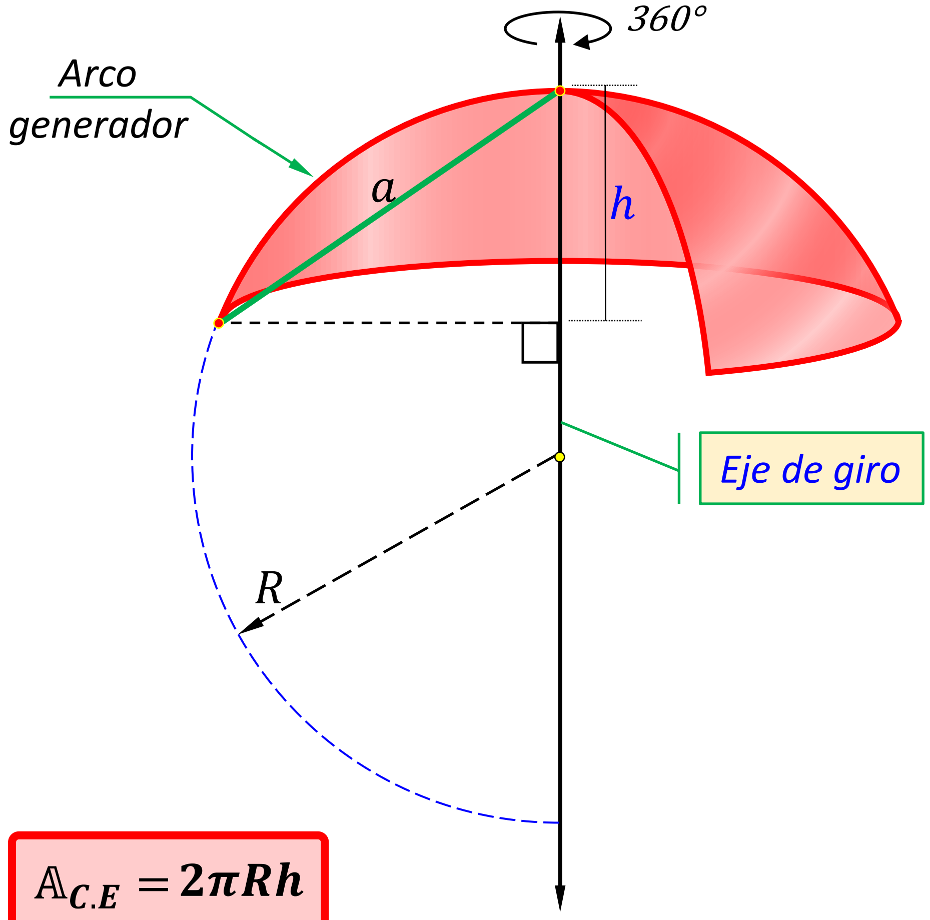
- $\mathbb{A}_{Z.E}$: Área de la zona esférica
- $\boldsymbol{h}$: altura de la zona esférica o proyección ortogonal del arco generador sobre el eje de giro

PARTES DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

CASQUETE ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica comprendida entre una circunferencia determinada por un plano secante.
También puede considerarse como la superficie generada por un arco de circunferencia que gira respecto al diámetro de la semicircunferencia que lo contiene, donde un extremo del arco coincide con un extremo de su diámetro.





Algunas lámparas de techo en sus diseños usan los casquetes esféricos.

Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{A}_{C.E} = 2\pi R h}$$

Donde:

- $\mathbb{A}_{C.E}$: Área del casquete esférico
- $\boldsymbol{h}$: altura del casquete esférico o proyección ortogonal del arco generador sobre el eje de giro

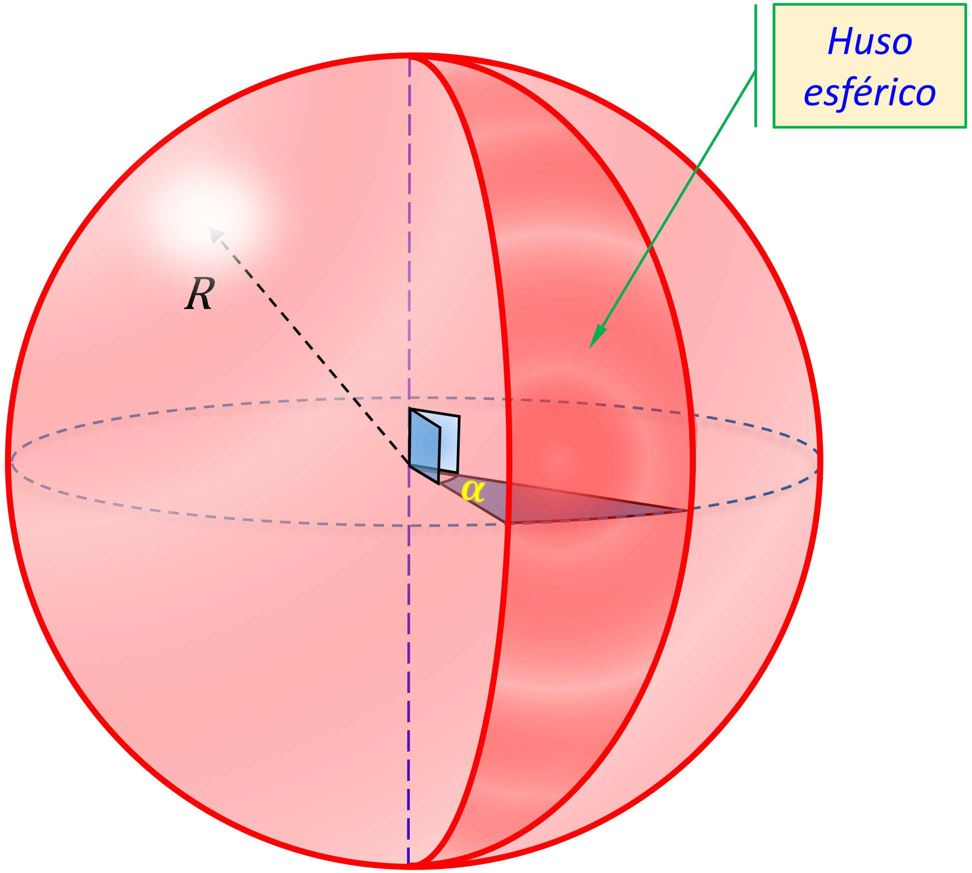
Además:

$$\boxed{\mathbb{A}_{C.E} = \pi a^2}$$

PARTES DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

HUSO ESFÉRICO

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias máximas que tengan el mismo diámetro. También puede considerarse como la superficie generada por una semicircunferencia cuando gira respecto a uno de sus diámetros de tal manera que la medida del ángulo de giro sea menor a 360°.



En ciertos diseños de algunas lámparas también se usan los husos esféricos.

- Para calcular el área del Huso esférico, usaremos una regla de tres simple:

Área	**Medida del ∢ de giro**
$4\pi R^2$	$360°$
$\mathbb{A}_{H.E}$	α

- Despejamos $\mathbb{A}_{H.E}$ y tenemos:

$$\mathbb{A}_{H.E} = \frac{\alpha 4\pi R^2}{360°}$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbb{A}_{H.E} = \frac{\alpha\pi R^2}{90°}}$$

Donde:

- $\mathbb{A}_{H.E}$: Área del huso esférico

CURSO DE GEOMETRÍA

PARTES DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

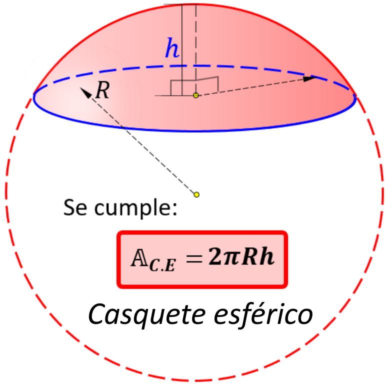
EXAMEN UNI **2019 – II**

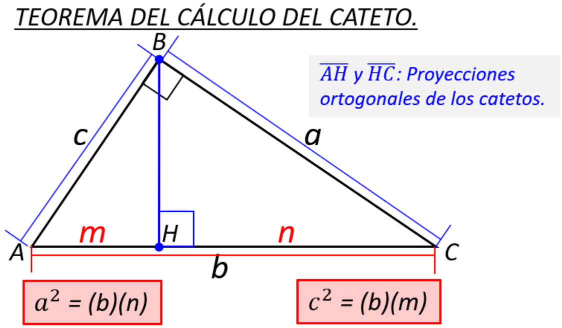
Determine a qué altura de la Tierra debe ubicarse un satélite para que la región visible sea $1/3$ de la superficie terrestre, considere que el radio de la Tierra es R.

$A)\ \frac{1}{2}R$ $\quad B)\ R$ $\quad C)\ \frac{3}{2}R$

$D)\ 2R$ $\quad E)\ 3R$

RECORDAR

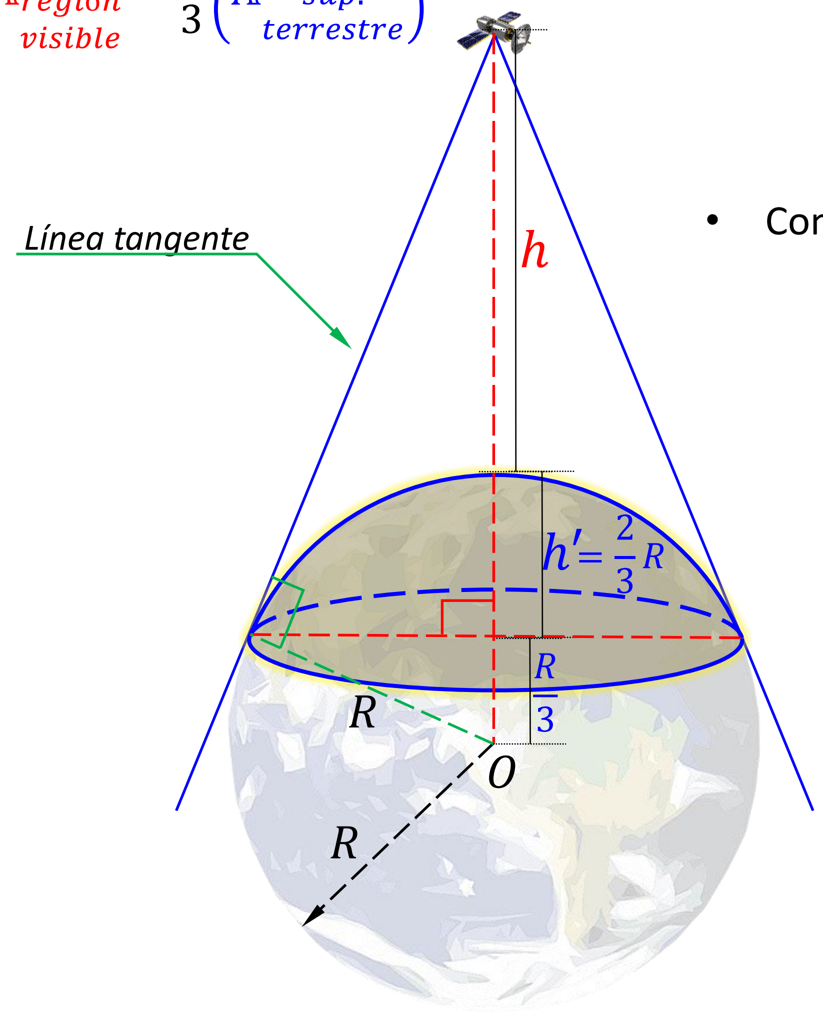




Resolución: Piden h

Dato:

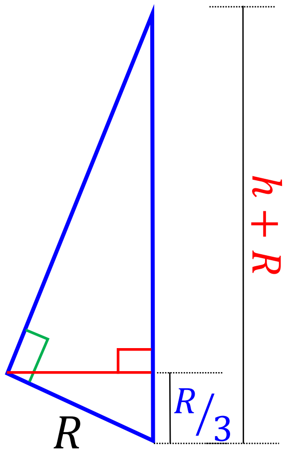
$$\mathbb{A}_{\substack{región\\visible}} = \frac{1}{3}\left(\mathbb{A}_{\substack{sup.\\terrestre}}\right)$$



- Notamos que la región visible es equivalente a un casquete esférico y que la superficie terrestre es equivalente a una superficie esférica.
- En el dato:

$$\cancel{2\pi}\cancel{R}h' = \frac{1}{3}(\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}) \rightarrow h' = \frac{2}{3}R$$

- Completamos longitudes y se observa:



Por relaciones métricas:

$$R^2 = \left(\frac{R}{3}\right)(h+R)$$

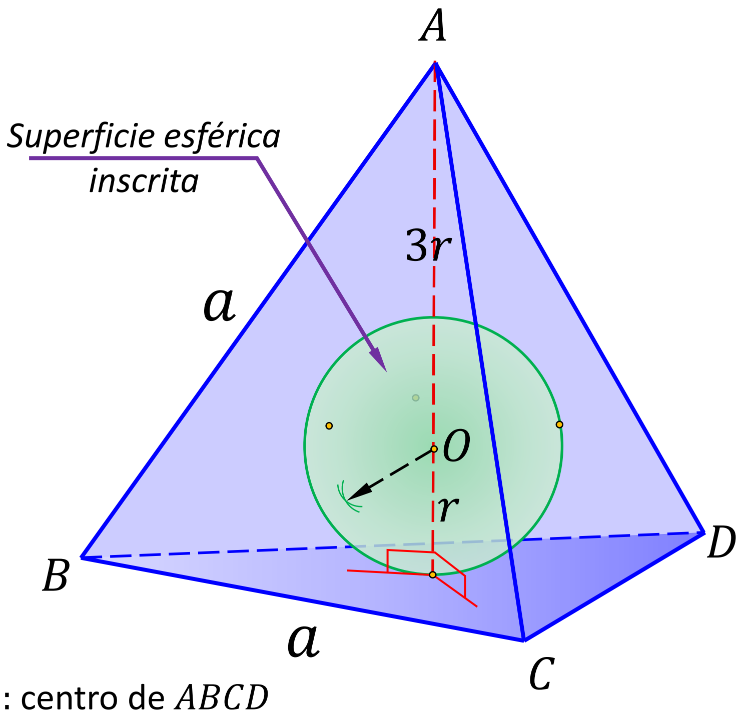
$$\boxed{\therefore h = 2R}$$

Clave **D**

Recordemos que en el tema de poliedros regulares, indicamos que ellos tienen un centro, pero esto como lo podemos utilizar.

Dicho centro, coincide con el centro de las superficies esféricas inscritas y circunscritas a los poliedros regulares. Veamos algunas situaciones:

Tetraedro regular $ABCD$



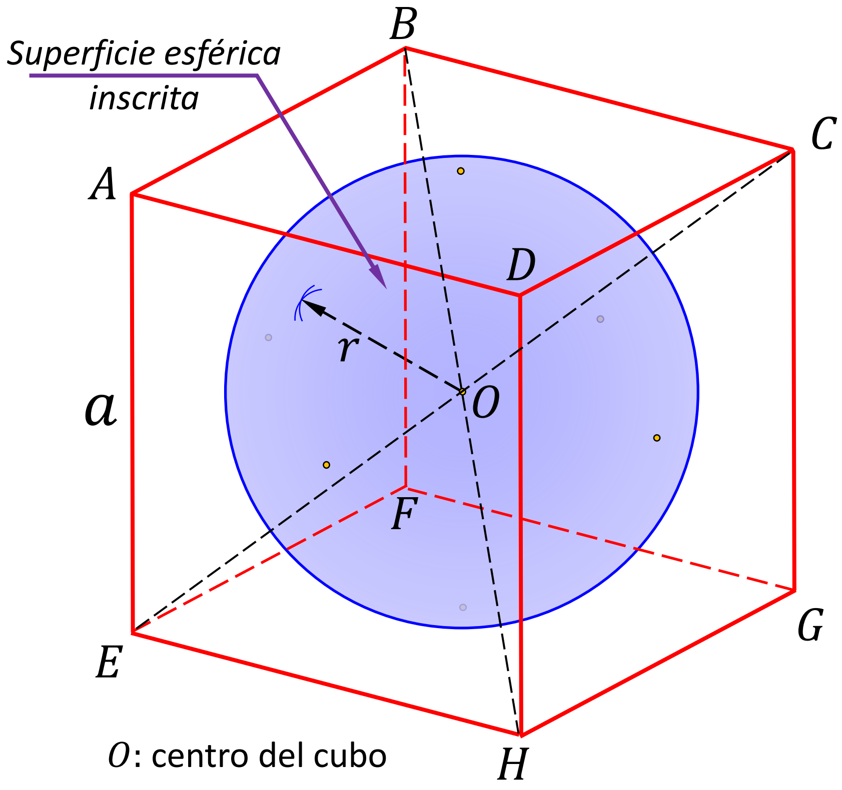
O: centro de $ABCD$

Se cumple:

$\boldsymbol{r}$: longitud del radio de la superficie esférica inscrita

$\boldsymbol{3r}$: longitud del radio de la superficie esférica circunscrita

Hexaedro regular $ABCD-EFGH$



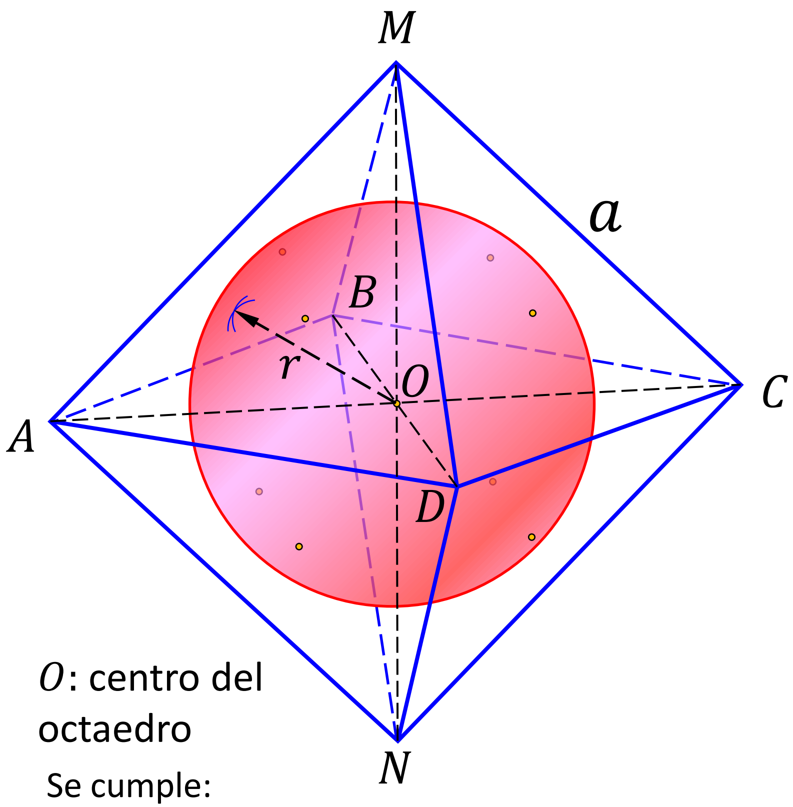
O: centro del cubo

Se cumple:

$\boldsymbol{r=\frac{a}{2}}$: longitud del radio de la superficie esférica inscrita

$\boldsymbol{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$: longitud del radio de la superficie esférica circunscrita

Octaedro regular $M-ABCD-N$



O: centro del octaedro

Se cumple:

$\boldsymbol{r=\frac{a\sqrt{6}}{6}}$: longitud del radio de la superficie esférica inscrita

$\boldsymbol{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$: longitud del radio de la superficie esférica circunscrita