OBJETIVOS:

- *Conocer la definición y características de una pirámide.*
- *Calcular la superficie y volumen de este sólido.*
- *Conocer la definición y características del tronco de pirámide.*
- *Aplicar lo aprendido en los problemas tipo examen de admisión.*

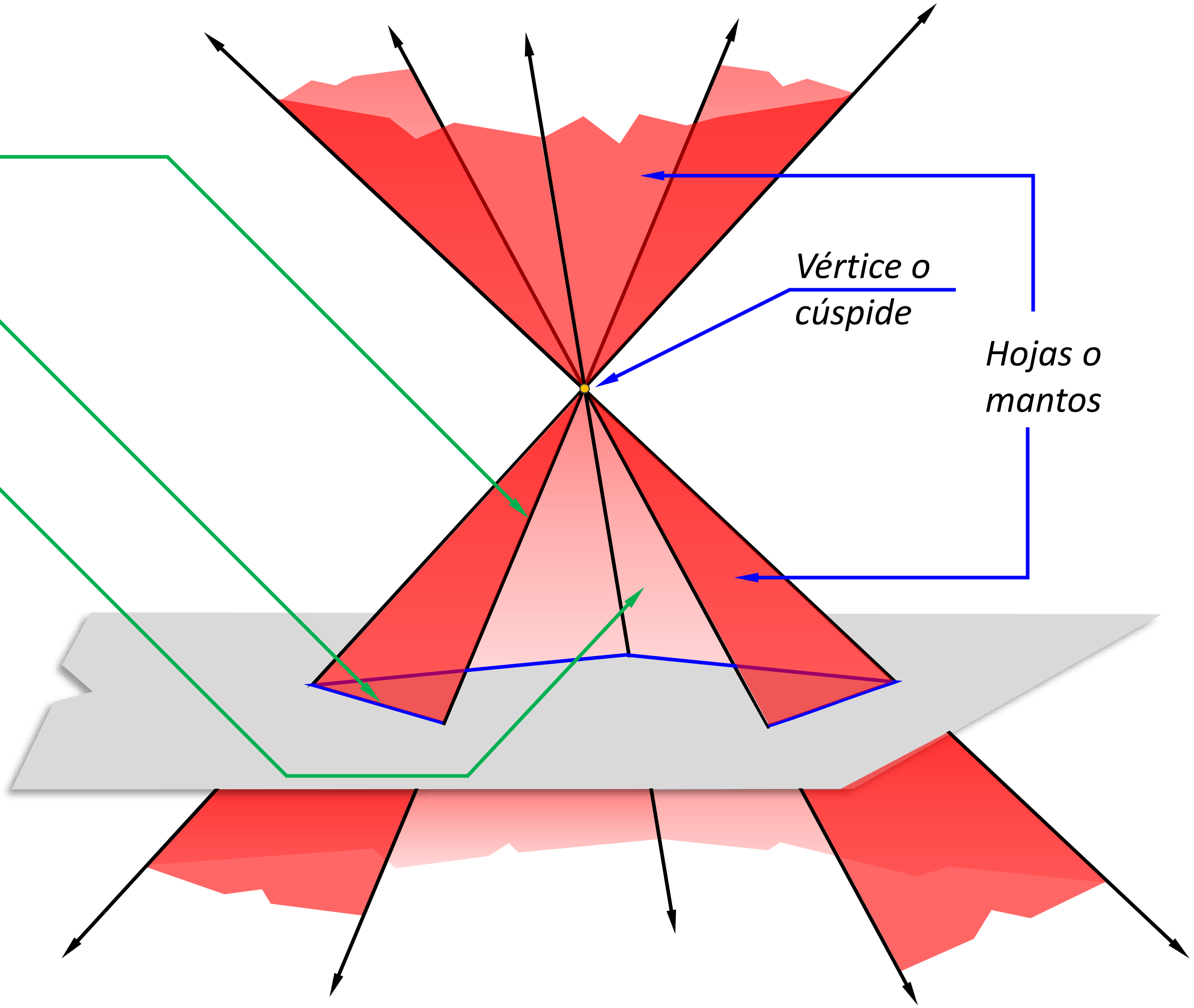
INTRODUCCIÓN

Las Pirámides son sólidos muy conocidos desde la antigüedad, y se han escrito muchas páginas no solo para mostrar sus propiedades matemáticas, sino también sus propiedades misteriosas que algunos estudiosos dicen tener, principalmente los que se dedican al estudio de la geometría sagrada, por años estas formas han sido encontradas en diversas culturas de la humanidad llegando a ser este hecho todo un misterio.

Así mismo también podemos encontrar a lo largo de la historia edificaciones con la forma de troncos de pirámide, las cuales nos da la idea de lo conocido que ya eran éstos sólidos.

SUPERFICIE PIRAMIDAL

Es la superficie generada, cuando una línea recta, denominada generatriz, recorre todos los puntos de una línea poligonal plana no secante a si misma, denominada directriz, pasando siempre por un punto fijo exterior al plano de la directriz y conocido como vértice o cúspide.



La superficie piramidal generada en el gráfico mostrado es abierta.

PIRÁMIDE

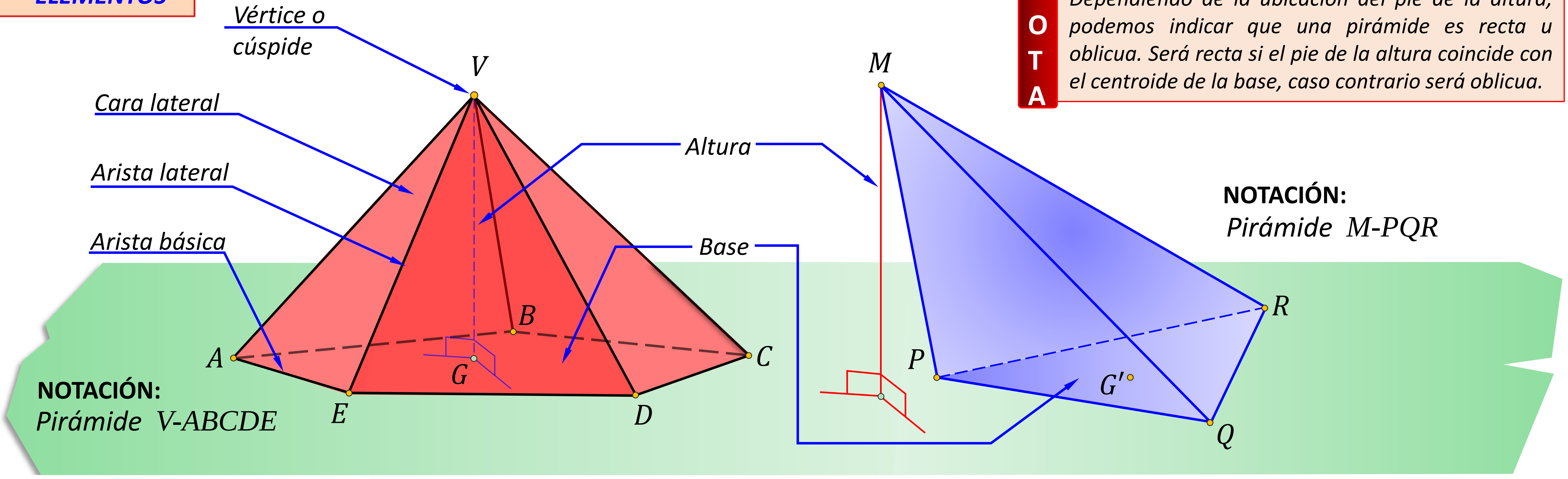
DEFINICIÓN

Es el sólido geométrico que se encuentra limitado por una superficie piramidal cerrada y un plano secante a dicha superficie que no contenga al vértice.

ELEMENTOS

NOTA

Dependiendo de la ubicación del pie de la altura, podemos indicar que una pirámide es recta u oblicua. Será recta si el pie de la altura coincide con el centroide de la base, caso contrario será oblicua.



NOTACIÓN:
Pirámide V-ABCDE

NOTACIÓN:
Pirámide M-PQR

- ✓ Si G es el centroide de la base, entonces $V - ABCDE$ es una pirámide recta.
- ✓ Si G' es el centroide de la base, entonces $M - PQR$ es una pirámide oblicua.

PIRÁMIDE

PIRÁMIDE REGULAR

*Una **PIRÁMIDE ES REGULAR**, cuando sea recta y cuya base esté limitada por un polígono regular.*

CARAS LATERALES

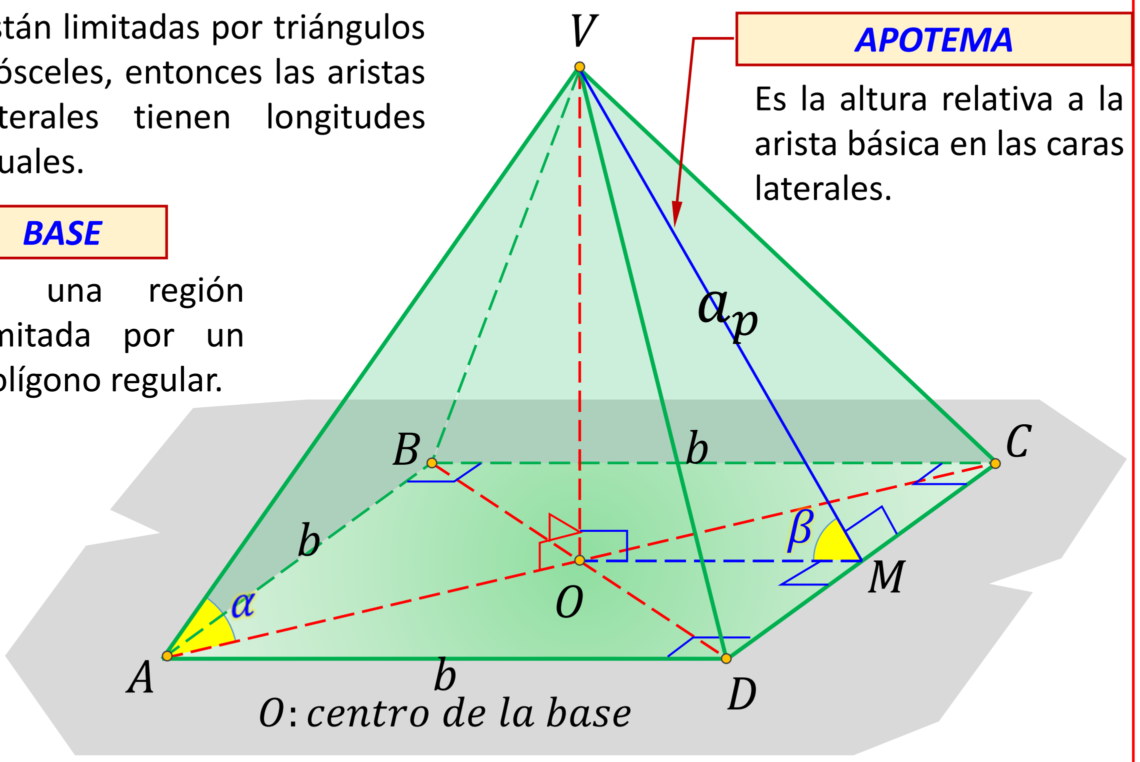
Están limitadas por triángulos isósceles, entonces las aristas laterales tienen longitudes iguales.

BASE

Es una región limitada por un polígono regular.

APOTEMA

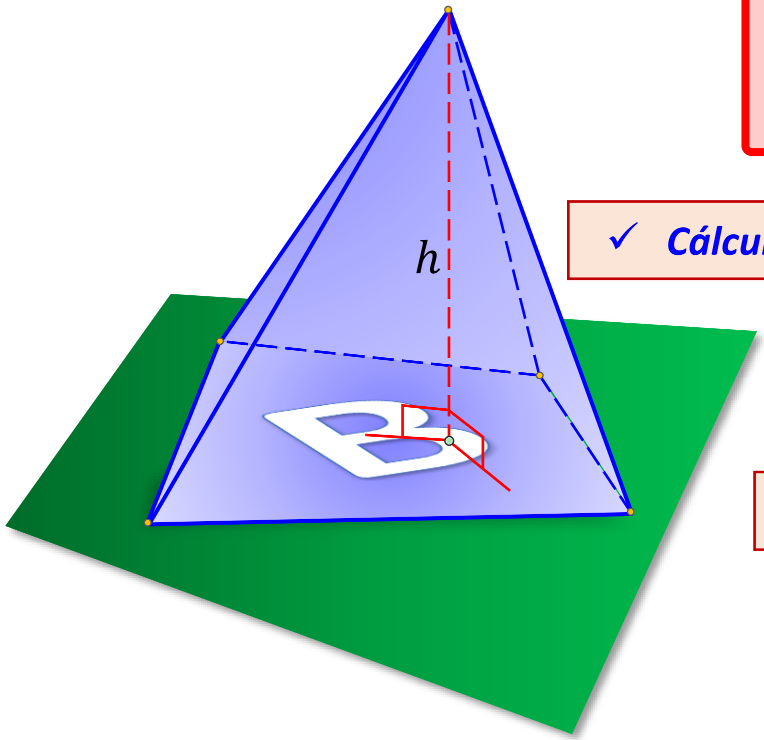
Es la altura relativa a la arista básica en las caras laterales.



α: *Medida del ángulo entre una arista lateral y la base*

β: *Medida del diedro entre una cara lateral y la base*

- Para toda pirámide



✓ Cálculo del área de la superficie lateral

$$\mathbb{A}_{S.L} = \sum \begin{matrix} \text{áreas de las} \\ \text{caras laterales} \end{matrix}$$

✓ Cálculo del área de la superficie total

$$\mathbb{A}_{S.T} = \mathbb{A}_{S.L} + \mathbb{A}_{BASE}$$

✓ Cálculo del volumen

$$\mathbb{V}_{pirámide} = \frac{(\boldsymbol{B})(h)}{3}$$

❖ Para una pirámide regular, podemos calcular la superficie lateral de la siguiente manera:

$$\mathbb{A}_{S.L} = \left(\mathbb{A}_{\substack{\mathbf{1\ cara} \\ \mathbf{lateral}}}\right)\left(\boldsymbol{n}^{\circ}_{\substack{\mathbf{lados\ de} \\ \mathbf{la\ base}}}\right) = (\boldsymbol{p}_{base})(\boldsymbol{a}_p)$$

$\boldsymbol{p}_{base}$: Semiperímetro de la base

PIRÁMIDE

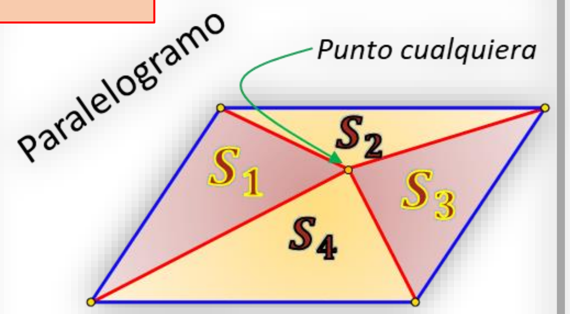
EXAMEN UNI **2020 – I**

Se tiene un paralelogramo $ABCD$ en cuyo interior se toma un punto P. Por P se levanta una perpendicular al plano del paralelogramo y en ella se toma un punto E. Halle el volumen en m^3 de la pirámide $E-DPC$, si los volúmenes de las pirámides $E-DPA$, $E-CPB$ y $E-BPA$ son $10m^3, 12m^3$ y $14m^3$ respectivamente.

$A)$ 6 $B)$ 7 $C)$ 8

$D)$ 10 $E)$ 13

RECORDAR:

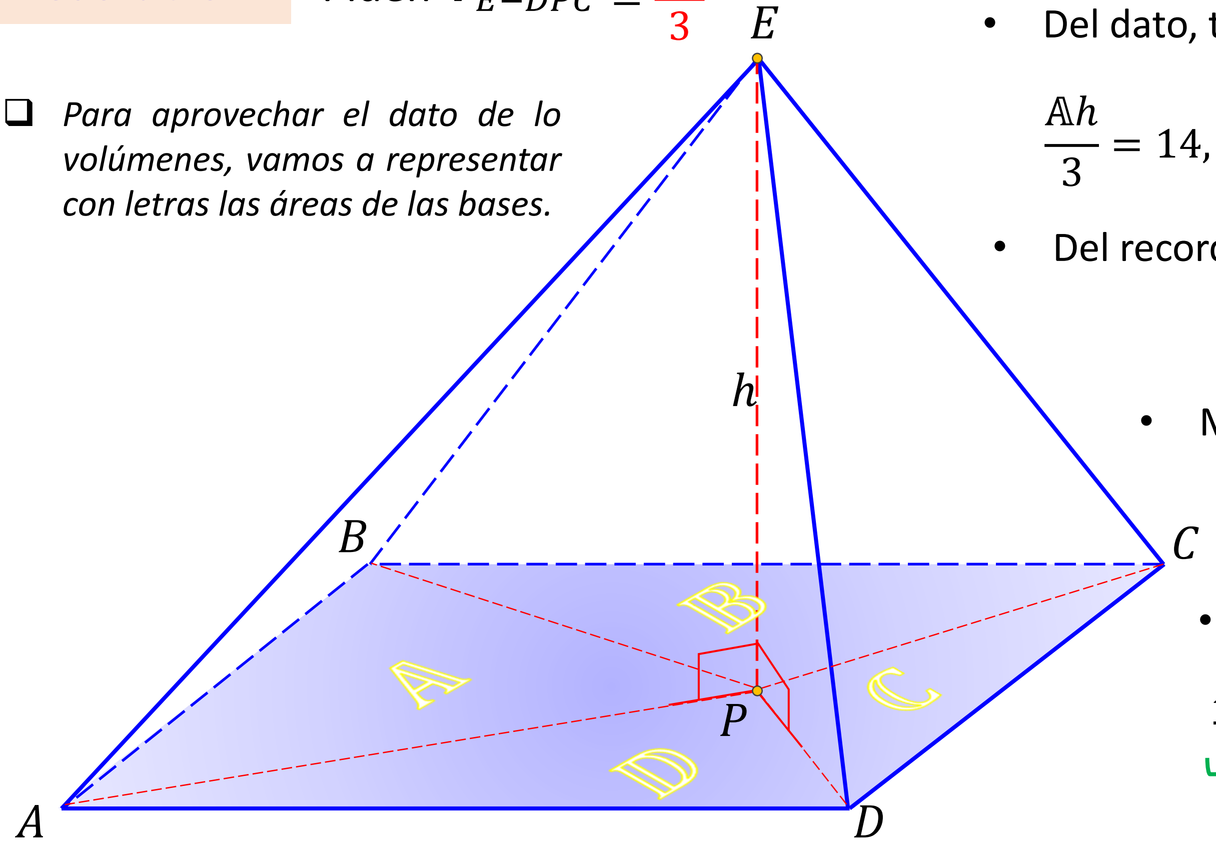


Se cumple:

$$\boxed{S_1 + S_3 = S_2 + S_4}$$

Resolución: Piden $\mathbb{V}_{E-DPC} = \dfrac{\mathbb{C}h}{3}$

- *Para aprovechar el dato de lo volúmenes, vamos a representar con letras las áreas de las bases.*



- Del dato, tenemos:

$$\frac{\mathbb{A}h}{3} = 14, \quad \frac{\mathbb{D}h}{3} = 12, \quad \frac{\mathbb{B}h}{3} = 10$$

- Del recordar:

$$\mathbb{A} + \mathbb{C} = \mathbb{B} + \mathbb{D}$$

- Multiplicamos por $\dfrac{h}{3}$

- Luego:

$$\underbrace{\frac{\mathbb{A}h}{3}}_{14} + \frac{\mathbb{C}h}{3} = \underbrace{\frac{\mathbb{B}h}{3}}_{10} + \underbrace{\frac{\mathbb{D}h}{3}}_{12}$$

$$\boxed{\therefore \mathbb{V}_{E-DPC} = \mathbf{8}}$$

Clave **C**

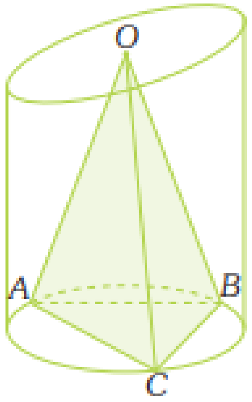
PIRÁMIDE

EXAMEN UNI $2013 - I$

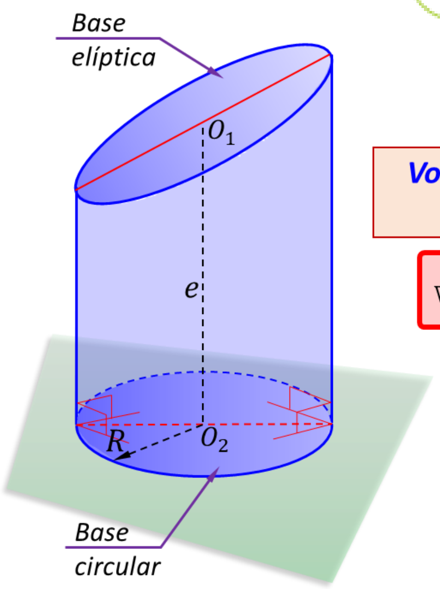
En la figura, $O - ABC$ es una pirámide regular. Calcule la relación que existe entre el volumen de la pirámide regular y el volumen del tronco de cilindro (O es centro).

$A)\ \dfrac{\sqrt{3}}{3\pi}$ $B)\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ $C)\ \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$

$D)\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ $E)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$



RECORDAR

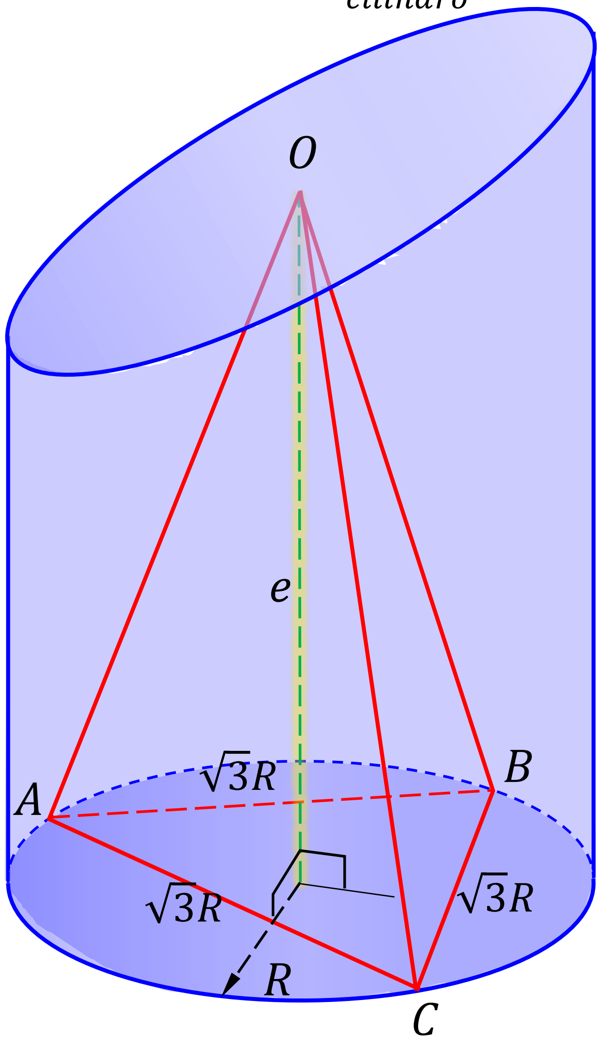


Volumen del tronco de cilindro

$$\mathbb{V} = \pi R^2(e)$$

Resolución:

Piden $\dfrac{\mathbb{V}_{pirámide}}{\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ cilindro}}}$



- Sea R el radio de la base del tronco de cilindro, por circunferencia sabemos:

$$AB = BC = AC = R\sqrt{3}$$

- Con ello, podemos hacer los cálculos respectivos:

$$\mathbb{V}_{pirámide} = \frac{\left(\frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\right)e}{3}$$

$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ cilindro}} = \pi R^2 e$$

- Dividimos:

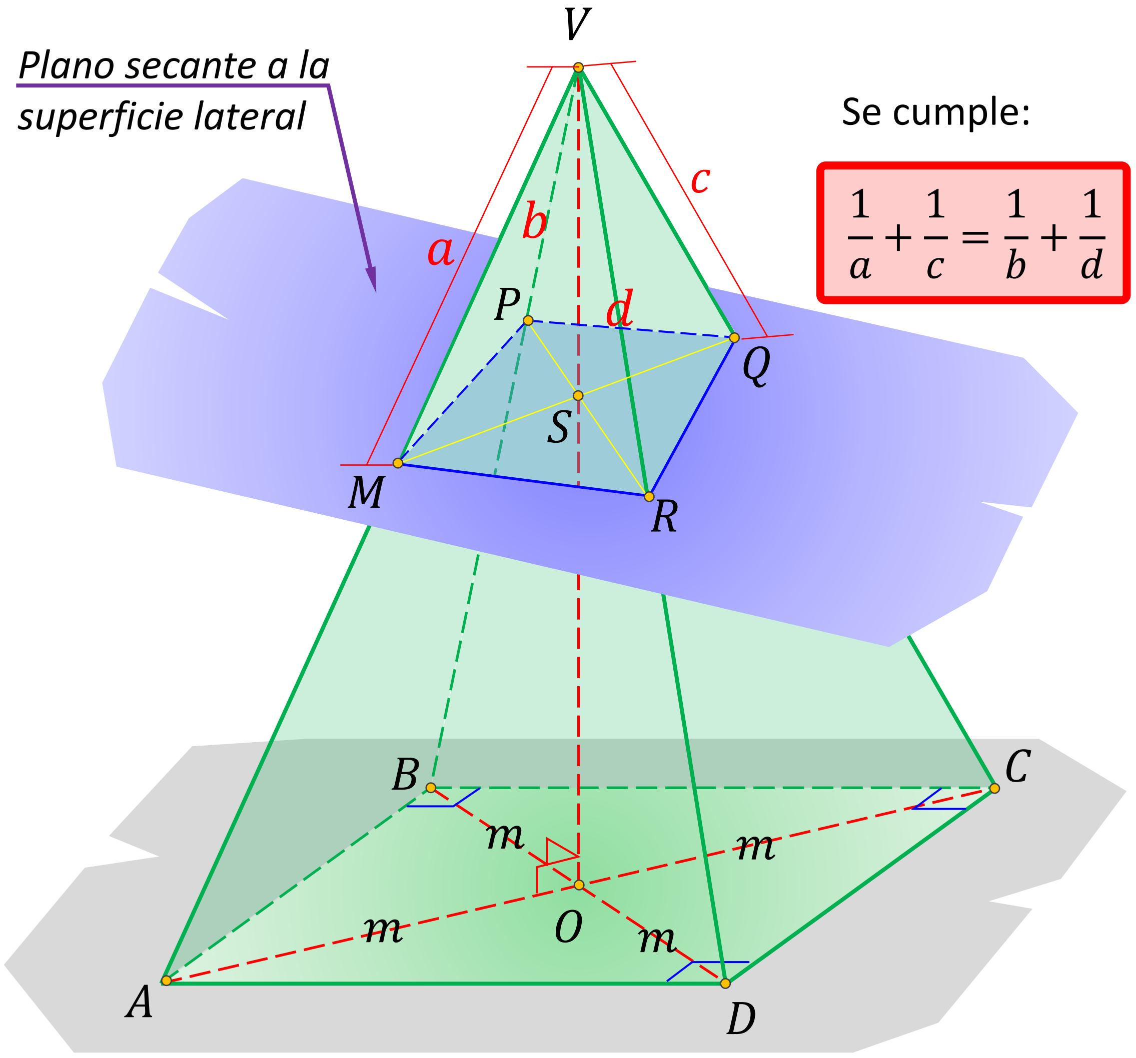
$$\therefore \frac{\mathbb{V}_{pirámide}}{\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ cilindro}}} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

Clave C

PIRÁMIDE

TEOREMA

Sea $V-ABCD$ pirámide recta de base cuadrangular equiángula



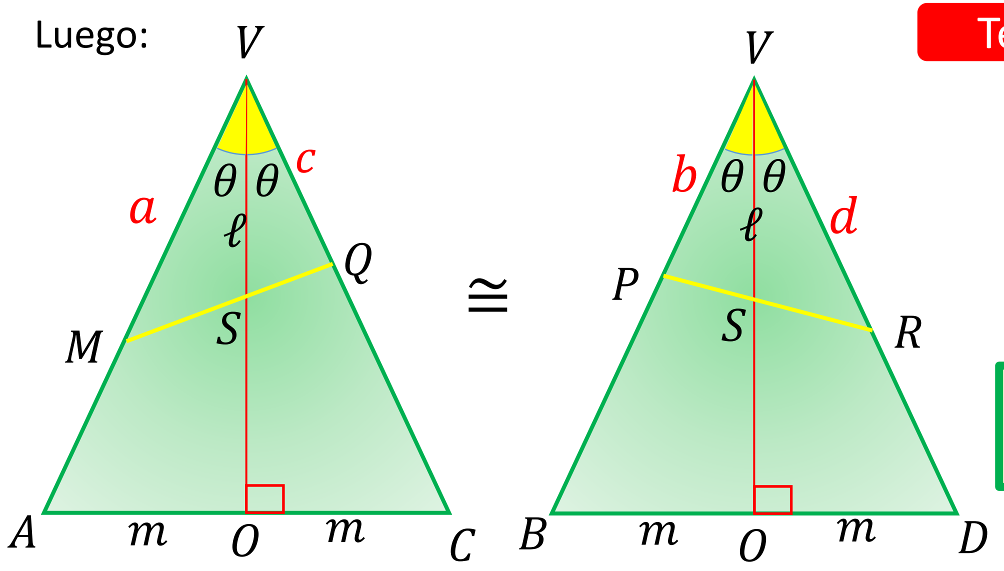
Se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}$$

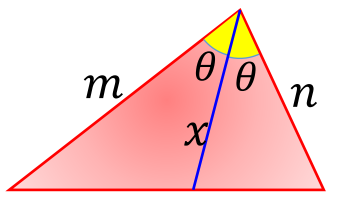
DEMOSTRACIÓN:

- Las secciones planas AVC, BVD y $MPQR$ son secantes en el punto S.

Luego:



Tener en cuenta:



Se cumple:

$$\boxed{x=\left(\frac{2mn}{m+n}\right)cos\theta}$$

- Se tiene:

$$\ell=\left(\frac{2ac}{a+c}\right)cos\theta\ \ldots(i) \qquad \ell=\left(\frac{2bd}{b+d}\right)cos\theta\ \ldots(ii)$$

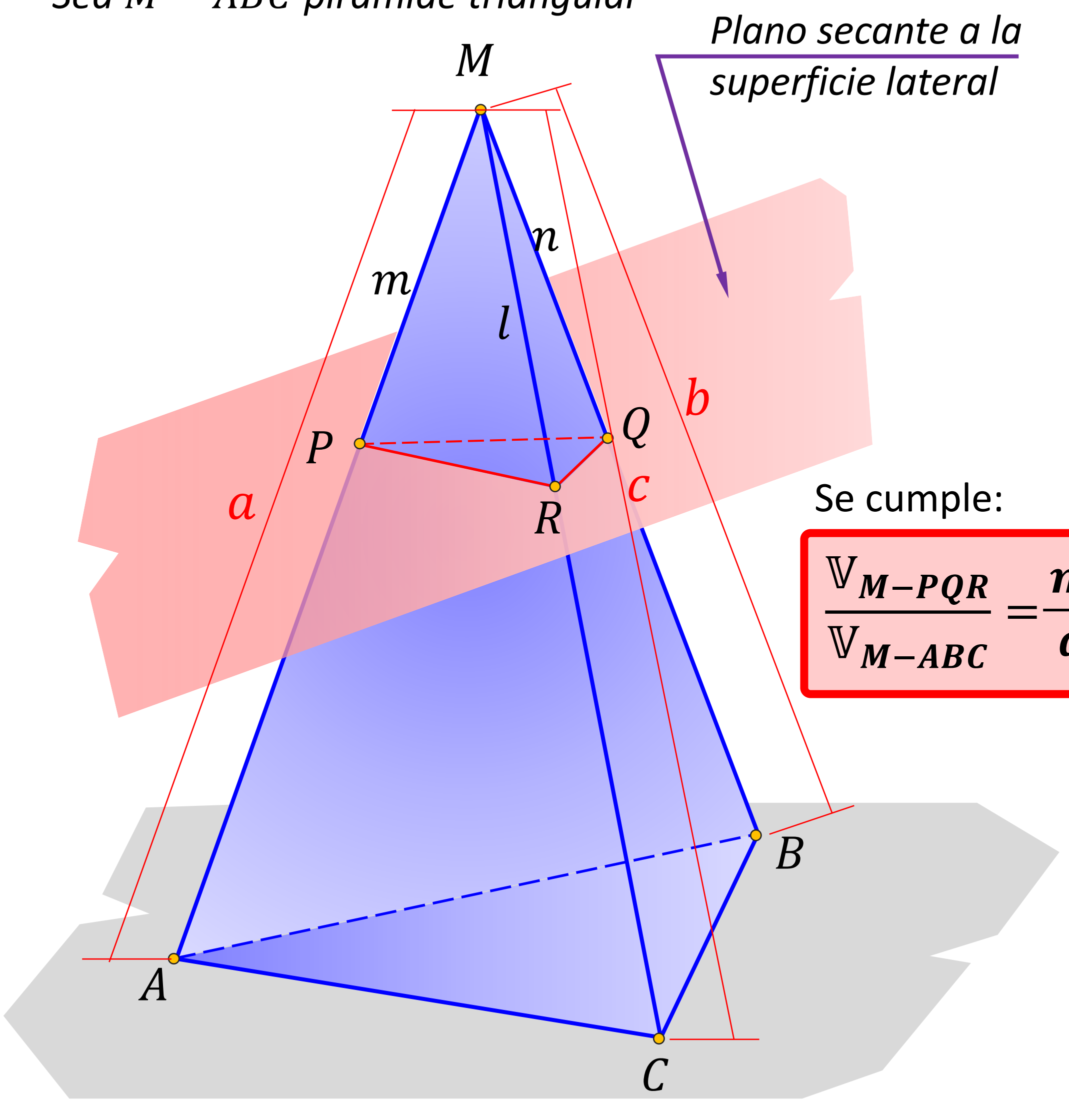
- De (i) y (ii): $\dfrac{ac}{a+c}=\dfrac{bd}{b+d}$

$$\therefore \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}}$$

PIRÁMIDE

TEOREMA

Sea $M - ABC$ pirámide triangular

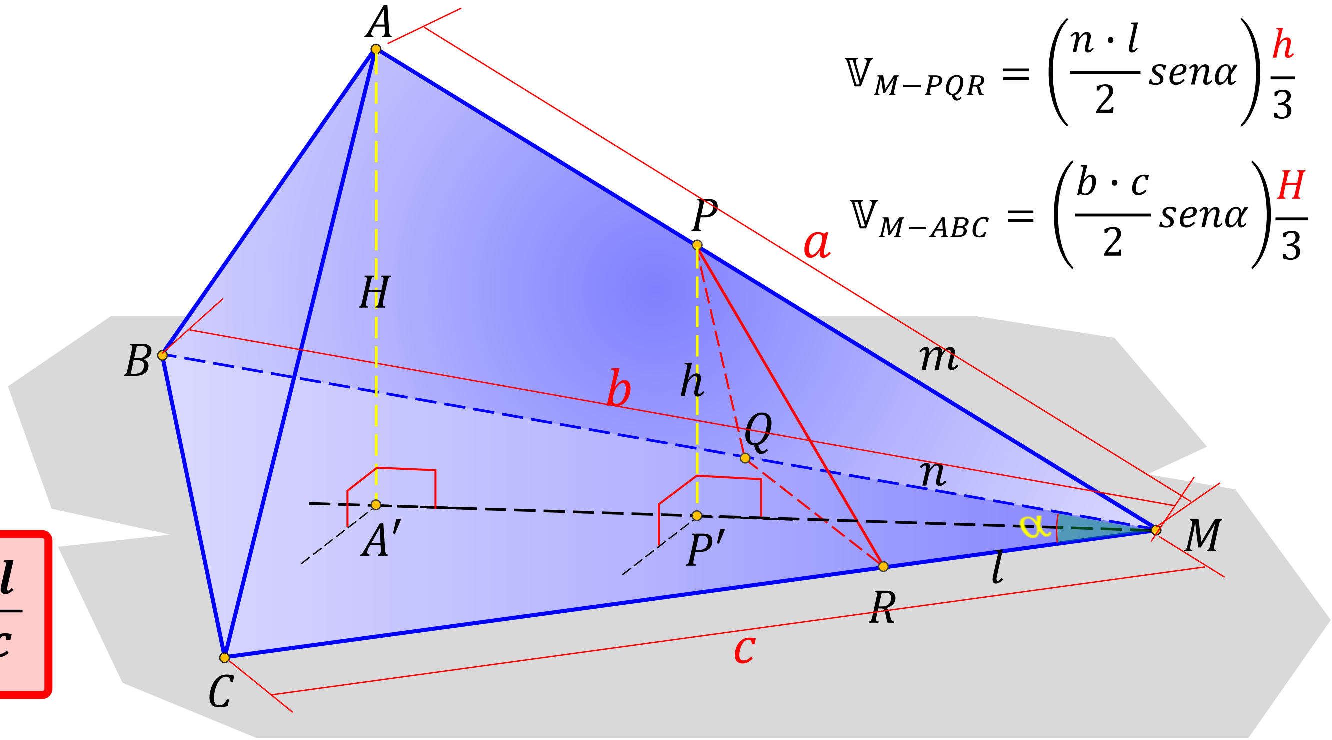


Se cumple:

$$\boxed{\frac{\mathbb{V}_{\boldsymbol{M-PQR}}}{\mathbb{V}_{\boldsymbol{M-ABC}}} = \frac{\boldsymbol{m \cdot n \cdot l}}{\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}}}$$

DEMOSTRACIÓN:

- Para una mejor comprensión vamos acomodar a la pirámide, entonces:



$$\mathbb{V}_{M-PQR} = \left(\frac{n \cdot l}{2} sen\alpha\right)\frac{h}{3}$$

$$\mathbb{V}_{M-ABC} = \left(\frac{b \cdot c}{2} sen\alpha\right)\frac{H}{3}$$

- Dividimos ambas expresiones: $\rightarrow \dfrac{\mathbb{V}_{M-PQR}}{\mathbb{V}_{M-ABC}} = \dfrac{n \cdot l \cdot h}{b \cdot c \cdot H}$ ... (i)

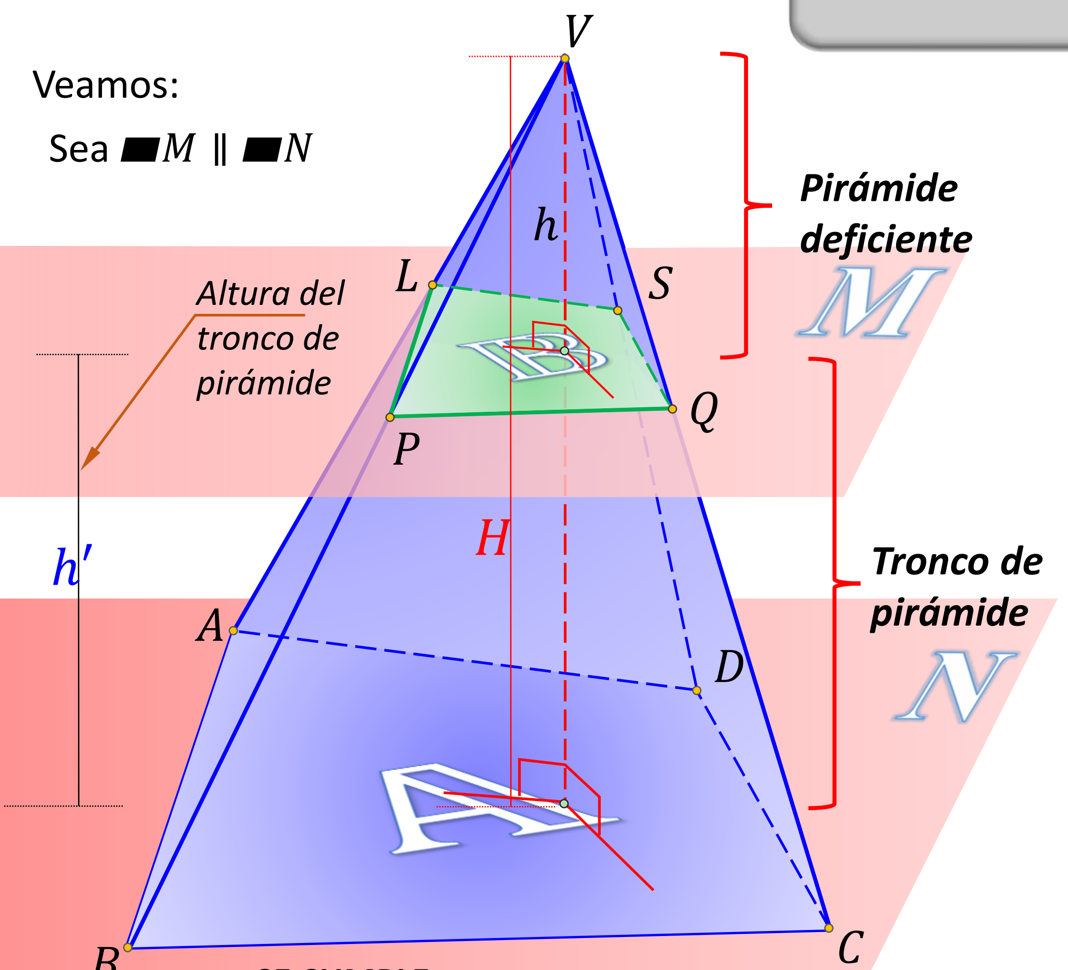
- Además: $\Delta MPP' \sim \Delta MAA'$

$\rightarrow \dfrac{h}{H} = \dfrac{m}{a}$ Reem. en (i): $\therefore \dfrac{\mathbb{V}_{\boldsymbol{M-PQR}}}{\mathbb{V}_{\boldsymbol{M-ABC}}} = \dfrac{\boldsymbol{m \cdot n \cdot l}}{\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}}$

PIRÁMIDES SEMEJANTES

Veamos:

Sea ▰M ∥ ▰N



SE CUMPLE

- ***RAZÓN DE LÍNEAS:*** $\dfrac{VL}{VA} = \dfrac{VQ}{VC} = \dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{h}{H} = \cdots$
- ***RAZÓN DE ÁREAS:*** $\dfrac{\mathbb{B}}{\mathbb{A}} = \left(\dfrac{VL}{VA}\right)^2 = \left(\dfrac{VQ}{VC}\right)^2 = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2 = \cdots$
- ***RAZÓN DE VOLÚMENES:*** $\dfrac{\mathbb{V}_{V-LPQS}}{\mathbb{V}_{V-ABCD}} = \left(\dfrac{PQ}{BC}\right)^3 = \left(\dfrac{VQ}{VC}\right)^3 = \cdots$

➢ Para el tronco de pirámide, el volumen se calcula:

$$\boxed{\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de}\\ \text{pirámide}}} = \frac{h'}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)}$$

Comprobación:

- Notamos:

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de}\\ \text{pirámide}}} = \underbrace{\mathbb{V}_{V-ABCD}}_{\frac{\mathbb{A}(h+h')}{3}} - \underbrace{\mathbb{V}_{V-LPQS}}_{\frac{\mathbb{B}(h)}{3}}$$

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de}\\ \text{pirámide}}} = \frac{\mathbb{A}h'}{3} + \frac{h}{3}(\mathbb{A} - \mathbb{B}) \ldots (i)$$

- Por pirámides semejantes: $\dfrac{\mathbb{B}}{\mathbb{A}} = \left(\dfrac{h}{h+h'}\right)^2 \rightarrow h = \dfrac{\sqrt{\mathbb{B}}h'}{\left(\sqrt{\mathbb{A}} - \sqrt{\mathbb{B}}\right)}$

- Reemplazamos en (i): $\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de}\\ \text{pirámide}}} = \dfrac{\mathbb{A}h'}{3} + \dfrac{\sqrt{\mathbb{B}}h'}{3\left(\sqrt{\mathbb{A}} - \sqrt{\mathbb{B}}\right)}(\mathbb{A} - \mathbb{B}) \ldots (ii)$

- Pero: $(\mathbb{A} - \mathbb{B}) = \left(\sqrt{\mathbb{A}} - \sqrt{\mathbb{B}}\right)\left(\sqrt{\mathbb{A}} + \sqrt{\mathbb{B}}\right)$

- Reemplazamos en (ii):

$$\therefore \mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de}\\ \text{pirámide}}} = \frac{h'}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

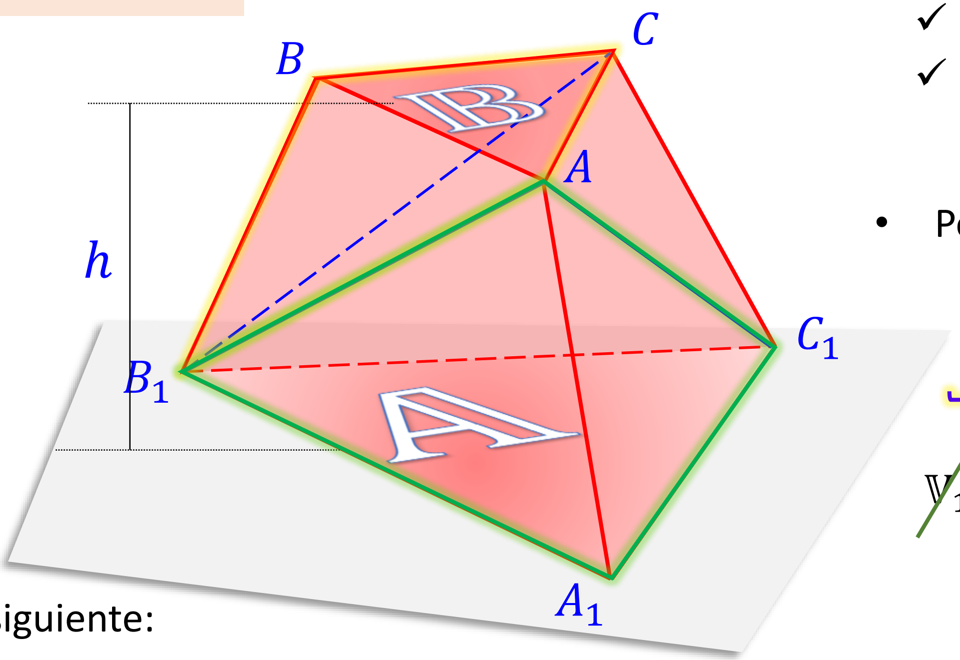
EXAMEN UNI **2019 – I**

En un tronco de pirámide $ABC - A_1B_1C_1$, los volúmenes de las pirámides $B_1 - ABC$ y $A - A_1B_1C_1$ miden $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$ respectivamente. Determine el volumen de la pirámide $A - CB_1C_1$.

A) $\sqrt{V_1V_2}$ B) $\dfrac{V_1V_2}{V_1+V_2}$ C) $\dfrac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$

D) $2\sqrt{V_1V_2}$ E) $3\sqrt{V_1V_2}$

Resolución: Piden $\mathbb{V}_{A-CB_1C_1} = \mathbb{V}_X$



DATOS:

✓ $\mathbb{V}_{B_1-ABC} = \mathbb{V}_1$

✓ $\mathbb{V}_{A-A_1B_1C_1} = \mathbb{V}_2$

- Por volumen del tronco de pirámide:

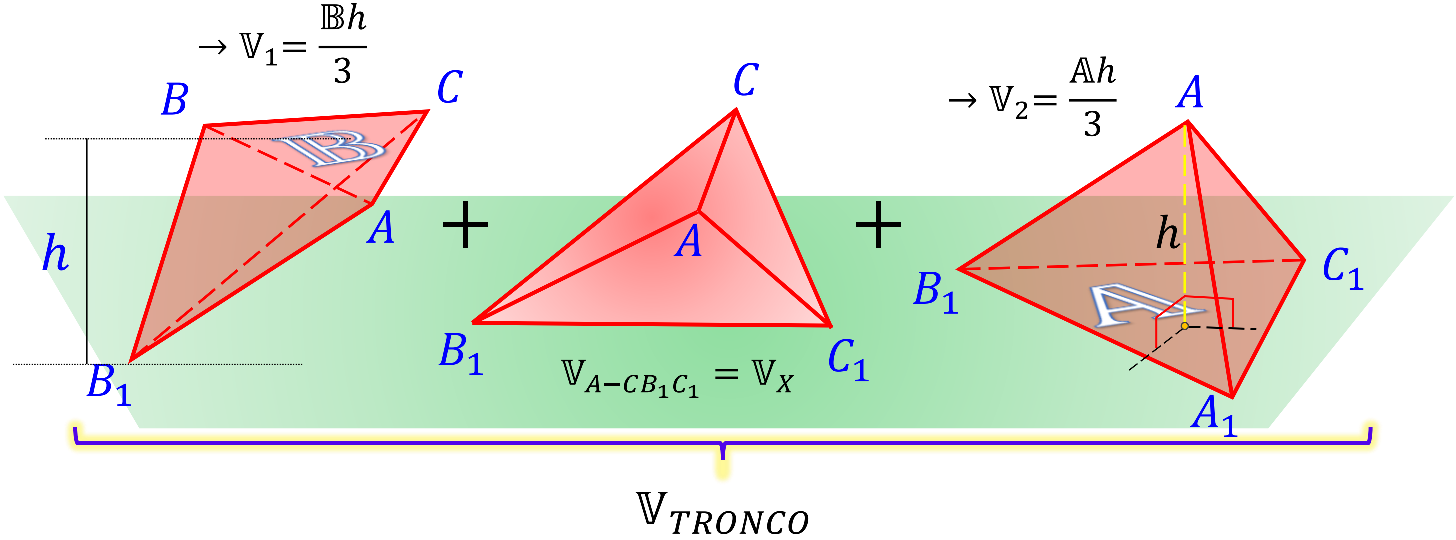
$$\underbrace{\mathbb{V}_{\textit{tronco de pirámide}}} = \frac{h}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)$$

$$\cancel{\mathbb{V}_1} + \mathbb{V}_X + \cancel{\mathbb{V}_2} = \cancel{\frac{h\mathbb{A}}{3}} + \cancel{\frac{h\mathbb{B}}{3}} + \frac{h\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}}{3}$$

$$\rightarrow \mathbb{V}_x = \frac{h\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}}{3} = \sqrt{\underbrace{\frac{\mathbb{A}h}{3}}_{\mathbb{V}_2}}\sqrt{\underbrace{\frac{\mathbb{B}h}{3}}_{\mathbb{V}_1}}$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbb{V}_x = \sqrt{\mathbb{V}_1\mathbb{V}_2}}$$

- Veamos los sólidos por separado y tenemos lo siguiente:



Clave A

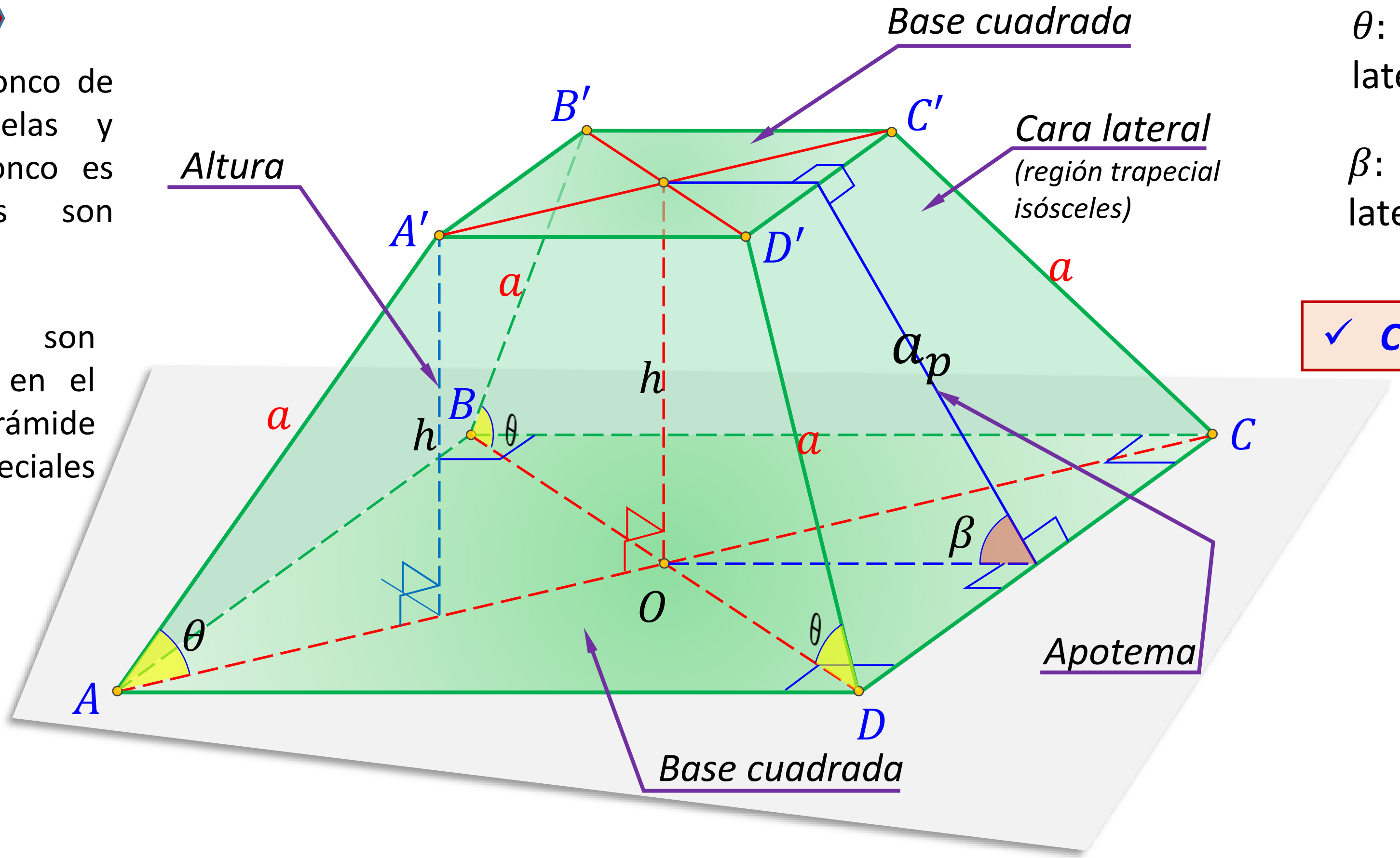
TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es aquel tronco de pirámide generado a partir de una pirámide regular.

características

- Las bases en todo tronco de pirámide son paralelas y semejantes, si el tronco es regular, las bases son regulares.
- Las caras laterales son regiones trapeciales, en el caso del tronco de pirámide regular son trapeciales isósceles.

- ***$A'B'C'D - ABCD$ es un tronco de pirámide cuadrangular regular***



Del gráfico:

θ: medida del ángulo entre la arista lateral y la base

β: medida del diedro entre la cara lateral y la base

✓ ***Cálculo del área de la superficie lateral***

$$\mathbb{A}_{S.L} = \left(\mathbb{A}_{\substack{1\ cara\\ lateral}}\right)\left(n^{\circ}_{\substack{lados\ de\\ la\ base}}\right)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

EXAMEN UNI **2008 – I**

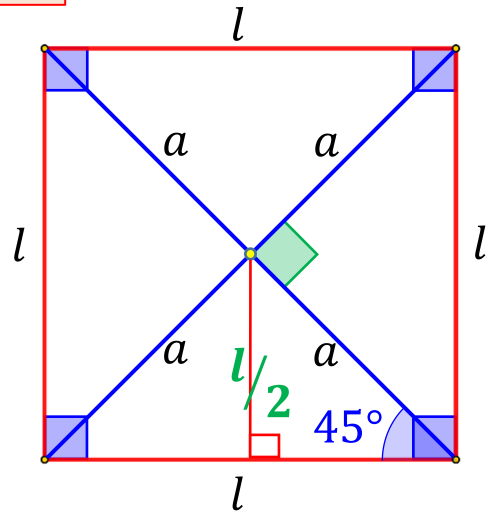
En un tronco de pirámide cuadrangular regular, las aristas básicas son 2 cm y 6 cm, la apotema del tronco mide 4 cm. Calcule el volumen del tronco (en cm^3).

$A)\ \dfrac{52\sqrt{3}}{3}$ $B)\ \dfrac{78\sqrt{3}}{3}$ $C)\ \dfrac{104\sqrt{3}}{3}$

$D)\ \dfrac{130\sqrt{3}}{3}$ $E)\ \dfrac{156\sqrt{3}}{3}$

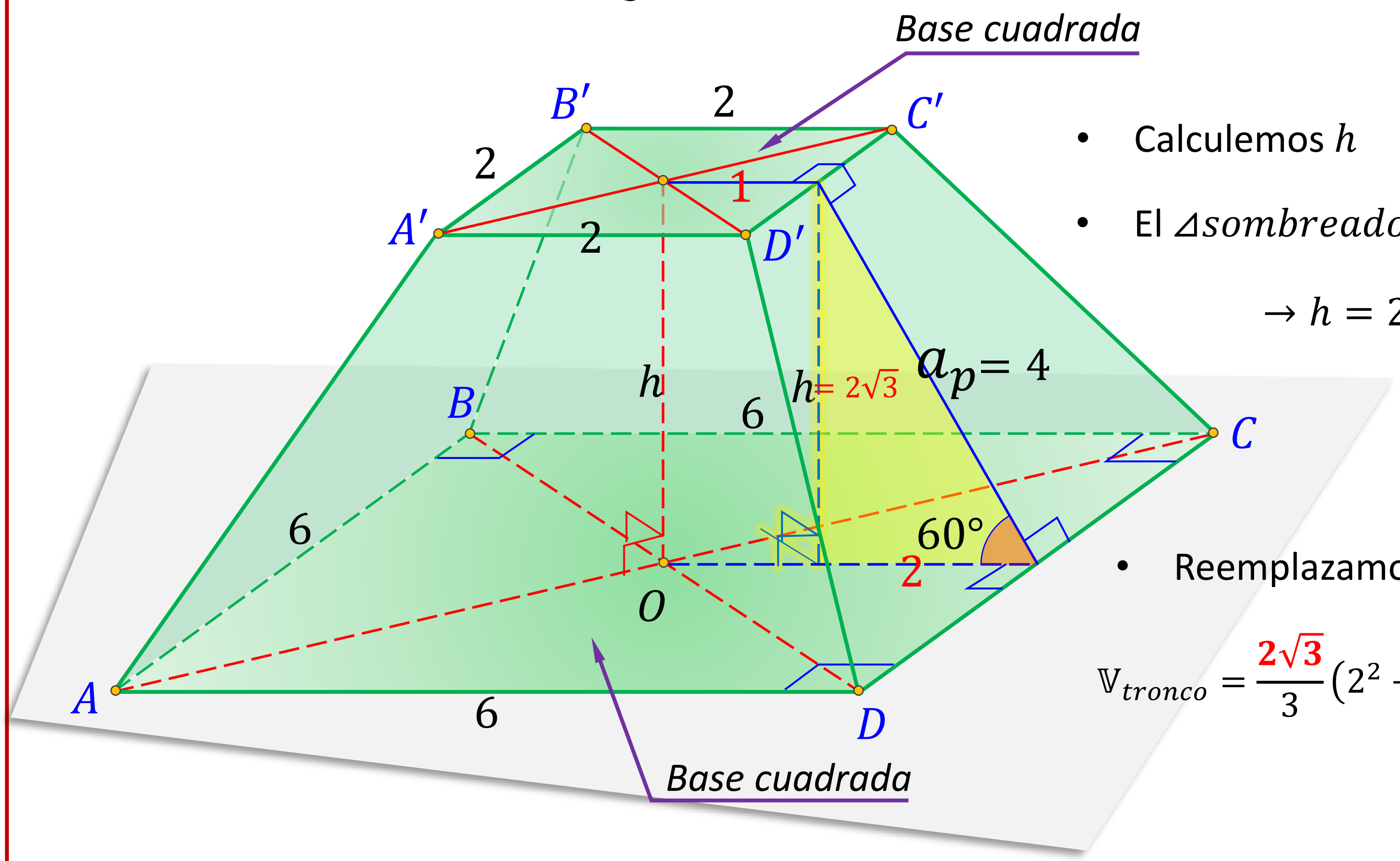
RECUERDA:

CUADRADO



Resolución: Piden $\mathbb{V}_{TRONCO}$

- Se observa que: $\mathbb{V}_{tronco} = \dfrac{h}{3}\left(2^2 + 6^2 + \sqrt{4 \cdot 36}\right) \dots (i)$



- Calculemos h
- El $\triangle$*sombreado* es de 60°

$\rightarrow h = 2\sqrt{3}$

- Reemplazamos en (i):

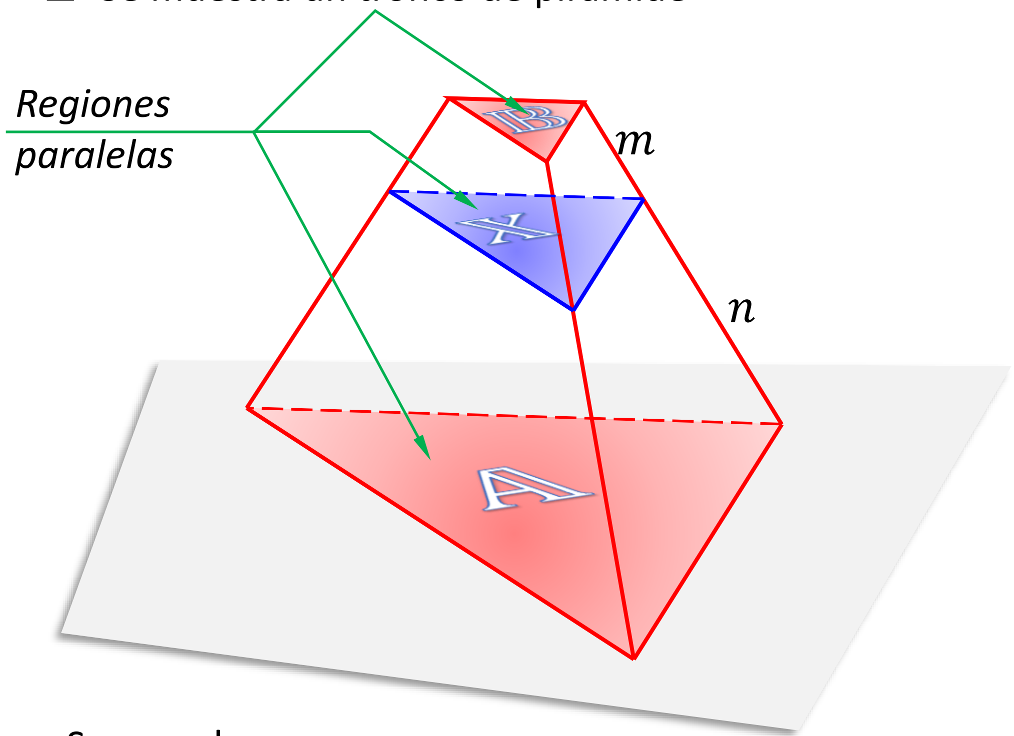
$$\mathbb{V}_{tronco} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(2^2 + 6^2 + \sqrt{4 \cdot 36}\right)$$

Clave **C**

$$\therefore \mathbb{V}_{tronco} = \frac{104\sqrt{3}}{3}$$

TEOREMAS ADICIONALES

- Se muestra un tronco de pirámide



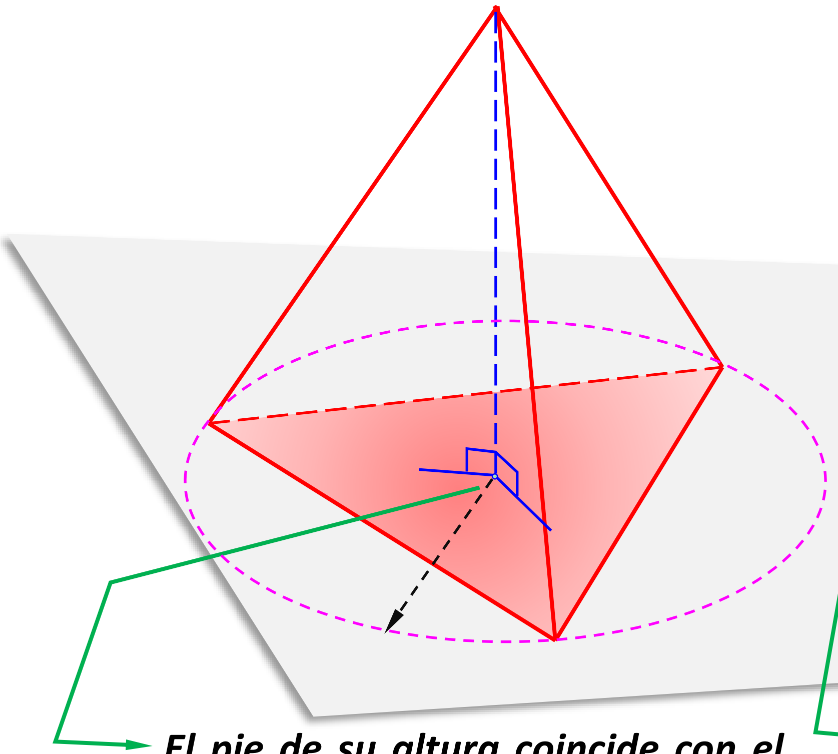
Se cumple:

$$\mathbb{X} = \left(\frac{m\sqrt{\mathbb{A}} + n\sqrt{\mathbb{B}}}{m+n}\right)^2$$

NOTA:

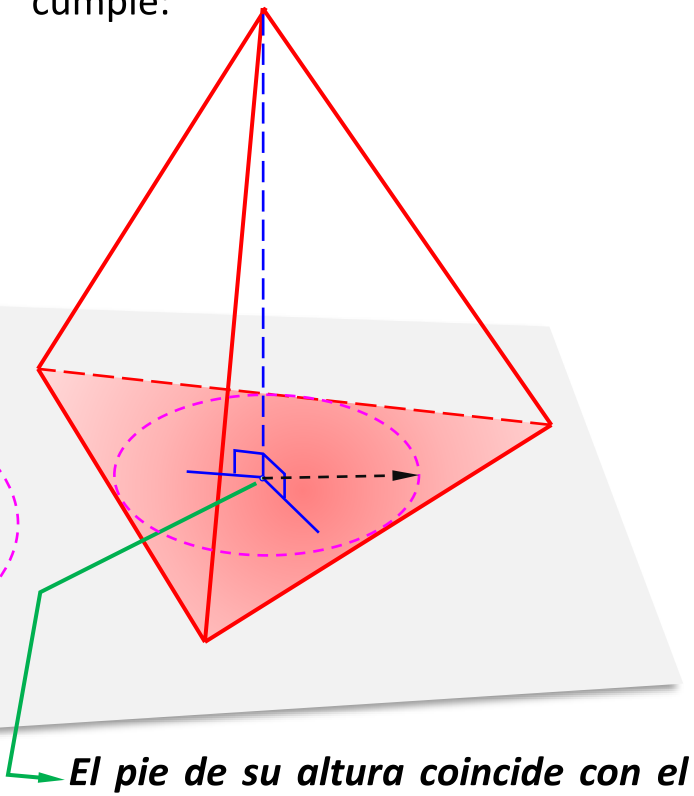
El teorema se cumple para un tronco de pirámide de cualquier base

- Si el vértice de una pirámide, equidista de los vértices de su base, se cumple:



El pie de su altura coincide con el centro de la circunferencia circunscrita a la base

- Si el vértice de una pirámide, equidista de las aristas básicas, se cumple:



El pie de su altura coincide con el centro de la circunferencia inscrita en la base

NOTA:

Los teoremas se cumple para pirámides de cualquier base