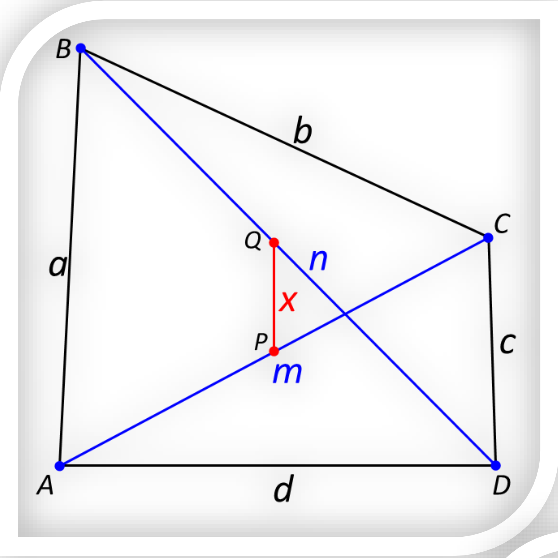
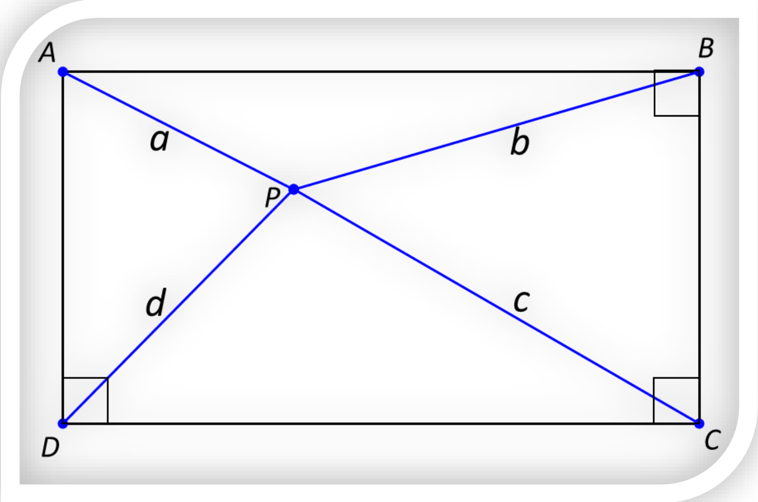
OBJETIVOS:

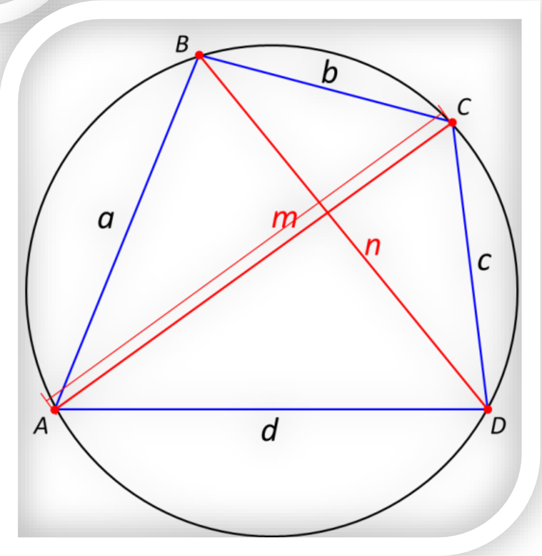
- *CONOCER LAS DIFERENTES RELACIONES MÉTRICAS DE LOS ELEMENTOS DE LOS CUADRILÁTEROS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA.*
- *SABER APLICAR LOS TEOREMAS DIVERSOS TEOREMAS EN LA RESOLUCCIÓN DE PROBLEMAS TIPO ADMISIÓN UNI.*

RELACIONES MÉTRICAS IV

- *TEOREMAS EN EL CUADRILÁTERO:*
  - ✓ *TEOREMA DE EULER.*
  - ✓ *TEOREMA DE PTOLOMEO.*
  - ✓ *TEOREMA DE PAKEIN.*
  - ✓ *TEOREMA DE VIETTE.*
  - ✓ *TEOREMA DE MARLEN.*



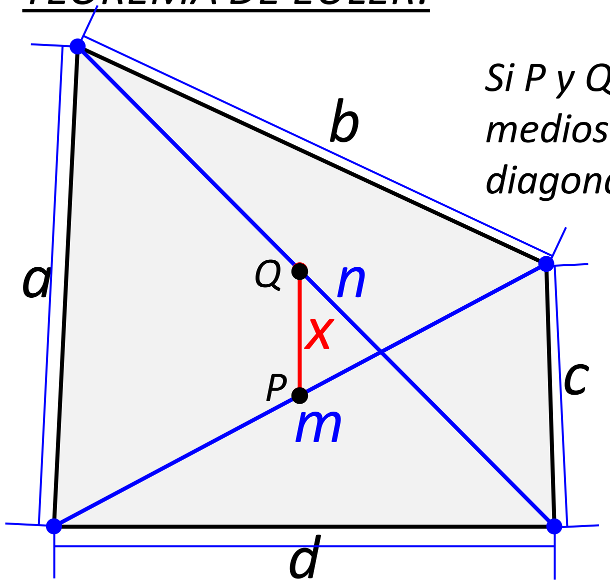




CURSO DE GEOMETRÍA

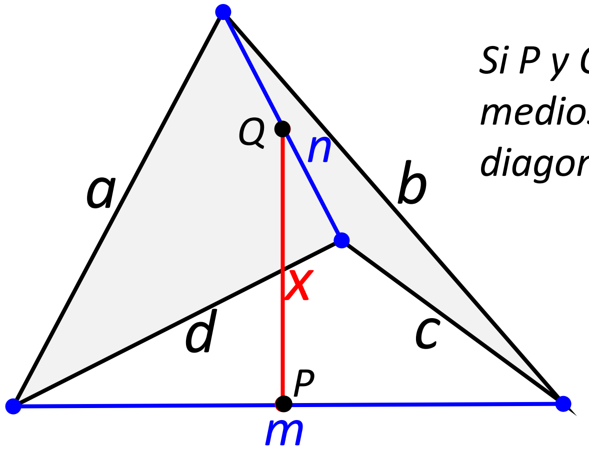
RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

TEOREMA DE EULER:



Si P y Q son puntos medios de las diagonales:

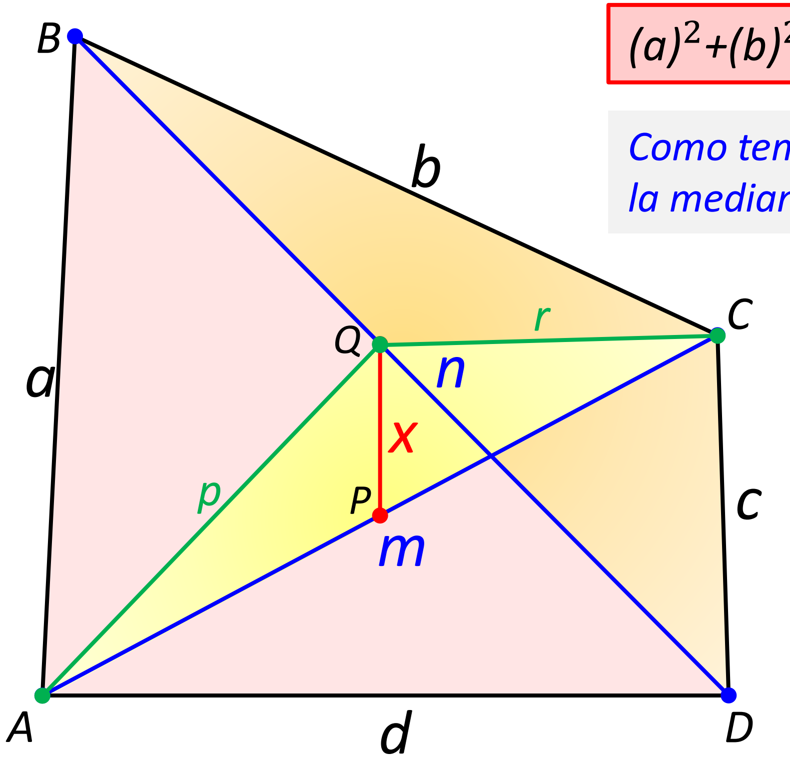
$$(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2=(m)^2+(n)^2+4(x)^2$$



Si P y Q son puntos medios de las diagonales:

$$(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2=(m)^2+(n)^2+4(x)^2$$

DEMOSTRACIÓN:



Demostrar que :

$$(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2=(m)^2+(n)^2+4(x)^2$$

Como tenemos puntos medios aplicaremos el cálculo de la mediana.

- Por teorema de la mediana:

En el ΔBAD: $a^2 + d^2 = 2p^2 + \frac{n^2}{2}$

En el ΔBCD: $b^2 + c^2 = 2r^2 + \frac{n^2}{2}$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(p^2 + r^2) + n^2 \quad ...(\text{I})$$

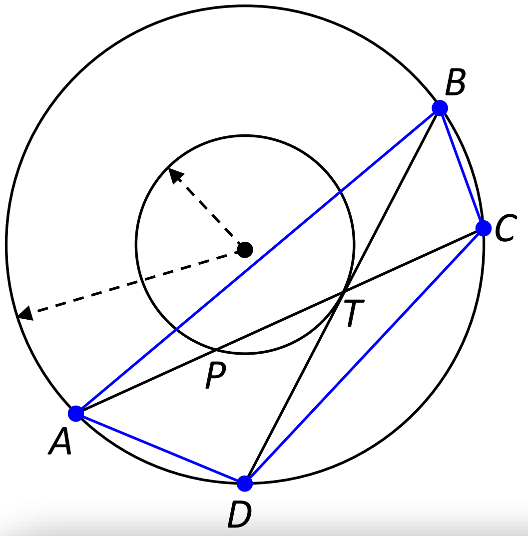
En el ΔAQC: $p^2 + r^2 = 2x^2 + \frac{m^2}{2} \quad ...(\text{II})$

- Reemplazando (I) en (II):

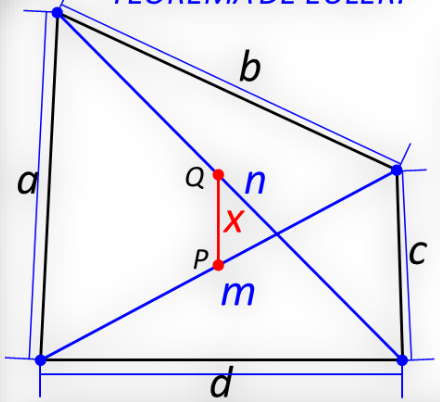
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(2x^2 + \frac{m^2}{2}) + n^2$$

$$(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2=(m)^2+(n)^2+4(x)^2$$

Del gráfico T es punto de tangencia, si TC=3 y AT=5. calcule $(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2+(AD)^2$.



TEOREMA DE EULER:



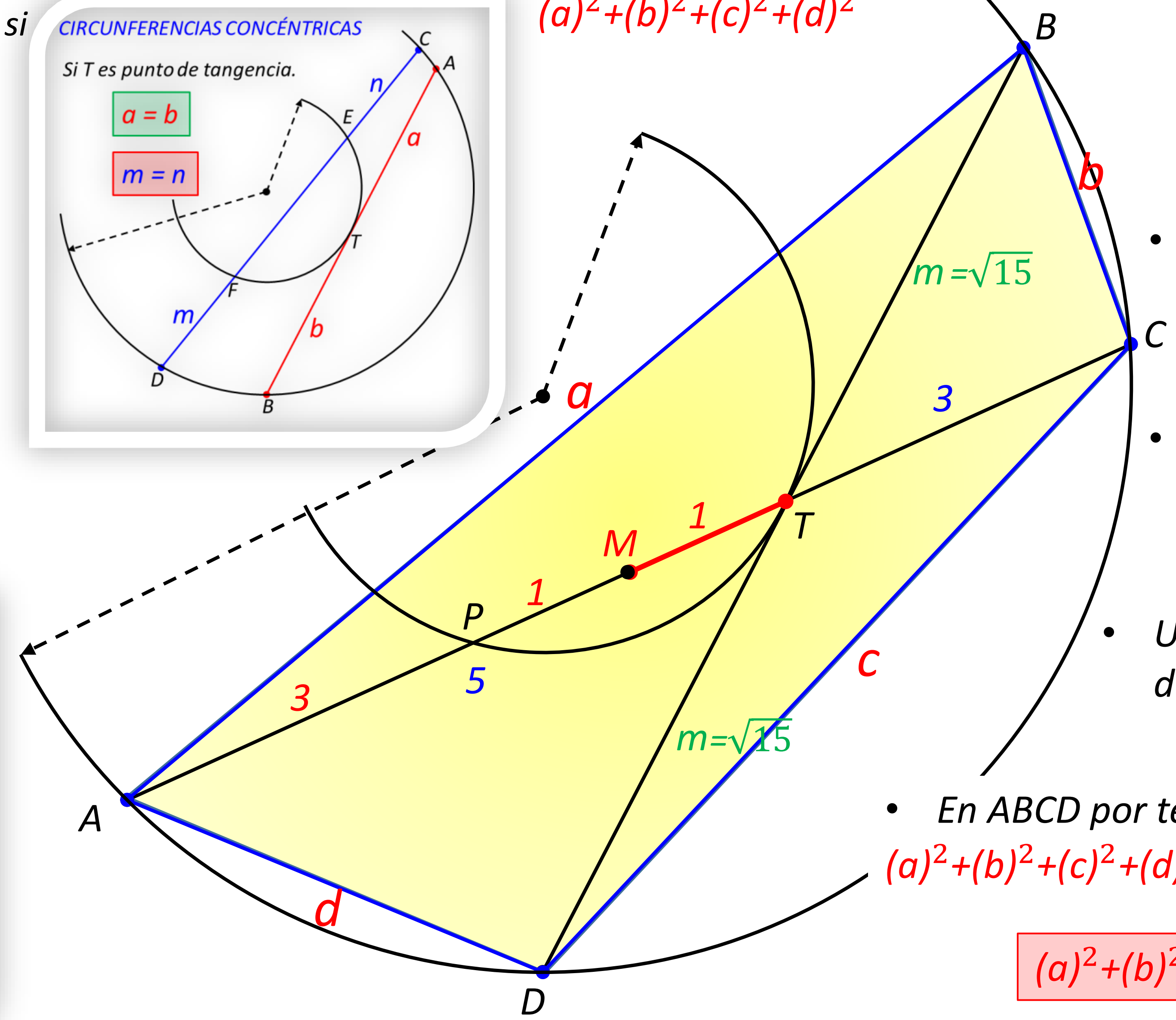
Si P y Q son puntos medios de las diagonales:

$$\boxed{(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2=(m)^2+(n)^2+4(x)^2}$$

RESOLUCIÓN:

Nos piden $(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2+(AD)^2$

$(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2$



Para generar la suma cuadrada de los lados, aplicaremos el teorema de Euler en ABCD.

- Como T es punto de tangencia:

  BT=TD=m

  AP=TC=3

- Por teorema de las cuerdas:

  $(m)(m)=(5)(3)$

  $m=\sqrt{15}$

- Ubicamos M punto medio de $\overline{AC}$:

  PM=MT=1

- En ABCD por teorema de Euler:

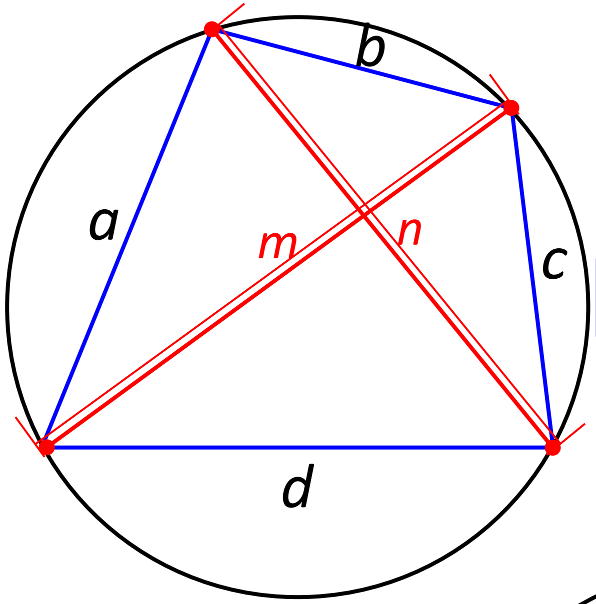
  $(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2=(8)^2+(2\sqrt{15})^2+4(1)^2$

$$\boxed{(a)^2+(b)^2+(c)^2+(d)^2=128}$$

CURSO DE GEOMETRÍA

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

TEOREMA DE PTOLOMEO:



En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible se cumple:

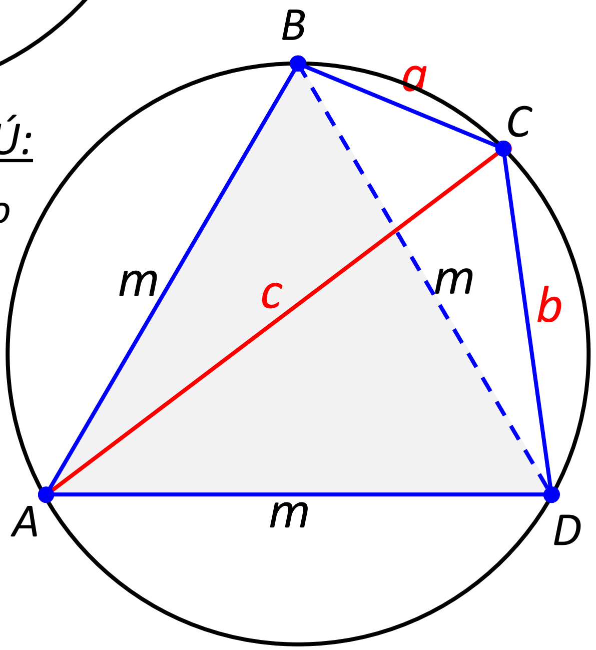
$(m)(n)=(a)(c)+(b)(d)$

TEOREMA DE CHADÚ:

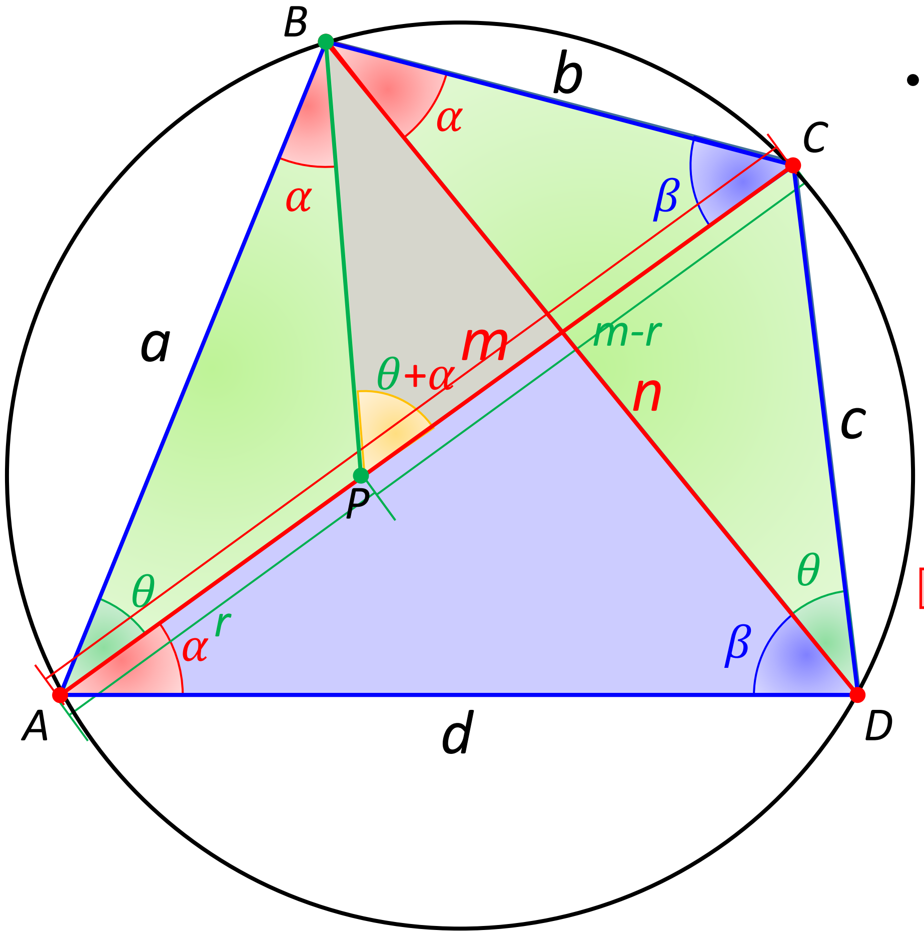
En un cuadrilátero inscrito o inscriptible donde ABD es equilátero.

$c = a + b$

$2m^2 = a^2 + b^2 + c^2$



DEMOSTRACIÓN:



Demostrar que : $(m)(n)=(a)(c)+(b)(d)$

- Trazamos $\overline{BP}$ tal que $m\measuredangle ABP=m\measuredangle CBD=\alpha$
- El $\Delta ABP \sim \Delta DBC$:

$$\frac{a}{r}=\frac{n}{c} \Rightarrow (a)(c)=(r)(n)$$

- El $\Delta ABP \sim \Delta DBC$:

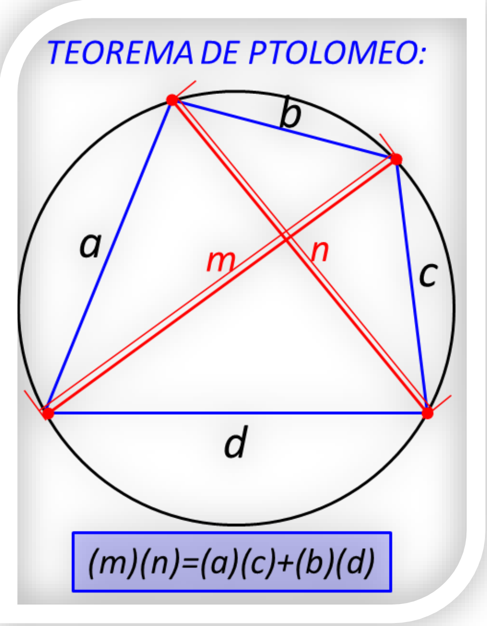
$$\frac{b}{n}=\frac{m-r}{d}$$

$$\Rightarrow (b)(d)=(m)(n)-\underbrace{(r)(n)}$$

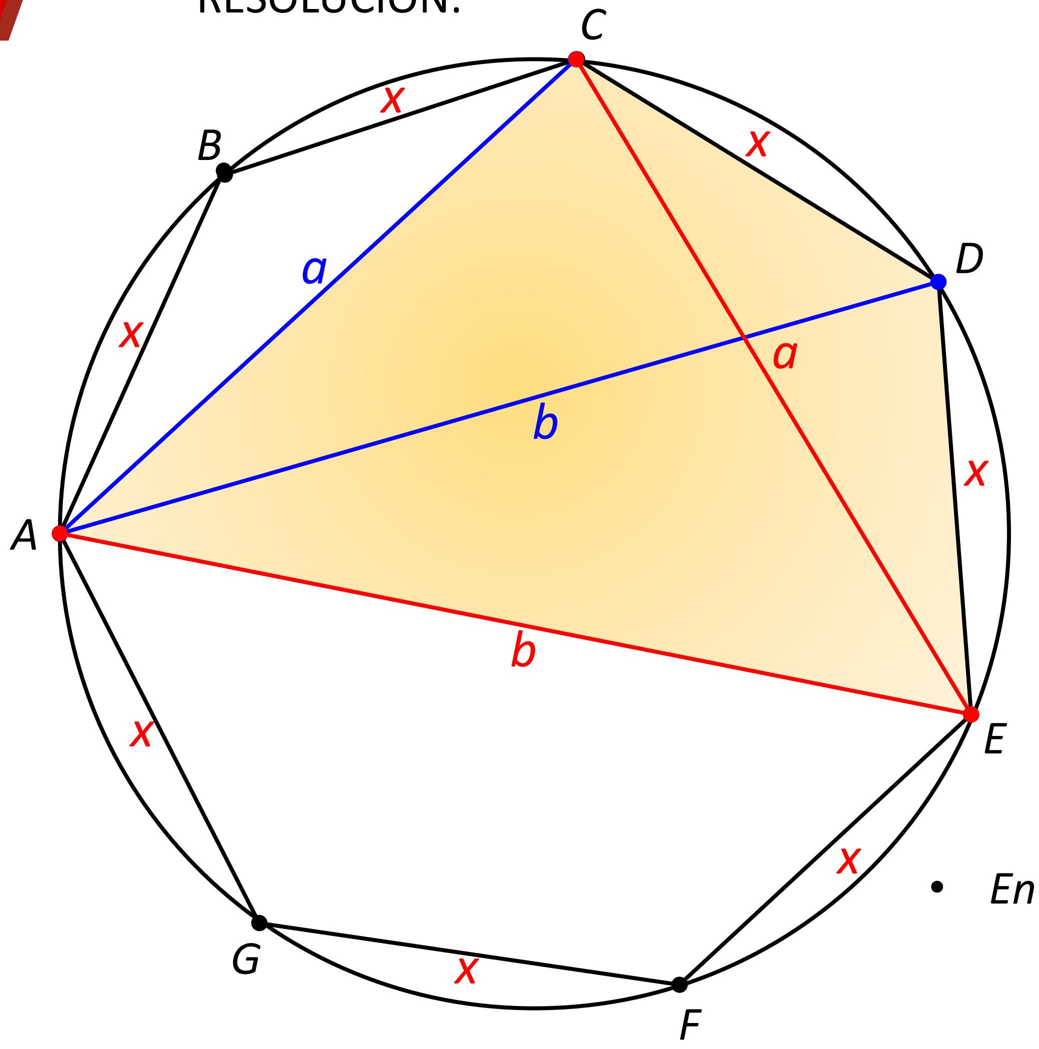
$$(b)(d)=(m)(n)-(a)(c)$$

$(m)(n)=(a)(c)+(b)(d)$

En un heptágono regular ABCDEFG $AC=a$ y $AD=b$. calcule el perímetro de dicho polígono, si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{5}$.



RESOLUCIÓN:



Nos piden perímetro: 2p

$2p=7x$

Todo polígono regular se inscribe y circunscribe en una circunferencia, además el heptágono tiene diagonales de iguales longitudes.

- *Por característica de polígono regular:*

  $AB=BC=CD=DE=x$

- *Diagonales:*

  $AC=CE=a$

  $AD=AE=b$

- *En ACDE, por teorema de Ptolomeo:*

  $(a)(b)=(a)(x)+(b)(x)$

  $(a)(b)=x(a+b)$

  $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{5}$

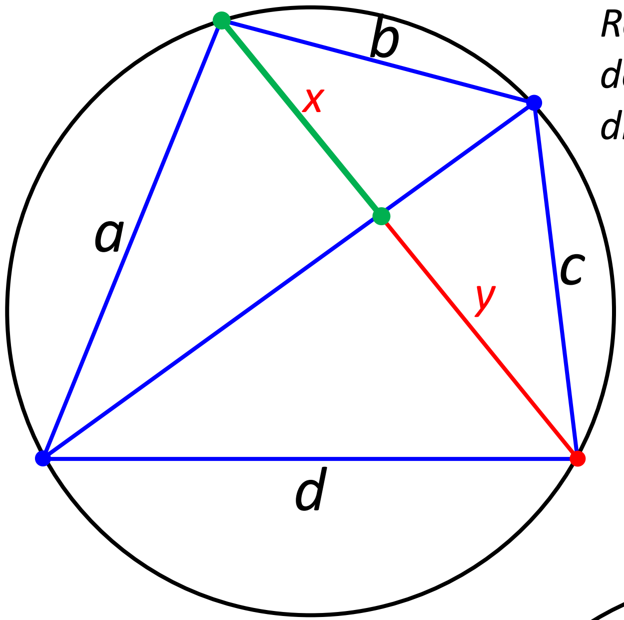
  $x = 5$

  $\boxed{2p = 7(5) = 35}$

CURSO DE GEOMETRÍA

RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

TEOREMA DE PACKEIN:



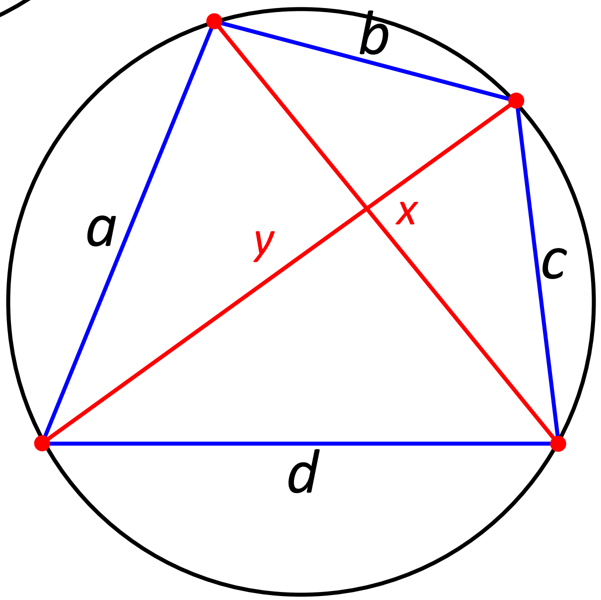
Relaciona los segmentos determinados por una diagonal sobre la otra.

$$\frac{x}{y} = \frac{(a)(b)}{(d)(c)}$$

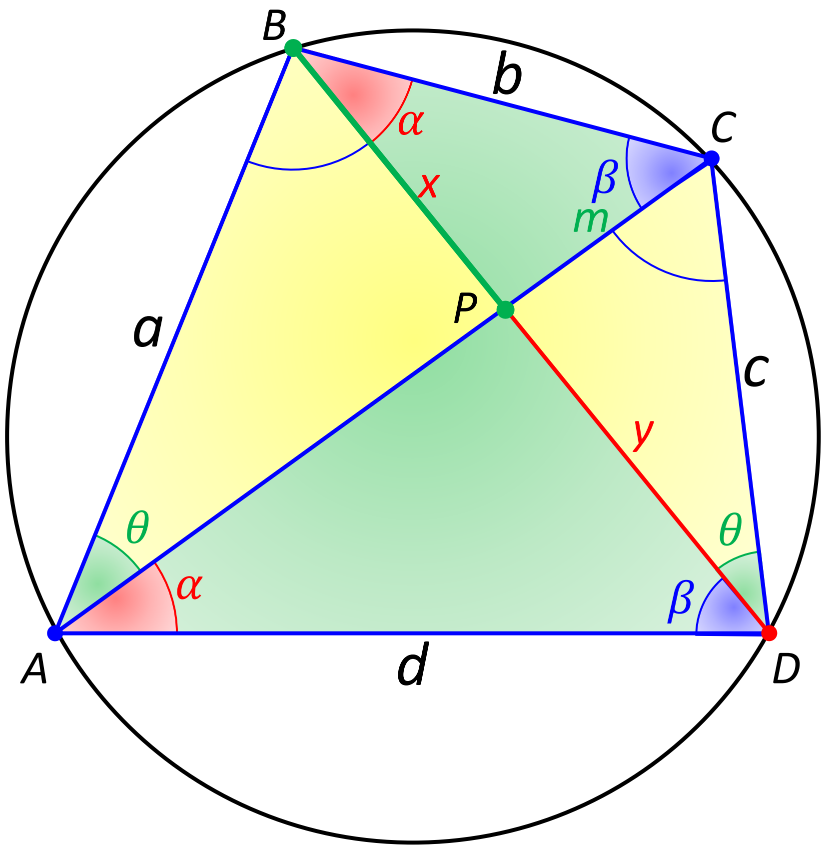
TEOREMA DE VIETTE:

Razón de diagonales.

$$\frac{x}{y} = \frac{(a)(b)+(c)(d)}{(a)(d)+(b)(c)}$$



DEMOSTRACIÓN:



Demostrar que : $\frac{x}{y} = \frac{(a)(b)}{(d)(c)}$

Si PC=m

- El ΔABP ~ ΔDCP:

$$\frac{x}{m} = \frac{a}{c} \quad ...(I)$$

- El ΔAPD ~ ΔBPC:

$$\frac{y}{m} = \frac{d}{b} \quad ...(II)$$

- Dividiendo (I) y (II):

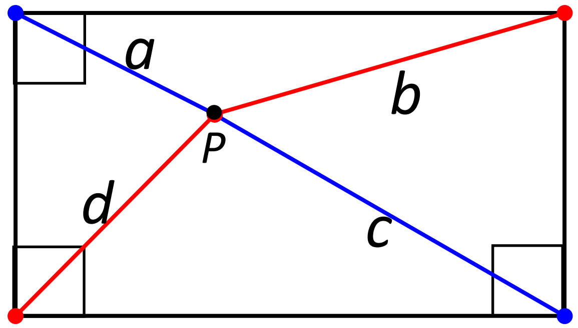
$$\frac{\frac{x}{m}}{\frac{y}{m}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{d}{b}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{(a)(b)}{(d)(c)}$$

CURSO DE GEOMETRÍA

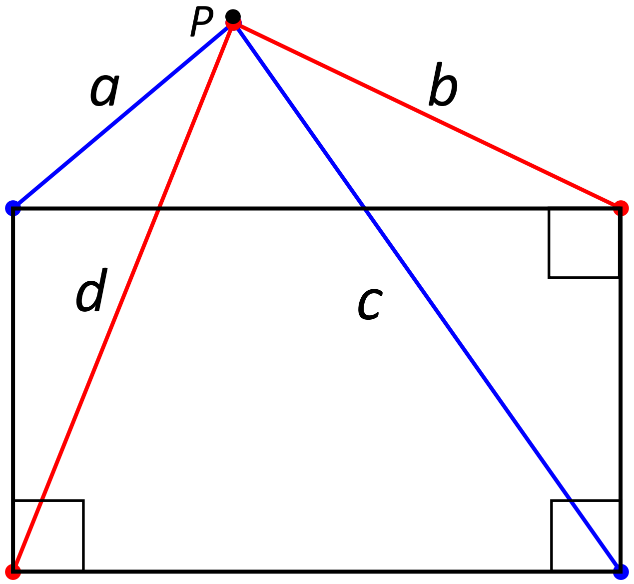
RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

TEOREMA DE MARLEN:



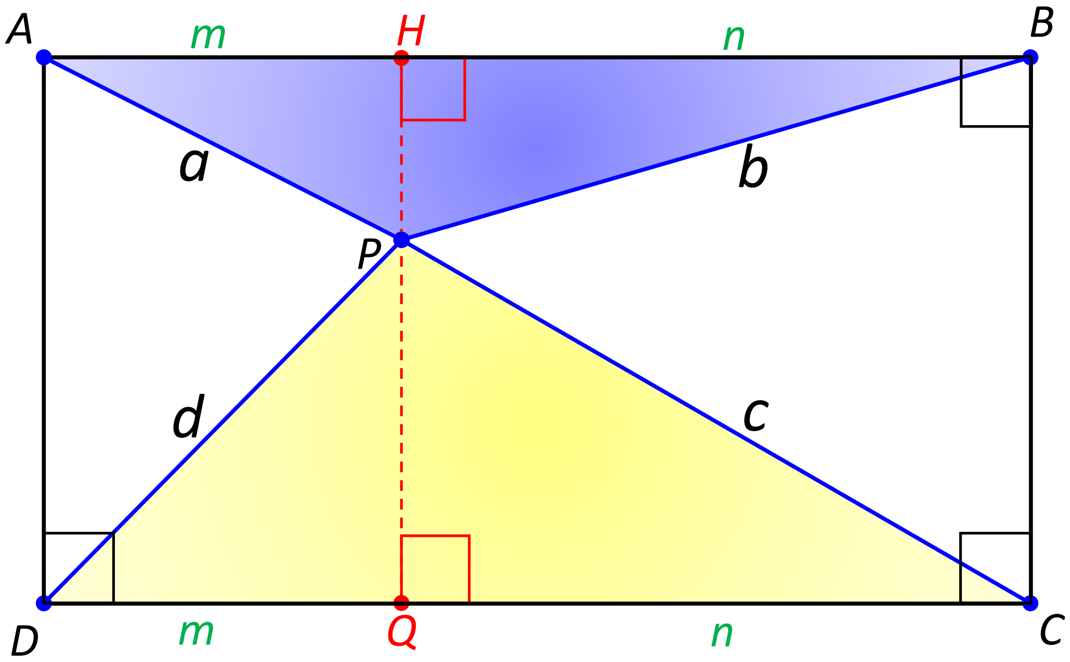
En todo rectángulo o cuadrado si ubicamos un punto interno o externo se cumple:

$$(a)^2+(c)^2 = (b)^2+(d)^2$$



$$(a)^2+(c)^2 = (b)^2+(d)^2$$

DEMOSTRACIÓN:



Demostrar que :

$$(a)^2+(c)^2 = (b)^2+(d)^2$$

Demostraremos el teorema de Marlen, mediante el teorema de proyecciones.

Por teorema de proyecciones.

- En el ΔAPB:

$$a^2-b^2 = m^2-n^2$$

- En el ΔDPC:

$$d^2-c^2 = m^2-n^2$$

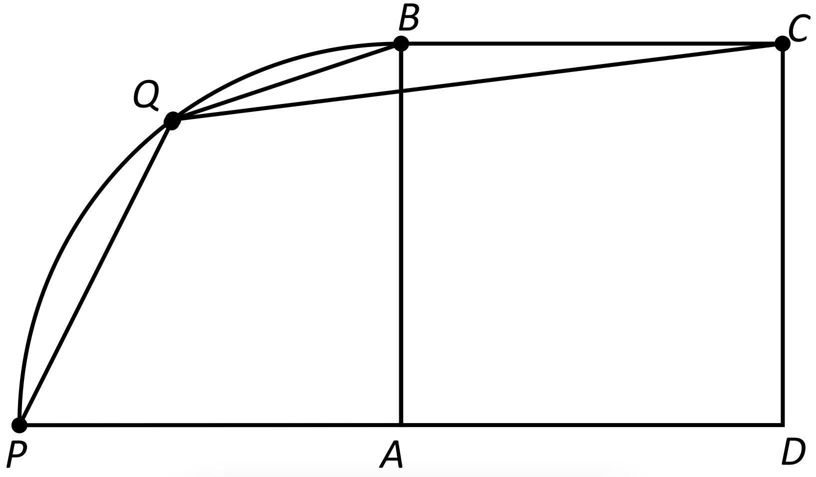
- Igualando (I) y (II):

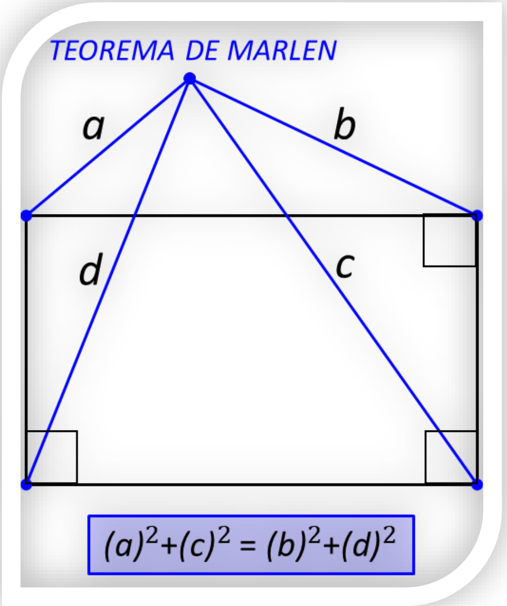
$$a^2-b^2 = d^2-c^2$$

$$(a)^2+(c)^2 = (b)^2+(d)^2$$

CURSO DE GEOMETRÍA

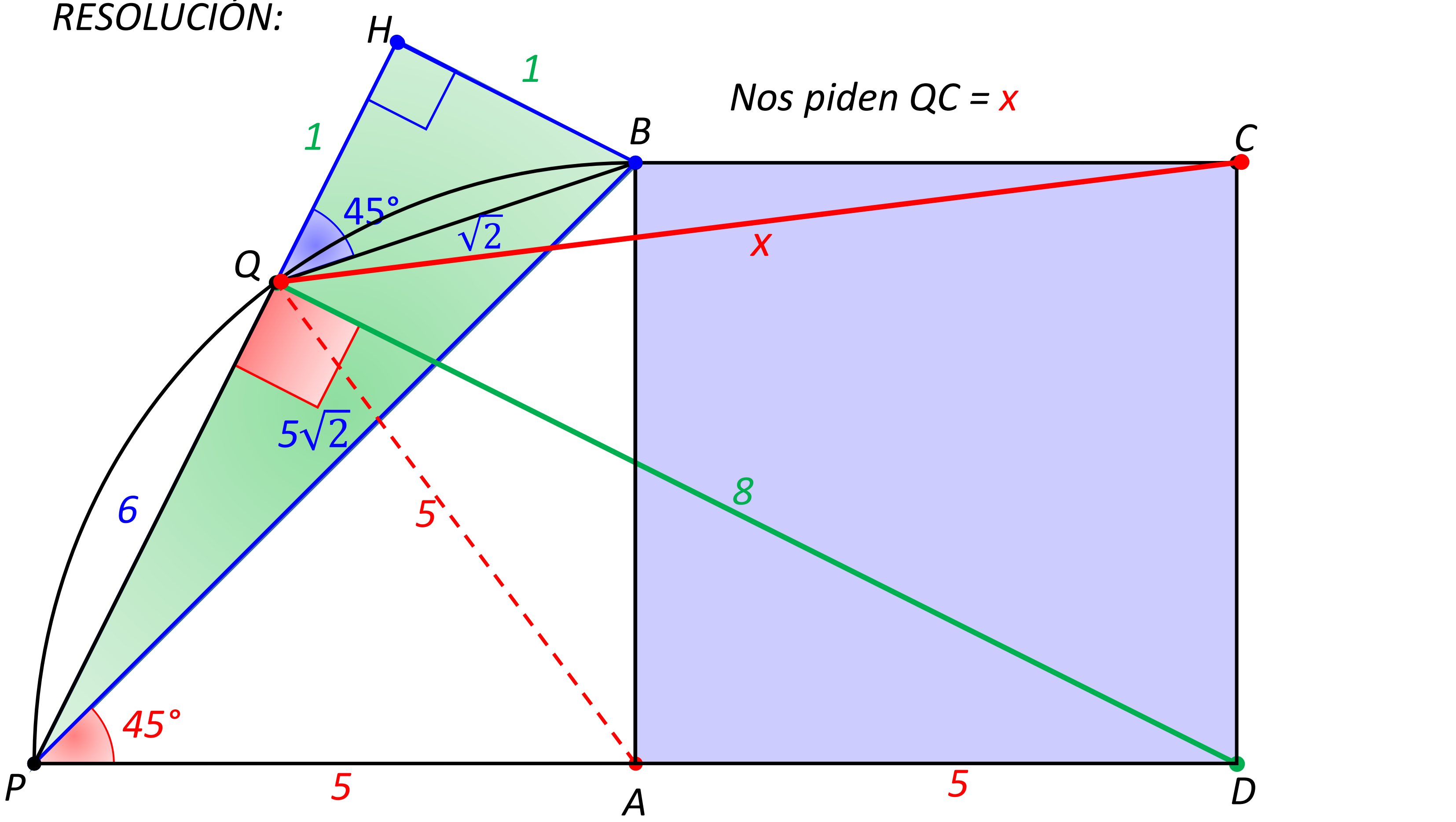
Del gráfico ABCD es un cuadrado, si $PQ=6$ y $QB=\sqrt{2}$, calcule QC.





RESOLUCIÓN:

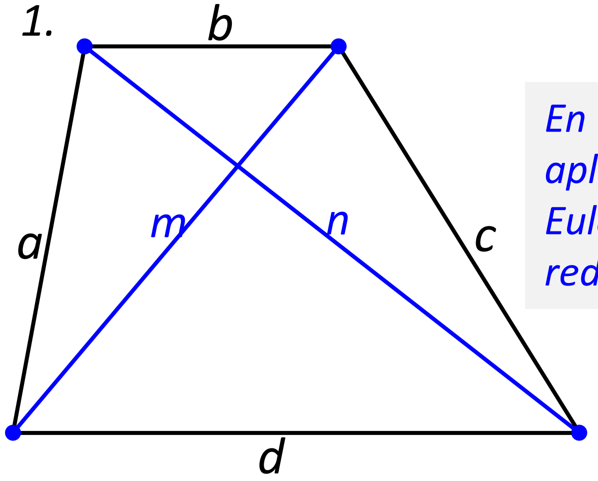
Nos piden $QC = x$



- Por el cuadrante PAB y notable de 45°:
  $QH=HB=1$
- El ⊿PHB notable de 8° y 82°:
  $PB=5\sqrt{2}$
- Entonces: $AP=5$ (⊿PAB not 45°)
  $PA=AQ=AD=5$
- El ⊿PQD es rectángulo por mediana relativa a la hipotenusa y notable de 37° y 53°:
  $QD=8$
- En ABCD, teorema de Marlen:
  $(x)^2+(5)^2 = (\sqrt{2})^2+(8)^2$
  $\boxed{x = \sqrt{41}}$

TEOREMAS ADICIONALES:

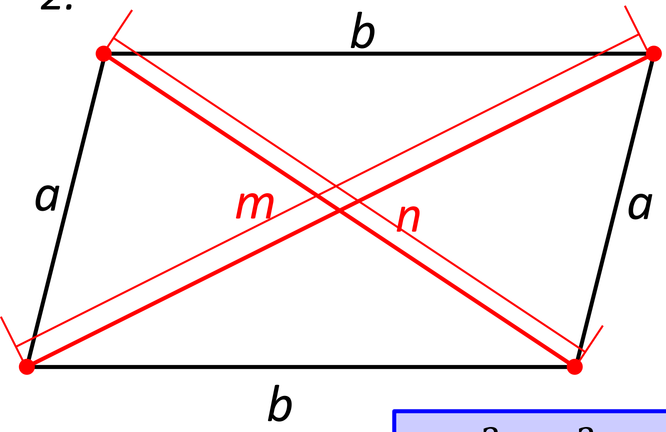
1.



En todo trapecio cuando aplicamos el teorema de Euler la expresión se reduce a:

$$a^2 + c^2 + 2(b)(d) = m^2 + n^2$$

2.

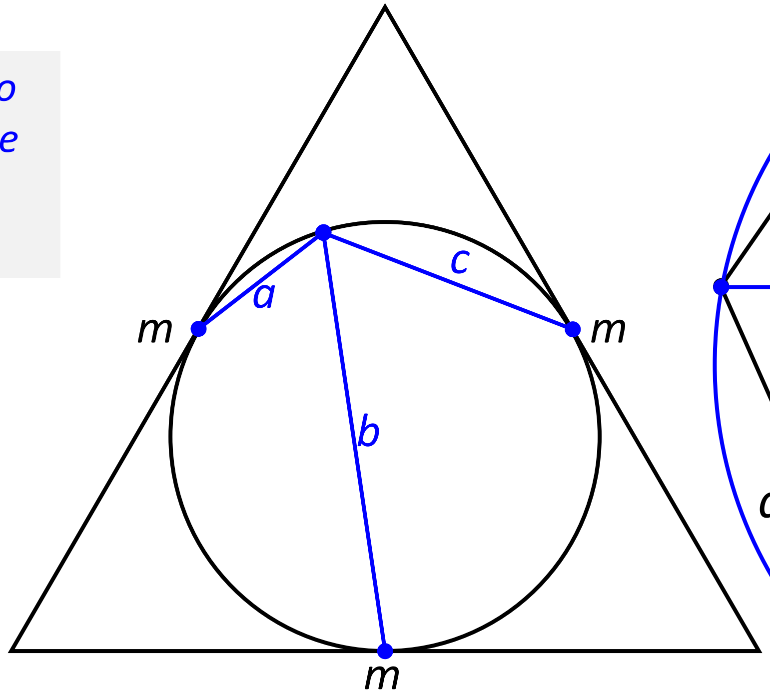


En todo paralelogramo cuando aplicamos el teorema de Euler la expresión se reduce a:

$$2(a^2 + b^2) = m^2 + n^2$$

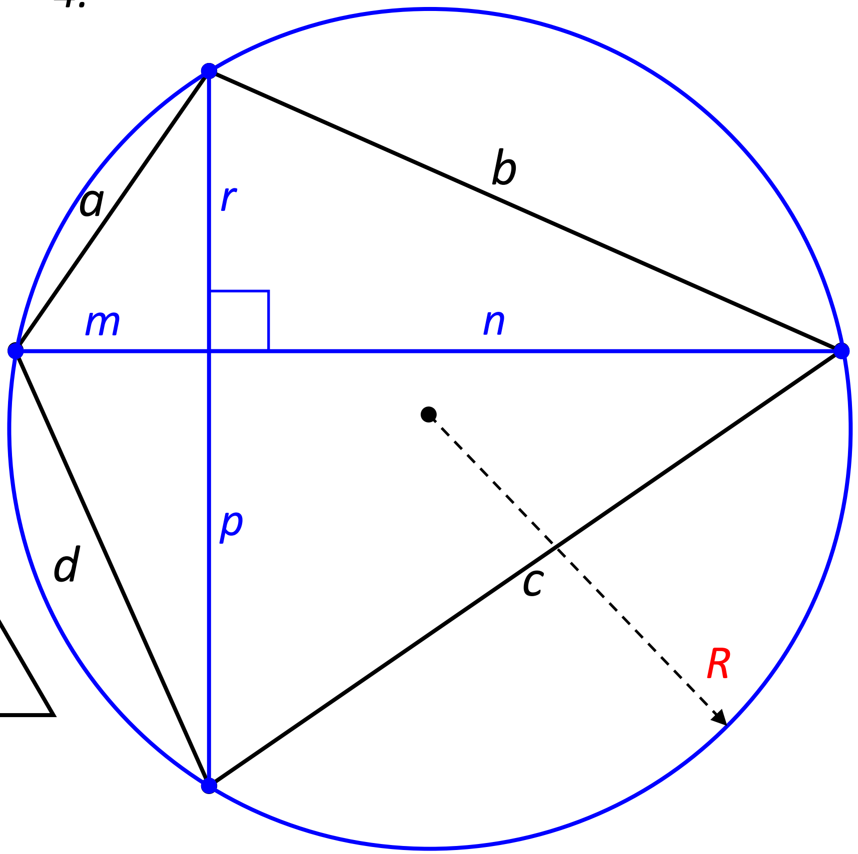
3.

Si P es un punto cualquiera de la circunferencia inscrita a un triángulo equilátero.



$$m^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

4.



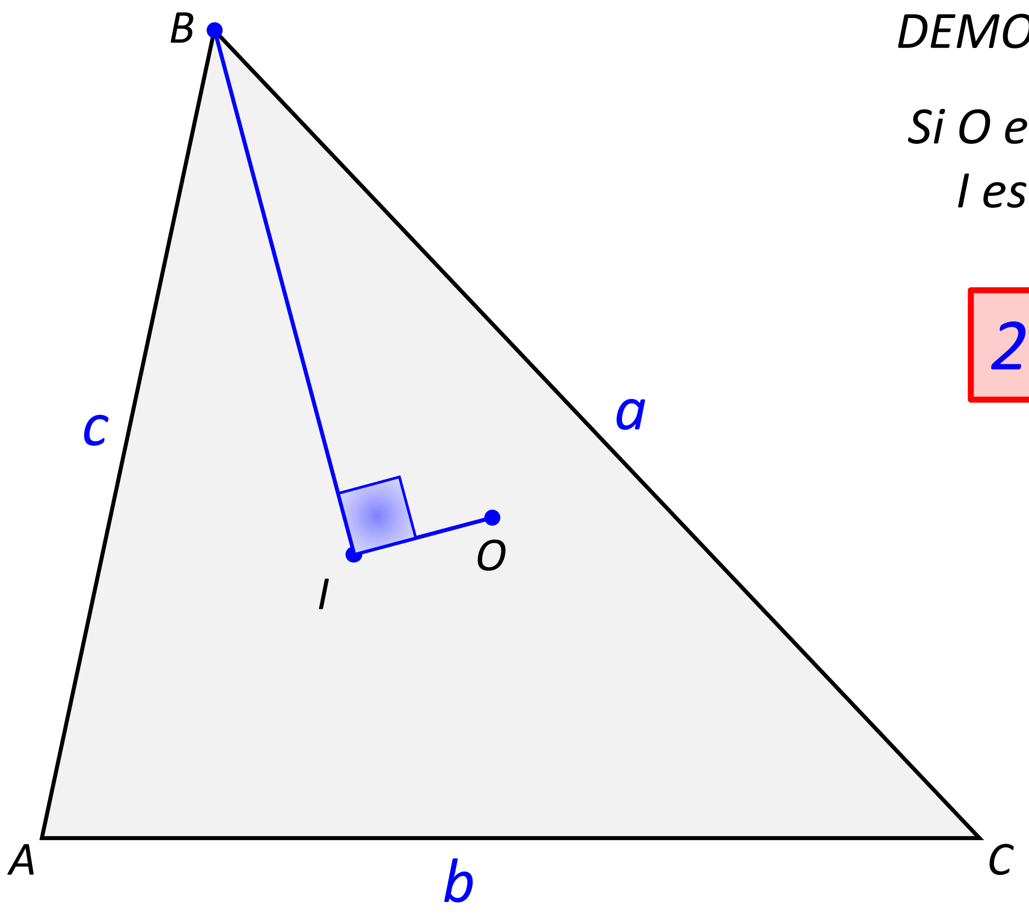
TEOREMA DE FAURE:

$$m^2 + r^2 + n^2 + p^2 = 4R^2$$

TEOREMA DE ARQUIMEDES:

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^2 = 4R^2$$

RETO DEL TEMA



DEMOSTRAR QUE:

Si O es circuncentro
I es incentro:

$$\boxed{2(b) = a + c}$$