TRIGONOMETRÍA

PROGRAMA ACADÉMICO VIRTUAL

Ciclo Anual Virtual Cesar Vallejo

Docente:

IDENTIDADES DE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

OBJETIVOS

- Reconocer las reglas de las identidades de reducción al primer cuadrante.
- Calcular el valor de las razones trigonométricas de ángulos de cualquier medida como: 120° ; 750°; 1110° ; en función de ángulos conocidos.
  Utilizando las formas :

$$\mathbf{90° \pm \theta}; \quad \mathbf{180° \pm \theta}; \quad \mathbf{270° \pm \theta}; \quad \mathbf{360° - \theta};$$

$$\mathbf{360°n + \theta}$$

- Aplicar las identidades reducción al primer cuadrante a la resolución de problemas, en particular problemas de examen de admisión

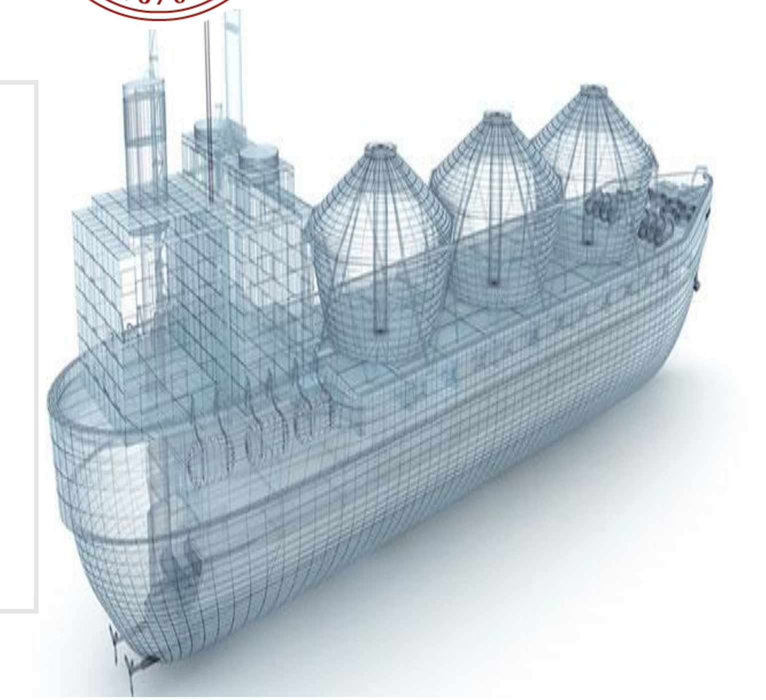
INTRODUCCIÓN

ING. NAVAL

Es una carrera que puedes estudiar en la UNI.
Su formación toma en cuenta la complejidad de la tecnología naval moderna y la singularidad del litoral peruano.

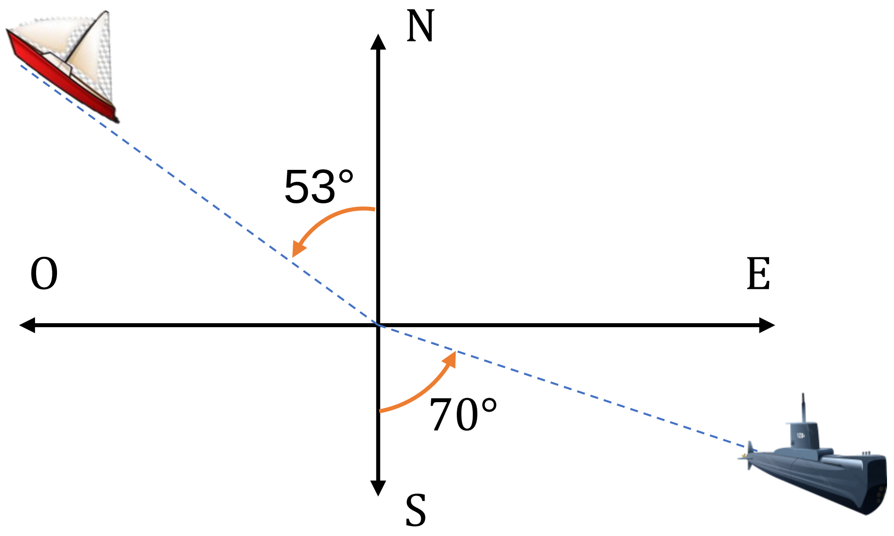
Tiene la finalidad de realizar el diseño, construcción, mantenimiento, operación y administración de todo tipo de naves así como estructuras marítimas y portuarias, sean concebidos por ingenieros altamente especializados.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA



¿Sabias que ?

En la ingenieria naval para el seguimiento de la trayectoria de navios, se utilizan ángulos trigonométricos con lado inicial en el semieje eje NORTE de los puntos cardinales



Estos ángulos son conocidos como rumbo

La clase anterior estudiamos las fórmulas

- SENO Y COSENO DE LA SUMA O DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}x\cos y \pm \cos x \operatorname{sen}y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Aplicación : ¿Cómo podemos calcular el valor de $\cos 240°$ usando las identidades trigonométricas?

Observamos que:

$$\cos 240° = \begin{cases} \cos(180° + 60°) \\ \cos(270° - 30°) \\ \cos(120° + 120°) \end{cases}$$

Consideremos: $\cos 240° = \cos(270° - 30°)$

- $\cos(270° - 30°) = \underbrace{\cos 270°}_{0}\cos 30° + \underbrace{\operatorname{sen}270°}_{-1}\operatorname{sen}30°$

$$\cos(270° - 30°) = -\operatorname{sen}30°$$

En general, podemos determinar $\cos(270° - \theta)$

- $\cos(270° - \theta) = \underbrace{\cos 270°}_{0}\cos\theta + \underbrace{\operatorname{sen}270°}_{-1}\operatorname{sen}\theta$

$$\cos(270° - \theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

IDENTIDADES DE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

- IDENTIDADES PARA ANGULOS MENORES QUE UNA VUELTA

I) $\boxed{\text{R.T.}(180° \pm \theta) = (\pm)\text{R.T.}(\theta)}$

II) $\boxed{\text{R.T.}(360° - \theta) = (\pm)\text{R.T.}(\theta)}$

III) $\boxed{\text{R.T.}(90° + \theta) = (\pm)\text{coR.T.}(\theta)}$

IV) $\boxed{\text{R.T.}(270° \pm \theta) = (\pm)\text{coR.T.}(\theta)}$

$\underbrace{\text{coR.T.}}_{Co - razón\ trigonométrica}$

Donde

R. T : Razón trigonometrica .

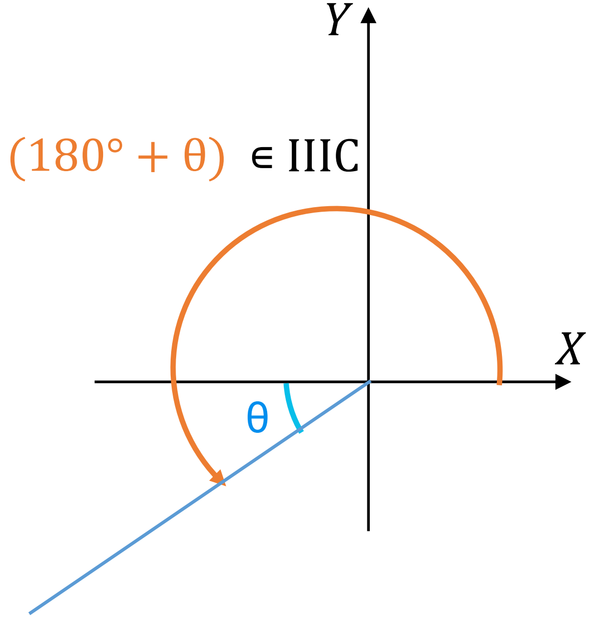
$\pm$: El signo depende del cuadrante al que pertenece el angulo a reducir

θ : Se considera ángulo águdo

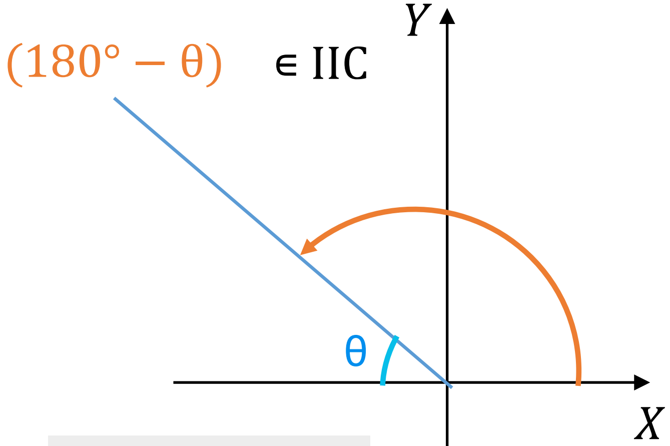
Observación

Grafiquemos los ángulos
$180° + \theta$, $180° - \theta$, $360° - \theta$
en posición normal.

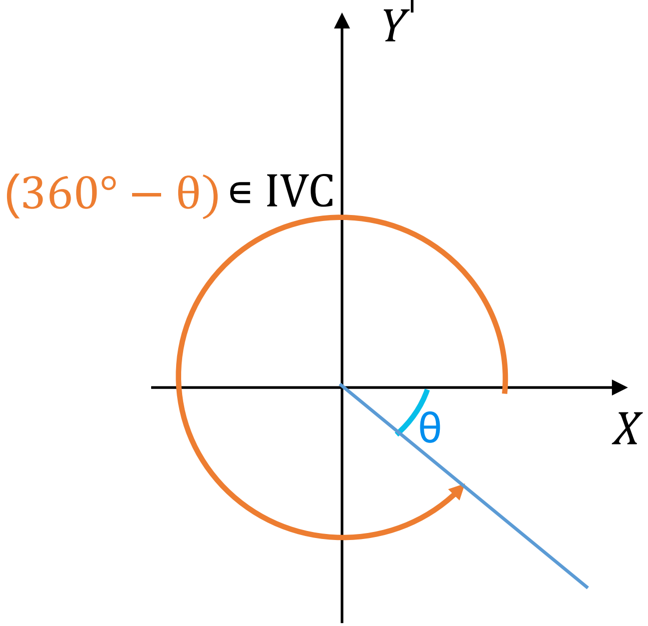
- $180° + \theta$



- $180° - \theta$



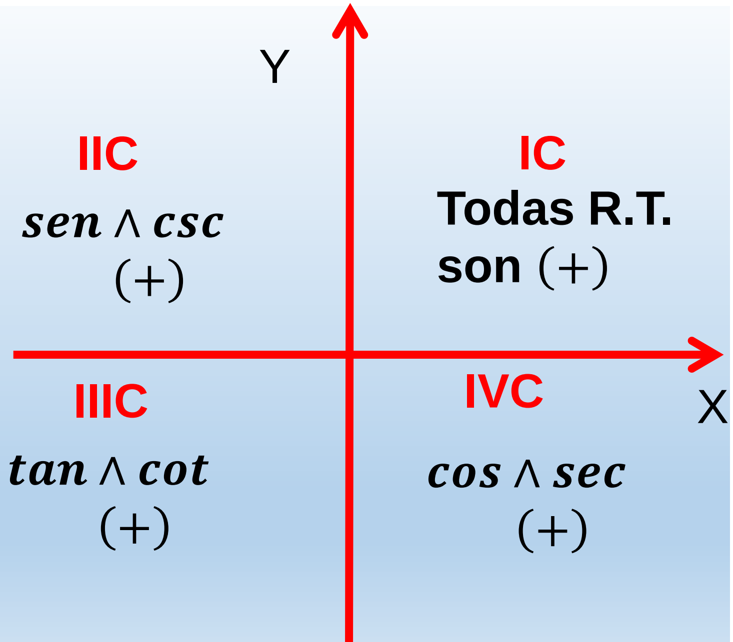
- $360° - \theta$



- **Recordemos el signo de razones trigonométricas**

Un ángulo en posición normal que no termina en algún semieje coordenado, es decir el ángulo pertenece a un cuadrante, tiene un signo que va estar determinado por las coordenadas del punto en el lado final.

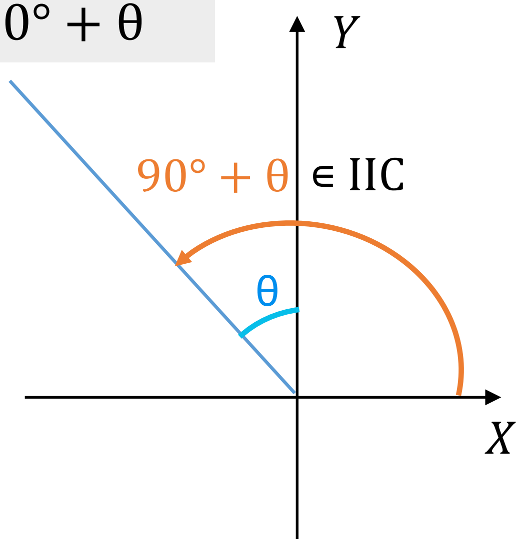
Así tenemos el siguiente esquema de signo de las razones trigonométricas.



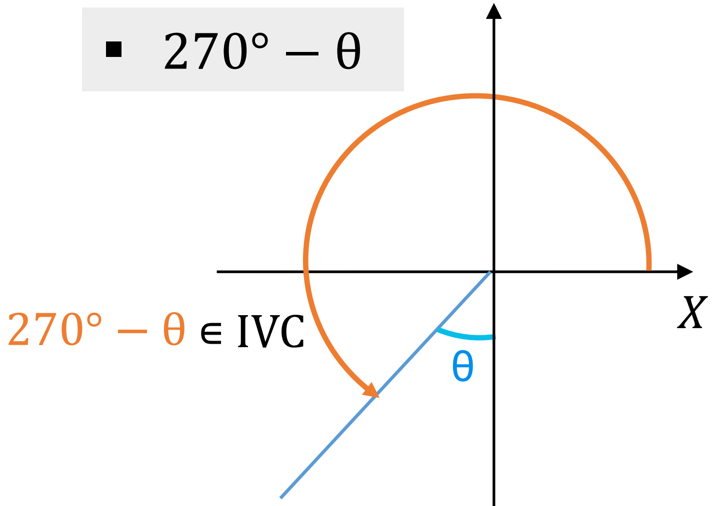
Ejemplos

- $\cos(\underbrace{180° + \theta}_{\in \text{IIIC}}) = -\cos\theta$
- $\tan(\underbrace{180° + \alpha}_{\in \text{IIIC}}) = +\tan\alpha$
- $\operatorname{sen}(\underbrace{180° - \theta}_{\in \text{IIC}}) = +\operatorname{sen}\theta$
- $\tan(\underbrace{180° + \alpha}_{\in \text{IIIC}}) = +\tan\alpha$
- $\cot(\underbrace{360° - \alpha}_{\in \text{IVC}}) = -\cot\alpha$

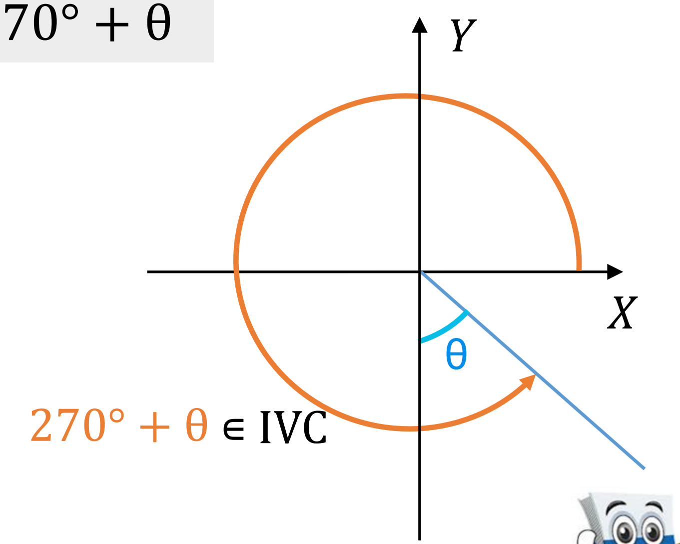
- $90° + \theta$



- $270° - \theta$



- $270° + \theta$



Entonces

$$120° = \underbrace{90° + 30°}_{\in \text{IIC}}$$

$$240° = \underbrace{270° - 30°}_{\in \text{IIIC}}$$

$$300° = \underbrace{270° + 30°}_{\in \text{IVC}}$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}(\underbrace{90° + \theta}_{\in \text{IIC}}) = +\cos\theta$
- $\tan(\underbrace{90° + \alpha}_{\in \text{IIC}}) = -\cot\alpha$
- $\sec(\underbrace{90° + \theta}_{\in \text{IIC}}) = -\csc\theta$
- $\cos(\underbrace{90° + \theta}_{\in \text{IIC}}) = -\operatorname{sen}\theta$
- $\operatorname{sen}(\underbrace{270° - \theta}_{\in \text{IIIC}}) = -\cos\theta$
- $\tan(\underbrace{270° + \alpha}_{\in \text{IVC}}) = -\cot\alpha$

Aplicación 1

Halle el valor de $\operatorname{sen}143°$

Resolución

Nos piden $\operatorname{sen}143°$

$$\operatorname{sen}143° = \operatorname{sen}(\underbrace{180° - 37°}_{\in \text{IIC}}) = +\ \operatorname{sen}37°$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}143° = \frac{3}{5}$$

Otra forma

$$\operatorname{sen}143° = \operatorname{sen}(\underbrace{90° + 53°}_{\in \text{IIC}}) = +\ \cos 53°$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}143° = \frac{3}{5}$$

Aplicación 2

Halle el valor de $\operatorname{sen}300°$

Resolución

Nos piden $\operatorname{sen}300°$

$$\operatorname{sen}300° = \operatorname{sen}(\underbrace{360° - 60°}_{\in \text{IVC}}) = -\ \operatorname{sen}60°$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}300° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Otra forma

$$\operatorname{sen}300° = \operatorname{sen}(\underbrace{270° + 30°}_{\text{IVC}}) = -\ \cos 30°$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}300° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Aplicación 3

Halle el valor de $\operatorname{sen}315°$

Resolución

Nos piden $\operatorname{sen}315°$

$$\operatorname{sen}315° = \operatorname{sen}(\underbrace{360° - 45°}_{\in \text{IVC}}) = -\operatorname{sen}45°$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}315° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Otra forma

$$\operatorname{sen}315° = \operatorname{sen}(\underbrace{270° + 45°}_{\in \text{IVC}}) = -\cos45°$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}315° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Aplicación 4

Determine el valor de

$$H = \frac{\tan135° + \cos240°}{\sec 120°}$$

Resolución

- $\tan135° = \tan(\underbrace{180° - 45°}_{\in \text{IIC}}) = -\tan45° = -1$
- $\cos240° = \cos(\underbrace{180° + 60°}_{\in \text{IIIC}}) = -\cos60° = \frac{-1}{2}$
- $\sec120° = \sec(\underbrace{180° - 60°}_{\in \text{IIC}}) = -\sec60° = -2$

Reemplazando

$$\therefore\ H = \frac{-1 + (\frac{-1}{2})}{-2} = \frac{3}{4}$$

Recuerda que ...

$\frac{\pi}{2} rad = 90°$
$\pi rad = 180°$
$\frac{3\pi}{2} rad = 270°$
$2\pi rad = 360°$

Observación :

Si el ángulo esta en radianes no es necesario escribir la unidad, por ejemplo :

$\tan(\pi rad) = \tan(\pi)$

Aplicación 5

Reduzca la siguiente expresión

$$E = \frac{\tan(\pi+\theta) - \cot(\pi-\theta)}{\sec(\pi-\theta)}$$

Resolución

Nos piden

$$E = \frac{\overbrace{\tan(\pi+\theta)}^{\in \text{IIIC}} - \overbrace{\cot(\pi-\theta)}^{\in \text{IIC}}}{\underbrace{\sec(2\pi-\theta)}_{\in \text{IVC}}}$$

$$E = \frac{+\tan\theta - (-\cot\theta)}{+\sec\theta}$$

$$E = \frac{+\tan\theta + \cot\theta}{+\sec\theta}$$

$$E = \frac{sec\theta csc\theta}{+\sec\theta}$$

$\therefore$ $E = csc\theta$

Aplicación 6

Halle el valor de $\tan\frac{4\pi}{3}$

Resolución

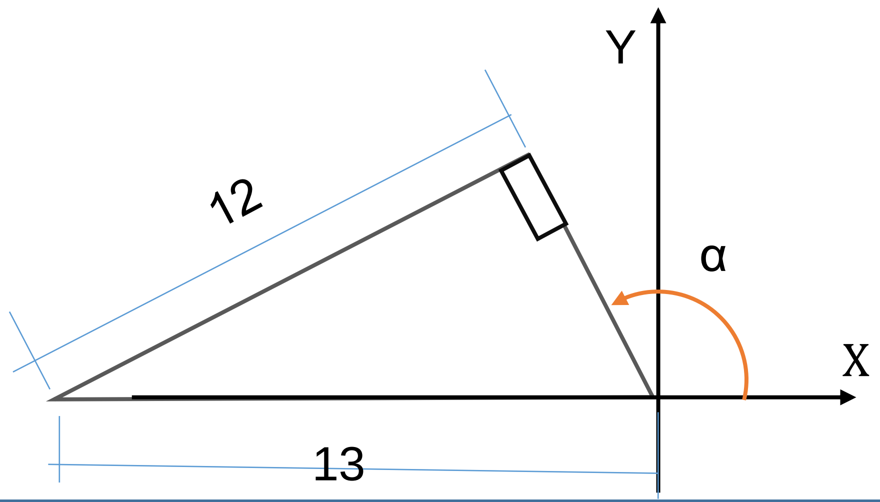
$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan\underbrace{(\pi + \frac{\pi}{3})}_{\in \text{IIIC}}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = +\tan\frac{\pi}{3}$$

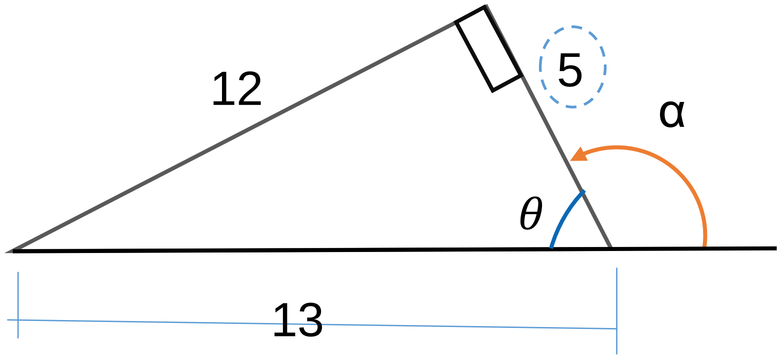
$\therefore$ $\tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$

Aplicación 7

A partir del gráfico, halle tanα



Resolución



Luego, se observa

$\theta + \alpha = 180°$

$\alpha = 180° - \theta$

Se cumple

$$tan\alpha = \tan(\underbrace{180° - \theta}_{\in \text{IIC}}) = -\tan\theta$$

$$\therefore\ tan\alpha = -\frac{12}{5}$$

En la aplicación vemos que :

Si $\theta + \alpha = 180°$

Se cumple

$tan\alpha = -tan\theta$

PROPIEDAD

$Si\ \alpha + \theta = 180°$

Se cumple que :

$$\boxed{\begin{aligned} sen\alpha &= sen\theta \\ \cos\alpha &= -cos\theta \\ \tan\alpha &= -tan\theta \end{aligned}}$$

Ejemplos

- sen130°=sen50°
- sen120°=sen60°
- cos150°=−cos30°
- tan140°=−tan40°

- tan143°=−tan37°
- cot135°=−cot45°
- cot105°=−cot75°
- sec105°=−sec15°
- csc120°=csc60°
- csc100°=csc80°

Aplicación 8

Reduzca La siguiente expresión

S=cos10°+cos20°+cos30°+ cos40° +cos50°........+cos170°

Resolución

Nos piden

$$S= \cos10°+\cos20°+\cos30°+\cos40°....\cos80°+\overbrace{\cos90°}^{(0)}+\underbrace{\cos100°}_{-\cos80°}$$

$$.....+\underbrace{\cos140°}_{-\cos40°}+\underbrace{\cos150°}_{-\cos30°}+\underbrace{\cos160°}_{-\cos20°}+\underbrace{\cos170°}_{-\cos10°}$$

$\therefore$ S= 0

PARA ÁNGULOS MAYORES A UNA VUELTA

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\text{R.T.}(360°n+\theta)=\text{R.T.}(\theta)}\\ \boxed{\text{R.T.}(2\pi n+\theta)=\text{R.T.}(\theta)}\end{array}\right\}\ n\in\mathbb{Z}$$

θ: es un ángulo de cualquier medida

Si n es un numero entero entonces 360°.n representa un numero entero de vueltas, de forma practica esta se puede eliminar

Ejemplos

- $\cos(360°+\theta) = \cos\theta$
- $\tan(360°+\alpha) = \tan\alpha$
- $\sec(720°+\theta) = \sec(360°(2)+\theta) = \sec\theta$

- $\cos 1110° = \cos(1080°+30°) = \cos(360°(3)+\theta) = \cos\theta$
- $\cot(6\pi+\theta) = \cot(2\pi(3)+\theta) = \cot\theta$
- $\csc(32\pi+\theta) = \csc(2\pi(16)+\theta) = \csc\theta$
- $\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi+\frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3}$

Además los ángulos $360°n+\theta$ y θ son ángulos coterminales. $(n\in\mathbb{Z})$

Pues la diferencia de ambos es un múltiplo de 360°

Aplicación 9

Reduzca la expresión

$$E = \text{sen}(20\pi + x) - \text{sen}(79\pi - x)$$

Resolución

Aplicamos reducción al primer cuadrante para ángulos mayores a una vuelta

- $\text{sen}(20\pi + x) = \text{sen}(2\pi(10) + x) = \text{sen}(x)$
- $\text{sen}(79\pi - x) = \text{sen}(78\pi + \pi - x) = \text{sen}(2\pi(39) + \pi - x)$

$$= \text{sen}(\underbrace{\pi - x}_{\in \text{IIC}}) = \text{senx}$$

Reemplazando en E

$E = \text{senx} - \text{senx}$

$E = 0$

Aplicación 10

Calcule el valor de cot1470°+tan780°

Resolución

$$\cot 1470° = \cot(\underbrace{1440°}_{360°(4)} + 30°) = \cot 30° = \sqrt{3}$$

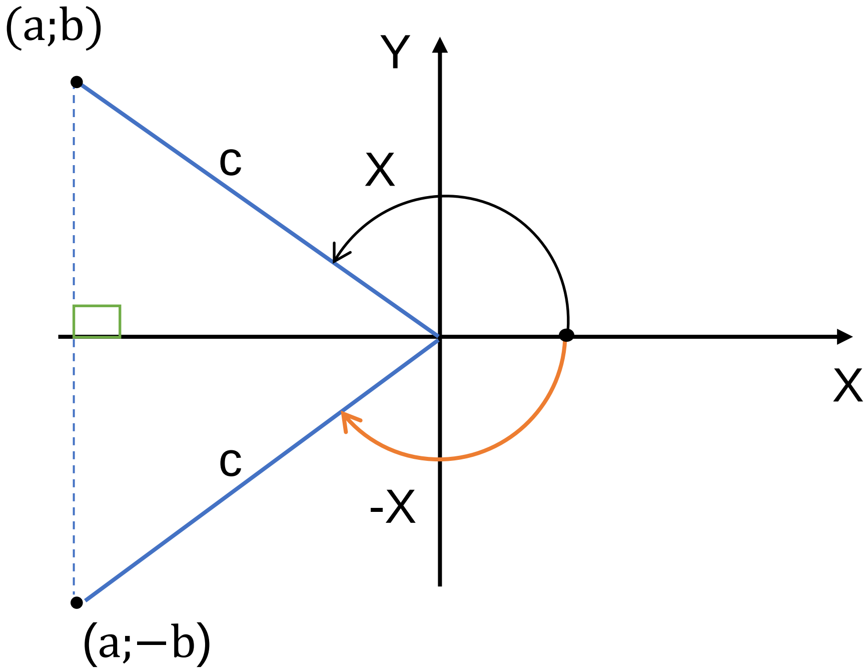
$$\tan 780° = \tan(\underbrace{720°}_{360°(2)} + 60°) = \sqrt{3}$$

Reemplazando en lo pedido

$$\therefore \quad \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

PARA ÁNGULOS DE LA FORMA $(-X)$

Se tiene el ángulo x en sentido antihorario, $(-x)$ en sentido horario



Por ángulo en posición normal

$$\text{sen}x = \frac{b}{c} \quad \text{-------------------------} \quad \text{(I)}$$

$$\text{sen}(-x) = \frac{-b}{c} \quad \text{--------------------} \quad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$\therefore \ \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

- Análogamente se cumple lo siguiente

$$\boxed{\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)}$$

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x)}$$

$$\boxed{\tan(-x) = -\tan(x)}$$

Ejemplos

- $\text{sen}(-30°) = -\text{sen}30°$
- $\cos(-10°) = \cos 10°$
- $\tan(-10°) = -\tan 10°$
- $\text{sen}(-120°) = -\text{sen}120°$
  $= -\text{sen}60°$
- $\text{sen}(\theta - 90°) = -\text{sen}(-(90° - \theta))$
  $= -\text{sen}(90° - \theta)$
  $= -\cos\theta$
- $\cos(x - 180°) = \cos(-(180° - x))$
  $= \cos(180° - x)$
  $= -\cos x$

Aplicación 11

Simplifique la siguiente expresión

$$A = \frac{sen(-x) + \cos(-x)}{senx - cosx}$$

Resolución

Aplicamos las propiedades ángulos de la forma $-x$

$$A = \frac{sen(-x) + \cos(-x)}{senx - cosx}$$

$$A = \frac{-senx + \cos x}{senx - cosx}$$

$$A = \frac{-(senx - \cos x)}{senx - cosx}$$

$\therefore \quad A = -1$

Aplicación 12

Si se cumple que

$$\text{sen}(x - 180°) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Halle $\cos^2 x$

Resolución

Damos forma al dato

$$\text{sen}(-(180° - x)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por identidades de ángulos negativos

$$-\text{sen}(\underbrace{180° - x}_{\in \text{IIC}}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$-\text{senx} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{senx} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Sabemos que

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2}{9}$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{7}{9}$$

Bibliografía

- Lumbreras Editores. (2017). Temas Selectos “Identidades trigonométricas” , Lima , Perú

- Lumbreras Editores. (2018). Trigonometría, Una visión analítica de las funciones , Lima , Perú

- Sullivan , Editorial PEARSON , Algebra y trigonometría , 7ma edición

- PIXABAY. (2020). pixabay.com, Imágenes libres de derecho de autor , Lima , Perú

- Juan Carlos Sandoval Peña . (1981). Trigonometría Moderna , 631 pag , Lima , Perú