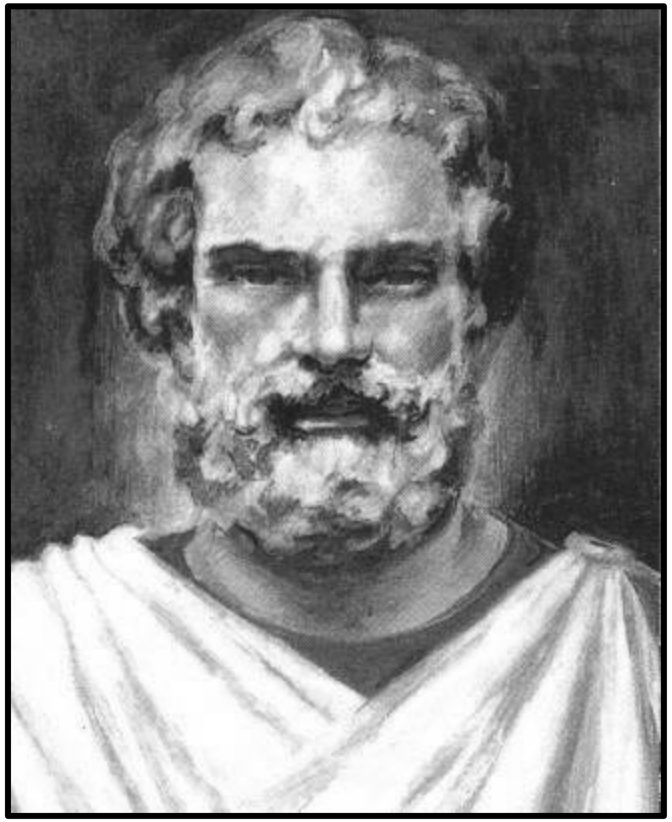
PROPORCIONALIDAD

- *DEFINICIÓN DE PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS.*
- *TEOREMA DE THALES.*
- *TEOREMA DE LA BISECTRIZ.*
- *TEOREMA DE MENELAO*

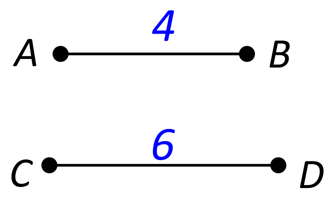


THALES DE MILETO

Tales de Mileto fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego. Vivió y murió en Mileto, polis griega de la costa jonia. Aristóteles lo consideró como el iniciador de la escuela de Mileto

PROPORCIONALIDAD

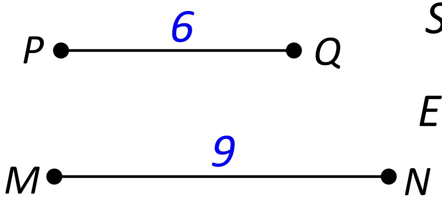
SEGMENTOS PROPORCIONALES:



Si AB=4 y CD=6

Entonces: $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están en una razón de 2 a 3



Si PQ=6 y MN=9

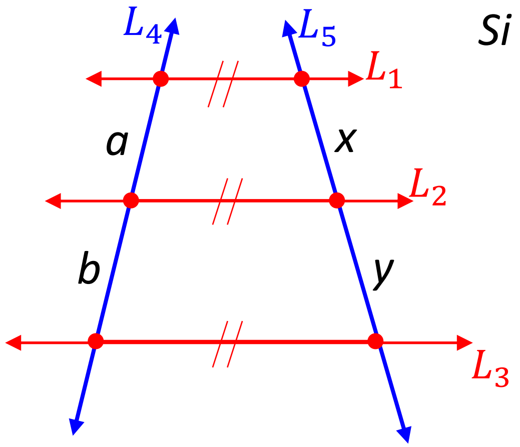
Entonces: $\frac{PQ}{MN} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Los $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ están en una razón de 2 a 3

Finalmente se dice que, como las razones son iguales. Los $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son proporcionales a $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ en una razón de 2 a 3.

$$\boxed{\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{MN} = \frac{2}{3}}$$

TEOREMA DE THALES:

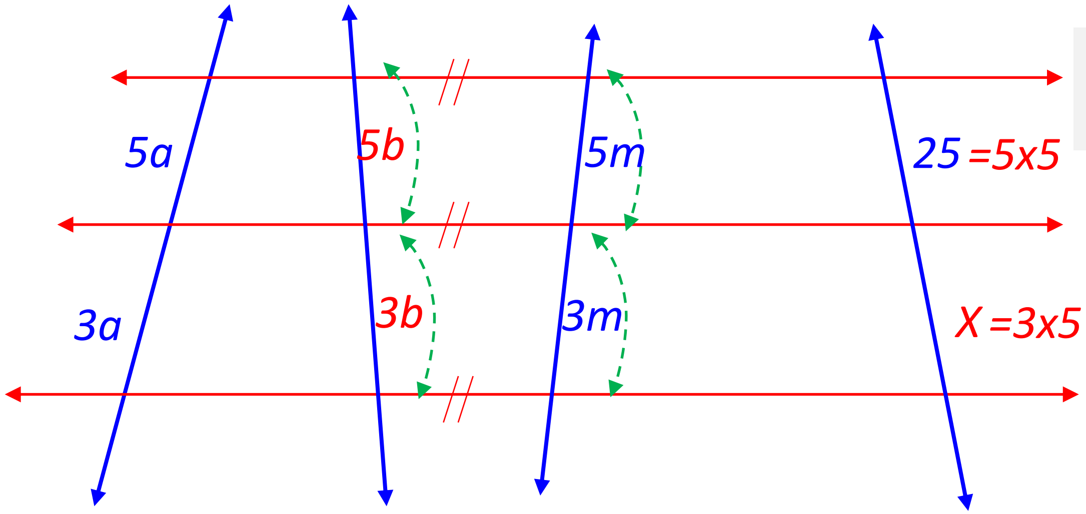


Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}} \qquad \boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}}$$

Forma práctica de aprovechar el teorema de Thales.



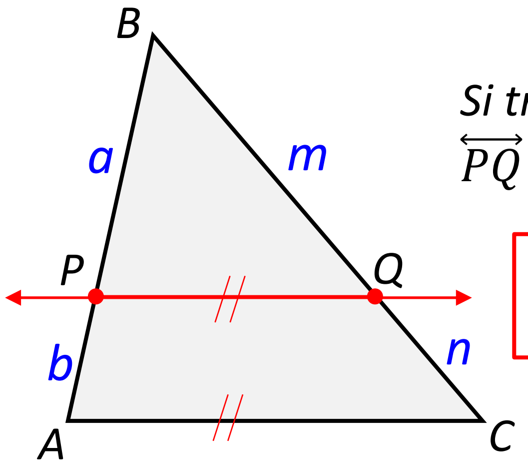
Aplicamos el teorema de Thales:

$$\frac{X}{25} = \frac{3\cancel{a}}{5\cancel{a}}$$

$\therefore X = 15$

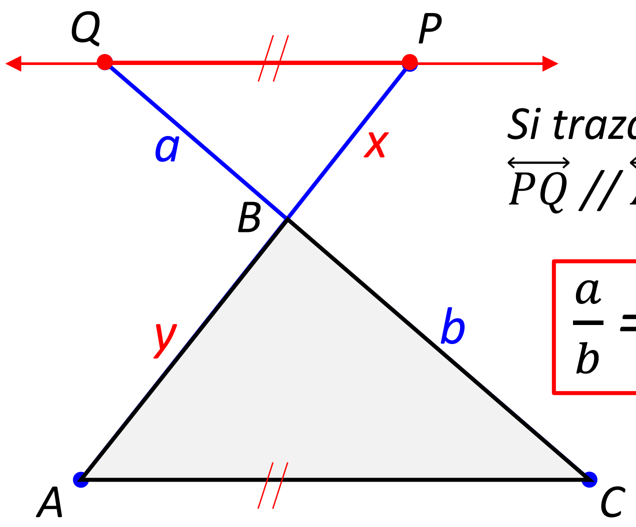
PROPORCIONALIDAD

COROLARIOS DE THALES:



Si trazamos $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$



Si trazamos $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$

Del gráfico ABCD es un paralelogramo, si AE=4 y EQ=1. Calcule QP.

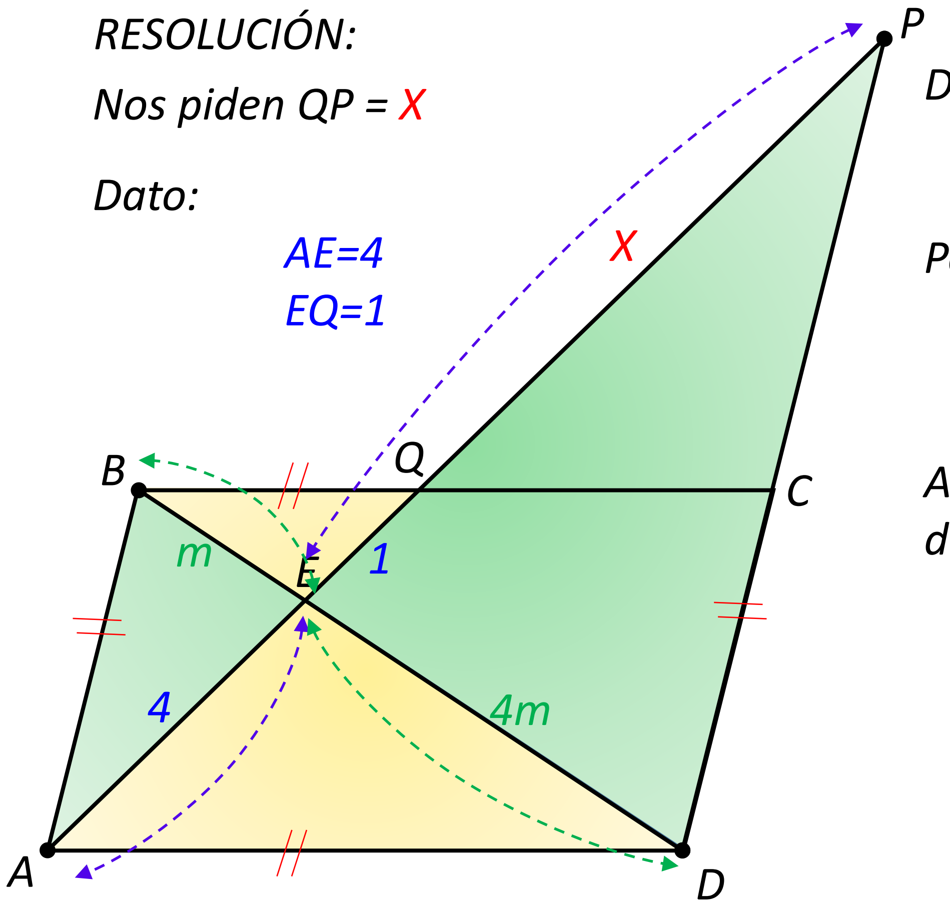
RESOLUCIÓN:

Nos piden QP = X

Dato:

AE=4

EQ=1



Del paralelogramo ABCD:

$\overline{BQ} // \overline{AC}$

Por Corolario de Thales:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{1}{4}$$

Además $\overline{AB} // \overline{DP}$, por Corolario de Thales:

$$\frac{4}{1+X} = \frac{m}{4m}$$

$$16 = 1+X$$

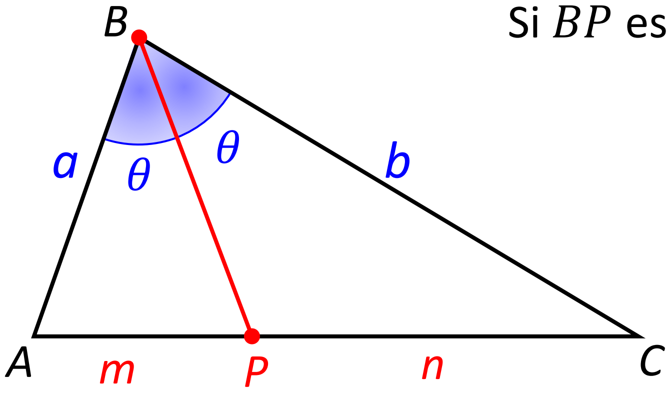
$$\boxed{\therefore X = 15}$$

PROPORCIONALIDAD

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

En todo triángulo los lados adyacentes de una bisectriz son proporcionales a las segmentos determinados en su lado relativo.

- Interna:



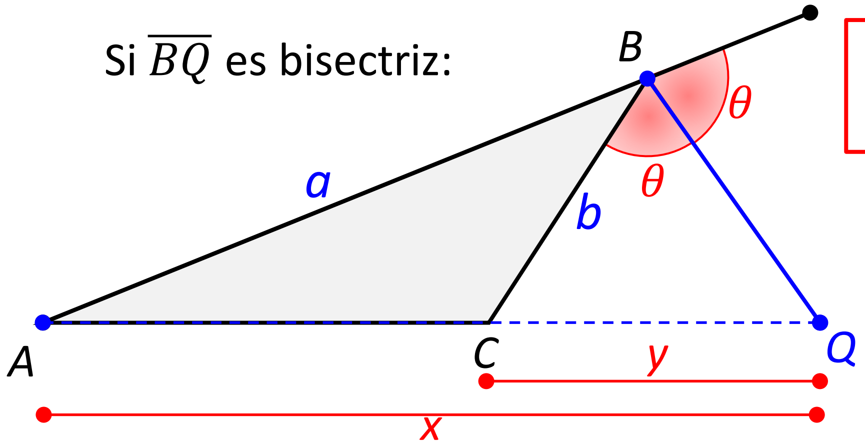
Si $\overline{BP}$ es bisectriz:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$: Lados adyacentes
$\overline{AP}$, $\overline{PC}$: Segmentos determinados por la bisectriz interior

- Externa:

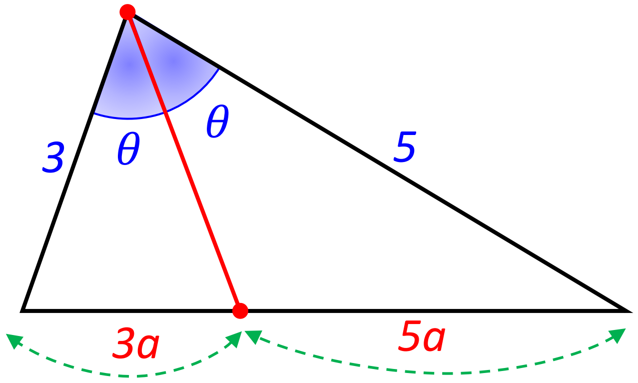
Si $\overline{BQ}$ es bisectriz:

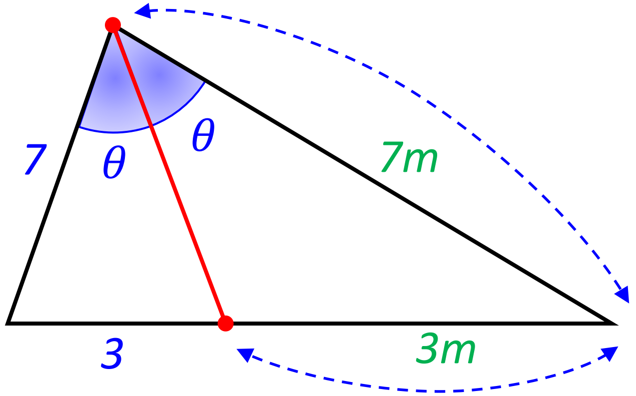


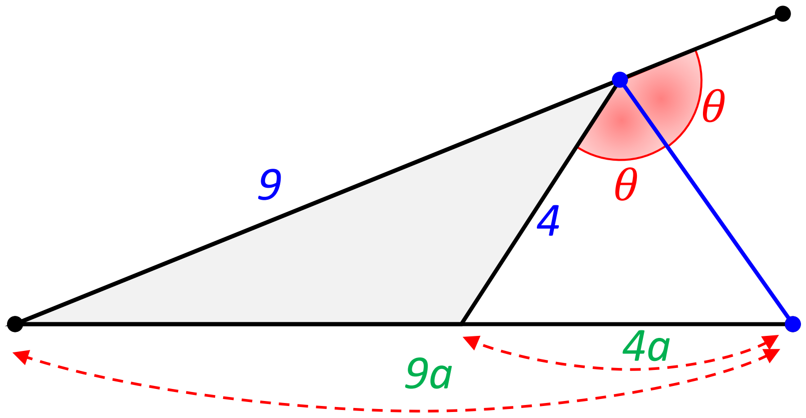
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$

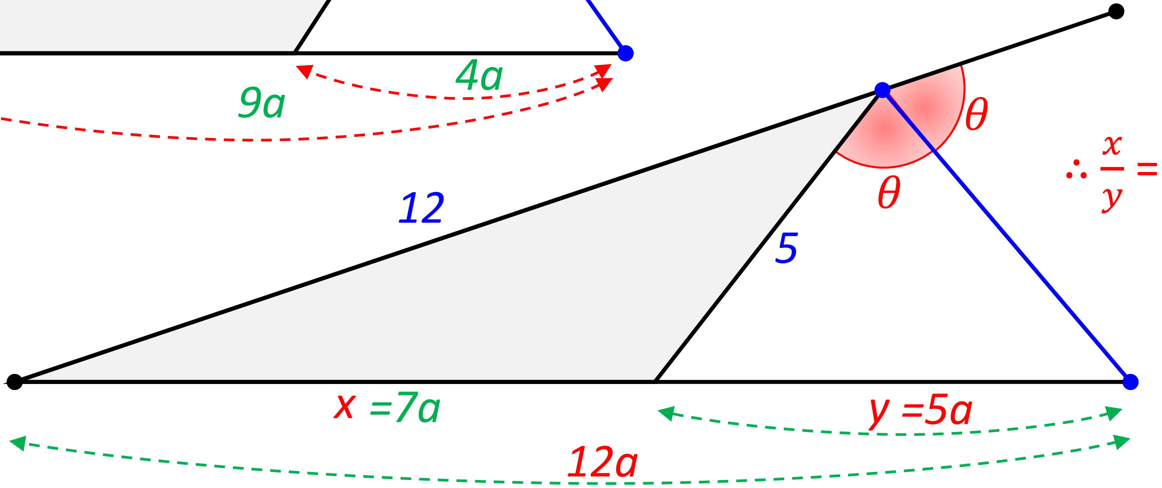
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$: Lados adyacentes
$\overline{AQ}$, $\overline{CQ}$: Segmentos determinados por la bisectriz exterior

Forma práctica de aprovechar el teorema de la bisectriz.







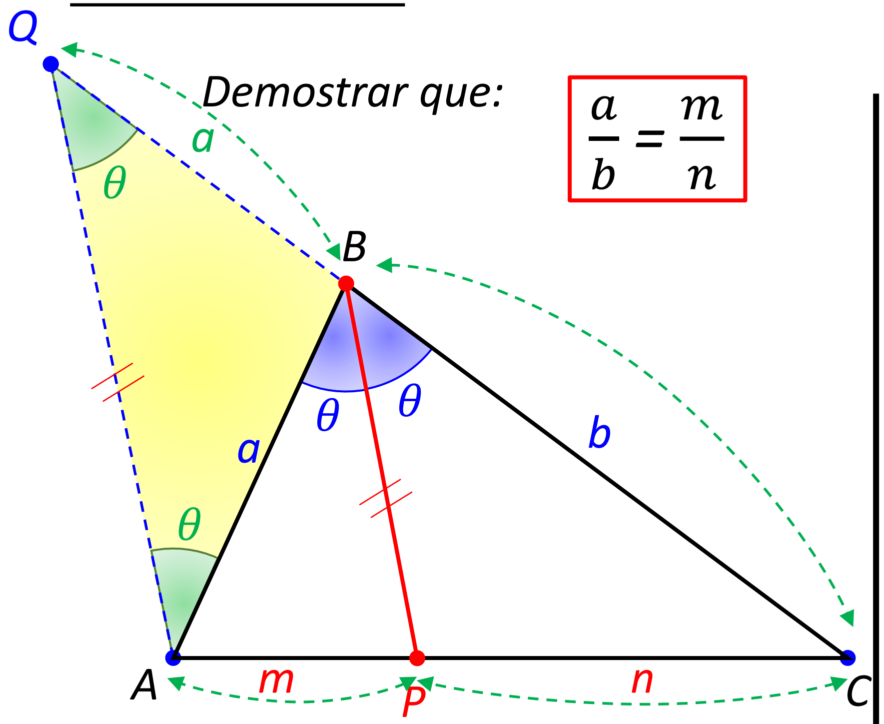


$\therefore \frac{x}{y} = \frac{7}{5}$

PROPORCIONALIDAD

DEMOSTRACIÓN:

Demostrar que: $\boxed{\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}}$

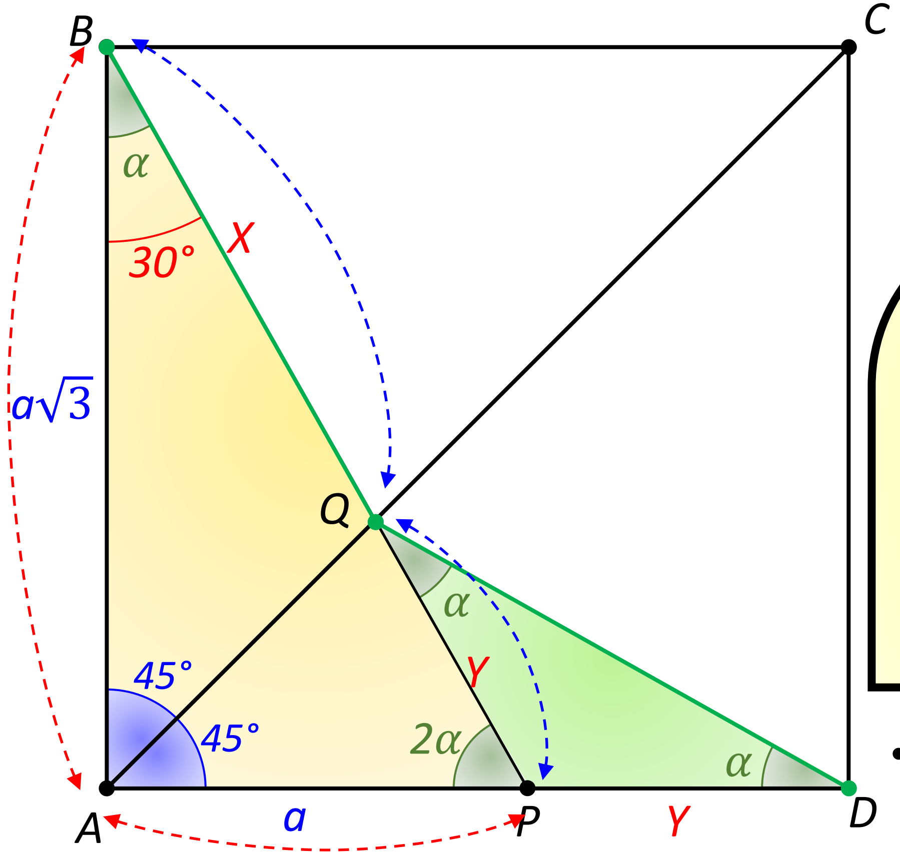


Para demostrar el teorema de la bisectriz trazaremos un $\overline{AQ}$ paralela $\overline{BP}$.

En el ΔAQC, como $\overline{AQ}$ // $\overline{BP}$, por corolario de Thales:

$$\boxed{\therefore \frac{a}{b}=\frac{m}{n}}$$

Del gráfico ABCD es un cuadrado, $\boxed{\text{si QP=PD.}}$ Calcule $\dfrac{BQ}{QP}$



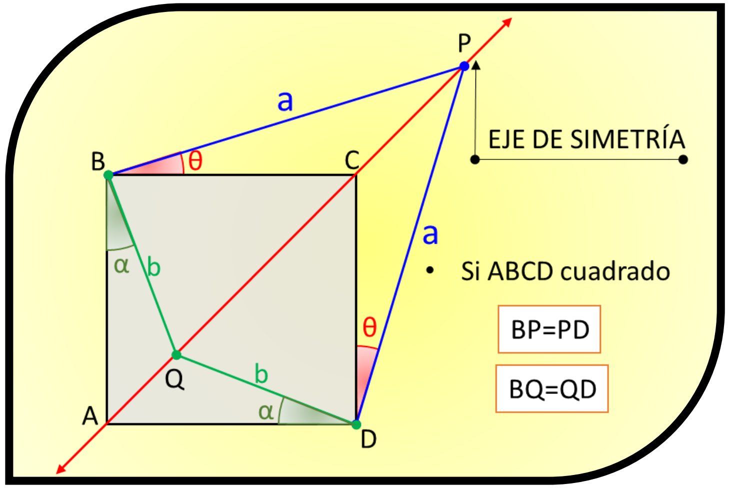
- *El ΔQPD es isósceles, por ∢ exterior:*

  m∢APB=2α

- *En el ⊿BAP:* $\alpha=30°$

RESOLUCIÓN

Nos piden $\dfrac{BQ}{QP}=\dfrac{X}{Y}$



- *El ⊿BAP es notable de 30° y 60°:*

  AP=a y AB=a√3

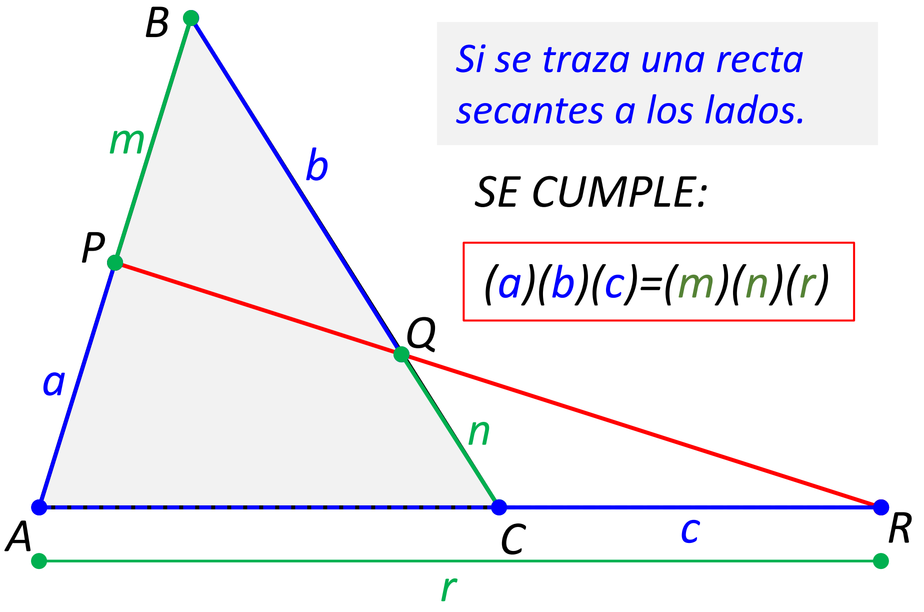
- *Por teorema de la bisectriz:*

$$\frac{X}{Y}=\frac{a\sqrt{3}}{a}$$

$$\boxed{\therefore \frac{X}{Y}=\sqrt{3}}$$

PROPORCIONALIDAD

TEOREMA DE MENELAO:

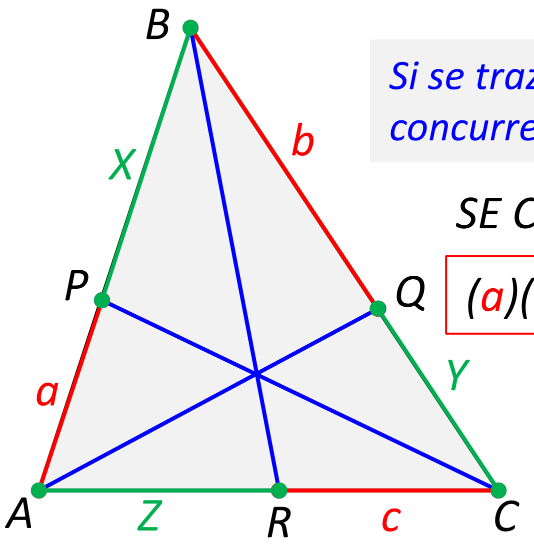


Si se traza una recta secantes a los lados.

SE CUMPLE:

(a)(b)(c)=(m)(n)(r)

TEOREMA DE CEVA:

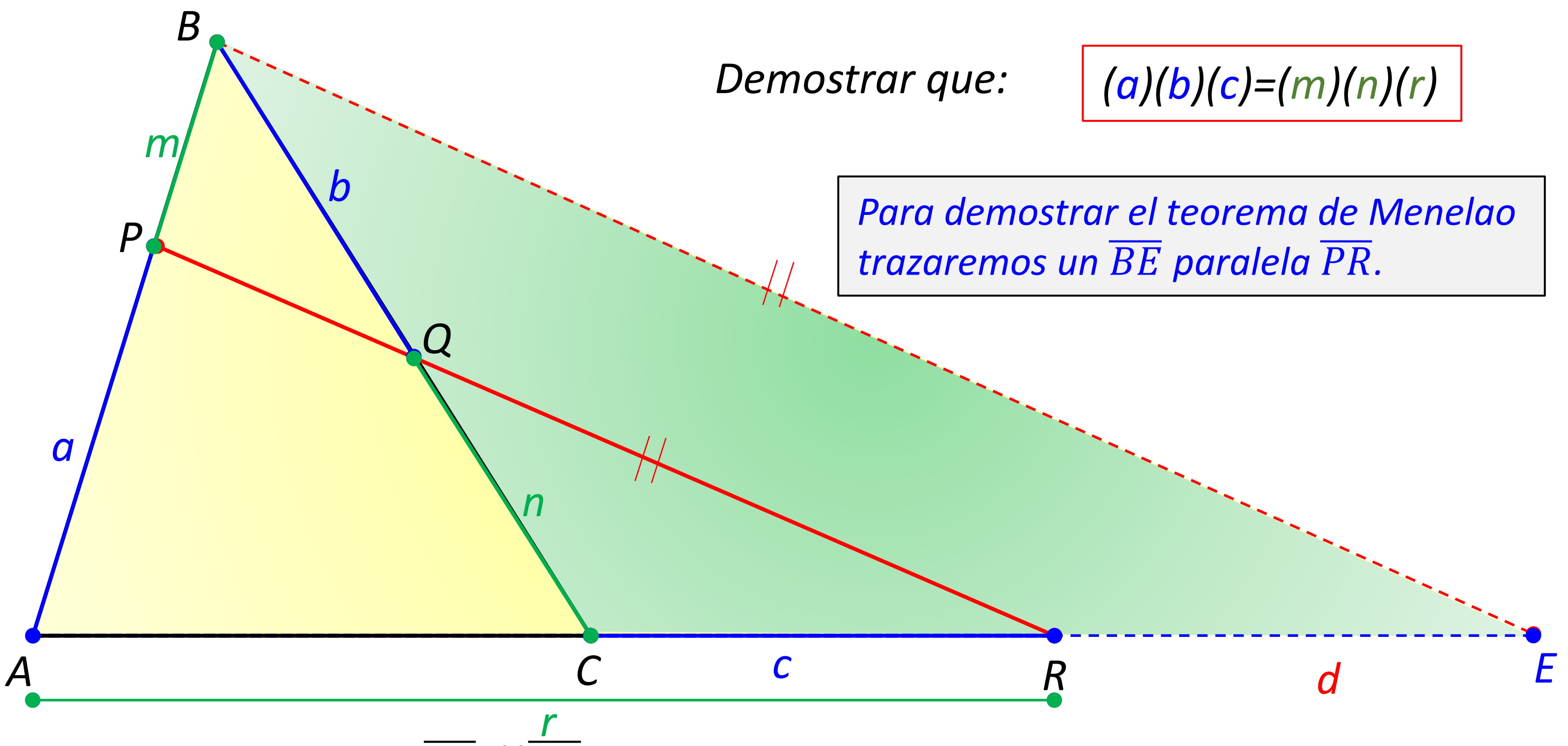


Si se trazan cevianas concurrentes.

SE CUMPLE:

(a)(b)(c)=(X)(Y)(Z)

DEMOSTRACIÓN:



Demostrar que: (a)(b)(c)=(m)(n)(r)

Para demostrar el teorema de Menelao trazaremos un $\overline{BE}$ paralela $\overline{PR}$.

- En el ΔABE, como $\overline{PR}$ // $\overline{BE}$, por corolario de Thales:

$$\frac{a}{m} = \frac{l}{d} \qquad \text{..........(1)}$$

- En el ΔBCE, como $\overline{QR}$ // $\overline{BE}$, por corolario de Thales:

$$\frac{b}{n} = \frac{d}{c} \qquad \text{.........(2)}$$

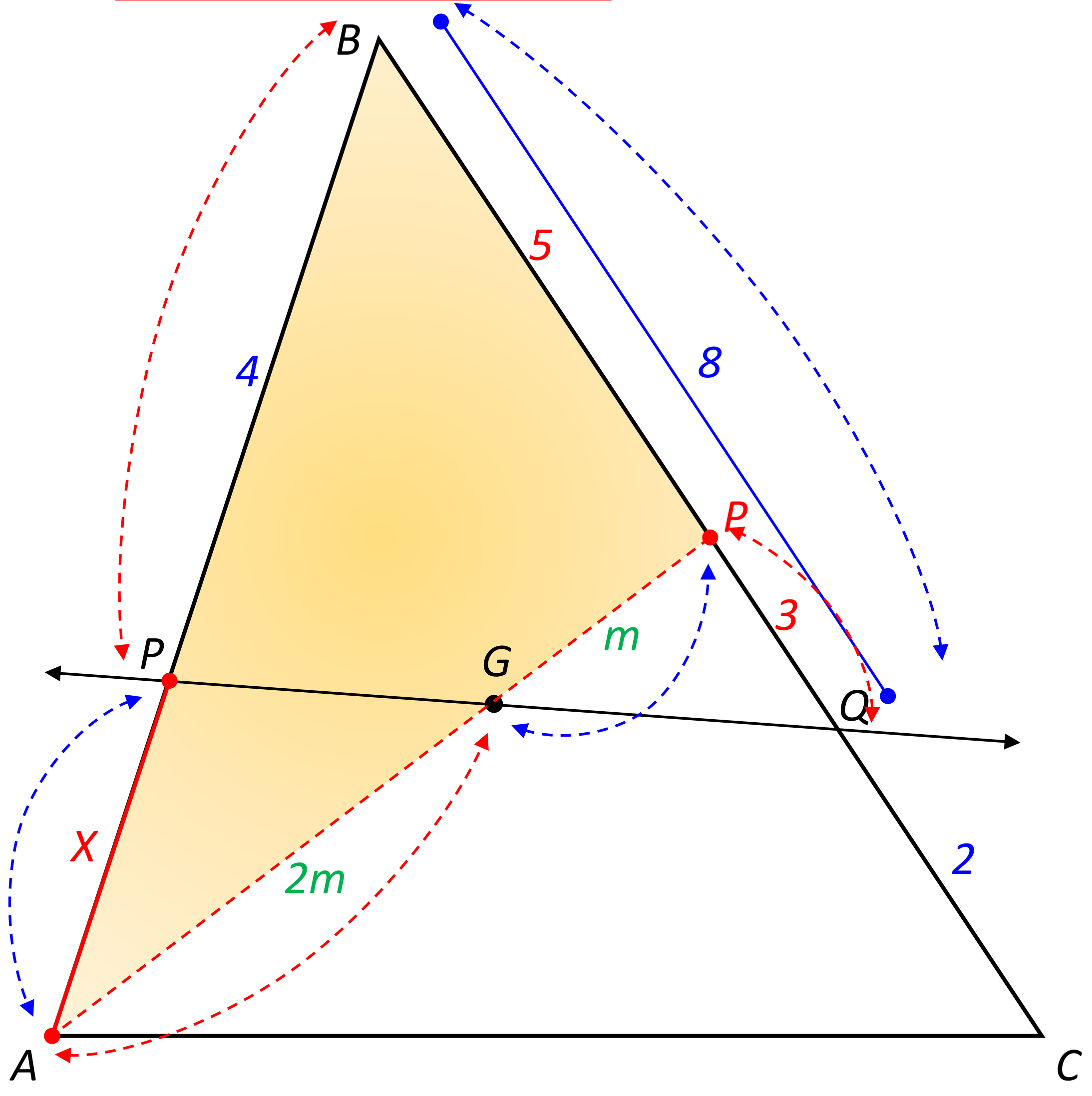
- Si multiplicamos (1) y (2):

$$\frac{ab}{mn} = \frac{dl}{dc}$$

∴ (a)(b)(c)=(m)(n)(r)

PROPORCIONALIDAD

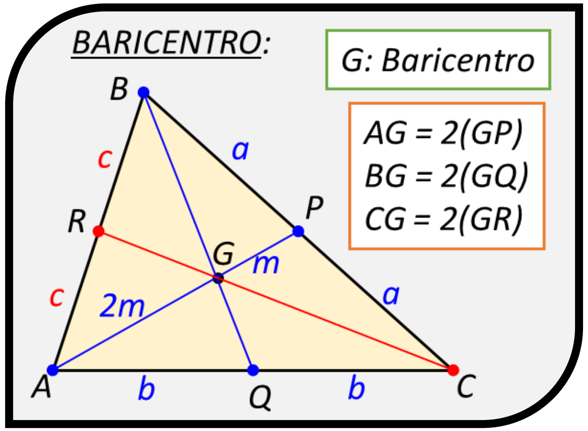
Del gráfico G es baricentro del ΔABC, si BP=4, BQ=8 y QC=2. Calcule AP.



RESOLUCIÓN:

Nos piden AP = X

Dato: BP=4
BQ=8
QC=2



- Como G es baricentro del ΔABC, trazamos la mediana $\overline{AP}$:

  BP=PC=5

  AG=2(GP) GP=m

  AG=2m

- En el ΔABP por teorema de Menelao:

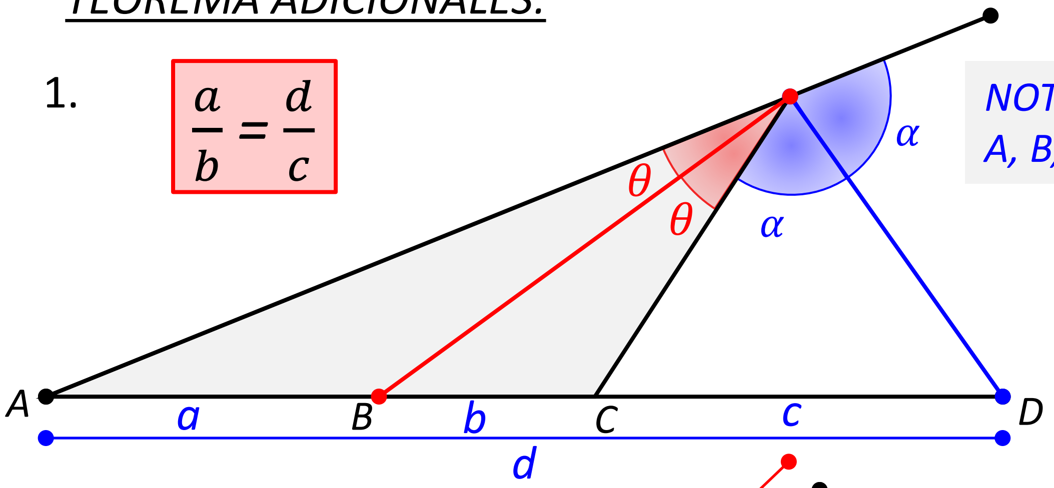
  $(\cancel{4})(\cancel{2}\cancel{m})(3)=(X)(\cancel{m})(\cancel{8})$

$\boxed{\therefore X = 3}$

PROPORCIONALIDAD

TEOREMA ADICIONALES:

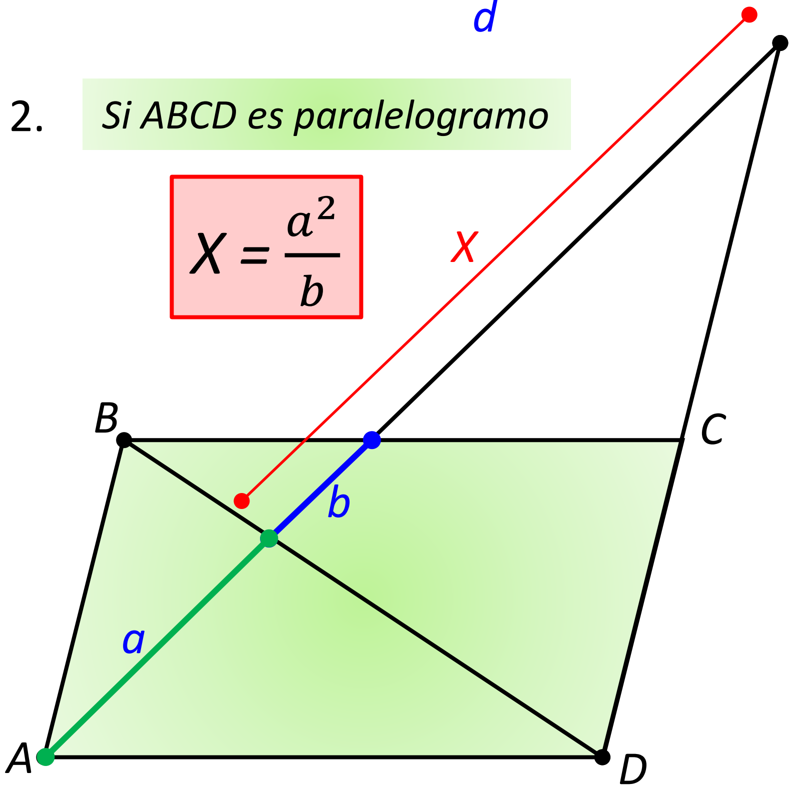
1. $$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{d}{c}}$$



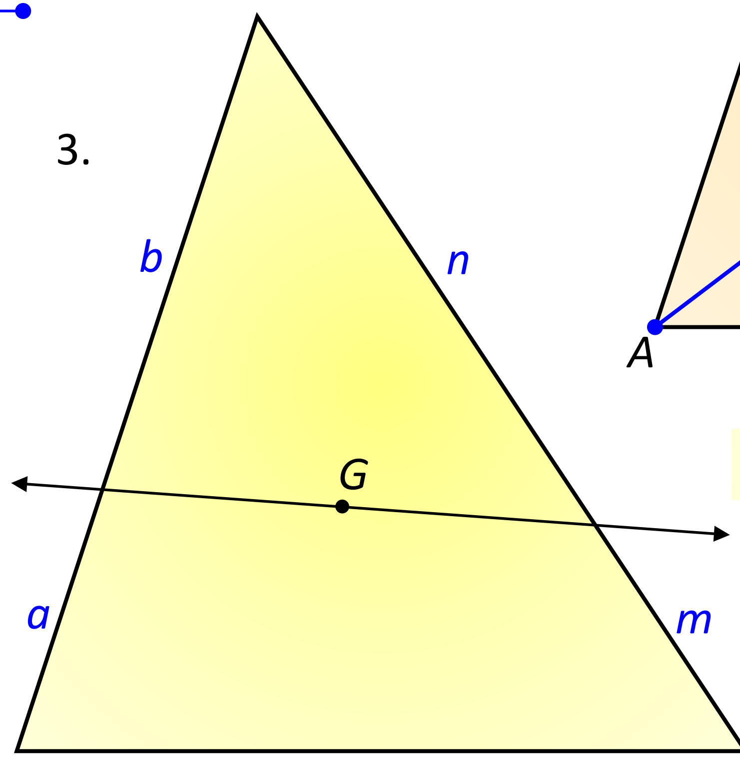
NOTA:
A, B, C y D son puntos armónicos

2. Si ABCD es paralelogramo

$$\boxed{X = \frac{a^2}{b}}$$



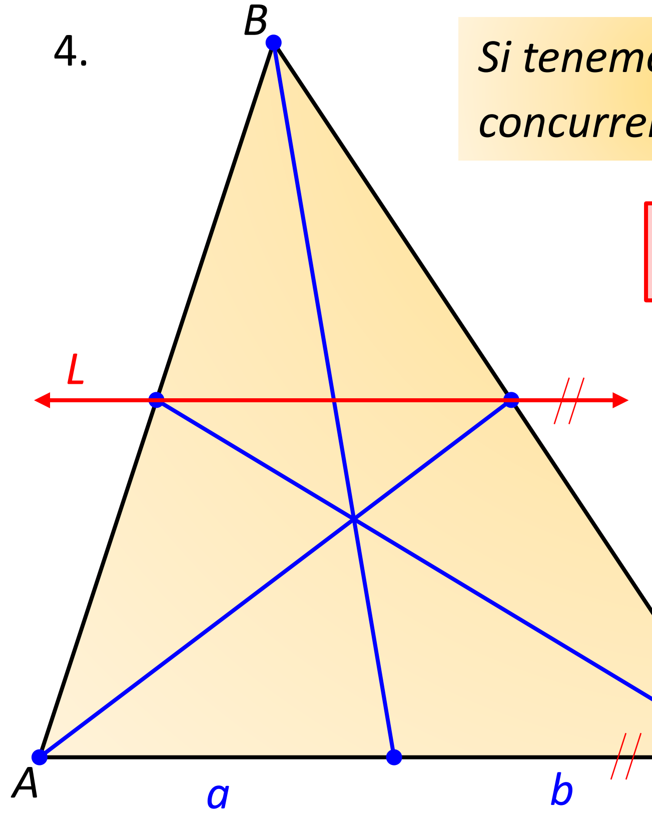
3.



Si G es baricentro

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = 1}$$

4.



Si tenemos cevianas concurrentes y $\overleftrightarrow{L} // \overline{AC}$

$$\boxed{a = b}$$