OBJETIVOS:

- *Conocer la definición de ángulo diedro*
- *Aplicar adecuadamente el concepto de planos perpendiculares.*
- *Entender como calcular la distancia entre dos rectas alabeadas.*
- *Aplicar lo aprendido en la resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN

En nuestro día a día siempre nos vamos a encontrar con situaciones que nos dan la idea de planos, por ejemplo una laptop, el techo de algunas casas, etc. En estos casos la disposición de los planos nos pueden representar la idea de una nueva figura geométrica.

También podemos tener en cuenta que, cuando se realiza alguna construcción, se debe tener en cuenta las especificaciones del plano, ya que en ella encontraremos la información necesaria para realizar dicha edificación de la manera precisa y segura, por ejemplo las distintas distancias entre ciertas vigas y/o columnas.

ÁNGULO DIEDRO

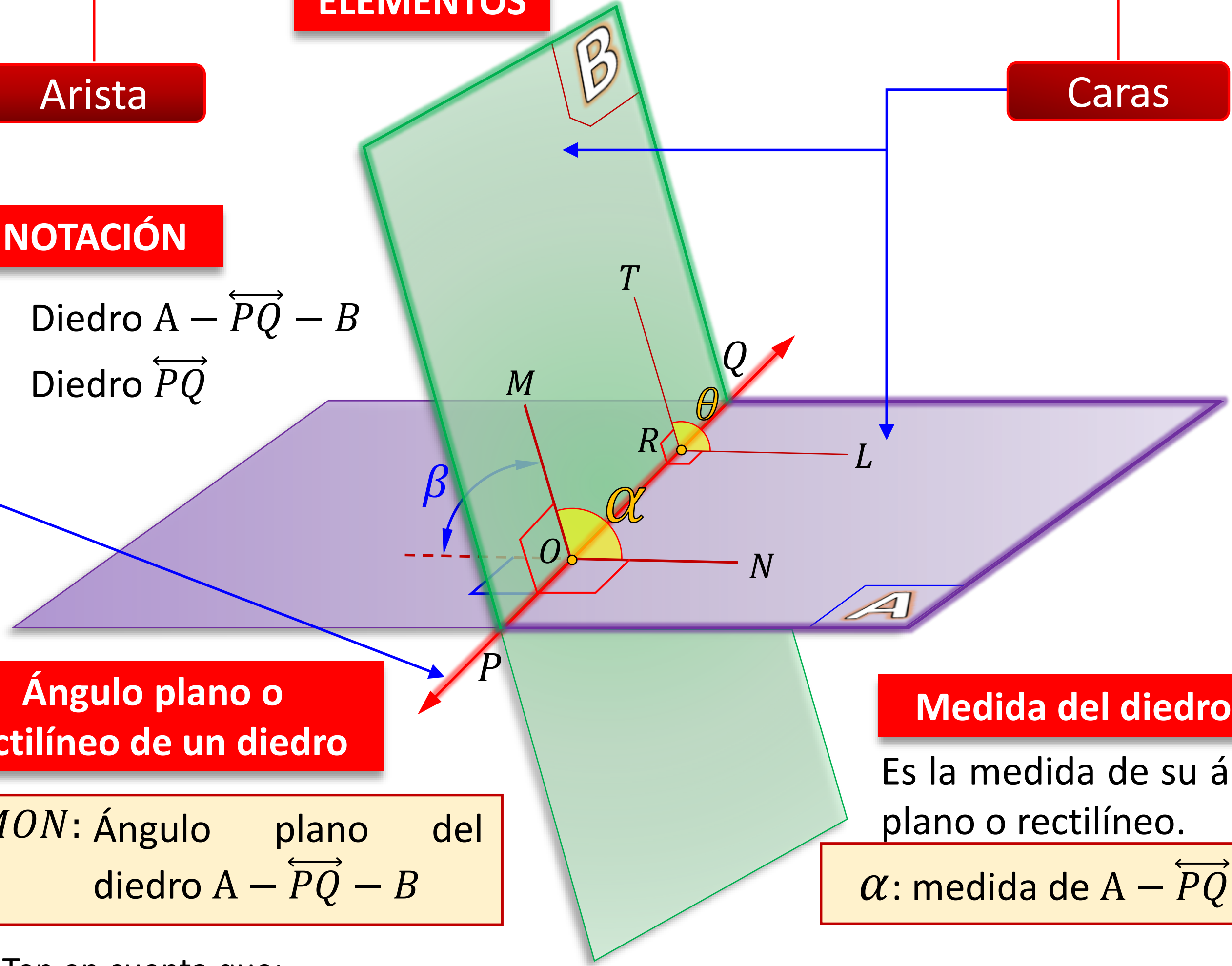
ÁNGULO DIEDRO (DIEDRO)

Es la figura geométrica formada por la unión de dos semiplanos no coplanares que tienen la recta de origen en común.

ELEMENTOS

Arista

Caras



NOTACIÓN

- Diedro $A - \overleftrightarrow{PQ} - B$
- Diedro $\overleftrightarrow{PQ}$

Ángulo plano o rectilíneo de un diedro

$\measuredangle MON$: Ángulo plano del diedro $A - \overleftrightarrow{PQ} - B$

Medida del diedro

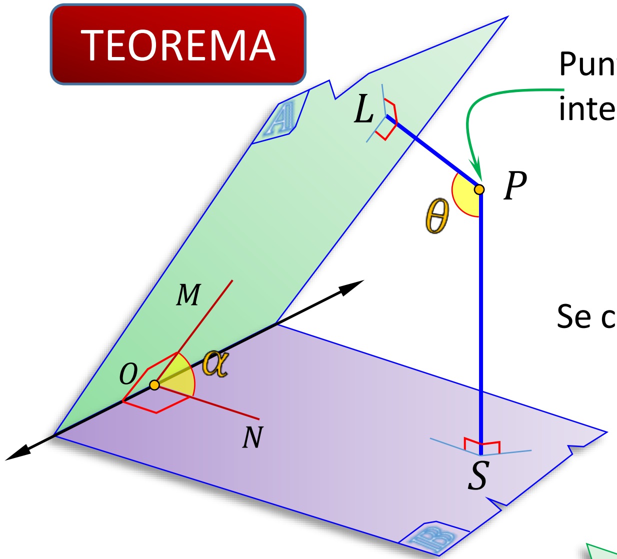
Es la medida de su ángulo plano o rectilíneo.

α: medida de $A - \overleftrightarrow{PQ} - B$

Ten en cuenta que:

La medida de un diedro es constante sobre toda su arista. $\rightarrow \alpha = \theta$

TEOREMA



Punto cualquiera en la región interior del diedro

$\overline{PL} \perp \mathbb{A}$

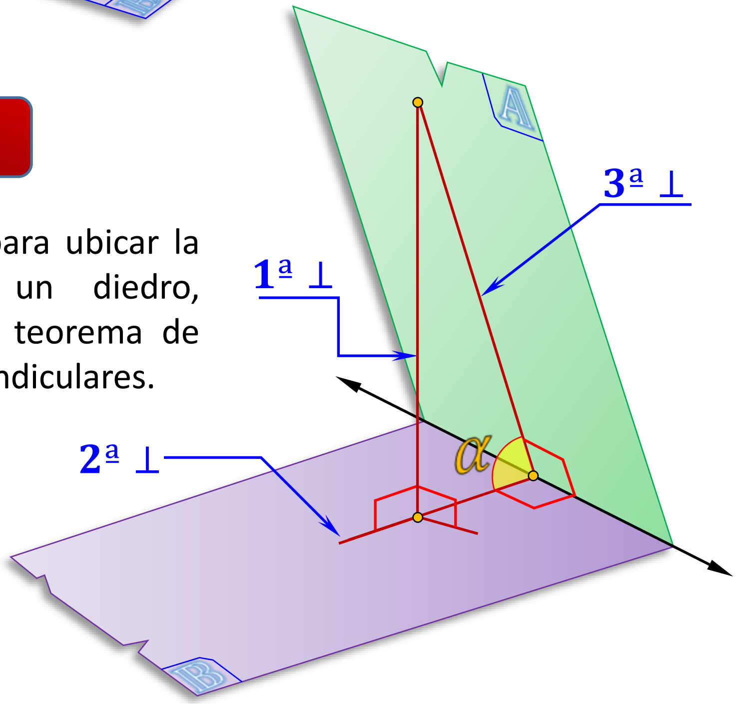
$\overline{PS} \perp \mathbb{B}$

Se cumple:

$$\alpha + \theta = 180°$$

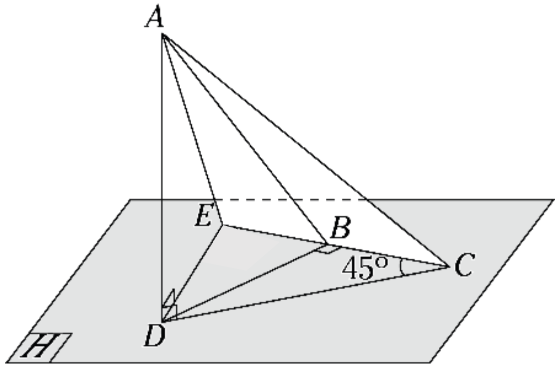
NOTA

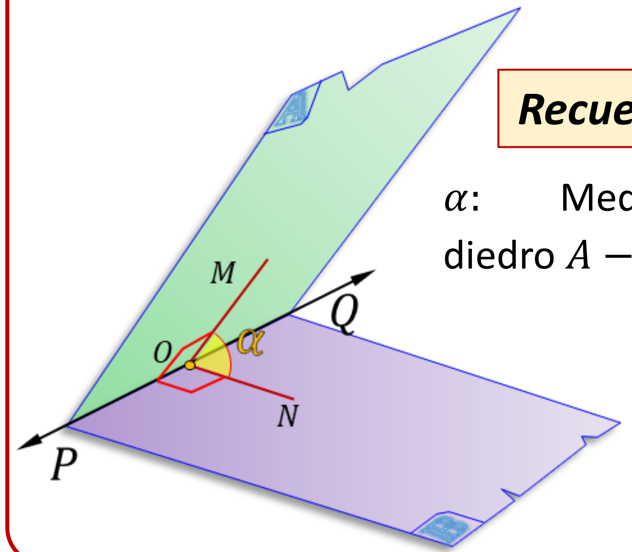
Usualmente para ubicar la medida de un diedro, recurrimos al teorema de las tres perpendiculares.



APLICACIÓN

Según el gráfico, $\boxed{AB = 2(BC)}$. Calcule la medida del ángulo diedro entre las regiones EDC y EAC.

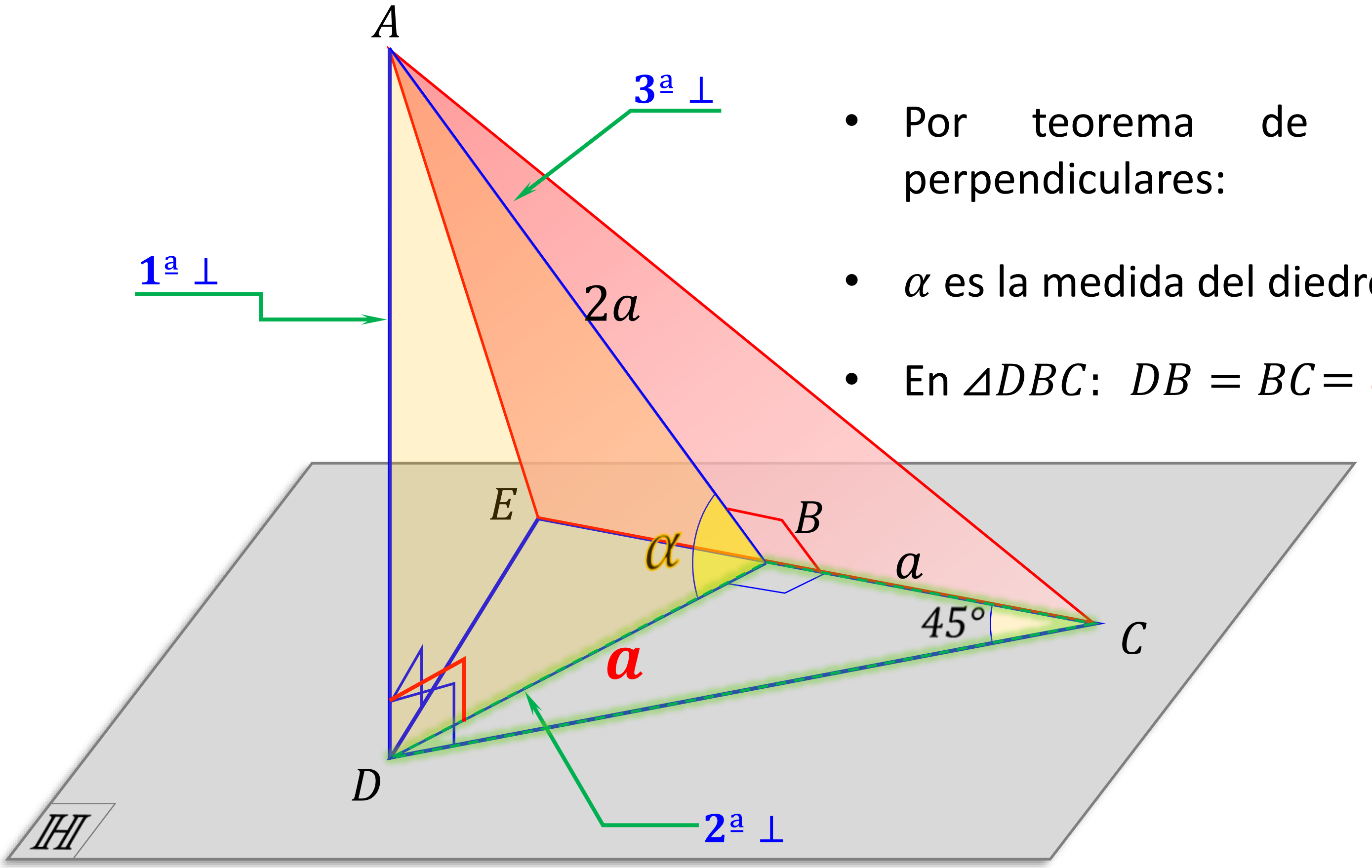




Recuerda

α: Medida del diedro $A - \overleftrightarrow{PQ} - B$

Resolución: Piden medida del diedro $A - \overline{EC} - D$



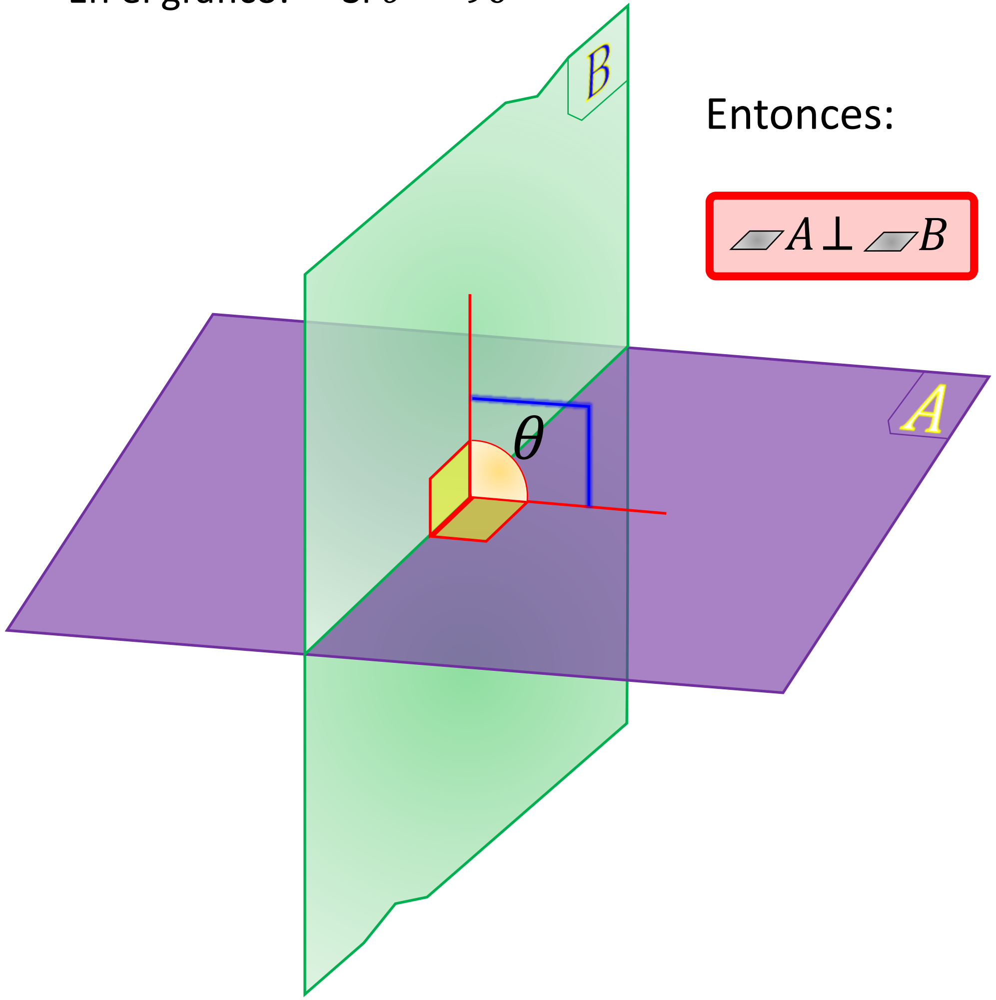
- Por teorema de las tres perpendiculares:
- α es la medida del diedro $A - \overline{EC} - D$
- En $\triangle DBC$: $DB = BC = a$
- Finalmente en $\triangle ADB$ notable de 30° y 60°

$$\boxed{\alpha = 60°}$$

PLANOS PERPENDICULARES

Son aquellos planos secantes, cuyo diedro que forman mide 90°

En el gráfico: Si $\theta = 90°$



Entonces:

▱$A \perp$ ▱B

TEOREMAS

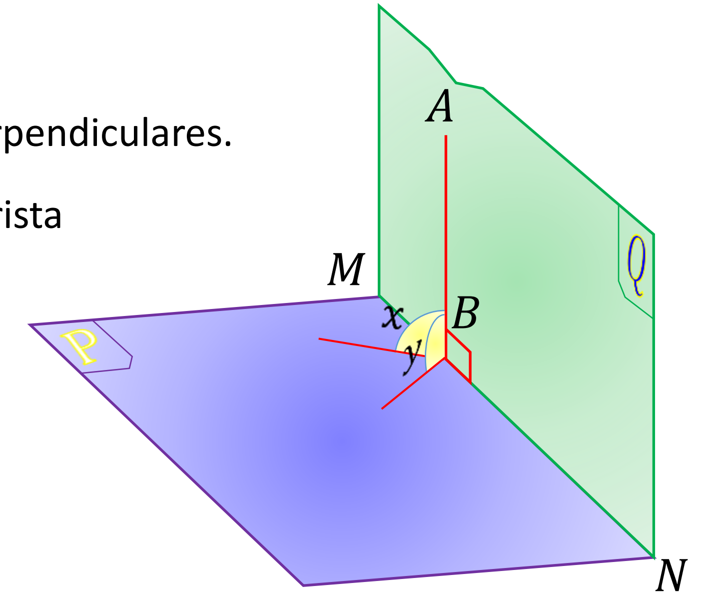
Los planos mostrados son perpendiculares.

Si $\overline{AB} \perp \overline{MN}$, donde $\overline{MN}$: Arista

Se cumple: $\overline{AB} \perp$ ▱P

Entonces:

$$\boldsymbol{x = y = 90°}$$

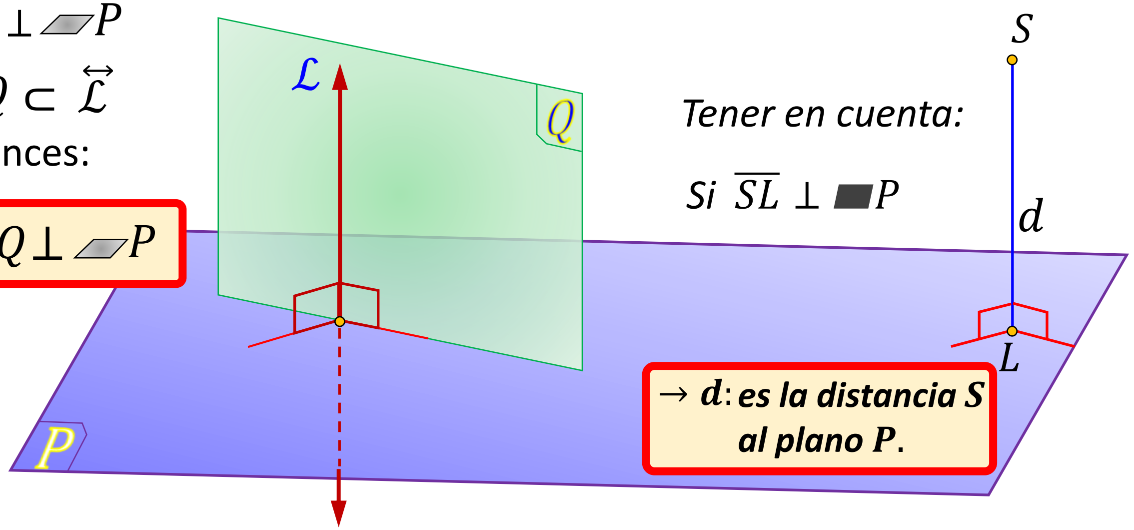


Si $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp$ ▱P

▱$Q \subset \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$

Entonces:

▱$Q \perp$ ▱P



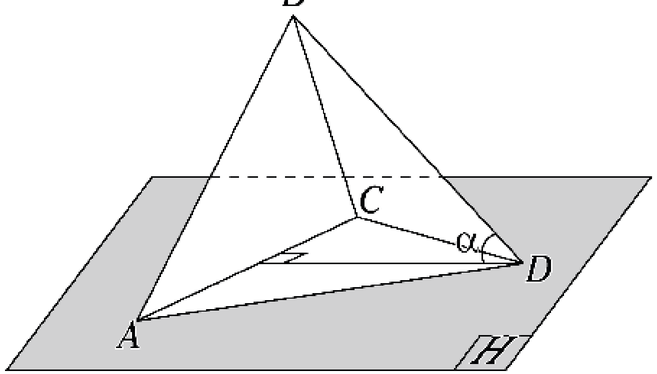
Tener en cuenta:

Si $\overline{SL} \perp$ ▰P

→ d: ***es la distancia*** S ***al plano*** P.

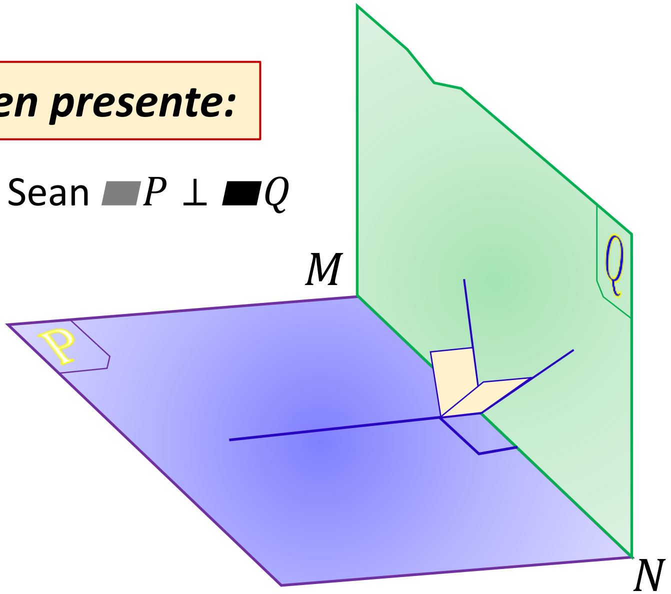
APLICACIÓN

Según el gráfico, los triángulos equiláteros ABC y ADC se encuentran en planos perpendiculares. Calcule α



Ten presente:

Sean ▰P $\perp$ ▰Q

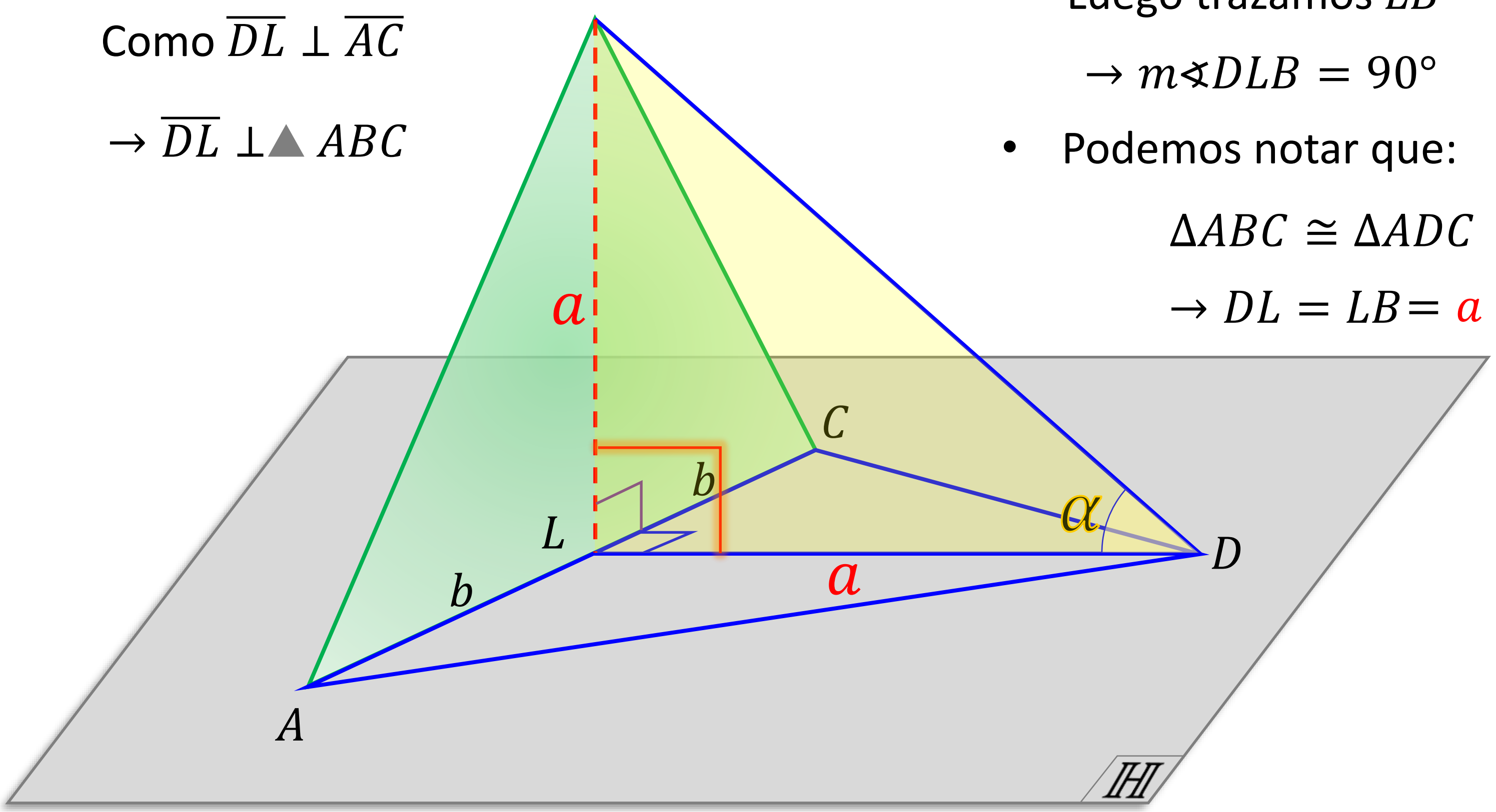


Resolución: Nos piden α

Del dato:

Como $\overline{DL} \perp \overline{AC}$

$\rightarrow \overline{DL} \perp \blacktriangle\, ABC$



- Luego trazamos $\overline{LB}$

  $\rightarrow m\measuredangle DLB = 90°$

- Podemos notar que:

  $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

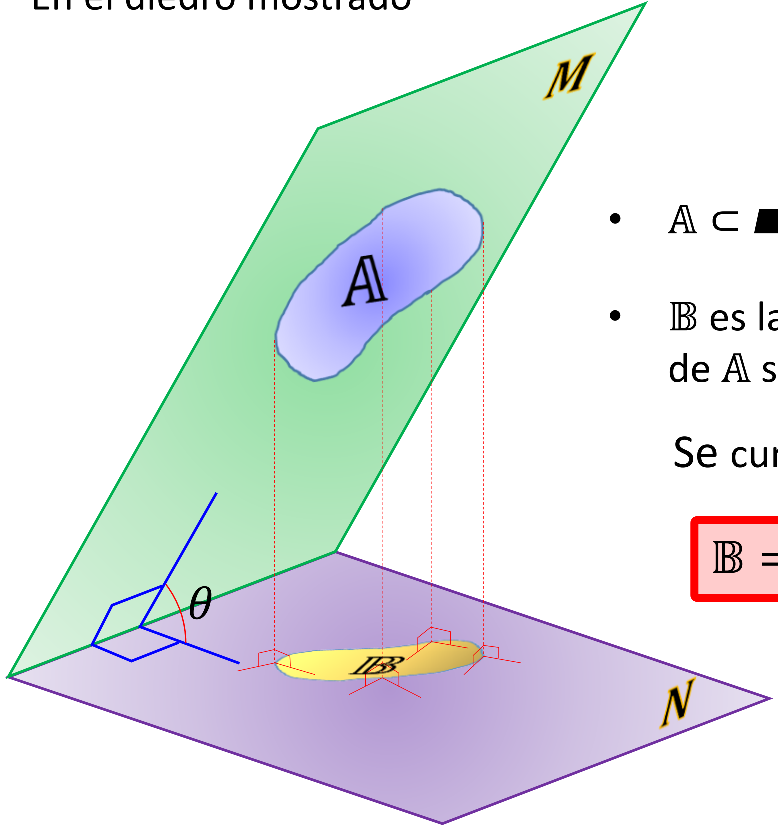
  $\rightarrow DL = LB = a$

- Finalmente en $\triangle BLD$:

$$\boxed{\alpha = 45°}$$

TEOREMA:

En el diedro mostrado



- $\mathbb{A} \subset ▰M$
- $\mathbb{B}$ es la proyección de $\mathbb{A}$ sobre $▰N$

Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{B} = \mathbb{A}(cos\theta)}$$

EXAMEN UNI **2014-II**

Por el vértice B de un triángulo ABC se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC, el punto D se une con los vértices A y C. Además se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$). Si $BH = \frac{36}{5}$, $BD = \frac{36}{5}\sqrt{3}$, entonces $\frac{\mathbb{S}_{\triangle ADC}}{\mathbb{S}_{\triangle ABC}}$ es:

A) 1/2 B) 3/2 C) 2
D) 5/2 E) 3

Resolución:

- Notamos que:

  $\blacktriangle ABC$ es la proyección ortogonal de $\blacktriangle ADC$ sobre el plano de ABC.

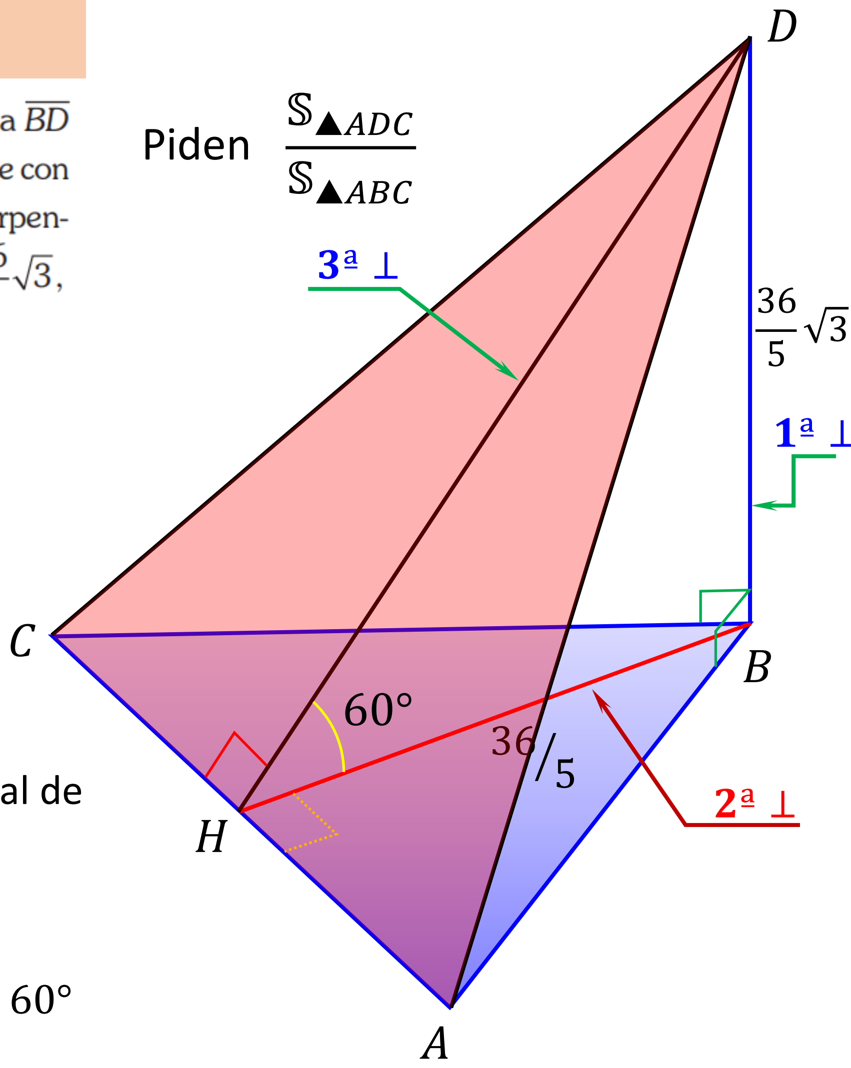
- Por teorema de las 3 $\perp_s$

  Medida de $D - \overline{AC} - B$ es 60°

- Por teorema:

$$\mathbb{S}_{\blacktriangle ABC} = \mathbb{S}_{\blacktriangle ADC}(cos60°)$$

Piden $\frac{\mathbb{S}_{\blacktriangle ADC}}{\mathbb{S}_{\blacktriangle ABC}}$



$$\boxed{\therefore \frac{\mathbb{S}_{\blacktriangle ADC}}{\mathbb{S}_{\blacktriangle ABC}} = 2}$$

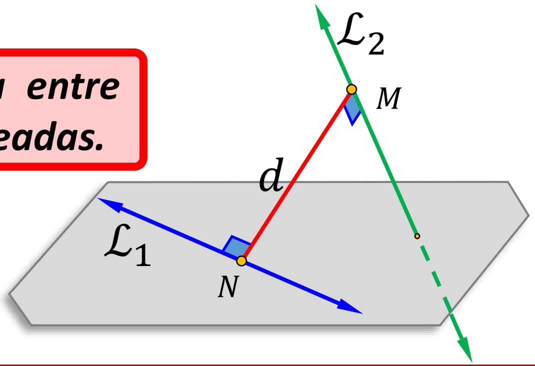
DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

Sean $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ dos rectas alabeadas, además $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$.

Se define:

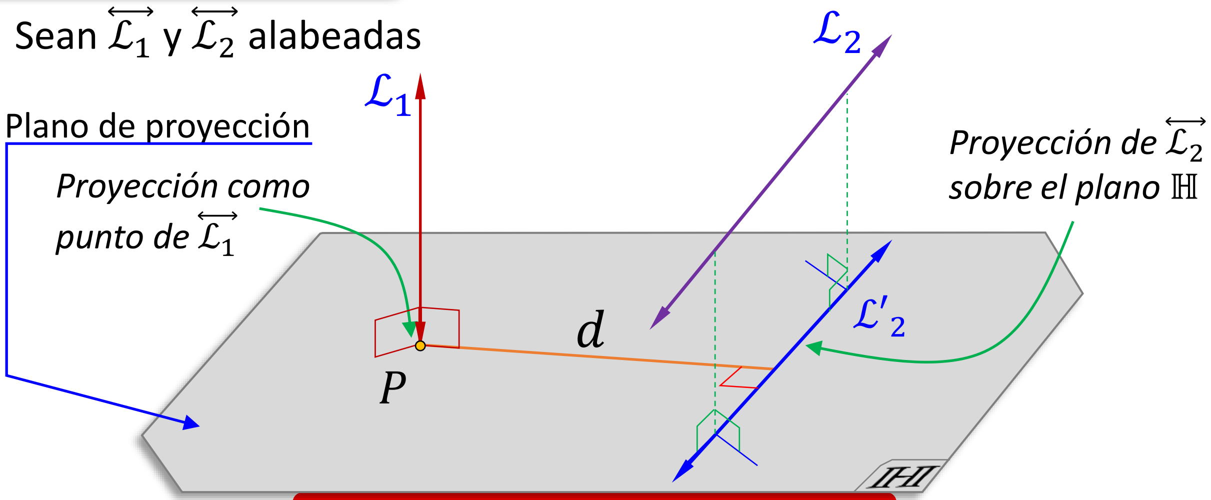
***d*: Es la distancia entre las rectas alabeadas.**



Métodos para calcular la distancia entre dos rectas alabeadas

Método 1 — *Buscando proyecciones ortogonales*

Sean $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ alabeadas

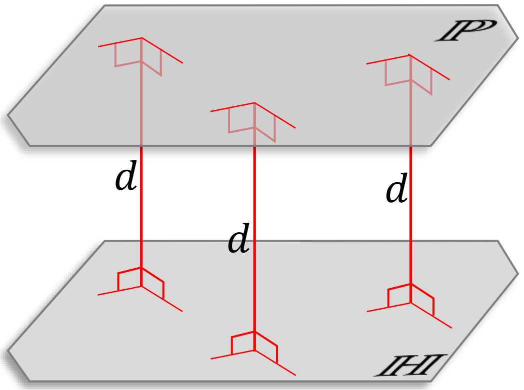


***d*: Es la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$**

Método 2 — *Buscando planos paralelos*

Tener en cuenta: Si $\mathbb{P} \parallel \mathbb{H}$

La distancia entre los planos, es igual a la longitud del segmento perpendicular a ambos, con sus extremos en dichos planos.



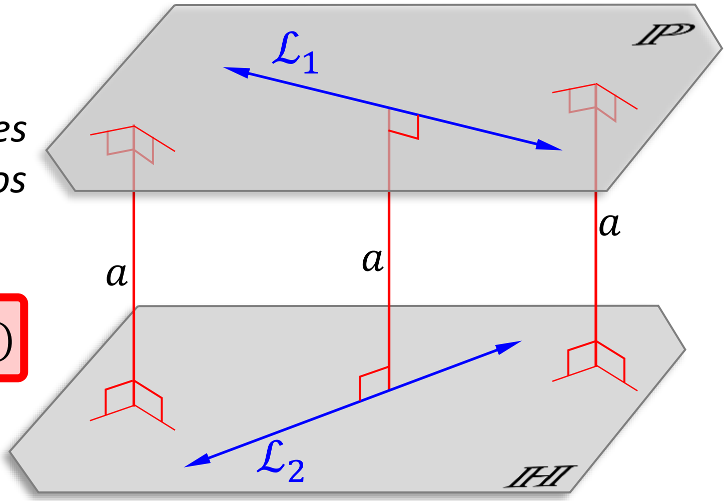
***d*: Es la distancia entre los planos $\mathbb{P}$ y $\mathbb{H}$.**

❖ Sean $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ alabeadas

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \subset \mathbb{P}$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} \subset \mathbb{H}$

Si $\mathbb{P} \parallel \mathbb{H}$

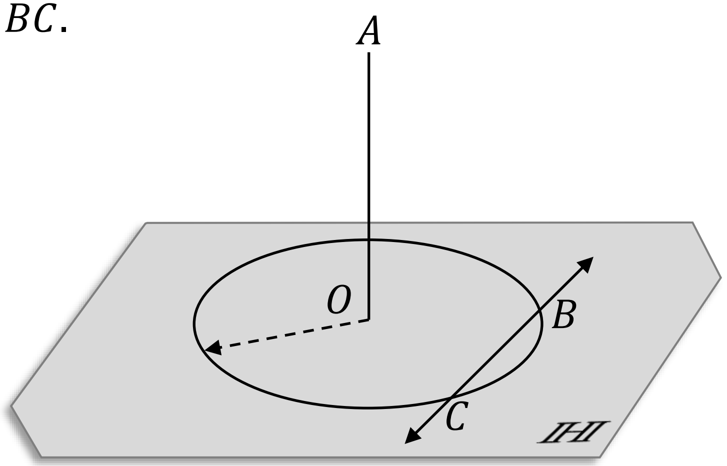
La distancia entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ es igual a la distancia entre los planos.



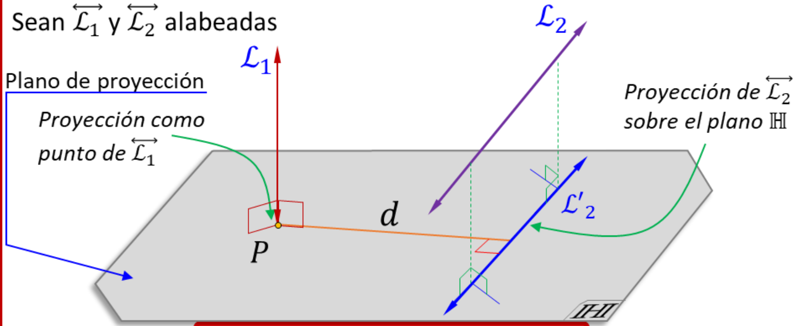
$$\boldsymbol{d}(\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1};\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}) = \boldsymbol{d}(\mathbb{P};\mathbb{H})$$

APLICACIÓN

En el gráfico mostrado $\overline{OA} \perp$ ▰$\mathbb{H}$, la medida del arco BC es 60° y además $BC = 6$, calcule la distancia entre $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$.



RECUERDA



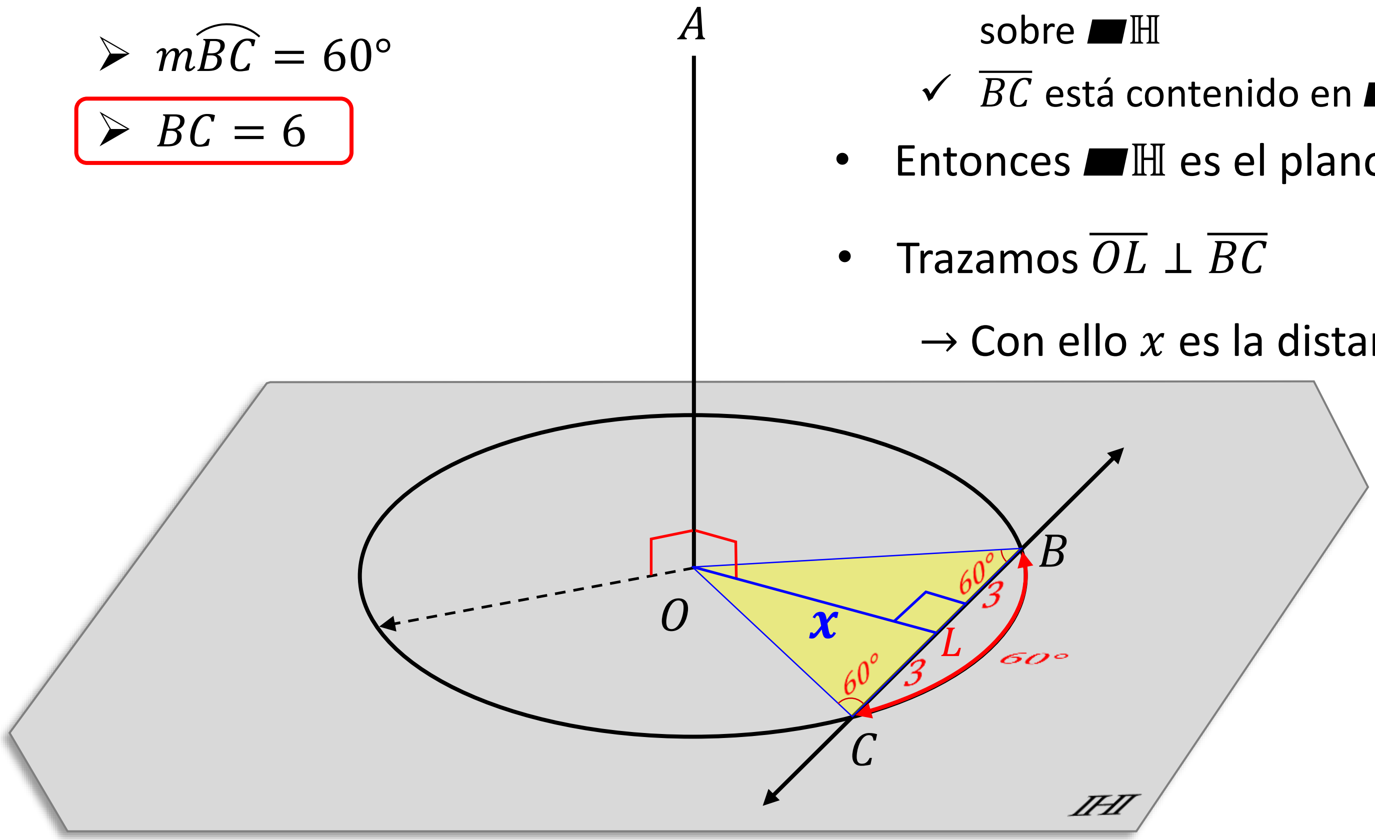
***d*: Es la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$**

Resolución:

Piden $d(\overline{OA}; \overline{BC}) = \boldsymbol{x}$

Datos:

- $\overline{OA} \perp$ ▰$\mathbb{H}$
- $m\overset{\frown}{BC} = 60°$
- $\boxed{BC = 6}$



- En el problema notamos que:
  - ✓ O es la proyección como punto de $\overline{OA}$ sobre ▰$\mathbb{H}$
  - ✓ $\overline{BC}$ está contenido en ▰$\mathbb{H}$
- Entonces ▰$\mathbb{H}$ es el plano de proyección
- Trazamos $\overline{OL} \perp \overline{BC}$

→ Con ello x es la distancia pedida

- Además $BL = LC = 3$
- ΔBOC es equilátero

$$\boxed{\therefore\ x = 3\sqrt{3}}$$