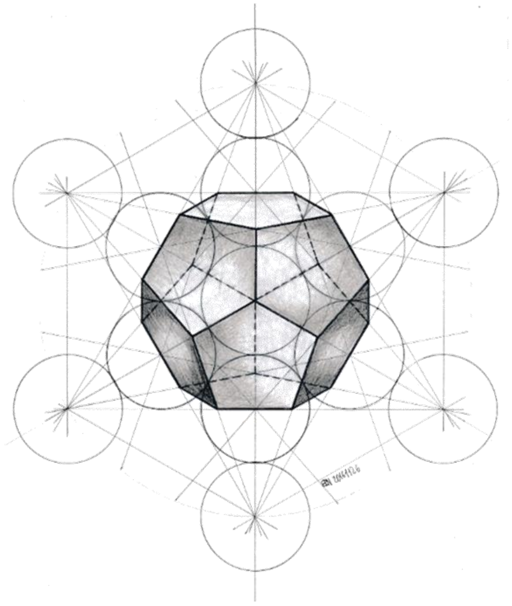
OBJETIVOS:

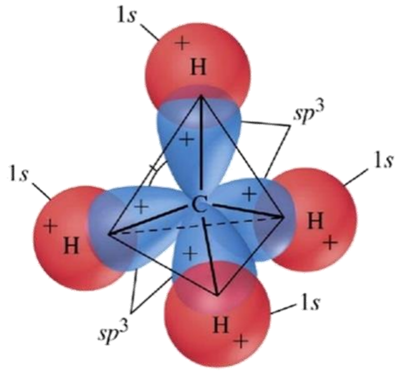
- *Conocer la definición y características de los poliedros regulares.*
- *Calcular las superficies y volúmenes de estos poliedros en función de la longitud de su arista.*
- *Conocer los teoremas adicionales relacionados a estos poliedros regulares.*
- *Aplicar lo aprendido en los problemas tipo examen de admisión.*

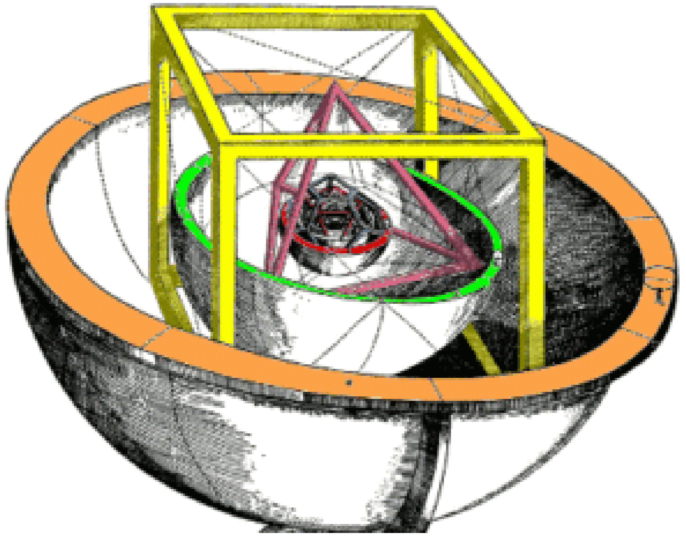
INTRODUCCIÓN

Los poliedros regulares son también llamados sólidos platónicos, debido a que Platón en su obra ***Timeo*** escribió sobre ellos y asoció a cada sólido un respectivo elemento que consideraba conformaban al universo, en ese sentido al tetraedro lo asociaba al fuego, al hexaedro a la tierra, al octaedro el aire, al icosaedro el agua y al dodecaedro lo asoció con el universo, la divinidad; éstos sólidos presenta una armonía y simetría en la disposición de sus caras.

Éstos sólidos se aprovechan en muchas expresiones artísticas como tallados en piedra, en las estructuras químicas, inspiró el estudio de grandes personajes, uno de ellos Kepler que estructuró un modelo de sistema planetario basado en los poliedros regulares.







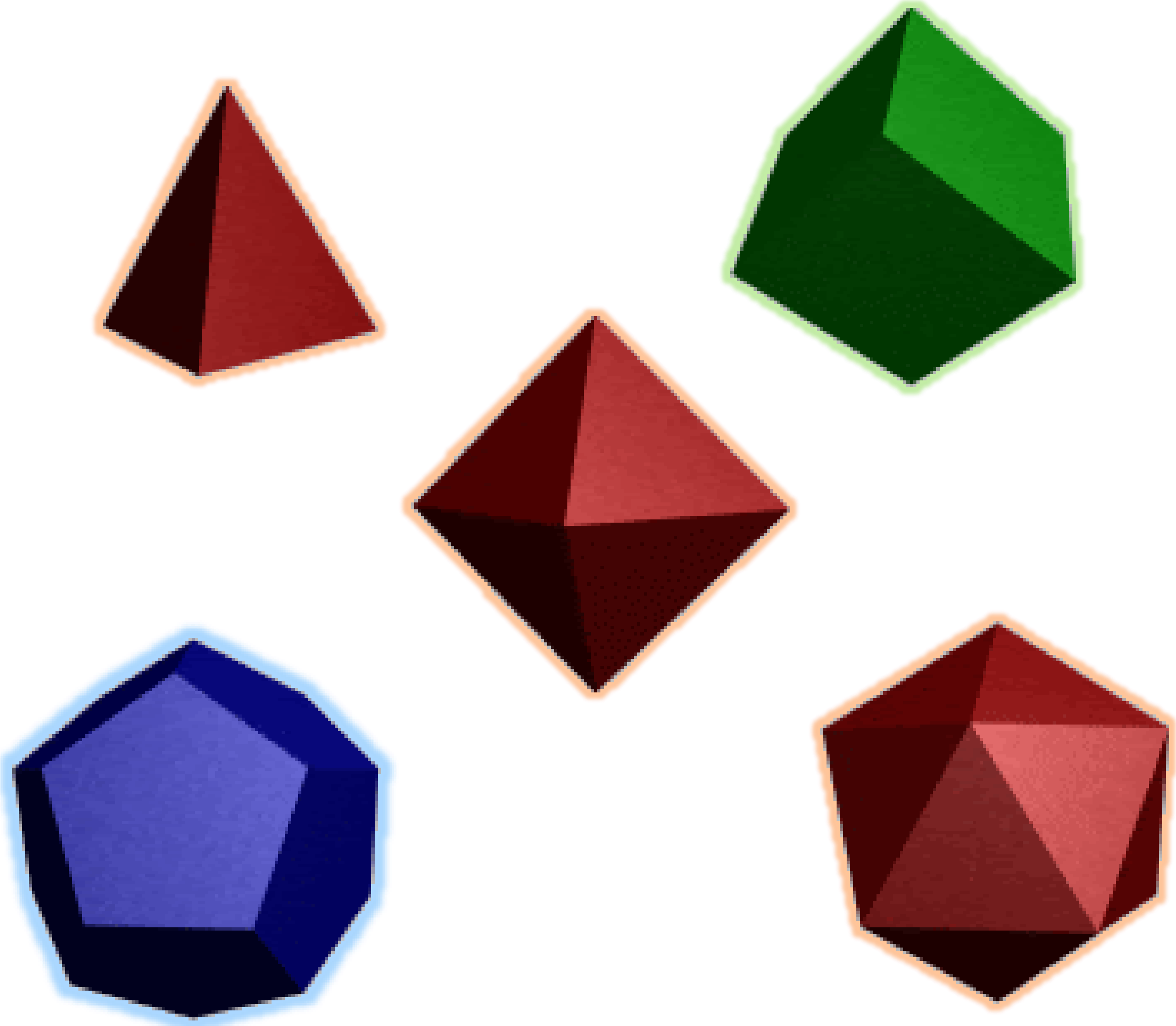
POLIEDROS REGULARES

DEFINICIÓN

Son aquellos poliedros cuyas caras son regiones poligonales regulares y congruentes entre si, tal que en cada vértice concurren igual número de aristas.

- Solo existen cinco poliedros regulares. Los cuáles vamos a estudiar y son los siguientes:

  - ***Tetraedro regular***
  - ***Hexaedro regular***
  - ***Octaedro regular***
  - ***Dodecaedro regular***
  - ***Icosaedro regular***



POLIEDROS REGULARES

TETRAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular, cuyas cuatro caras son regiones triangulares equiláteras.

- Del gráfico: $C = 4$

  $V = 4$

  $A = 6$

- Notación:

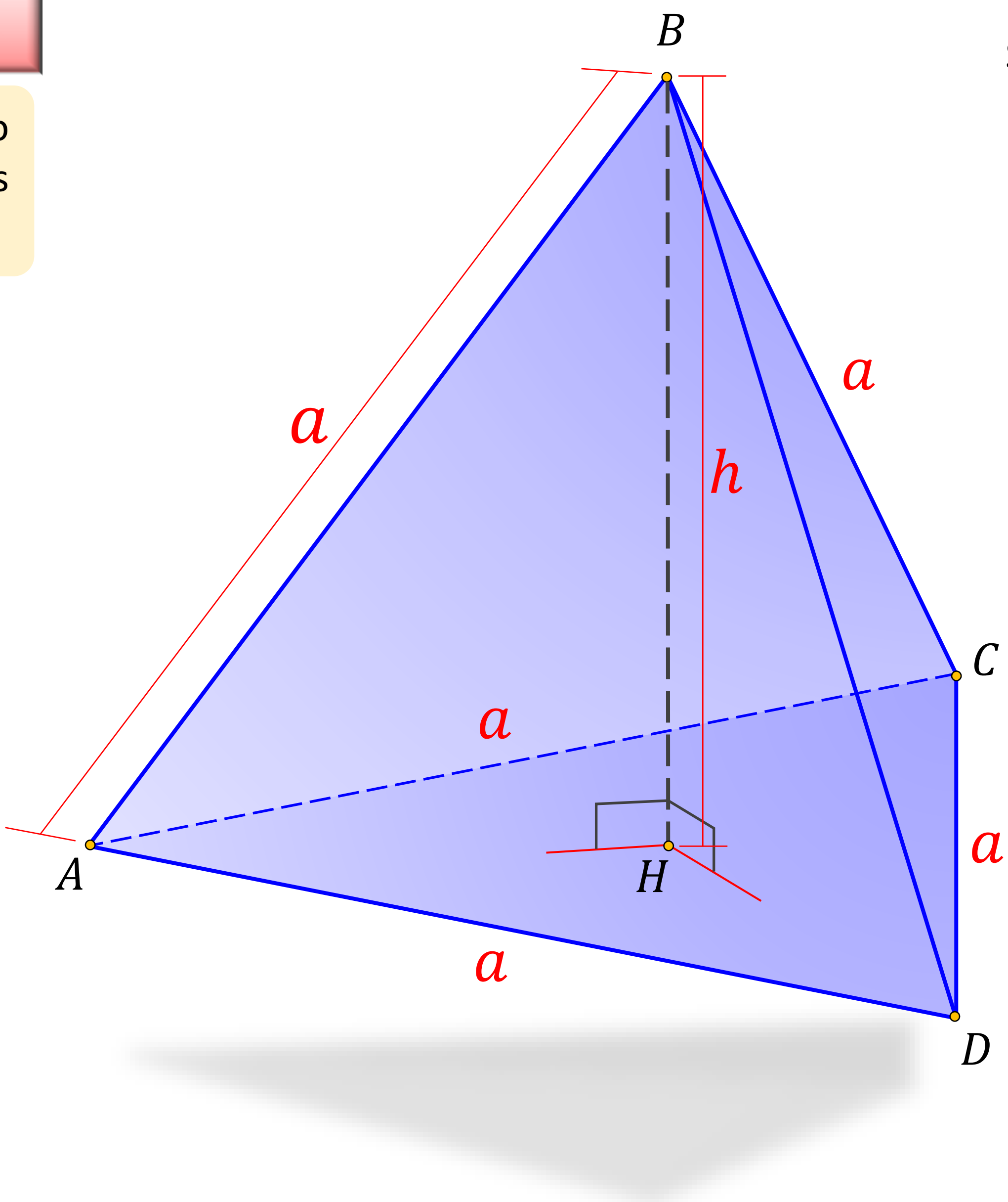
  Tetraedro regular $ABCD$

- Además:

  $\boldsymbol{a}$: Longitud de la arista

  $\overline{\boldsymbol{BH}}$: Altura

  $\boldsymbol{H}$: Baricentro de la cara ACD



Se cumple:

- ***Longitud de la altura***

$$\boldsymbol{h} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

- ***Área de la superficie total***

$$\mathbb{A}_{S.T} = a^2\sqrt{3}$$

- ***Volumen***

$$\mathbb{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

TETRAEDRO REGULAR

TEOREMAS

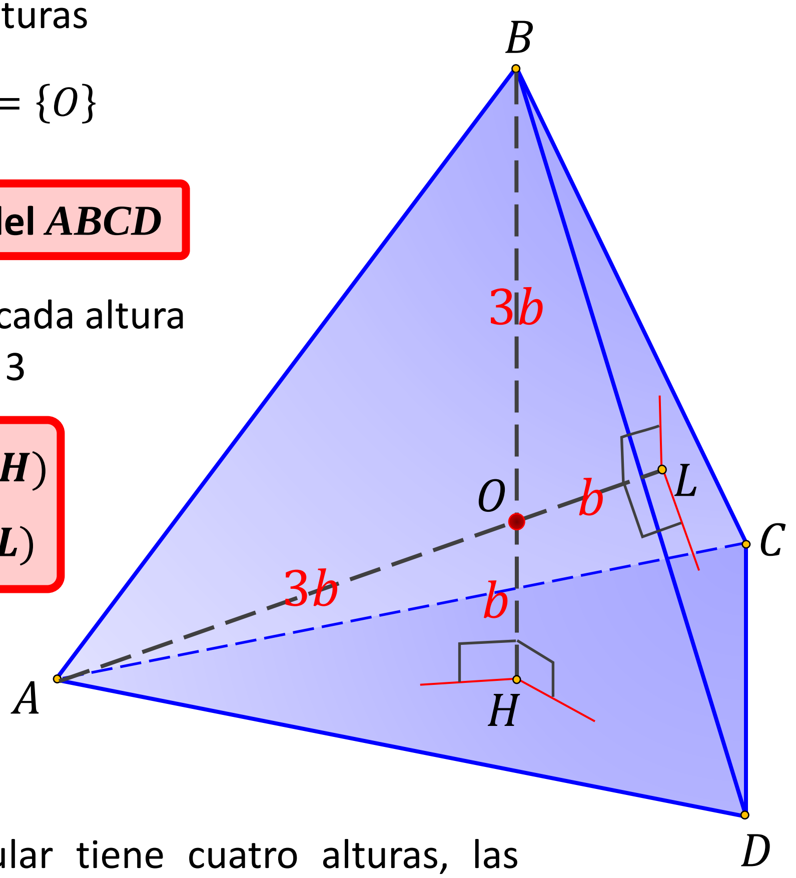
- $\overline{BH}$ y $\overline{AL}$ son alturas

$$\overline{BH} \cap \overline{AL} = \{O\}$$

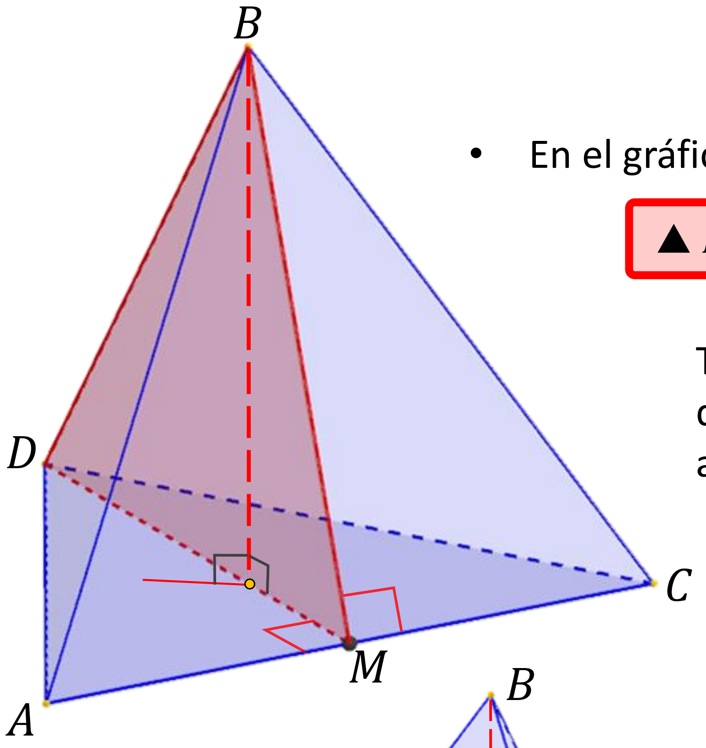
O es el centro del $ABCD$

El centro divide a cada altura en la razón de 1 a 3

$$\boldsymbol{BO = 3(OH)}$$
$$\boldsymbol{AO = 3(OL)}$$



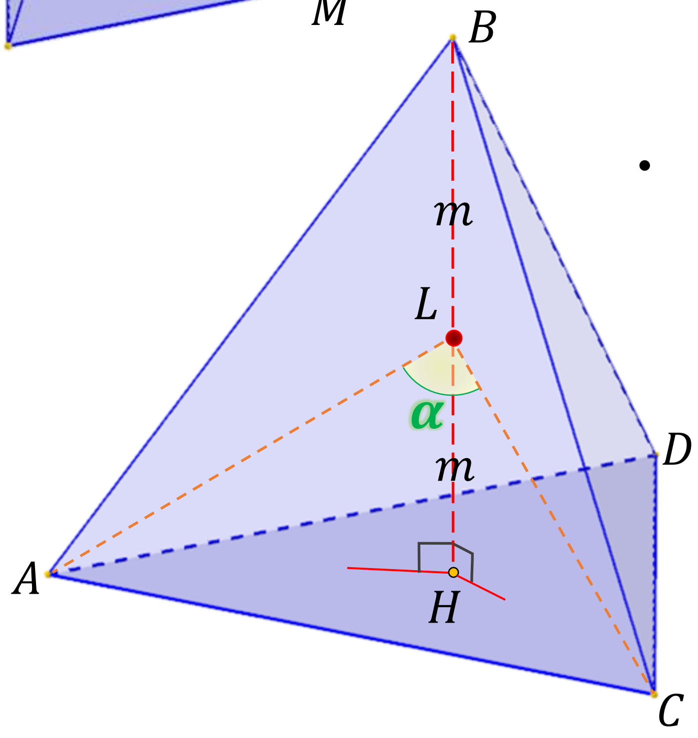
NOTA:
El tetraedro regular tiene cuatro alturas, las cuales son concurrentes en el centro. Además el centro equidista de los vértices y de las caras.



- En el gráfico:

▲ DBM es una sección de simetría

Ten en cuenta que la sección de simetría contiene a la altura del tetraedro regular.



- Si L es punto medio de la altura

Se cumple:

$$\boldsymbol{\alpha = 90°}$$

POLIEDROS REGULARES

EXAMEN UNI **2015 – I**

El punto P se encuentra situado sobre la altura de un tetraedro regular de lado a. Si P equidista de cada vértice, calcule esta distancia.

$A)\ \frac{a\sqrt{3}}{4}$ $\quad B)\ \frac{a\sqrt{2}}{3}$ $\quad C)\ \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$D)\ \frac{a\sqrt{6}}{4}$ $\quad E)\ \frac{a\sqrt{2}}{2}$

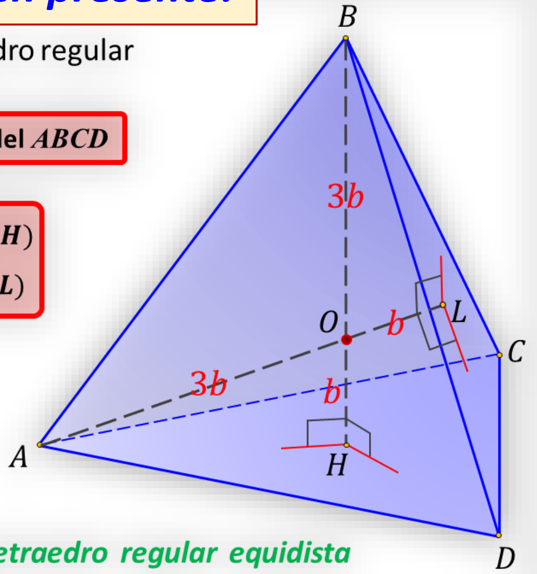
Ten presente:

$ABCD$ tetraedro regular

O es el centro del $ABCD$

$BO = 3(OH)$

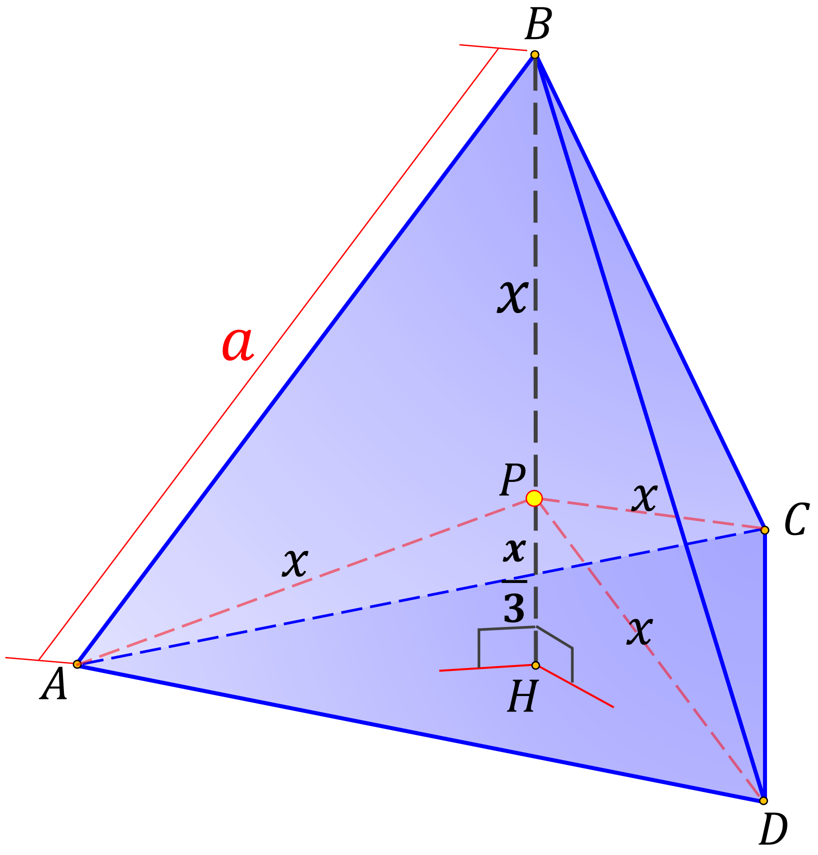
$AO = 3(OL)$



NOTA:

El centro del tetraedro regular equidista de los vértices.

Piden x



- Sea $\overline{BH}$ una de las alturas $(P \in \overline{BH})$
- Por condición del problema:

  P es el centro del tetraedro regular $ABCD$.

  $$\rightarrow PH = \frac{x}{3}$$

- Por longitud de la altura del tetraedro regular, sabemos:

$$\underbrace{BH}_{x+\frac{x}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{\therefore x = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Clave **D**

POLIEDROS REGULARES

HEXAEDRO REGULAR (cubo)

Es el poliedro regular, cuyas seis caras son regiones cuadradas.

- Del gráfico: $C = 6$
  $V = 8$
  $A = 12$

- Notación:

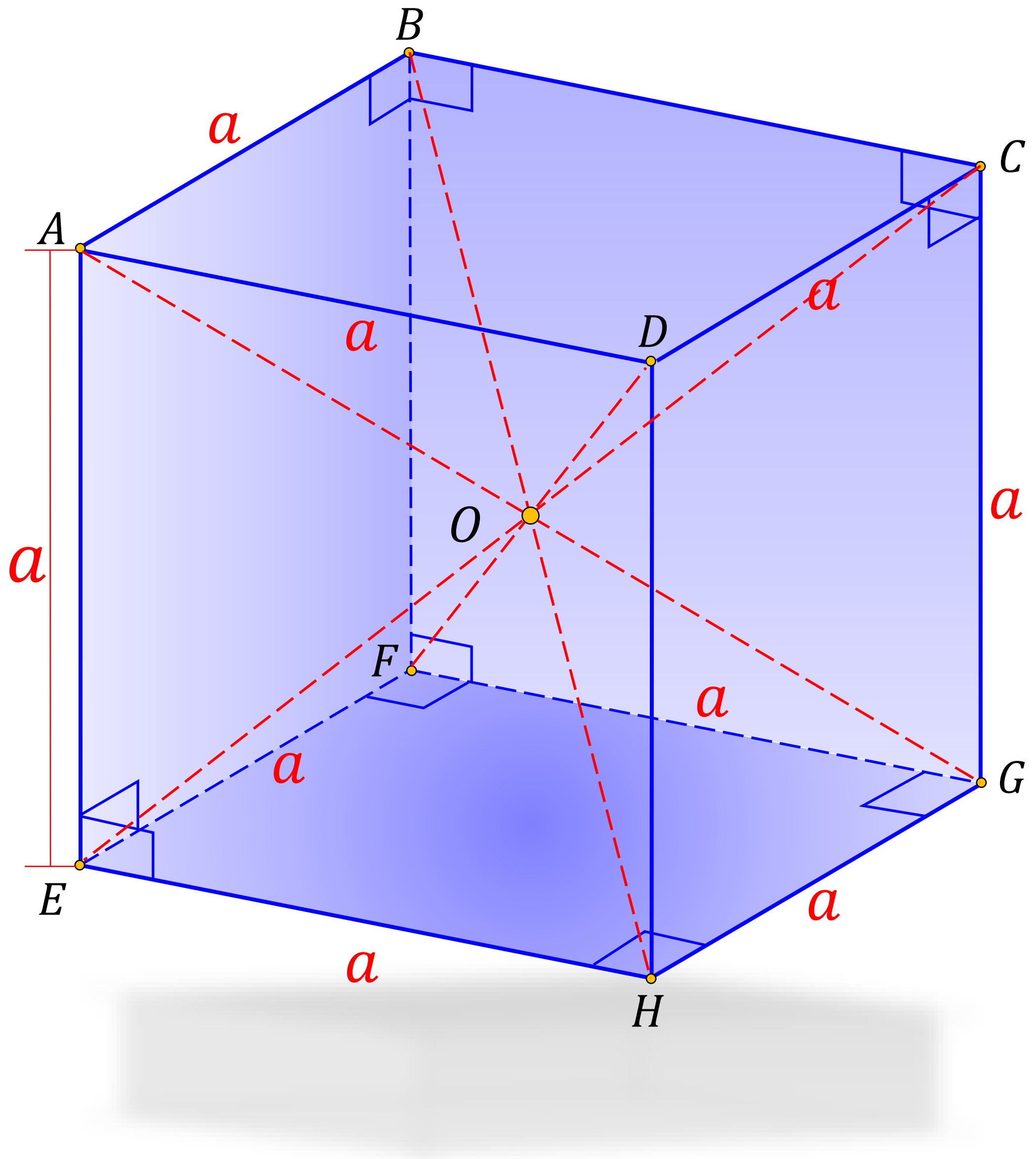
  Hexaedro regular $ABCD - EFGH$

- Además:

  $\boldsymbol{a}$: Longitud de la arista

  $\overline{\boldsymbol{AG}}$: Diagonal

  $\boldsymbol{O}$: Centro de $ABCD - EFGH$



Se cumple:

- **Longitud de la diagonal**

$$\boxed{\boldsymbol{AG} = \boldsymbol{BH} = a\sqrt{3}}$$

- **Área de la superficie total**

$$\boxed{\mathbb{A}_{\boldsymbol{S.T}} = 6a^2}$$

- **Volumen**

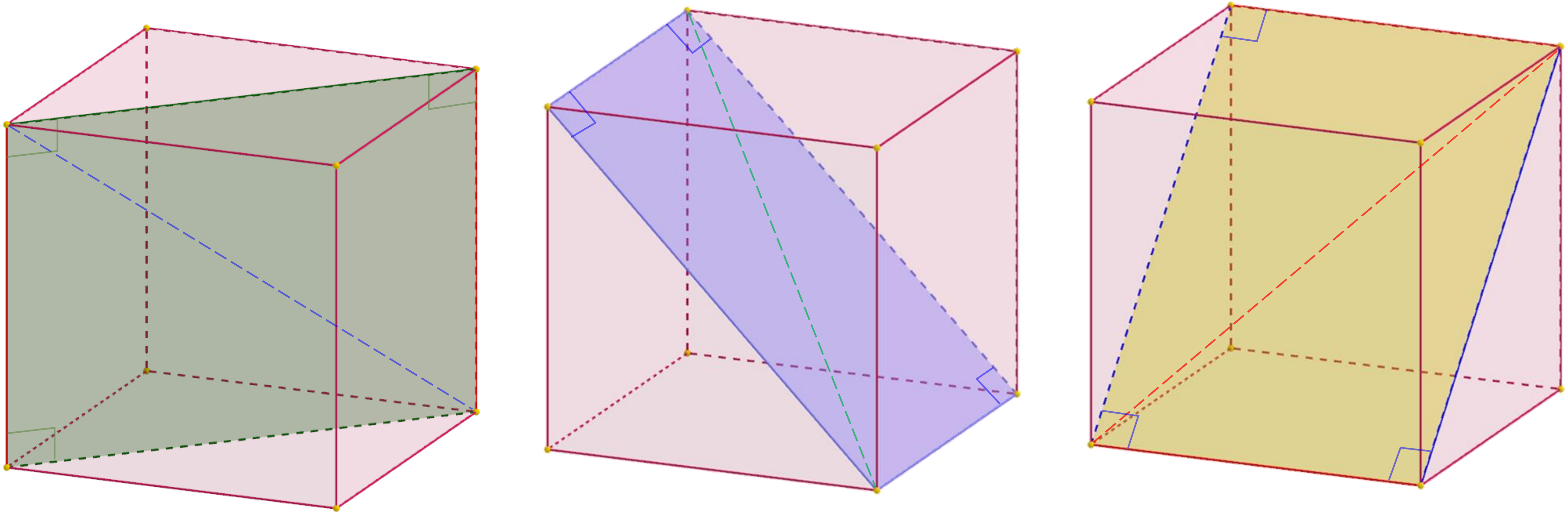
$$\boxed{\mathbb{V} = a^3}$$

NOTA:
El cubo tiene cuatro diagonales, las cuales son concurrentes en el centro. Ten en cuenta que el centro equidista de los vértices y de las caras.

POLIEDROS REGULARES

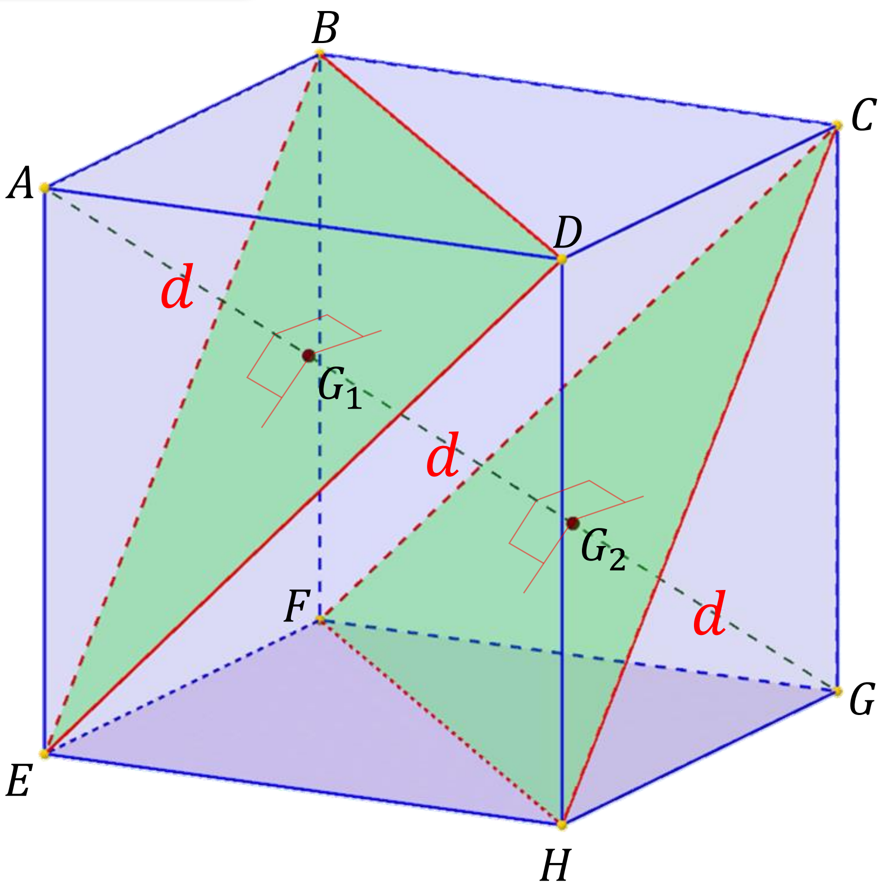
HEXAEDRO REGULAR

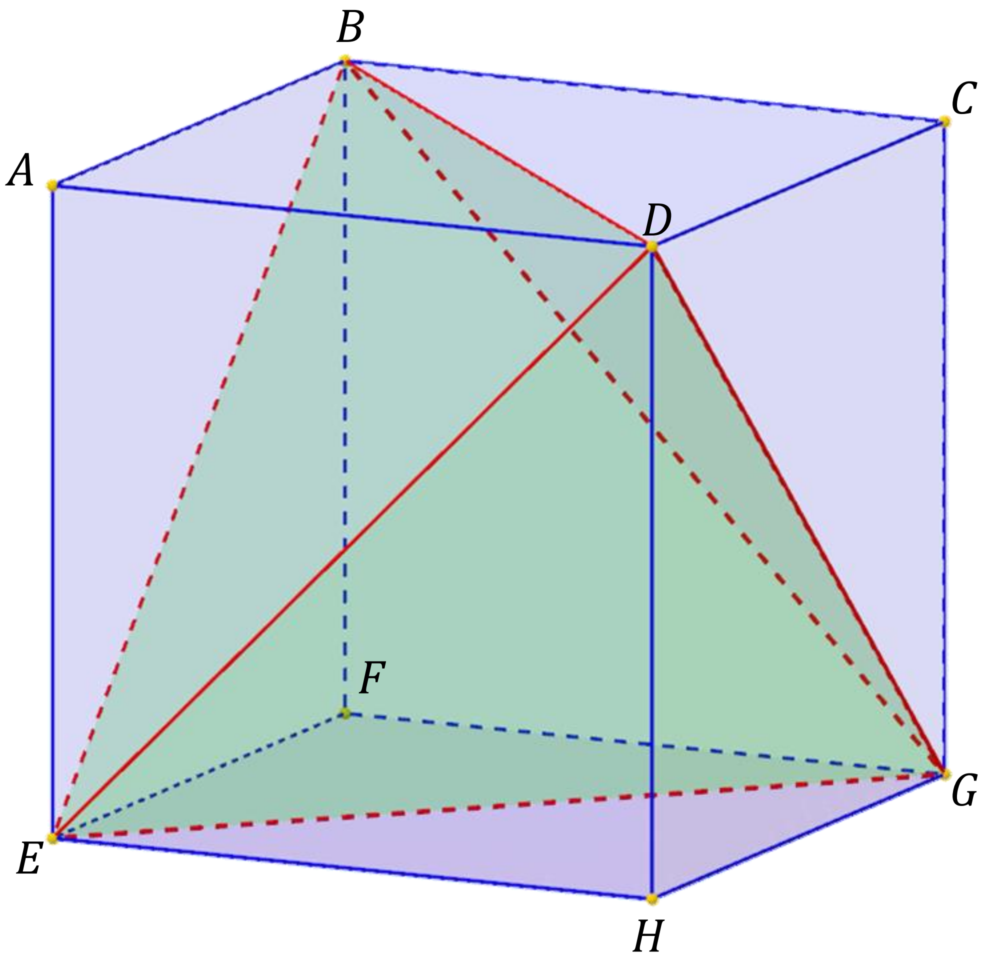
Planos diagonales



- Las regiones rectangulares en los cubos mostrados son los planos diagonales (secciones), así mismo ellos son considerados secciones de simetría, pero ten en cuenta que no son las únicas secciones de simetría.

POLIEDROS REGULARES





- ΔEBD y ΔFCH son equiláteros, congruentes y paralelos.
- $\overline{AG} \perp REGIONES_{\Delta EBD\ y\ \Delta FCH}$
- G_1 y G_2 son baricentros de ΔEBD y ΔFCH respectivamente.

$\boxed{G_1\ y\ G_2\ trisecan\ a\ \overline{AC}}$

- Al unir E, B y D con el vértice G se tiene que:

$\boxed{\textbf{GEBD} \text{ es un tetraedro regular}}$

POLIEDROS REGULARES

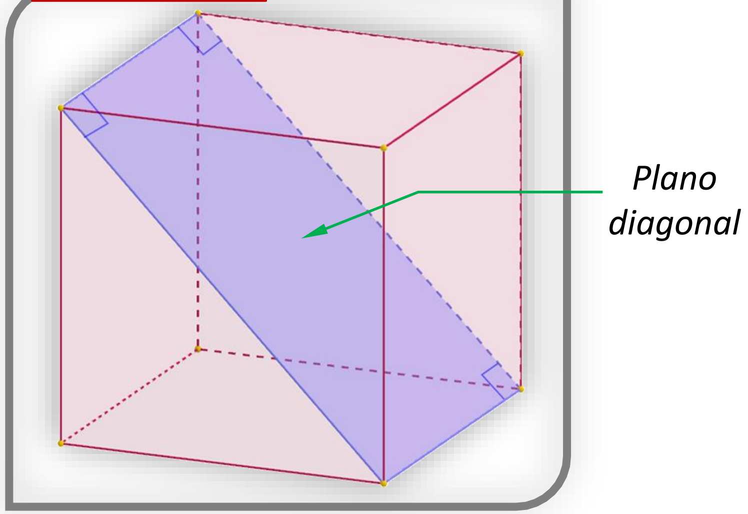
EXAMEN UNI **2012 – I**

Si en un exaedro regular, la distancia de un vértice a una de las diagonales que no contenga a este vértice es $\sqrt{2}\,m$, entonces la longitud de esta diagonal es:

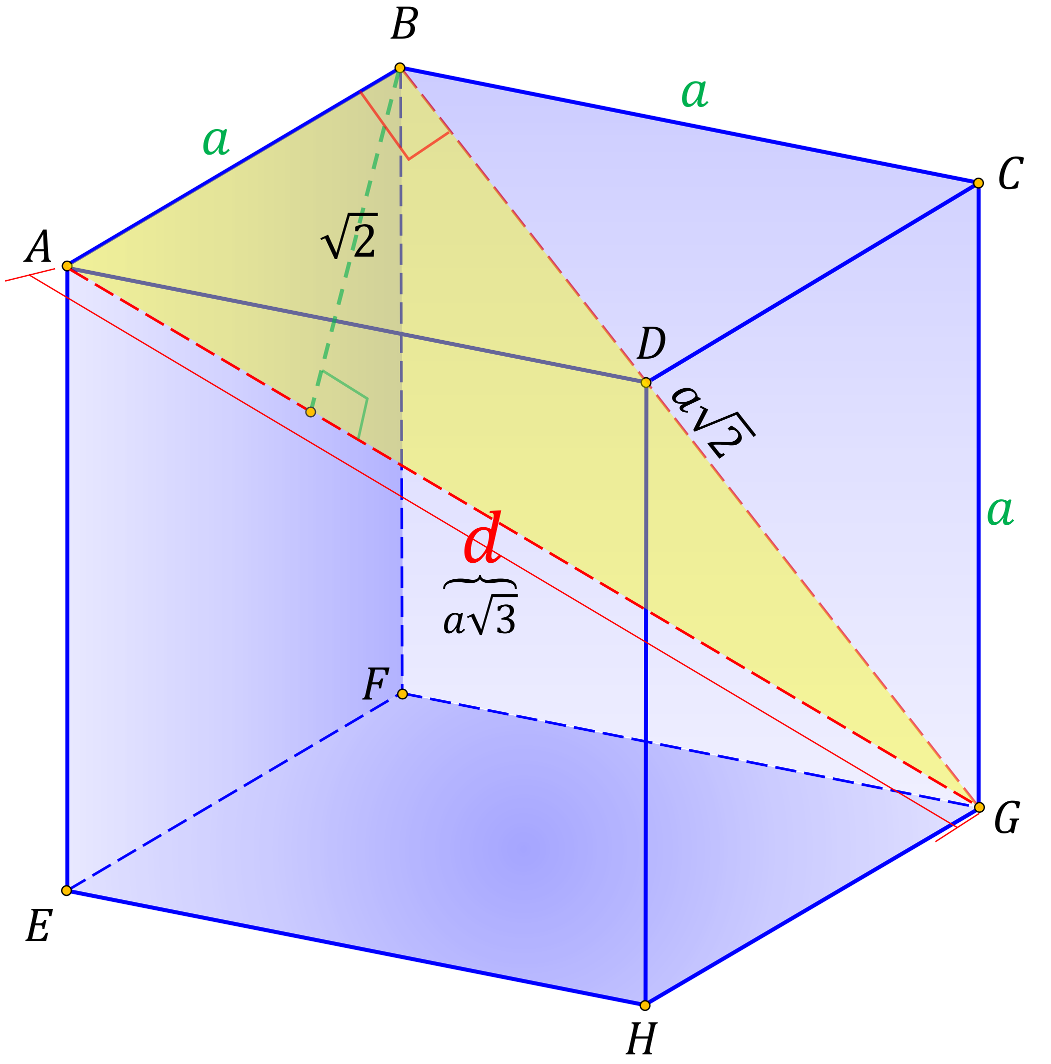
$A)\ \sqrt{5}$ $\quad B)\ \sqrt{6}$ $\quad C)\ \sqrt{7}$

$D)\ \sqrt{8}$ $\quad E)\ \sqrt{9}$

En el cubo:



Piden d



- Sea a la longitud de la arista

$$\rightarrow d = a\sqrt{3} \quad \ldots (I)$$

- Trazamos $\overline{BG}$ para aprovechar al plano diagonal.
- Se tiene que:

$$m\sphericalangle ABG = 90°$$

- En $\triangle ABG$ por producto de catetos:

$$(\cancel{a})(a\cancel{\sqrt{2}}) = (\cancel{\sqrt{2}})(\cancel{a}\sqrt{3})$$

$$\rightarrow a = \sqrt{3}$$

- Reemplazamos en (I):

$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{d = \sqrt{9}}}$$

Clave **E**

POLIEDROS REGULARES

OCTAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular, cuyas ocho caras son regiones triangulares equiláteras.

- Del gráfico: $C = 8$
  $V = 6$
  $A = 12$
- Notación:

  Octaedro regular $M - ABCD - N$
- Además:

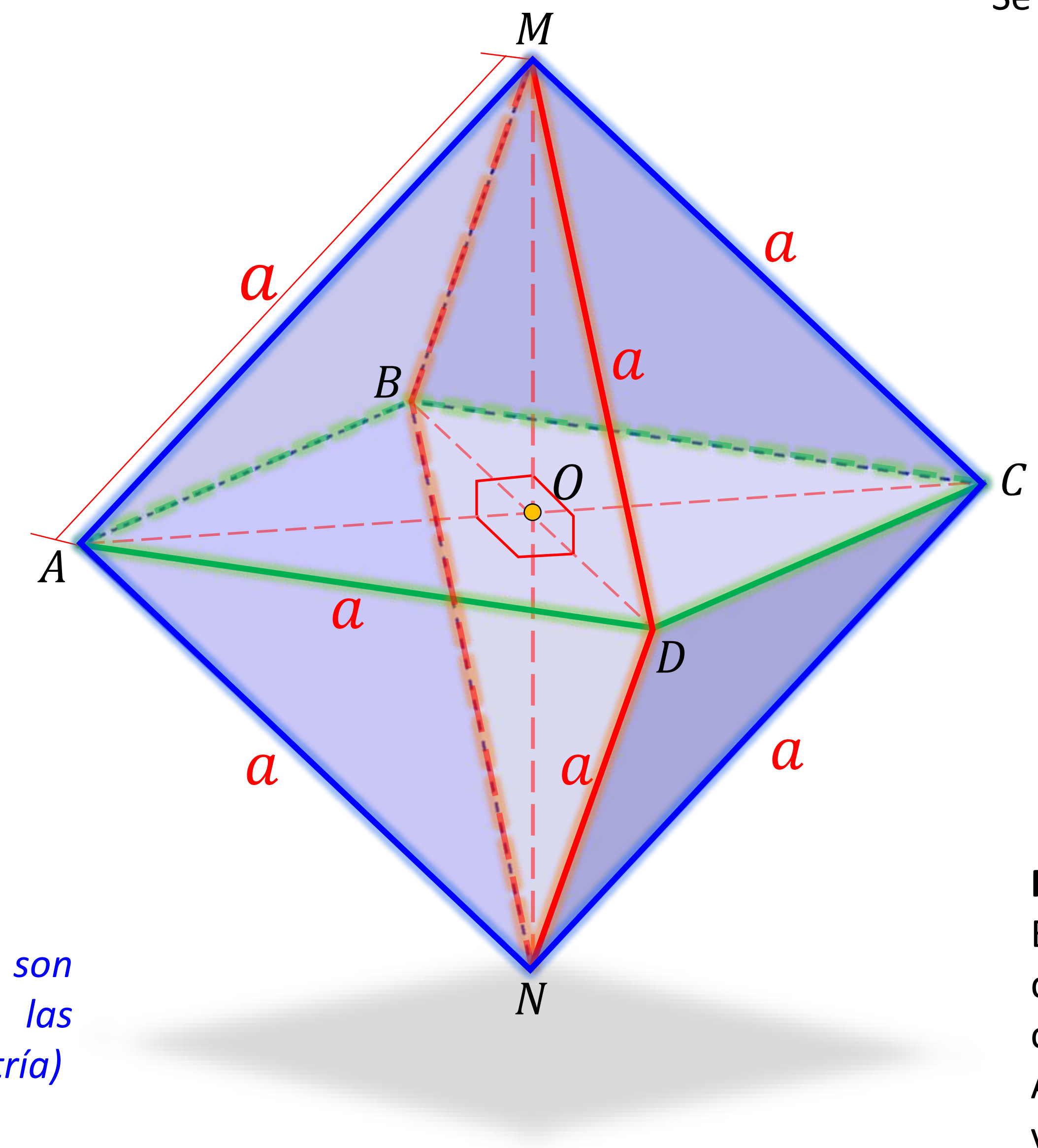
  $\boldsymbol{a}$: Longitud de la arista

  $\overline{\boldsymbol{MN}}$: Diagonal

  $\boldsymbol{O}$: Centro de $M - ABCD - N$

  - $\boldsymbol{ABCD}$
  - $\boldsymbol{BMDN}$
  - $\boldsymbol{AMCN}$

  Cuadrados *(éstos son algunos de las secciones de simetría)*



Se cumple:

- ***Longitud de la diagonal***

$$\boxed{MN = a\sqrt{2}}$$

- ***Área de la superficie total***

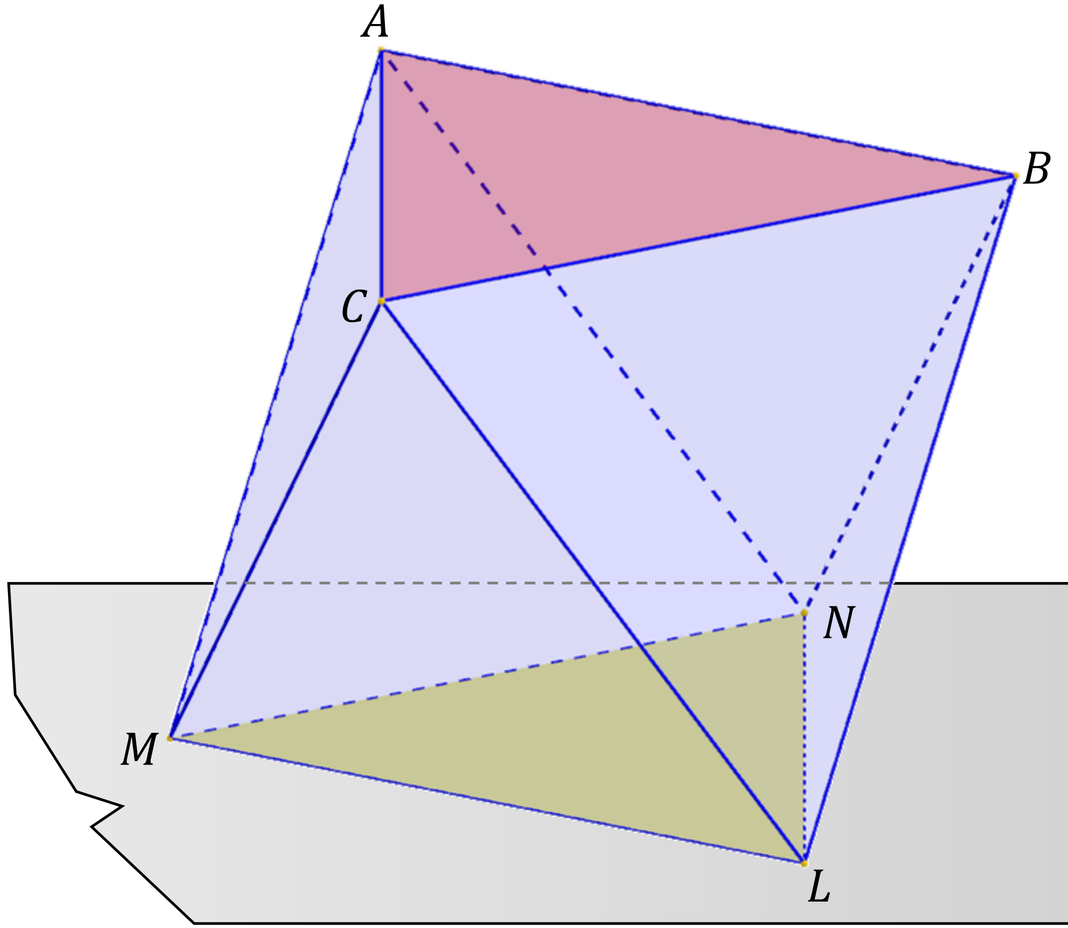
$$\boxed{\mathbb{A}_{S.T} = 2a^2\sqrt{3}}$$

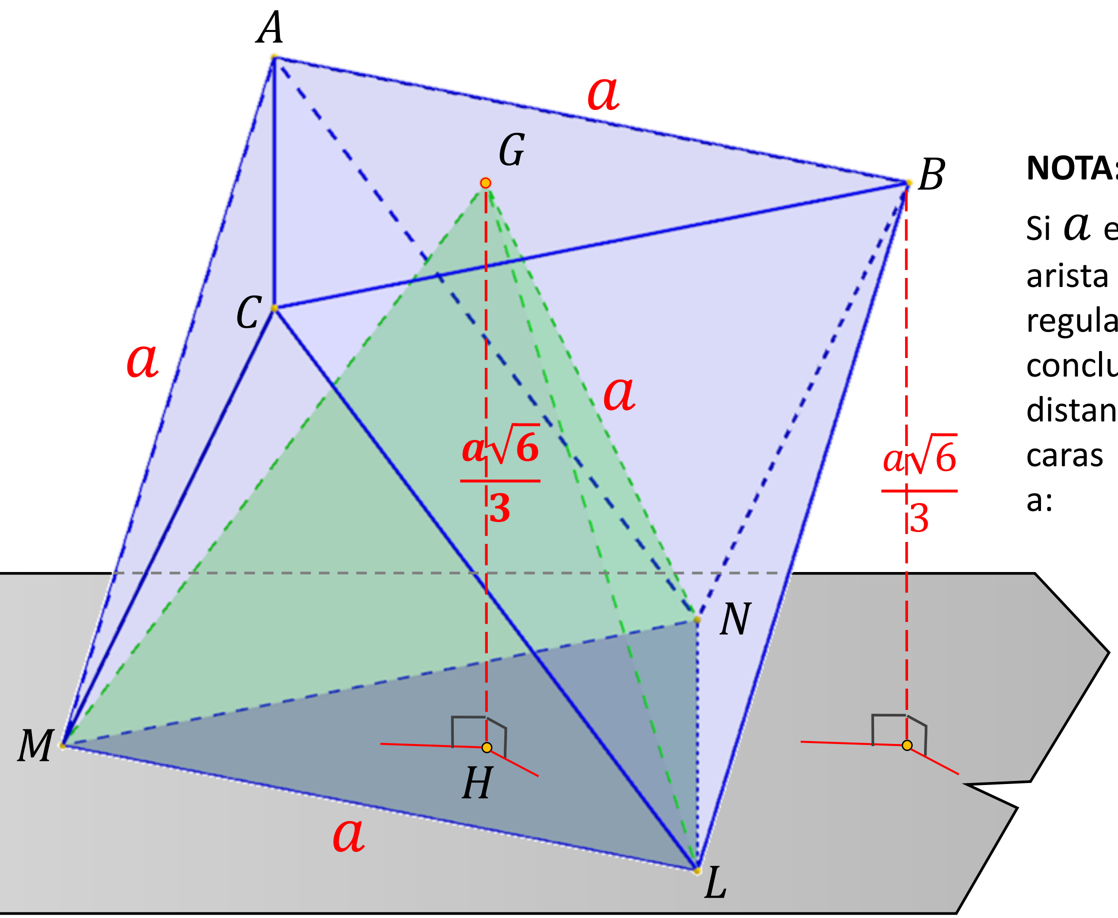
- ***Volumen***

$$\boxed{\mathbb{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$$

NOTA:
En el octaedro regular las tres diagonales son concurrentes en el centro y perpendiculares entre sí. Además dicho centro equidista de los vértices y de las caras.

POLIEDROS REGULARES





NOTA:

Si a es la longitud de la arista del octaedro regular, podemos concluir que, la distancia entre dos caras opuestas es igual a:

$$\boxed{\frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

- Las caras MNL y ABC se denominan opuestas.

Se cumple:

$$\boxed{\blacktriangle MNL \parallel \blacktriangle ABC}$$

- Si G es el baricentro de la cara ABC

Se cumple:

$$\boxed{GMNL\text{: Tetraedro regular}}$$

POLIEDROS REGULARES

EXAMEN UNI **2011 – I**

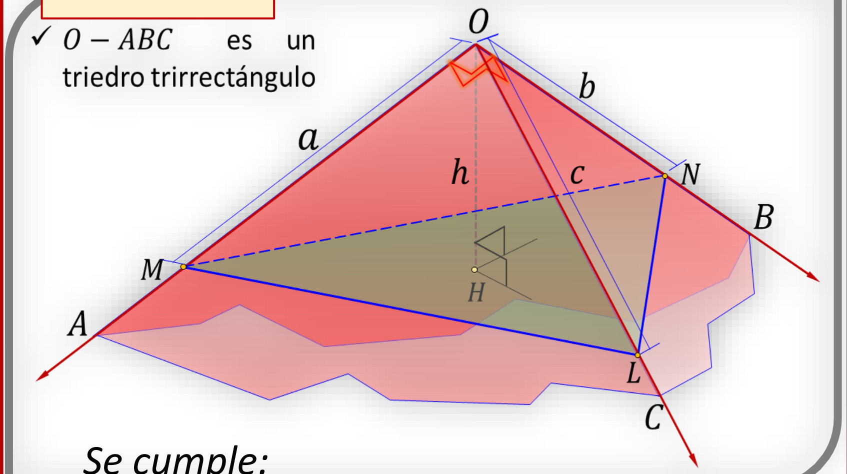
La arista de un octaedro regular mide $6\,m$. Calcule la distancia (en m) del centro del octaedro a una cara.

$A)\ \sqrt{5}$ $B)\ \sqrt{6}$ $C)\ \sqrt{7}$

$D)\ \sqrt{8}$ $E)\ 3$

Recordar:

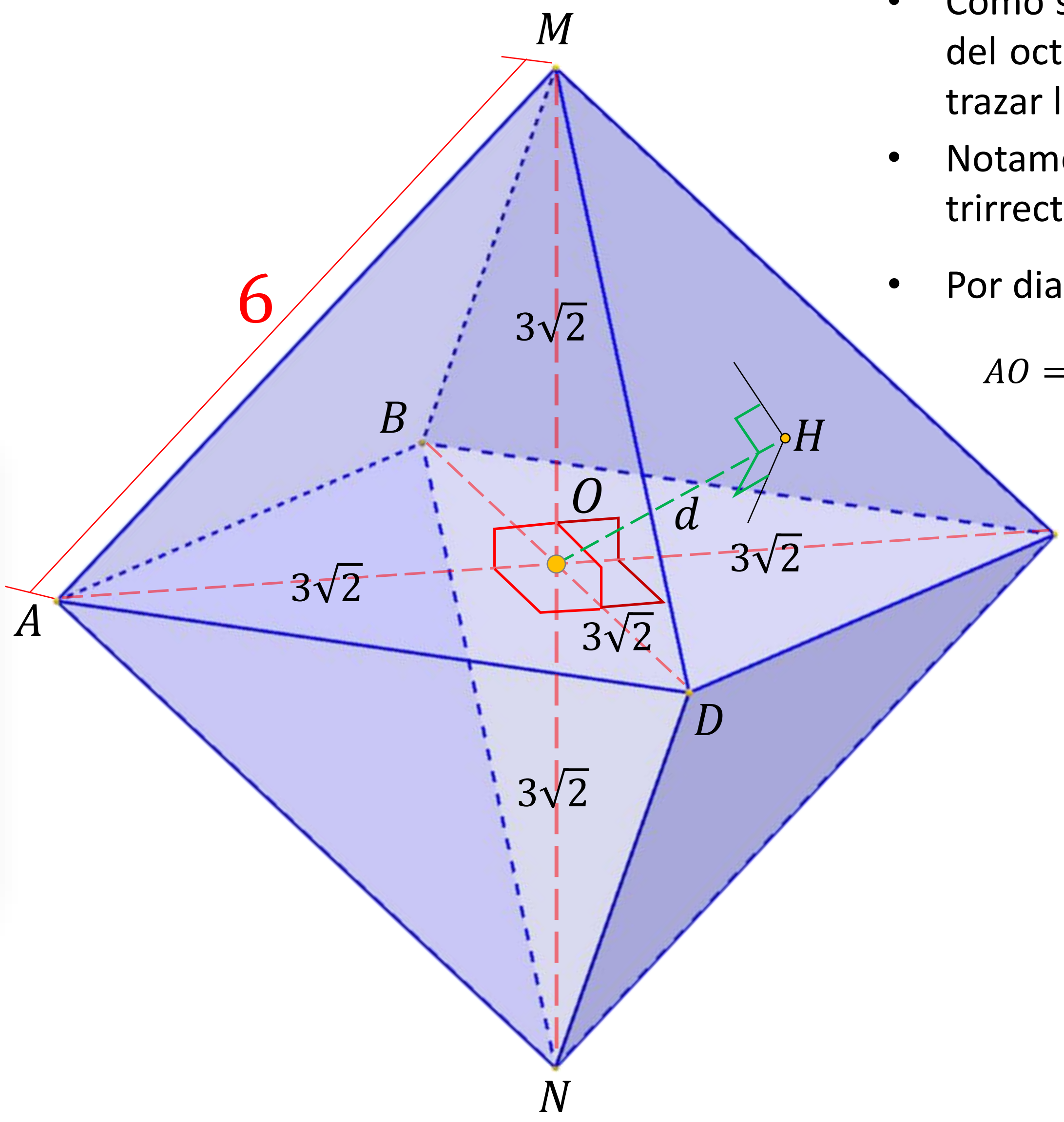
✓ $O-ABC$ es un triedro trirrectángulo



Se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

Piden $OH = d$



- Como se requiere trabajar con el centro del octaedro regular, vamos aprovechar trazar las diagonales.
- Notamos que $O-MDC$ es un triedro trirrectángulo.
- Por diagonales del octaedro regular:

$$AO = OC = MO = ON = BO = OD = 3\sqrt{2}$$

- De lo recordado en $O-MDC$

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{(3\sqrt{2})^2}+\frac{1}{(3\sqrt{2})^2}+\frac{1}{(3\sqrt{2})^2}$$

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\therefore\ d=\sqrt{6}}$$

Clave **B**

POLIEDROS REGULARES

DODECAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular, cuyas doce caras son regiones pentagonales regulares.

- Del gráfico: $C = 12$
  $V = 20$
  $A = 30$

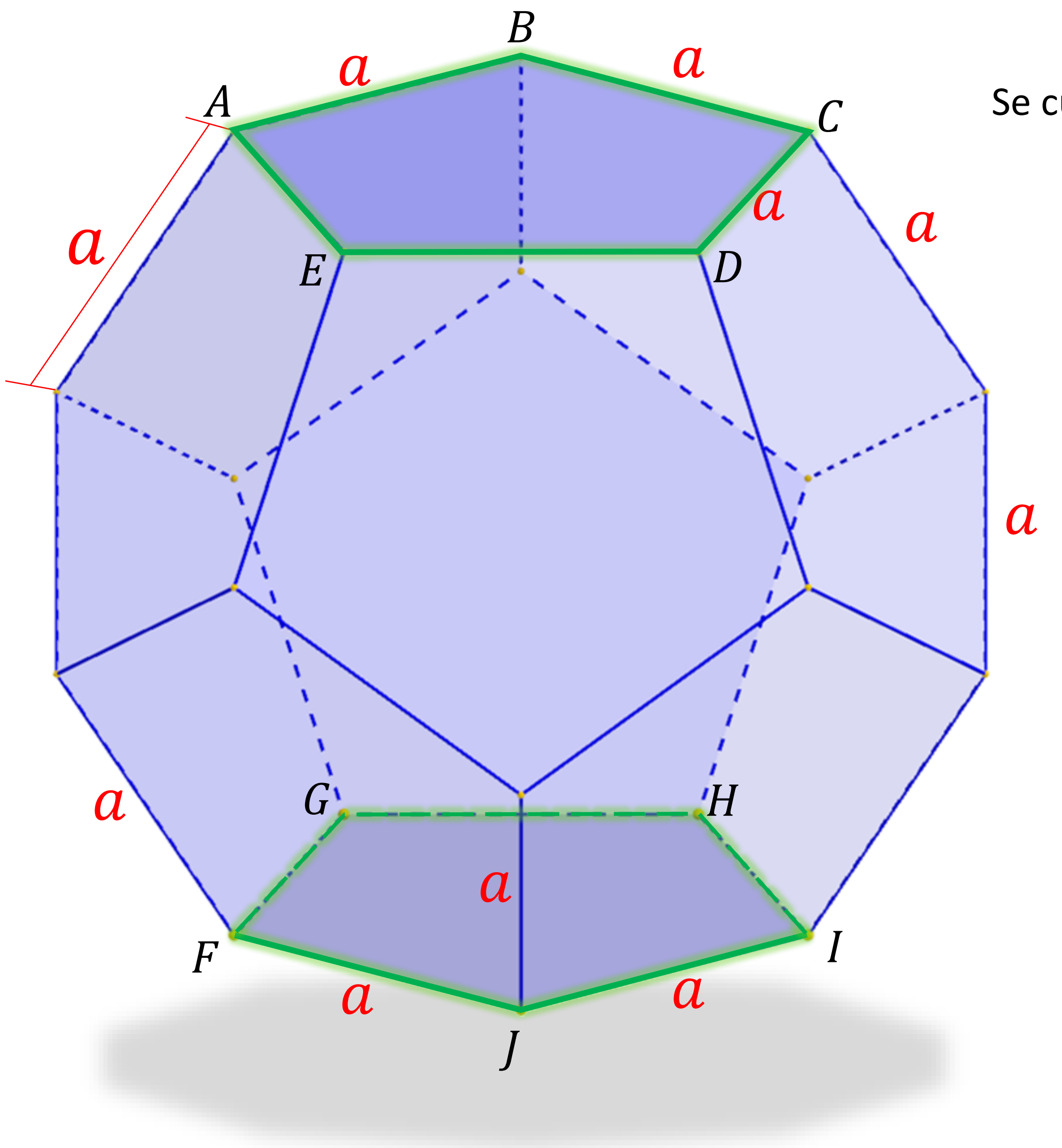
- Además:

  $\boldsymbol{a}$: Longitud de la arista

  $⬠ABCDE \parallel ⬠FGHIJ$

✓ *En el dodecaedro regular, encontramos regiones pentagonales paralelas.*

NOTA:
El dodecaedro regular tiene cien diagonales.



Se cumple:

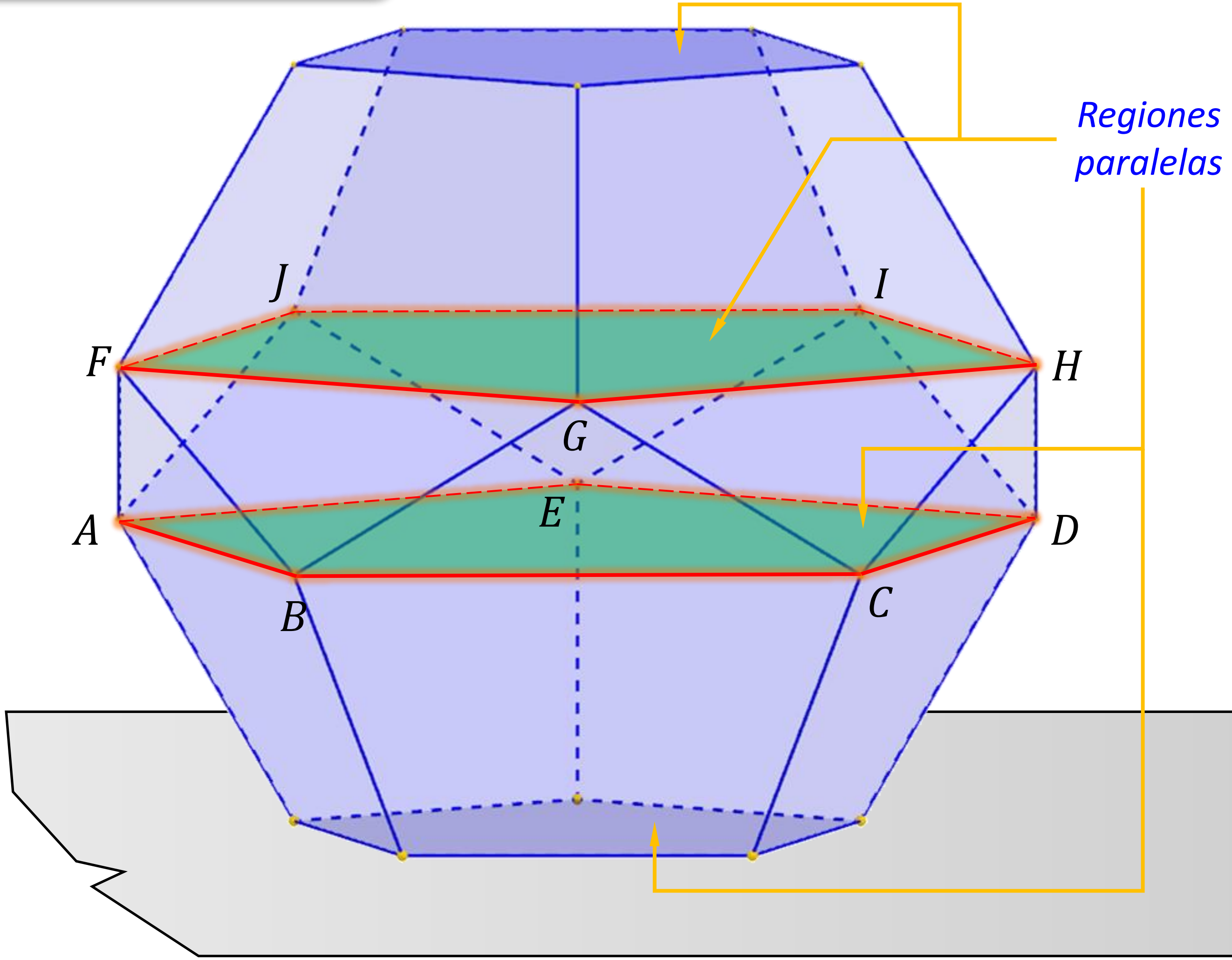
➢ ***Área de la superficie total***

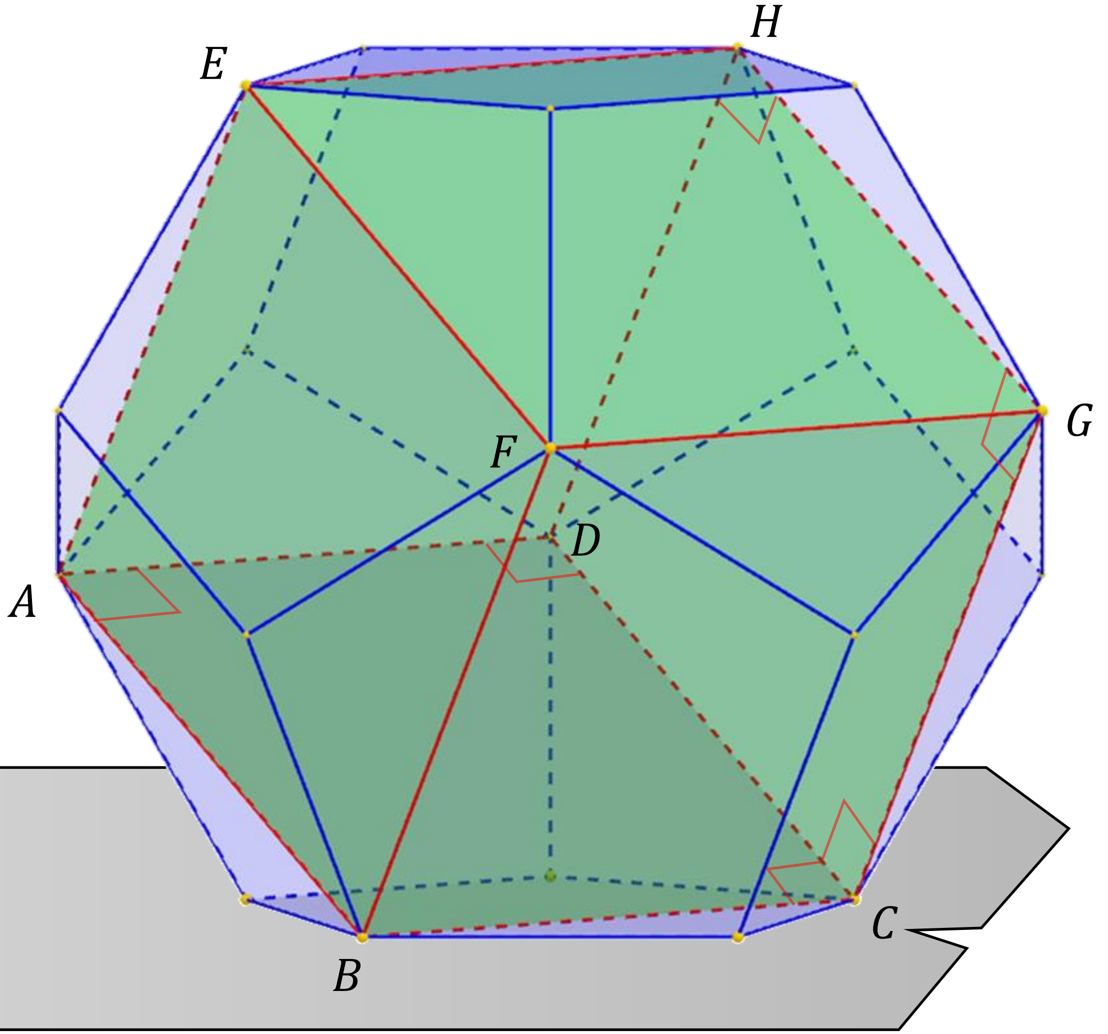
$$\mathbb{A}_{S.T} = 15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

➢ ***Volumen***

$$\mathbb{V} = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$$

POLIEDROS REGULARES





- $\boldsymbol{ABCDE}$ y $\boldsymbol{FGHIJ}$ son pentágonos regulares congruentes y paralelos.

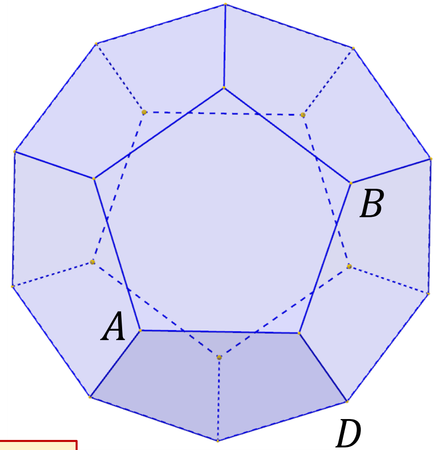
$\boldsymbol{EFGH - ABCD}$ es un hexaedro regular.

CURSO DE GEOMETRÍA

POLIEDROS REGULARES

EXAMEN UNI $2017 - I$

La figura mostrada es un dodecaedro regular. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



$A)$ 30°

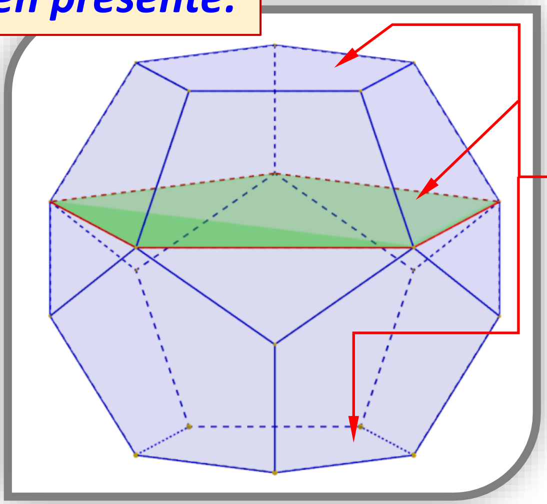
$B)$ 36°

$C)$ 45°

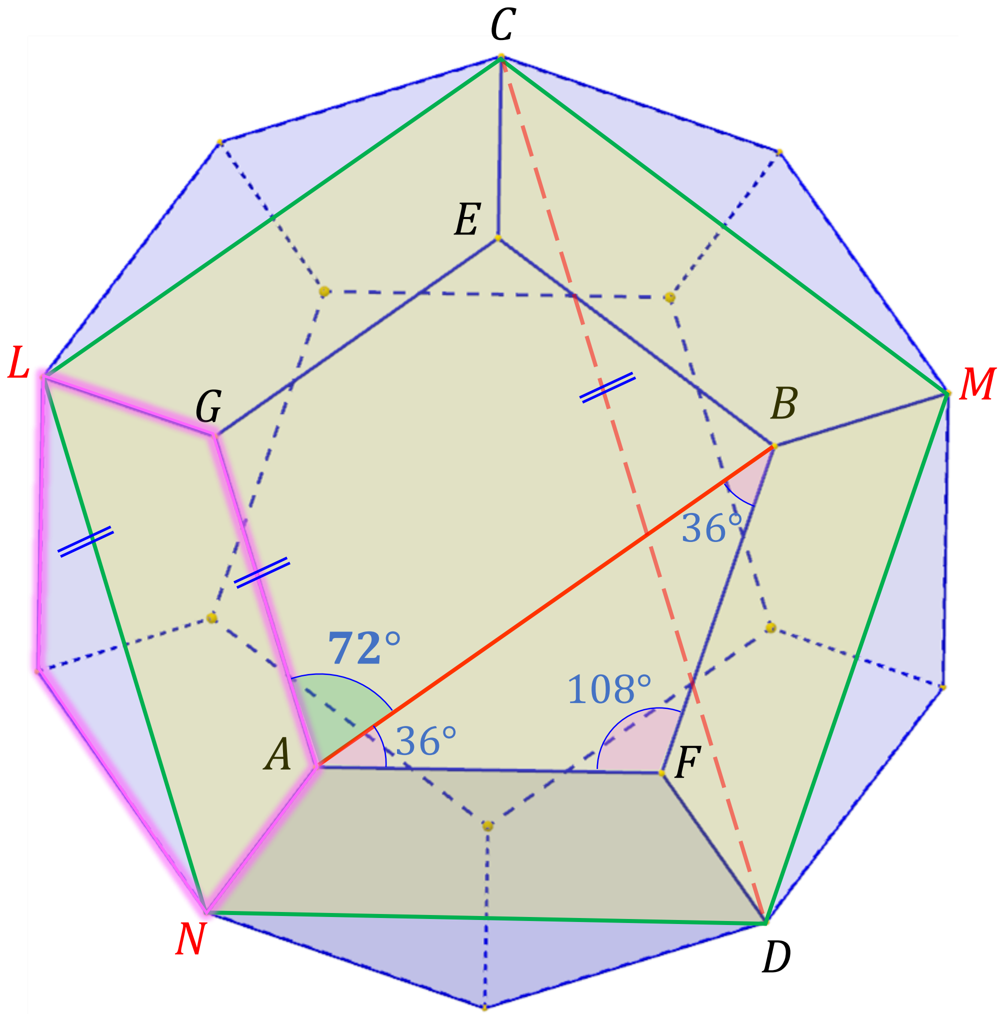
$D)$ 60°

$E)$ 72°

Ten presente:



Piden $m\sphericalangle(\overline{AB};\overline{CD})$



- Reconocemos que las líneas en cuestión son alabeadas.
- Además $CMDNL$ es una región pentagonal regular que contiene al segmento CD y es paralela a la cara $EBFAG$.
- Con ello:

$\overline{CD} \parallel \overline{LN}$, $\overline{LN} \parallel \overline{GA}$ $\Rightarrow$ $\overline{CD} \parallel \overline{GA}$

$\rightarrow m\sphericalangle(\overline{AB};\overline{CD}) = m\sphericalangle(\overline{AB};\overline{AG})$

- Pero $m\sphericalangle(\overline{AB};\overline{AG}) = 72°$

$$\boxed{\therefore m\sphericalangle(\overline{AB};\overline{CD}) = \mathbf{72°}}$$

Clave **E**

POLIEDROS REGULARES

ICOSAEDRO REGULAR

Es el poliedro regular, cuyas veinte caras son regiones triangulares equiláteras.

- Del gráfico: $C = 20$
  $V = 12$
  $A = 30$

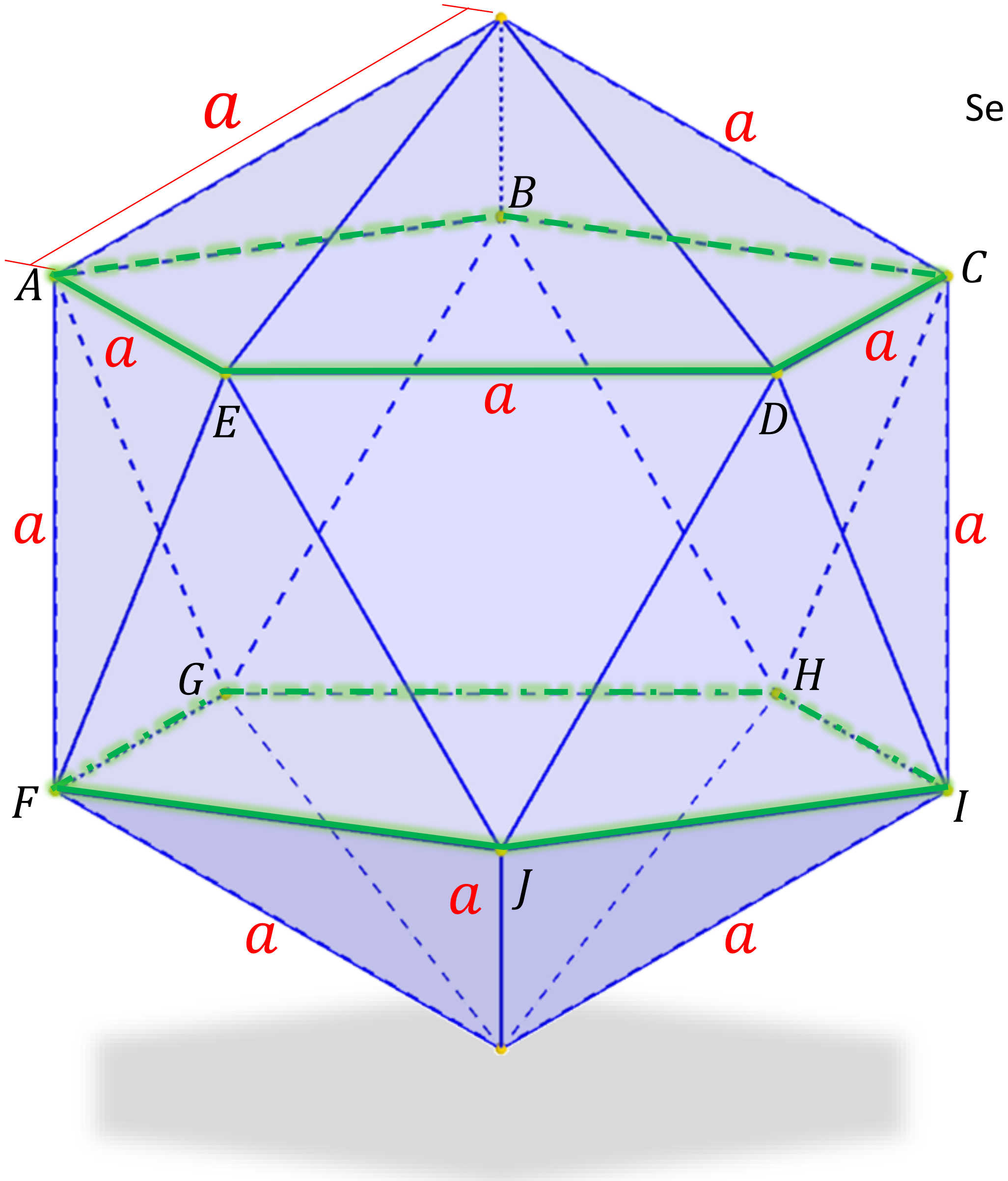
- Además:

  $\boldsymbol{a}$: Longitud de la arista

  $⬠ABCDE \parallel ⬠FGHIJ$

✓ *En el icosaedro regular, encontramos regiones pentagonales regulares, congruentes y paralelas.*

NOTA:
El icosaedro regular tiene treinta y seis diagonales.



Se cumple:

➢ ***Área de la superficie total***

$$\mathbb{A}_{S.T} = 5a^2\sqrt{3}$$

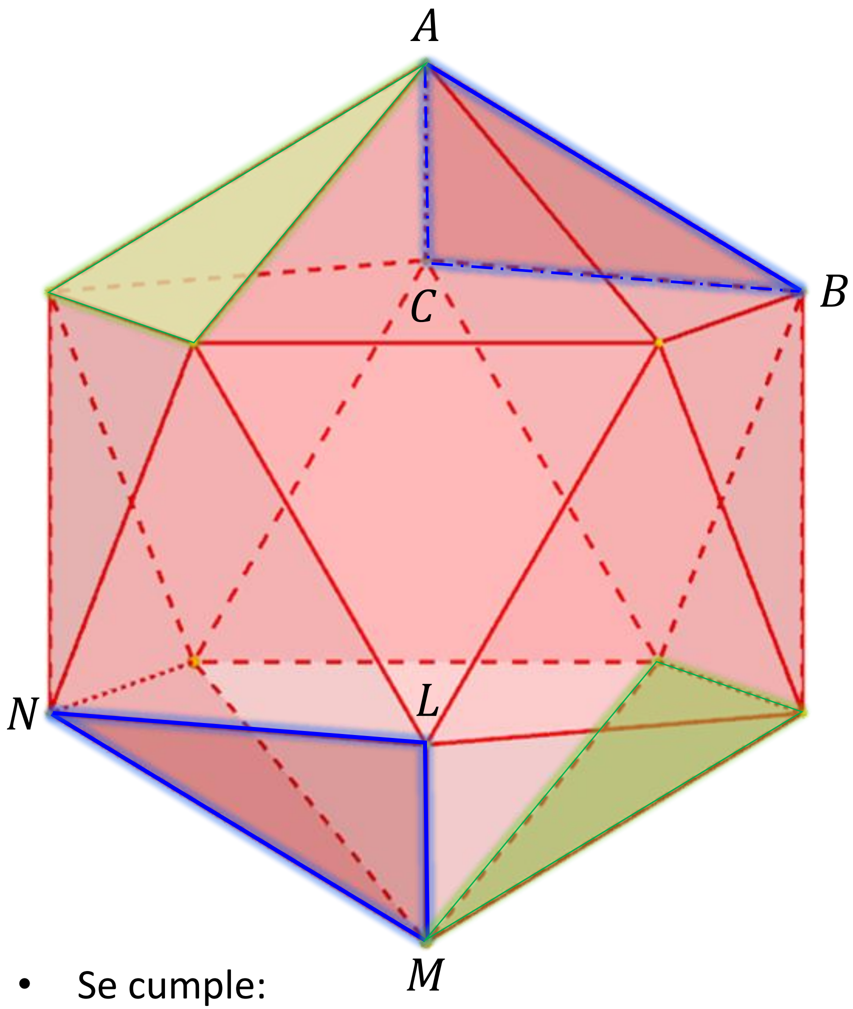
➢ ***Volumen***

$$\mathbb{V} = \frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

POLIEDROS REGULARES

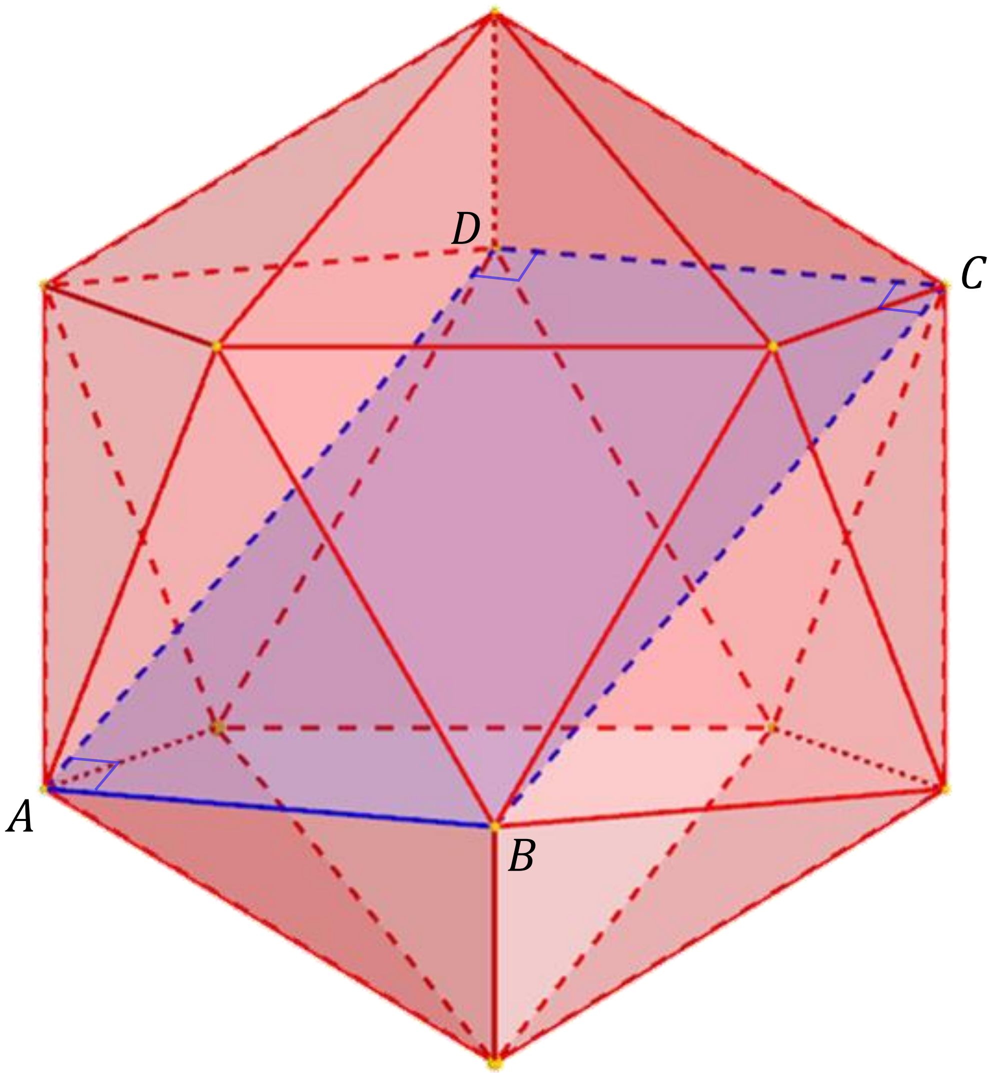
ICOSAEDRO REGULAR

TEOREMAS



- Se cumple:

$\blacktriangle ABC \parallel \blacktriangle MNL$



- En el gráfico:

ABCD es un rectángulo

Ten en cuenta la importancia de poder conocer algunas regiones que se determinan dentro de los poliedros regulares, para poder aprovecharlas en los problemas.