TRIGONOMETRÍA

PROGRAMA ACADÉMICO VIRTUAL

Ciclo Anual Virtual Uni

Docente Rodolfo Condori

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA II

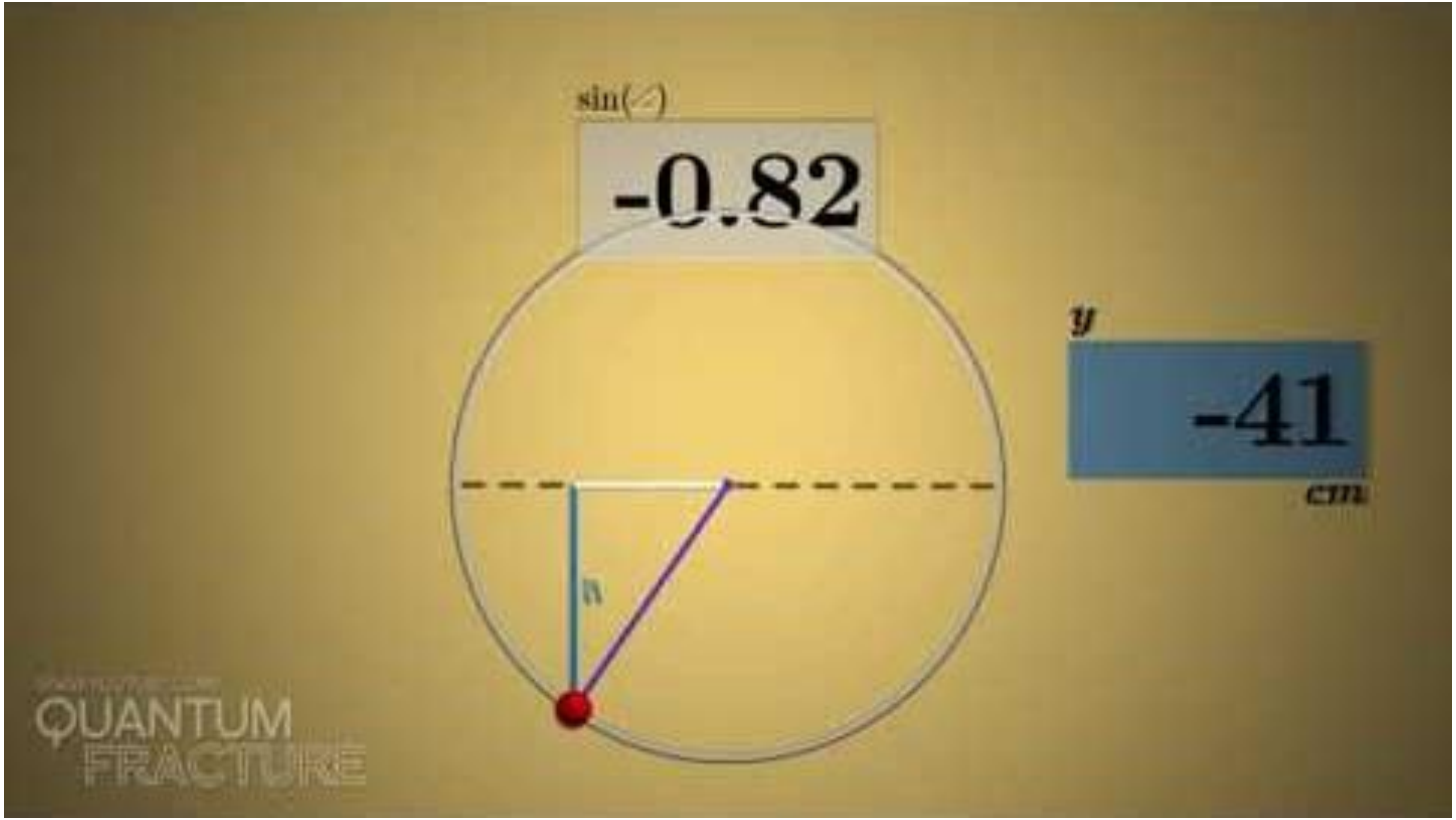
OBJETIVOS

- Representar la variación del seno y coseno de un número real en la C. T.

- Determinar el valor máximo y mínimo del seno y coseno de los arcos
- Resolver los problemas de la práctica dirigida y tipo de admisión

¿Cómo nos ayuda la variación del seno en la física?

Existen muchos fenómenos periódicos que pueden ser analizados con la razón trigonométrica seno , por ejemplo.
La corriente alterna, el movimiento armónico simple , ondas electromagnéticas.

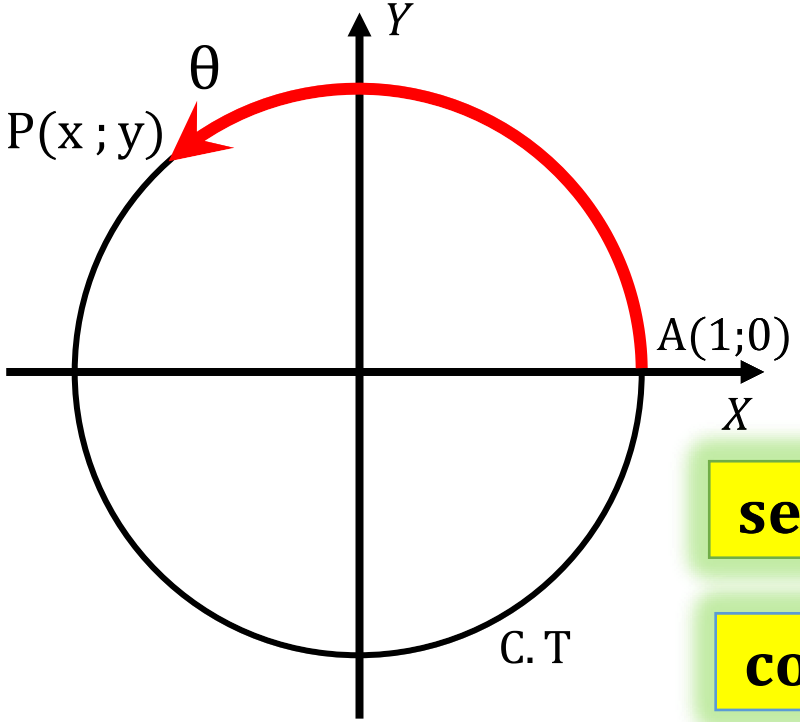


https://www.youtube.com/watch?v=zuq2jrOp8CI&feature=youtu.be

¿Qué estudiamos la clase anterior?

SENO El senθ es la ordenada del extremo del arco.

COSENO El cosθ es la abscisa del extremo del arco θ.

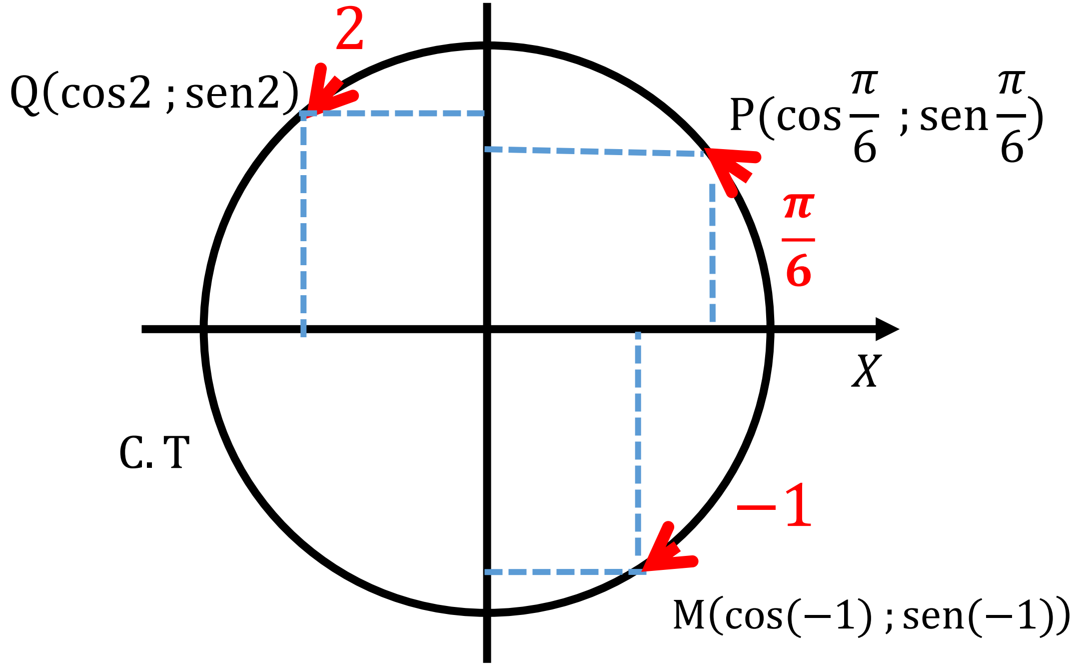


$$\mathbf{sen\theta = y}$$

$$\mathbf{cos\theta = x}$$

Ejemplos:

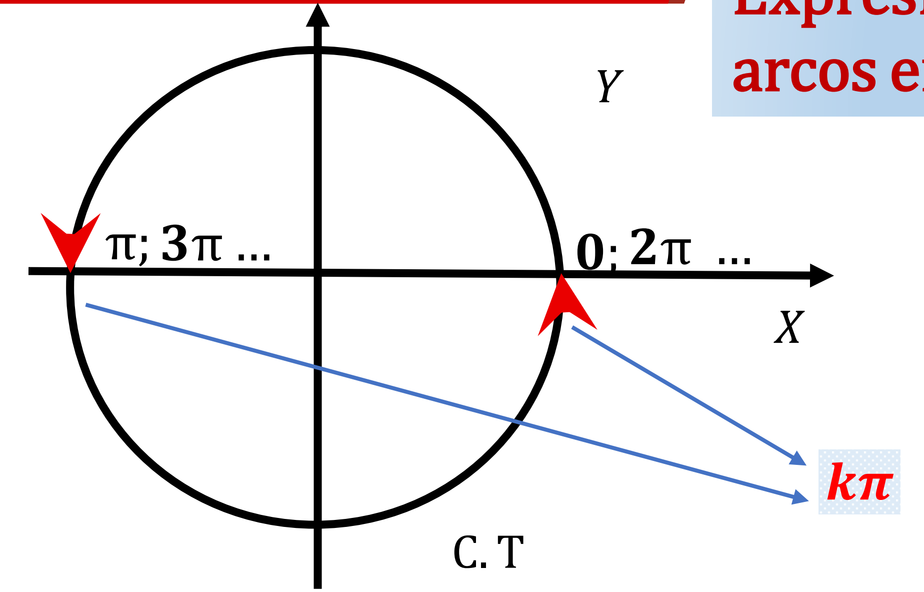
Entonces el extremo de cada arco θ se puede expresar como $(cos\theta; sen\theta)$, asi por ejemplo:.

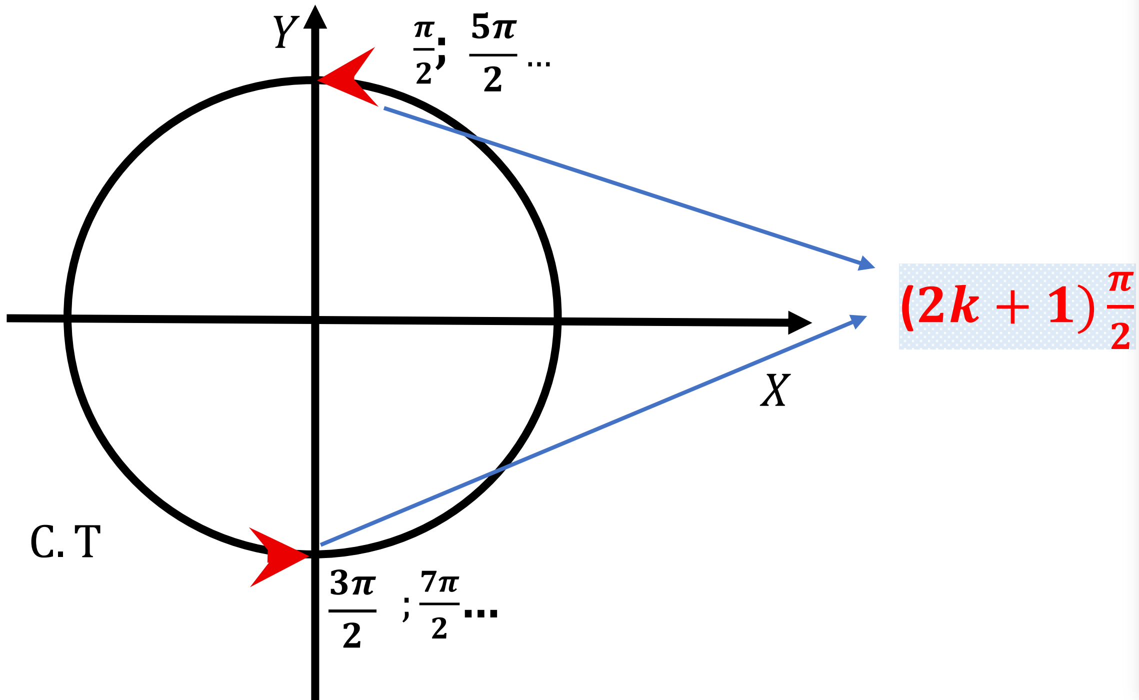


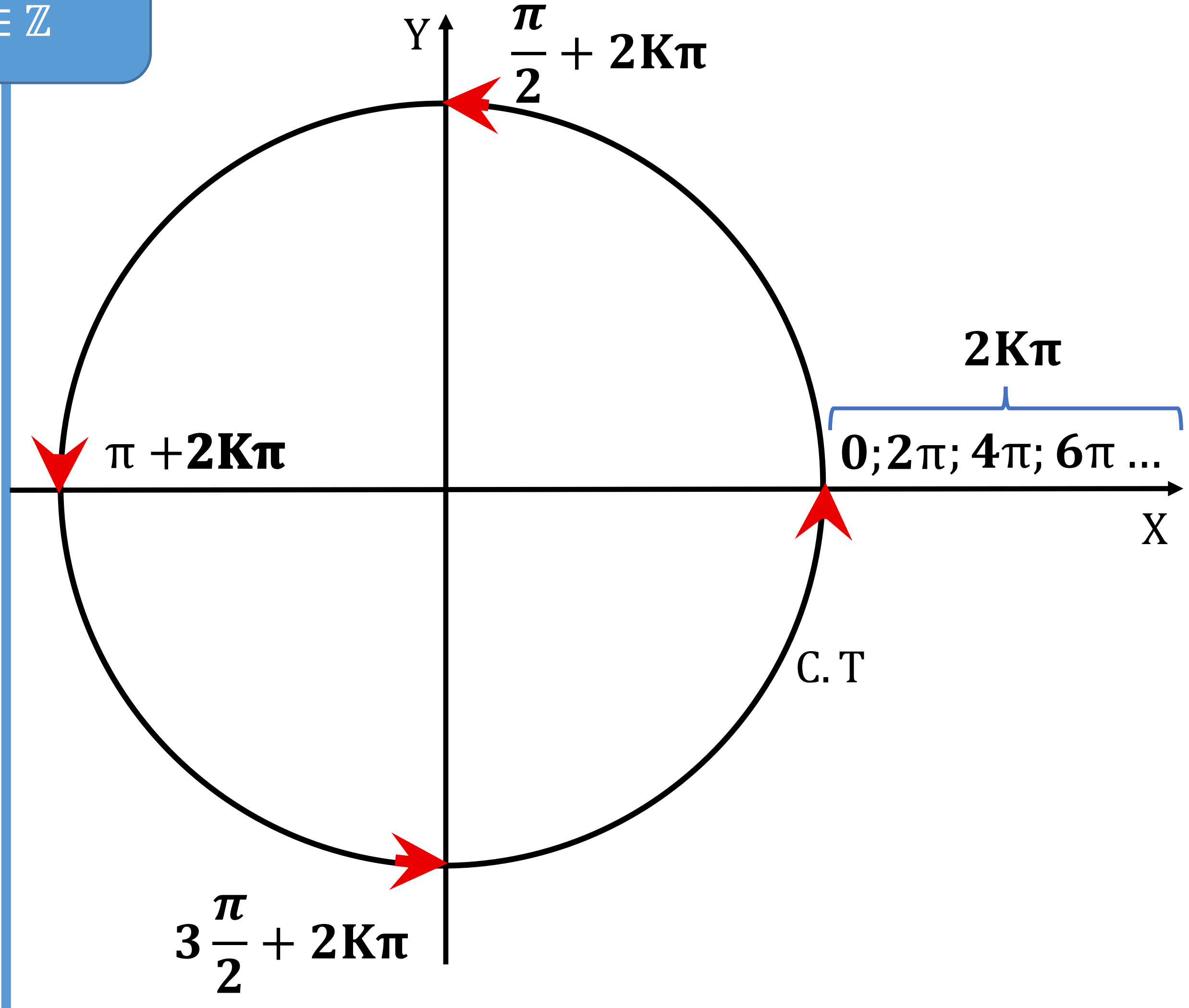
También se aplica cuando el arco gira en sentido horario

Expresiones generales de algunos arcos en la C.T.

NOTA:
K∈ ℤ





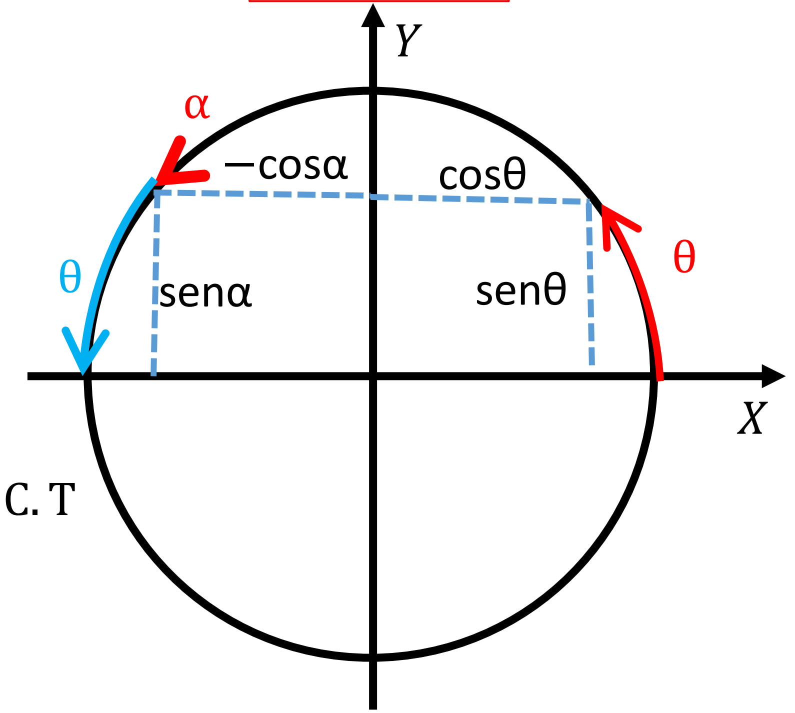


Propiedades con arcos simétricos

Con extremos de arco simetricos al eje Y

En el gráfico se tiene que $\theta+\alpha$ son suplementarios

$$\boxed{\theta+\alpha = \pi rad}$$



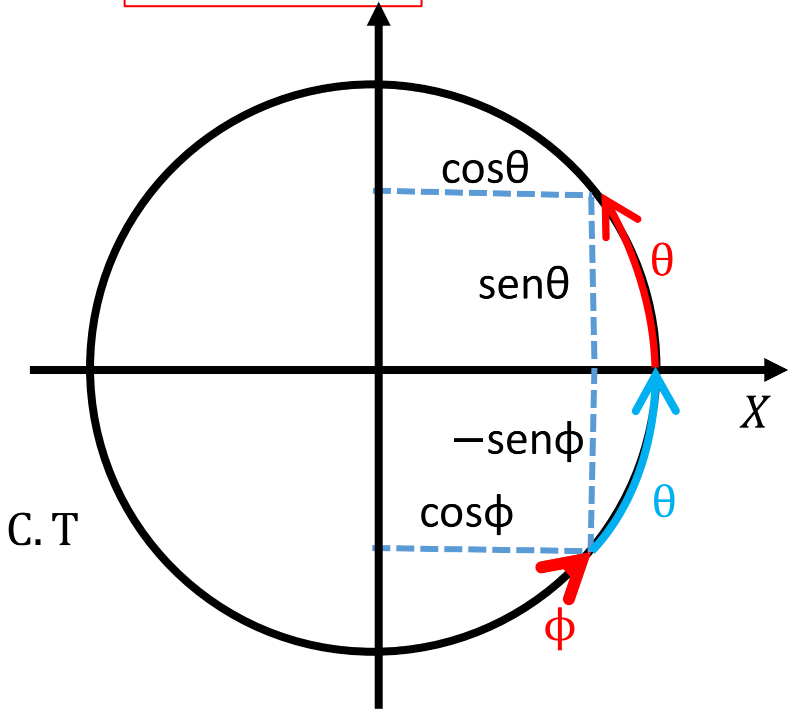
Se cumple :

$sen\alpha = sen\theta$
$cos\theta = -cos\alpha$

Con extremos de arco simétricos al eje X

En el gráfico se tiene que:

$$\boxed{\theta+\phi = 2\pi rad}$$



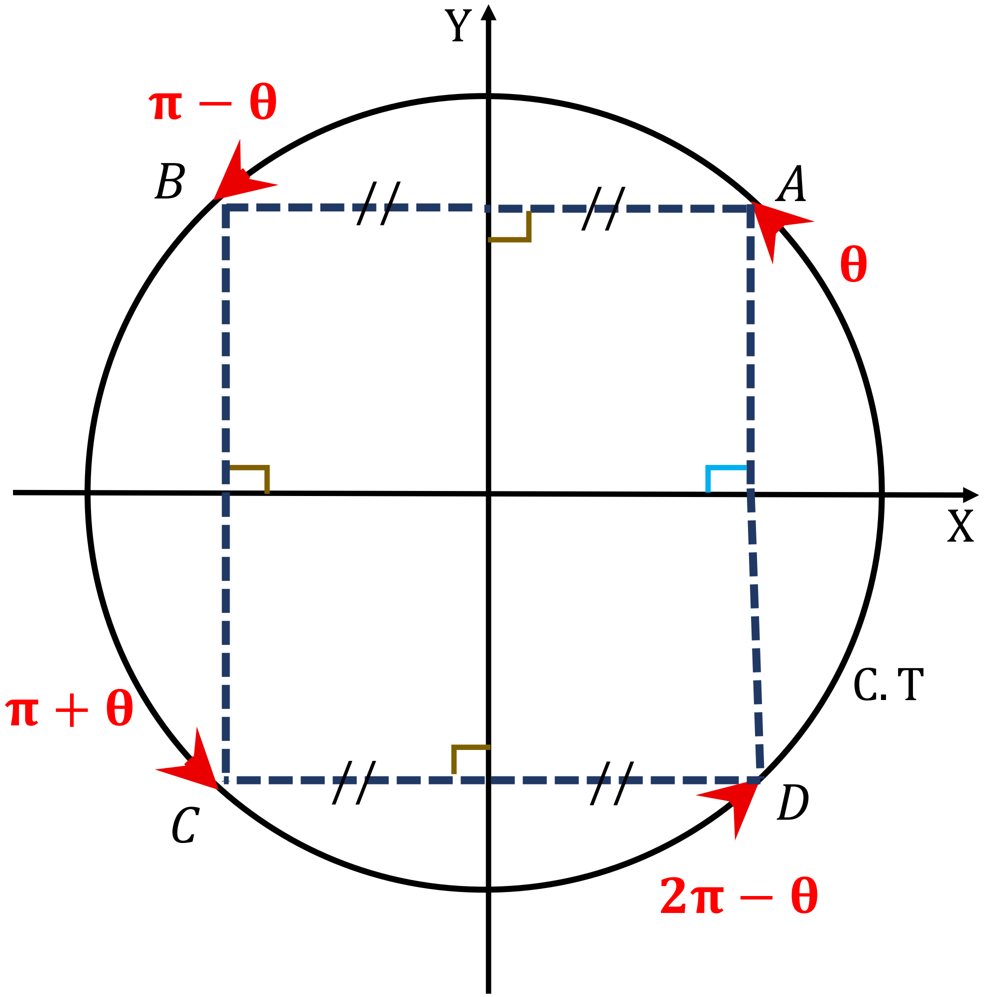
Se cumple :

$sen\theta = -sen\phi$
$cos\theta = cos\phi$

Observación

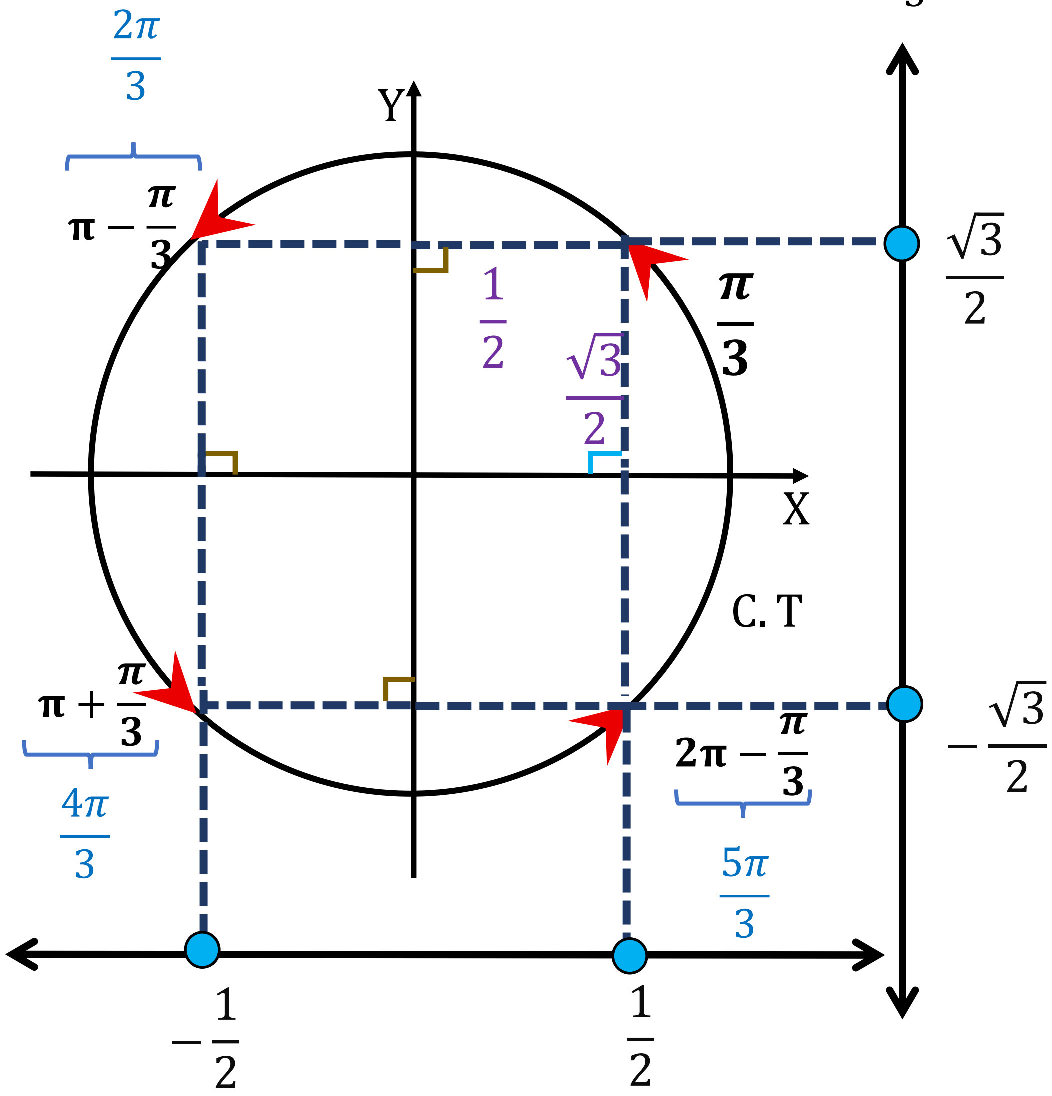
Puntos simétricos al eje Y: A y B, C y D

Puntos simétricos al eje X: A y D, B y C



Ejemplo

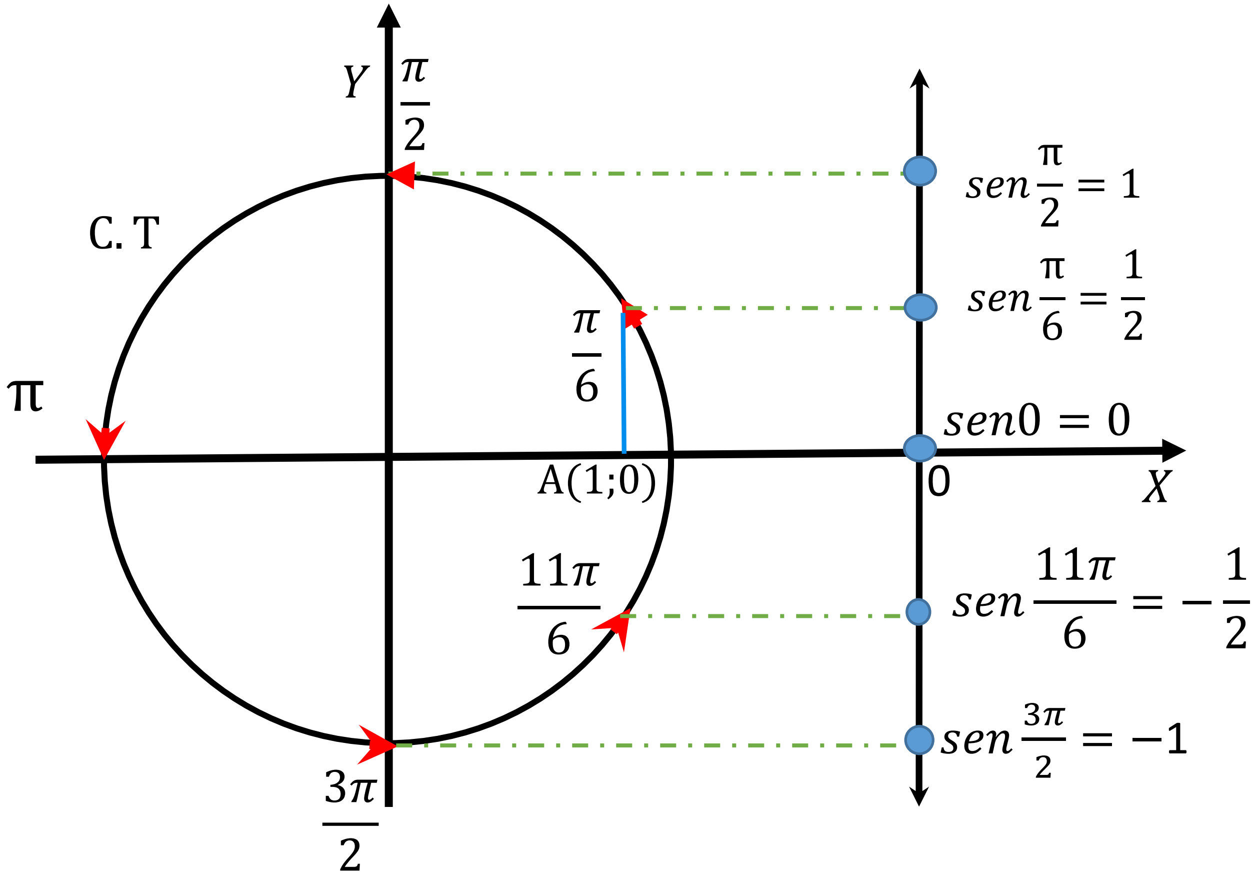
Encontrar el seno y coseno de los arcos simétricos de $\frac{\pi}{3}$



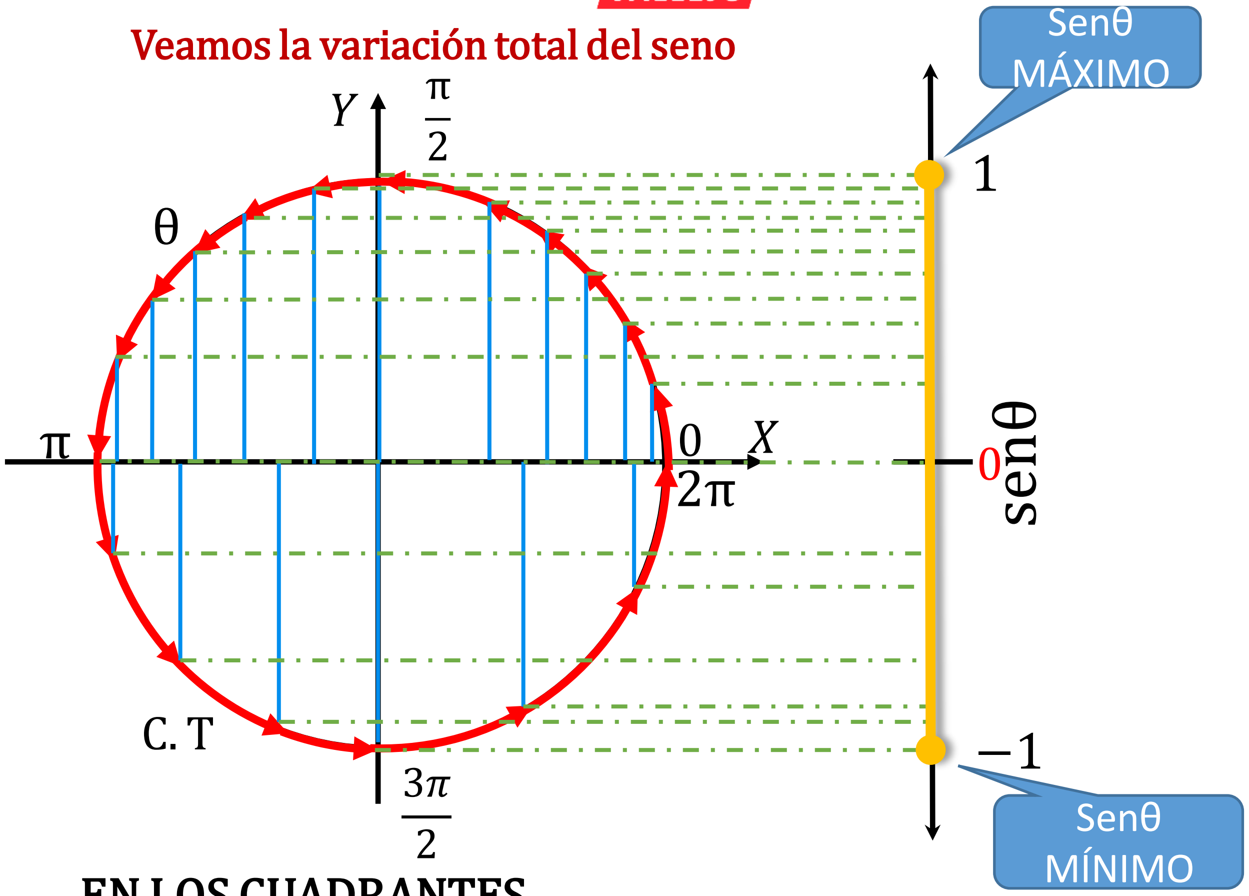
Variación del Seno

Para estudiar la variación del seno es necesario úbicar los valores numéricos del seno sobre una recta numérica real

Esto se logra proyectando el extremo del arco sobre una recta numérica vertical.



Veamos la variación total del seno



EN LOS CUADRANTES

IC	$0 < \text{sen}\theta < 1$
IIC	$0 < \text{sen}\theta < 1$
IIIC	$-1 < \text{sen}\theta < 0$
IVC	$-1 < \text{sen}\theta < 0$

EN LA C.T
Si $\theta \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq \text{sen}\theta \leq 1$$

Aplicación 1

Si $\theta \in \mathbb{R}$, Halle la variación de
H=$sen^2\theta$ +2senθ

A)$\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ B)$[-1; 3]$ C)$\left\langle \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ D)$\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$

Resolución

Nos piden la variación de
H=$sen^2\theta$ +2senθ

Completamos cuadrados

H=$sen^2\theta$ +2senθ $+1 -1$

H=$(sen\theta + 1)^2 -1$ ....(I)

∀θ∈ℝ $\boxed{-1 \leq sen\theta \leq 1}$

formamos la expresión (I)

$\xrightarrow{+1}$ $0 \leq sen\theta + 1 \leq 2$

Elevamos al cuadrado

$0 \leq (sen\theta + 1)^2 \leq 4$

$\xrightarrow{-1}$ $-1 \leq \underbrace{(sen\theta + 1)^2 - 1}_{H} \leq 3$ ⇒ ∴ $\boxed{H \in [-1; 3]}$

Aplicación 2

Si θ ∈ $[0; \frac{2\pi}{9}]$, Halle la variación de sen3θ

A) $< \frac{1}{4}; \frac{1}{3}]$ B) $< \frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$ C) $< 0; \frac{3}{4}]$ D)$[0; 1]$

Resolución

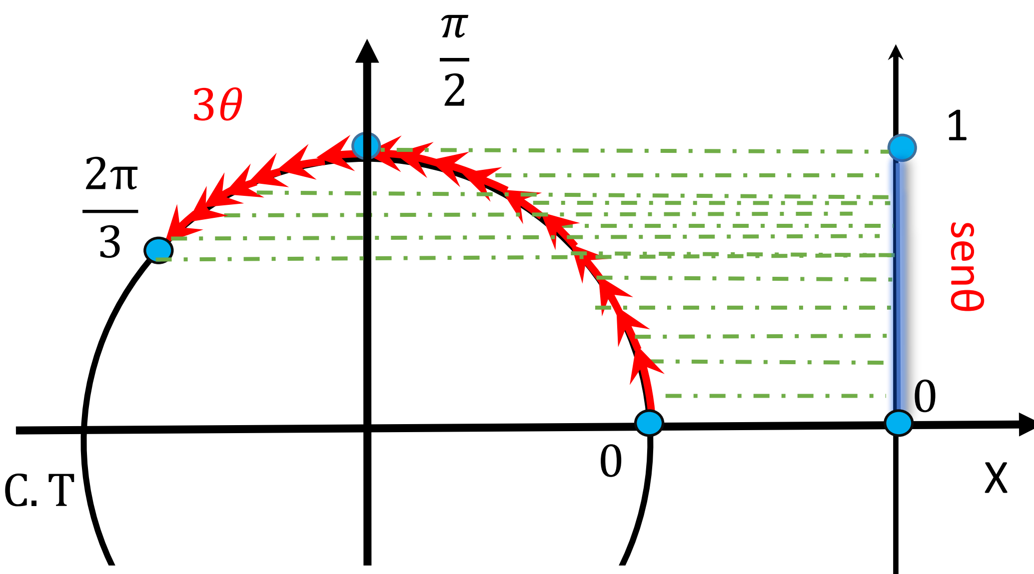
Del dato

$$0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{9}$$

Multiplicamos por 3

$$0 \leq 3\theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

Graficamos en la C.T. los arcos de la forma 3θ



De la C.T.

$$0 \leq sen3\theta \leq 1$$

∴ $\boxed{sen3\theta \in [0; 1]}$

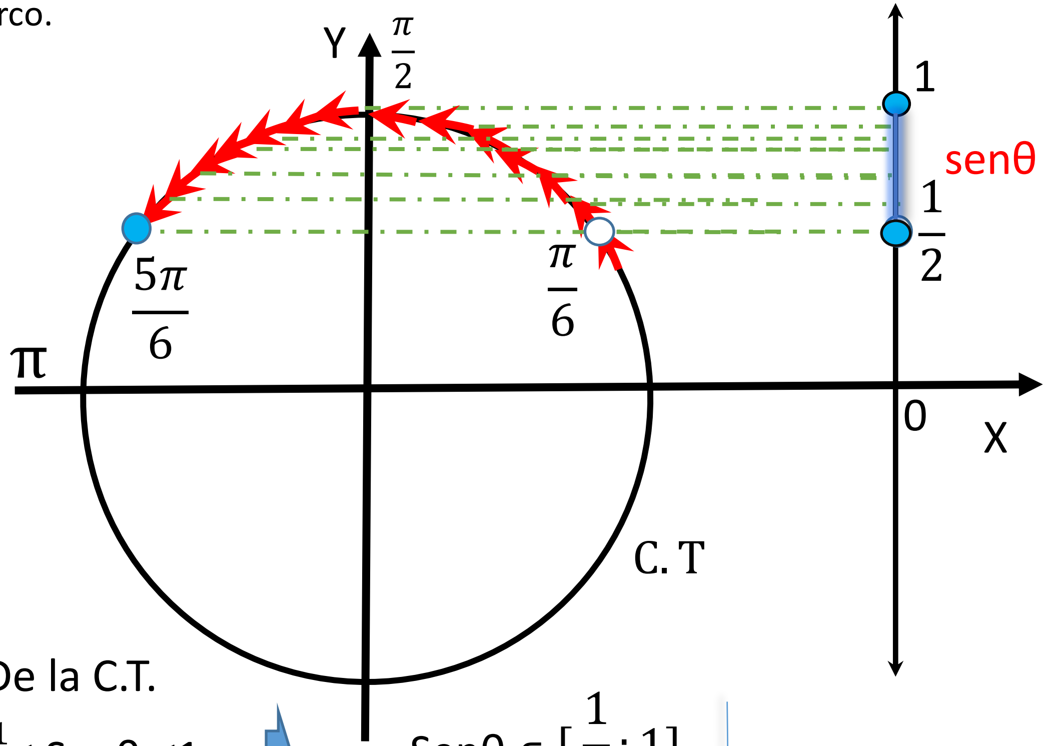
EJEMPLO 3

Si $\theta \in < \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$, Halle la variación del senθ

A) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ B) $[\frac{1}{2}; 1]$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ D) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$

Resolución

Graficamos los arcos en la C.T. y proyectamos los extremos de cada arco.



De la C.T.

$\frac{1}{2} \leq$ Sen$\theta \leq 1$ ⇒ Sen$\theta \in [\frac{1}{2}; 1]$

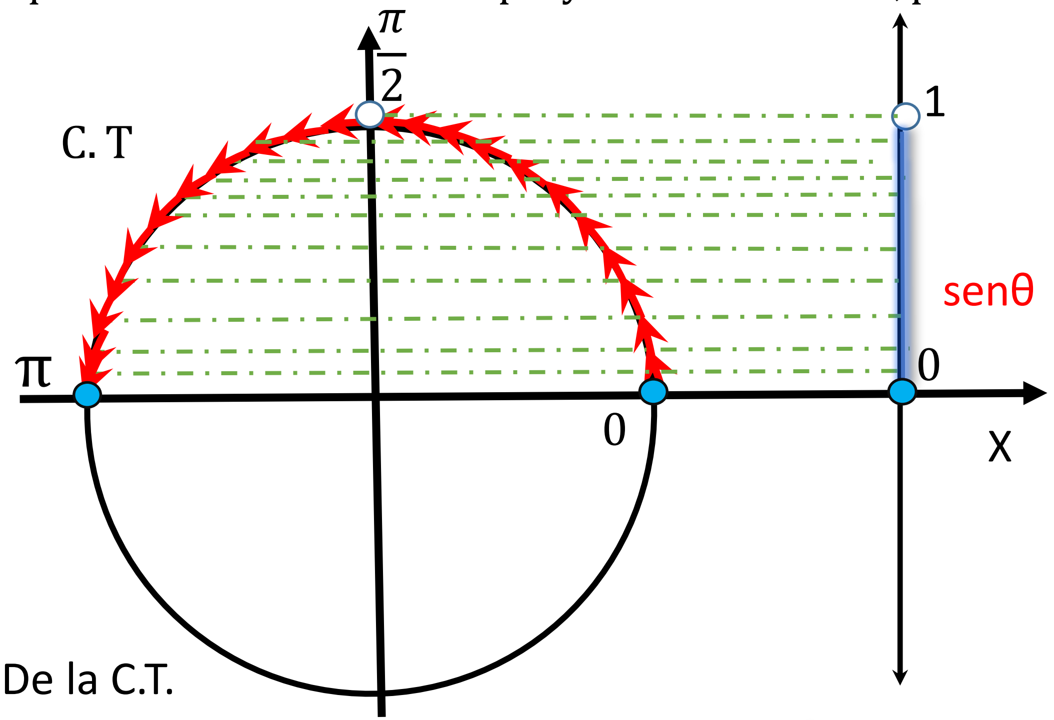
EJEMPLO 4

Si sen$\theta \in [0;1>$, Halle la variación del θ, tal que $\theta \in [0;2\pi]$

A) $< \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$ B) $< \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$ C) $< \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$ D) $[0; \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

Resolución

Aqui los valores del seno se proyectan sobre la CT, para ubicar los arcos



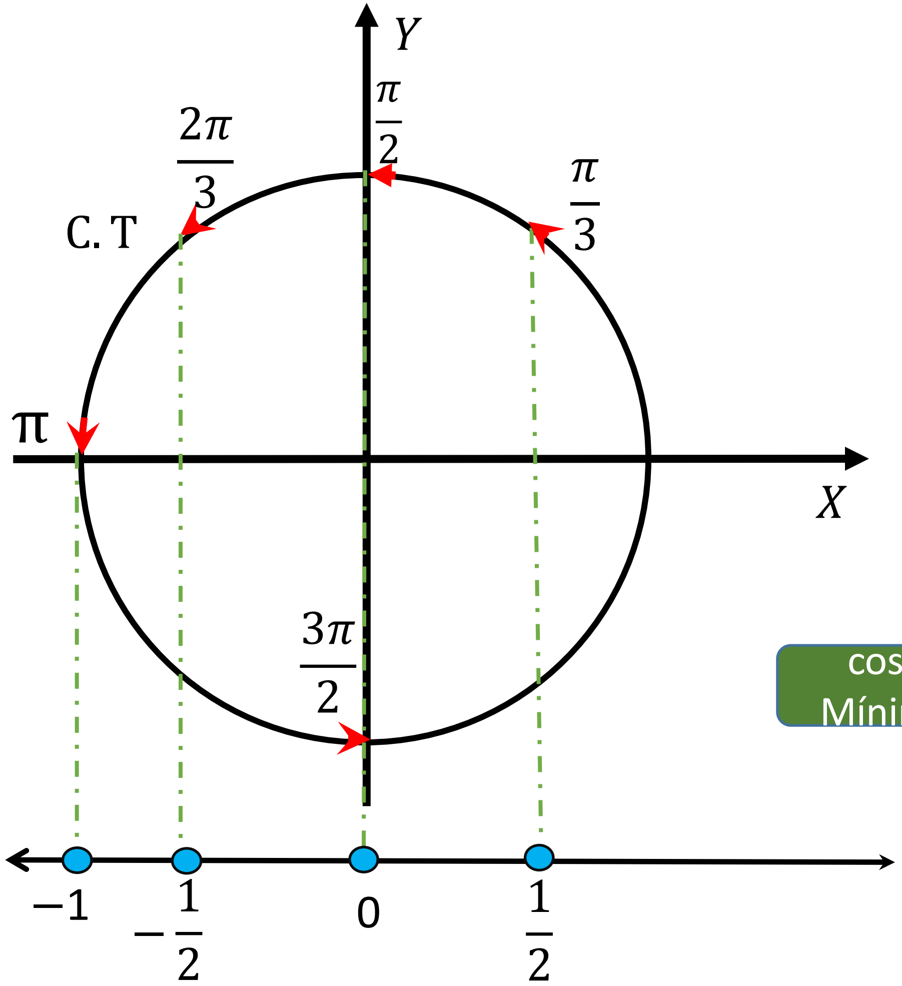
De la C.T.

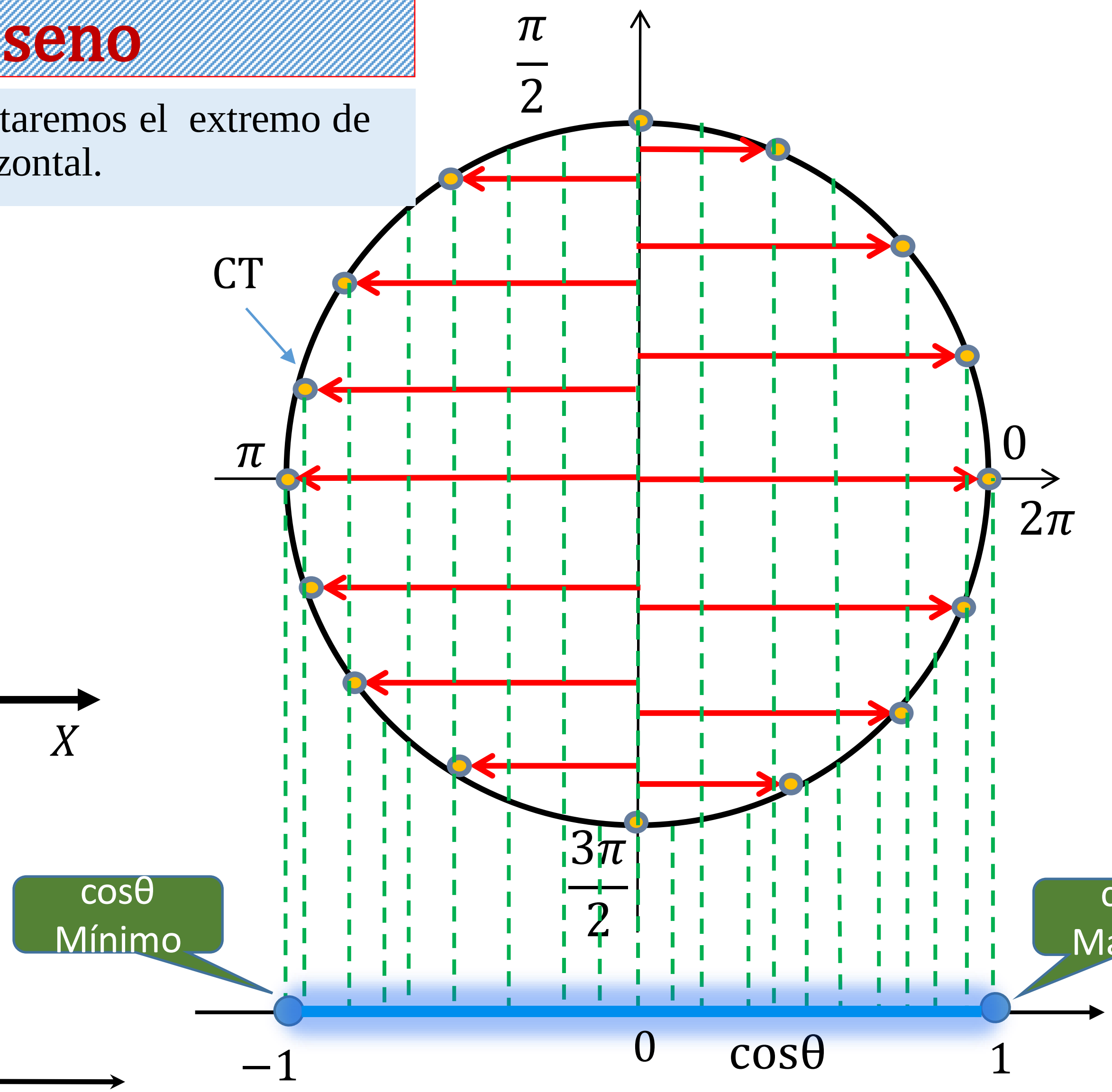
$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ ⇒ $\theta \in [0; \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

VARIACIÓN DEL COSENO

Variación del coseno

Para estudiar la variación del coseno proyectaremos el extremo de cada arco sobre una recta numerica real horizontal.





EN LOS CUADRANTES

IC	$0 < \cos\theta < 1$
IIC	$-1 < \cos\theta < 0$
IIIC	$-1 < \cos\theta < 0$
IVC	$0 < \cos\theta < 1$

En la C.T

Si $\theta \in \mathbb{R}$

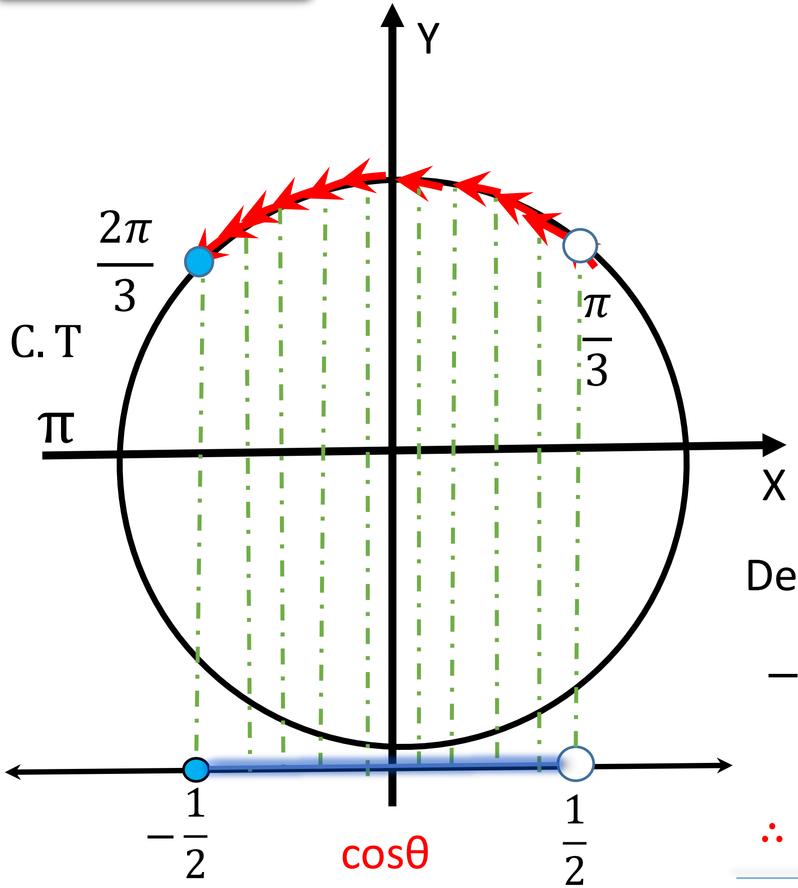
$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

EJEMPLO 3

Si $\theta \in \langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$, Halle la variación del $\cos\theta$

A) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ B) $[\frac{1}{2}; 1]$ C) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$ D) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$

Resolución



De la C.T.

$-\frac{1}{2} \leq \cos\theta < \frac{1}{2}$

$\therefore \cos\theta \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$

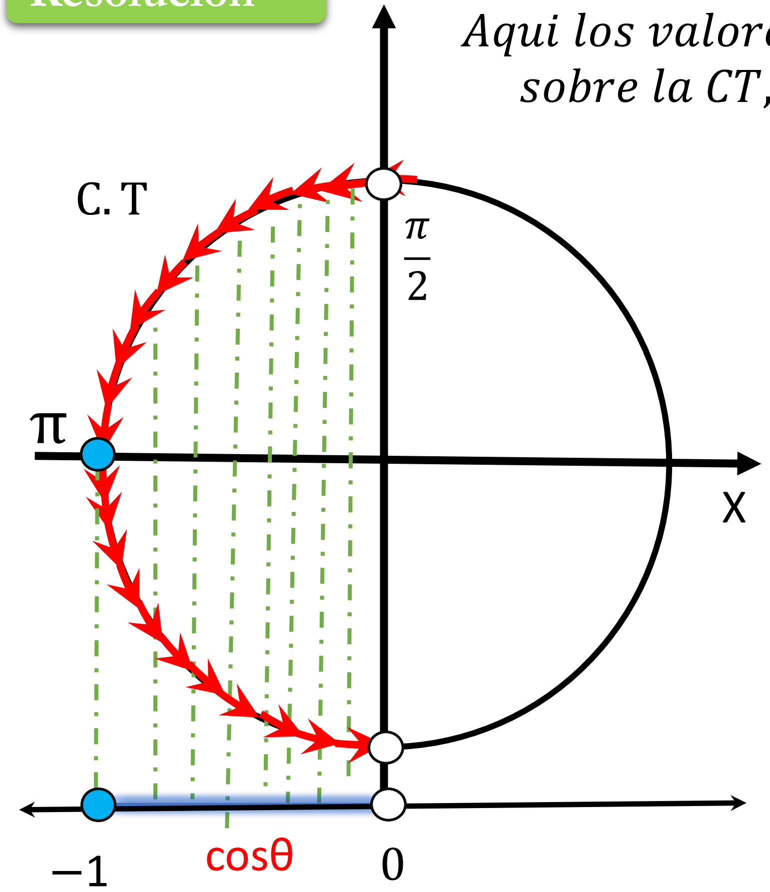
EJEMPLO 4

Si $\cos\theta \in [-1;0\rangle$, Halle la variación del θ, tal que $\theta \in \langle 0;2\pi\rangle$

A) $\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$ B) $\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$ C) $\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$ D) $\langle 0; \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

Resolución

Aqui los valores del seno se proyectan sobre la CT, para ubicar los arcos



De la C.T.

$\frac{\pi}{2} < \theta < 3\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta \in \langle \frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2} \rangle$

PROBLEMA EXAMEN-UNI 2008- II

Para $\alpha \in [\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}>$, calcule la variación de $M = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}\alpha + 1$.

A) $[\frac{3}{4};\frac{7}{4}>$,

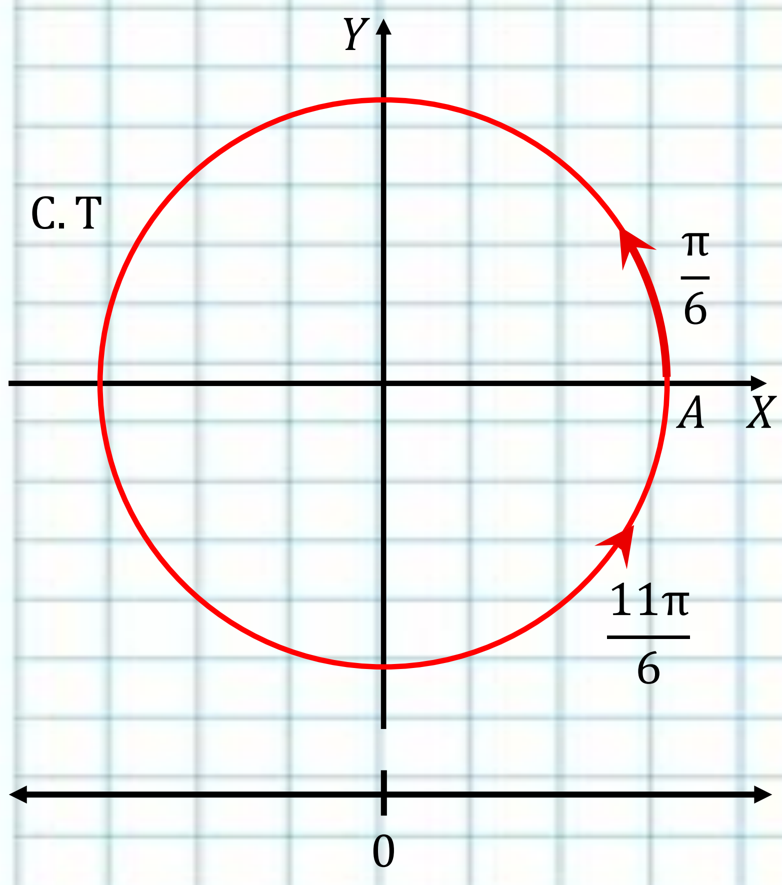
B)) $[\frac{3}{4};\frac{7}{4}]$

C) $<\frac{3}{4};3]$

D) $[\frac{3}{4};3>$

E) $[\frac{3}{4};3]$

RESOLUCIÓN



DESAFIO

Para $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$, calcule la variación de $M = \cos^2\alpha + 2$.

A) $\left[\frac{3}{4};\frac{7}{4}\right]$

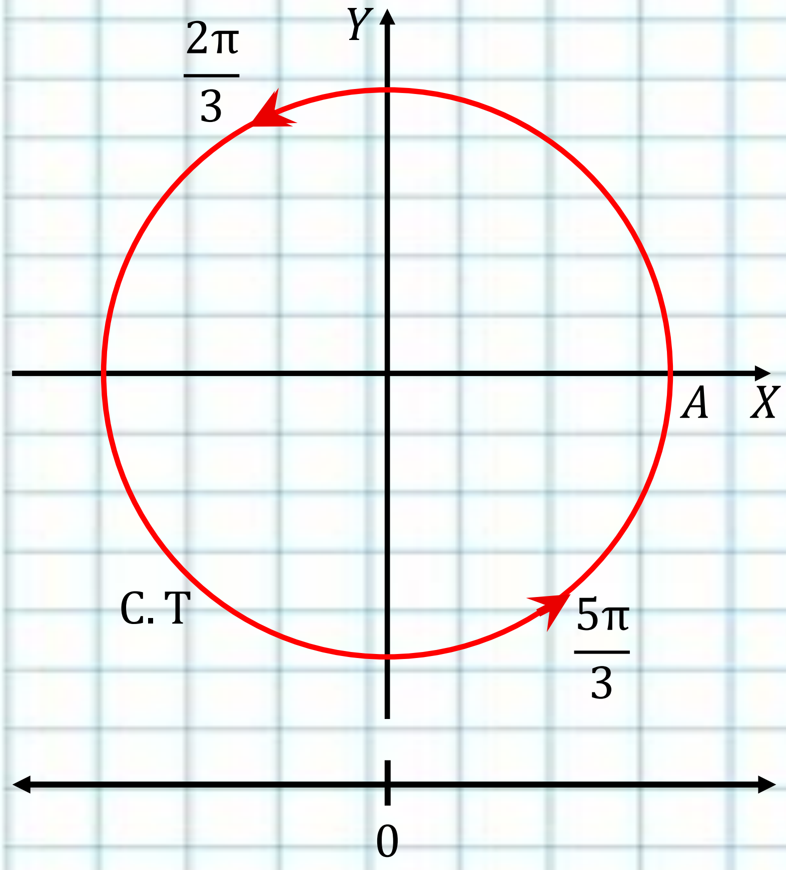
B) $[2;3]$

C) $\left[\frac{7}{4};4\right]$

D) $\left[\frac{9}{4};4\right]$

E) $\left[\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right]$

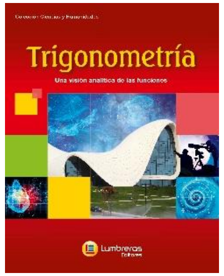
RESOLUCIÓN



Bibliografía

- Lumbreras Editores. (2017). Temas Selectos “Identidades trigonométricas” , Lima , Perú

- Lumbreras Editores. (2018). Trigonometría, Una visión analítica de las funciones , Lima , Perú



- Lumbreras Editores. (2016). Trigonometría Esencial , Lima , Perú

- PIXABAY. (2020). pixabay.com, Imágenes libres de derecho de autor , Lima , Perú
- Juan Carlos Sandoval Peña . (1981). Trigonometría Moderna , 631 pag , Lima , Perú