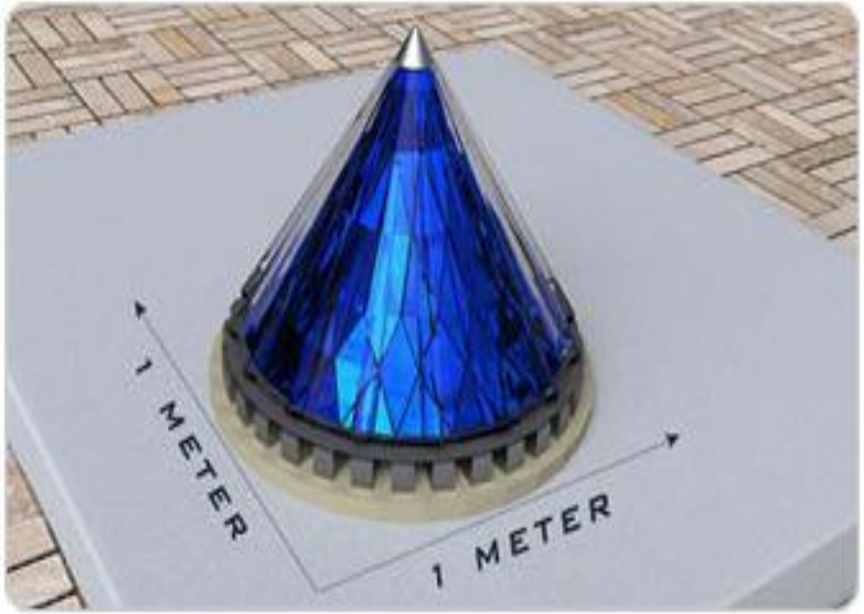
OBJETIVOS:

- *Conocer la definición y características de una superficie cónica.*
- *Calcular la superficie y volumen de un cono de revolución.*
- *Conocer la definición y características del tronco de cono, como los cálculos respectivos de área y volumen.*
- *Aplicar lo aprendido en los problemas tipo examen de admisión.*

ENERGIA LIMPIA

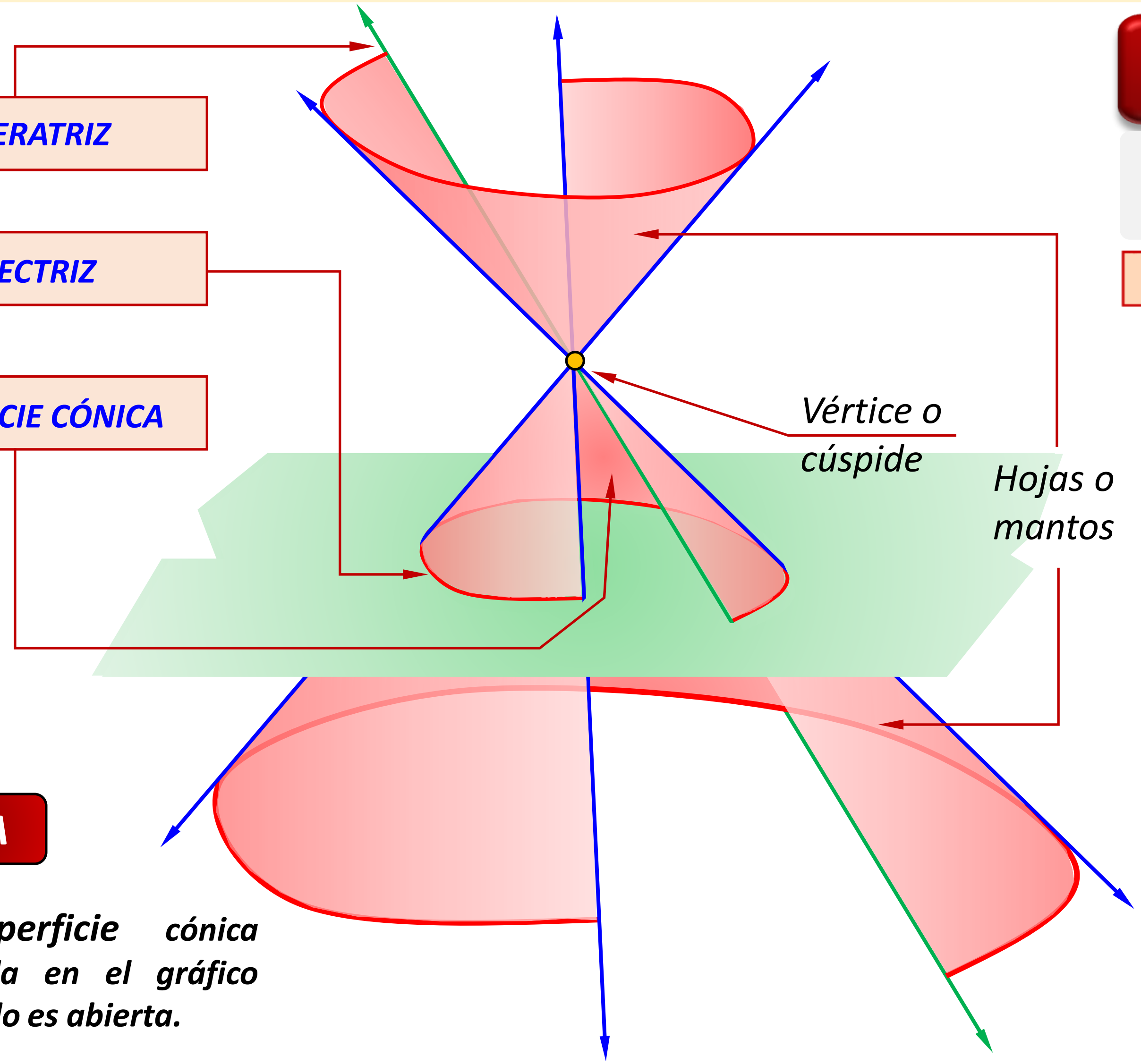
El Perú es uno de los países más vulnerables frente al cambio climático, mientras se siga emitiendo gases de efecto invernadero por la combustión fósil para generar energía, la afectación climática será mayor, por eso es necesario diversificar las fuentes de energías renovables no convencionales, conocidas como "limpias", por ejemplo los paneles solares.

Otra alternativa son el ***"cono solar giratorio"*** de un 1m de diámetro y un ángulo de inclinación de 56° capaz de captar energía solar a distintas horas del día, por la forma cónica que presenta lo cual lo hace 20 veces más efectivo que los paneles solares estáticos. "La temperatura alcanza rápidamente 260 grados F, a diferencia de la temperatura 90 grados F tradicional".



SUPERFICIE CÓNICA

Es la superficie generada, cuando una línea recta, denominada generatriz, recorre todos los puntos de una línea curva plana no secante a si misma, denominada directriz, pasando siempre por un punto fijo exterior al plano de la directriz y conocido como vértice o cúspide.



NOTA

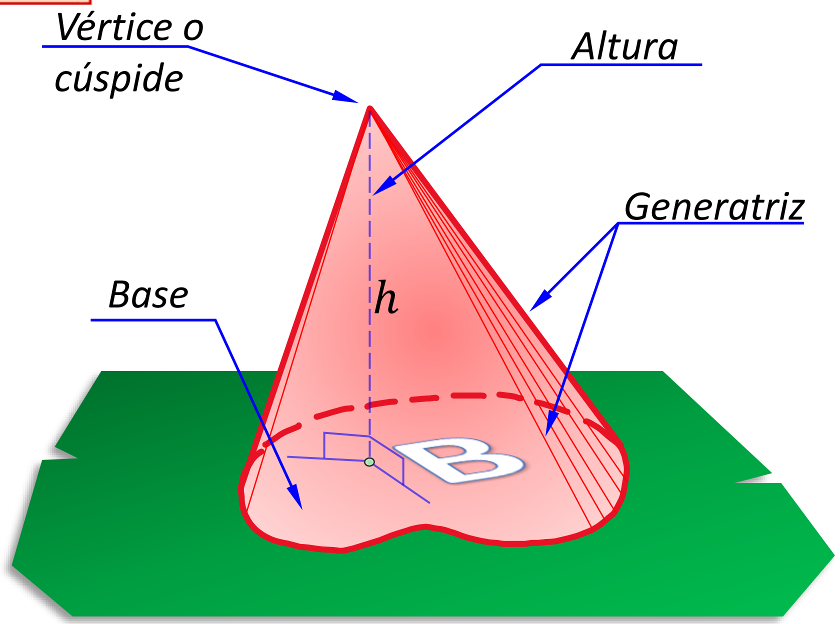
La superficie cónica generada en el gráfico mostrado es abierta.

CONO

DEFINICIÓN

Es el sólido geométrico que se encuentra limitado por una superficie cónica cerrada y un plano secante a dicha superficie que no contenga al vértice.

ELEMENTOS



Para todo cono, el volumen se calcula como:

$$\mathbb{V}_{cono} = \frac{(\boldsymbol{B})(h)}{3}$$

CLASIFICACIÓN DEL CONO

CLASIFICACIÓN

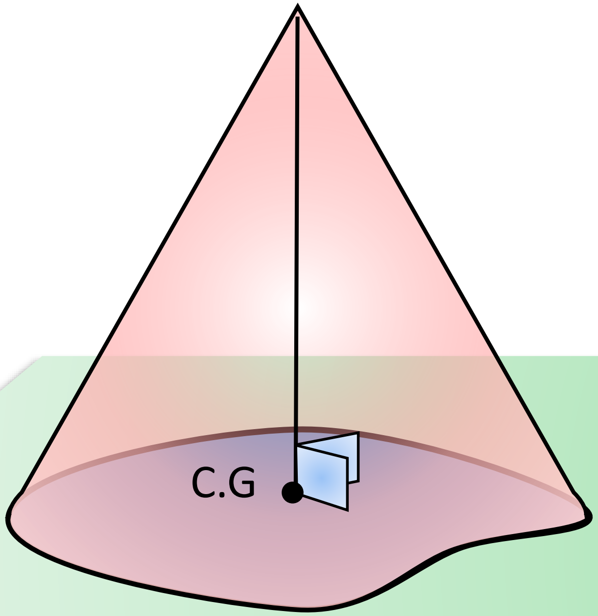
CONO RECTO

Es aquel cono en el cual su altura llega al centro de gravedad de su base

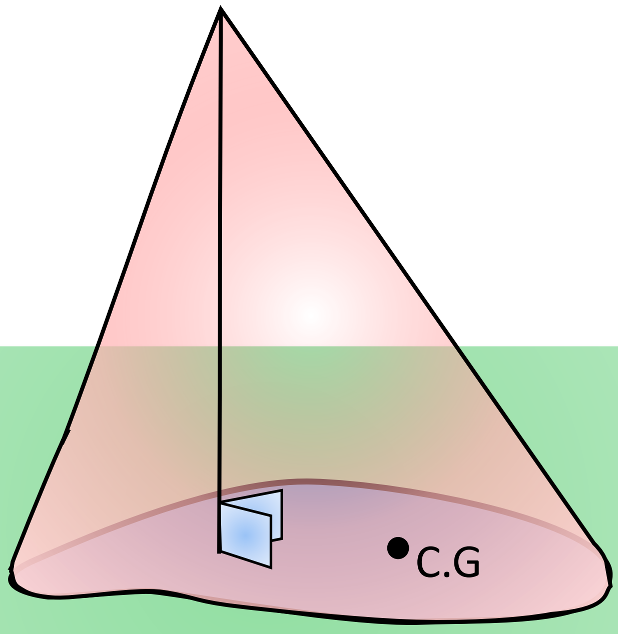
CONO OBLICUO

La altura no debe llegar al centro de gravedad de su base.

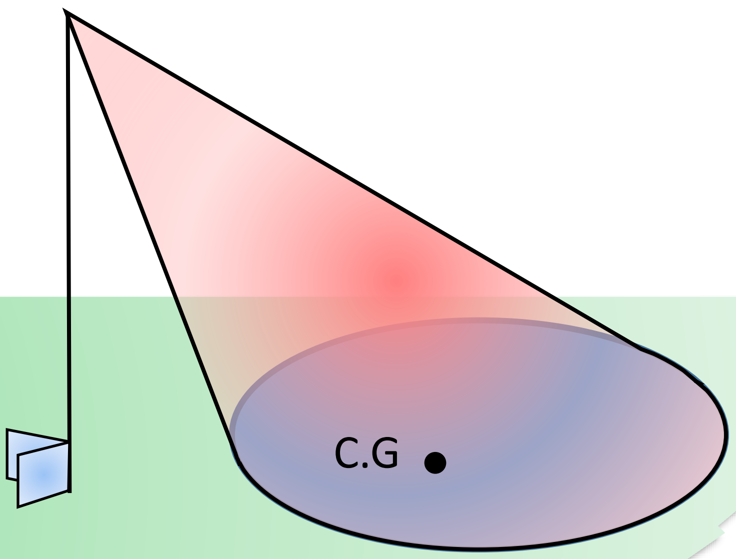
La altura de un cono puede ubicarse incluso en su zona exterior.



C.G. Centro de gravedad de la base



C.G. Centro de gravedad de la base



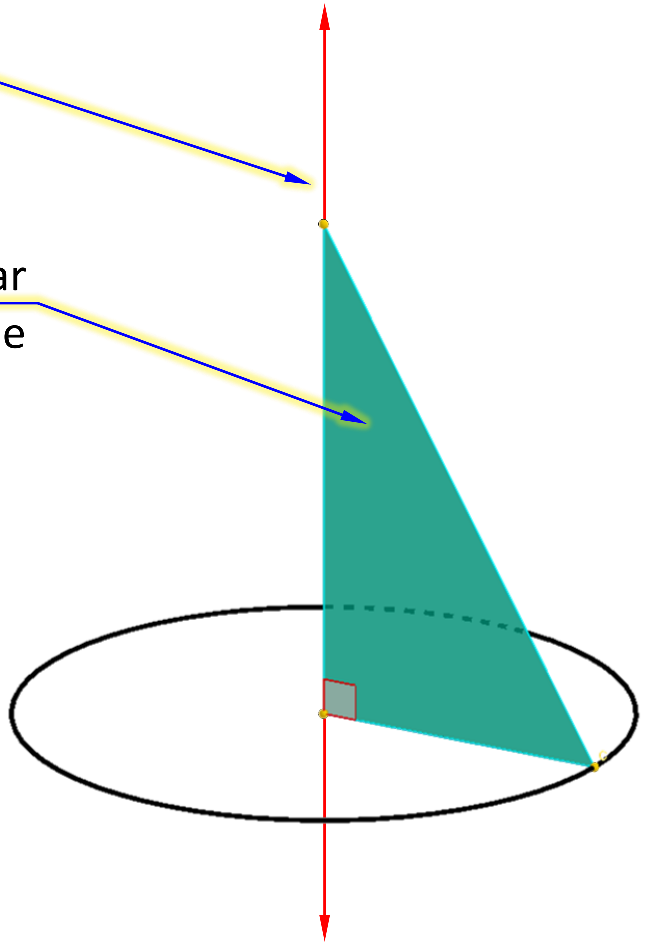
C.G. Centro de gravedad de la base

CONO DE REVOLUCIÓN

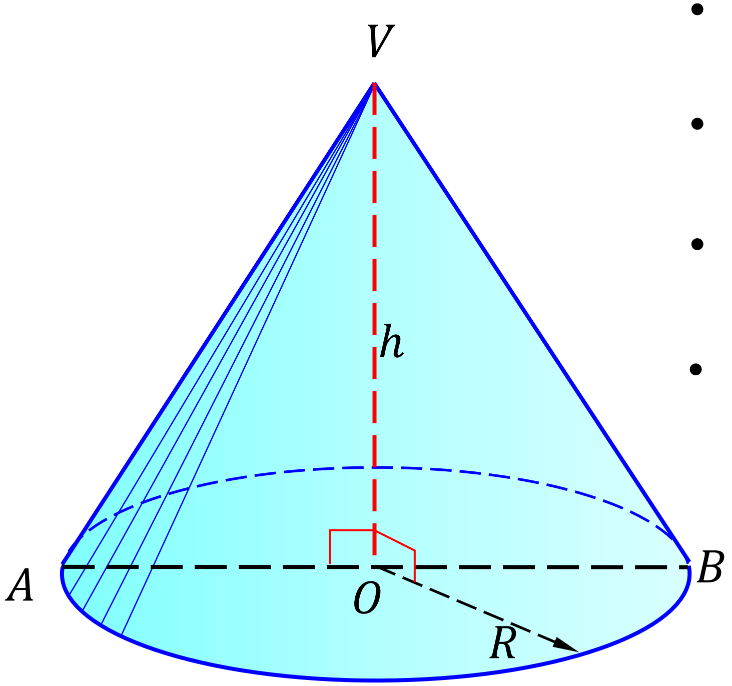
Eje de giro

Región triangular rectangular que generará al cono

Ésta debe de girar 360° en torno al eje de giro



Cono de revolución o cono circular recto



Del gráfico:

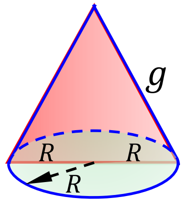
- O centro de la base.
- $\overline{VO}$ es el eje del cilindro.
- AVB es la sección axial.
- $\overline{AV}$ y $\overline{VB}$ son generatrices diametralmente opuestas

Volumen

$$\mathbb{V} = \frac{(\boldsymbol{\pi R^2})(\boldsymbol{h})}{3}$$

NOTA

Si la sección axial de un cono de revolución es una región triangular equilátera, a dicho cono se le denomina equilátero.



$$g = 2R$$

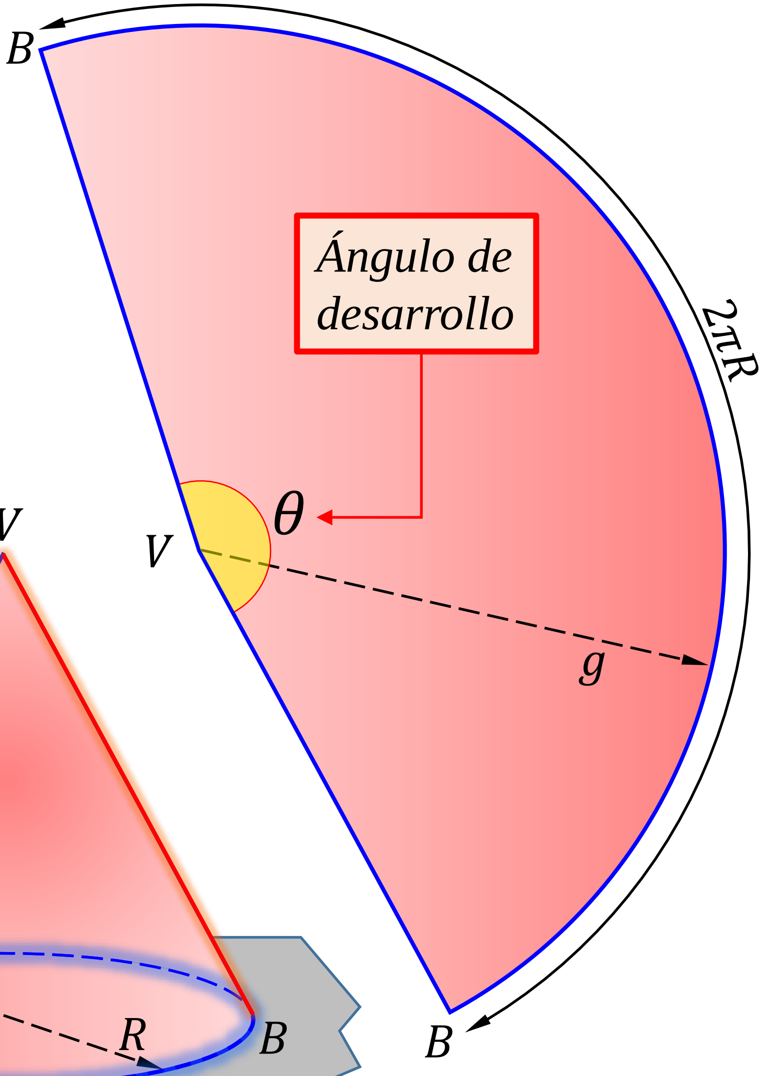
CURSO DE GEOMETRÍA

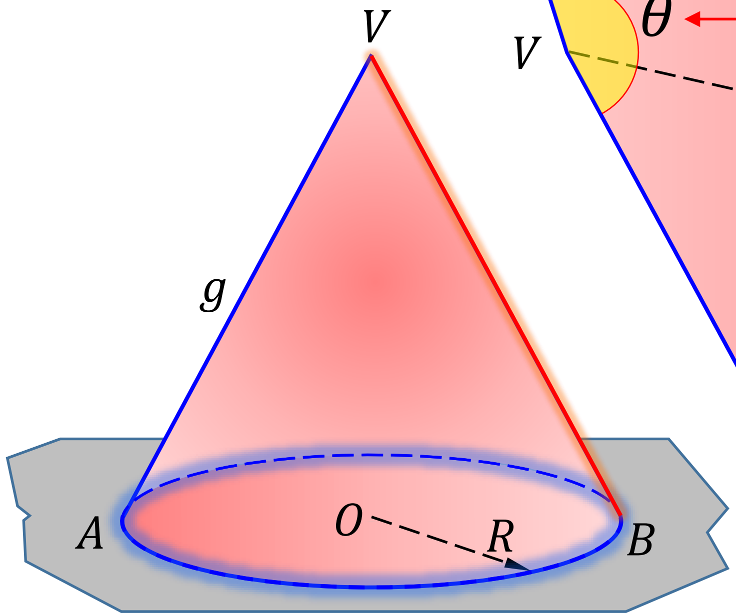
CONO DE REVOLUCIÓN

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL

Desarrollar la superficie lateral de un cono de revolución (Cono circular recto) es aplicar su superficie sobre un plano, si esto se realiza separando una generatriz, entonces el desarrollo será un sector circular.

- ❑ La generatriz del cono, en el desarrollo viene a ser el radio del sector.
- ❑ El perímetro de la base del cono $2\pi R$ será la longitud del arco del sector.





DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL

Se cumple:

❑ Área de la superficie lateral

$$\mathbb{A}_{S.L} = \mathbb{A}_{sector\ circular}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{S.L} = \boldsymbol{\pi R g}}$$

❑ Área de la superficie total

$$\mathbb{A}_{S.T} = \underbrace{\mathbb{A}_{S.L}}_{\pi R g} + \underbrace{\mathbb{A}_{base}}_{\pi R^2}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{S.T} = \boldsymbol{\pi R(g + R)}}$$

❑ Cálculo de la medida del ángulo de desarrollo

$$\boxed{\theta = 360° \left(\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{g}}\right)}$$

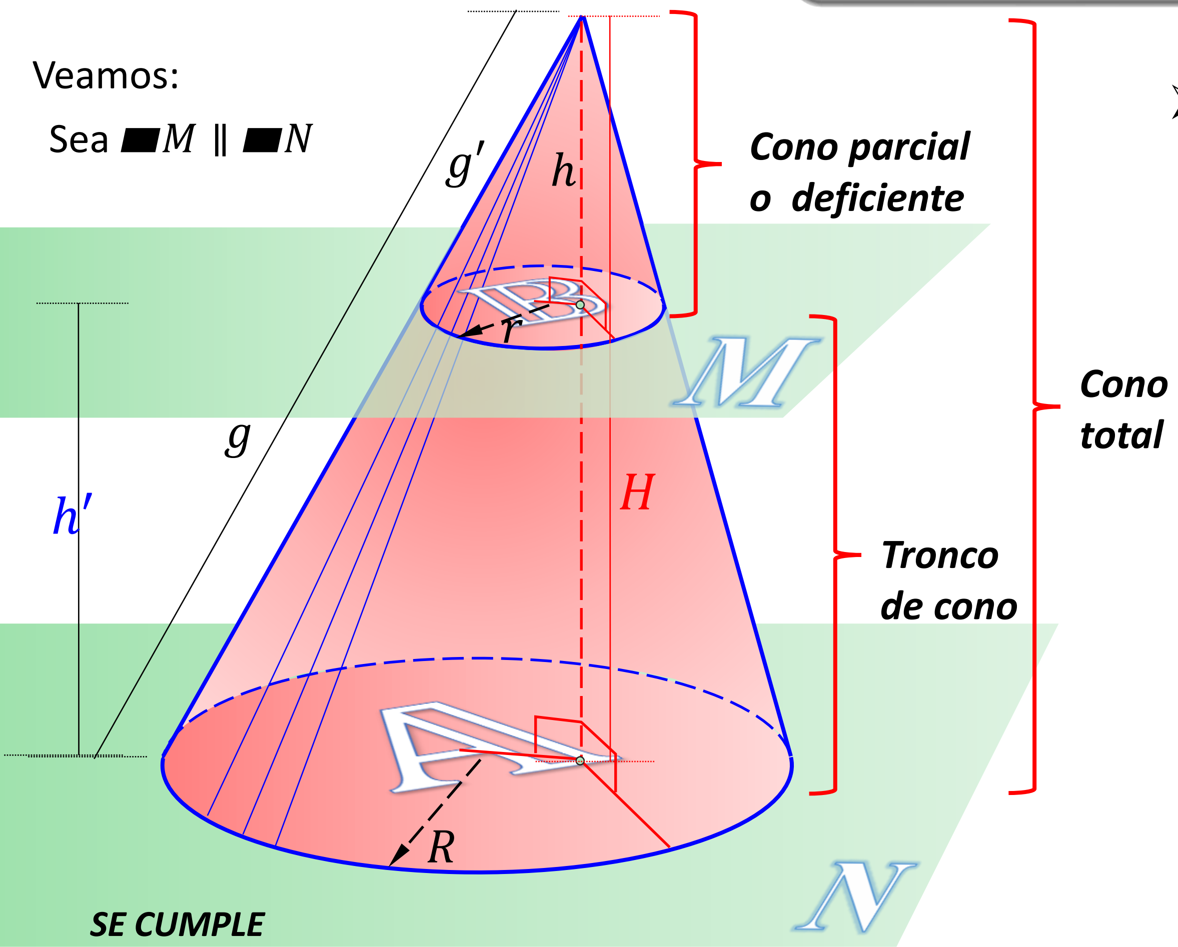
NOTA: EN EL CONO EQUILÁTERO

La medida del ángulo de desarrollo es 180°, entonces el desarrollo de su superficie lateral es un semicírculo.

CONOS SEMEJANTES

Veamos:

Sea $\blacksquare M \parallel \blacksquare N$



SE CUMPLE

- ❑ **RAZÓN DE LÍNEAS:** $\dfrac{g'}{g} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H} = \cdots$
- ❑ **RAZÓN DE ÁREAS:** $\dfrac{\mathbb{B}}{\mathbb{A}} = \left(\dfrac{g'}{g}\right)^2 = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2 = \cdots$
- ❑ **RAZÓN DE VOLÚMENES:** $\dfrac{\mathbb{V}_{V-LPQS}}{\mathbb{V}_{V-ABCD}} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^3 = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3 = \cdots$

➢ Para el tronco de cono, el volumen se calcula:

$$\boxed{\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de}\\ \text{cono}}} = \frac{h'}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)}$$

Comprobación:

- Notamos:

$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\\ de\ cono}} = \underbrace{\mathbb{V}_{cono\ total}}_{\frac{\mathbb{A}(h+h')}{3}} - \underbrace{\mathbb{V}_{cono\ parcial}}_{\frac{\mathbb{B}(h)}{3}}$$

$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\\ de\ cono}} = \frac{\mathbb{A}h'}{3} + \frac{h}{3}(\mathbb{A} - \mathbb{B}) \quad \ldots(i)$$

- Por conos semejantes: $\dfrac{\mathbb{B}}{\mathbb{A}} = \left(\dfrac{h}{h+h'}\right)^2 \rightarrow h = \dfrac{\sqrt{\mathbb{B}}h'}{\left(\sqrt{\mathbb{A}} - \sqrt{\mathbb{B}}\right)}$

- Reemplazamos en (i): $\mathbb{V}_{\substack{tronco\\ de\ cono}} = \dfrac{\mathbb{A}h'}{3} + \dfrac{\sqrt{\mathbb{B}}h'}{3\left(\sqrt{\mathbb{A}} - \sqrt{\mathbb{B}}\right)}(\mathbb{A} - \mathbb{B}) \quad \ldots(ii)$

- Pero: $(\mathbb{A} - \mathbb{B}) = \left(\sqrt{\mathbb{A}} - \sqrt{\mathbb{B}}\right)\left(\sqrt{\mathbb{A}} + \sqrt{\mathbb{B}}\right)$

- Reemplazamos en (ii):

$$\therefore \mathbb{V}_{\substack{tronco\\ de\ cono}} = \frac{h'}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)$$

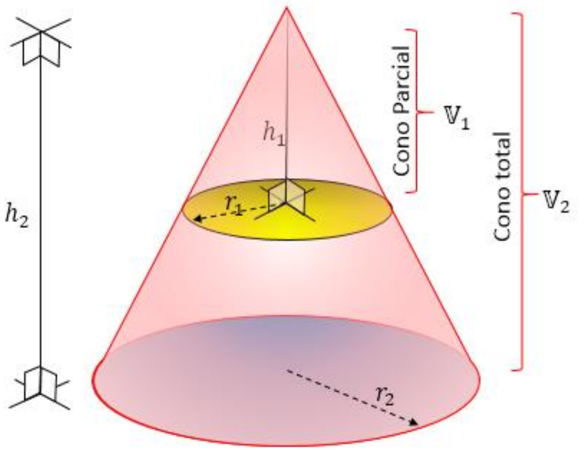
CONO DE REVOLUCIÓN

EXAMEN UNI $2019 - II$

Un cilindro de revolución está inscrito en un cono de revolución, de modo que una de las bases del cilindro está sobre la base del cono. Si el volumen del cono es $18m^3$, calcule el volumen del cono parcial determinado (en m^3), sabiendo que el volumen del cilindro es 3/7 del volumen del tronco de cono.

$A)\ 3/4$ $B)\ 5/4$ $C)\ 7/4$

$D)\ 9/4$ $E)\ 11/4$

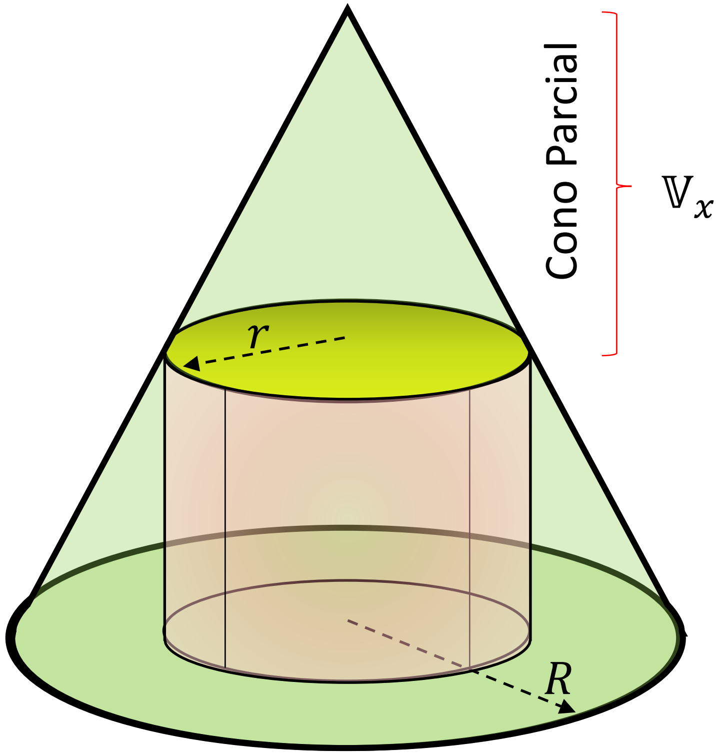


$$\frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} = \frac{r_1{}^3}{r_2{}^3}$$

Resolución:

Piden $\mathbb{V}_X$= Volumen del cono parcial

$\mathbb{V}_{Cono\ Total}= 18m^3$



De la semejanza de los conos:

$$\frac{\mathbb{V}_x}{\mathbb{V}_{cono\ total}} = \frac{r^3}{(2r)^3} \quad \rightarrow \frac{\mathbb{V}_x}{18} = \frac{1}{8}$$

Dato:

$$\mathbb{V}_{Cilindro} = \frac{3}{7}\mathbb{V}_{Tronco\ de\ cono}$$

Reemplazando las formulas:

$$\cancel{\pi} r^2 \cancel{h} = \frac{\cancel{3}}{7}\frac{\cancel{h\pi}}{\cancel{3}}(r^2 + R^2 + Rr)$$

$$7r^2 = R^2 + r^2 + Rr$$

Resolvemos la cuadrática:

$$R^2 + Rr - 6r^2 = 0$$

$$\begin{array}{ll} R & 3r \\ R & -2r \end{array}$$

➡ $R = 2r$

$\therefore \mathbb{V}_X = 9/4$

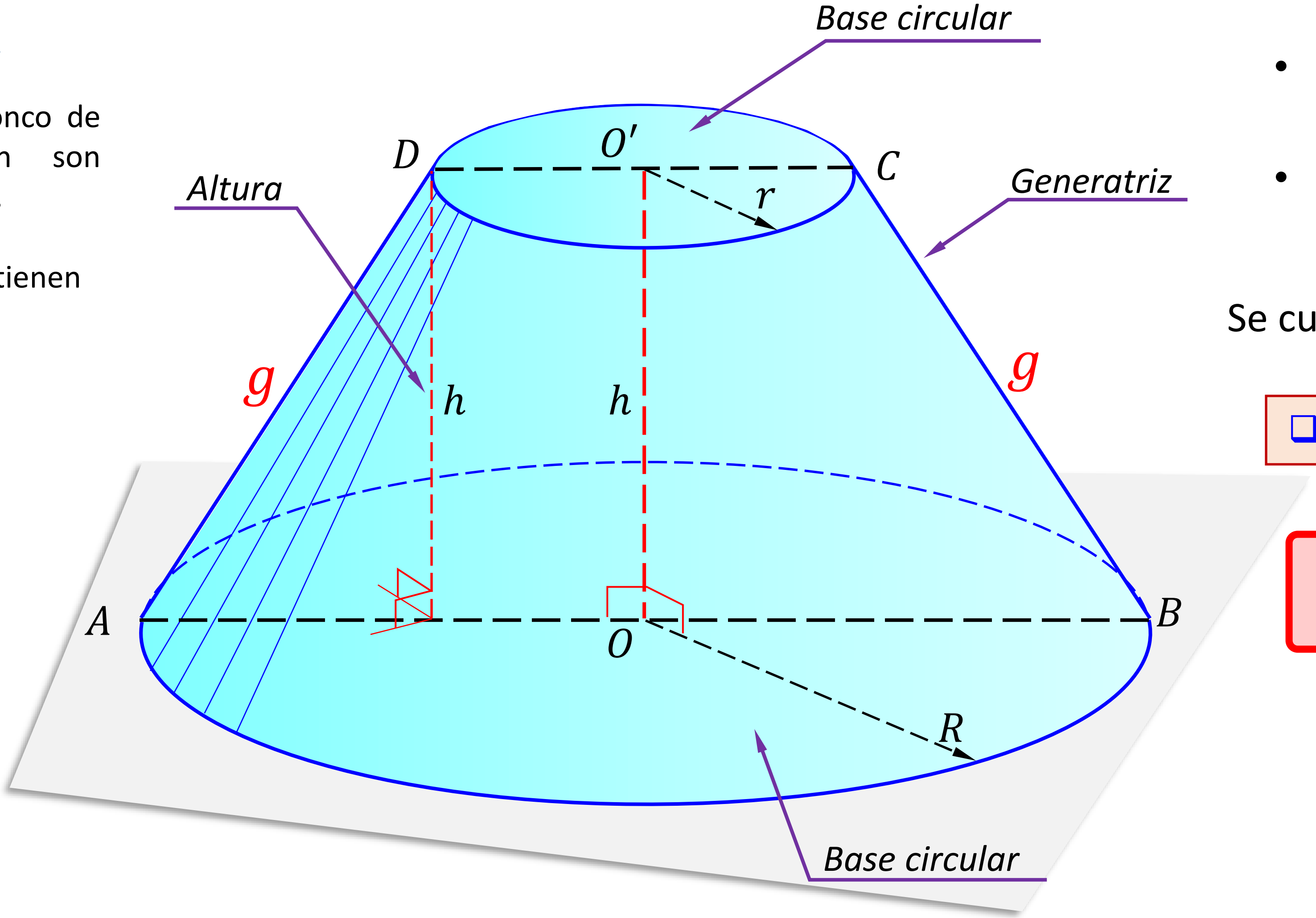
Clave D

TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

Es aquel tronco de cono generado a partir de un cono de revolución.

características

- Las bases en todo tronco de cono de revolución son paralelas y semejantes.
- Todas las generatrices tienen la misma longitud.



Del gráfico:

- O y O': Centros de las bases
- $ABCD$: Sección axial

Se cumple:

❑ ***Volumen***

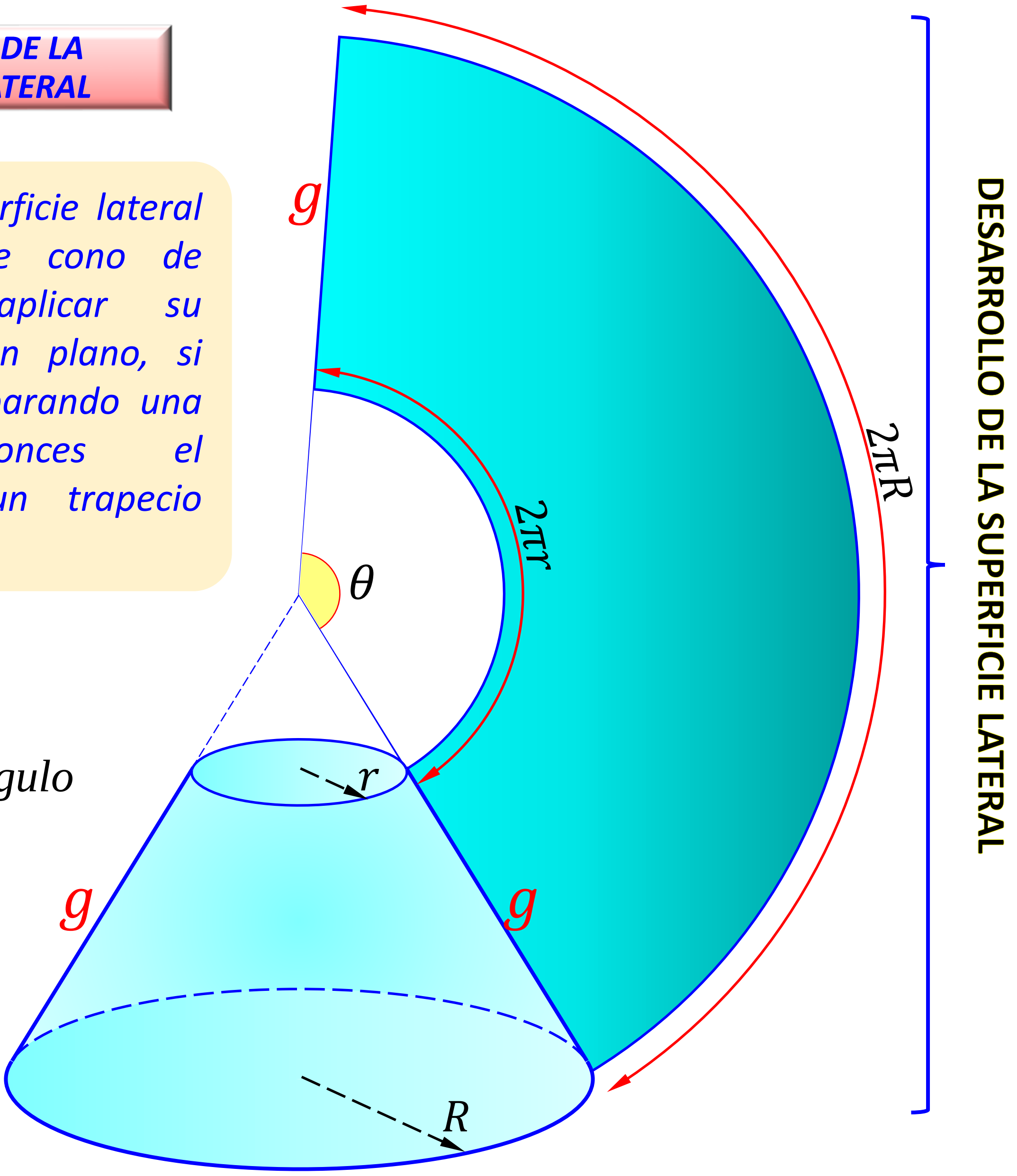
$$\therefore \mathbb{V}_{\substack{\textbf{tronco}\\ \textbf{de cono}}} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$$

CURSO DE GEOMETRÍA

TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL

Desarrollar la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es aplicar su superficie sobre un plano, si esto se realiza separando una generatriz, entonces el desarrollo será un trapecio circular.



Del gráfico:

θ: *Medida del ángulo de desarrollo*

Se cumple:

- ***Área de la superficie lateral***

$$\mathbb{A}_{S.L} = \mathbb{A}_{trapecio\ circular}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{S.L} = \pi(R+r)g}$$

- ***Área de la superficie total***

$$\mathbb{A}_{S.T} = \underbrace{\mathbb{A}_{S.L}}_{\pi(R+r)g} + \underbrace{\mathbb{A}_{base\ 1}}_{\pi R^2} + \underbrace{\mathbb{A}_{base\ 2}}_{\pi r^2}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{S.T} = \pi(R+r)g + \pi(R^2+r^2)}$$

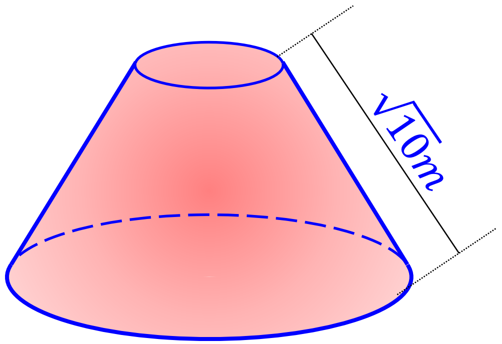
- ***Cálculo de la medida del ángulo de desarrollo***

$$\boxed{\theta = 360^\circ\left(\frac{R-r}{g}\right)}$$

TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

EXAMEN UNI **2015 – I**

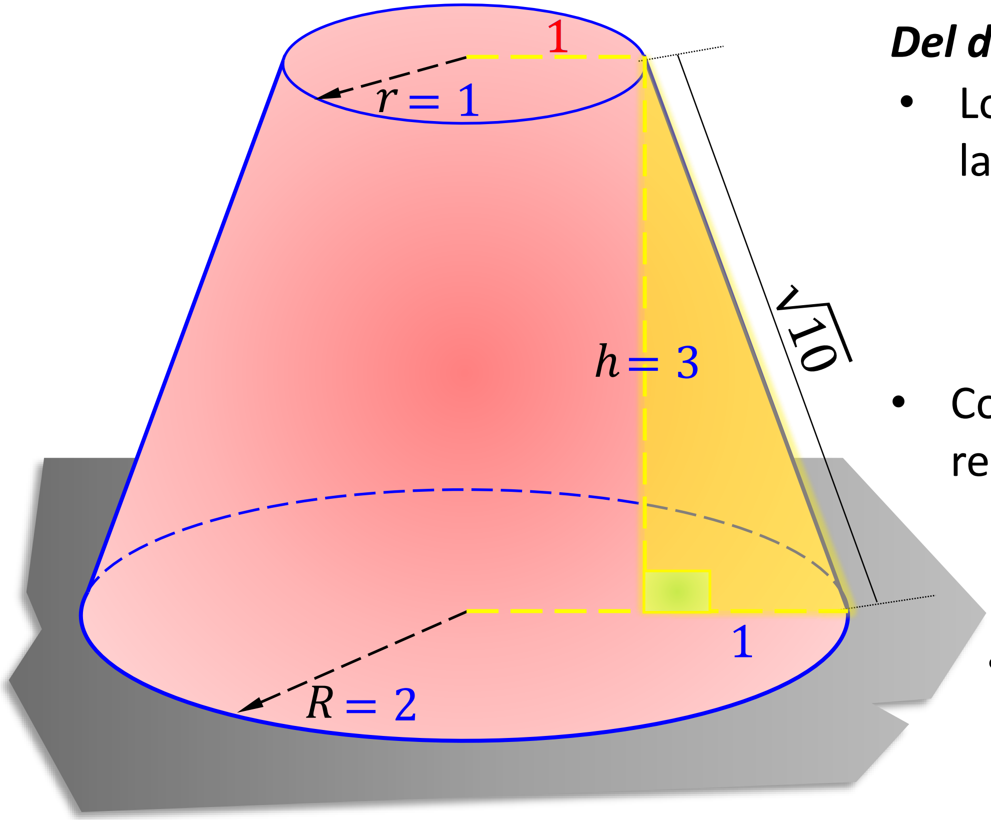
En la panamericana cerca de Casma se ha formado una duna en forma de tronco de cono de revolución. Las longitudes de las circunferencias son $4\pi m$ y $2\pi m$. Ver figura. Halle el volumen de la duna en metros cúbicos.



$A)\ 3\pi$ $B)\ 5\pi$ $C)\ 7\pi$

$D)\ 10\pi$ $E)\ 11\pi$

Resolución: Piden $\mathbb{V}_{TRONCO} = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R\cdot r)\ \ldots (i)$



Del dato:

- Longitudes de las circunferencias de las bases:

$$2\pi r = 2\pi \quad \rightarrow r = 1$$
$$2\pi R = 4\pi \quad \rightarrow R = 2$$

- Con ello en el triángulo rectángulo resaltado:

$$h^2 + 1^2 = \sqrt{10}^2$$
$$\rightarrow h = 3$$

- Reemplazamos en r, R, h en (i):

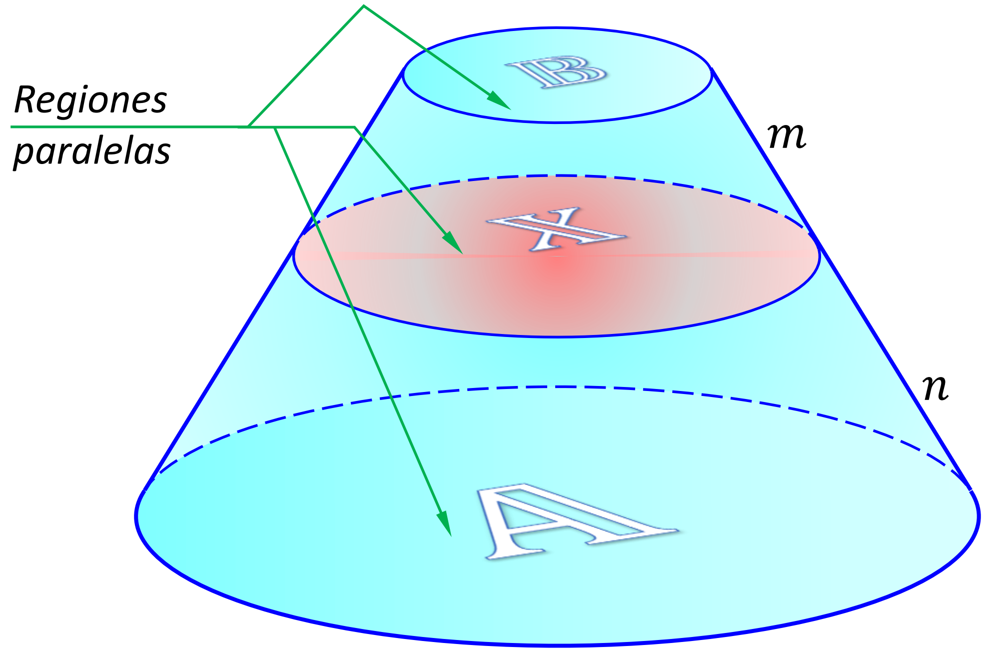
$$\mathbb{V}_{TRONCO} = \frac{\pi 3}{3}(2^2 + 1^2 + 2\cdot 1)$$

Clave **C**

$$\boxed{\therefore \mathbb{V}_{tronco} = 7\pi}$$

TEOREMAS ADICIONALES

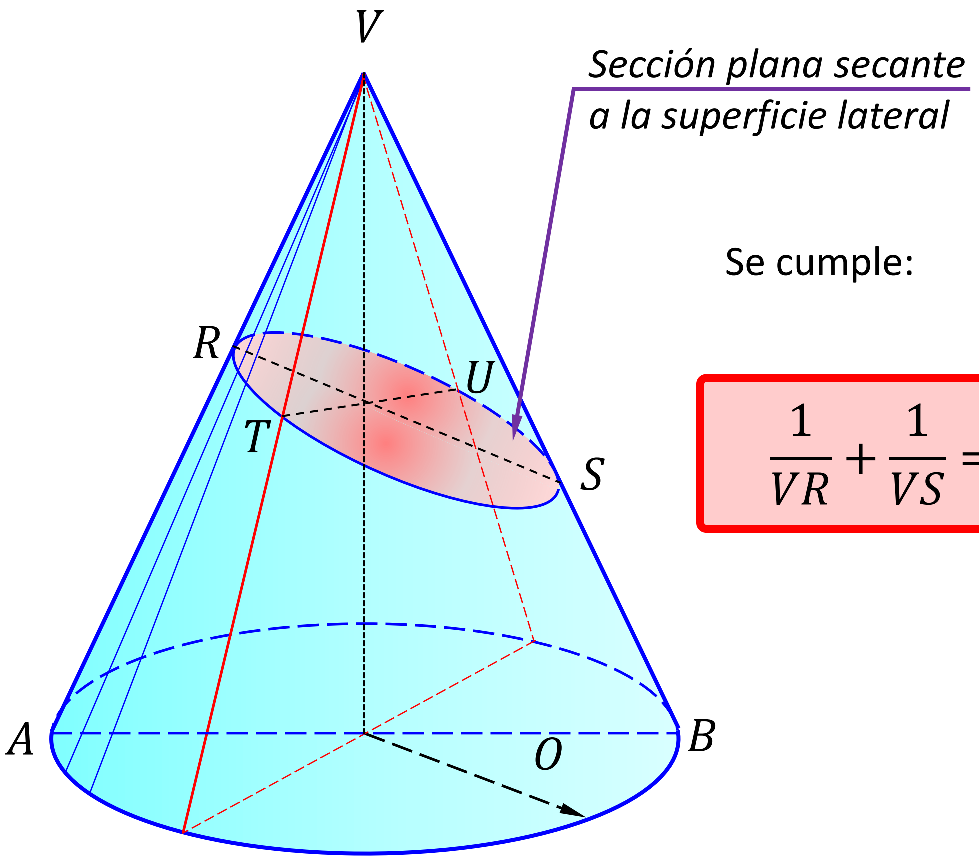
- Se muestra un tronco de cono



Se cumple:

$$\mathbb{X} = \left(\frac{\boldsymbol{m}\sqrt{\mathbb{A}} + \boldsymbol{n}\sqrt{\mathbb{B}}}{\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}}\right)^2$$

- Se muestra un cono de revolución



Se cumple:

$$\frac{1}{VR} + \frac{1}{VS} = \frac{1}{VT} + \frac{1}{VU}$$