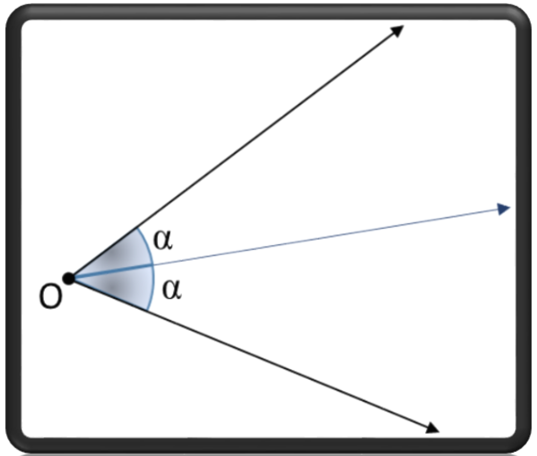
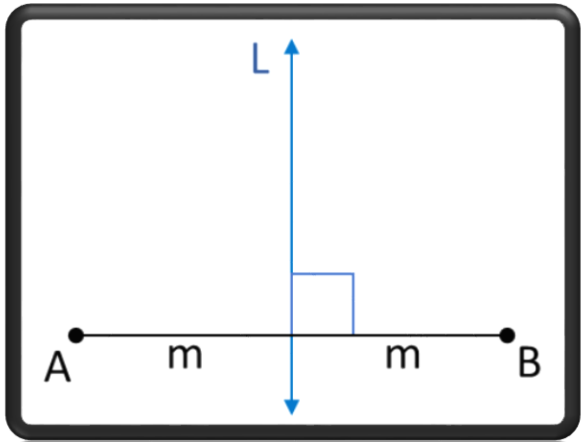
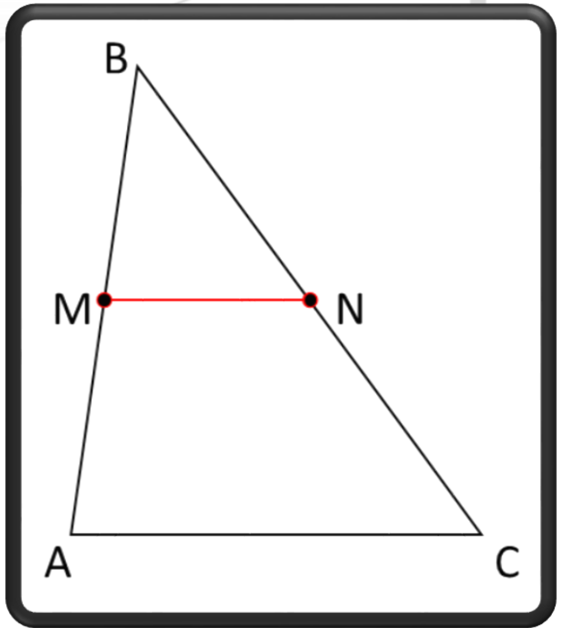
CURSO DE GEOMETRÍA

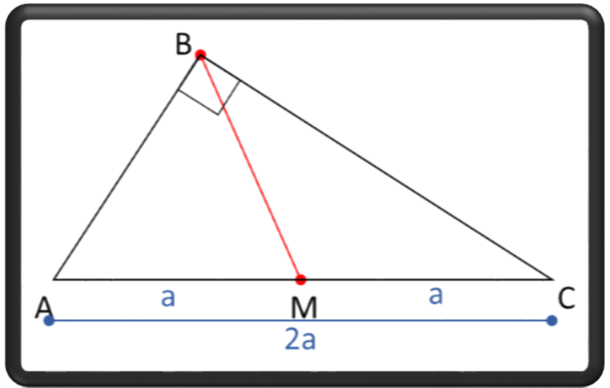
APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA.

- *TEOREMA DE LA BISECTRIZ*
- *TEOREMA DE MEDIATRIZ*
- *TEOREMA DE LA BASE MEDIA*
- *TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA*
- *TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES*





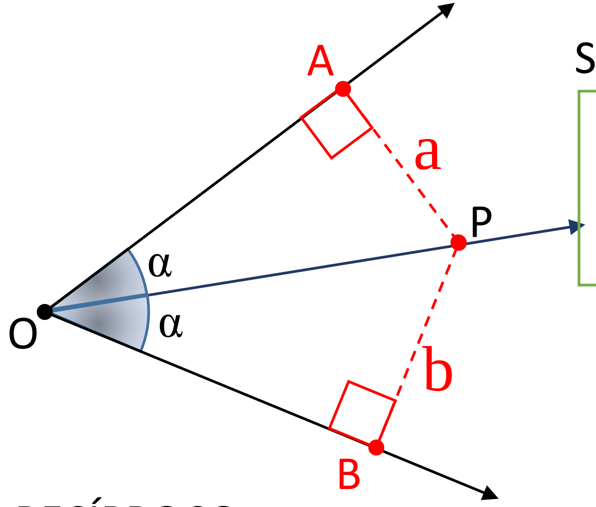




APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

TEOREMA DE LA BISECTRIZ:

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulos.



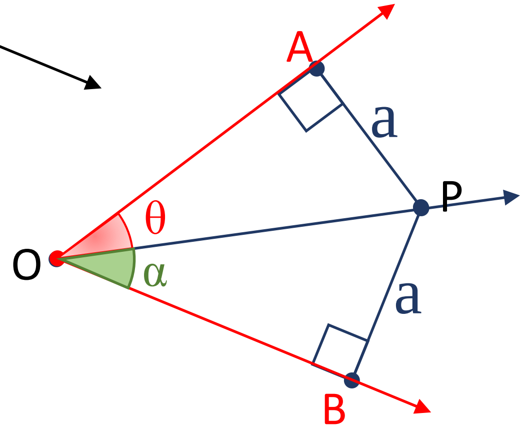
Si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz:

Se cumple:
a=b
OA=OB=m

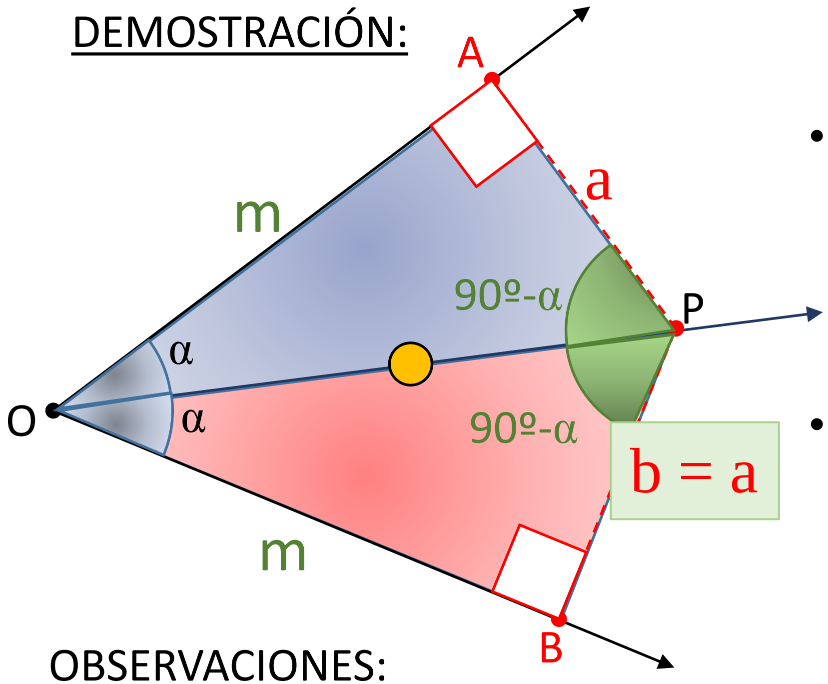
RECÍPROCO:

Si P equidista de los lados del ángulos:

θ = α



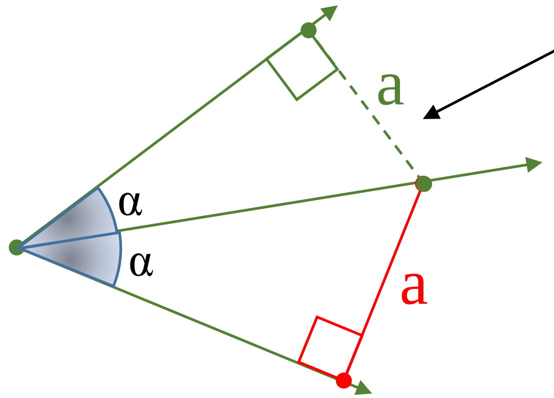
DEMOSTRACIÓN:



DEMOSTRAR QUE:
a = b

- En los triángulos rectángulos OAP y OBP, α es común y comparten la misma hipotenusa $\overline{OP}$:
  m<OPA = m<OPB = 90º-α
- Entonces el ΔOAP ≅ ΔOBP (ALA)
  AP=PB=a
  a=b
  AO=OB=m

OBSERVACIONES:



trazar

Generalmente cuando se tiene una bisectriz y desde un punto de ella hay una perpendicular, entonces se traza la otra perpendicular para *aprovechar la igualdad de sus longitudes.*

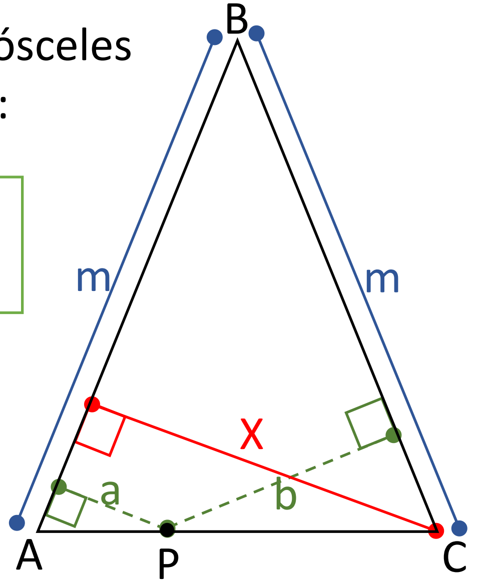
CURSO DE GEOMETRÍA

TEOREMA ADICIONALES:

Si ABC es isósceles de base $\overline{AC}$:

Se cumple:

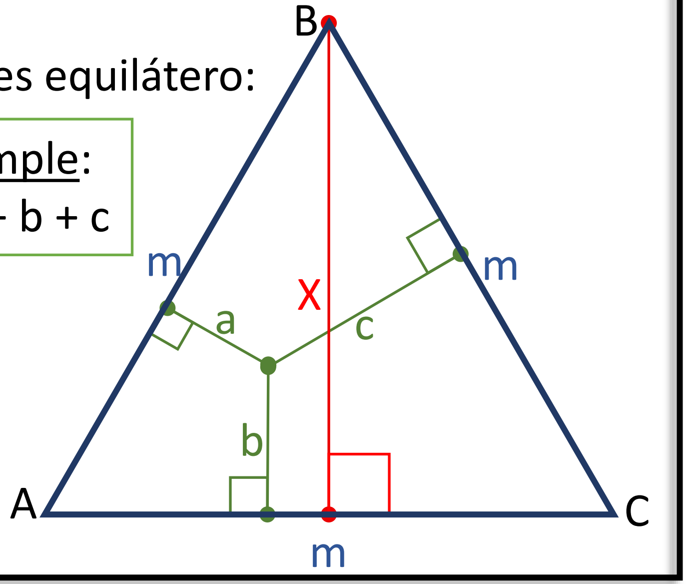
$X = a + b$



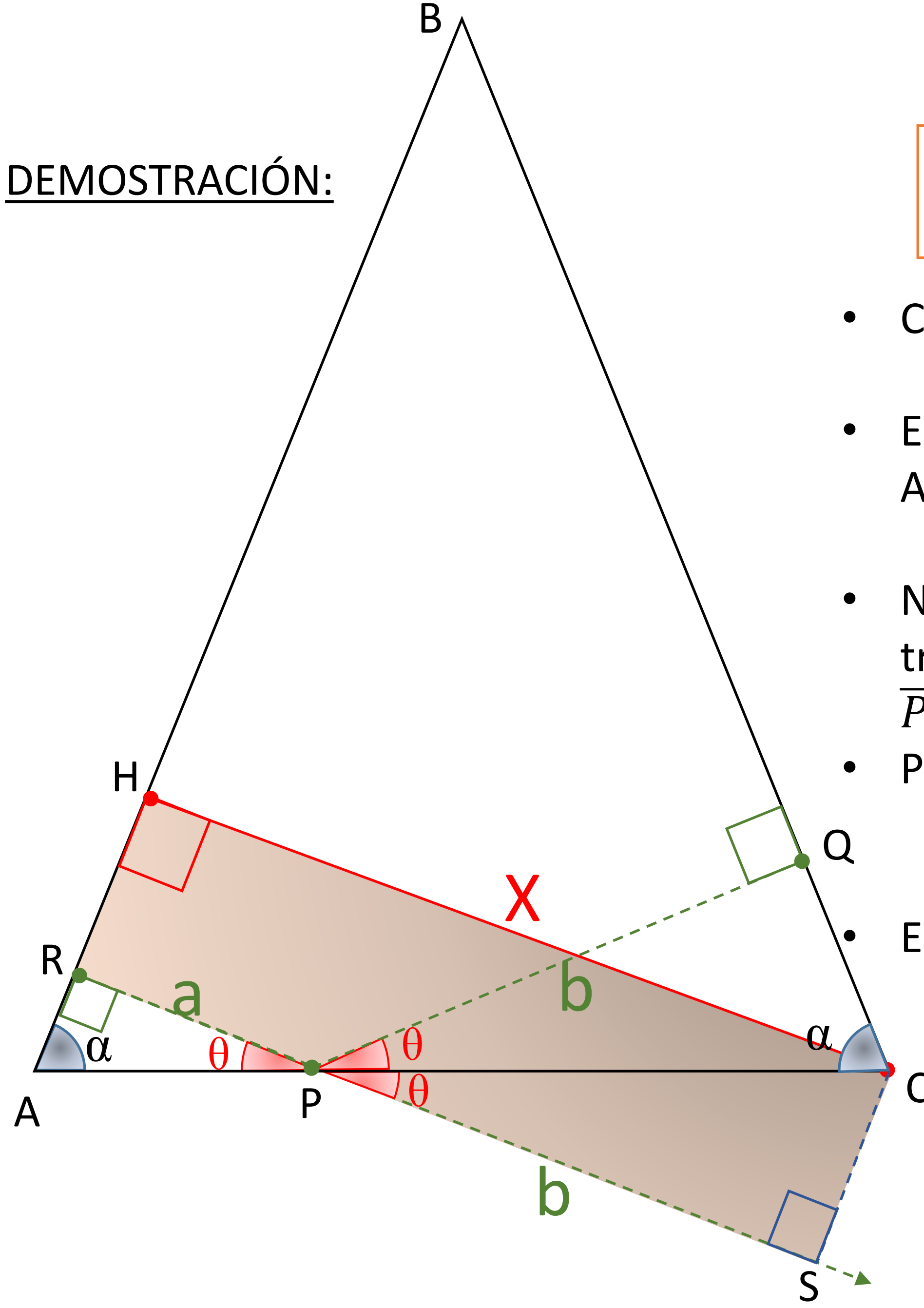
Si ABC es equilátero:

Se cumple:

$X = a + b + c$



DEMOSTRACIÓN:



DEMOSTRAR QUE:

$X = a + b$

- Como ABC es isósceles:

  m<BAC=m<BCA=α
- En los triángulos rectángulos ARP y PQC:

  m<APR=m<CPQ=θ
- Notamos $\overline{PC}$ es bisectriz, trazamos perpendicular $\overline{CS}$ a $\overline{PS}$.
- Por teorema de la bisectriz:

  CQ=CS

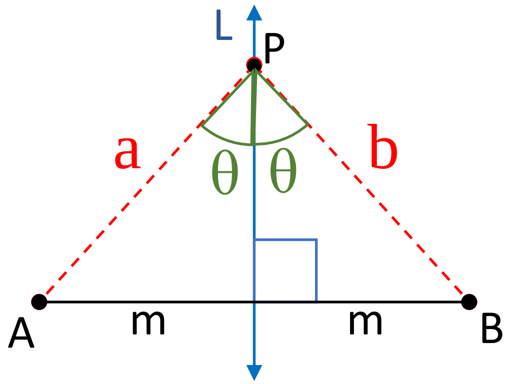
  PQ=PS=b
- El □RHCS es rectángulo:

  ∴ X = a + b

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

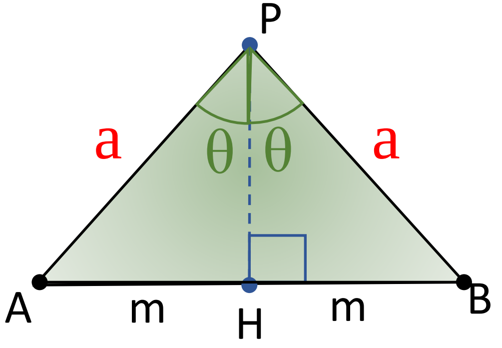
TEOREMA DE LA MEDIATRIZ:

Todo punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.



Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz:

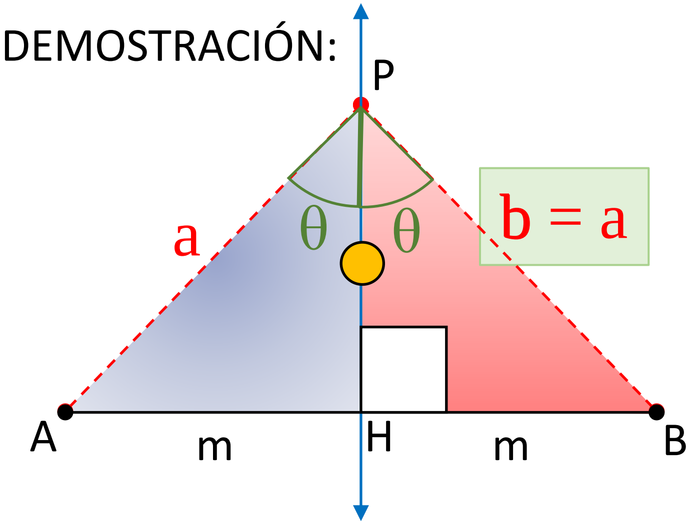
<u>Se cumple</u>:
a = b



SE OBSERVA:
ΔAPB es isósceles

$\overline{PH}$: ALTURA
MEDIANA
BISECTRIZ

DEMOSTRACIÓN:

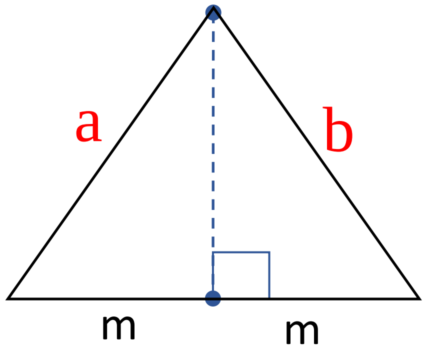


DEMOSTRAR QUE:
a = b

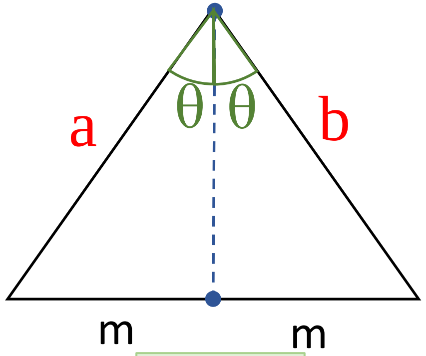
- En los triángulos rectángulos AHP y BHP
- Como AH=HB=m y $\overline{PH}$ es un cateto común.
- El ΔAHP ≅ ΔBHP (LAL)

m<APH = m<BPH = θ
AP=PB=a
∴ a = b

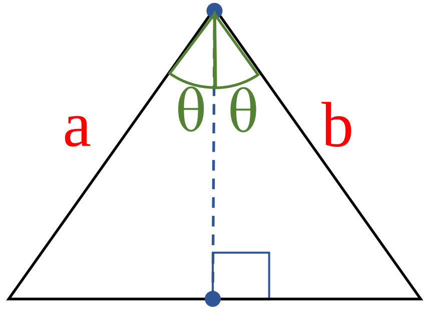
OBSERVACIONES:



a = b



a = b



a = b

ADMISION UNI 2020 - I

En un triángulo acutángulo ABC, se cumple que $m\sphericalangle ABC = 3m\sphericalangle ACB$. Si la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BM}$ en el punto P, entonces el mayor valor entero de la medida (en grados sexagesimales) del ángulo PCA es

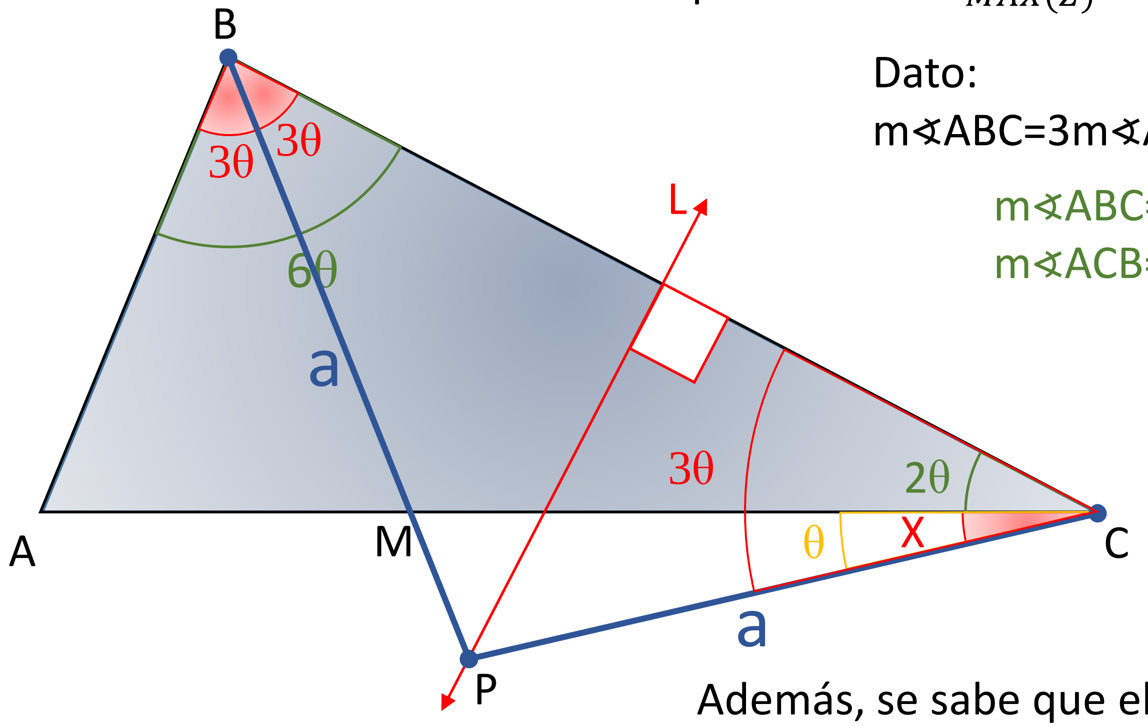
A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

RESOLUCIÓN:

Nos piden m<PCA $_{MAX(Z)}$ = X

Dato:
m∢ABC=3m∢ACB

m∢ABC=6θ
m∢ACB=2θ



Como L es mediatriz del $\overline{BC}$.
Por teorema de la mediatriz:

PB=PC=a

Ósea el ΔBPC es isósceles:

m∢PCB=m∢PBC=3θ
X=θ

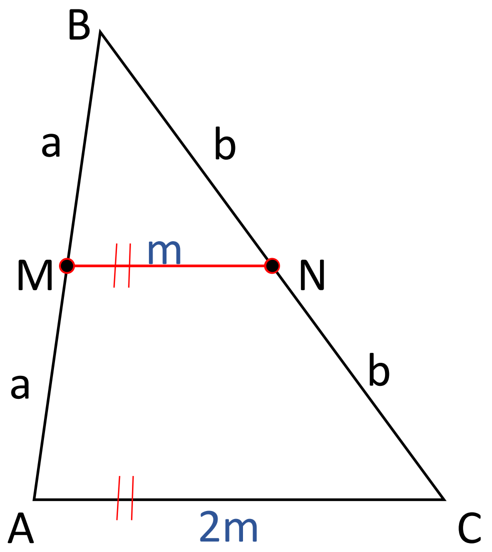
Además, se sabe que el ΔABC es acutángulos:

m∢ABC<90º
6θ<90º
θ<15º como X=θ
X<15º
$X_{\max(z)}$=14º clave D

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

TEOREMA DE LA BASE MEDIA:

El segmento que tiene por extremos los puntos media de dos lados de un triángulo de denomina BASE MEDIA, el cual es igual a la mitad de la longitud del tercer lado y es paralelo a dicho lado.



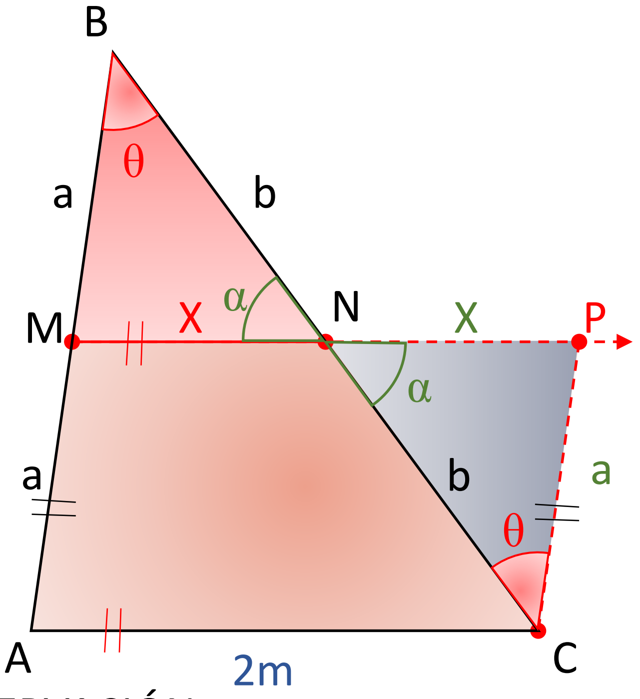
Si $\overline{MN}$ es base media:

<u>Se cumple</u>:

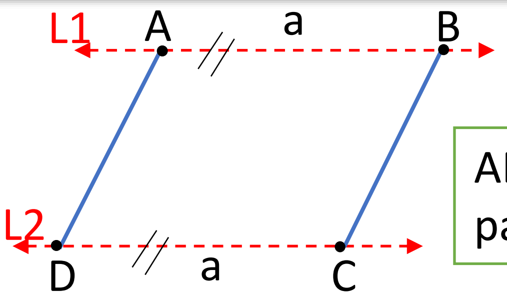
$\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$

$MN = \dfrac{AC}{2}$

DEMOSTRACIÓN:



OBSERVACIÓN:



SI $\overleftrightarrow{L1} \,//\, \overleftrightarrow{L2}$

AB=CD=a

ABCD: paralelogramo

DEMOSTRAR QUE:

$\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$

$MN = \dfrac{AC}{2}$ ó X=m

- Aprovechando BN=NC=b

Trazamos $\overline{CP} \,//\, \overline{AB}$

- Entonces ΔPCN ≅ ΔMBN (ALA)

NP=X y PC=a

- Por observación:

Como $\overline{CP} // \overline{AM}$ y AM=CP=a

- AMPC: Paralelogramo

$\therefore\ \overline{MN} \,//\, \overline{AC}$

- Además:

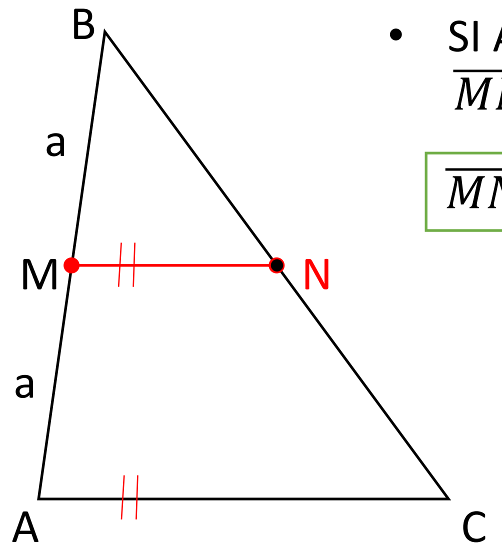
MP=AC

2X=2m

∴X=m

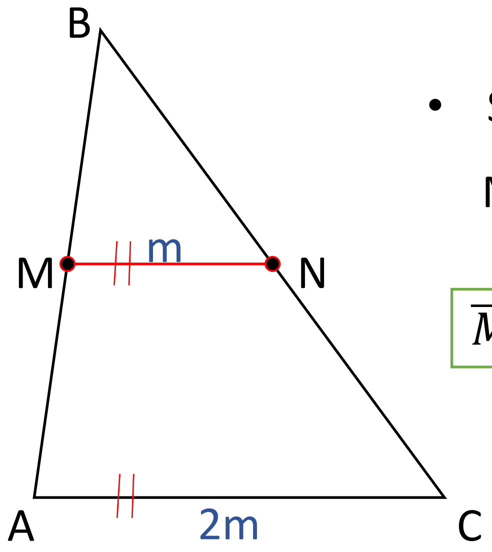
$\therefore\ MN = \dfrac{AC}{2}$

CASOS DE BASE MEDIA



- SI AM=MB=a
$\overline{MN}$ // $\overline{AC}$

$\boxed{\overline{MN}\text{: BASE MEDIA}}$



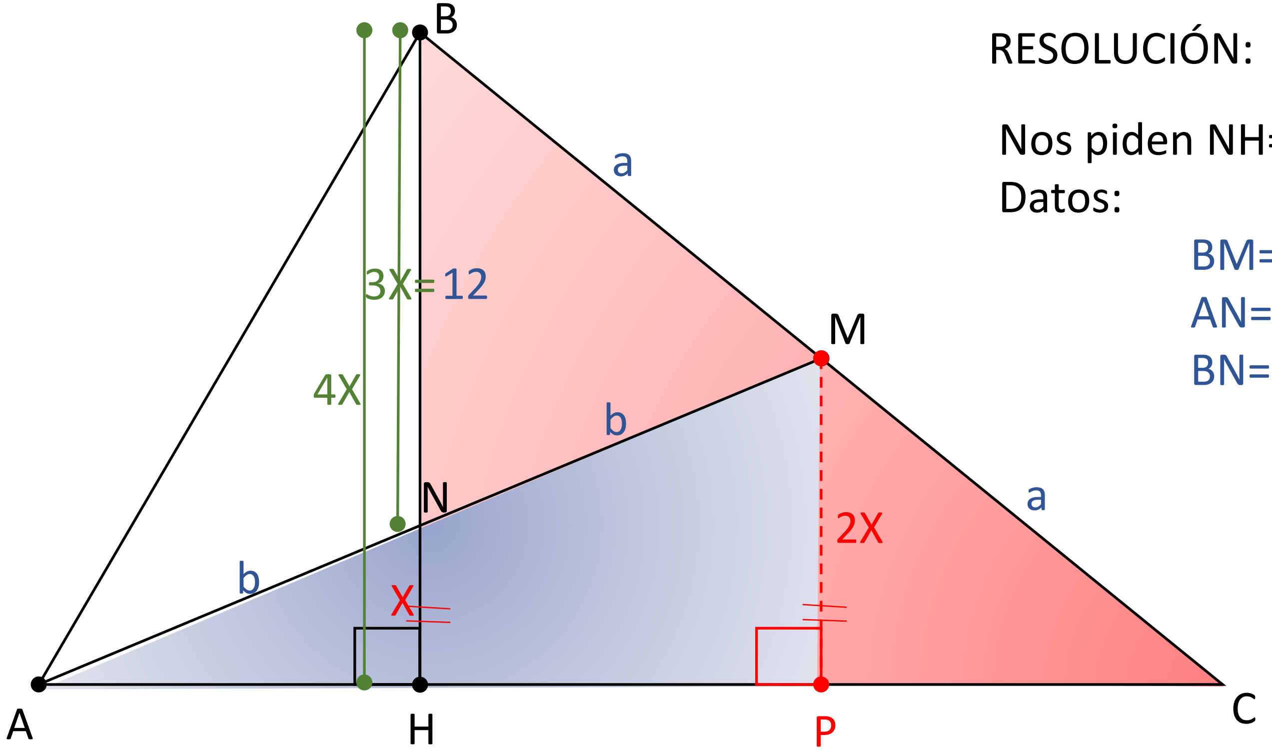
- SI $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$

$$MN = \frac{AC}{2}$$

$\boxed{\overline{MN}\text{: BASE MEDIA}}$

EJEMPLO:

De la grafica, BM=MC, AN=NM. Si BN=12. calcule NH.



RESOLUCIÓN:

Nos piden NH=X
Datos:

BM=MC=a
AN=NM=b
BN=12

- Trazamos $\overline{MP}$ // $\overline{NH}$

$\overline{HN}$: base media del ΔAPM

MP=2X (Teo. Base media)

- Como $\overline{MP}$ // $\overline{BH}$

$\overline{MP}$: base media del ΔHBC

AB= 4X (Teo. Base media)

- Entonces:

BN=3X=12

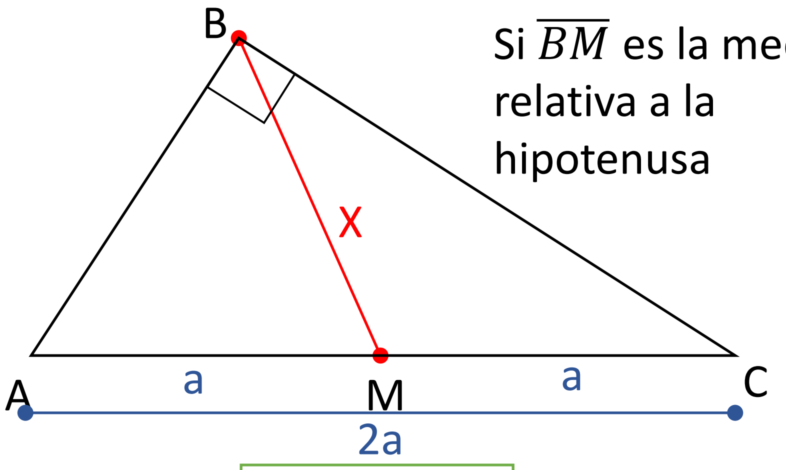
∴X=4

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA:

En todo triángulo rectángulo, la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Si $\overline{BM}$ es la mediana relativa a la hipotenusa

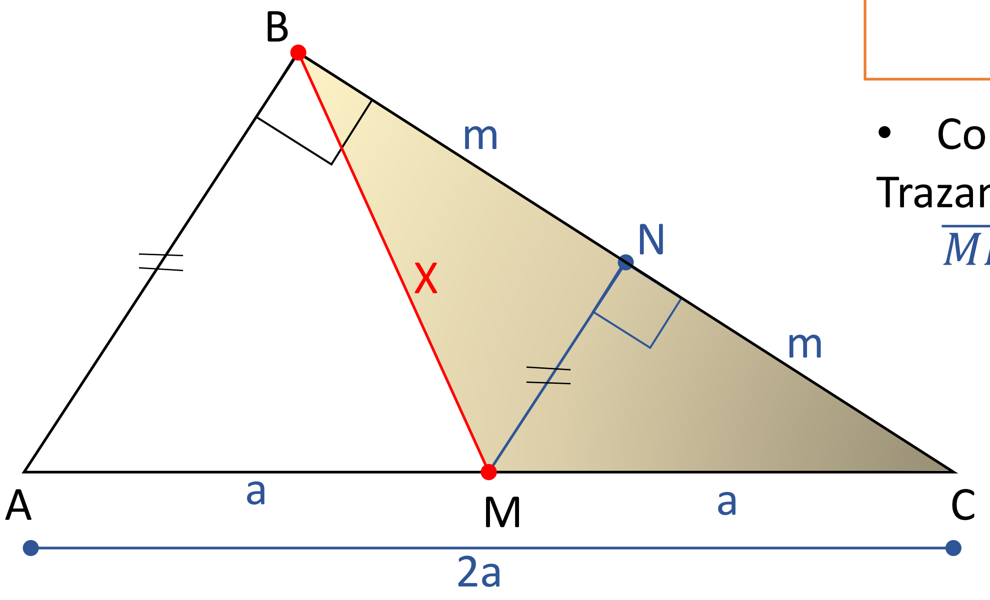


Se cumple:

$BM = \dfrac{AC}{2}$

X=a

DEMOSTRACIÓN:



DEMOSTRAR QUE:

$BM = \dfrac{AC}{2}$ ó

X = a

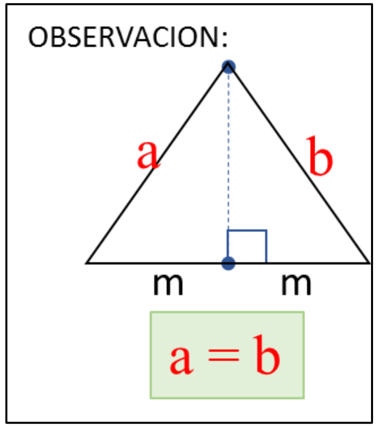
- Como M es punto medio

Trazamos $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$

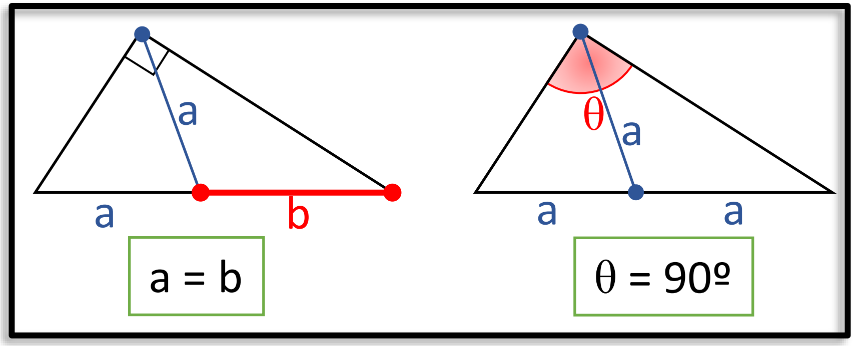
$\overline{MN}$: BASE MEDIA

BN=NC=m

m∢MNC=90º



Observaciones:

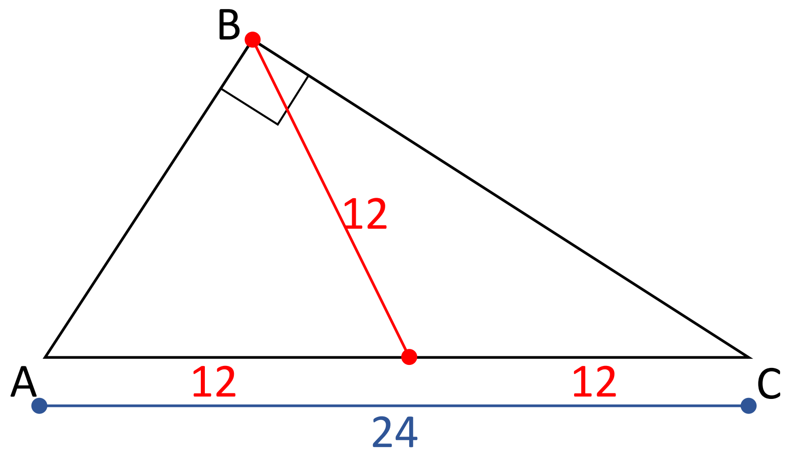


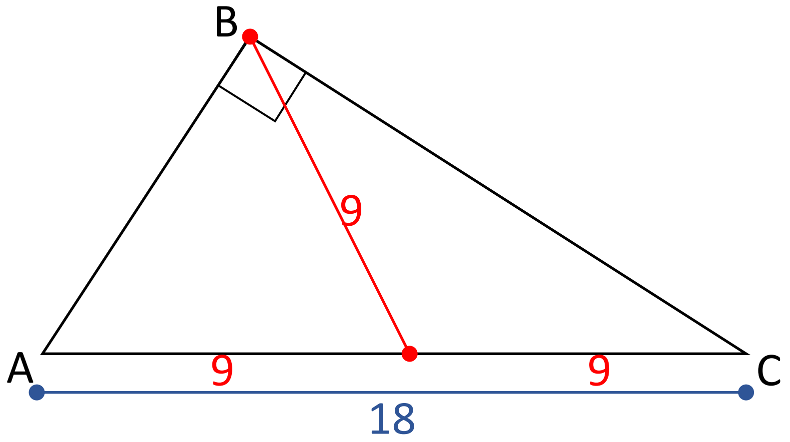
- Por observación:

El ΔBMC es isósceles

∴X = a

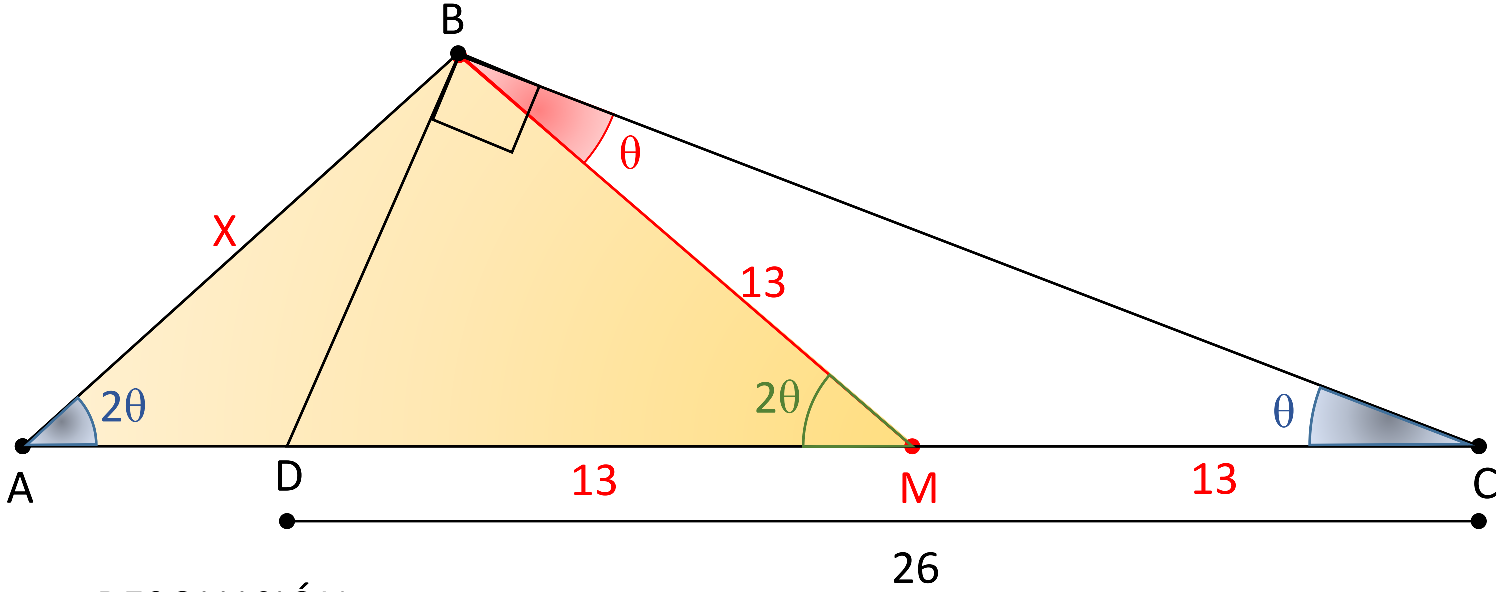
EJEMPLOS:





Entonces cuando tenemos la longitud de la hipotenusa una opción es *trazar la mediana relativa a la hipotenusa*.

En el grafico, si DC=26. calcule AB



RESOLUCIÓN:

Nos piden AB=X

Dato:

DC=26

- Como se tiene la longitud de la hipotenusa, trazamos $\overline{BM}$ la mediana relativa a la hipotenusa

DM=MC=BM=13

Por lo tanto el ΔBMC es isósceles

m∢MBC=θ

- Por ángulos externo

m∢DMB=2θ

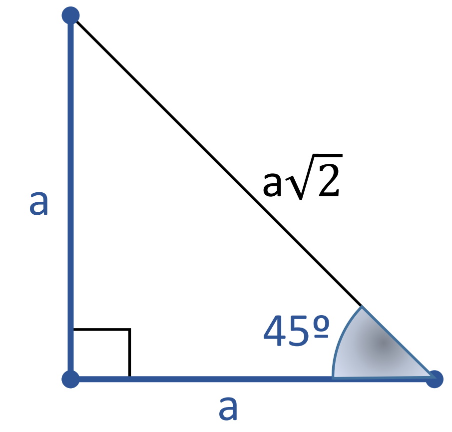
Entonces:

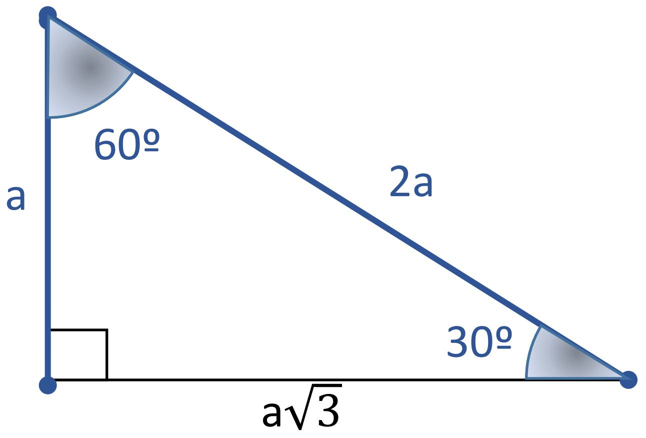
El Δ ABM es isósceles

∴X=13

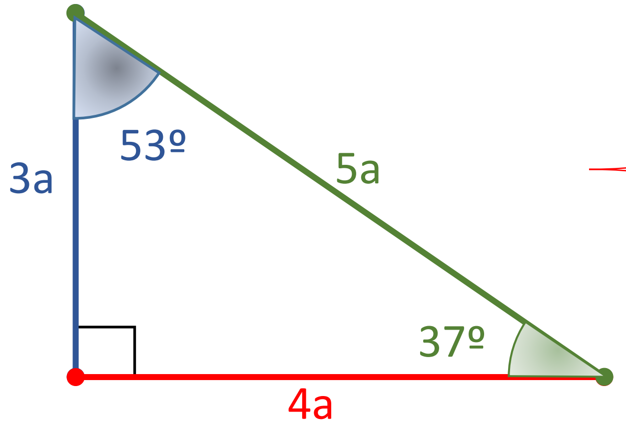
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

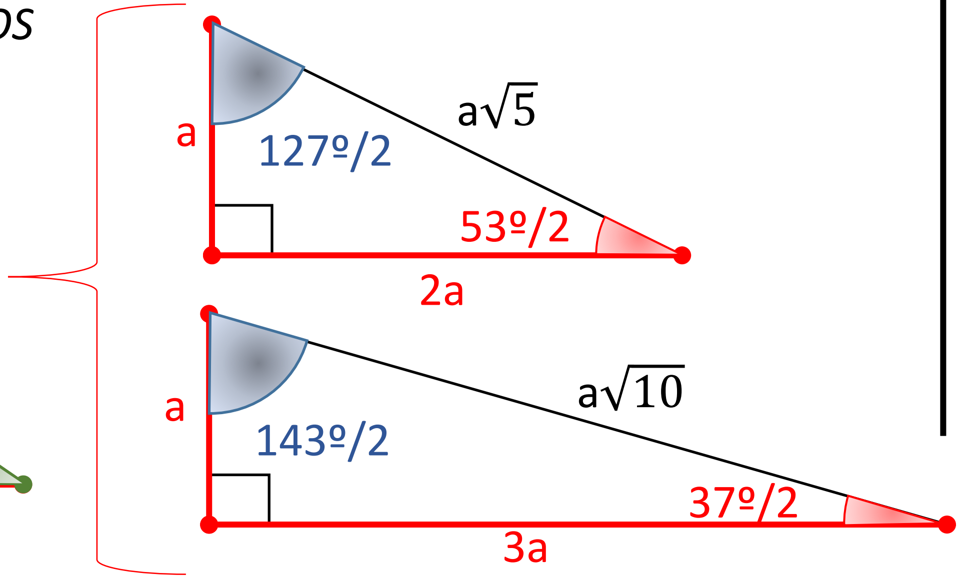
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS EXACTOS

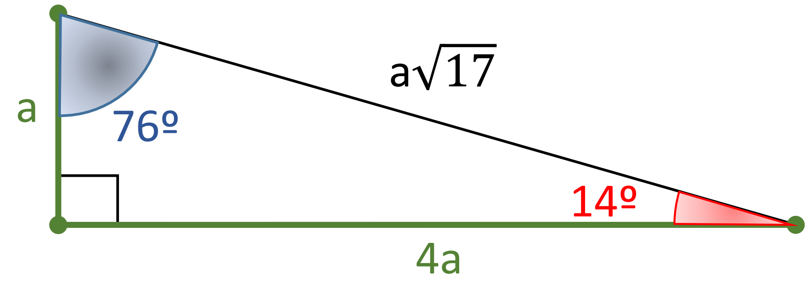


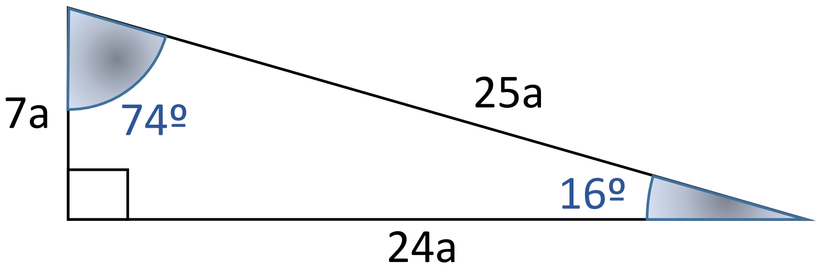


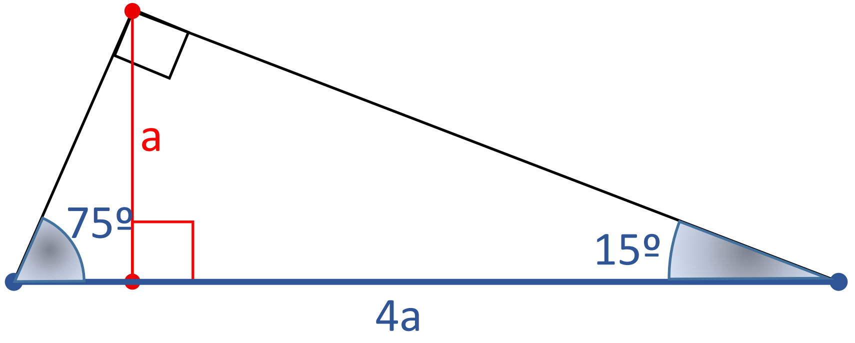
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS APROXIMADO





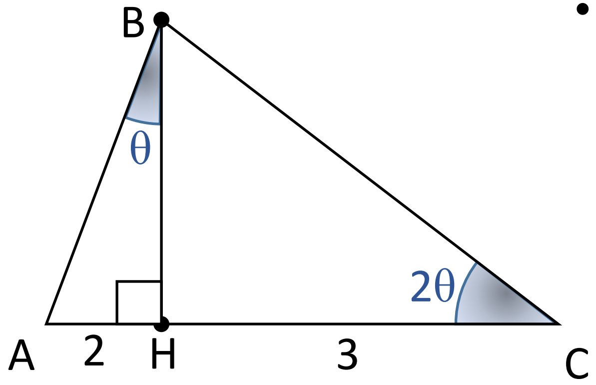




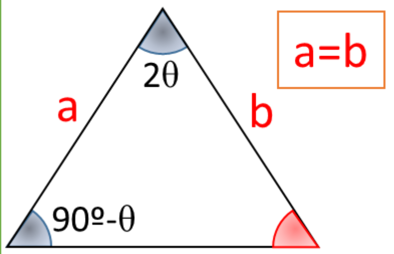


EJEMPLOS:

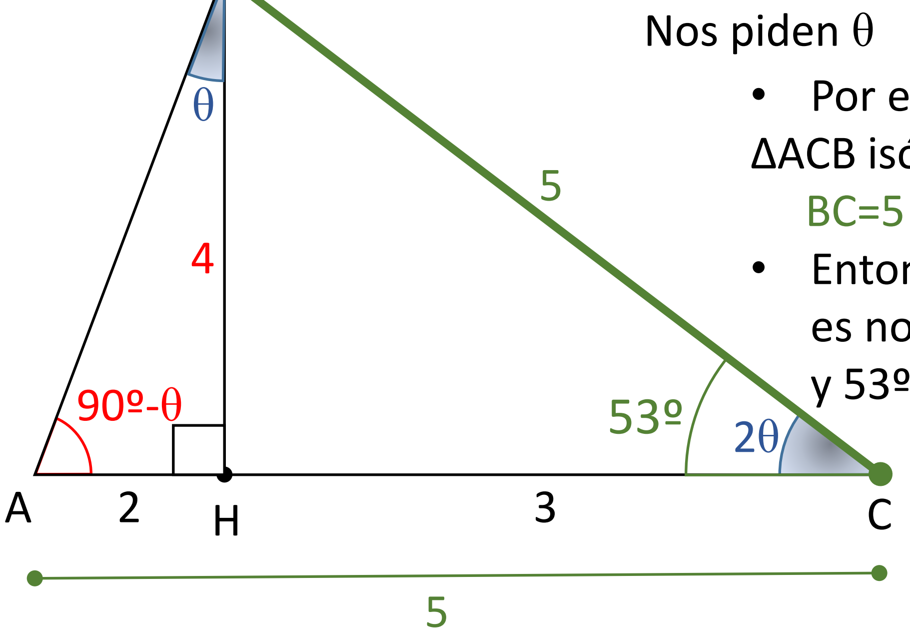
- Del gráfico, calcule θ.



RECORDAR:



RESOLUCIÓN:



Nos piden θ

- Por el recordar:

ΔACB isósceles

BC=5

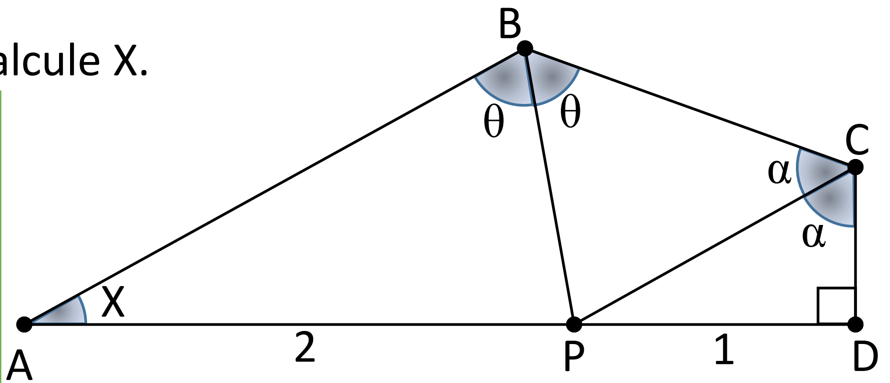
- Entonces el $\triangle BHC$ es notables de 37º y 53º

BH=4

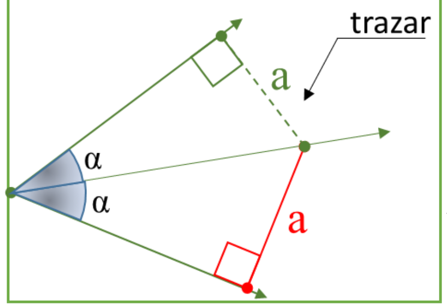
$2\theta=53º$

$\therefore \theta=53º/2$

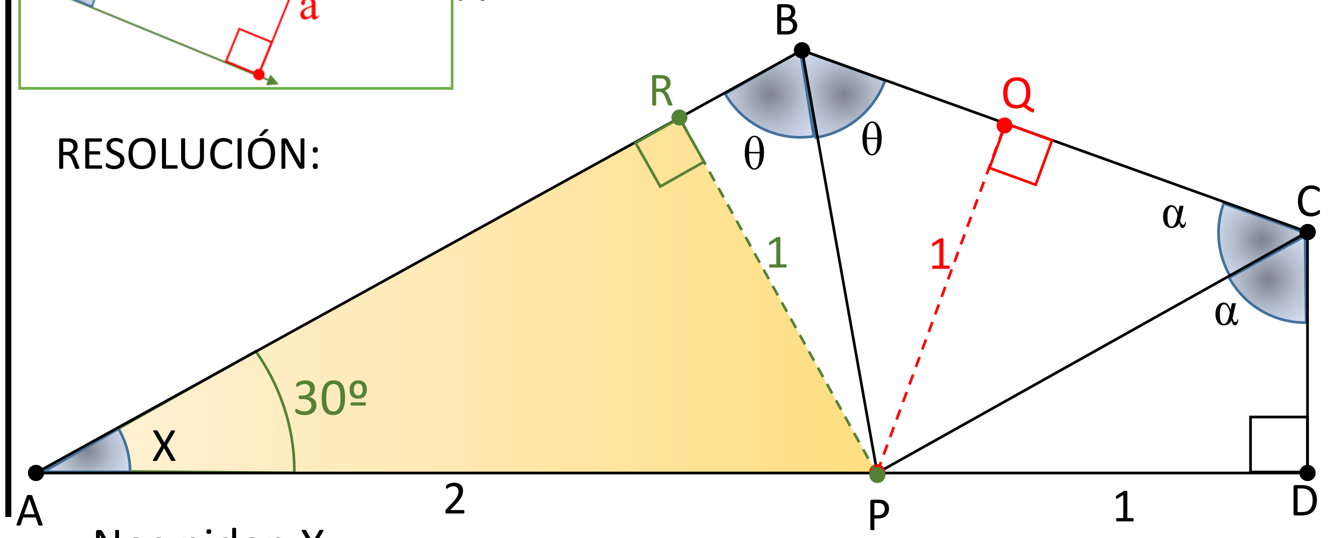
- Del gráfico, calcule X.



RECORDAR:



RESOLUCIÓN:



Nos piden X

- Por el recordar:

Como $\overline{CP}$ es bisectriz

PQ=1 (Teo. bisectriz)

Como $\overline{BP}$ es bisectriz

PR=1 (Teo. bisectriz)

- Entonces el $\triangle ARP$ es notables de 30º y 60º

$\therefore X=30º$