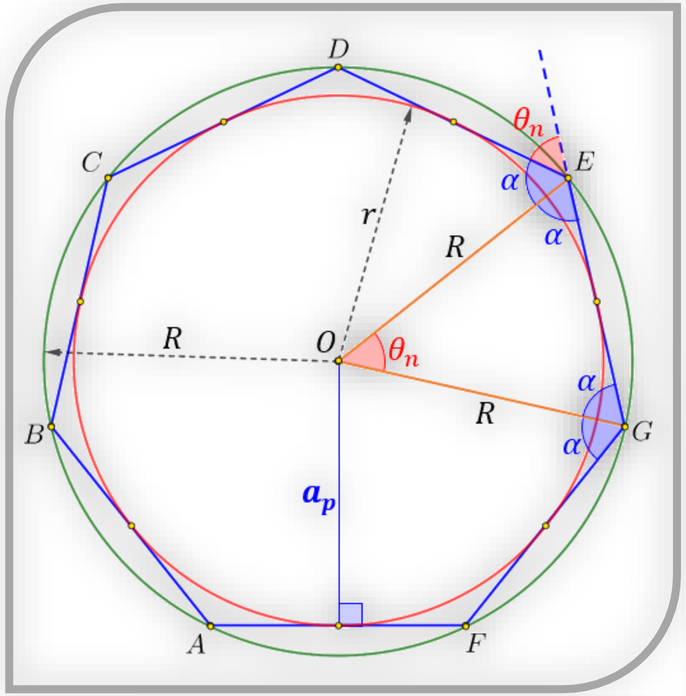
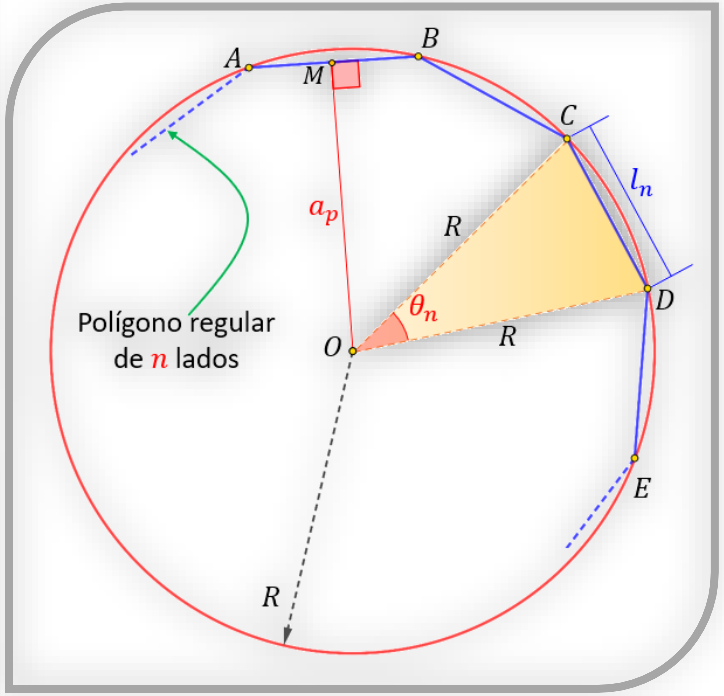
OBJETIVOS:

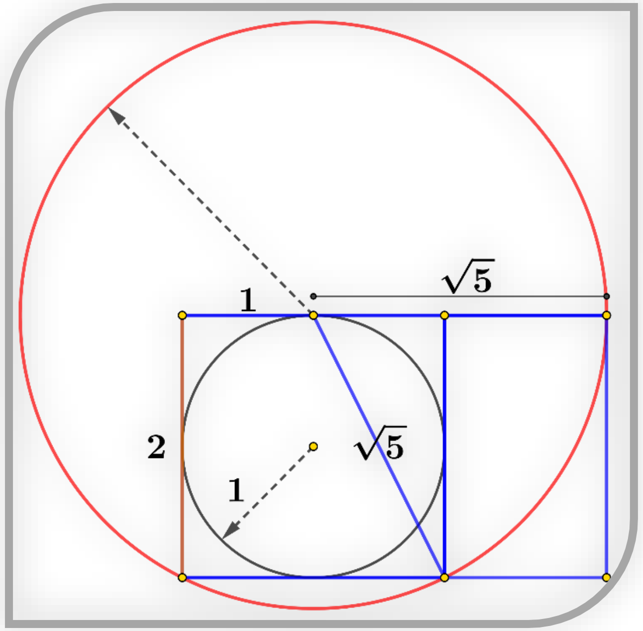
- *Identificar los elementos asociados de los polígonos regulares.*
- *Calcular la longitud de los lados y apotemas de los polígonos regulares en función a su circunradio.*
- *Entender el concepto de sección aurea.*
- *Aplicar adecuadamente los teoremas en los problemas.*

POLÍGONOS REGULARES

- DEFINICIÓN.
- TEOREMAS GENERALES.
- POLÍGONOS REGULARES FRECUENTES.
- SECCIÓN AUREA.

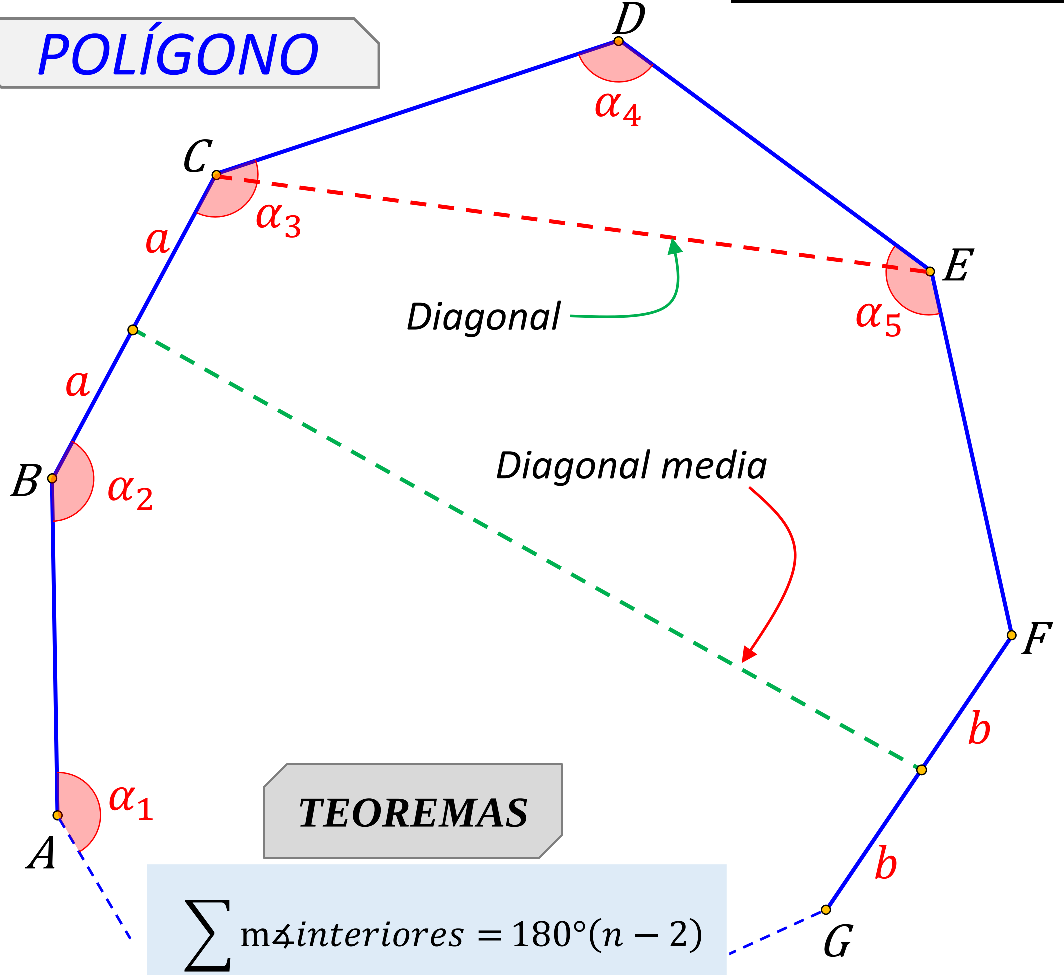






NOCIONES PREVIAS

POLÍGONO



TEOREMAS

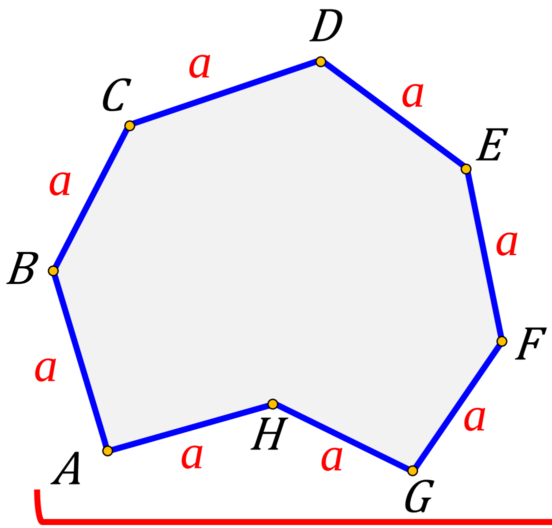
$$\sum \text{m}\measuredangle interiores = 180°(n-2)$$

$$N°diagonales = \frac{n(n-3)}{2}$$

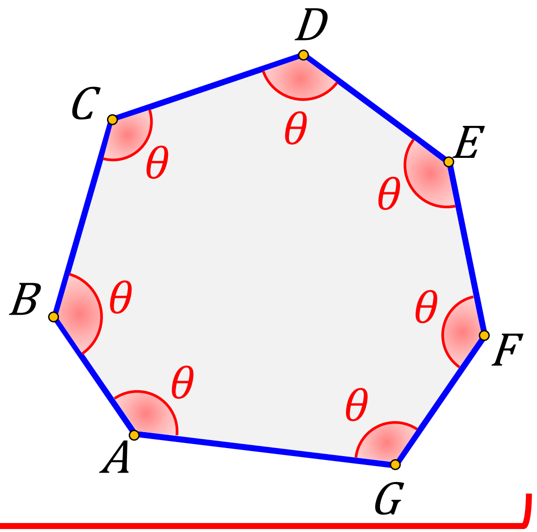
$$N°diag.medias = \frac{n(n-1)}{2}$$

n: Número de lados

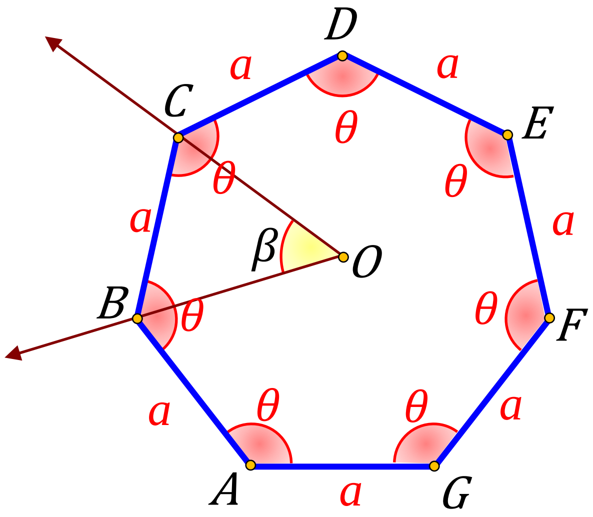
Polígono equilátero



Polígono equiángulo



Polígono Regular



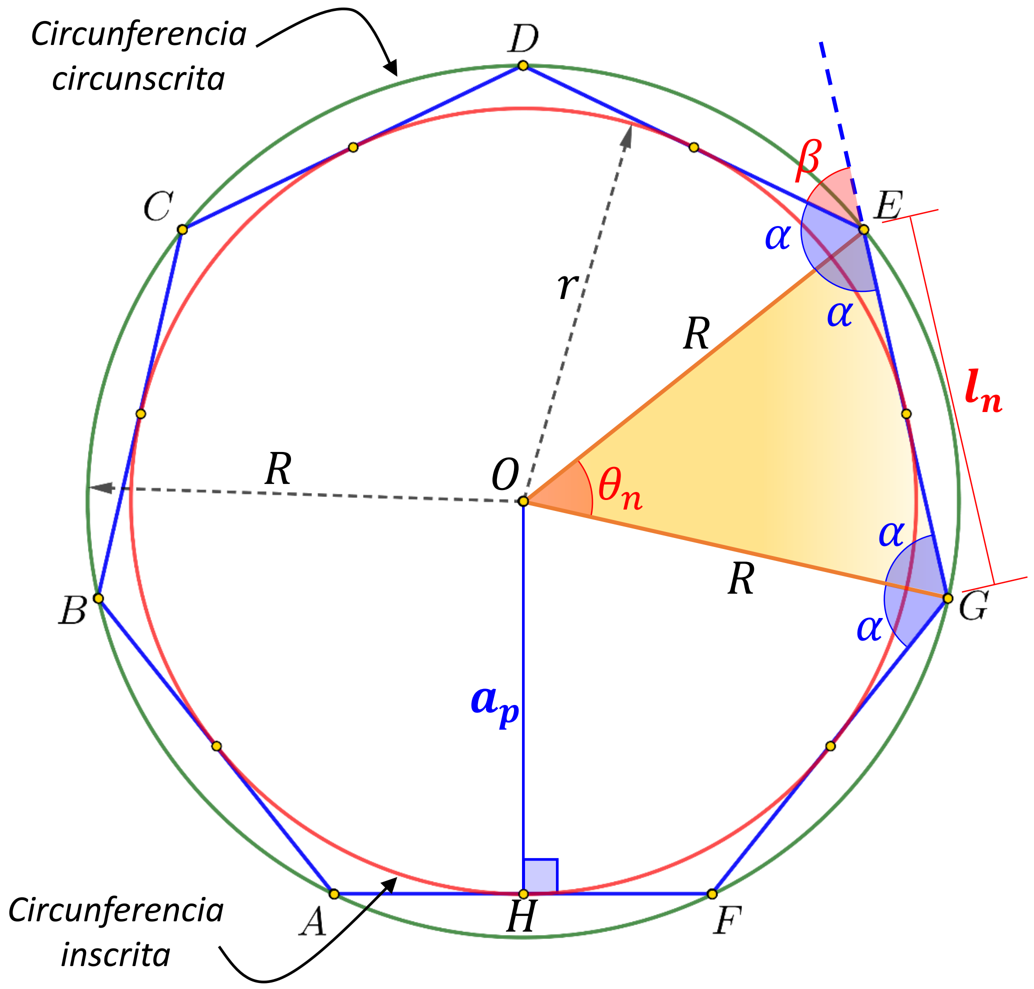
O: Centro $\quad \beta$: m∡central

EN POLÍGONOS REGULARES
$\text{m}\measuredangle i_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$
$\text{m}\measuredangle C_n = \text{m}\measuredangle e_n = \dfrac{360°}{n}$
n: Número de lados ($n \geq 3$)

POLÍGONOS REGULARES

POLÍGONOS REGULARES

Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir a dos circunferencias concéntricas.



Polígono regular $ABCDEGF$

- O: Centro del Polígono Regular
- r: Inradio
- R: Circunradio
- $\overline{OH}$: Apotema $(a_p = r)$
- θ_n: Medida del ángulo central
- β: Medida del ángulo exterior

$$\boxed{\beta = \theta_n}$$

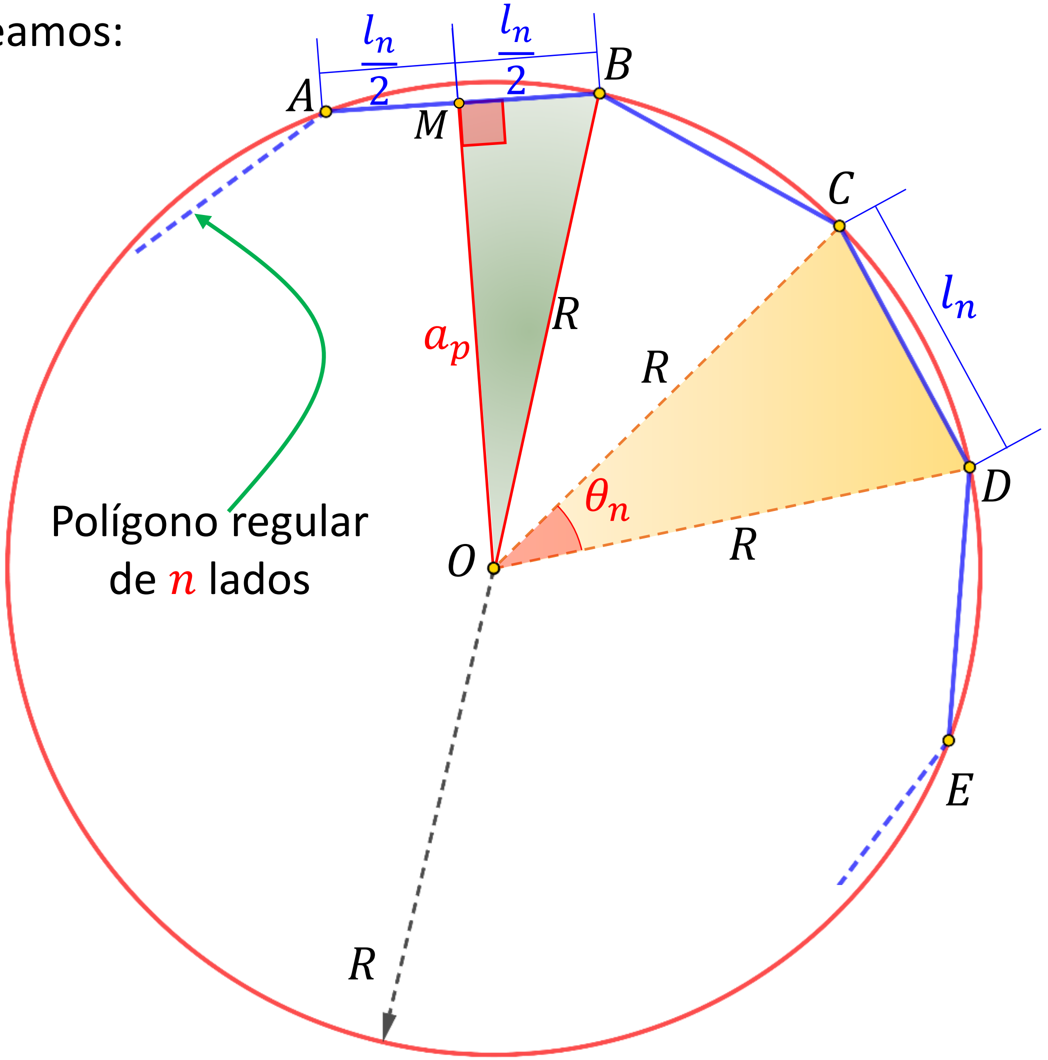
- ΔEOG: Triángulo elemental del polígono regular.
- l_n: Longitud del lado del polígono regular

Estudiaremos las relaciones entre el lado, ángulo central, apotema y circunradio de un polígono regular

POLÍGONOS REGULARES

CÁLCULO DE LA LONGITUD DEL LADO Y APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR

Veamos:



- **Cálculo de la longitud del lado,** en el ΔCOD: elemental, aplicamos el teorema de coseno:

$$(l_n)^2 = R^2 + R^2 - 2(R)(R)\cos\theta_n$$

$$\rightarrow (l_n)^2 = 2R^2(1-\cos\theta_n)$$

$$\boxed{l_n = R\sqrt{2(1-\cos\theta_n)}} \quad \ldots(i)$$

- **Cálculo de la longitud de la apotema,** en el $\triangle OMB$: T. Pitágoras

$$(a_p)^2 = R^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow a_p = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{a_p = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (l_n)^2}} \quad \ldots(ii)$$

Reemplazamos (i) en (ii):

$$\boxed{a_p = \frac{R}{2}\sqrt{2(1+\cos\theta_n)}}$$

POLÍGONOS REGULARES

EXAMEN DE ADMISIÓN UNI 2017-I

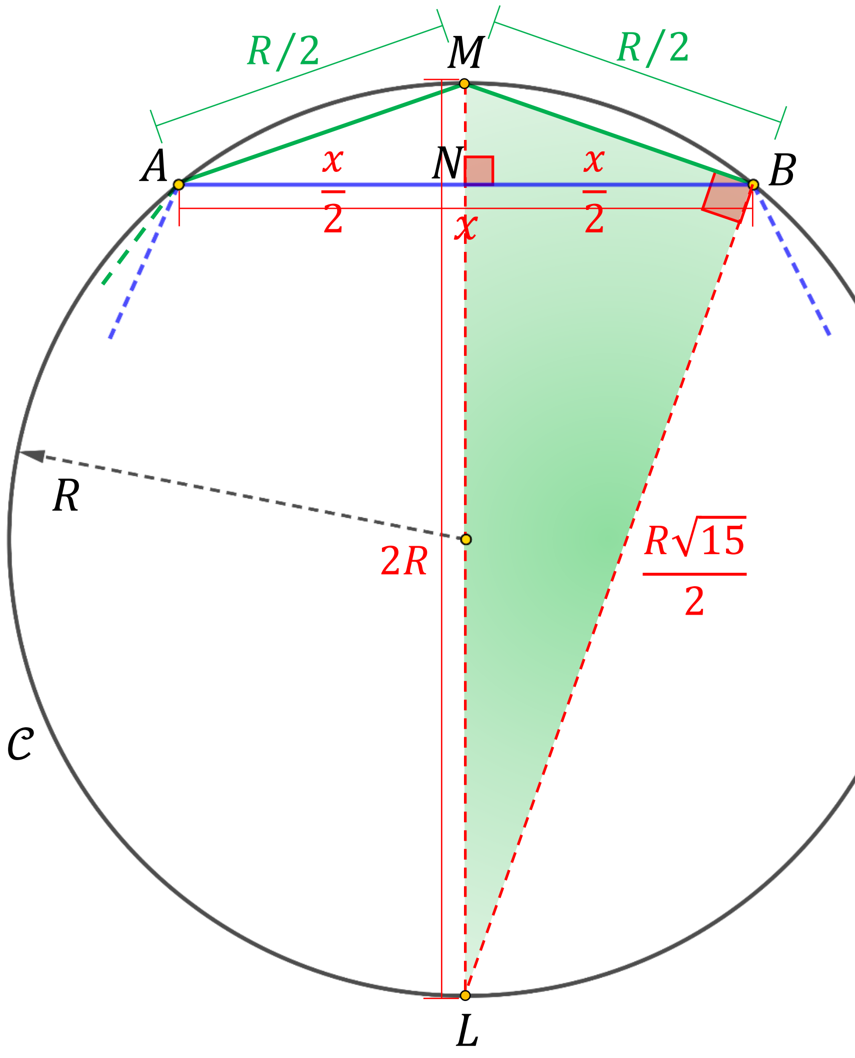
Determine la longitud (en cm) del lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio $R\ cm$, si la longitud del lado del polígono regular de doble número de lados inscrito en $\mathcal{C}$ es $\frac{R}{2}\ cm$.

A) $\frac{\sqrt{15}}{2}R$ B) $\frac{\sqrt{15}}{3}R$ C) $\frac{\sqrt{15}}{4}R$

D) $\frac{\sqrt{15}}{5}R$ E) $\frac{\sqrt{15}}{6}R$

Nota:
Para generar al polígono regular de doble número de lados inscrito en la misma circunferencia, ubicamos el punto medio de uno de los arcos que le corresponde a uno de los lados del polígono regular inicial.

RESOLUCIÓN Piden $AB = x$



- Sea $\overline{AB}$ uno de los lados del polígono regular cuya longitud de lado nos piden calcular.
- Sea $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

  Entonces $\overline{BM}, \overline{MA}$, ... son los lados del polígono regular de doble número de lados.

  $$\rightarrow BM = MA = \frac{R}{2}$$

- Trazamos el diámetro $\overline{ML}$ y la cuerda $\overline{BL} \rightarrow AN = NB = \frac{x}{2}$
- En el $\triangle MBL$, por T. Pitágoras:

  $$BL = \frac{R\sqrt{15}}{2}$$

- En el $\triangle MBL$, por producto de catetos:

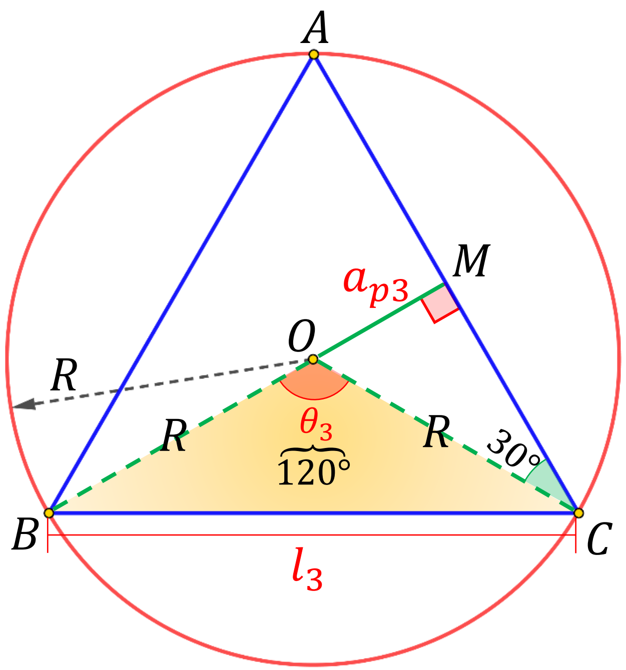
  $$\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R\sqrt{15}}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)(2R)$$

$$\boxed{\therefore\ x = \frac{\sqrt{15}}{4}R}$$

POLÍGONOS REGULARES FRECUENTES

POLÍGONOS REGULARES

TRIÁNGULO REGULAR (l_3)



Ángulo central θ_3

$$\theta_3 = \frac{360°}{3}$$

$$\boxed{\theta_3 = 120°}$$

Cálculo del lado l_3

En el ΔBOC, elemental, isósceles de 120°

$$\boxed{l_3 = R\sqrt{3}}$$

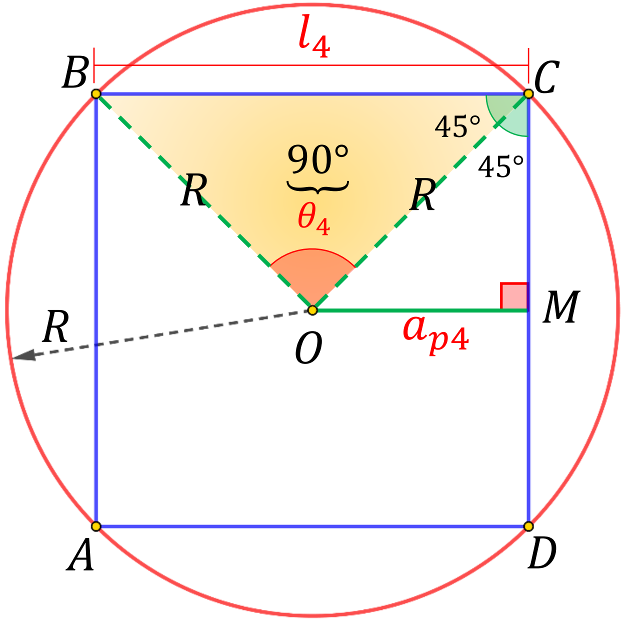
Cálculo del Apotema a_{p3}

El $\triangle OMC$ es de 30° y 60°

$$\boxed{a_{p3} = \frac{R}{2}}$$

NOTA: Al triángulo regular, simplemente le denominamos, triángulo equilátero.

CUADRILÁTERO REGULAR (l_4)



Ángulo Central θ_4

$$\theta_4 = \frac{360°}{4}$$

$$\boxed{\theta_4 = 90°}$$

Cálculo del Lado l_4

En el $\triangle BOC$,elemental, isósceles de 45° y 45°

$$\boxed{l_4 = R\sqrt{2}}$$

Cálculo del Apotema a_{p4}

El $\triangle OMC$ es de 45° y 45°

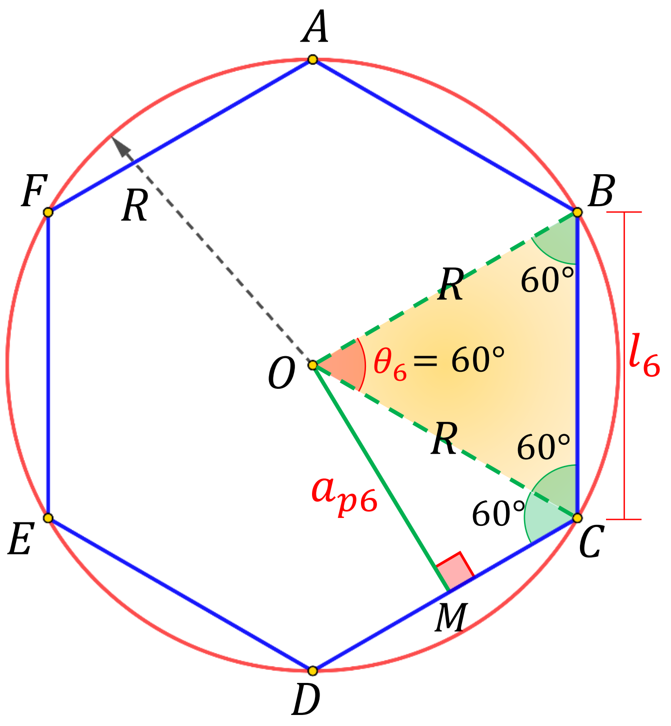
$$\boxed{a_{p4} = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

NOTA: Al cuadrilátero regular, simplemente le denominamos, cuadrado.

CURSO DE GEOMETRÍA

POLÍGONOS REGULARES

HEXÁGONO REGULAR (l_6)



Ángulo central θ_6

$$\theta_6 = \frac{360°}{6}$$

$$\boxed{\theta_6 = 60°}$$

Cálculo del lado l_6

En el ΔBOC, elemental, es equilátero

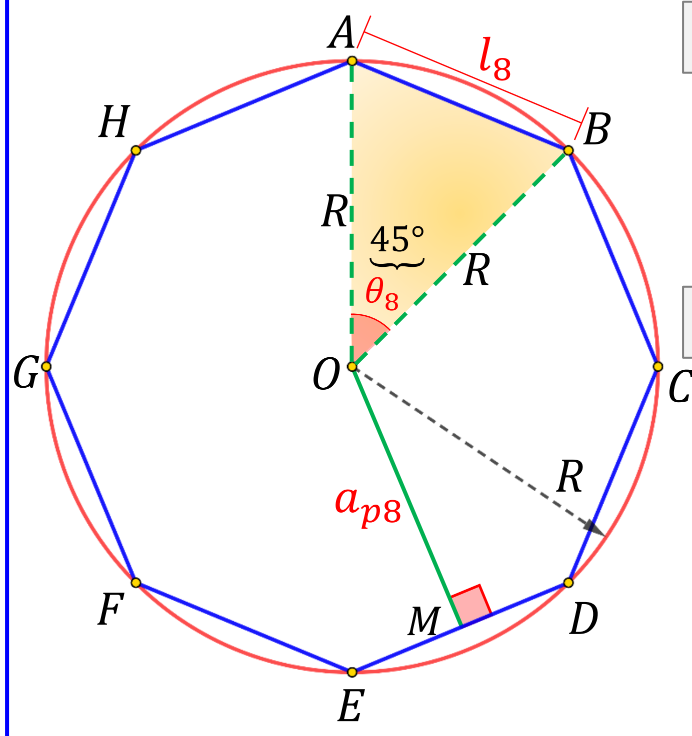
$$\boxed{l_6 = R}$$

Cálculo del apotema a_{p6}

El ΔOMC es de 30° y 60°

$$\boxed{a_{p6} = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

OCTÁGONO REGULAR (l_8)



Ángulo central θ_8

$$\theta_8 = \frac{360°}{8}$$

$$\boxed{\theta_8 = 45°}$$

Cálculo del lado l_8

Por teorema en el ΔAOB, elemental:

$$l_n = R\sqrt{2(1 - \cos\theta_n)}$$

$$l_8 = R\sqrt{2(1 - \cos 45°)}$$

$$\boxed{l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Cálculo del apotema a_{p8}

Por teorema:

$$a_p = \frac{R}{2}\sqrt{2(1 + \cos\theta_n)}$$

$$a_{p8} = \frac{R}{2}\sqrt{2(1 + \cos 45°)}$$

$$\boxed{a_{p8} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

POLÍGONOS REGULARES

EXAMEN DE ADMISIÓN UNI 2013-II

Se colocan ocho monedas de igual radio tangentes dos a dos, tangencialmente alrededor de una moneda de mayor radio, entonces la relación entre el radio de la moneda mayor y el radio de la moneda menor es:

$A)\ \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-2$

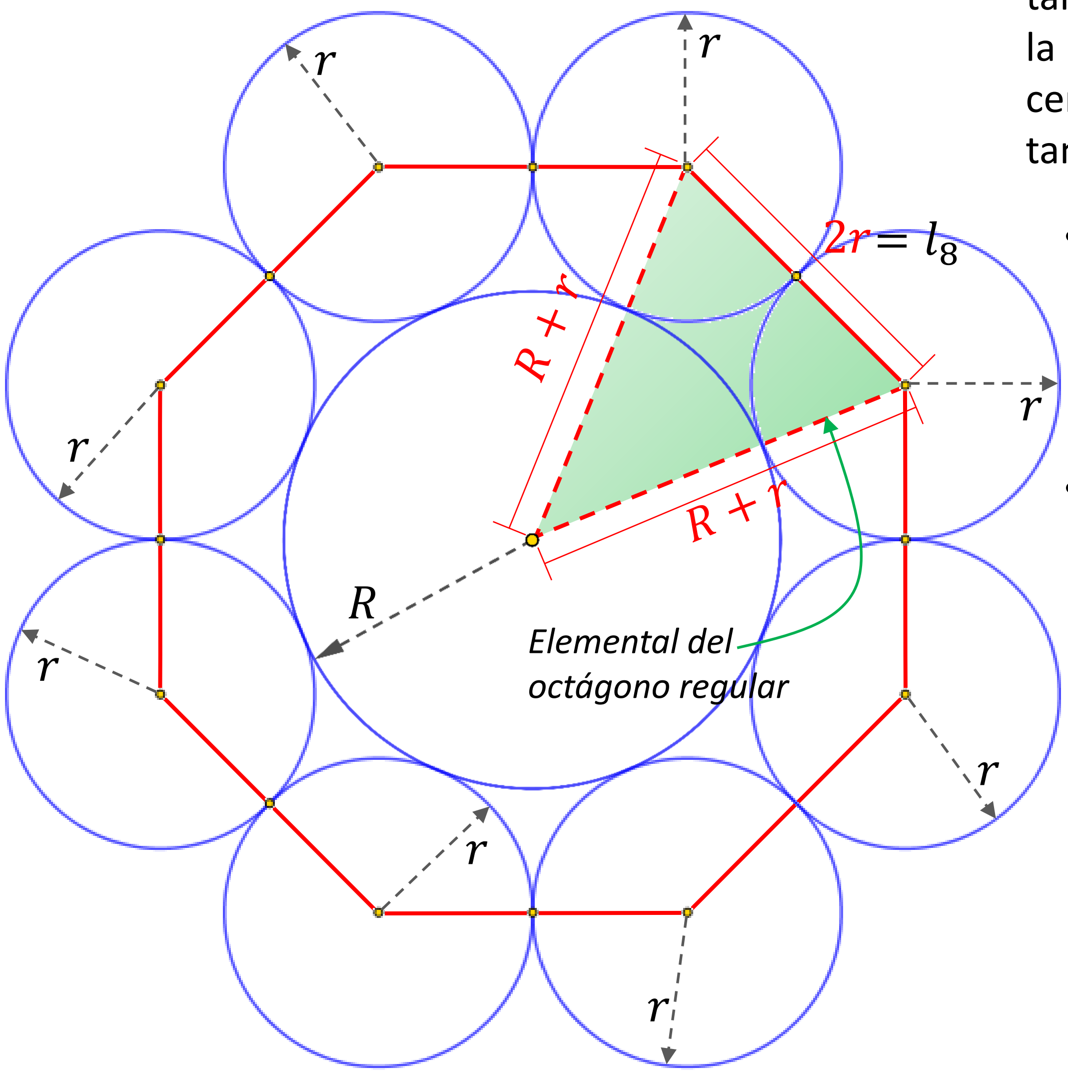
$B)\ \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-1$

$C)\ \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{2}$

$D)\ \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{4}$

$D)\ \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{8}$

RESOLUCIÓN Piden $\dfrac{R}{r}$



- Como las circunferencias son tangentes exteriores, usamos la colinealidad entre los centros y el punto de tangencia.

- Con ello notamos que, el polígono formado es un octágono regular.

$$\rightarrow 2r = l_8$$

- Sabemos:

$$\underbrace{l_8}_{2r} = \underbrace{(R+r)}_{\text{Lado del } \Delta\text{Elemental}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow 2r - r\sqrt{2-\sqrt{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

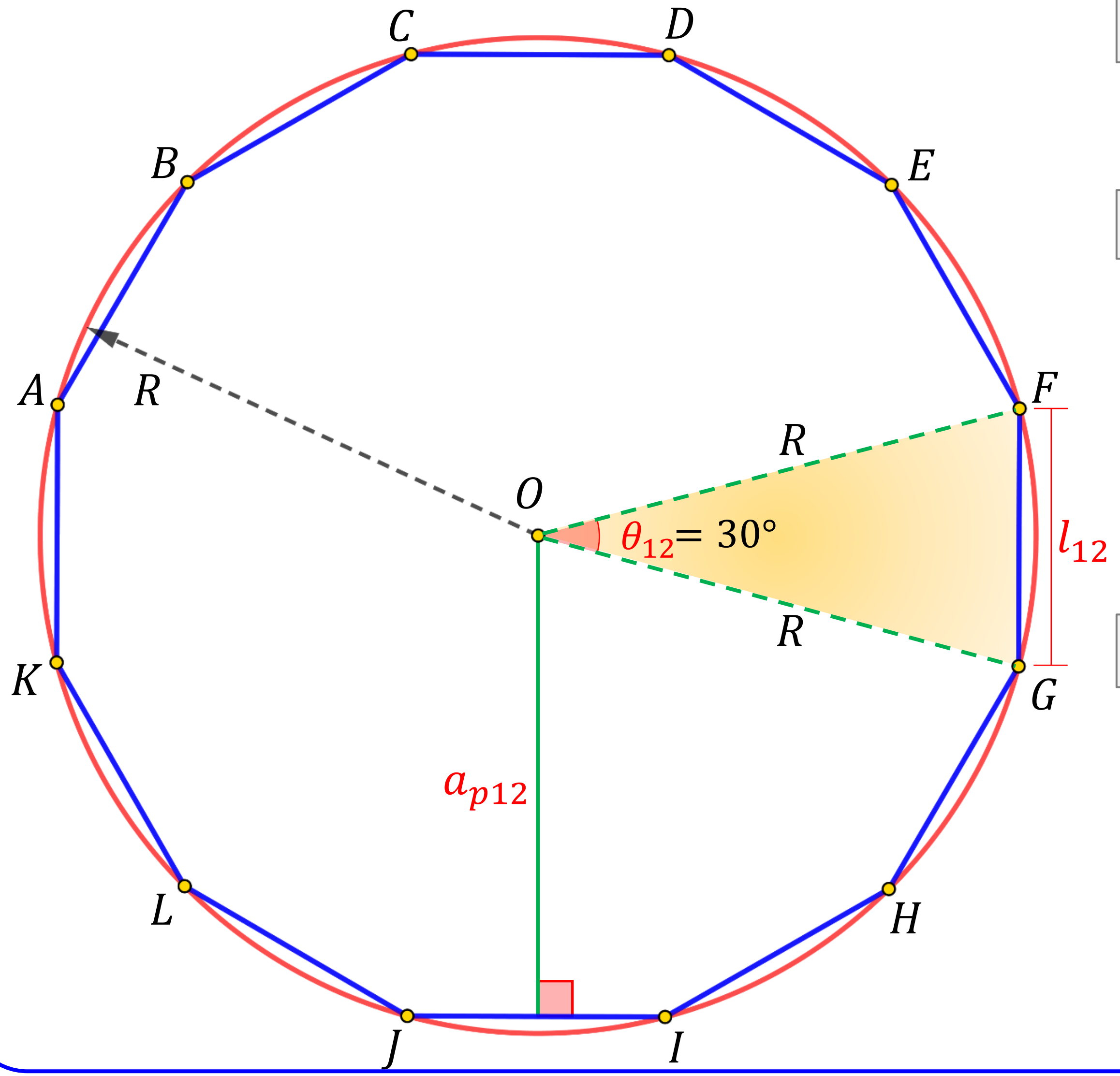
- Operando:

$$\boxed{\therefore \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}} - \mathbf{1}}$$

CURSO DE GEOMETRÍA

POLÍGONOS REGULARES

DODECÁGONO REGULAR (l_{12})



Ángulo central θ_{12}

$$\theta_{12} = \frac{360°}{12}$$

$$\boxed{\theta_{12} = 30°}$$

Cálculo del lado l_{12}

Por teorema en el ΔFOG, elemental:

$$l_n = R\sqrt{2(1 - \cos\theta_n)}$$

$$l_{12} = R\sqrt{2(1 - \cos 30°)}$$

$$\boxed{l_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

Cálculo del apotema a_{p12}

Por teorema:

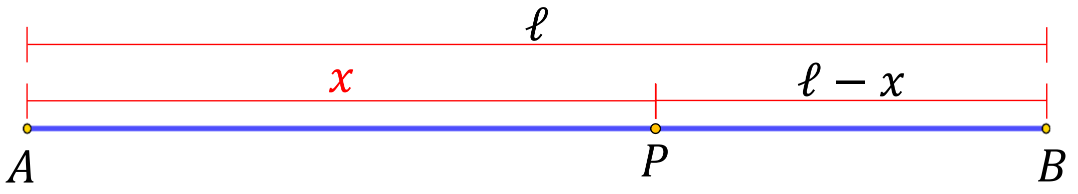
$$a_p = \frac{R}{2}\sqrt{2(1 + \cos\theta_n)}$$

$$a_{p12} = \frac{R}{2}\sqrt{2(1 + \cos 30°)}$$

$$\boxed{a_{p12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Dado el segmento $\overline{AB}$, ubicamos P en $\overline{AB}$ $(AP > PB)$
P divide en media y extrema razón a $\overline{AB}$, cuando $\overline{AP}$ sea media proporcional entre $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$.



De lo anterior:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB} \rightarrow \frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x}$$

Operando:

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

$$\boxed{x = \ell\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)}$$

- De la relación encontrada, indicamos que $\overline{AP}$ ***es la sección áurea de*** $\overline{AB}$.

TENER EN CUENTA:

Si $\overline{MN}$ es la sección áurea de $\overline{PQ}$, entonces:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \phi'$$

Conjugado del número de oro

Como también:

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi$$

Número de oro

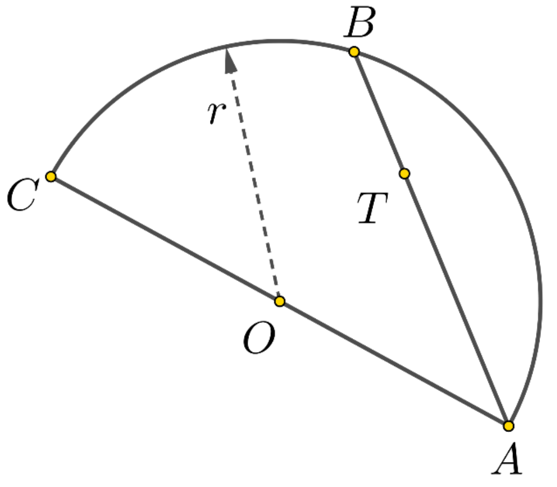
El número de oro ϕ ($\phi \approx 1{,}618\ldots$) y su conjugado son sin duda alguna números muy interesantes que han despertado el interés desde los griegos de la época de Euclides y de grandes personajes de la historia, como Leonardo da Vinci, Luca Pacioli, Johannes Kepler entre otros, este valor se encuentra no sólo por meras expresiones matemáticas, sino también en la naturaleza.

CURSO DE GEOMETRÍA

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

EXAMEN DE ADMISIÓN UNI 2008-I

En la figura $\boxed{CB = \sqrt{7},}$ O centro de la circunferencia, $\boxed{\text{la razón de } r \text{ y } BA \text{ es de 2 a 3.}}$ si $\boxed{\overline{AT} \text{ es el segmento áureo de } \overline{AB},}$ determine AT.



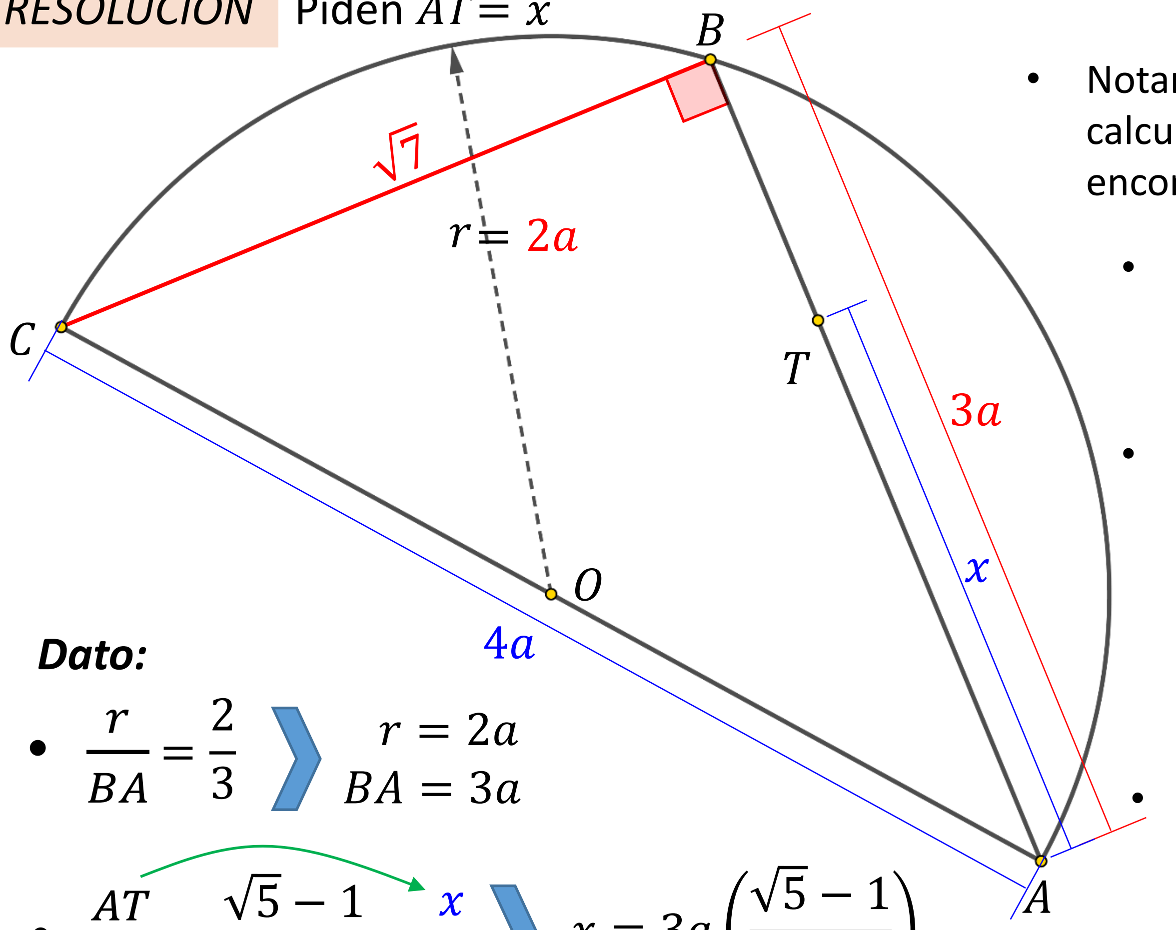
$A)\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ $\quad$ $B)\ \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$

$C)\ \frac{4}{3}(\sqrt{5}-1)$

$D)\ \frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ $\quad$ $E)\ \frac{5}{3}(\sqrt{5}-1)$

RESOLUCIÓN

Piden $AT = x$



Dato:

- $\frac{r}{BA} = \frac{2}{3}$ ❯ $r = 2a$, $BA = 3a$
- $\frac{AT}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{x}{3a}$ ❯ $\underbrace{x = 3a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}_{(i)}$

- Notamos que debemos calcular el valor de a para encontrar el valor de x
  - Como $r = 2a$

    $\rightarrow AC = 4a$
- En el $\triangle ABC$ aplicamos el teorema de Pitágoras:

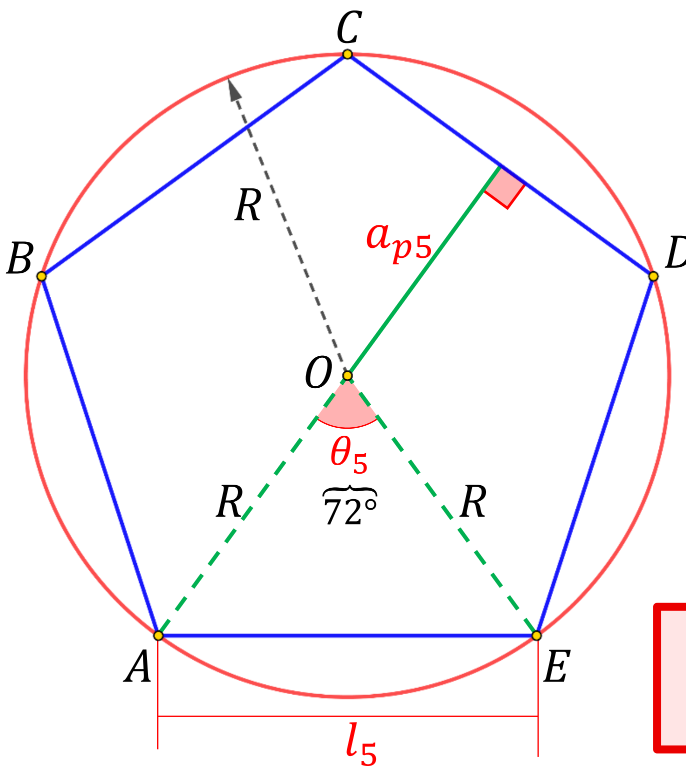
  $(4a)^2 = (3a)^2 + \sqrt{7}^2$

  $\rightarrow a = 1$
- Reemplazamos en (i):

$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{x = 3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}}$$

POLÍGONOS REGULARES

PENTÁGONO REGULAR (l_5)



Ángulo central θ_5

$$\theta_5 = \frac{360°}{5}$$

$$\boxed{\theta_5 = 72°}$$

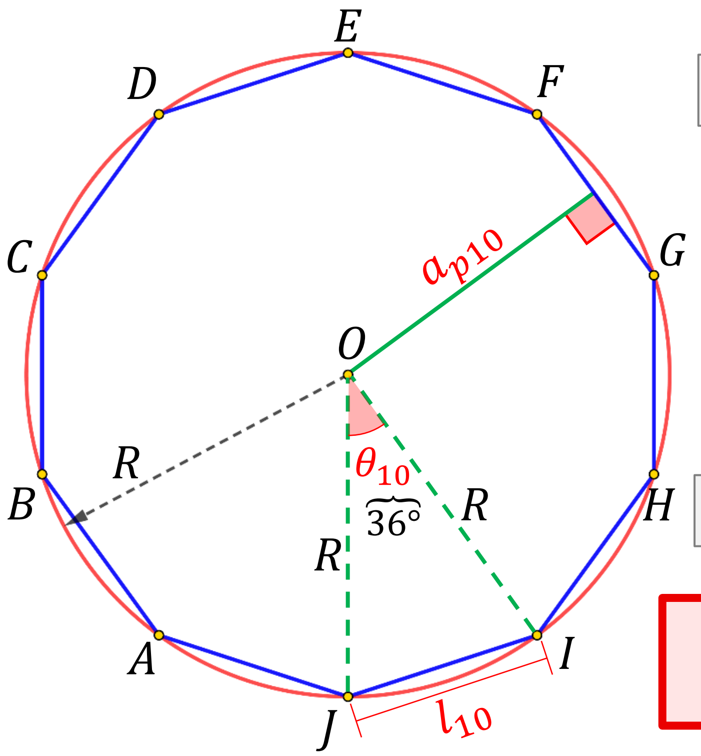
Cálculo del lado l_5

$$\boxed{l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Cálculo del Apotema a_{p5}

$$\boxed{a_{p5} = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)}$$

DECÁGONO REGULAR (l_{10})



Ángulo central θ_{10}

$$\theta_{10} = \frac{360°}{10}$$

$$\boxed{\theta_{10} = 36°}$$

Cálculo del lado l_{10}

$$\boxed{l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

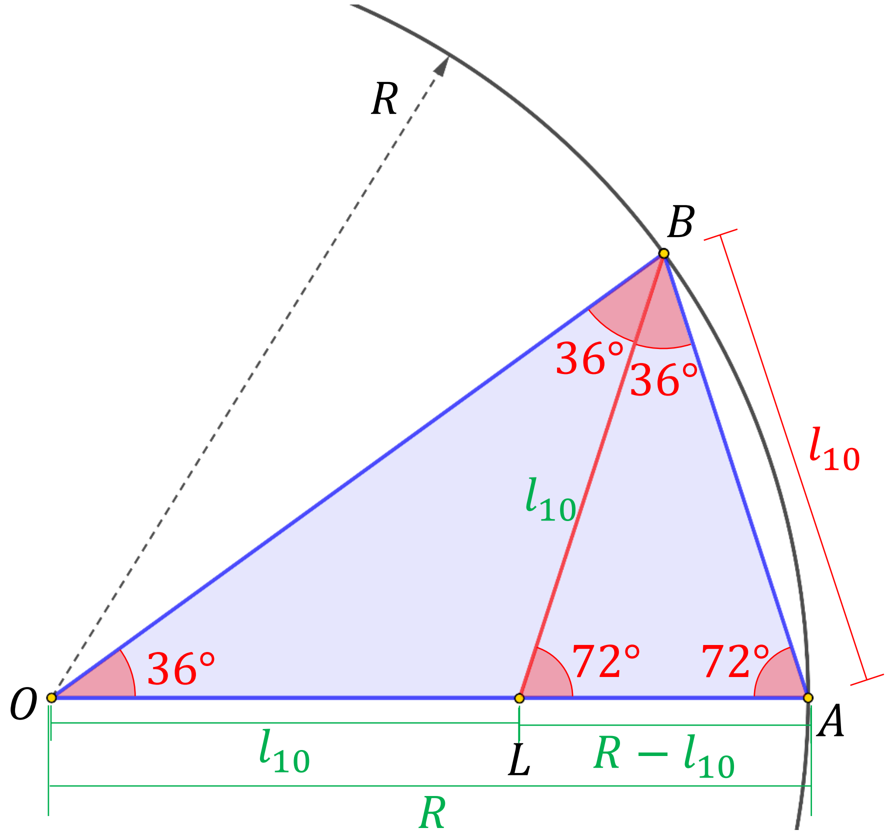
Cálculo del Apotema a_{p10}

$$\boxed{a_{p10} = \frac{R}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})}$$

POLÍGONOS REGULARES

VEAMOS LA PRUEBA DE LOS RESULTADOS PARA LAS LONGITUDES DE l_{10} y a_{p10}

Para ello, usaremos el triángulo elemental del decágono regular:



Cálculo de l_{10}

Trazamos la bisectriz interior $\overline{BL}$. $\rightarrow$ *El* ΔLBA es isósceles,

con ello $BL = l_{10}$, además: $OL = l_{10} \rightarrow LA = R - l_{10}$

En el ΔOBA por antiparalela:

$$(l_{10})^2 = (R - l_{10})(R) \rightarrow (l_{10})^2 + R \cdot l_{10} - R^2 = 0$$

Resolviendo: $\therefore\ \boldsymbol{l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)}\ \ldots(i)$

Cálculo de a_{p10}

Por teorema sabemos: $\boxed{\boldsymbol{a_p = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (l_n)^2}}}$ $\rightarrow a_{p10} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (l_{10})^2}\ \ldots(ii)$

Reemplazamos (i) en (ii): $\therefore\ \boldsymbol{a_{p10} = \frac{R}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})}$

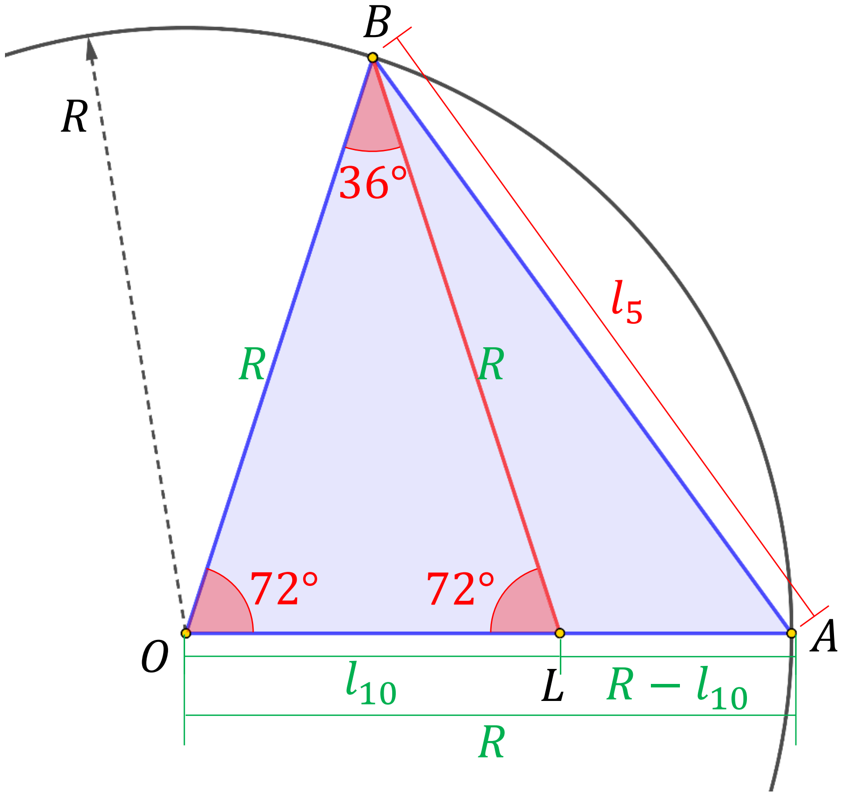
Nota:
De (i) $\quad \frac{l_{10}}{R} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

El lado de un decágono regular es la sección áurea de su circunradio.

POLÍGONOS REGULARES

VEAMOS LA PRUEBA DE LOS RESULTADOS PARA LAS LONGITUDES DE l_5 y a_{p5}

Para ello, usaremos el triángulo elemental del pentágono regular:



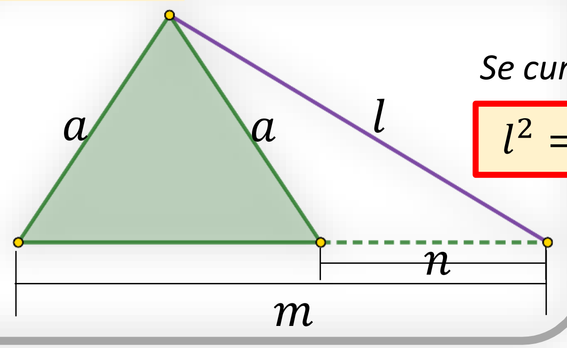
Cálculo de l_5

Trazamos la ceviana interior $\overline{BL}$. Tal que $OB = BL = R$

Notamos que el ΔOBL es el elemental del decágono regular de circunradio R.

Con ello tenemos que $OL = l_{10}$ $\rightarrow LA = R - l_{10}$

RECUERDA:



Se cumple:

$$\boxed{l^2 = a^2 + m \cdot n}$$

En el ΔOBL:

$$(l_5)^2 = R^2 + (R)(R - l_{10}) \ldots (i)$$

Pero: $l_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Reemplazamos en (i):

$$\therefore \boldsymbol{l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \ldots (ii)$$

Cálculo de a_{p10}

Por teorema sabemos: $\boxed{\boldsymbol{a_p = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (l_n)^2}}}$ $\rightarrow a_{p5} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - (l_5)^2} \ldots (iii)$

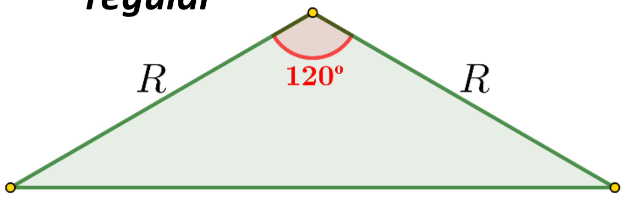
Reemplazamos (ii) en (iii): $\therefore \boldsymbol{a_{p5} = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)}$

CURSO DE GEOMETRÍA

POLÍGONOS REGULARES

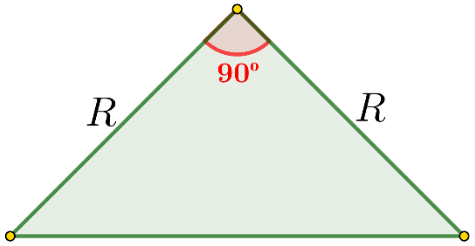
TRIÁNGULOS ELEMENTALES

- **ΔElemental del triángulo regular**



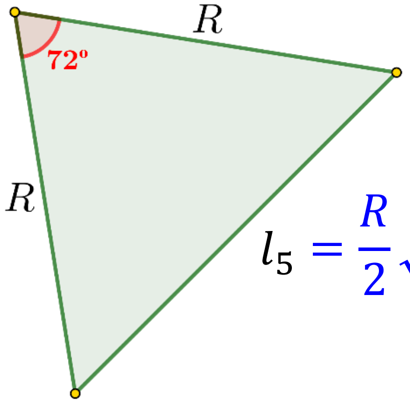
$$\overbrace{R\sqrt{3}}^{l_3}$$

- **ΔElemental del cuadrilátero regular**



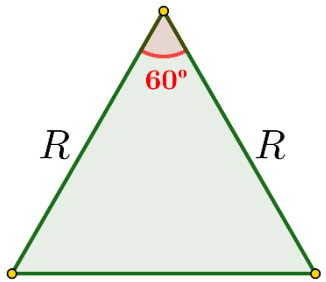
$$\overbrace{R\sqrt{2}}^{l_4}$$

- **ΔElemental del pentágono regular**



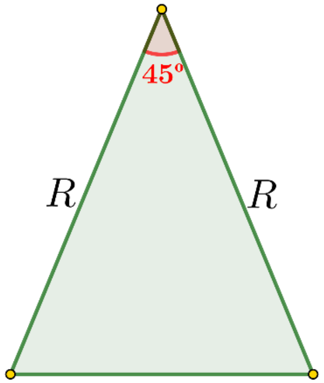
$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

- **ΔElemental del hexágono regular**



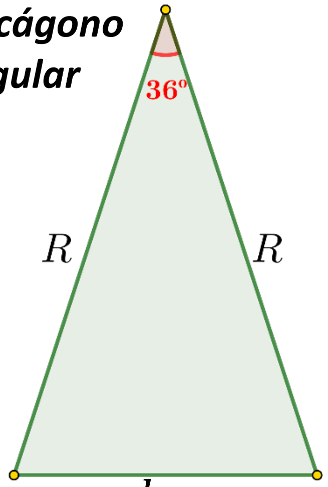
$$\overbrace{R}^{l_6}$$

- **ΔElemental del octágono regular**



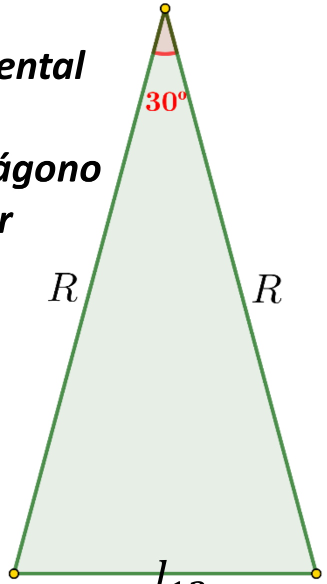
$$\overbrace{R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}^{l_8}$$

- **ΔElemental del decágono regular**



$$\overbrace{\frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)}^{l_{10}}$$

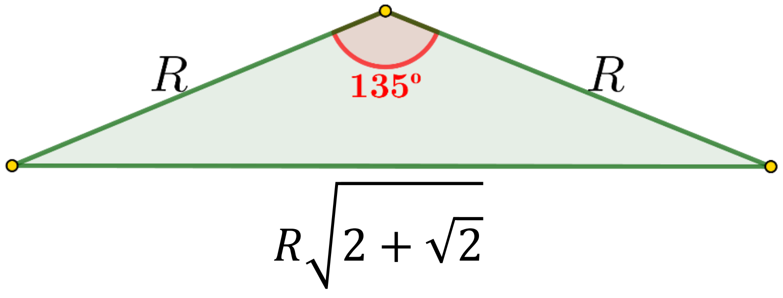
- **ΔElemental del dodecágono regular**

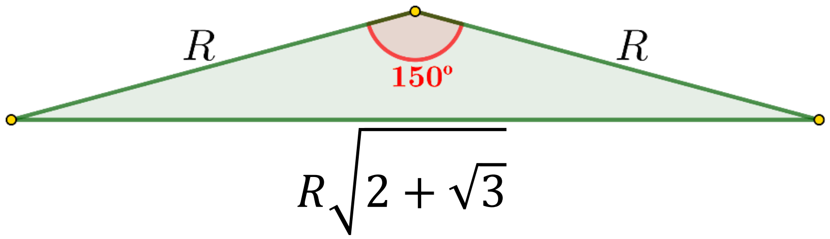


$$\overbrace{R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}^{l_{12}}$$

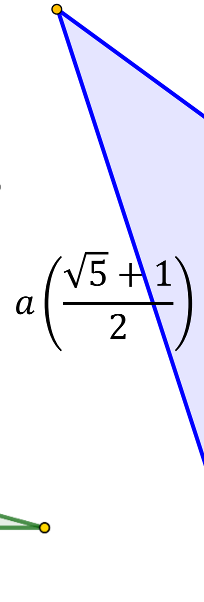
POLÍGONOS REGULARES

TEOREMAS ADICIONALES

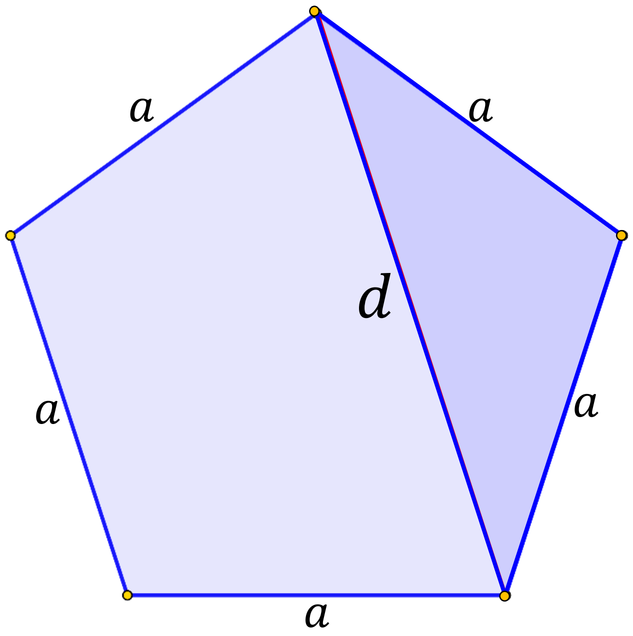




Tener presente también a estos triángulos, ya que tienen cierta frecuencia en problemas que involucren a polígonos regulares.



PENTÁGONO REGULAR



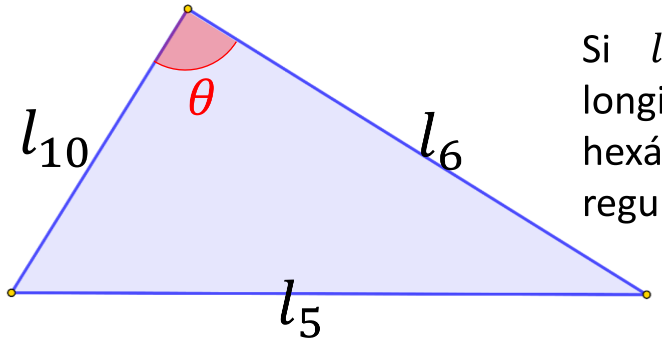
La longitud del lado de un pentágono regular es igual a la longitud de la sección áurea de su diagonal.

De manera práctica:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

También:

$$\boxed{\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$



Triángulo que cumple el teorema de Pitágoras

Si l_{10}, l_6 y l_5 representan las longitudes de los lados del decágono, hexágono y pentágono (todos regulares) con el mismo circunradio.

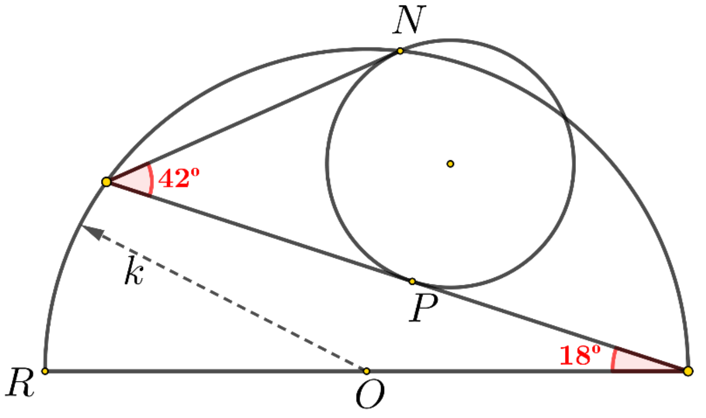
Se cumple: $\boxed{\boldsymbol{\theta = 90^\circ}}$

$$\leftrightarrow (\boldsymbol{l_{10}})^2 + (\boldsymbol{l_6})^2 = (\boldsymbol{l_5})^2$$

POLÍGONOS REGULARES

EXAMEN DE ADMISIÓN UNI 2019-II

En la figura O es el centro de la semicircunferencia. Además, P y N son puntos de tangencia. Calcule PR.



A) $\frac{k}{2}\sqrt{10-\sqrt{20}}$

B) $\frac{k}{3}\sqrt{10-\sqrt{20}}$

C) $\frac{k}{2}\sqrt{15-\sqrt{20}}$

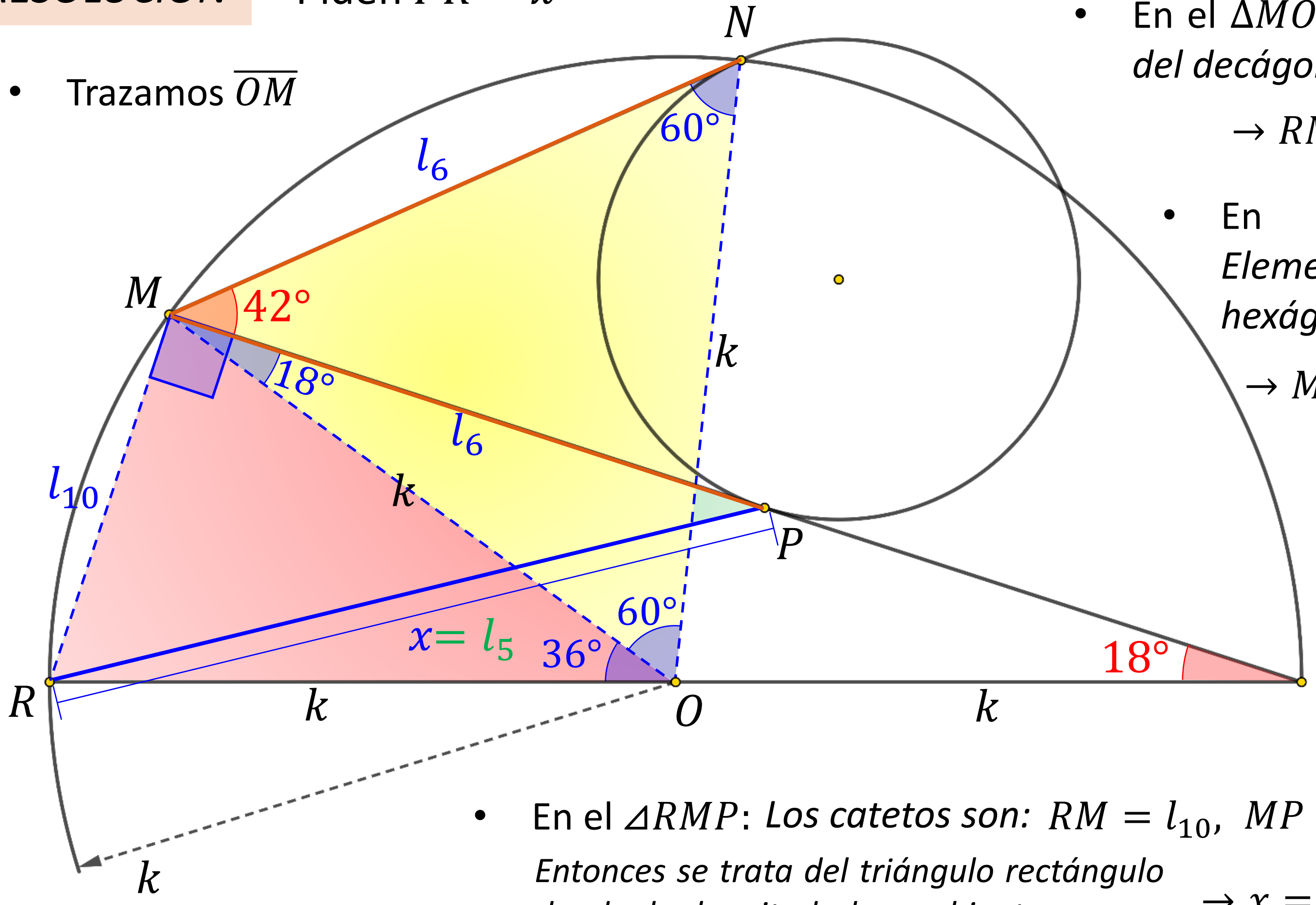
A) $\frac{k}{4}\sqrt{15-\sqrt{20}}$

E) $\frac{k}{2}\sqrt{10+\sqrt{20}}$

RESOLUCIÓN

Piden $PR = x$

- Trazamos $\overline{OM}$



- En el ΔMOR elemental del decágono regular

  $\rightarrow RM = l_{10}$

- En el ΔMON Elemental del hexágono regular

  $\rightarrow MN = l_6 = k$

- En el ΔRMP: Los catetos son: $RM = l_{10}$, $MP = l_6$

  Entonces se trata del triángulo rectángulo donde la longitud de su hipotenusa es igual a l_5 $\rightarrow x = l_5$

RECUERDA:

$$\boldsymbol{l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\boldsymbol{\therefore\ x = \frac{k}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$