OBJETIVOS:

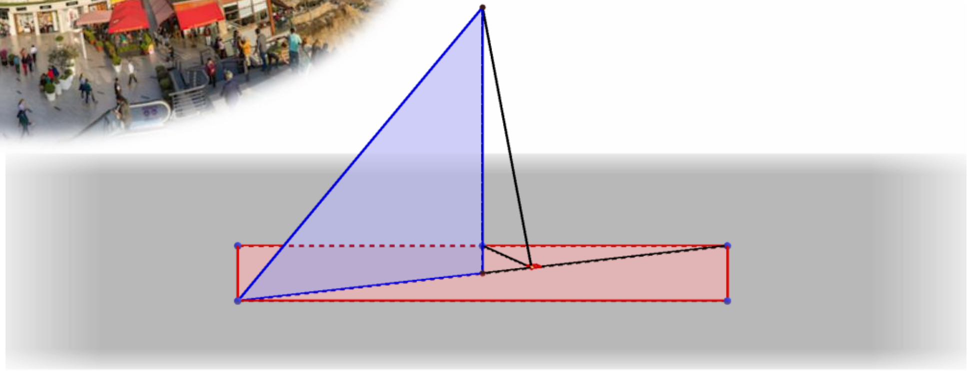
- *Identificar los elementos geométricos que nos permiten determinar un plano.*
- *Diferenciar las distintas posiciones que pueden adoptar las rectas y planos en el espacio.*
- *Aplicar de manera adecuada el teorema de las tres perpendiculares.*
- *Finalmente entender que la habilidad obtenida en la geometría plana nos servirá mucho para resolver problemas de geometría del espacio.*

INTRODUCCIÓN

Cuando observamos nuestro alrededor, notamos que estamos rodeados de diversos objetos dispuestos en el espacio que nos rodea, por ejemplo las repisas colgantes en las paredes de una habitación, la ubicación de los postes de luz, un puente edificado encima de un río, etc.

Todas las situaciones antes mencionadas y muchas más se verán contrastadas de manera teórica en esta parte del curso, así mismo es muy importante la orientación espacial, por ejemplo supongamos que vamos a ir a un centro comercial en el cual deseamos realizar algunas compras, si ya conocemos dicho lugar sabemos como orientarnos para poder dirigirnos a un lugar especifico y así poder ahorrar tiempo, por que se da ello, puesto que ya conocemos la disposición espacial de las tiendas en dicho centro.

Así como en la vida diaria es importante la orientación de los lugares, esto también debe de darse en los problemas para poder tener una buena ubicación y desarrollo del mismo



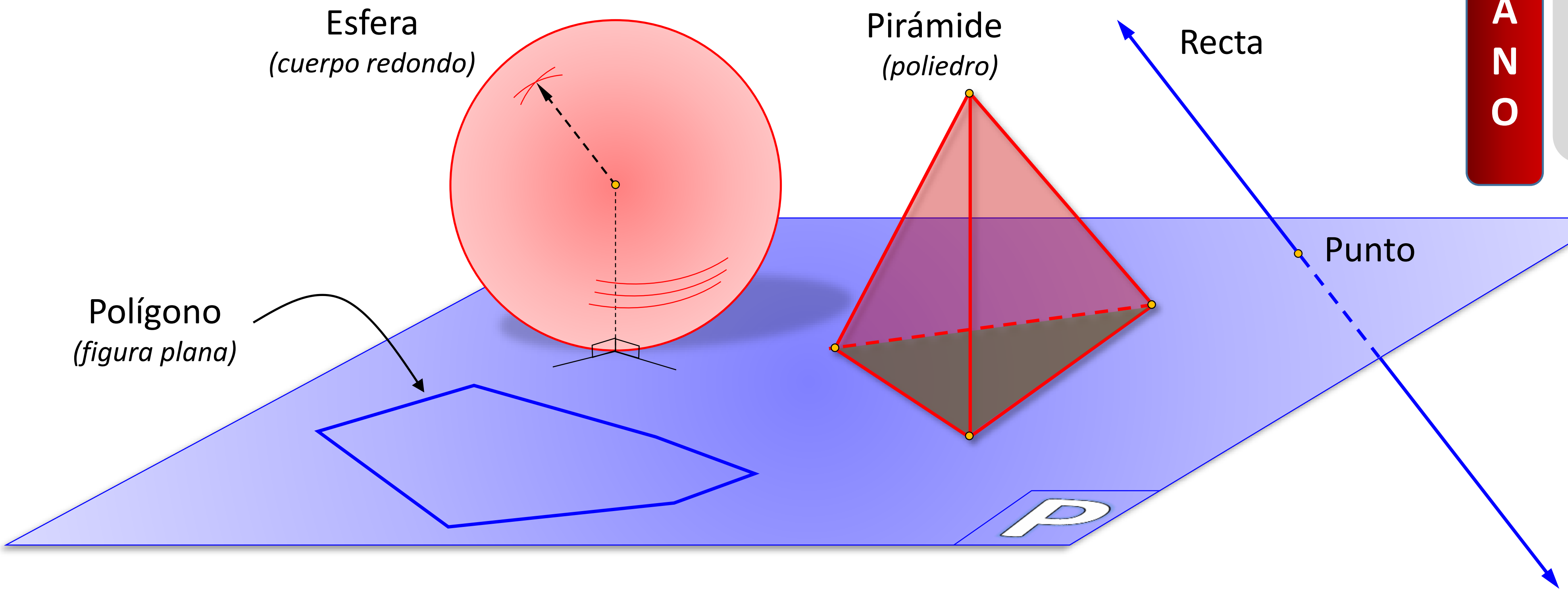
DETERMINACIÓN DE PLANO

NOCIONES PREVIAS

¿Que estudia la geometría del espacio?

La geometría del espacio se encarga del estudio de las figuras cuyos puntos no están en un mismo plano.

ESPACIO — *Es el conjunto de todos los infinitos puntos*



PLANO

Consideramos al plano como una superficie llana infinita que carece de espesor, donde existen infinitos puntos e infinitas rectas.

NOTACIÓN

P: Se lee plano P

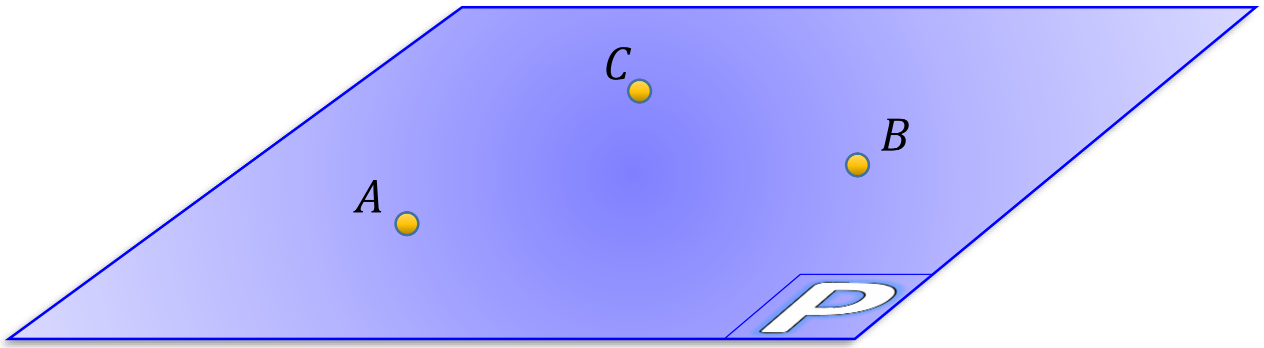
La forma gráfica de representar a un plano usualmente será una región paralelográmica.

POSTULADO

DETERMINACIÓN DEL PLANO

Tres puntos no colineales determinan un plano, en otras palabras, dichos puntos fijan la posición del plano y éstos pertenecen a dicho plano.

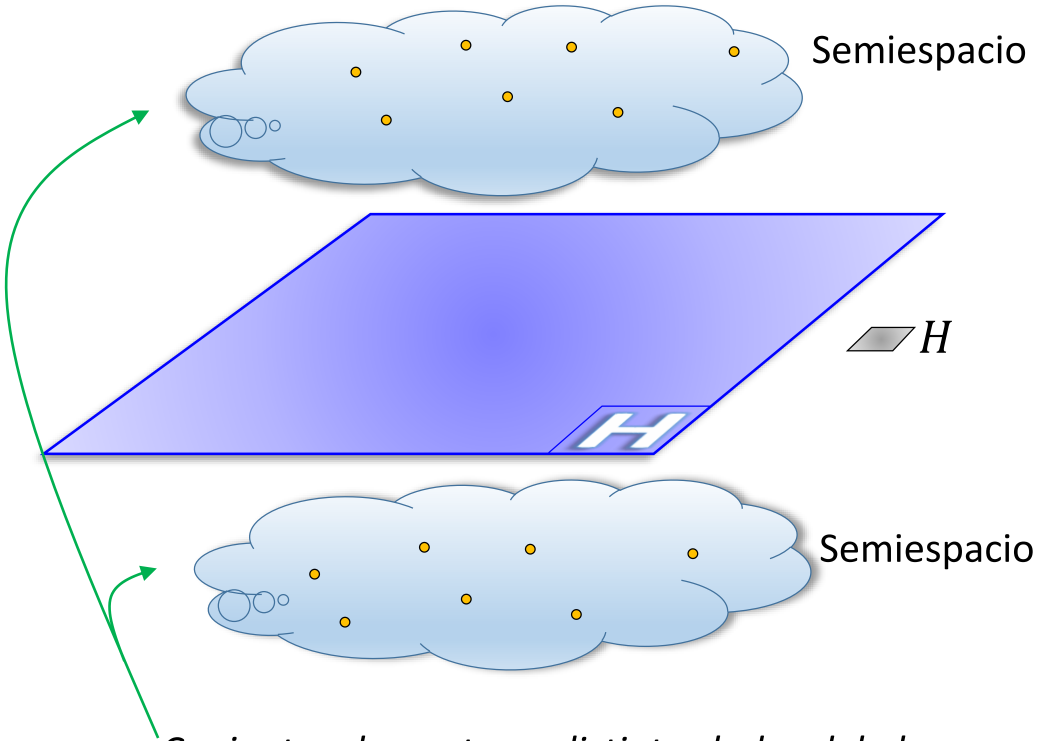
Sean A, B y C puntos no colineales.



- A, B, C; determinan al ▱P
- ▱P se encuentra fijo en el espacio
- $\{A, B, C\} \subset$ ▱P

NOTA

Cuando tenemos un plano determinado en el espacio, éste lo divide en dos semiespacios. Veamos:

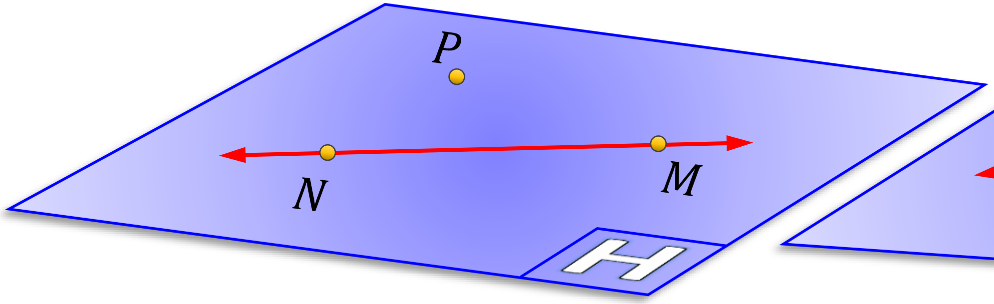


Conjuntos de puntos a distintos lados del plano.

DETERMINACIÓN DEL PLANO

TEOREMA 1

Una recta y un punto exterior a ella, determinan un plano al cual pertenecen.

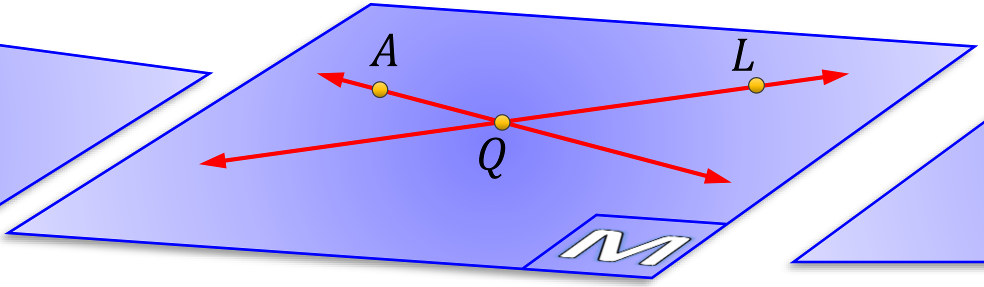


- $P \notin \overleftrightarrow{NM}$

$\rightarrow P \text{ y } \overleftrightarrow{NM}$ determinan al $\square H$

TEOREMA 2

Dos rectas secantes, determinan un plano al cual pertenecen.

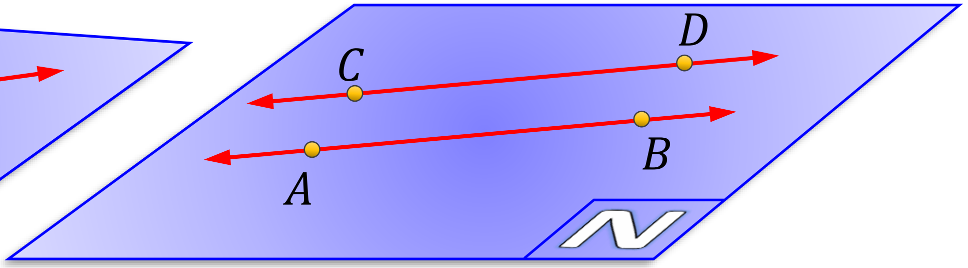


- $\overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{QL} = \{Q\}$

$\rightarrow \overleftrightarrow{AQ} \text{ y } \overleftrightarrow{QL}$ determinan al $\square M$

TEOREMA 3

Dos rectas paralelas, determinan un plano al cual pertenecen.



- $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\rightarrow \overleftrightarrow{AB} \text{ y } \overleftrightarrow{CD}$ determinan al $\square N$

NOTA

A los distintos puntos y rectas que pertenecen a un mismo plano se les denomina elementos coplanares.

De lo anterior, entonces recuerda que las rectas secantes y las rectas paralelas son coplanares.

DETERMINACIÓN DEL PLANO

CANTIDAD MÁXIMA DE PLANOS (TEOREMAS)

Con m puntos

La cantidad máxima de planos que podemos determinar con m puntos es:

$$N^{o}p = C_3^m = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

$N^{o}p$: *Número de planos*

Con n rectas

La cantidad máxima de planos que podemos determinar con n rectas es:

$$N^{o}p = C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Con m puntos y n rectas

La cantidad máxima de planos que podemos determinar con m puntos y n rectas es:

$$N^{o}p = C_3^m + C_2^n + m \cdot n$$

EJEMPLOS

- Calcule la número máximo de planos que se pueden determinar con 5 puntos.

Resol: Aplicamos el primer teorema:

$$N^{o}_p = \frac{5(5-1)(5-2)}{6}$$

$$\therefore N^{o}_p = 10$$

- Calcule la número máximo de planos que se pueden determinar con 4 rectas.

Resol: Aplicamos el segundo teorema:

$$N^{o}_p = \frac{4(4-1)}{2}$$

$$\therefore N^{o}_p = 6$$

- Calcule la número máximo de planos que se pueden determinar con 5 puntos y 4 rectas.

Resol: Aplicamos el tercer teorema:

$$N^{o}_p = 10 + 6 + 5 \cdot 4$$

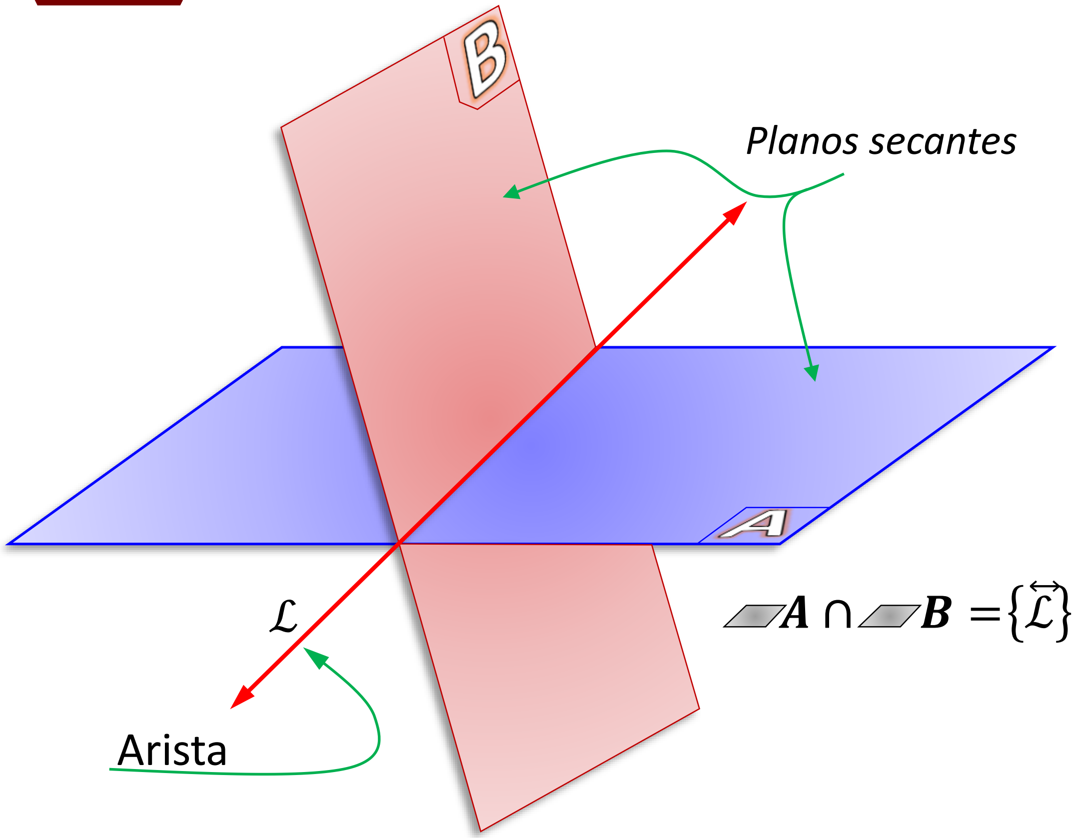
$$\therefore N^{o}_p = 36$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS Y PLANOS

POSICIONES RELATIVAS ENTRE PLANOS

PLANOS SECANTES

Dos planos secantes son aquellos que tienen puntos de intersección. Dichos puntos forman una recta, la cual se denomina arista.

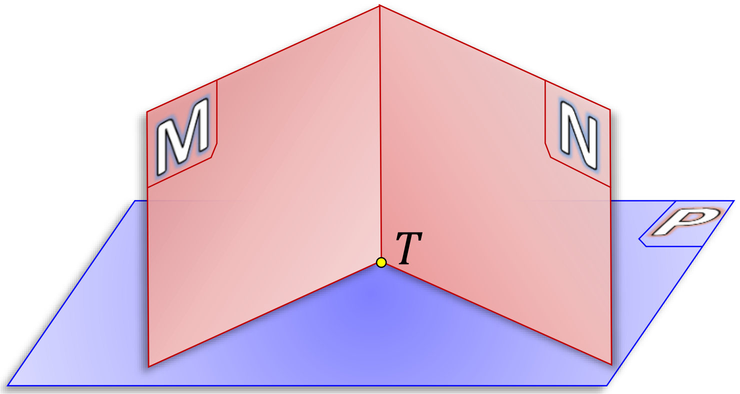


$$▱A \cap ▱B = \{\overleftrightarrow{\mathcal{L}}\}$$

NOTA

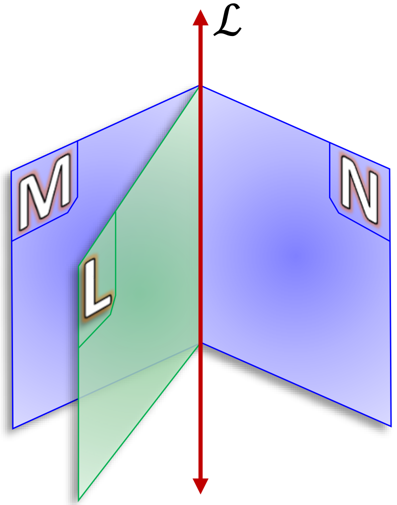
Respecto a más planos

La intersección de tres planos o más, puede ser un punto o puede ser una recta. Veamos:



$$▱P \cap ▱N \cap ▱M = \{T\}$$

Los planos son concurrentes en T.



$$▱M \cap ▱N \cap ▱L = \{\overleftrightarrow{\mathcal{L}}\}$$

Los planos son concurrentes en $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$.

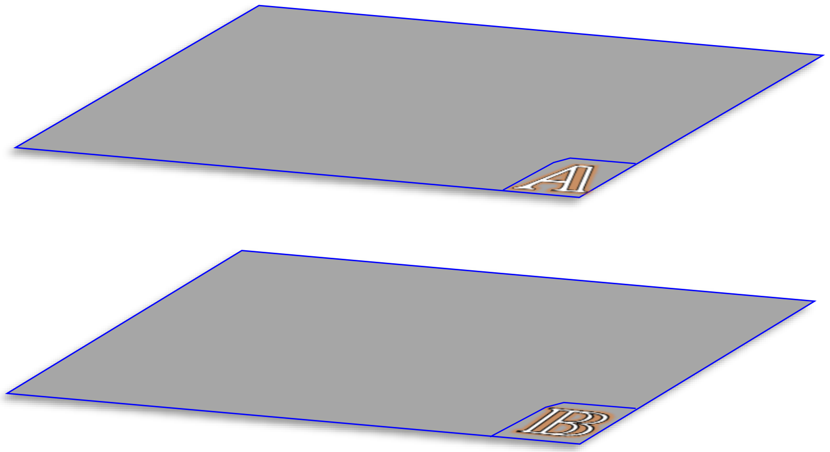
Las esquinas de las habitaciones nos dan la idea de planos concurrentes en un punto.

Un cuaderno o libro entre abierto nos da la idea de planos concurrentes en una recta.

POSICIONES RELATIVAS ENTRE PLANOS

PLANOS PARALELOS

Los planos paralelos, son aquellos que no tienen puntos de intersección (no se cortan).



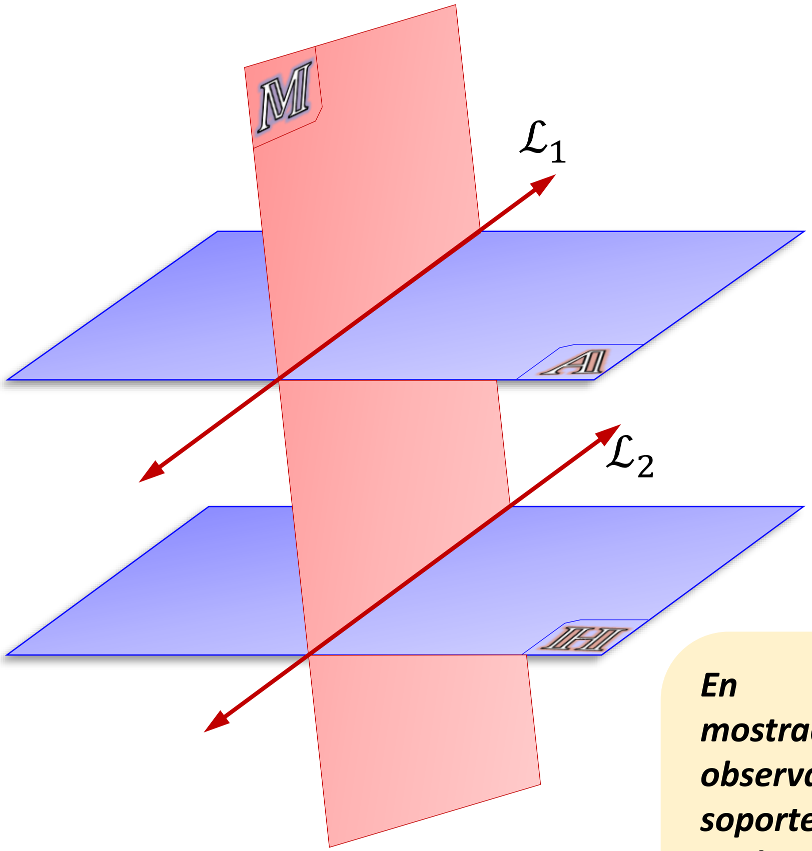
Del gráfico:

▱$\mathbb{A} \parallel$ ▱$\mathbb{B}$: ***Plano $\mathbb{A}$ paralelo al plano $\mathbb{B}$***

$$▱\mathbb{A} \cap ▱\mathbb{B} = \emptyset$$

TEOREMA

Relacionando las dos posiciones



Sean ▱$\mathbb{A} \parallel$ ▱$\mathbb{H}$

▱$\mathbb{M}$: Secante

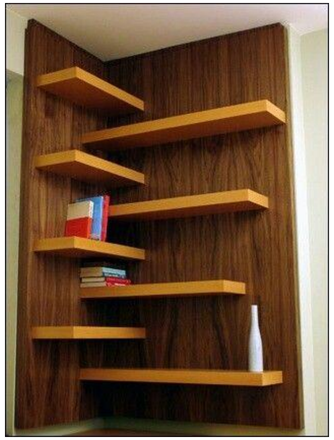
Del gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ son las aristas

Se cumple:

$$\boldsymbol{\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}}$$

En el mueble mostrado, podemos observar que los soportes horizontales y el soporte vertical están cumpliendo el teorema mencionado.

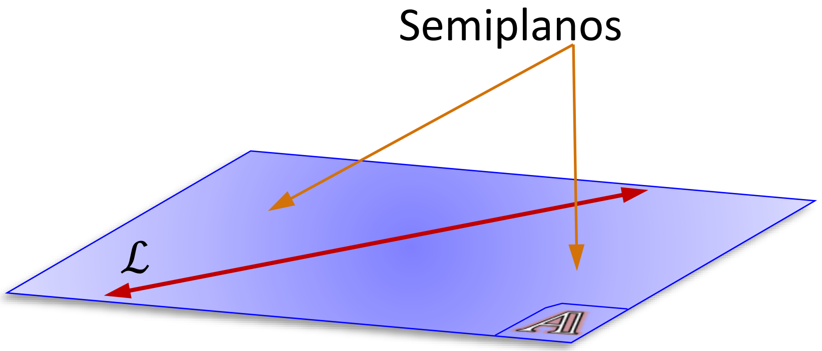


POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y PLANO

EXISTEN TRES POSICIONES

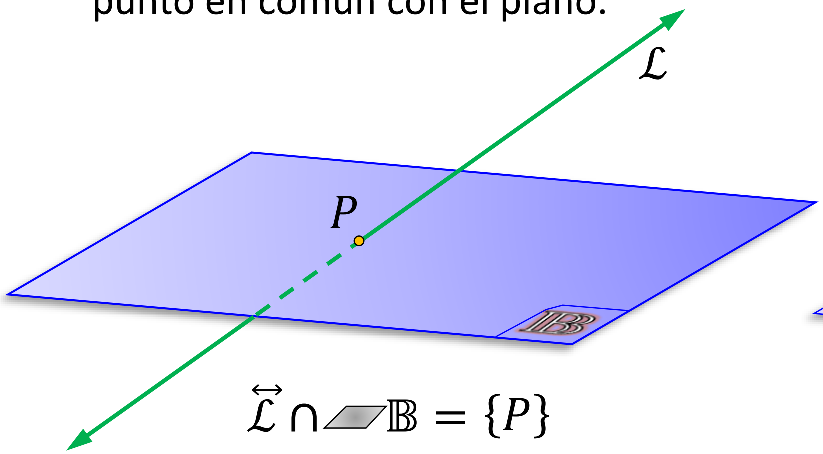
RECTA CONTENIDA EN EL PLANO

Es aquella recta que tiene todos sus puntos en el plano.



RECTA SECANTE AL PLANO

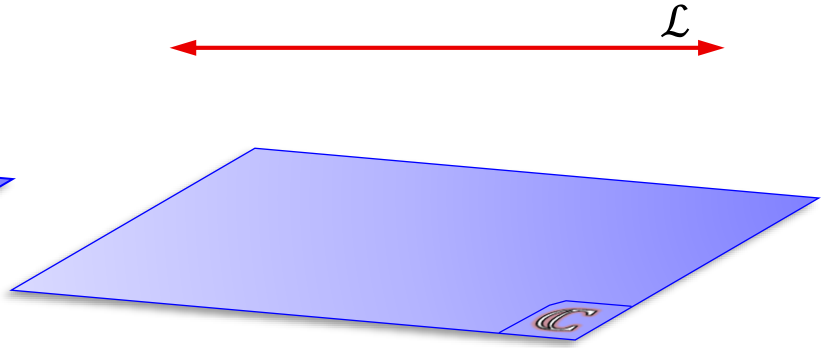
Es aquella recta que tiene solo un punto en común con el plano.



$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \cap \text{▱}\mathbb{B} = \{P\}$$

RECTA PARALELA AL PLANO

Es aquella recta que no tiene punto en común con el plano.



$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \cap \text{▱}\mathbb{C} = \emptyset$$

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ esta contenida en ▱$\mathbb{A}$

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ es secante al ▱$\mathbb{B}$

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ es paralela al ▱$\mathbb{C}$

NOTA

Una recta contenida en el plano, divide a éste en dos semiplanos.

El parante de la sombrilla y la mesa nos dan la idea de una recta secante a un plano.

La posición en que se encuentra la barra que sostiene a las pesas, respecto del suelo, nos da la idea de una recta paralela al plano.

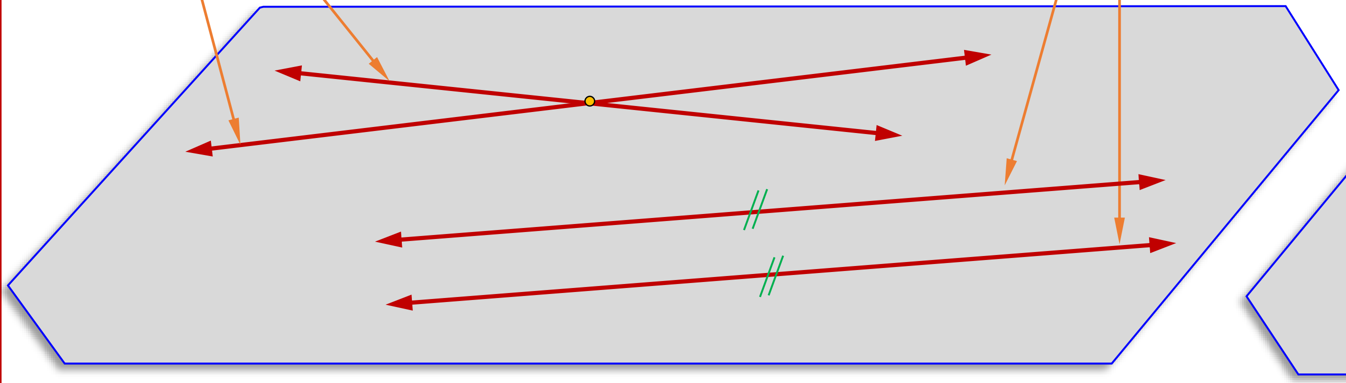
POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS

COPLANARES

SECANTES

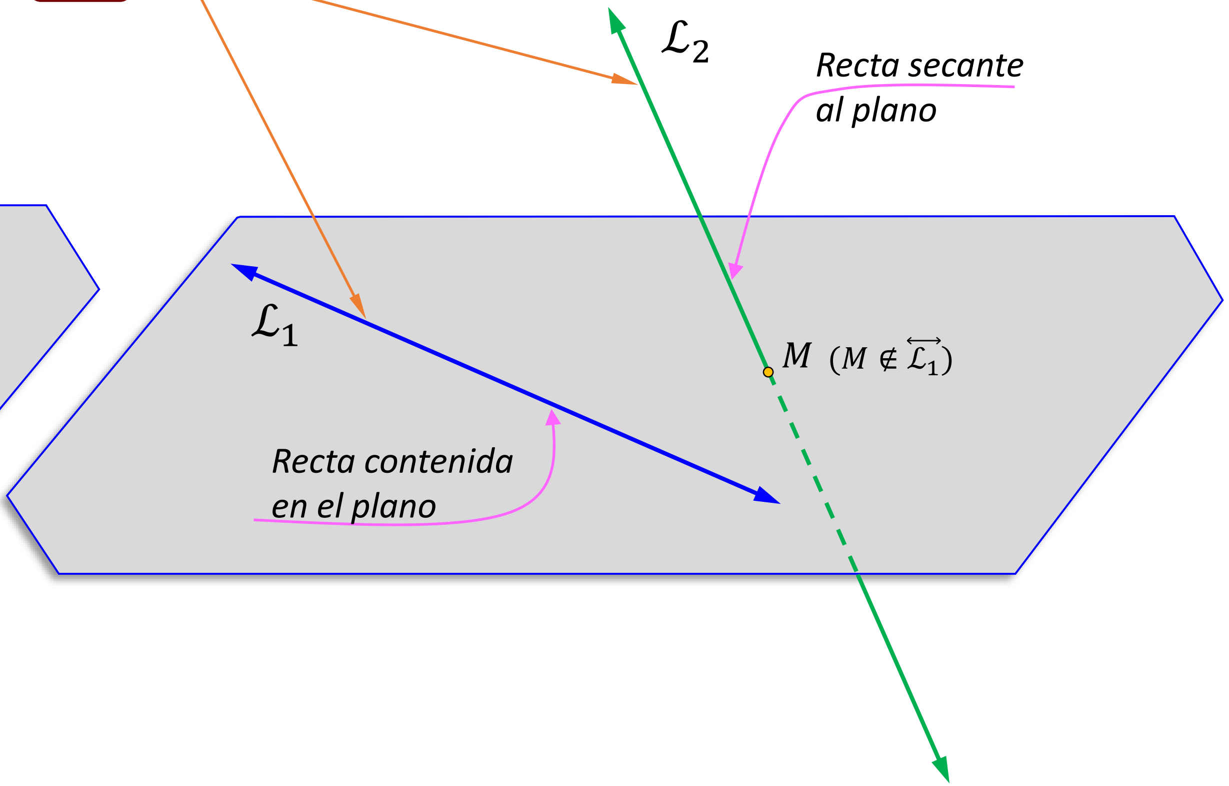
PARALELAS

Recuerda que éstas rectas, determinan planos



NO COPLANARES

ALABEADAS *No tienen punto en común y no determinan planos*



APLICACÓN

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Tres puntos cualesquiera son coplanares.
II. Dos rectas siempre determinan un plano.
III. La intersección de dos planos secantes es un segmento.

MEDIDA DEL ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

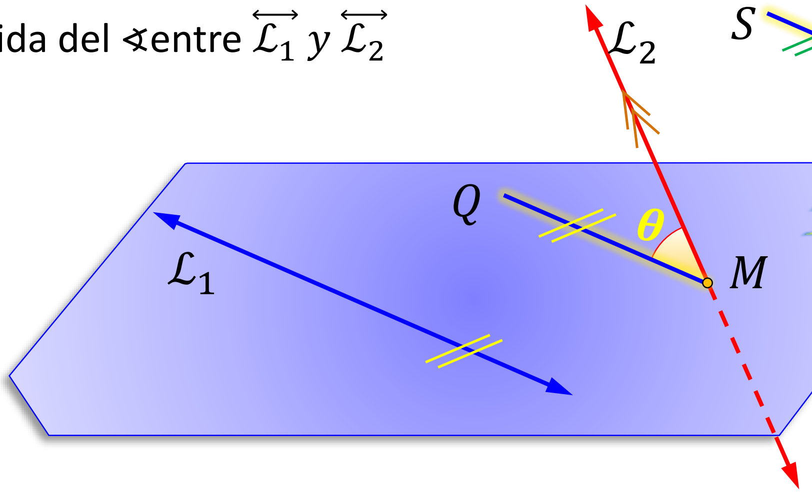
Para poder calcular la medida del ángulo entre dos rectas alabeadas, vamos apoyarnos de las **paralelas**. Veamos:

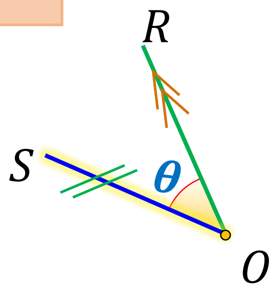
Sean $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ dos rectas alabeadas,

Primer método *Por un punto de una de las alabeadas, trazamos una paralela a la otra*

Por M trazamos: $\overline{MQ} \parallel \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$

θ: Medida del $\sphericalangle$entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$





Segundo método *Por un punto del espacio, trazamos paralelas a ambas rectas alabeadas*

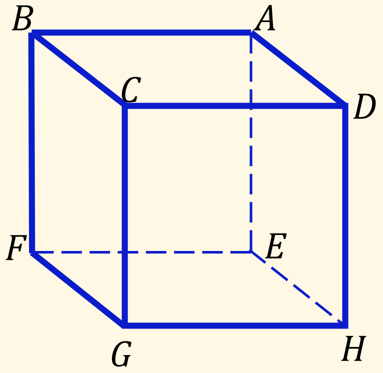
Por O trazamos las paralelas a $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

$m\sphericalangle ROS = \theta$: Medida del $\sphericalangle$entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

NOTA *Cuando la medida del ángulo entre dos rectas alabeadas es 90°, dichas rectas se denominan rectas **ortogonales.***

APLICACIÓN

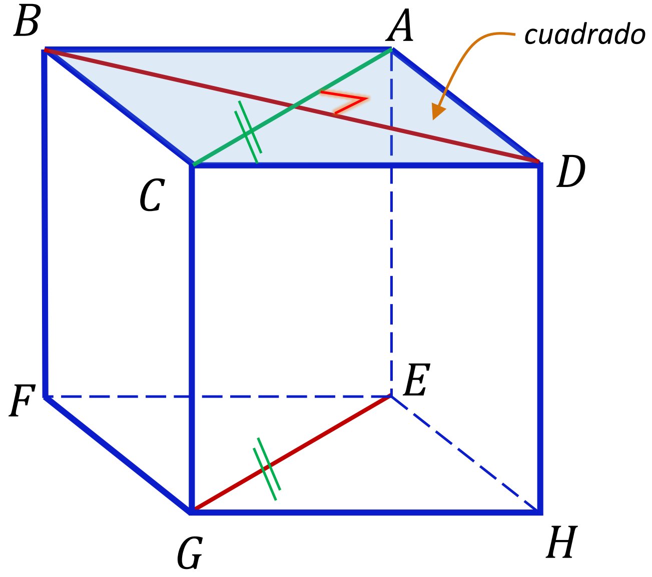
Del gráfico, se tiene un cubo. Indique si $\overline{DB}$ y $\overline{EG}$ son ortogonales.



***Ten en cuenta que**, en un cubo todas sus caras son regiones cuadradas.*

RESOLUCIÓN:

- Trazamos las líneas en mención.



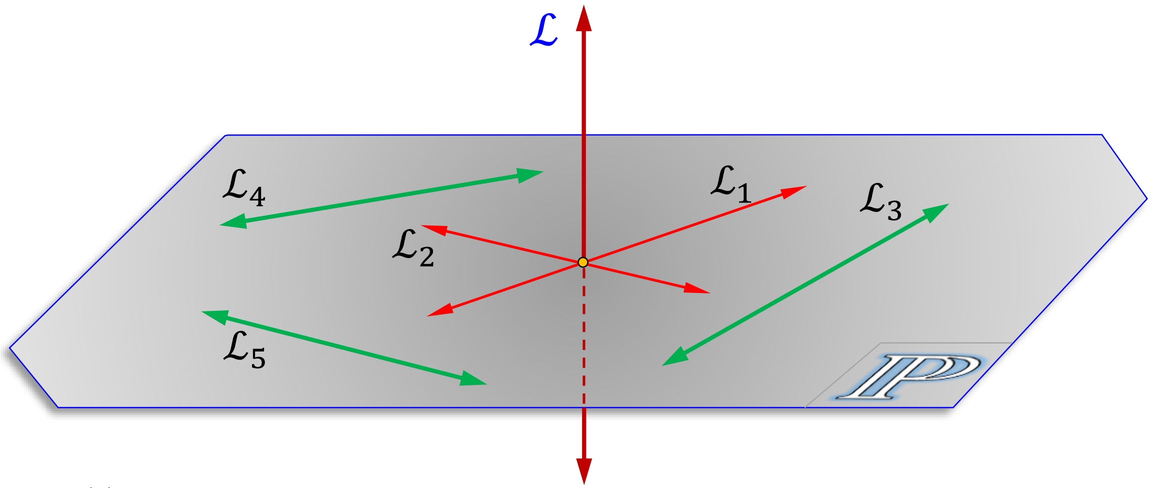
Para saber si son ortogonales debemos verificar si la medida del ángulo que forman es 90°.

Del primer método para el ángulo entre rectas alabeadas notamos que:

$\overline{DB}$ y $\overline{EG}$ son ortogonales.

RECTA PERPENDICULAR AL PLANO

Una recta es perpendicular a un plano, si ésta es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.



$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \mathbb{P}$: *Recta $\mathcal{L}$ perpendicular al plano $\mathbb{P}$.*

Entonces:

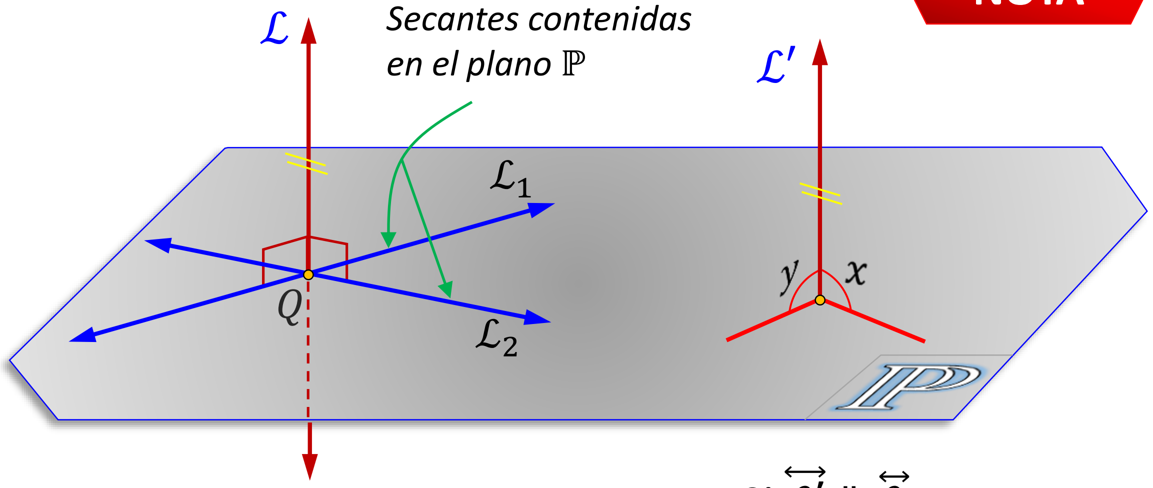
$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \\ \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} \\ \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_3} \\ \vdots \end{array}\right\}$$

Todas éstas rectas, contenidas en el plano $\mathbb{P}$

TEOREMA

Si una recta es perpendicular a dos rectas secantes contenidas en un plano, entonces dicha recta es perpendicular al plano

NOTA



Si: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp \mathbb{P}$

Q: *Pie de la perpendicular.*

Si $\overleftrightarrow{\mathcal{L}'} \parallel \overleftrightarrow{\mathcal{L}}$

$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathcal{L}'} \perp \mathbb{P}$

$$\boxed{x = y = 90^\circ}$$

EXAMEN UNI **2009 – II**

Señale la alternativa que representa la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa(F).

$I.$ Si una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y un plano $\mathbb{P}$ son perpendiculares a una recta $\overleftrightarrow{CD}$, entonces la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el plano $\mathbb{P}$ son paralelas entre sí.

$II.$ La intersección de cuatro planos no paralelos entre sí, siempre es un punto.

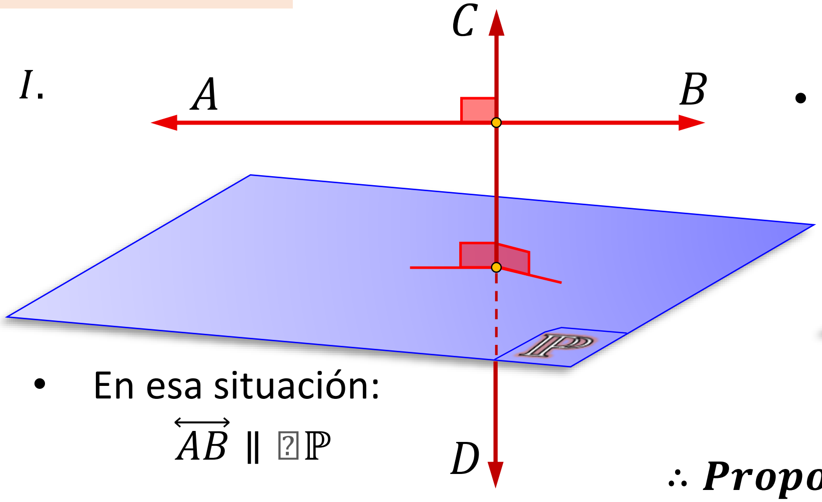
$III.$ Si en todo plano $\mathbb{P}$ determinado por dos rectas paralelas disjuntas, se cumple que dichas rectas son paralelas a un segundo plano $\mathbb{P}_1$, entonces $\mathbb{P}$ es paralelo a $\mathbb{P}_1$.

$A)\ VFV$ $B)\ VFF$ $C)\ FFF$

$D)\ FFV$ $E)\ VVF$

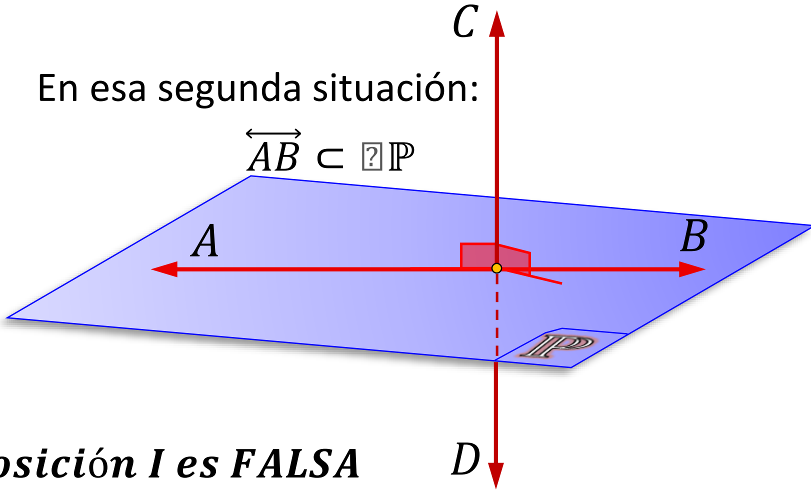
Resolución:

$I.$



- En esa situación:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \mathbb{P}$

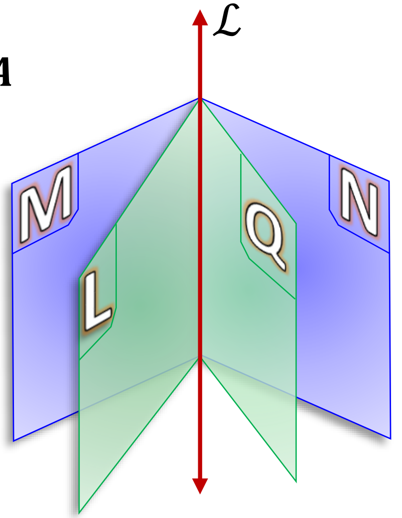


- En esa segunda situación:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \mathbb{P}$

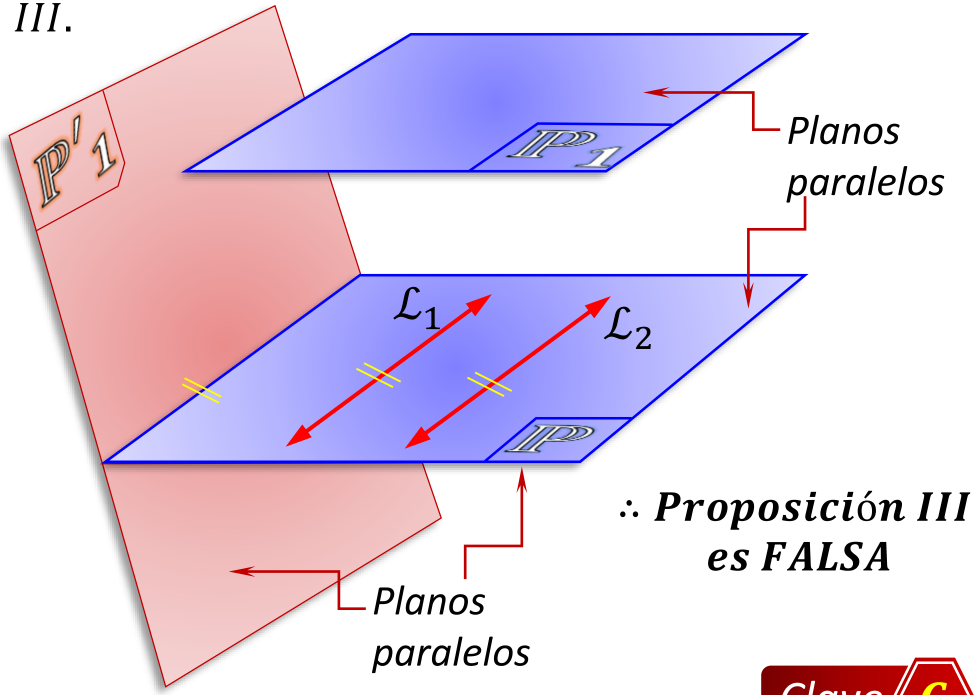
$\therefore$ ***Proposición I es FALSA***

$II.$ ***FALSA***



La intersección de los planos mencionados puede ser también una recta.

$III.$

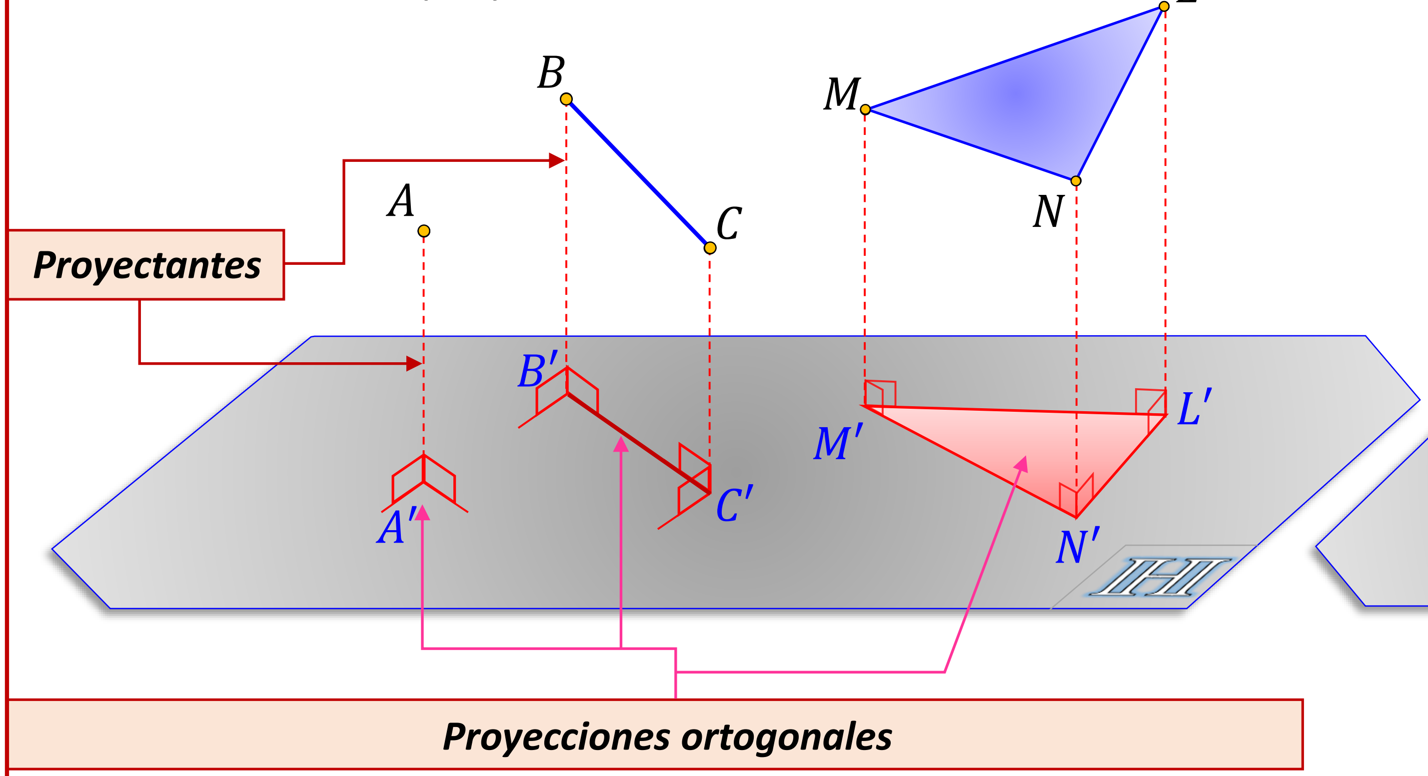


$\therefore$ ***Proposición III es FALSA***

Clave C

PROYECCIÓN ORTOGONAL

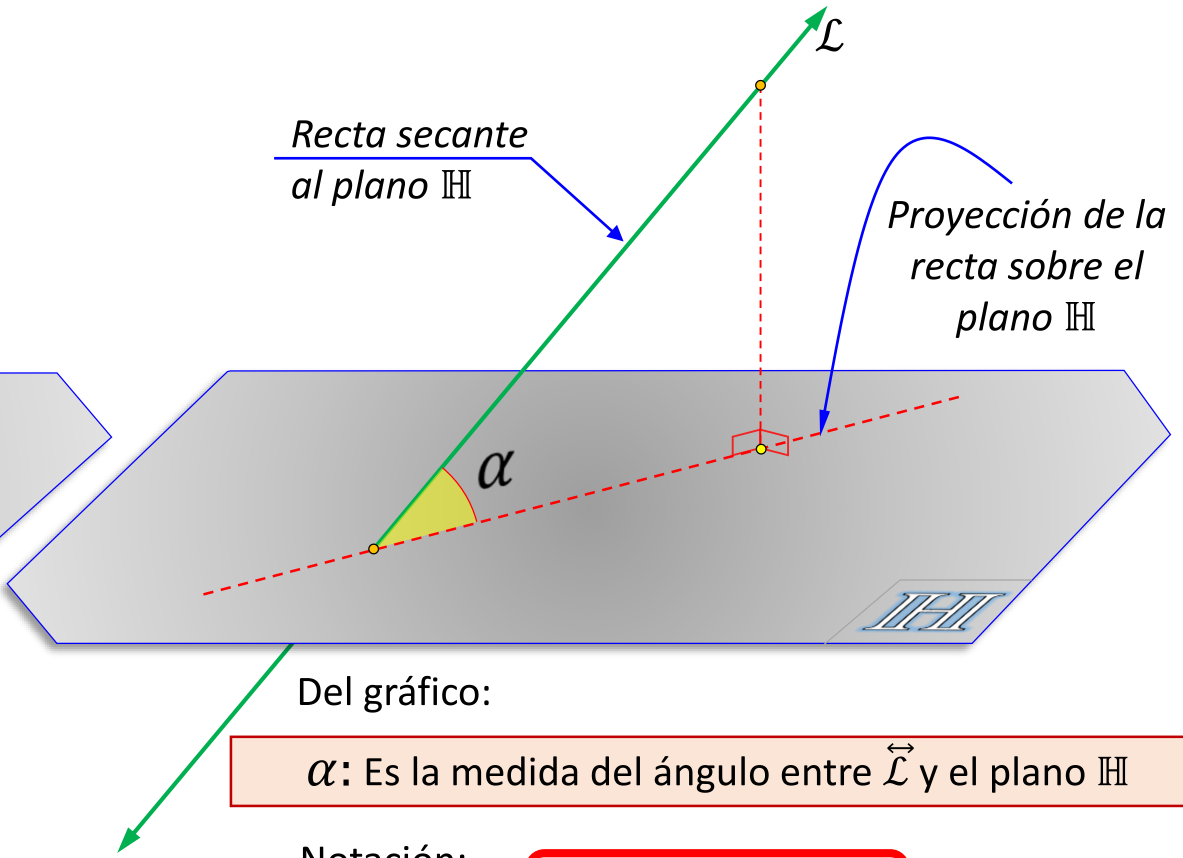
$\mathbb{H}$: Plano de proyección.



Del gráfico:

- A': Proyección ortogonal de A sobre el plano $\mathbb{H}$.
- $\overline{B'C'}$: Proyección ortogonal de $\overline{BC}$ sobre el plano $\mathbb{H}$.
- $\Delta M'N'L'$: Proyección ortogonal de ΔMNL sobre el plano $\mathbb{H}$.

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO



Del gráfico:

α: Es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ y el plano $\mathbb{H}$

Notación: $\boxed{m\sphericalangle(\overleftrightarrow{\mathcal{L}};\ \mathbb{H}) = \alpha}$

El ángulo que forma una recta con un plano, es el que forma la recta con su proyección en el plano.

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Sea $\overleftrightarrow{AB}$ contenida en el plano $\mathbb{H}$ y $P \in$ ⍰$\mathbb{H}$ y exterior a $\overleftrightarrow{AB}$.

PRIMERA PERPENDICULAR — **1^{a} ⊥**

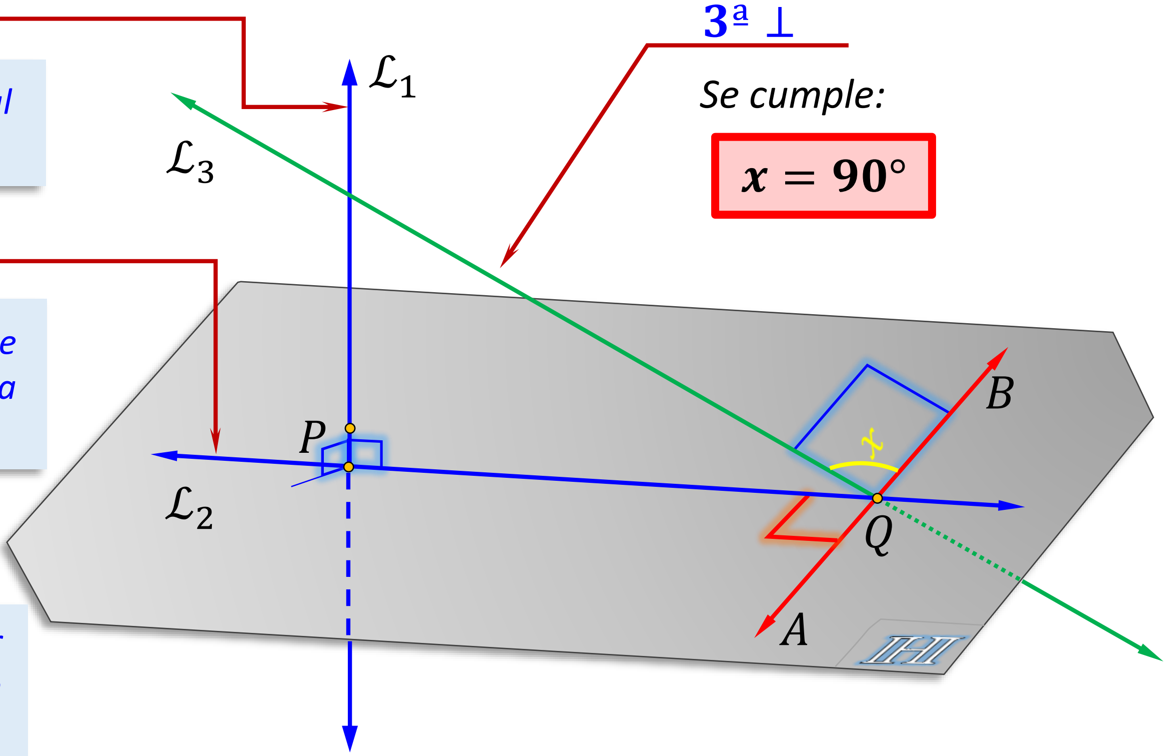
Es la recta $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ perpendicular al plano $\mathbb{H}$, trazada por P.

SEGUNDA PERPENDICULAR — **2^{a} ⊥**

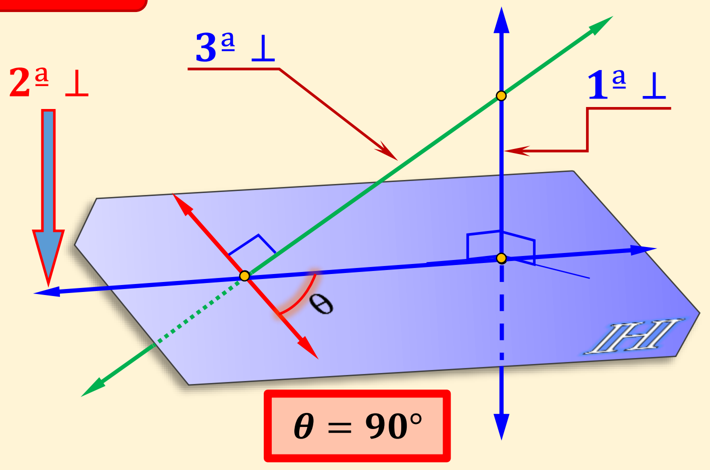
Es la recta $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$, que contiene al pie de la 1^{a} ⊥ y es perpendicular a la recta AB en Q.

TERCERA PERPENDICULAR — **3^{a} ⊥**

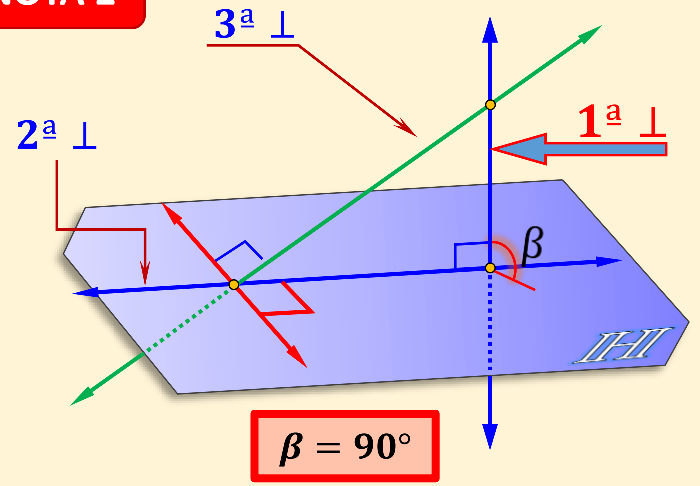
Es la recta que pasa por Q y por cualquier punto de la 1^{a} ⊥, en este caso $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3} \perp \overleftrightarrow{AB}$.



NOTA 1



NOTA 2



TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

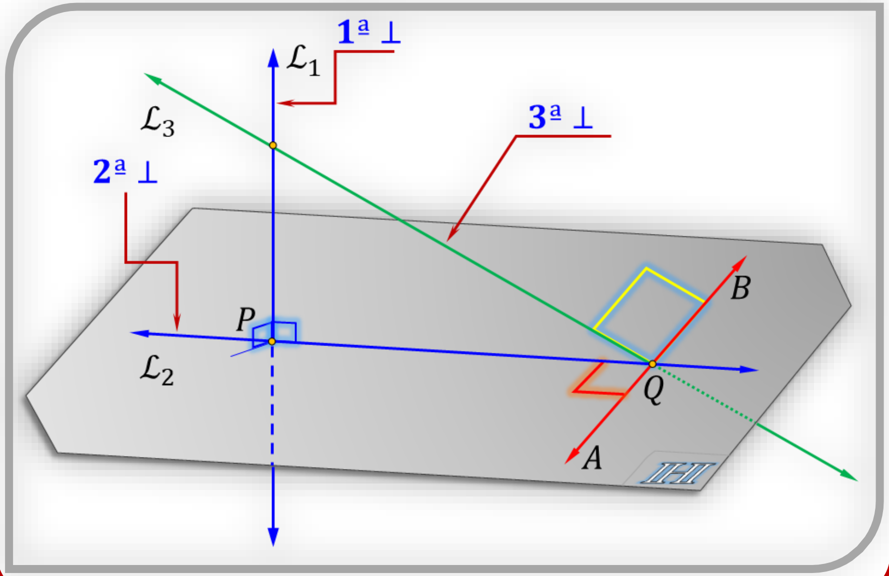
EXAMEN UNI **$2014-I$**

Sea $ABCD$ un rectángulo, M punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{PM}$ perpendicular al plano ABC, O centro del rectángulo, si $BC = 2AB = 8$ y $PM = AB$, entonces el área de la región APO es:

$A)\ 2\sqrt{6}$ $B)\ 3\sqrt{6}$ $C)\ 4\sqrt{6}$

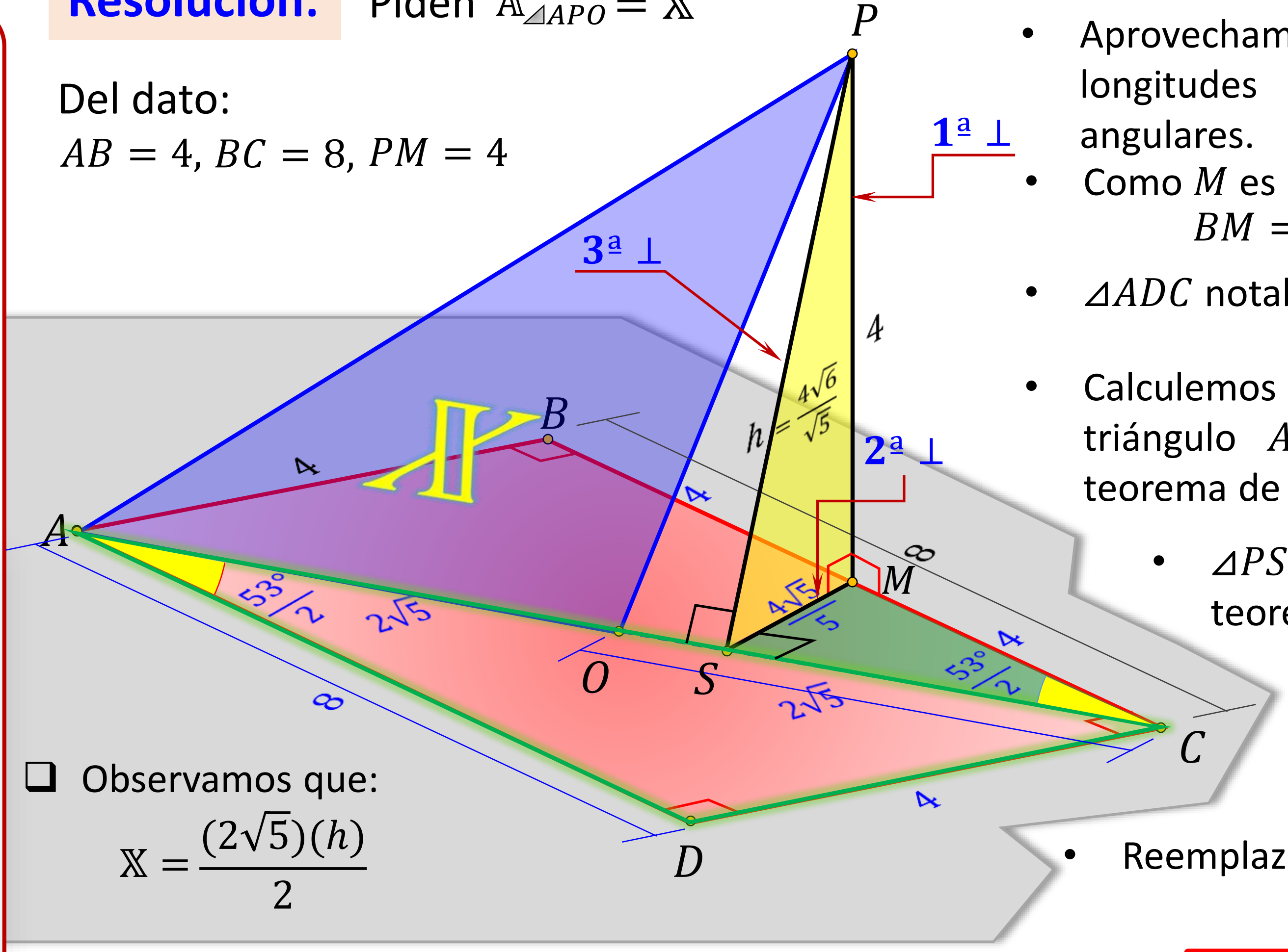
$D)\ 7\sqrt{6}$ $E)\ 8\sqrt{6}$

RECORDAR



Resolución: Piden $\mathbb{A}_{\triangle APO} = \mathbb{X}$

Del dato:
$AB = 4,\ BC = 8,\ PM = 4$



❑ Observamos que:

$$\mathbb{X} = \frac{(2\sqrt{5})(h)}{2}$$

$$\rightarrow \mathbb{X} = \sqrt{5}h \ \ldots(i)$$

- Aprovechamos en completar longitudes y/o medidas angulares.
- Como M es punto medio:
  $BM = MC = 4$
- $\triangle ADC$ notable de ${}^{53°}/_2$
- Calculemos la altura del triángulo AOP, usamos el teorema de las tres $\perp s$.
  - $\triangle PSM$ por el teorema de Pitágoras:

$$h = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

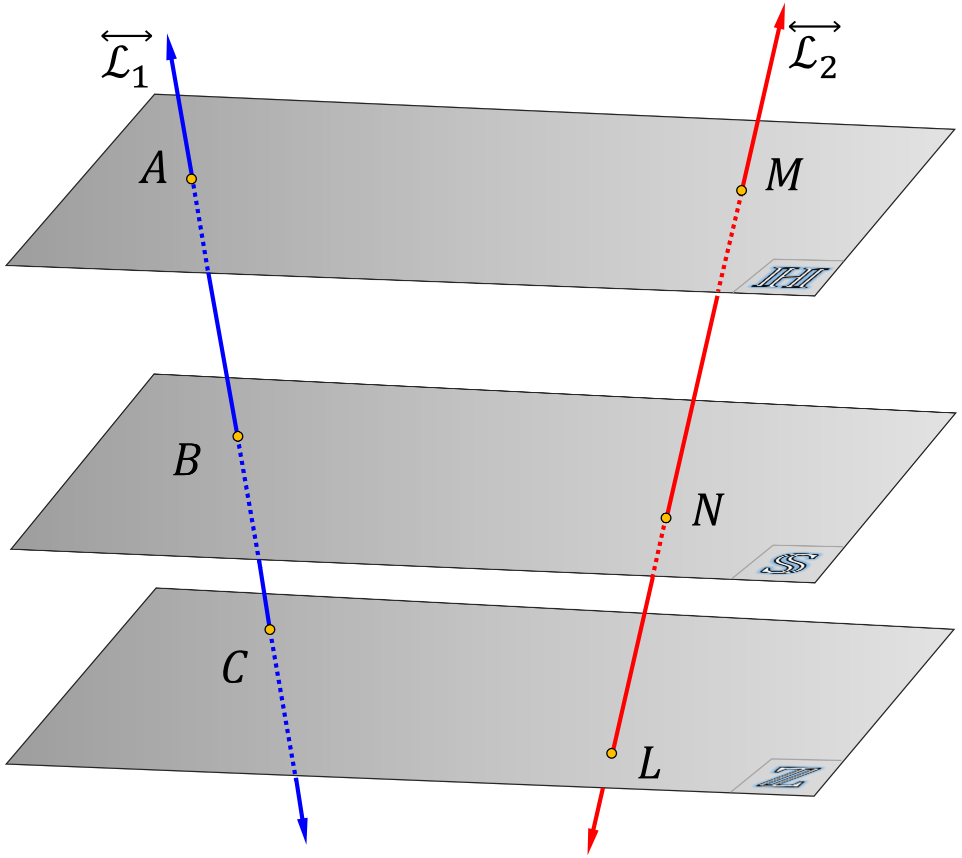
- Reemplazamos en (i):

$$\boxed{\therefore\ \mathbb{X} = 4\sqrt{6}}$$

TEOREMA DE THALES EN EL ESPACIO

Sean los planos $\mathbb{H}, \mathbb{S}$ y $\mathbb{Z}$ paralelos, además:

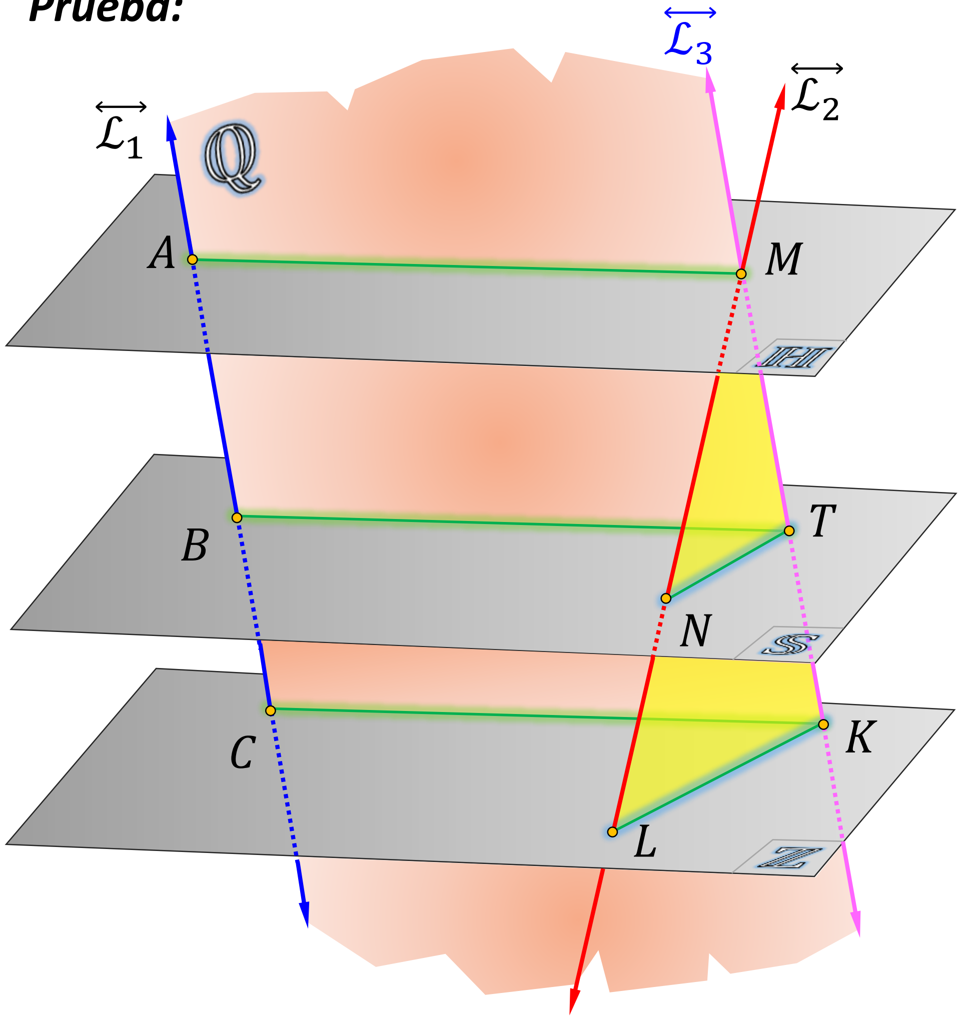
$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ secantes a los planos $\mathbb{H}, \mathbb{S}$ y $\mathbb{Z}$



Se cumple:

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NL}}$$

Prueba:



- Trazamos: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3} \parallel \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$

→ Determinan al plano $\mathbb{Q}$

- Luego: $\overline{AM} \parallel \overline{BT} \parallel \overline{CK}$
- Con ello (por paralelogramo):

$$AB = MT, \quad BC = TK$$

- Además:

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ por ser secantes determinan un plano que contiene al ΔMLK.

- Como $\overline{NT} \parallel \overline{LK}$

En ΔMLK, aplicamos el corolario de Thales

$$\frac{MT}{TK} = \frac{MN}{NL} = \frac{AB}{BC}$$

$$\boxed{\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NL}}$$