Visão Computacional - Lista 2

Sillas Rocha da Costa

8 de abril de 2024

Questão 01

Alternativa a

Verdadeira. Transformações afim são transformações que preservam a colinearidade entre pontos, como transformações lineares e deslocamentos, do tipo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $T(X) = AX + B$, em que A é uma matriz de transformação linear e B o deslocalmento da transformação. Suponha s e r retas paralelas, seja F uma transformação afim, de modo que $F(r)$ e $F(s)$ sejam concorrentes no ponto P, se $Q = F^{-1}(P)$, então, pela colinearidade, $Q \in F^{-1}(F(s)) = s$ e $Q \in F^{-1}(F(r)) = r$, ou seja, s e r se cruzam em Q, o que é um absurdo, pois foi definido que ambas são paralelas.

Alternativa b

Falsa.

Alternativa c

Verdadeira. Isometrias, transformações que preservam a distância, ao não alterar a origem, garantem que a distância entre três pontos distintos e não colineares, A, B e C, permaneça inalterada. Portanto, o ângulo entre esses pontos, $\angle ABC = \alpha$, também permanece inalterado. Isso ocorre porque a distância entre todos os pontos continua constante antes e depois da transformação. Podemos visualizar isso considerando os vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{BC}$, cujos módulos (distâncias) permanecem os mesmos antes e depois da transformação. Assim, as isometrias que preservam a origem também preservam os ângulos entre vetores e, consequentemente, entre segmentos de reta.

Alternativa d

Verdadeira. Análoga a questão anterior.

Alternativa e

Falsa.

Alternativa f

Verdadeira. Seja C uma circunferência, com uma transformação que cause distorção de suas dimensões, uma transformação afim, é possível transformá-la em uma elipse, e uma transformação afim também é uma transformação projetiva, além disso, para que ela vire uma parábola, basta adicionar um ponto de fuga à um dos eixos, com uma transformação projetiva, por fim, para que a ela vire uma hipérbole, basta adicionar um ponto de fuga perpendicular ao primeiro da parábola, assim, chegaremos em uma hipérbole.

Alternativa g

Verdadeiro. No item anterior, foi provado que uma circunferência pode virar qualquer cônica com uma transformação projetiva, deste modo, como toda a transformação projetiva é invertível, é possível transformar toda a cônica em uma circunferência, e, deste modo, chegar a qualquer cônica desejada novamente.

Questão 02

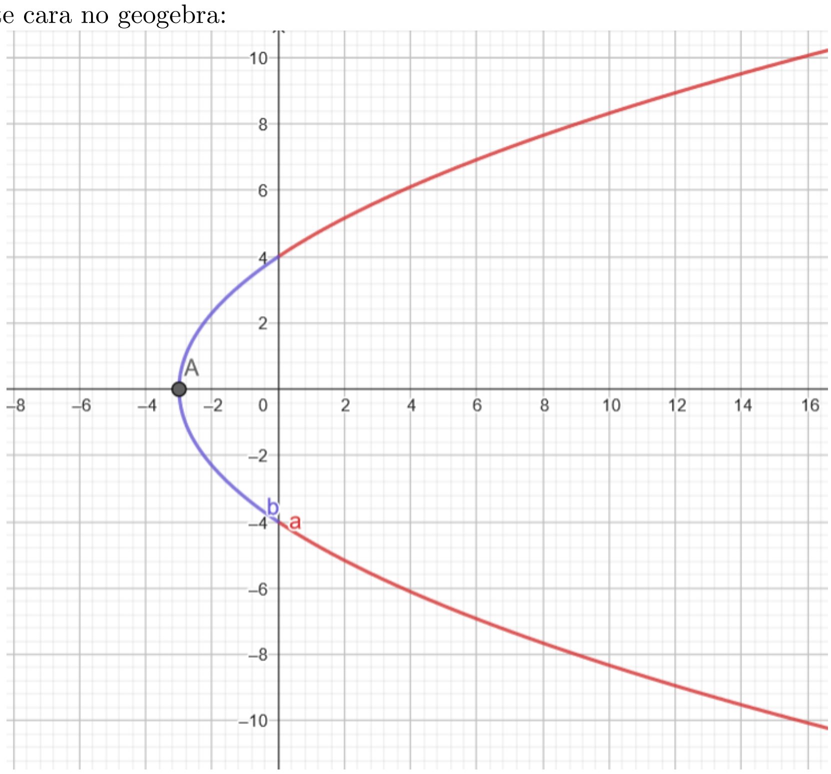
Seja $x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sabemos que $H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ é tal que $H(x_1) = Tx_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $H(x_2) = Tx_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Deste modo, sabemos que nossa matriz T não rotacionará nem transladará a figura, logo, terá a seguinte cara. $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$, então, concluimos que $\begin{cases} -3a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$

Logo, $b = \dfrac{1}{2}$ e $a = -\dfrac{1}{6}$, e, pela equação da elipse, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, temos $x = \pm 3\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4}}$, agora seja $k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ um ponto genérico da elipse, então teremos que $Tk = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{x}{6} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{R+\frac{1}{2}} \\ \frac{y}{R+\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Pelo primeiro resultado de x, temos que $R = \mp \dfrac{3\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}}{6}$ obteremos a união dos pontos:

$$\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}{-R+\frac{1}{2}} \\ \frac{y}{-R+\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}{R+\frac{1}{2}} \\ \frac{y}{R+\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com a seguinte cara no geogebra:



Deste modo, vemos que os pontos de intersecção da parábola com os eixos são $\{(-3, 0), (0, 4), (0, -4)\}$, assim, como a equação básica deste tipo de parábola é $x = ay^2 + b$, em $y = 0$, temos $x = -3 = b$, com isso, em $x = 0$, temos $ay^2 = 3$, sendo que $(4)^2 = (-4)^2 = 16$, assim, sabemos que $y^2 = \dfrac{3}{a} = 16$, portanto, $a = \dfrac{3}{16}$, assim, nossa parábola é a $x = \dfrac{3}{16}y^2 - 3$.

Questão 03

Supondo que existem duas transformações projetivas $H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$, H_1 e H_2, e que realizem a trasnformação $H_1(p_i) = p_i'$ e $H_2(p_i) = p_i'$ para $i = 1, ..., 4$. Ou seja, teriamos $H_1(p_i) = p_i' = H_2(p_i)$, entretanto, como estamos considerando pontos em posições gerais, isto deve ser verdade para todo ponto do plano, logo, é possível concluir que $H_1 = H_2$, já que aplicam a mesma transformação para qualquer ponto, portanto, existe uma única homografia. Outro argumento seria o de que toda a transformação projetica é reversível, ou seja, possui inversa, sendo que, cada transformação possui uma única inversa, ou seja, cada transformação é única.

Seja $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, iremos buscar $H(P) = TP = P' = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, em resumo, deslocaremos $p_1 = (0, 0)$ para a nova origem $p_1' = (-2, -2)$ e aumentaremos a proporção em 4 vezes, deste modo, nossa matriz tem a cara $T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Questão 04

Seja L a distância entre as retas paralelas r e r', e P_1 e P_1' as projeções de P nas retas r e r', respectivamente, e sejam estas retas, $y = 0$ e $y = 1$, para facilitar os cálculos, assim, $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$, $A' = (a', 1)$, $B' = (b', 1)$ e $C' = (c', 1)$. Pela semelhança de triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle A'B'P$, temos a relação:

$$\frac{PP_1}{AB} = \frac{PP_1'}{A'B'}.$$

Se $PP_1 = l_p$, então $PP_1' = L - l_p$. Portanto, temos:

$$\frac{l_p}{AB} = \frac{L - l_p}{A'B'}.$$

Resolvendo para l_p, obtemos:

$$l_p = L \cdot \frac{AB}{AB + A'B'}.$$

Substituindo l na expressão para PP_1, obtemos:

$$PP_1 = L \cdot \frac{AB}{AB + A'B'} = L \cdot p_l.$$

Da mesma forma, podemos mostrar que $QQ_1 = L \cdot \frac{AC}{AC + A'C'}$ e $RR_1 = L \cdot \frac{BC}{BC + B'C'}$, onde Q_1 e R_1 são as projeções de Q e R nas retas r e r', respectivamente.

Por fim, deduziremos que $P = A + \frac{PP_1}{L} \vec{AB'} = A + p_l \cdot \vec{AB'} = (a, 0) + p_l(a - b', 1) = (a(1 + p_l) - bp_l, p_l)$, similarmente para os outros pontos, obtemos $Q = (a(1 + q_l) - c'q_l, q_l)$ e $R = (b(1 + r_l) - c'r_l, r_l)$, que pelo determinate é igual a 0, ou seja, são pontos colineares pois o triângulo $\triangle PQR$ tem área 0, observamos também que o resultado para retas não paralelas pode ser generalizado em virtude de uma transformação projetiva q tenha como ponto de fuga, um ponto que torne as retas paralelas.