Matemática Discreta 2023.2 — Lista avaliativa 1
Arthur Pompilio

Problema 1. *Prove pelo método da contraposição que se b é um número ímpar, então a equação $x^2 + x - b^2 = 0$ não tem soluções inteiras.*

A proposição original é "b é um número par" $\rightarrow$ "$x^2 + x - b^2 = 0$ não tem solução inteira".
Sua contrapositiva, portanto, é "$x^2 + x - b^2 = 0$ tem solução inteira" $\rightarrow$ "b é um número par." A expressão pode ser reescrita somando b^2 dos dois lados:

$$x^2 + x = b^2$$

E então colocando um x em evidência do lado esquerdo:

$$x(x + 1) = b^2$$

Proposição: O lado esquerdo é sempre par.
Demonstração:
Um par vezes um ímpar resulta sempre em par.
para quaisquer par $2p$ e ímpar $2q + 1$:

$$2p(2q + 1) = 4pq + 2p = 2(2pq + q)$$

E qualquer número multiplicado por 2 é por definição par.
Agora observando a expressão temos dois casos possíveis, onde x é par e onde x é impar.
· Caso x seja par, $x(x + 1)$ é par, pois x é par e $x + 1$ é ímpar, e como demonstrado, o produto deles é par.
· Caso x seja ímpar, $x(x + 1)$ também é par, já que $x + 1$ será par.

Problema 2. *Prove as seguintes proposições:*

a) A multiplicação entre um número racional e um irracional é um irracional.

b) Entre dois números racionais há um número racional.

a) É possível realizar uma prova por absurdo. Iniciamos afirmando que um número racional vezes um número irracional resulta em um número racional, por exemplo com x sendo irracional, e a, b, c, d inteiros:

$$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d}$$

$$x = \frac{bc}{ad}$$

Mas é impossível que x seja racional e irracional ao mesmo tempo, portanto a proposição inicial está provada.

b) Chamamos os números racionais de p e q. E sem perda de generalidade, afirmamos que $p < q$. É fato que $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ e que $0 < (q - p)$. Temos portanto:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

É possível multiplicar todos os termos da expressão por $(q-p)$ sem alterar as desigualdades:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (q - p) < (q - p)$$

Depois disso, ao somar p em tudo:

$$p < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (q - p) + p < q$$

Agora é possível encontrar um racional entre quaisquer dois racionais.
$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (q-p)+p$ é irracional, pois, dividindo o número em duas expressões distintas, uma de cada lado da soma, o lado esquerdo é irracional por ser o produto de um racional por um irracional, e o lado direito é racional por definição.
Basta demonstrar que a soma de um racional com um irracional resulta em um irracional.
Para um racional $\frac{a}{b}$ qualquer e x irracional, por absurdo mostramos que:

$$\frac{a}{b} + x = \frac{c}{d}$$

$$x = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$x = \frac{ad + bc}{bd}$$

E como x foi definido como um irracional, chegamos a um absurdo, que prova a proposição inicial.

Problema 3. *Um hacker invadiu a rede do CIn, e a polícia está tentando descobrir quem foi. Eles chegaram a alguns fatos:*

1. *Se Vinícius estava na praia no dia da invasão então Alex lanchou paçoca no dia da invasão.*

2. *Se Iasmin estava na praia no dia da invasão, o hacker é Matheus.*

3. *Vinícius não bebeu refrigerante no dia da invasão.*

4. *Se Alex lanchou paçoca no dia da invasão então o hacker é Victor.*

5. *Iasmin ou Vinícius estavam na praia no dia da invasão.*

6. *Se Vinícius estava na praia no dia da invasão, o hacker é Gusta. Com base nos fatos obtidos pela polícia, diga quem é o hacker. Justifique como chegou no veredito.*

   O hacker é Matheus.
   Primeiro, analisamos a afirmação 5 e testamos "Vinícius estava na praia". Por (6), isso implica que o hacker é Gusta, por (1), que Alex lanchou paçoca. Como Alex lanchou paçoca, por (4), o hacker é Victor, o que é impossível já que só pode haver um hacker. Conclui-se que a afirmação inicial é falsa, ou seja, Vinícius não estava na praia.
   Dessa forma, por (5), Iasmin estava na praia é um fato, o que conclui por (2) que o hacker é Matheus.

Problema 4. *Prove que as proposições lógicas abaixo são equivalentes:*

$$P \land ((Q \land \neg(P \lor Q)) \lor (P \lor \neg(\neg P \land \neg Q))) \equiv (((P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R)) \to R) \land P$$

Podemos demonstrar que as duas proposições são equivalentes a uma proposição em comum.

$$
\begin{aligned}
& P \land ((Q \land \neg(P \lor Q)) \lor (P \lor \neg(\neg P \land \neg Q))) & \\
& \equiv P \land ((Q \land \neg(P \lor Q)) \lor (P \lor (P \lor Q))) & (14) \\
& \equiv P \land ((Q \land (\neg P \land \neg Q)) \lor (P \lor (P \lor Q))) & (15) \\
& \equiv P \land ((Q \land \neg P \land \neg Q) \lor (P \lor P \lor Q)) & (8), (9) \\
& \equiv P \land ((F \land \neg P) \lor (P \lor P \lor Q)) & (19) \\
& \equiv P \land (F \lor (P \lor P \lor Q)) & (4) \\
& \equiv P \land (P \lor P \lor Q) & (2) \\
& \equiv P \land (P \lor Q) & (5) \\
& \equiv P & (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (((P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R)) \to R) \land P & \\
& \equiv (\neg((P \lor Q) \land (\neg P \lor R) \land (\neg Q \lor R)) \lor R) \land P & (20) \\
& \equiv (\neg((P \lor Q) \land (R \lor (\neg P \land \neg Q)) \lor R) \land P & (12) \\
& \equiv ((\neg(P \lor Q) \lor \neg(R \lor (\neg P \land \neg Q)) \lor R) \land P & (14) \\
& \equiv (((\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \land \neg(\neg P \land \neg Q)) \lor R) \land P & (15) \\
& \equiv (((\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \land (P \lor Q)) \lor R) \land P & (14) \\
& \equiv (((\neg P \land \neg Q) \lor ((\neg R \land P) \lor (\neg R \land Q)) \lor R) \land P & (13) \\
& \equiv ((\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \land P) \lor (\neg R \land Q) \lor R) \land P & (10) \\
& \equiv ((\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \land P) \lor ((R \lor \neg R) \land (R \lor Q)) \land P & (12) \\
& \equiv ((\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \land P) \lor (T \land (R \lor Q)) \land P & (18) \\
& \equiv ((\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \land P) \lor R \lor Q) \land P & (1), (10) \\
& \equiv (((\neg P \land \neg Q) \lor Q) \lor (\neg R \land P) \lor R) \land P & (10) \\
& \equiv (((Q \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q)) \lor ((R \lor \neg R) \land (R \lor P)) \lor R \lor Q) \land P & (12) \\
& \equiv (((Q \lor \neg P) \land T) \lor (T \land (R \lor P)) \lor R \lor Q) \land P & (18) \\
& \equiv ((Q \lor \neg P) \lor (R \lor P) \lor R \lor Q) \land P & (1) \\
& \equiv (Q \lor \neg P \lor P \lor R \lor R \lor Q) \land P & (10) \\
& \equiv T \land P & (18) \\
& \equiv P & (1)
\end{aligned}
$$

Portanto, elas também são equivalentes entre si.

Problema 5. *Vitinho e Gustavo são matemáticos geniais, entretanto, ficam entediados muito rápido. Assim, cansados da matemática clássica, eles resolvem desenvolver uma nova área do conhecimento (a Teoria dos Grupos Previdenciários), e para isso criam um novo conjunto de números, os Sovietes ($\mathbb{S}$). Eles definem que todos os números reais ($\mathbb{R}$) pertencem a $\mathbb{S}$, exceto os números naturais ($\mathbb{N}$). Além disso, todos os números imaginários ($\mathbb{I}$) também pertencem a $\mathbb{S}$ e nada mais pertence. Justifique se as afirmações abaixo estão corretas ou não.*

a) $\mathbb{R} \in \mathbb{S}$

b) $\mathbb{I} \subset \mathbb{S}$

c) $P(\{-1, -2, -3\}) \subset \mathbb{S}$

d) $3 \notin \mathbb{S}$ *e* $\mathbb{N} \notin \mathbb{S}$

a) Não. O pertencimento ocorre quando o elemento está listado dentro do conjunto, e no caso de $\mathbb{S}$, seus elementos são números. Como $\mathbb{N}$ não é um número, não tem como ele pertencer a $\mathbb{S}$.

b) Sim, pois todos os imaginários estão presentes em $\mathbb{S}$ por definição.

c) Não, pois os elementos de $P(A)$ são sempre conjuntos, e para B ser subconjunto de C é preciso que todo elemento de B pertença a C, e como os elementos de $\mathbb{S}$ são números, $P(\{-1, -2, -3\})$ não pode pertencer a $\mathbb{S}$.

d) Sim. 3 não pertence a $\mathbb{S}$ pois nenhum inteiro pertence, e $\mathbb{N}$ não é um número, portanto também não pertence.

Problema 6. *Os alunos de CC podem cursar três disciplinas, IC, IP e/ou MD. Sabendo que podem ter alunos que cursam mais de uma disciplina, se pegarmos todos os alunos de IC que não cursam MD e chamarmos de grupo 1, todos os alunos de IP que não cursam MD e chamarmos de grupo 2, e todos os alunos de IC que não cursam IP e chamarmos de grupo 3. É possível que tenha um aluno que esteja presente nos três grupos? Justifique utilizando operações sobre conjuntos.*

Vamos chamar os grupos de G_1, G_2 e G_3 os grupos mencioandos, e os grupos de alunos que fazem IC, IP e MD de C, P e M, respectivamente.
É dado que $G_1 = C - M$, $G_2 = P - M$ e $G_3 = C - P$.
Como visto em aula, $A - B = A \cap \overline{B}$, e como queremos encontrar um aluno que pertença simultaneamente aos três grupos, queremos a interseção dos três grupos, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$Q = G_1 \cap G_2 \cap G_3$$

Substituindo os conjuntos pelas suas representações na forma de interseção:

$$Q = (C - M) \cap (P - M) \cap (C - P)$$

E pela propriedade citada, isso é o mesmo que

$$Q = (C \cap \overline{M}) \cap (P \cap \overline{M}) \cap (C \cap \overline{P})$$

Por associatividade, podemos reorganizar os termos da seguinte forma:

$$Q = (C \cap \overline{M}) \cap (P \cap \overline{P}) \cap (C \cap \overline{M})$$

E por complemento

$$Q = (C \cap \overline{M}) \cap \emptyset \cap (C \cap \overline{M})$$

Por fim, aplicando a propriedade de dominação encontramos que esse conjunto é vazio, ou seja, não há ninguém que pertece aos três grupos simultaneamente.

Problema 7. *Seja f uma função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$. Encontre e justifique sua resposta.*

a) $f^{-1}(\{1\})$.

b) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$.

c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$.

d) Diga se f é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

a) $\{-1, 1\}$, pois $-1^2 = 1$ e $1^2 = 1$.

b) $\{x \mid -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\}$. O zero não pertence pois $f(0) = 0$, e 0 está fora do conjunto desejado. $f(1) = 1$ também está fora, e pelo mesmo motivo -1 também está fora, então os únicos valores possíveis são os intervalos entre 0 e 1 e entre 0 e -1.

c) $\{x \mid x > 2 \vee x < -2\}$ $f(2) = 4$ não pertence, mas se $x > 2$, x pertence. $f(-2) = 4$ não pertence, mas se $x < -2$, x pertence.

d) Não é injetiva pois $f(-1) = f(1)$, e não é sobrejetiva pois não existe x tal que $f(x) = -1$. Portanto, também não é bijetiva.

Problema 8. *Dê um exemplo de dois conjuntos não enumeráveis tais que a interseção seja:*

a) Finito.

b) Infinito contável.

c) Infinito incontável.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. $A \cap B = \{0\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R}\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$. $A \cap B = \mathbb{Z}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}\}$. $A \cap B = \mathbb{R}$

Problema 9. *Dado um plano p e um número k de retas definidas nesse plano, sabemos que essas retas irão particionar p em um certo número de regiões disjuntas. Prove que, utilizando de apenas 2 cores, sempre podemos colorir o plano (associar uma cor a cada uma dessas regiões) de forma que regiões adjacentes tenham cores diferentes.*

Partindo do plano sem nenhuma reta, é claro que ele pode ser pintado com apenas uma cor, é simplesmente o plano inteiro com a mesma cor. Caso o plano tenha uma reta o partindo, o plano estará dividido em duas regiões, uma à direita da reta, e outra à esquerda da reta, e como essas regiões compartilham um lado entre si, são adjacentes, e portanto, precisam ser pintadas de cores diferentes. Dizemos que os dois primeiros casos são válidos por ser sempre possível pintá-los com no máximo duas cores.
Primeiramente, observa-se que dado um caso válido, se tivermos uma cor A em algumas das regiões, e a cor B em outras regiões, se trocarmos as cores da região, ou seja, se invertermos o plano, ele continua válido.
Partindo de um caso válido, se é adicionada uma nova reta, é preciso pensar em uma forma de transformar o caso novo em válido. Pela observação, se invertermos o lado esquerdo da reta e mantermos o lado direito da reta da mesma forma, o plano estará dividido em dois casos válidos distintos, mas é preciso demonstrar que isso também é válido para regiões que foram divididas pela reta. Com uma região de cor A, quando ela é dividida, sua região à direita da reta será A e à esquerda será B, portanto regiões divididas pela reta não invalidam o plano, e isso também vale para uma região de cor B.
Dessa forma, sempre que se adiciona uma reta a um plano válido, ele continua válido, e como qualquer plano pode ser construido partindo do plano vazio, que é válido, todo plano repartido nessa forma é válido.

Problema 10. *Prove por indução que, para todo n maior que ou igual a 5, $\frac{(2n)!}{n!n!} < 2^{2n-2}$*

Primeiro vamos conferir se essa desigualdade é verdadeira para 5:
$\frac{10!}{5!5!} < 2^8 \Rightarrow \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2} < 256 \Rightarrow 252 < 256$. Portanto, é verdade para $x = 5$. Por indução, se vale para algum n, e for demonstrado que também valerá para $n+1$, a desigualdade sempre vale, então vamos substituir $n+1$ na desigualdade:

$$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} < 2^{2(n+1)-2}$$

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} < 2^{2n}$$

$$\frac{(2n)!(2n+2)(2n+1)}{(n+1)!(n+1)!} < 2^{2n}$$

$$\frac{(2n)!(4n+2)}{(n)!(n)!(n+1)} < 2^{2n}$$

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{4n+2}{(n+1)} < 2^{2n}$$

É possível substituir $\frac{(2n)!}{n!n!}$ por 2^{2n-2} sem alterar a desigualdade, já que o lado esquerdo ficará maior que antes, e se provado que continua menor, a expressão anterior também era menor

$$2^{2n-2} \cdot \frac{4n+2}{(n+1)} < 2^{2n-2} \cdot 2^2$$

E é possível dividir ambos os lados por 2^{2n-2}:

$$\frac{4n+2}{(n+1)} < 4$$

$$4n+2 < 4n+4$$

$$2 < 4$$

Portanto, a desigualdade inicial é sempre verdadeira.