Skript zur Vorlesung
Analysis III
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ A und B, die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

Beispiel 1.1.1 (Messen eines Rechtecks)**.** Im Fall eines Rechteckes $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a und b wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

Beispiel 1.1.2 (Messen eines Dreiecks)**.** Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche g und Höhe h kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2} gh$$

Beispiel 1.1.3 (Parkettierung)**.** Wir können auch eine komplexere Form $F \subseteq \mathbb{R}^2$ mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Dafür nehmen wir abzählbar viele paarweise disjunkte Dreiecke $(\Delta_n)_n$, sodass $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j = F$. Dann gilt

$$\text{Fläche}(F) = \text{Fläche}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j \right) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Fläche}(\Delta_j)$$

Bemerkung 1.1.4. Wir wollen dementsprechend ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) \coloneqq \{U : U \subseteq E\}$ eine Familie von Teilmengen von $E \neq \varnothing$ ist. Außerdem soll gelten, dass

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) Für eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_n \cap A_m = \varnothing$ für $n \neq m$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Liste an Eigenschaften führt wie wir später sehen werden zu einer reichhaltigen Theorie

(1) σ-Additivität

2 σ-Algebren und Maße

2.1 σ-Algebren

Definition 2.1.1 (σ-Algebra)**.** Sei $E \neq \varnothing$ eine Menge. Eine σ-Algebra in E ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von E mit folgenden Eigenschaften

(Σ_1) $E \in \mathcal{A}$

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \coloneqq E \setminus A \in \mathcal{A}$

(Σ_3) Für $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{A}$ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar ($\mathcal{A}$-messbar).

Lemma 2.1.2 (Eigenschaften von σ-Algebren)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in E. Dann gilt

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$ (das heißt $\mathcal{A}$ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)

(iii) Für $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

Beweis.

(i) $E \in \mathcal{A} \overset{(\Sigma_2)}{\Rightarrow} \varnothing = E^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(ii) Wir definieren $A_1 \coloneqq A$, $A_2 \coloneqq B$ und $A_i \coloneqq \varnothing$ für $i \geq 3$. Dann gilt gilt (Σ_3)

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

(iii) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} = A \cap B^{\mathrm{C}} \cap E \cap E \cap \cdots$. Dann gilt nach (iii), dass $A \setminus B \in \mathcal{A}$ □

Beispiel 2.1.3. Wir betrachten einige Beispiele für σ-Algebren

(a) Für eine Mengen E ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ selber nach Definition immer eine σ-Algebra über E.

(b) $\{\varnothing, E\}$ ist die kleinste σ-Algebra in E.

(c) Für $A \subseteq E$ gilt $\mathcal{A} \coloneqq \left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ ist die kleinste σ-Algebra, die A enthält.

(d) Sei E überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} \coloneqq \left\{A \subseteq E : A \text{ oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\right\}$ eine σ-Algebra.

(e) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in E. Für $F \subseteq E$ beliebig ist $\mathcal{A}_F \coloneqq \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ die Spur-σ-Algebra von F.

(f) Seien E, E' nicht-leere Mengen, $f : E \to E'$ eine Funktion und $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in E'. Dann ist auch

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis von (d). Wir prüfen die Kriterien

(Σ_1) $E^{\mathrm{C}} = \varnothing$ ist abzählbar $\Rightarrow E \in \mathcal{A}$

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ oder A^{C} ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}}$ oder $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(Σ_3) Sei $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden 2 Fälle
Fall 1: Alle A_n sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.
Fall 2: Ein A_j ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^{\mathrm{C}}$ abzählbar $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}} \subseteq (A_j)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}}$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. $\square$

Notation 2.1.4 (Durchschnitt)**.** Seien I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in E. Dann ist

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \coloneqq \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der $\mathcal{A}_j$.

Satz 2.1.5. Sei I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in I}$ eine Familie von σ-Algebren in E. Dann gilt

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine σ-Algebra.

Beweis.

(Σ_1) $E \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

(Σ_2) $A \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$. Daraus folgt $A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

(Σ_3) Sei $A_n \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$. Dann gilt $A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$ $\square$

Satz 2.1.6. Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für E nicht-leer ein System von Teilmengen von E. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(E)$ in E, welche ζ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine σ-Algebra in E und

(b) Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ in E mit $\zeta \subseteq A$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von ζ erzeugte σ-Algebra und ζ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

Beweis. Wir definieren $I \coloneqq \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ ist σ-Algebra und $\zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller σ-Algebren, die ζ enthalten. Dabei gilt I nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) \coloneqq \bigcap_{\mathcal{A}\in I} \mathcal{A}$$

eine σ-Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Forderung an I. Und nach unserer Konstruktion ist auch Anforderung (b) erfüllt. $\square$

Beispiel 2.1.7. Sei $\zeta := \{A\}$. Dann ist $\left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ die von ζ erzeugte σ-Algebra.

Definition 2.1.8. Sei $\mathcal{O}_d$ das System der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die *Borel-σ-Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

2.2 Maße und Prämaße

Sei in diesem Teilkapitel stets X eine Menge.

[25. Okt] **Notation 2.2.1** (Disjunkte Vereinigung)**.** Seien A, B Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Dann schreiben wir $A \sqcup B := A \cup B$ als disjunkte Vereinigung von A und B.

Definition 2.2.2 (Maß)**.** Ein (positives) Maß μ auf X ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

(M_0) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

(M_1) $\mu(\varnothing) = 0$

(M_2) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.3 (Prämaß)**.** Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht unbedingt eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Funktion, so heißt μ Prämaß, falls

(PM_1) $\mu(\varnothing) = 0$ (das setzt also auch voraus, dass $\varnothing \in \mathcal{A}$)

(PM_2) Sind $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.4 (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen)**.** Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Teilmengen von X. Dann nennen wir $(A_n)_n$

- wachsend, falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Notation 2.2.5.

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
2. Für eine fallende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \searrow A$, falls $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Definition 2.2.6 (Messraum und Maßraum)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß.

1. Wir nennen das Paar $(X, \mathcal{A})$ einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Maßraum.

3. Wir nennen μ endlich und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen endlichen Maßraum, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Wir nennen μ Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls $\mu(X) = 1$.
5. Wir nennen μ σ-endlich, falls es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu(A_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $(A_n)_n$ eine ausschöpfende Folge.

Satz 2.2.7 (Eigenschaften von Maßen)**.** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(iii) $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iv) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Starke Additivität)

(v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (Subadditivität)

(vi) $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)

(vii) $(B_n)_n \searrow B$ und $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$ (Stetigkeit von oben)

(viii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ-Subadditivität)

Beweis.

(i) Sei $A_1 \coloneqq A, A_2 \coloneqq B$ und $A_n \coloneqq \varnothing$ für $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \sqcup B &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \sqcup B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(ii) Sei $A \subseteq B$, dann folgt $B = A \sqcup (B \setminus A)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

(iii) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

(iv) Es gilt $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \sqcup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(v) Aus (iv) folgt $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B)$

(vi) Sei $(A_n)_n$ wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen $(F_n)_n$ mit $F_1 \coloneqq A_1$ und $F_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind F_j paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^{n} A_j &= \bigsqcup_{j=1}^{n} F_j \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(F_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} F_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

(vii) Sei $(B_n)_n \searrow B$ mit $\mu(B_1) < \infty$. Wir definieren $A_n \coloneqq B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$ wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \setminus B) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\ \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B) &= \lim_{n\to\infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \end{aligned}$$

(viii) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $A \coloneqq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir definieren $\hat{A}_k \coloneqq \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\right) &= \lim_{k\to\infty} \mu\left(\hat{A}_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2.8.

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt“ auch kürzer „disjunkt“

2. Satz 2.2.7 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern $\mathcal{A}$ stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und sofern $\mathcal{A}$ stabil bezüglich abzählbaren Schnitten und Vereinigungen ist (für die verbleibenden Eigenschaften)

Beispiel 2.2.9 (Dirac-Maß)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X und $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) \coloneqq \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist δ_{x_0} ein Maß in X und wird als *Dirac*-Maß bezeichnet.

Beispiel 2.2.10. Sei $\mathcal{A} := \left\{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\right\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ nach Beispiel 2.1.3 (d) eine σ-Algebra in $\mathbb{R}$. Wir definieren ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist nicht abzählbar} \end{cases}$$

Beispiel 2.2.11 (Zählmaß)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl an Elemente in A angibt.

Beispiel 2.2.12 (Diskretes W-Maß)**.** Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}\colon\ \omega_n \in A} p_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

ein sogenanntes diskretes W-Maß. Der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt diskreter W-Raum.

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.13** (Ring und Algebra)**.** Ein Mengensystem $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

(R_1) $\varnothing \in R$

(R_2) $A, B \subseteq R \Rightarrow\ (A \setminus B) \in R$

(R_3) $A, B \subseteq R \Rightarrow\ (A \cup B) \in R$

Ist ferner $X \in R$, dann heißt R Algebra.

Bemerkung 2.2.14 (Eigenschaften von Mengenringen)**.** Es sei R ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ enthält R auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz $\Delta : R \times R \to R,\ (A, B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann definiert $(R, \Delta, \cap)$ einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, wobei Δ der „Addition“ und $\cap$ der „Multiplikation“ entspricht.

3 [*] Dynkinsysteme

Definition 3.1.1 (Dynkinsystem)**.** Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkinsystem, falls

(D_1) $X \in \mathcal{D}$

(D_2) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$

(D_3) Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$

Beispiel 3.1.2.

1. Jede σ-Algebra ist ein Dynkinsystem.
2. Sei X eine $2n$-elementige Menge. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$ ein Dynkinsystem, aber keine σ-Algebra.

Lemma 3.1.3. Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_j)_{j \in I}$ eine Familie von Dynkinsystemen in X, dann ist $\bigcap\limits_{j \in I} \mathcal{D}_j$ wieder ein Dynkinsystem.

Beweis. (Übung) □

Satz 3.1.4. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert das kleinste Dynkinsystem $\delta(\mathcal{G})$, welches $\mathcal{G}$ enthält. Wir nennen $\delta(\mathcal{G})$ das von $\mathcal{G}$ erzeugte Dynkinsystem.

Beweis. $\mathcal{P}(X)$ ist ein Dynkinsystem. Wir definieren also

$$I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkinsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \varnothing$$

Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über σ-Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in I} \mathcal{D}$$ □

Definition 3.1.5. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Analog dazu nennen wir $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$.

Frage: Wann ist ein Dynkinsystem eine σ-Algebra?

Lemma 3.1.6. Sei $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Dann gilt $\mathcal{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$.

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Sei $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^{\mathrm{C}}, B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = \left(A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$.

„$\Leftarrow$“ Zu zeigen ist Eigenschaft (Σ_3). Sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ eine Mengenfolge. Wir definieren $D_0' := \varnothing$ und $D_n' := D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. Dann ist $(D_n')_n$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n' = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D_n' \setminus D_{n-1}')$$

Außerdem ist

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D_n' \setminus D_{n-1}') \in \mathcal{D} \text{ falls } (D_n' \setminus D_{n-1}') \in \mathcal{D} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Und es gilt $D'_n \setminus D'_{n-1} = \left(D'_n \cap (D'_{n-1})^{\mathrm{C}}\right) \in \mathcal{D}$, falls $D'_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil ist. Es gilt aber

$$A \cup B = \left(A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$$

Damit ist (Σ_3) gezeigt. □

Satz 3.1.7. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann folgt aus $\mathcal{G}$ ist $\cap$-stabil, dass $\delta(\mathcal{G})$ $\cap$-stabil ist.

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $D \in \delta(\mathcal{G})$ und definieren

$$\mathcal{D}_D \coloneqq \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung: $\mathcal{D}_D$ ist ein Dynkinsystem. Stimmt diese Behauptung, dann können wir folgendermaßen argumentieren: Da $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} \forall G, D \in \mathcal{G} : G \cap D \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_D \\ \Rightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \overset{\text{(Beh.)}}{=} \mathcal{D}_D \\ \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G}\ \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} \forall G \in \delta(\mathcal{G})\ \forall D \in \mathcal{G} : D \cap G = G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_G \\ \Rightarrow \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathrm{D}_G) = \mathrm{D}_g\ \ \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) : D \cap G \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt $\delta(\mathcal{G})$ ist σ-stabil.

Wir zeigen noch die Behauptung:

(D_1) Da $X \cap D = D \in \delta(\mathcal{G})$ folgt $X \in \mathcal{D}_D$.

(D_2) Sei $Q \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $Q^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}_D$, denn $Q^{\mathrm{C}} \cap D = \left(Q^{\mathrm{C}} \cup D^{\mathrm{C}}\right) \cap D = (Q \cap D)^{\mathrm{C}} \cap D = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G})$.

(D_3) (Fehlt, siehe handschriftliches Skript) □

Korollar 3.1.8. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wenn $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, dann ist $\delta(\mathcal{G})$ eine σ-Algebra und es gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$.

Beweis. Nach Satz 3.1.7 ist $\delta(\mathcal{G})$ $\cap$-stabil und damit nach Lemma 3.1.6 eine σ-Algebra. Damit gilt dann $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})$, da $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{G}$ enthält. Außerdem ist $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$. □

4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[04. Nov] **Satz 4.1.1** (Eindeutigkeitssatz)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ferner seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$ mit

(a) $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil

(b) Es gibt Mengen $G_n \in \mathcal{E}$ mit $G_n \nearrow X$ $(X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n)$ mit $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: Aus $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$ folgt $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Das heißt unter den obigen Voraussetzungen wird ein Maß eindeutig durch seine Werte auf dem Erzeuger definiert.

Beweis. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, folgt nach Korollar 3.1.8, dass $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten

$$\mathcal{D}_n \coloneqq \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$$

$\mathcal{D}_n$ ist ein Dynkinsystem:

(D_1) Folgt direkt.

(D_2) Sei $A \in \mathcal{D}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu\Big(G_n \cap A^{\mathrm{C}}\Big) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n \setminus (A \cap G_n)) \\
&= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\
&= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) \\
&= \nu\Big(G_n \cap A^{\mathrm{C}}\Big) \\
\Rightarrow A^{\mathrm{C}} &\in \mathcal{D}_n
\end{aligned}$$

(D_3) Sei $(A_m)_m \subseteq \mathcal{D}_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left(\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} (A_m \cap G_n)\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_m \cap G_n) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu(A_m \cap G_n) = \nu\left(\left(\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) \\
\Rightarrow \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} A_m &\in \mathrm{D}_n
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\mathcal{D}_n$ gilt $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$. Andererseits ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$. Sei $A \in \mathcal{E}$ und $A \cap G_n \in \mathcal{E}$, da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil. Nach Voraussetzung gilt $\nu(A \cap G_n) = \mu(A \cap G_n)$, also folgt $A \in \mathcal{D}_n$.
Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_n$. Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_n$. Das heißt $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$.
Für $A \in \sigma(\mathcal{E})$ definieren wir eine aufsteigende Folge $A_n \coloneqq A \cap G_n \nearrow A$. Da μ, ν Maße sind, sind sie von unten stetig. Das heißt

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap G_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.2 (Ausschöpfende Folgen)**.** Wir nennen $(G_n)_n$ im Sinne von Satz 4.1.1 eine ausschöpfende Folge. Wir nennen ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ σ-endlich, wenn es eine Folge $(G_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $G_n \nearrow X$ und $\mu(G_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.3 (Eigenschaften der *Borel*mengen)**.** In Definition 2.1.8 hatten wir $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) := \sigma(\mathcal{O}_d)$, wobei $\mathcal{O}$ das System offener Teilmengen im $\mathbb{R}^d$ war. Wir definieren nun

- $\mathcal{A}_d$: System der abgeschlossenen Teilmengen im $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{K}_d$: System der kompakten Teilmengen in $\mathbb{R}^d$

Dann gilt $\sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Beweis. Schritt 1: $\sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)$ ist klar, da σ-Algebren stabil unter Komplementbildung sind.
Schritt 2: Es gilt $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{A}_d \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_d)$.
Schritt 3: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $K_n := \{|x| < n\}$. Sei $A \in \mathcal{A}_d$, dann ist $A \cap K_n$ kompakt und

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n &= \mathbb{R}^d \\
A &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap K_n) \in \sigma(\mathcal{K}_d) \\
\Rightarrow \mathcal{A} &\subseteq \sigma(\mathcal{K}_d) \\
\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_d) &\subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{K}_d)) = \sigma(\mathcal{K}_d) \\
\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) &= \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden nehmen wir an, dass das Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existiert. Wir werden das später noch beweisen, aber entwickeln das Maß nun nach unserem geometrischen Verständnis unter der Annahme, dass es existiert (das tut es) und untersuchen erste Eigenschaften:

Beobachtung 4.1.4. Wir betrachten den Fall $d = 1$ und ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$. Dann muss gelten $\lambda^1(I) = b - a$. Wir betrachten allgemeine d mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ wobei $a \leq b$ (das heißt $a_j \leq b_j$). Dann sei

$$[a, b) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j\ \forall j \in \{1, \ldots, d\}\right\}$$

und wir definieren nach unserem geometrischen Verständnis

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

Definition 4.1.5. Es sei $J^d := \left\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d,\ a \leq b\right\}$ das Mengensystem der halboffenen Intervalle im $\mathbb{R}^d$.

Bemerkung 4.1.6 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß)**.** Es sei $c \in \mathbb{R}^d$ und wir definieren eine Translation $T_c(x) := x + c$ mit inverser Funktion T_c^{-1}. Dann gilt für ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$

$$\begin{aligned}
\lambda^d\left(T_c^{-1}(I)\right) &= \lambda^d([a - c, b - c)) \\
&= \prod_{j=1}^{d} (b_j - c_j - (a_j - c_j))
\end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) = \lambda^d(I)$$

Das heißt auf J^d ist λ^d invariant unter Translation.

Lemma 4.1.7. Sei $B \in \mathcal{B}^d$ eine Borelmenge und $c \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $B + c \coloneqq \{b + c : b \in B\} \in \mathcal{B}^d$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}^d$ fest. Schritt 1: Wir wenden das „Wünsch-dir-was“-Vorgehen an und definieren

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ A \in B^d : A + c \in B^d \right\}$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra (Übung).
Schritt 2: $\mathcal{O}_d$ ist translationsinvariant. Das heißt $\mathcal{O}_d \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{A}$. Damit sind die Borelmengen translationsinvariant. $\square$