# Skript zur Vorlesung
# Analysis III
# bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis



Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messen zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ $A$ und $B$ betrachten, die disjunkt sind, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen

**Beispiel 1.1.1** (Meßen eines Rechtecks)**.** Im Fall eines Rechteckes $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen $a$ und $b$ wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

**Beispiel 1.1.2** (Meßen eines Dreiecks)**.** Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche $g$ und Höhe $h$ kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2}gh$$

So können wir auch komplexere Formen mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Allerdings gibt es auch Fälle, in denen wir dabei auf Schwierigkeiten stoßen (siehe Cantorsches Dikontinuum).

Wir wollen ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein System von Teilmengen von $E \neq \varnothing$ ist. Außerdem soll gelten, dass

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ soll gelten $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) ??

# 2 $\sigma$-Algebren

**Definition 2.1.1** ($\sigma$-Algebra)**.** Sei $E \neq \varnothing$ eine Menge. Eine $\sigma$-Algebra in $E$ ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von $E$ mit folgenden Eingeschaften

(i) $E \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} := E \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{A}$ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar ($\mathcal{A}$-messbar).

**Lemma 2.1.2** (Eigenschaften von $\sigma$-Algebren)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $E$. Dann gilt

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$ (das heißt $\mathcal{A}$ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)

(iii) Für eine Folge von Mengen in der Algebra $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

*Beweis.*

(i) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \varnothing = E^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(ii) Wir definieren $A_1 := A$, $A_2 := B$ und $A_i := \varnothing$ für $i \geq 3$. Dann gilt

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

(iii) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \left((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} = A \cap B^{\mathrm{C}} \cap E \cap E \cap \dots$. Dann gilt nach (iii), dass $A \setminus B \in \mathcal{A}$

□

**Beispiel 2.1.3.** Wir betrachten einige Beispiele für $\sigma$-Algebren

(a) Für eine Mengen $E$ ist die Potenzmenge selber $\mathcal{P}(E)$ nach Definition immer eine $\sigma$-Algebra über $E$.

(b) $\{\varnothing, E\}$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra in $E$.

(c) Für $A \subseteq E$ gilt $\mathcal{A} := \left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra, die $A$ enthält.

(d) Sei $E$ überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} := \left\{A \subseteq E : A \text{ oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\right\}$ eine $\sigma$-Algebra.

(e) Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $E$. Für $F \subseteq E$ beliebig ist $\mathcal{A}_F := \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ die Spur-$\sigma$-Algebra von $F$.

(f) Seien $E, E'$ nicht-leere Mengen, $f : E \to E'$ eine Funktion und $\mathcal{A}'$ eine $\sigma$-Algebra in $E'$. Dann ist auch

$$\mathcal{A} := \left\{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

eine $\sigma$-Algebra.

*Beweis von (d).* Wir prüfen die Kriterien

(i) $E^{\mathrm{C}} = \varnothing$ ist abzählbar $\Rightarrow E \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ oder $A^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}}$ oder $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(iii) Sei $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden ? Fälle
Fall 1: Alle $A_n$ sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.
Fall 2: Ein $A_j$ ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^{\mathrm{C}}$ abzählbar. Das heißt $\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^{\mathrm{C}} \subseteq {A_j}^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n)^{\mathrm{C}}$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$

□

**Notation 2.1.4.** Seien $I$ eine beliebige Menge und $A_j$, $j \in I$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in $E$. Dann ist

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j := \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der $\mathcal{A}_j$.

**Satz 2.1.5.** Sei $I$ eine beliebige Menge und $\mathcal{A}_j$ eine $\sigma$-Algebra in $E$. Dann gilt

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine $\sigma$-Algebra.

*Beweis.*

(i) $E \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

(ii) $A \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$. Daraus folgt $A^{\mathrm{C}} \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_|$

(iii) Sei $A_n \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$. Dann gilt $A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_| \ \forall j \in I$

□

**Satz 2.1.6.** Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für $E$ nicht-leer ein Mengensystem von Teilmengen von $E$. Dann existiert eine kleinste $\sigma$-Algebra $\sigma(E)$ in $E$, welche $\zeta$ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine $\sigma$-Algebra in $E$

(b) Für eine $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ in $E$ mit $\zeta \subseteq A$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von $\zeta$ erzeugte $\sigma$-Algebra und $\zeta$ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

*Beweis.* Wir definieren $I \coloneqq \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller $\sigma$-Algebren, die $\zeta$ enthalten. Dabei gilt $I$ nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) \coloneqq \bigcap_{\mathcal{A} \in I} \mathcal{A}$$

eine $\sigma$-Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Voraussetzung an $I$. Und nach unserem Beweis ist auch Anforderung (b) erfüllt. □

**Beispiel 2.1.7.** Sei $\zeta \coloneqq \{A\}$. Dann ist $\left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ die von $\zeta$ erzeugte $\sigma$-Algebra.

**Definition 2.1.8.** Sei $\mathcal{O}_d$ das System der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die *Borel-$\sigma$-Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) \coloneqq \sigma(\mathcal{O}_d)$$