Skript zur Vorlesung
Analysis III
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ A und B, die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

Beispiel 1.1.1 (Messen eines Rechtecks)**.** Im Fall eines Rechteckes $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a und b wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

Beispiel 1.1.2 (Messen eines Dreiecks)**.** Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche g und Höhe h kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2}gh$$

So können wir auch komplexere Formen mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Allerdings gibt es auch Fälle, in denen wir dabei auf Schwierigkeiten stoßen (siehe Cantorsches Diskontinuum).

Wir wollen ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ein System von Teilmengen von $E \neq \varnothing$ ist. Außerdem soll gelten, dass

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ soll gelten $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) ??

2 [*] σ-Algebren und Maße

2.1 σ-Algebren

Definition 2.1.1 (σ-Algebra)**.** Sei $E \neq \varnothing$ eine Menge. Eine σ-Algebra in E ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von E mit folgenden Eingeschaften

(Σ_1) $E \in \mathcal{A}$

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \coloneqq E \setminus A \in \mathcal{A}$

(Σ_3) Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{A}$ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar ($\mathcal{A}$-messbar).

Lemma 2.1.2 (Eigenschaften von σ-Algebren)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in E. Dann gilt

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$ (das heißt $\mathcal{A}$ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)

(iii) Für eine Folge von Mengen in der Algebra $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

Beweis.

(i) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \varnothing = E^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(ii) Wir definieren $A_1 \coloneqq A$, $A_2 \coloneqq B$ und $A_i \coloneqq \varnothing$ für $i \geq 3$. Dann gilt

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

(iii) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \left((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} = A \cap B^{\mathrm{C}} \cap E \cap E \cap \ldots$. Dann gilt nach (iii), dass $A \setminus B \in \mathcal{A}$

$\square$

Beispiel 2.1.3. Wir betrachten einige Beispiele für σ-Algebren

(a) Für eine Mengen E ist die Potenzmenge selber $\mathcal{P}(E)$ nach Definition immer eine σ-Algebra über E.

(b) $\{\varnothing, E\}$ ist die kleinste σ-Algebra in E.

(c) Für $A \subseteq E$ gilt $\mathcal{A} \coloneqq \left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ ist die kleinste σ-Algebra, die A enthält.

(d) Sei E überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} \coloneqq \left\{A \subseteq E : A \text{ oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\right\}$ eine σ-Algebra.

(e) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in E. Für $F \subseteq E$ beliebig ist $\mathcal{A}_F \coloneqq \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ die Spur-σ-Algebra von F.

(f) Seien E, E' nicht-leere Mengen, $f : E \to E'$ eine Funktion und $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in E'. Dann ist auch

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis von (d). Wir prüfen die Kriterien

(Σ_1) $E^{\mathrm{C}} = \varnothing$ ist abzählbar $\Rightarrow E \in \mathcal{A}$

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ oder A^{C} ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}}$ oder $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(Σ_3) Sei $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden 2 Fälle
Fall 1: Alle A_n sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.
Fall 2: Ein A_j ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^{\mathrm{C}}$ abzählbar. Das heißt $\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^{\mathrm{C}} \subseteq {A_j}^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n)^{\mathrm{C}}$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$

□

Notation 2.1.4. Seien I eine beliebige Menge und A_j, $j \in I$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in E. Dann ist

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \coloneqq \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der $\mathcal{A}_j$.

Satz 2.1.5. Sei I eine beliebige Menge und $\mathcal{A}_j$ eine σ-Algebra in E. Dann gilt

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine σ-Algebra.

Beweis.

(i) $E \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

(ii) $A \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$. Daraus folgt $A^{\mathrm{C}} \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_|$

(iii) Sei $A_n \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$. Dann gilt $A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_| \ \forall j \in I$

□

Satz 2.1.6. Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für E nicht-leer ein Mengensystem von Teilmengen von E. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(E)$ in E, welche ζ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine σ-Algebra in E

(b) Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ in E mit $\zeta \subseteq A$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von ζ erzeugte σ-Algebra und ζ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

Beweis. Wir definieren $I := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller σ-Algebren, die ζ enthalten. Dabei gilt I nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) := \bigcap_{\mathcal{A} \in I} \mathcal{A}$$

eine σ-Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Voraussetzung an I. Und nach unserem Beweis ist auch Anforderung (b) erfüllt. □

Beispiel 2.1.7. Sei $\zeta := \{A\}$. Dann ist $\left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ die von ζ erzeugte σ-Algebra.

Definition 2.1.8. Sei $\mathcal{O}_d$ das System der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die *Borel-σ-Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

2.2 Maße und Prämaße

Sei in diesem Teilkapitel stets X eine Menge.

[25. Okt] **Definition 2.2.1** (Maß)**.** Ein (positives) Maß μ auf X ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

(i) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$

(iii) Sei für $n \in \mathbb{N}$ $(A_n)_n \in \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.2 (Prämaß)**.** Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht unbedingt eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Funktion, so heißt μ Prämaß, falls

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ (das setzt also auch voraus, dass $\varnothing \in \mathcal{A}$)

(ii) Sind $(A_n)_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, dann folgt

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.3 (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen)**.** Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Teilmengen von X. Dann nennen wir $(A_n)_n$

- wachsend, falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Notation 2.2.4.

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
2. Für eine fallende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \searrow A$, falls $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Definition 2.2.5 (Messraum und Maßraum)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß.

1. Wir nennen das Paar $(X, \mathcal{A})$ einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Maßraum.
3. Wir nennen μ endlich und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen endlichen Maßraum, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Wir nennen μ Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls $\mu(X) = 1$.
5. Wir nennen μ σ-endlich, falls es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu(A_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $(A_n)_n$ eine ausschöpfende Folge.

Satz 2.2.6 (Eigenschaften von Maßen)**.** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $A, B, (A_n)_n, (B_n)_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(iii) $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iv) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Starke Additivität)

(v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (Subadditivität)

(vi) $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)

(vii) $(B_n)_n \searrow B$ und $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(B_n)$ (Stetigkeit von oben)

(viii) $\mu\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ-Subadditivität)

Beweis.

(i) Sei $A_1 = A, A_2 = B$ und $A_n = \varnothing$ für $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \dot{\cup} B &= \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \dot{\cup} B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(ii) Sei $A \subseteq B$, dann folgt $B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \dot{\cup} (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

(iii) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

(iv) Es gilt $A \cup B = A \dot{\cup} (B \setminus (A \cap B))$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \dot{\cup} (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(v) Aus (iv) folgt $\mu(A)+\mu(B)=\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)\geq\mu(A\cup B)$

(vi) Sei $(A_n)_n$ wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen $(F_n)_n$ mit $F_1 \coloneqq A_1$ und $F_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind F_j paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned}\bigcup_{j=1}^{n} A_j &= \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} F_j\\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(F_j)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\mu(F_j) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)\end{aligned}$$

(vii) Sei $(B_n)_n \searrow B$ mit $\mu(B_1)<\infty$. Wir definieren $A_n \coloneqq B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$ wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned}\mu(B_1\setminus B) &= \lim_{n\to\infty}\mu(B_1\setminus B_n)\\ \mu(B_1)-\mu(B) &= \lim_{n\to\infty}(\mu(B_1)-\mu(B_n)) = \mu(B)-\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)\\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n\to\infty}\mu(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)\end{aligned}$$

(viii) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir definieren $\hat{A}_k \coloneqq \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\hat{A}_k\right) &= \lim_{k\to\infty}\mu\left(\hat{A}_k\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \leq \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\mu(A_j)\\ &\leq \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2.7.

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt“ auch kürzer „disjunkt“
2. Satz 2.2.6 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern A stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und ? (für die verbleibenden Eigenschaften)

Beispiel 2.2.8 (Dirac-Maß)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X und $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) \coloneqq \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist δ_{x_0} ein Maß in X und wird als *Dirac*-Maß bezeichnet.

Beispiel 2.2.9 (Zählmaß)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.10** (Ring und Algebra)**.** Ein Mengensystem $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

(R_1) $\varnothing \in R$

(R_2) $A, B \subseteq R \Rightarrow (A \setminus B) \in R$

(R_3) $A, B \subseteq R \Rightarrow (A \cup B) \in R$

Ist ferner $X \in R$, dann heißt R Algebra.

Bemerkung 2.2.11 (Eingeschaften von Mengenringen)**.** Es sei R ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ enthält R auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz $\Delta : R \times R \to R, \ (A, B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann definiert $(R, \Delta, \cap)$ einen Ring im Sinne der Algebra, wobei Δ der „Addition“ und $\cap$ der „Multiplikation“ entspricht.

3 [*] Dynkinsysteme

Definition 3.1.1 (Dynkinsystem)**.** Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkinsystem, falls

(D_1) $X \in \mathcal{D}$

(D_2) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$

(D_3) Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$

Beispiel 3.1.2.

1. Jede σ-Algebra ist ein Dynkinsystem.
2. Sei X eine $2n$-elementige Menge. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$ ein Dynkinsystem, aber keine σ-Algebra.

Lemma 3.1.3. Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_j)_{j\in I}$ eine Familie von Dynkinsystemen in X, dann ist $\bigcap\limits_{j\in I} \mathcal{D}_j$ wieder ein Dynkinsystem.

Beweis. (Übung) □

Satz 3.1.4. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert das kleinste Dynkinsystem $\delta(\mathcal{G})$, welches $\mathcal{G}$ enthält. Wir nennen $\delta(\mathcal{G})$ das von $\mathcal{G}$ erzeugte Dynkinsystem.

Beweis. $\mathcal{P}(X)$ ist ein Dynkinsystem. Wir definieren also $I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkinsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \varnothing$. Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über σ-Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D}\in I} \mathcal{D}$$ □

Definition 3.1.5. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Analog dazu nennen wir $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$.

Frage: Wann ist ein Dynkinsystem eine σ-Algebra?

Lemma 3.1.6. Sei $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Dann gilt $\mathcal{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Sei $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^{\mathrm{C}}, B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = \left(A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$.

„$\Leftarrow$“ Zu zeigen ist Eigenschaft (Σ_3). Sei $(D_n)_n \in \mathcal{D}$ eine Mengenfolge. Wir definieren $D'_0 := \varnothing$ und $D'_n := D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. Dann ist $(D_n)_n$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D'_n = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1})$$

Außerdem ist

$$\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D}$$

falls $(D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Und es gilt $D'_n \setminus D'_{n-1} = \left(D'_n \cap (D'_{n-1})^{\mathrm{C}}\right) \in \mathcal{D}$, falls $D'_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil ist. Außerdem gilt

$$A \cup B = \left(A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$$

Damit ist (Σ_3) gezeigt. □

Satz 3.1.7. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann folgt aus $\mathcal{G}$ ist $\cap$-stabil, dass $\delta(\mathcal{G})$ $\cap$-stabil ist. Und damit ist auch $\delta(\mathcal{G})$ eine σ-Algebra, das heißt in diesem Fall gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$([1]).

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $D \in \delta(\mathcal{G})$ und definieren

$$\mathcal{D}_D \coloneqq \{\mathcal{Q} \in \mathcal{P}(X) : \mathcal{Q} \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung: $\mathcal{D}_D$ ist ein Dynkinsystem. Stimmt diese Behauptung, dann können wir folgendermaßen folgern: Da $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} \forall G, D \in \mathcal{G} : G \cap D \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_D \\ \Rightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \overset{\text{(Beh.)}}{=} \mathcal{D}_D \\ \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G}\ \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} \forall G \in \delta(\mathcal{G})\ \forall D \in \mathcal{G} : D \cap G = G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_G \\ \Rightarrow \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathrm{D}_G) = \mathrm{D}_g \quad \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) : D \cap G \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt $\delta(\mathcal{G})$ ist σ-stabil.

Wir zeigen noch die Behauptung:

(D_1) Sei $D \in \mathcal{G}$ und $X \in \mathcal{D}_D$. Dann ist $X \cap D = D \in \mathcal{D}_D$.

(D_2) Sei $Q \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $Q^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}_D$, denn $Q^{\mathrm{C}} \cap D = \left(Q^{\mathrm{C}} \cup D^{\mathrm{C}}\right) \cap D = (Q \cap D)^{\mathrm{C}} \cap D = \left((G \cap D) \dot{\cup} D^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \delta(\mathcal{G})$.

(D_3) (Nächste Vorlesung)

□

[1] Das liegt daran, dass $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$ und $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{G}$ enthält.