Cálculo Numérico

Práctica 3 - Resultados

6 de Enero, 2018

1 Pregunta 3.2.1. Método Explícito para la Ecuación de Calor

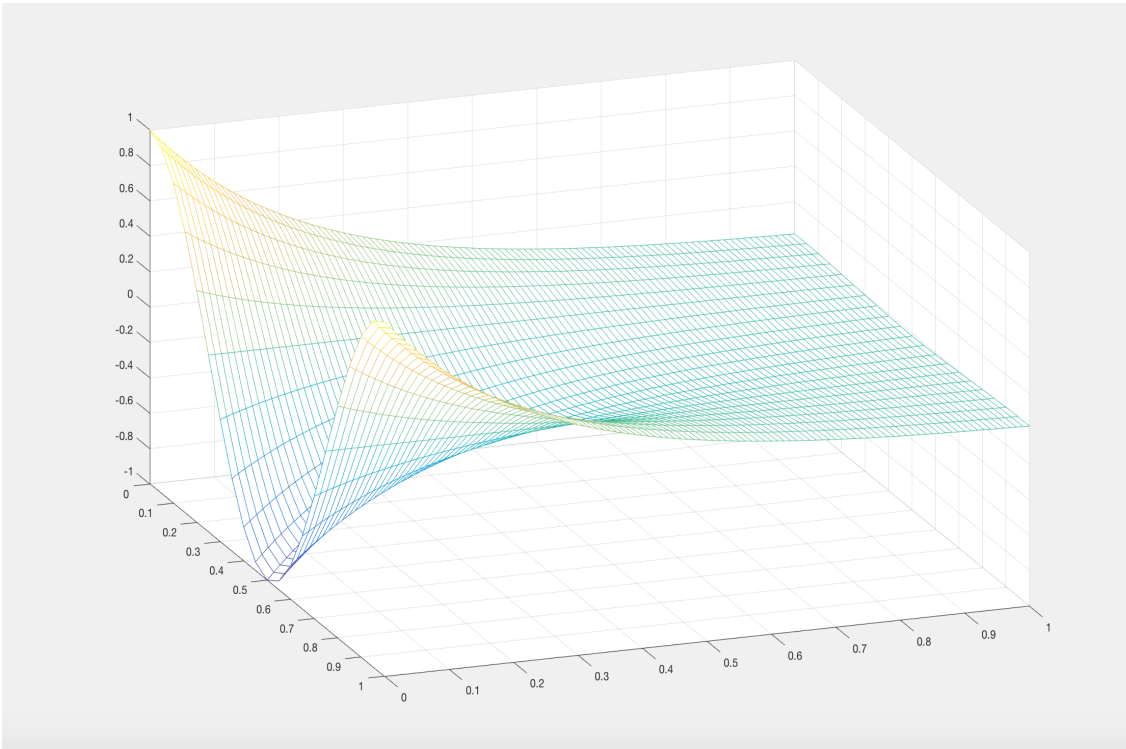
1.1 Primer Inciso: máximo Δt teórico

El método es estable si $\sigma = \frac{Dk}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ con $D = \frac{1}{\pi^2}$ el coeficiente de difusión de calor y $k = \Delta t$. Para la ecuación dada, con $h = \Delta x = \frac{1}{20}$, se necesita que $\frac{2k}{\pi^2 h^2} \leq 1$. Esto es, $k \leq \frac{\pi^2}{800} \approx 0.012337005501362$.

1.2 Segundo Inciso: error en (0.3,1)

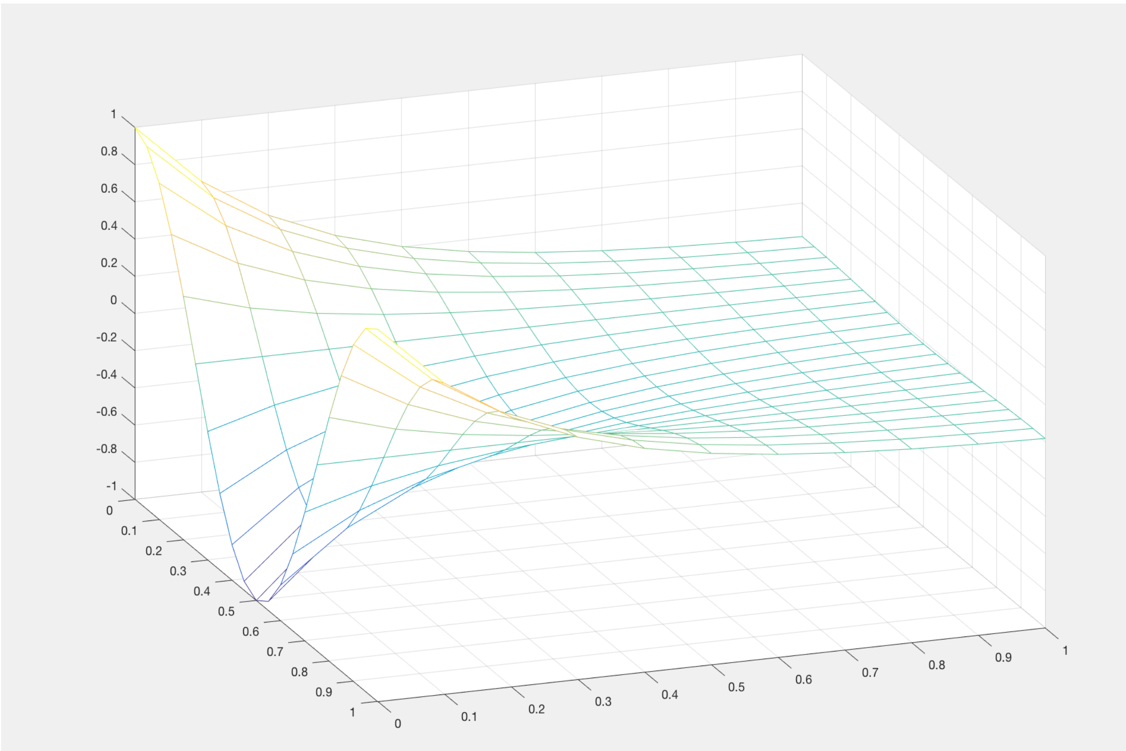
Sea $u_\star$ el valor de la aproximación en en punto $(x,t) = (0.3, 1)$, el cual está dado por la entrada $W_{7,N+1} = -0.003788390674117$ de la matriz de soluciones. El valor exacto está dado por $u(0.3, 1) = e^{-4}\cos(2\pi(0.3)) \approx -0.005659843679454$. Así, el error en el punto $(0.3, 1)$ está dado por $|u_\star - u(0.3, 1)| = |-0.003788390674117 + 0.005659843679454| = 0.001871453005336$.

1.3 Tercer Inciso: gráfica



2 Pregunta 3.2.2. Método Crank-Nicolson para la Ecuación de Calor

2.1 Primer Inciso: gráfica



2.2 Segundo Inciso: Tabla 1

Solución exacta en (0.3,1) = -0.005659843679454.

$\Delta x = \Delta t$ |	| Aproximación numérica |	| Error de aproximación
$\frac{1}{10}$	-0.008852894255429	0.003193050575976
$\frac{1}{20}$	-0.006437110311738	7.772666322843425e-04
$\frac{1}{40}$	-0.005852866516267	1.930228368133167e-04

Para verificar que el error se reduce cuadráticamente, utilizamos la fórmula del *experimental order of convergence* definido por $p \approx \frac{log(\frac{E_2}{E_1})}{log(\frac{h_2}{h_1})}$.
Así, $E_2 = 7.772666322843425e - 04$, $E_1 = 0.003193050575976$, $h_2 = \frac{1}{20}$ y $h_1 = \frac{1}{10}$ y tenemos que $p \approx 2.038453916083831$, es decir, que el orden p del método es 2, esto es, que el error se reduce cuadráticamente.
Resta verificar que el *e.o.c.* es consistente con la teoría:
En el método de *Crank-Nicolson*, la expresión para aproximar u_{xx} está dada por:

$$\frac{(v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1} + v^{n-1}_{m+1} - 2v^{n-1}_m + v^{n-1}_{m-1})}{2h^2}.$$

Usando expansiones en serie de Taylor, tenemos que:
$v^n_{m+1} \approx u(x+h,t) = u + hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4)$
$v^n_{m-1} \approx u(x-h,t) = u - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} - \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4)$
$v^{n-1}_{m-1} \approx u(x-h,t-k) = u - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} - \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4) - ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \mathcal{O}(k^3)$
$v^{n-1}_m \approx u(x,t-k) = u - ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \mathcal{O}(k^3)$.
$v^{n-1}_{m+1} \approx u(x+h,t-k) = u + hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4) - ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \mathcal{O}(k^3)$.

Luego,
$h^2u_{xx} = v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1} + \mathcal{O}(h^4)$
$h^2u_{xx} = v^{n-1}_{m+1} - 2v^{n-1}_m + v^{n-1}_{m-1} + \mathcal{O}(h^4) - 2ku_t + k^2u_{tt} + \mathcal{O}(k^3)$.

Sumando ambas expresiones y despejando para u_{xx}, se sigue que

$$u_{xx} = \frac{v_{m+1}^{n} - 2v_{m}^{n} + v_{m-1}^{n} + v_{m+1}^{n-1} - 2v_{m}^{n-1} + v_{m-1}^{n-1}}{2h^2} + \mathcal{O}(h^2) - 2ku_t + k^2 u_{tt} + \mathcal{O}(k^3).$$

Dado que, por el momento, nos interesa ver el error en el espacio, basta observar que se cumple que la expansión es de orden 2 respecto a $h = \Delta x$. □

2.3 Tercer Inciso: Tabla 2

Solución exacta en (0.3,1) = -0.005659843679454.

$\Delta x = \frac{1}{20}, \Delta t = k$	Aproximación numérica	Error de aproximación
$k = \frac{1}{25}$	-0.006625587044768	9.657433653140236e-04
$k = \frac{1}{50}$	-0.006876820919023	0.001216977239570
$k = \frac{1}{100}$	-0.006939617192681	0.001279773513227
$k = \frac{1}{200}$	-0.006955315499833	0.001295471820380

Observamos que el error empieza a aumentar a partir de $\Delta t = \frac{1}{50}$, lo cual a primera instancia pareciera que contradice a la teoría, que nos dice que el error se debería de reducir cuadráticamente en el tiempo. Sin embargo, también es sabido que si $D\Delta t$ es muy pequeño en relación a Δx^2 se crean *oscilaciones* que generen problemas, que es probablemente lo que está sucediendo al disminuir mucho el tamaño del paso en el tiempo[1].

[1]Duffy, Daniel J. "A Critique of the Crank Nicolson Scheme Strengths and Weaknesses for Financial Instrument Pricing." *Wilmott Magazine (n.d.): 68-69. Imperial College of Science, Technology and Medicine.* Web.

3 Pregunta 3.3.1. Método Lax-Friedrichs para la Ecuación de Transporte

3.1 Primer Inciso: Orden del Método.

La teoría nos dice que el método es $\mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$. En el experimento, se observaron algunas cosas interesantes: Sea $\Delta x \in \{\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}\}$. Se observó que, ajustando Δt de manera que σ se mantenga constante e igual a 1, el método es exacto, dado que se obtiene un error de 1.110223024625157e-16. Esto es consistente con la teoría dado que, el método debería ser exacto cuando la segunda derivada respecto a cada variable de la función a aproximar es cero, lo cual se cumple en este caso para $u(x,t)$ $\forall x$ $\in \mathbb{R} - \{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si dejamos variar σ junto con Δx o con Δt en lugar de manter su valor fijo igual a 1, se obtienen algunos problemas. Concretamente, mejorando la malla en t y dejando fijo Δx el error aumenta. Si bien el método es estable, quizá este problema se deba a que el *dominio de dependencia numérico* es menor que el *dominio de dependencia físico.*[2]

3.2 Segundo Inciso: Máximo Δt

El método es estable si $\sigma = \frac{ck}{h} = \frac{2k}{(\frac{1}{20})} \leq 1$. Luego, $k \leq \frac{h}{2} = \frac{1}{40}$.

[2]Rezzolla, Luciano. "Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations." (n.d.): 14-20. Max-Planck-Institute for Gravitational Physics. Web.

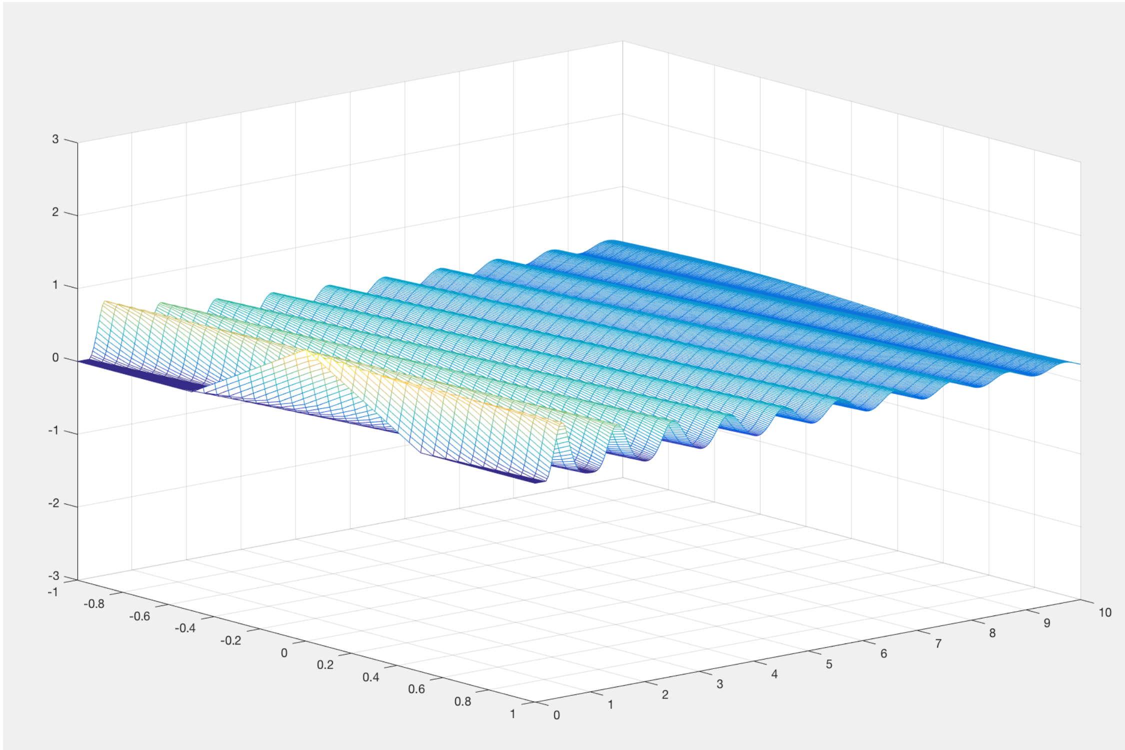
3.3 Tercer Inciso: Tabla con $\sigma = 0.8$

Para la solución exacta se tiene que la altura máxima es 1, en $x = 0$, y el volumen es $\frac{1}{2}$.

Para construir la siguiente tabla se utilizan $\sigma = 0.8$ con $\Delta x = \frac{1}{20}$.

$t = 2n$ |	| Altura máxima (A.m.) |	| Posición x de A.m. |	| Volumen
$t = 2$	0.547723257775712	-0.100000000000000	0.498645882401607
$t = 4$	0.423397230493546	-0.200000000000000	0.494873803113247
$t = 6$	0.358105977766596	-0.300000000000000	0.491632714337687
$t = 8$	0.318090598590514	-0.400000000000000	0.489520594012568
$t = 10$	0.292663787809495	-0.400000000000000	0.488313598512385

El método funciona satisfactoriamente cuando buscamos el volumen, sin embargo hay un problema con la altura máxima y con el valor de x para el cual se tiene dicha altura. Este problema crece conforme crece t. Lo anterior se puede explicar por que el método tiene un desfase que incrementa conforme pasa el tiempo. La animación de la solución y la aproximación en el código *AnimacionTransporte.m* ilustran lo anterior. Tambien se puede pensar analíticamente. Observando la columna 501 (la última columna), de la matriz de soluciones, que corresponde al tiempo $t = 10$, se puede ver que los valores disminuyen y luego vuelven a aumentar sobre el intervalo de x, que no corresponde con la forma/gráfica de la solución exacta. Por ejemplo, $W_{1,501} = 0.237603864207308$, $W_{30,501} = 0.199036742847725$, y $W_{41,501} = 0.229852195296758$ en donde W es la matriz de soluciones, la entrada i es la $i-$ésima x en la malla. Sin embargo, esto es solo una mirada parcial a lo que está sucediendo, dado que estamos cortando una función tridimensional en un plano. Para ilustrar el fenómeno completo, se deja una gráfica de la aproximación con *Lax-Friedrichs* a continuación.



3.4 Cuarto Inciso: Tabla con $\sigma = 1$ y $\Delta x = \frac{1}{20}$

$t = 2n$	Altura máxima (A.m.)	Posición x de A.m.	Volumen
$t = 2$	1.000000000000000	-0.100000000000000	0.500000000000000
$t = 4$	1.000000000000000	-0.200000000000000	0.500000000000000
$t = 6$	1.000000000000000	-0.300000000000000	0.500000000000000
$t = 8$	1.000000000000000	-0.400000000000000	0.500000000000000
$t = 10$	1.000000000000000	-0.500000000000000	0.500000000000000

3.5 Quinto Inciso: $\sigma = 2$

Se tiene que para el tiempo $t = 0.45$ (que corresponde a la columna 9 de W), $|W_{i,9}| = |v_i^9| > 5$ para $i \in \{14, 16, 18, 24, 26, 28, 29, 34, 36, 38\}$ y $j = 9$ es la primer columna para cual se cumple que $|v_i^j| > 5$ para alguna i. W es una matriz de tamaño $(M+1)$ x $(N+1)$ con $M = 40$ y $N = 200$. Así, $\sigma = 2$.

4 Pregunta 3.3.2. Método Leapfrog para la Ecuación de Transporte

4.1 Primer Inciso: Máximo Δt

Los esquemas *Leapfrog* y *Lax-Friedrichs* comparten la condición CFL. Luego, el esquema *Leapfrog* es estable si $\sigma = \frac{ck}{h} = \frac{2k}{(\frac{1}{20})} \leq 1$. Esto es, $k \leq \frac{h}{2} = \frac{1}{40}$.

4.2 Segundo Inciso: Tabla con $\sigma = 0.8$

$t = 2n$ |	| Altura máxima (A.m.) |	| Posición x de A.m. |	| Volumen
$t = 2$	0.898481856213026	-0.100000000000000	0.497571554641059
$t = 4$	0.497571554641059	-0.300000000000000	0.500131553224770
$t = 6$	0.904563379749248	-0.400000000000000	0.504303950747260
$t = 8$	0.904563379749248	-0.500000000000000	0.502892626751680
$t = 10$	0.835523012241780	-0.650000000000000	0.497445887252128

4.3 Tercer Inciso: Tabla con $\sigma = 1$

$t = 2n$ |	| Altura máxima (A.m.) |	| Posición x de A.m. |	| Volumen
$t = 2$	1.000000000000000	-0.100000000000000	0.500000000000000
$t = 4$	1.000000000000000	-0.200000000000000	0.500000000000000
$t = 6$	1.000000000000000	-0.300000000000000	0.500000000000000
$t = 8$	1.000000000000000	-0.400000000000000	0.500000000000000
$t = 10$	1.000000000000000	-0.500000000000000	0.500000000000000

References

[1] Timothy Sauer. *Numerical Analysis*. Pearson, 2nd ed.

[2] Luciano Rezzolla. *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations*. Max-Planck-Institute for Gravitational Physics, pp. 14 - 20
`www.aei.mpg.de/ rezzolla/lnotes/Evolution_Pdes/evolution_pdes_lnotes.pdf`.

[3] Daniel J Duffy. *A Critique of the Crank Nicolson Scheme Strengths and Weaknesses for Financial Instrument Pricing*. Wilmott Magazine pp. 68,69. Imperial College of Science, Technology and Medicine.
`wwwf.imperial.ac.uk/ ajacquie/IC_Num_Methods/IC_Num_Methods_Docs/Literature/DuffyCN.pdf`.

[4] Universität Münster
`https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_tp/lectures/ws2016-2017/num_methods_i/advection.pdf`