

Devoir 2 – Réseaux et programmation en nombres entiers

Remise le 16 octobre sur Moodle.

Consignes

- Les devoirs doivent être réalisés seuls ou par binômes (de préférence par binôme).
- Soumettez un document (format pdf) reprenant votre devoir ainsi que votre modèle MiniZinc.
- Indiquez vos noms et matricules dans le rapport ainsi que dans les titres des fichiers soumis.
- Veillez à rendre un rapport **structuré, clair et concis**. Les lacunes de forme seront pénalisées.

Question 1 (6 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll}\underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} & 4x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & -2x_1 + 9x_2 \leq 11 \\ & 5x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ & 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\end{array}$$

1. Représentez graphiquement ce problème.
2. Résolvez manuellement ce problème avec un algorithme *branch-and-bound*. Représentez graphiquement l'arbre de recherche obtenu en indiquant précisément pour chaque noeud : (1) la solution du problème relaxé (valeurs de x_1 et de x_2 ainsi que le coût de la solution), (2) l'ordre de visite des noeuds (1 pour le premier noeud visité, 2 pour le second, etc.), (3) les meilleures bornes supérieures et inférieures actuelles que vous avez lors de la visite d'un noeud, (4) la raison pour laquelle vous ne branchez pas sur un noeud (le cas échéant). Lors d'un branchement, indiquez également quelle contrainte vous avez rajouté. Branchez sur x_1 en premier dans l'algorithme.
3. Donnez la solution optimale de ce problème.
4. Auriez-vous pu commencer en branchant sur x_2 ? Quel impact cela aurait-il sur le *branch-and-bound* ? Ne pas redétailler tout l'algorithme.

Question 2 (14 pts)

Les deux randonneurs du devoir précédent ont finalement bien mal organisé leur paquetage et sont à court de nourriture. Il savent qu'ils ont deux solutions pour la suite de leur périple : ils peuvent voler profiter de la générosité d'inconnus croisés en chemin (M_1) ou peuvent chasser leur nourriture (M_2). Par chance ils connaissent bien ces deux méthodes et peuvent estimer ce qu'ils peuvent tirer de la chasse et du vol de leurs rencontres futures. Leur périple comporte encore trois étapes, la citadelle des étoiles (L_1), la grotte l'araignée (L_2), et un volcan actif (L_3). Le tableau 1 indique la quantité maximale qu'ils peuvent récupérer d'une étape à l'autre (en portions), et ils ont pu estimer la quantité de nourriture qu'ils vont consommer ainsi que la difficulté de transporter la nourriture (différentes en fonction de l'étape). La quantité de nourriture nécessaire pour chaque étape ainsi que le coût de transport de la nourriture excédentaire (effort par portion de nourriture) sont donnés tableau 2.

Leur réserve se compose actuellement de 1 carotte (1 portion de nourriture).

Le coût de transport jusqu'à L_i est déterminé par la quantité de nourriture restante à la fin de L_{i-1} (le coût pour la période L_1 est donc fixe puisqu'il concerne uniquement la réserve qu'ils ont actuellement).

Leur objectif est de minimiser le coût de transport tout en s'assurant d'avoir la quantité de nourriture nécessaire pour chaque étape.

| | L_1 | L_2 | L_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| M_1 | 20 | 0 | 10 |
| M_2 | 15 | 5 | 0 |

TABLE 1 – Quantité de nourriture disponible avec chaque méthode à chaque étape (en portions)

| | L_1 | L_2 | L_3 |
|----------------------|-------|-------|-------|
| Besoin en nourriture | 10 | 10 | 25 |
| Coût de transport | 10 | 40 | 20 |

TABLE 2 – Nourriture nécessaire et coût de transport pour chaque étape (en portions)

1. Représentez graphiquement cet énoncé sous la forme d'un réseau. Veillez à bien dessiner le réseau et à indiquer les coûts et bornes de chaque arrête.
2. Modélisez ce problème sous la forme d'un problème de flux à coût minimum. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes.
3. Donnez la solution optimale de ce problème, en expliquant votre raisonnement.
4. Modélisez et résolvez ce problème avec MiniZinc ; le modèle doit être générique (les données doivent être nommées et déclarées avant les contraintes, vous n'avez pas besoin de produire un `.dzn`). Aviez-vous bien trouvé la solution optimale du problème ? Est-elle unique ? Décrivez la solution en français pour expliquer le plan d'action retenu aux randonneurs qui n'ont pas suivi le cours MTH8414.
5. Nos randonneurs peuvent acheter un poney pour 90 pièces afin de réduire de 5 la pénibilité (coût) de transport par portion pour toutes les étapes. S'ils estiment vouloir payer jusqu'à une pièce par pénibilité évitée, le poney vaut-il le coup ? À partir de quel ratio pièce/pénibilité la décision changerait ?
6. Nos randonneurs se rendent compte qu'ils ne peuvent pas transporter plus de 15 portions au total entre les étapes. Cela a-t-il une influence sur le problème ?