Devoir 1 – Résolution de programmes linéaires

Remise le 25 septembre sur Moodle.

Consignes

- Les devoirs doivent être réalisés seuls ou par binômes (de préférence par binôme).
- Soumettez un document (format pdf) reprenant votre devoir, ainsi que votre modèle MiniZinc (fichier `.mzn`).
- Indiquez vos noms et matricules dans le titre des fichiers soumis.
- Veillez à rendre un rapport **structuré**, **clair** et **concis**. Les lacunes de forme seront pénalisées.

Question 1 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
\underset{x_1,x_2}{\text{maximize}} \quad & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

1. Représentez graphiquement l'espace des solutions réalisables.
2. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût donnant lieu à plusieurs solutions.
3. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût ne donnant lieu à aucune solution.
4. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée au coût optimal.
5. Quel est le coût optimal et quelles sont les valeurs des variables x_1 et x_2 donnant ce coût ?

Question 2 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 1 \\
& 3x_1 + 4x_2 - x_4 \leq 0 \\
& x_1 + x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0, \; x_4 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1. Donnez le dual de ce problème, en justifiant calculs et transformations. Présentez le dual avec des variables positives ou dans $\mathbb{R}$.
2. Donnez le dual du dual.

Question 3 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\text{maximize}} \quad & \min(2x_1 + x_2,\, 3x_1 - 2x_2) \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Reformulez ce problème afin qu'il soit linéaire.

Question 4 : Un Voyage Inattendu (14 pts)

Deux randonneurs ambitieux doivent se préparer pour partir remplir une mission concernant un mystérieux anneau. Dans la précipitation et contraints par leurs modestes sacs, ils doivent emporter assez de nourriture pour le voyage. Voyons comment nous pouvons les aider à se préparer.

Ils auront besoin de vivres pour 60 jours, avec 1800 calories **par personne** par jour (ils sont très petits). Au moins 35% de l'apport calorique minimum doit venir de glucides, 25% de protéines et 15% de lipides. De plus, un maximum de 25% de l'apport calorique peut provenir des lipides. La nourriture disponible, son apport calorique détaillé et la quantité disponible (en portions) sont détaillés ci-dessous. Vous devez décider quelle quantité de chaque aliment doit être emportée pour répondre aux besoins de nos aventuriers, tout en ayant un paquetage de poids le plus faible possible. Ayant mangé beaucoup de navets et d'oignons la semaine passée, ils décident également de n'emporter qu'au maximum 45 navets et oignons cumulés.

	Calories provenant de				
Aliment	glucides	protéines	lipides	Quantité maximum	Poids (g)
Pain à forte teneur protéique	800	1500	200	80	160
Patates	680	40	10	10	80
Lapin	0	1400	400	20	400
Navet	45	5	0	30	40
Carotte	18	4	0	30	20
Oignon	35	5	40	30	40
Noix	25	25	150	100	10

Table 1 – Apports nutritifs et poids pour divers aliments (par portion).

1. Modélisez ce problème sous la forme d'un **programme linéaire** en variables entières. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes. Donnez également une explication en français de chacune des contraintes.
2. Modélisez et résolvez ce problème à l'aide de MiniZinc. Reportez votre solutions ainsi que le coût optimal dans le rapport. Utilisez le fichier `.dzn` fourni.
3. Indiquez (et justifiez) deux exemples de contraintes liées dans votre solution.
4. Les oignons pèsent finalement 5 grammes de moins par portion. Comment est affectée la solution optimale ? Expliquez comment une analyse de sensibilité pourrait permettre de déduire ce résultat (la notion de coût marginal est attendue).