

ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO. MODELOS DE REGRESIÓN DE ERRORES ESTRUCTURALES ARMA(p, q) ESTACIONARIOS

Sofía Cuartas García¹, Simón Cuartas Rendón², Deivid Zhang Figueroa³

Fecha de entrega: 03-06-2022

1. INTRODUCCIÓN

El Departamento Administrativo Nacional de Estadística, DANE, es el ente público nacional encargado de la planeación, procesamiento, análisis y difusión de las estadísticas oficiales de Colombia, dentro de las cuales se contempla la **Encuesta Mensual Manufacturera con Enfoque Territorial, EMMET**, que es una investigación mediante la que se obtiene información de evaluación de las principales variables económicas del sector fabril colombiano como producción, ventas, empleo, sueldos y horas trabajadas en el corto plazo, las cuales permiten al DANE generar **índices, variaciones y contribuciones**, como es el caso del **índice de producción industrial manufacturera, IPIM**, la cual permite conocer la estructura y evolución del sector manufacturero del país. Además, esta es una herramienta importante para la elaboración de estimaciones del producto interno bruto, PIB, del sector industrial, entendiendo por **industria** al “conjunto de unidades de producción que se dedican a actividades económicas productivas similares o iguales”, y las cuales son agrupadas conforme a la *Clasificación Industrial Internacional Uniforme*, la cual es “la clasificación internacional de referencia de las actividades productivas”, y se tiene que su objetivo es “proporcional un conjunto de categorías de actividades que puedan utilizarse para la recopilación y presentación de informes estadísticos de acuerdo con esas actividades”, categorías que son establecidas mediante 21 secciones, 99 divisiones, 249 grupos y dentro de cada grupo puede existir uno o varios tipos de clases, dentro de las cuales se halla la industria manufacturera, y cuyas unidades se caracterizan por la transformación de materiales en nuevos productos.

De igual forma, el EMMET se enfoca en los establecimientos industriales manufactureros en el país que ocupan diez o más personas y que en conjunto produjeron el 80 % de la producción industrial reportada por la Encuesta Anual Manufacturera del 2017 y concentran el 65 % de los empleos totales de cada dominio de estudio publicado [1], entiendo por *dominio* a las 39 actividades industriales que son representadas por la muestra y que son establecidas por la *Clasificación Industrial Internacional Uniforme, CIIU*, las cuales son: coquización, refinación de petróleo y mezcla de combustibles; confección de prendas de vestir; fabricación de jabones y detergentes, perfumes y preparados de tocador; elaboración de otros productos alimenticios no clasificados previamente (n.c.p.); fabricación de maquinaria y equipo n.c.p.; otras industrias manufactureras; trilla de café; fabricación de vidrio y productos de vidrio; elaboración de azúcar y panela; transformación de la madera y sus productos; elaboración de productos lácteos; fabricación de calzado; fabricación de carrocerías para vehículos automotores, remolques; actividades de impresión; elaboración de productos de panadería; procesamiento y conservación de carne, pescado, crustáceos y moluscos; fabricación de productos de caucho; fabricación de muebles, colchones y somieres; industrias básicas de metales preciosos y no ferrosos; curtido y recurtido de cueros, recurtido y teñido de pieles; fabricación de artículos de viaje, bolsos de mano y artículos similares en cuero; industrias básicas de hierro y de acero; elaboración de alimentos preparados para animales; hilatura, tejeduría y acabado de productos textiles; elaboración de cacao, chocolate y producción de confitería; fabricación de otros productos químicos; fabricación de productos elaborados de metal; elaboración de productos de molinería, almidones y sus derivados; fabricación de partes, piezas (autopartes) y accesorios (lujos) para vehículos; fabricación de productos de plástico; fabricación de sustancias químicas básicas y sus productos; fabricación de productos minerales no metálicos n.c.p.; fabricación de otros tipos de equipo de transporte; fabricación de aparatos y equipo eléctrico; fabricación de aceites y gradas de origen vegetal y animal; fabricación de vehículos automotores y sus motores; fabricación de papel, cartón y sus productos; fabricación de productos farmacéuticos, sustancias químicas medicinales; y por último, la elaboración de bebidas.

Ahora bien, es importante tener presente que el DANE define la **producción nominal** como “valor de los productos elaborados y los subproductos y desechos que resultan de la producción y que se destinan a la venta, valor de productos manufacturados para terceros que entregan materia prima, valor de los ingresos por servicios industriales, valorados a precio promedio de venta en fábrica y sin incluir los impuestos directos (IVA, consumo, etc.)” y a las **ventas nominales** como “el valor de los productos y subproductos elaborados por el establecimiento y vendidos durante el mes de referencia a precio de venta en fábrica y sin incluir los impuestos indirectos”, toda vez que la **producción real** es definida como “valor nominal de la producción deflactada por el índice de precios al productos según clase industrial”. De acuerdo con lo anterior, se puede establecer que la diferencia entre ambos términos es que, en el caso de una venta o producción real, el valor puede ser afectado por algún tipo de depreciación, logrando así que pueda llegar a ser igual, mayor o menos que el valor en una venta o producción nominal [2].

De igual manera, se debe considerar que un **número índice** es una medida estadística con la que puede analizar y estudiar los cambios que se dan en cierta magnitud que bien podría ser simple o compleja con respecto al tiempo o al espacio [3], y que además “constituyen el instrumento básico para sintetizar las estadísticas económicas de modo que las fórmulas utilizadas permitan expresar

¹ Estudiante de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

² Estudiante de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

³ Estudiante de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

y describir, por ejemplo, el crecimiento económico de un país o la tasa de inflación de una economía, y también para realizar comparaciones internacionales” [4]. Así pues, estos se pueden clasificar como **números índice simples**, que son aquellos que se refieren a un solo producto o concepto, y **números índices complejos**, que son los que se asocian a varios conceptos o productos, y que pueden ser de dos tipos: **ponderados** y **no ponderados** [5].

Entonces, retornando al contexto colombiano, es preciso mencionar que el DANE reporta con periodicidad mensual el **Índice de Producción de Ventas Manufactureras** para el cálculo de la producción nominal, real y las ventas reales y nominales mediante la selección e una muestra aleatoria de establecimientos comprendidos en los 39 dominios industriales considerados para la obtención de este índice, y cuyo cálculo se realiza apelando a la siguiente ecuación:

$$IPIM^t = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{e=1}^l VP_{ejr}^t \times w_{jr}}{\sum_t^{12} A_{2018}^t \times 12}$$

Donde VP_{ejr}^t es el valor total de la producción para el establecimiento e en el dominio j en la región r para el periodo de referencia t , W_{jr} es el ponderador del dominio j en la región r y A_{2018}^t es la estimación del valor de la producción total ponderada para el mes t del año 2018, calculado para $t = 1, 2, \dots, 12$, siendo entonces t un identificador para los doce meses del año. De este modo, si para tres meses consecutivos se tiene que los índices de ventas nominales fueron de 125.91, 104.49 y 107.87 en ese orden, entonces resulta interesante notar que para el segundo mes de dicho listado se dio una contracción en las ventas nominales estimadas respecto al primer mes, puesto que el índice se redujo en más de veinte puntos, mientras que para el tercer mes hubo una pequeña expansión en tanto el índice tuvo un incremento de algo más de tres puntos respecto a segundo mes.

Ahora bien, con el objetivo de estimar el índice para periodos futuros en el tiempo, se propusieron cuatro modelos de regresión que no modelaban los errores estructurales, y de los cuales dos modelos eran globales y los otros dos locales, y los cuales se pueden observar en la **tabla 1**.

Tabla 1. Ecuaciones de los cuatro primeros modelos propuestos para modelar el índice de ventas nominales.

| |
|---|
| <p>Modelo 1. Logpolinomial de grado seis estacional con funciones trigonométricas en cinco frecuencias $F_j = j/12, j = 1, 2, 3, 4, 5$.</p> $\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + \gamma_1 \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t\right) + \alpha_3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \gamma_3 \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + \gamma_4 \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + \alpha_5 \sin\left(\frac{5}{6}\pi t\right) + \gamma_5 \cos\left(\frac{5}{6}\pi t\right) + E_t, \quad E_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ |
| <p>Modelo 2. Exponencial polinomial de grado seis estacional con funciones trigonométricas en cinco frecuencias $F_j = j/12, j = 1, 2, 3, 4, 5$.</p> $Y_t = \exp\left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + \gamma_1 \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t\right) + \alpha_3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \gamma_3 \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + \gamma_4 \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + \alpha_5 \sin\left(\frac{5}{6}\pi t\right) + \gamma_5 \cos\left(\frac{5}{6}\pi t\right)\right] + E_t, \quad E_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ |
| <p>Modelo 3. Suavizamiento exponencial <i>Holt-Winters</i> multiplicativo.</p> $Y_{t+h} = (\beta_{0,t} + \beta_{1,t}h) \times \sum_{i=1}^{12} \delta_{i,t} I_{i,t+h} + E_{t+h} \text{ con } \sum_{i=1}^{12} \delta_{i,t} = 12, \beta_{0,t}, \beta_{1,t} \text{ y los } \delta_{i,t}, \text{ nivel pendiente y efectos estacionales en } t, \text{ respectivamente, evolucionan lentamente en el tiempo y } E_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2).$ |
| <p>Modelo 4. Descomposición multiplicativa y <i>loess</i> lineal.</p> <p>En la vecindad de t_k donde se quiere el ajuste de $Y_t = (\beta_{0,k} + \beta_{1,k}h) \times \sum_{i=1}^{12} \delta_{i,t} I_{i,t} + E_t$ con $\sum_{i=1}^{12} \delta_{i,t} = 12$ y $\beta_{0,k}$ y $\beta_{1,k}$ parámetros de la recta en la vecindad con centro en t_k y con $E_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$.</p> |

Y en el ajuste, verificación de supuestos y planteamiento de los pronósticos para los últimos doce meses de la serie, definidos como meses del periodo *ex post*, se encontró que el mejor modelo global fue el **cuatro**, que es la descomposición multiplicativa y *loess* lineal, ya que se logró verificar en este que este, además de tener unas medidas de ajuste como AIC y BIC bajas en comparación con los otros modelos, al igual que para los pronósticos, cumplía con el supuesto de media cero y homocedasticidad de los errores, verificado mediante los residuales, y de la misma forma, se encontró que este modelo lograba describir de forma aceptable los ciclos de la serie. No obstante, si se excluyen a los modelos locales, se encuentra que el mejor entre los dos modelos globales fue el modelo **dos**, pues tuvo medidas de error en los pronósticos y en el ajuste bajas y ligeramente superiores a las del modelo **cuatro**, si bien al observar la gráfica de su ajuste se observa que no logra seguir de forma adecuada todos los ciclos de la serie temporal.

1. ANÁLISIS DESCRIPTIVO

A continuación se realizará un estudio de la serie de tiempo de ventas nominales que es publicada con periodicidad mensual por el DANE iniciando en enero de 2001 y concluyendo, de momento, en noviembre de 2021, para lo cual se tendrá en cuenta no solo las componentes de la tendencia y la estacionalidad, sino también el error estructural, de tal forma que se logre mejorar el ajuste que se realizaría a partir un modelo global únicamente que ignore tal componente del error estructural, y que por tanto no tenga en consideración a la componente cíclica que, como se verá enseguida, es relevante para esta serie temporal. Dicho esto, es importante tener presente que esta serie cuenta con $N = 251$ registros hasta el momento, y entonces, para poder entender mejor esta serie de tiempo, se debe comenzar observando la **figura 1**.

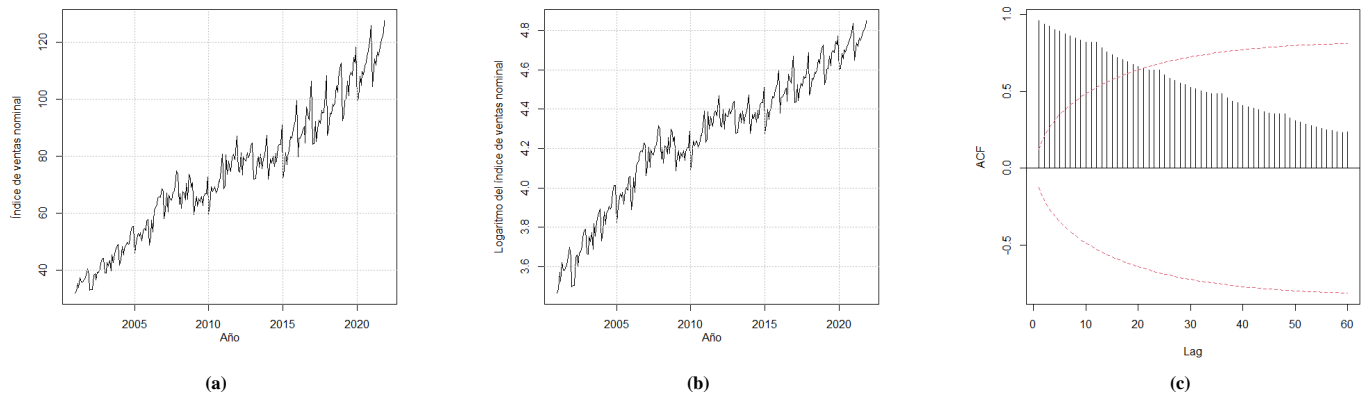


Figura 1. Gráficos descriptivos asociados a la serie temporal del índice de ventas nominales mensuales entre enero de 2001 y noviembre de 2021 calculado y publicado por el *Departamento Administrativo Nacional de Estadística, DANE* de Colombia con modificaciones para los meses abarcados por la pandemia de la *COVID-19*. **(a)** Índice de ventas nominales contra el tiempo. Nótese que la escala del índice nominal de ventas está en escala original, mientras que el tiempo es presentado en años calendario. En esta gráfica se nota que hay un aumento en la variabilidad de este índice conforme avanza el tiempo. **(b)** Índice de ventas nominales contra el tiempo. En este caso el índice de ventas nominales se encuentra en escala logarítmica y puede evidenciarse que se ha estabilizado la variabilidad que se da alrededor de la tendencia en la figura (a) con la escala original. **(c)** Gráfica de la función de autocorrelación del *logaritmo* del índice de ventas nominales mensuales, la cual refleja la presencia de la componente estacional en la serie

Con ayuda de la figura 1 se puede realizar un análisis descriptivo de esta serie temporal. Así pues, se debe comenzar en la **figura 1 (a)**, en la cual se refleja que la tendencia de la serie es creciente en tanto el índice de ventas nominales en Colombia tiende a aumentar con el tiempo, y se tiene también que la serie es multiplicativa, ya que la variabilidad alrededor del valor medio de este índice incrementa con el tiempo; además, es posible advertir la presencia de un comportamiento estacional, dado que hay un patrón repetitivo anualmente.

De igual forma, al observar la **figura 1 (b)** que realiza una transformación logarítmica a la escala original del índice de ventas nominales, se confirma que la tendencia es creciente y es claro igualmente que esta es determinística, ya que es posible identificar la presencia de efectos permanentes en las componentes estructurales de la serie temporal, y es destacable el hecho que en el rango histórico de la serie la tendencia aparenta ser global, de manera que si se define a $Y_t^* = \log(Y_t)$ como el logaritmo del índice de ventas nominales mensuales de Colombia en un tiempo t , entonces pueda ser modelada en la escala logarítmica como $Y_t^* = T_t^* + S_t^* + E_t$, donde los asteriscos indican que se asocian a una transformación logarítmica, donde T_t^* y S_t^* serán descritos a continuación.

Es así que resulta posible hacer una representación de la tendencia mediante una curva suave de la forma $T_t^* = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j t^j$, donde t representa el tiempo de cada uno de los periodos de esta serie (por ejemplo, enero de 2001 está asociado a $t = 1$), T_t^* es el valor del componente de la tendencia en la escala logarítmica del índice de ventas nominales para un tiempo t y p es el grado más alto del polinomio que define a la tendencia; además, a partir de la forma que muestra la tendencia, es razonable plantear que $p \geq 3$ y que es impar, ya que un modelo cuadrático o par mostrará que en algún punto la tendencia comenzará a decrecer, lo cual no se corresponde con lo que se advierte en esta figura. Adicional a lo anterior, es importante tener presente que las cualidades determinística y global de la tendencia son posibles gracias que han sido imputados los índices realmente observados entre marzo de 2020 y noviembre de 2021 por los efectos que tuvo la pandemia de COVID-19 en la economía y por tanto en índices económicos como este; asimismo, esta representación podría tener dificultades por la presencia de ciclos en algunos periodos, fundamentalmente entre los años 2007 y 2015, lo que abre la puerta al planteamiento de modelos locales.

Ahora bien, respecto a la estacionalidad, como se puede ver en las **figuras 1 (a)** y **1 (b)**, existe un comportamiento repetitivo en el índice de ventas nominales dentro de un año calendario, teniendo un aumento progresivo a lo largo del año con algunos picos dentro de cada año, y con esto es posible para los modelos globales considerar funciones trigonométricas, y a través de un periodograma es posible mostrar que esta para la escala logarítmica puede ser modelada como $S_t^* = \sum_{j=1}^5 [\alpha_j \sin(2\pi F_j t) + \gamma_j \cos(2\pi F_j t)]$, para $F_j = j/12$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, de manera que en la escala original se obtendría que $S_t = e^{\sum_{j=1}^5 [\alpha_j \sin(2\pi F_j t) + \gamma_j \cos(2\pi F_j t)]}$ para los F_j antes mencionados. Además, al analizar la **figura 1 (c)**, se corrobora la presencia de la componente estacional, puesto que para observaciones rezagadas $k = sw$, $s = 12$, $w = 1, 2, 3, 4, 5$ periodos en el tiempo hay una interrupción en el decrecimiento de los valores estimados de la ACF para tener un aumento ligero. Además, nótese que en general se tiene un patrón cola de decaimiento lento, asociado con la presencia de la componente estacional en esta serie temporal, lo cual implica que el índice de ventas nominales no se asocia con un proceso ergódico. Por otro lado, es destacable que $\rho(1) = \text{Corr}(Y_t^*, Y_{t+1}^*) > 0$, lo cual se debe a la presencia de ciclos en la serie como se describió antes.

A continuación, es posible determinar si esta serie es estacionaria o no, y rápidamente es posible descartar esta posibilidad, puesto que una serie estacionaria demanda que se tenga varianza y media constantes, y si bien la variabilidad se logra estabilizar con la transformación logarítmica de la escala original del índice de ventas nominales, dado a que esta tiene tendencia, se tiene que la media no es constante. Adicional a esto, teniendo la ACF se pueden realizar *tests* para si el logaritmo del índice de ventas nominales es ruido blanco, para lo que se plantean las siguientes hipótesis para cada $k = 1, 2, \dots, 60$:

$$H_0: \rho(k) = \text{Corr}(\log Y_t, \log Y_{t+k}) = 0 \text{ vs. } H_1: \rho(k) = \text{Corr}(\log Y_t, \log Y_{t+k}) \neq 0$$

Y para los cuales el estadístico de prueba es tal que $\hat{\rho}(k) \sim \text{aprox. } N(0, 1/n) \forall k$ y para un $\alpha \approx 5\%$ se rechaza H_0 si $|\hat{\rho}(k)| \geq 2/\sqrt{n}$, y observando la **figura 1 (c)**, la cual demanda que ninguna de las barras verticales supere a las franjas rojas que demarcan los valores de $2/\sqrt{n}$, se concluye que la función de autocorrelación es significativa para $k = 1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20$, lo que implica que la serie no corresponda a un ruido blanco.

Luego, teniendo presente que es posible hacer un ajuste global a esta serie temporal, se va a proceder con esto tomando un modelo exponencial polinomial estacional de grado seis estacional con funciones trigonométricas en cinco frecuencias $F_j = j/12, j = 1, 2, 3, 4, 5$, cuya ecuación es la (1):

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + \gamma_1 \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t\right) \right. \\ \left. + \alpha_3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \gamma_3 \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + \gamma_4 \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + \alpha_5 \sin\left(\frac{5}{6}\pi t\right) + \gamma_5 \cos\left(\frac{5}{6}\pi t\right) \right] \\ + E_t, \{E_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un R.B. } \sim N(0, \sigma^2) \quad (1)$$

Para el ajuste de este modelo solo van a ser consideradas las primeras $n = 239$ observaciones, dejando las últimas doce como parte del periodo *ex post* para poder hacer validación cruzada del ajuste realizado, y con ayuda de **R** se realiza el ajuste de esta serie, cuyos coeficientes estimados, así como sus errores estándar y los valores del estadístico calculado y el valor p asociados a la prueba de significancia de cada uno de estos se presenta en la **tabla 1**.

Tabla 1. Parámetros estimados para el modelo global: exponencial polinomial estacional de grado seis estacional con funciones trigonométricas en cinco frecuencias

| $F_j = j/12, j = 1, 2, 3, 4, 5$ | | | | |
|--|--------------------------|-------------------------|---------|------------------------|
| Parámetros | Estimación | Error estándar | T_0 | $P(t_{222} > T_0)$ |
| β_0 | 3.55 | 3.637×10^{-2} | 97.608 | $< 2 \times 10^{-16}$ |
| β_1 | 2.182×10^{-3} | 3.478×10^{-3} | 0.627 | 0.531009 |
| β_2 | -2.801×10^{-4} | 1.107×10^{-4} | 2.530 | 0.012113 |
| β_3 | -4.481×10^{-6} | 1.576×10^{-6} | -2.844 | 0.004876 |
| β_4 | 2.919×10^{-8} | 1.111×10^{-8} | 2.628 | 0.009183 |
| β_5 | -8.674×10^{-11} | 3.794×10^{-11} | -2.286 | 0.023192 |
| β_6 | 9.781×10^{-14} | 5.011×10^{-14} | 1.952 | 0.052203 |
| α_1 | -4.125×10^{-2} | 3.581×10^{-3} | -11.519 | $< 2 \times 10^{-16}$ |
| γ_1 | 1.473×10^{-2} | 3.527×10^{-3} | 4.176 | 4.27×10^{-5} |
| α_2 | -2.968×10^{-2} | 3.581×10^{-3} | -8.289 | 1.09×10^{-14} |
| γ_2 | 1.357×10^{-2} | 3.506×10^{-3} | 3.871 | 0.000143 |
| α_3 | -1.925×10^{-2} | 3.533×10^{-3} | -5.448 | 1.35×10^{-7} |
| γ_3 | 2.035×10^{-2} | 3.550×10^{-3} | 5.732 | 3.22×10^{-8} |
| α_4 | -1.534×10^{-2} | 3.572×10^{-3} | -4.295 | 2.61×10^{-5} |
| γ_4 | 2.346×10^{-2} | 3.508×10^{-3} | 6.688 | 1.81×10^{-10} |
| α_5 | 4.155×10^{-3} | 3.542×10^{-3} | 1.173 | 0.242005 |
| γ_5 | 2.378×10^{-2} | 3.530×10^{-3} | 6.735 | 1.38×10^{-10} |
| $\exp(C_n^*(p))$: AIC=9.9001224, BIC=11.52640 | | | | |

Y así se llega a que la ecuación de ajuste para este modelo es la siguiente:

$$\hat{Y}_t = \exp \left[3.55 + 2.182 \times 10^{-3} t - 2.801 \times 10^{-4} t^2 - 4.481 \times 10^{-6} t^3 + 2.919 \times 10^{-8} t^4 - 8.674 \times 10^{-11} t^5 + 9.781 \times 10^{-14} t^6 \right. \\ \left. - 4.125 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 1.473 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right) - 2.968 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right) + 1.357 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{1}{3}\pi t\right) \right. \\ \left. - 1.925 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) + 2.035 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) - 1.534 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 2.346 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) \right. \\ \left. + 4.155 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{5}{6}\pi t\right) + 2.378 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{5}{6}\pi t\right) \right]$$

En la **figura 2** se presenta un gráfico en el que se contrasta la serie ajustada, en rojo, con la serie original, en negro.

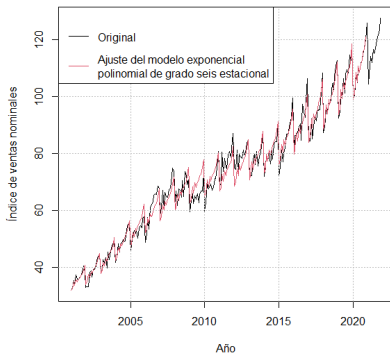


Figura 2. Contraste de la serie de tiempo del índice de ventas nominales mensuales de Colombia entre enero de 2001 y noviembre de 2021 en negro y la serie ajustada con un modelo exponencial polinomial de grado seis estacional con funciones trigonométricas en las frecuencias $F_j = j/12, j = 1, 2, 3, 4, 5$ en rojo.

De la **figura 2** es claro que el modelo logra captar de forma adecuada la tendencia y la estacionalidad de la serie; empero, esta no logra ajustar los ciclos de esta, lo cual se evidencia en una disparidad entre la serie real y la serie ajustada en algunos periodos, siendo esto especialmente evidente en los periodos de los años 2008 y 2009, donde la serie ajustada sigue la tendencia creciente, mientras que los datos reales reflejan una contracción (coincidiendo con la crisis económica mundial de dichos años), si bien es esperable que esto sucediese teniendo presente que la componente cíclica no fue modelada en el modelo global ajustado. Por último, respecto al ajuste es reseñable que la raíz cuadrada del error cuadrático medio es 2.899, el criterio de información de Akaike equivale a 9.9001224 y el criterio de información bayesiano es igual a 11.52640 aproximadamente.

Ahora bien, a la hora de hacer pronósticos luego del periodo $n = 239$ se apela a la siguiente ecuación:

$$\hat{Y}_t = \exp \left[3.55 + 2.182 \times 10^{-3}(239 + L) - 2.801 \times 10^{-4}(239 + L)^2 - 4.481 \times 10^{-6}(239 + L)^3 + 2.919 \times 10^{-8}(239 + L)^4 - 8.674 \times 10^{-11}(239 + L)^5 \right. \\ \left. + 9.781 \times 10^{-14}(239 + L)^6 - 4.125 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{1}{6} \pi (239 + L) \right) + 1.473 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{1}{6} \pi (239 + L) \right) \right. \\ \left. - 2.968 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{1}{3} \pi (239 + L) \right) + 1.357 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{1}{3} \pi (239 + L) \right) - 1.925 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{1}{2} \pi (239 + L) \right) \right. \\ \left. + 2.035 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{1}{2} \pi (239 + L) \right) - 1.534 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{2}{3} \pi (239 + L) \right) + 2.346 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{2}{3} \pi (239 + L) \right) \right. \\ \left. + 4.155 \times 10^{-3} \sin \left(\frac{5}{6} \pi (239 + L) \right) + 2.378 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{5}{6} \pi (239 + L) \right) \right]$$

Y a partir de esta ecuación se puede construir la tabla de pronósticos para los meses del periodo *ex post*, que se observa en la **tabla 2**.

Tabla 2. Pronósticos para el periodo *ex post* del modelo exponencial polinomial de grado seis.

| Periodo | L | Real | Pronóstico |
|----------|----|--------|------------|
| 2020 Dic | 1 | 125.95 | 125.6811 |
| 2021 Ene | 2 | 104.49 | 104.9223 |
| 2021 Feb | 3 | 107.87 | 107.3833 |
| 2021 Mar | 4 | 114.16 | 114.9873 |
| 2021 Abr | 5 | 112.05 | 111.4442 |
| 2021 May | 6 | 116.74 | 117.5733 |
| 2021 Jun | 7 | 115.32 | 155.1623 |
| 2021 Jul | 8 | 116.86 | 118.5237 |
| 2021 Ago | 9 | 120.13 | 120.0877 |
| 2021 Sep | 10 | 121.77 | 122.9627 |
| 2021 Oct | 11 | 123.64 | 124.1830 |
| 2021 Nov | 12 | 127.70 | 128.9216 |

Nótese que por ser el modelo global exponencial, entonces no es posible obtener para las estimaciones intervalos de predicción. Con esto presente, se tiene por ejemplo que en agosto de 2021, $L = 9$, el índice de ventas nominales pronosticado fue de 120.0877 puntos, toda vez que en este periodo se tuvo que el índice real fue de 120.13 puntos. De forma adicional, como se conocen los valores reales de los índices de ventas nominales para los meses del periodo *ex post*, entonces se pueden calcular medidas de error como el MAE, el MAPE y el RMSE, las cuales son presentadas en la **tabla 3**.

Tabla 3. Precisión de los pronósticos puntuales.

| Medida | Valor |
|--|-----------|
| RMSE * | 0.8279634 |
| MAE * | 0.6862845 |
| MAPE (%) | 0.5830712 |
| * Unidades en puntos del índice de ventas nominales. | |

De la **tabla tres** se concluye que el modelo global se equivocó en promedio en cada pronóstico del periodo *ex post* en 0.8279634 puntos del índice de ventas nominales, mientras que el MAE señala una equivocación en promedio de 0.6862845 puntos; por último, del MAPE se concluye que el modelo global se ha equivocado en promedio para cada pronóstico un 0.4439505 % respecto a cada valor real. De estas métricas pues se puede concluir que se está logrando un ajuste bueno de la serie en tanto los errores cometidos, de acuerdo con estos valores, son pequeños, y como se pudo evidenciar en la figura **figura 2** que estos errores se dan fundamentalmente no haber incorporado la componente cíclica en este modelo. Con esto, vale la pena finalizar esta sección con la **figura 3**.

Entonces, se puede validar gráficamente con ayuda de **figura 3** y con los valores de la **tabla 2** que este modelo global realiza un ajuste un ajuste adecuado para esta serie, aunque se debe tener en consideración que esto está siendo posible gracias a que en los meses del periodo *ex post* se está siguiendo la tendencia y la estacionalidad de la serie sin afectaciones por comportamientos cíclicos. Sin embargo, si algunos de estos periodos fuesen abarcados algún ciclo, se evidenciaría como los pronósticos no serían muy buenos.

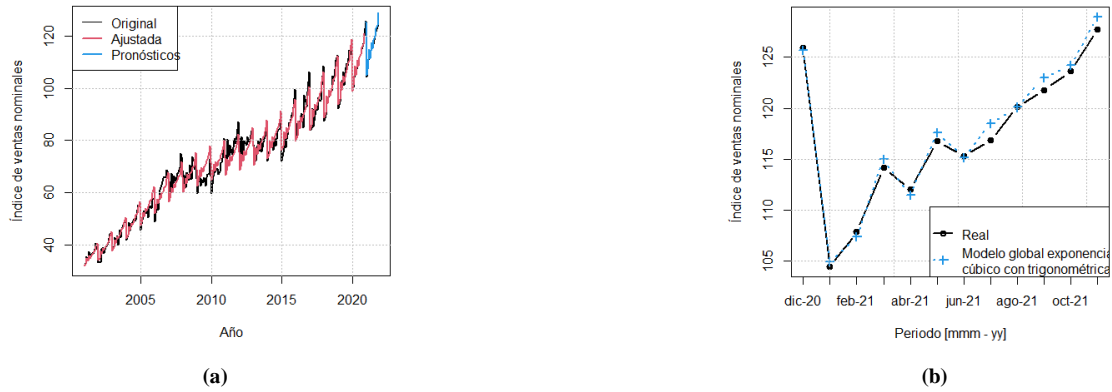


Figura 3. Pronósticos de la serie de tiempo de ventas nominales mensuales de Colombia a partir de un modelo exponencial cúbico con funciones trigonométricas en las frecuencias $F_j = j/12, j = 1, 2, 3, 4, 5$. (a). Modificación de la **figura 2** para mostrar también el pronóstico realizado. (b) Enfoque en los periodos *ex post* para validar gráficamente la calidad los pronósticos realizados, en azul, en contraste con los valores realmente observados, en negro.

1. VALIDACIÓN DE SUPUESTOS SOBRE EL ERROR ESTRUCTURAL EN EL MODELO GLOBAL

En la **ecuación (1)** se observa al final que el modelo global planteado incluye un supuesto muy importante sobre los errores estructurales y es que estos son un ruido blanco, lo cual resulta importante ya que con esto se construyen las herramientas que permiten realizar inferencia con el modelo construido. Así pues, se tiene que la suposición de que los errores son ruido blanco implica que estos se distribuyan idénticamente como una normal con media cero y varianza constante para cualquier tiempo t , y que hay incorrelación entre cualquier par de observaciones sin importar su rezago en el tiempo, lo que en otras palabras significa que los datos del pasado no proporcionan información sobre los errores del futuro.

De este modo, para poder hacer esta evaluación, se van a considerar los residuales del modelo y se va a iniciar chequeando que estos tengan media cero, varianza constante e independencia, lo cual es posible los gráficos de estos residuales que se ilustran en la **figura 4**.

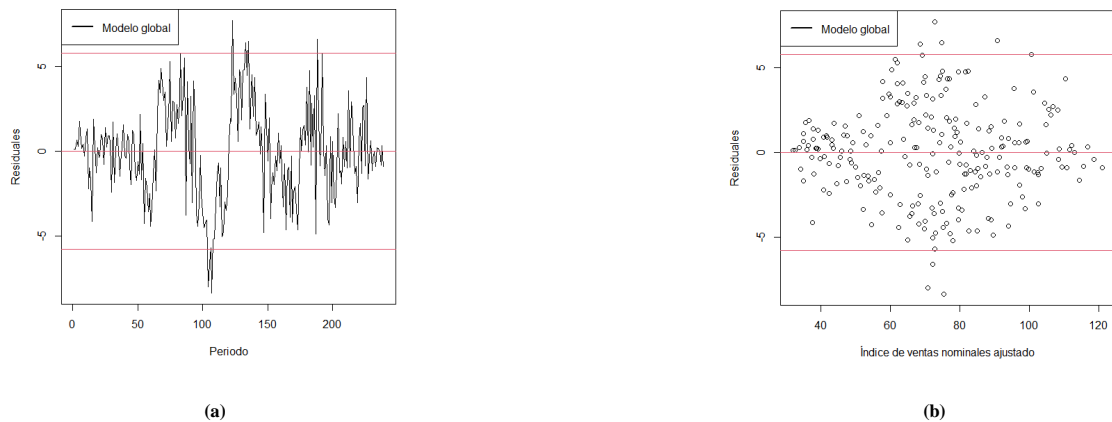


Figura 4. Gráficos para los residuales del modelo exponencial polinomial de grado seis con trigonométricas en en las frecuencias $F_j = j/12, j = 1, 2, 3, 4, 5$. (a) Serie de los residuales del ajuste del modelo. (b) Gráfico de dispersión de los residuales de ajuste contra los valores ajustados del modelo.

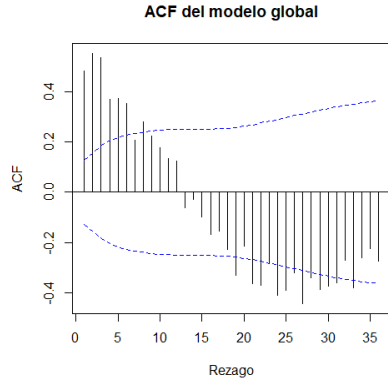
A partir de las **figuras 4 (a)** y **4 (b)** se puede determinar que no existe evidencia en contra de que la media de los errores sea diferente de cero, pues la serie de los residuales se da alrededor de cero y los residuales contra el índice de ventas nominales ajustado están dispersos alrededor de cero. Ahora bien, con la varianza se comienzan a tener inconvenientes y esto es especialmente evidente en el gráfico de dispersión de la **figura 4 (b)** dado que se observa que los residuales cuentan con mayor varianza hacia índices ajustados alrededor de ochenta puntos, y menor varianza hacia los menores y los mayores índices de ventas nominales ajustados, por lo que no resulta razonable plantear que los errores poseen varianza constante, y por tanto los errores no se distribuyen de manera idéntica gracias a su varianza. Además, en la **figura 4 (a)** se evidencia varios ciclos en los residuales, fundamentalmente a partir del periodo cincuenta y hasta el periodo 175 aproximadamente, lo cual implica que existe una correlación positiva entre errores rezagados un periodo en el tiempo; esto es, $\rho(1) = \text{Corr}(E_t, E_{t+1}) > 0$, por lo que no se cumple el supuesto de independencia de los errores, y por tanto no se puede evaluar su normalidad. De esta manera, se concluye que los errores del modelo no son un proceso de ruido blanco, y a continuación se procede a verificar esta conclusión con ayuda de las pruebas de incorrelación de *Ljung-Box*, *Durbin-Watson* y los gráficos de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial con bandas de Bartlett. Entonces, comenzando con los análisis gráficos se tiene a la **figura 5**.

Estas gráficas van a ser útiles para evaluar si el error estructural es un ruido blanco, y en particular, con la ACF es posible contrastar siguientes hipótesis:

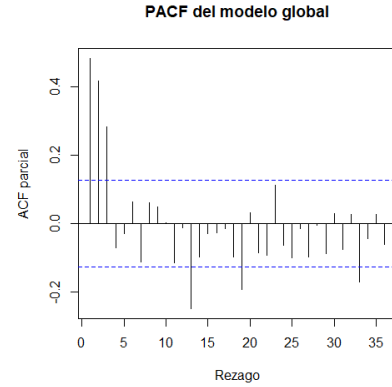
$$H_0: \rho(k) = \text{Corr}(E_t, E_{t+k}) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 36$$

vs.

$$H_1: \exists k: \rho(k) = \text{Corr}(E_t, E_{t+k}) \neq 0, k = 1, 2, \dots, 36$$



(a)



(b)

Figura 5. (a). Función de autocorrelación (ACF) muestral con los residuos del modelo global. (b) Función de autocorrelación parcial (PACF) muestral con los residuos del modelo global.

La cual tiene como estadístico de prueba a $\widehat{\rho(k)} = \widehat{\text{Corr}}(E_t, E_{t+k}) = \frac{\sum_{t=1}^{239-k} \widehat{E}_t \widehat{E}_{t+k}}{\sum_{t=1}^{239} \widehat{E}_t^2} \sim \text{aprox. } N\left(0, \frac{1}{239}\right)$ y que con una significancia de aproximadamente $\alpha \approx 0.05$ rechaza la hipótesis nula si $|\widehat{\rho(k)}| \geq 2/\sqrt{239}$. Y a partir de la **figura 5 (a)** anterior se evidencia que este test se rechaza para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33$, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los errores estructurales no son ruido blanco. De igual forma, para la **PACF** se tienen las siguientes hipótesis:

$$H_0: \phi_{kk} = \text{Corr}(E_t, E_{t+k} | E_{t+1}, \dots, E_{t+k-1}) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 36$$

vs.

$$H_1: \exists k: \phi_{kk} = \text{Corr}(E_t, E_{t+k} | E_{t+1}, \dots, E_{t+k-1}) \neq 0, k = 1, 2, \dots, 36$$

Y en este caso el estadístico de prueba es $\widehat{\phi}_{kk} = \widehat{\text{Corr}}(E_t, E_{t+k} | E_{t+1}, \dots, E_{t+k-1}) \sim \text{aprox. } N\left(0, \frac{1}{239}\right)$ y que con una significancia de aproximadamente $\alpha \approx 0.05$ rechaza la hipótesis nula si $|\widehat{\phi}_{kk}| \geq 2/\sqrt{239}$. Luego, con ayuda de la **figura 5 (b)** se rechaza la hipótesis nula ya que se cumple que la función de autocorrelación parcial es mayor a cero de forma significativa para $k = 1, 2, 3, 13, 19, 33$, lo cual corrobora que los errores estructurales del modelo de regresión global no son un ruido blanco.

Ahora se va a analizar qué resulta de los *tests* matemáticos que, a diferencia de los *tests* previos que realizan varias pruebas individuales, en este caso lo hacen de forma conjunta. De esta manera, comenzando con el test *Ljung-Box* se tiene que las hipótesis son:

$$H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots \rho(m) = 0$$

vs.

$$H_1: \exists k: \rho(k) \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$$

Y se tiene que el estadístico de prueba es $Q_{LB} = 239 \times 241 \sum_{k=1}^m \frac{[\widehat{\rho}(k)]^2}{239-k} \sim \chi_m^2$ y que tiene como criterio de rechazo que el valor p $V_p = P(\chi_m^2 \geq Q_{LB})$ sea pequeño. Con esto claro, se debe tener presente que se va a realizar seis veces este test conjunto para $m = 6, 12, 18, 24, 30, 36$, y con ayuda de **R** se obtienen los resultados para este test que se presentan en la **tabla 4**.

Tabla 4. Test de *Ljung-Box* para los errores estructurales E_t del modelo global.

| m | Q_{LB} | Grados de libertad | $P(\chi_m^2 \geq Q_{LB})$ |
|----|----------|--------------------|---------------------------|
| 6 | 300.3857 | 6.00 | 0 |
| 12 | 359.7171 | 12.00 | 0 |
| 18 | 390.5907 | 18.00 | 0 |
| 24 | 570.0018 | 24.00 | 0 |
| 30 | 803.6548 | 30.00 | 0 |
| 36 | 956.0069 | 36.00 | 0 |

Y como se puede observar, se obtiene que para los seis *tests* de *Ljung-Box* realizados se obtiene un valor p pequeño, lo cual implica que en todos ellos debe ser rechazada la hipótesis nula, lo que implica que existe evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores estructurales no están incorrelacionados, y por tanto se llegando una vez más a la conclusión de que estos errores estructurales no son un ruido blanco.

Ahora bien, en cuanto al test de *Durbin-Watson*, que de forma similar del test de *Ljung-Box* lleva a cabo un solo test conjunto, este solo puede ser aplicado en modelos que son lineales en sus parámetros, y teniendo en cuenta que el modelo global considerado es exponencial, no es posible usar este test. Pero, de todos modos, se debe notar que las pruebas anteriores son consistentes al señalar que el error estructural no es un ruido blanco.

Por último, se concluye que estos errores estacionarios no son un proceso estacionario, ya que como se vio con los residuales en los gráficos de la **figura 4**, si bien no existe evidencia en contra de que la media de los errores es nula, sí existe evidencia en contra de que los errores tienen varianza constante. Además, a partir de la gráfica de la ACF en la **figura 5 (a)** se podría pensar que estos errores estructurales no son ergódicos ya que parece no haber una convergencia rápida a cero.

Luego, se debe notar que los errores de este modelo no cumplen con el supuesto de ruido blanco, por lo que se procede con el planteamiento de modelos **ARMA** con el objeto de satisfacer estos supuestos y así poder realizar inferencia con este modelo de regresión.

Así, en primer lugar, se debe llamar a las gráficas ACF y PACF de la **figura 5**, en los que se debe notar que la ACF parece tener un patrón cola exponencial sinusoidal, mientras que la PACF muestra un patrón tipo corte con $p = 19$ o $p = 33$, por lo que se podría plantear un modelo **AR(19)** o un modelo **AR(33)**, donde resulta razonable darle prioridad al primero por ser más parsimonioso y porque la ACF pierde potencia a medida que aumenta el valor de k , de tal suerte que aumenta la probabilidad de cometer un error tipo I al evaluar la significancia estadística de $p(33)$ para los errores estructurales. De acuerdo con esto, se tiene que el modelo de regresión estaría dado por:

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$$

$$E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + \phi_4 E_{t-4} + \phi_5 E_{t-5} + \phi_6 E_{t-6} + \phi_7 E_{t-7} + \phi_8 E_{t-8} + \phi_9 E_{t-9} + \phi_{10} E_{t-10} + \phi_{11} E_{t-11} + \phi_{12} E_{t-12} + \phi_{13} E_{t-13} + \phi_{14} E_{t-14} + \phi_{15} E_{t-15} + \phi_{16} E_{t-16} + \phi_{17} E_{t-17} + \phi_{18} E_{t-18} + \phi_{19} E_{t-19} + a_t,$$

con $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ un R.B. $\sim N(0, \sigma^2)$.

Donde $p = 19$ si se trata de un **AR(19)**, o bien, $p = 33$ si se trata de un **AR(33)**.

Luego, con la EACF, cuyo código y salida de **R** se puede observar en la **figura 6**, se obtiene que el modelo más adecuado es un **ARMA(7, 11)**.

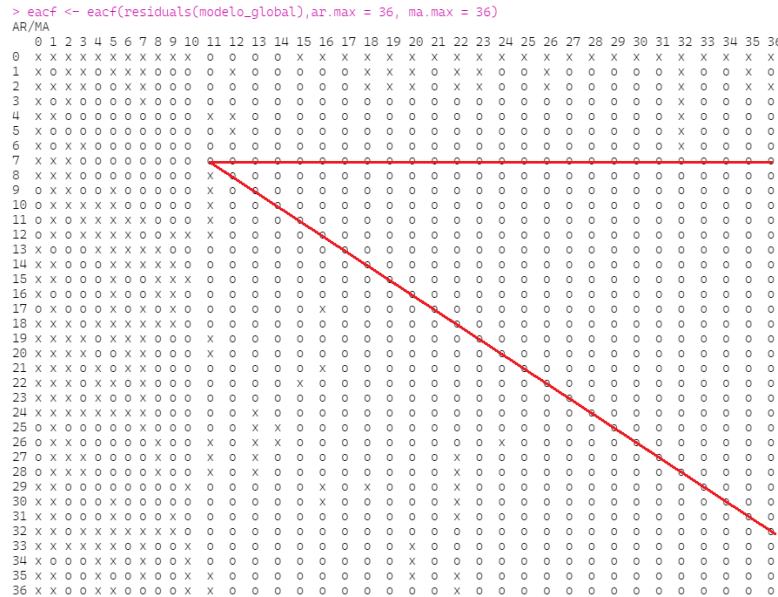


Figura 6. Código y salida en **R** del EACF para el modelo de regresión global planteado. Nótese que a partir de este se sugiere tomar a los errores estructurales como un **ARMA(7, 11)**.

Y se tendría entonces que el modelo de regresión estaría dado por:

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$$

$$E_t = \sum_{j=1}^7 \phi_j E_{t-j} + a_t + \sum_{i=1}^{11} \theta_i a_{t-i}, \text{ con } \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un R.B. } \sim N(0, \sigma^2).$$

Luego, con ayuda de la función **SelectModelo()** de la librería **FitAR**, con la cual se pueden encontrar modelos **AR(p)**, se encuentra que según el criterio AIC, cuyo código y salida en **R** se puede ver en la **figura 7 (a)** es un **AR(22)**, ya que si bien obtiene el mayor AIC exacto y aproximado, no tiene una diferencia considerable con los otros valores y resulta ser el más parsimonioso. Por otro lado, usando al criterio de información bayesiano, BIC, para el cual se presenta la **figura 7 (b)**, se llega a que se puede ajustar un modelo **AR(3)**.


```

> SelectModel(residuals(modelo_global),lag.max=36, Criterion="AIC",ARModel="AR")
p AIC-Exact AIC-Approx
1 23 364.3485 -129.8790
2 24 365.2689 -130.6130
3 22 366.2007 -130.6947

(a)

> SelectModel(residuals(modelo_global),lag.max=36, Criterion="BIC",ARModel="AR")
p BIC-Exact BIC-Approx
1 3 384.7547 -102.99179
2 4 389.0837 -97.70645
3 5 394.3735 -93.19015

(b)

```

Figura 7. Código y salidas **R** de la función **SelectModel()** de la librería **FitAR** para hallar el orden p adecuado para modelos $AR(p)$ usando los criterios de información: (a) de Akaike (AIC) y (b) bayesiano (BIC).

Lo que implica que la ecuación del modelo de regresión que debería considerar según el criterio de información de Akaike es:

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$$

$$E_t = \sum_{j=1}^{22} \phi_j E_{t-j} + a_t,$$

$$\text{con } \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2).$$

Mientras que, según el criterio de información bayesiano, debería ser:

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$$

$$E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + a_t,$$

$$\text{con } \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2).$$

Asimismo, se va a realizar la tarea de identificar modelos **ARMA** pero usando ahora la función **auto.arima()** de la librería **forecast**, cuyos códigos y salidas se observan en la **figura 8**.

```

> auto.arima(serie_et,ic="aic")
Series: serie_et
ARIMA(1,0,2)(0,0,2)[12] with zero mean

Coefficients:
      ar1      ma1      ma2      sma1      sma2
      0.8204 -0.6404  0.2642  0.1241 -0.1534
s.e.  0.0605  0.0801  0.0724  0.0651  0.0714

sigma^2 = 4.519: log likelihood = -517.61
AIC=1047.23 AICc=1047.59 BIC=1068.09

(a)

> auto.arima(serie_et,ic="bic")
Series: serie_et
ARIMA(1,0,2) with zero mean

Coefficients:
      ar1      ma1      ma2
      0.8469 -0.6822  0.2879
s.e.  0.0502  0.0725  0.0708

sigma^2 = 4.666: log likelihood = -522.1
AIC=1052.21 AICc=1052.38 BIC=1066.11

(b)

```

Figura 8. Código y salidas **R** de la función **auto.arima()** de la librería **forecast** para hallar los órdenes p y q adecuados para modelos $ARMA(p, q)$ usando los criterios de información: (a) de Akaike (AIC) y (b) bayesiano (BIC).

De esta forma, se tendría que el modelo de regresión a plantear de acuerdo con el criterio de información de Akaike es:

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$$

$$E_t = \phi_1 E_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \theta_1 a_{t-12} + \theta_1 \theta_1 a_{t-13} + \theta_1 \theta_2 a_{t-25} + \theta_2 a_{t-2} + \theta_2 \theta_2 a_{t-14} + \theta_2 \theta_2 a_{t-26},$$

$$\text{con } \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2).$$

Mientras que el modelo que se debería considerar de conformidad con el modelo de regresión bayesiano es:

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$$

$$E_t = \phi_1 E_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2},$$

$$\text{con } \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2).$$

Y se puede observar pues que usando el criterio de información de Akaike (AIC) en la **figura 8 (a)** que un modelo adecuado para este caso es $ARIMA(1, 0, 2)(0, 0, 2)[12]$, lo cual equivale a un proceso estacionario $ARMA(1, 2)(0, 2)[12]$, el cual no tiene mucho sentido teniendo en cuenta que, como se vio en la **figura 5 (a)** la ACF tiene un patrón cola exponencial sinusoidal, lo cual obliga a que $p \geq 2$. Por otro lado, con el criterio de información bayesiano (BIC), cuyo código y salida en **R** se refleja en la **figura 8**, se obtiene que un modelo adecuado es $ARIMA(1, 0, 2)$, el cual equivale a un proceso estacionario $ARMA(1, 2)$, el cual presenta el mismo inconveniente

que el modelo sugerido por `auto.arima()` usando el AIC, pues se tiene que $p = 1 < 2$, lo cual no tiene sentido a la luz de lo identificado para la ACF.

Por último, dentro de la colección de funciones de identificación de modelos **ARMA** dispuestos por R, se va a proceder ahora con la función `armasubsets()` del paquete TSA. En la **figura 9** se observa el diagrama que resulta de esta función.

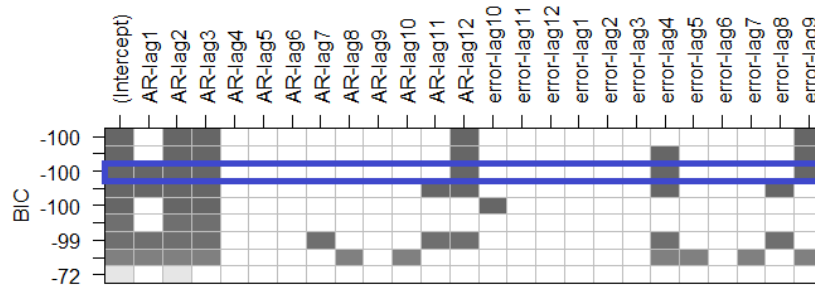


Figura 9. Resultado de la función `armasubsets()` de la librería TSA sobre los residuales \hat{E}_t y usando como p y q máximos a doce para ambos. La línea de código empleada para obtener este resultado es: `plot(armasubsets(residuals(modelo_global), nar = 12, nma = 12, y.name = 'AR', ar.method = 'ml'))`

A partir del resultado que se visualiza en el primer renglón, se tiene que el modelo a plantear debe ser, según esta función, un **ARMA(12, 9)** con parámetros $\theta_i, i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11$ fijos en cero, por lo que los errores estructurales estarían siendo modelados como $E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + \phi_{12} E_{t-12} + a_t + \theta_4 a_{t-4} + \theta_9 a_{t-9}$, con $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ un R.B. $\sim N(0, \sigma^2)$. No obstante, si se tiene en cuenta a ϕ_7 y a θ_{10} , lo cual replantea el modelo a un **ARMA(12, 10)**, se tiene que el modelo de regresión estaría dado por:

$$Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$$

$$E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + \phi_7 E_{t-7} + \phi_{12} E_{t-12} + a_t + \theta_4 a_{t-4} + \theta_9 a_{t-9} + \theta_{10} a_{t-10},$$

con $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ un R.B. $\sim N(0, \sigma^2)$.

4. MODELOS DE REGRESIÓN CON ERRORES ESTRUCTURALES E_t ARMA

Se considerarán cuatro modelos de regresión con error estructural ARMA: **AR(19)**, **ARMA(7,11)**, **ARMA(3,9)(1,0)[12]** y un **ARMA(12, 10)** incluyendo solo los parámetros $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_7, \phi_{12}$ para la parte autorregresiva de los errores estructurales y $\theta_4, \theta_9, \theta_{10}$ para la parte de medias móviles de las innovaciones del modelo. Así, para poder realizar el ajuste de los cuatro modelos anteriores van a ser consideradas las primeras $n = 239$ observaciones mensuales, de manera que las últimas $m = 12$ van a ser consideradas para el periodo *ex post* para poder realizar validación cruzada de los ajustes realizados y poder apoyar el proceso de selección del mejor modelo. En este sentido, primeramente, se presentan la ecuación de los modelos propuestos en la **tabla 6**.

Tabla 6. Ecuaciones de los modelos propuestos.

| |
|--|
| <p>Modelo 1. Modelos de regresión con error estructural ARMA: AR(19)</p> $Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$ $E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + \phi_4 E_{t-4} + \phi_5 E_{t-5} + \phi_6 E_{t-6} + \phi_7 E_{t-7} + \phi_8 E_{t-8} + \phi_9 E_{t-9} + \phi_{10} E_{t-10} + \phi_{11} E_{t-11} + \phi_{12} E_{t-12} + \phi_{13} E_{t-13} + \phi_{14} E_{t-14} + \phi_{15} E_{t-15} + \phi_{16} E_{t-16} + \phi_{17} E_{t-17} + \phi_{18} E_{t-18} + \phi_{19} E_{t-19} + a_t, \text{ con}$ $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un RB } \sim N(0, \sigma_a^2)$ |
| <p>Modelo 2. Modelos de regresión con error estructural ARMA: ARMA(7,11)</p> $Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$ $E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + \phi_4 E_{t-4} + \phi_5 E_{t-5} + \phi_6 E_{t-6} + \phi_7 E_{t-7} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \theta_3 a_{t-3} + \theta_4 a_{t-4} + \theta_5 a_{t-5} + \theta_6 a_{t-6} + \theta_7 a_{t-7} + \theta_8 a_{t-8} + \theta_9 a_{t-9} + \theta_{10} a_{t-10} + \theta_{11} a_{t-11}, \text{ con}$ $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un RB } \sim N(0, \sigma_a^2)$ |
| <p>Modelo 3. Modelos de regresión con error estructural ARMA: ARMA(3,9)(1,0)[12].</p> $Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$ $E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + \phi_1 \phi_1 E_{t-13} + \phi_2 \phi_1 E_{t-14} + \phi_3 \phi_1 E_{t-15} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \theta_3 a_{t-3} + \theta_4 a_{t-4} + \theta_5 a_{t-5} + \theta_6 a_{t-6} + \theta_7 a_{t-7} + \theta_8 a_{t-8} + \theta_9 a_{t-9},$ $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un RB } \sim N(0, \sigma_a^2) \quad \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un RB } \sim N(0, \sigma_a^2)$ |
| <p>Modelo 4. Modelos de regresión con error estructural ARMA: ARMA(12,10) con ϕ_7 y θ_{10}.</p> $Y_t = \exp \left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4 + \beta_5 t^5 + \beta_6 t^6 + \alpha_1 \sin \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \gamma_1 \cos \left(\frac{1}{6} \pi t \right) + \alpha_2 \sin \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \gamma_2 \cos \left(\frac{1}{3} \pi t \right) + \alpha_3 \sin \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \gamma_3 \cos \left(\frac{1}{2} \pi t \right) + \alpha_4 \sin \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \gamma_4 \cos \left(\frac{2}{3} \pi t \right) + \alpha_5 \sin \left(\frac{5}{6} \pi t \right) + \gamma_5 \cos \left(\frac{5}{6} \pi t \right) \right] + E_t, \text{ donde}$ $E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + \phi_3 E_{t-3} + \phi_7 E_{t-7} + \phi_{12} E_{t-12} + a_t + \theta_4 a_{t-4} + \theta_9 a_{t-9} + \theta_{10} a_{t-10},$ $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un RB } \sim N(0, \sigma_a^2)$ |

Así pues, en la **figura 10** se presenta el ajuste realizado con ayuda de **R** para cada uno de estos modelos.

```

> modelo1 = regexpo.ErrorARMA(respuesta=yt,names.param=param2,
+ data=X1,newdata=X1nuevo,
+ order=c(19,0,0),method="ML")
> coef(modelo1)

```

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) |
|--------|---------------|--------------|--------------|---------------|
| ar1 | 1.389662e-01 | 6.300619e-02 | 2.19962619 | 2.896321e-02 |
| ar2 | 3.364239e-01 | 6.356109e-02 | 5.29292267 | 3.111356e-07 |
| ar3 | 2.765654e-01 | 6.694652e-02 | 4.13113874 | 5.274759e-05 |
| ar4 | -3.853654e-02 | 6.908018e-02 | -0.55849904 | 5.771192e-01 |
| ar5 | -1.405333e-02 | 6.892447e-02 | -0.20389462 | 8.386401e-01 |
| ar6 | -1.182494e-02 | 6.872281e-02 | -0.17206720 | 8.635561e-01 |
| ar7 | -1.258328e-01 | 6.735836e-02 | -1.86811035 | 6.318758e-02 |
| ar8 | 8.240800e-02 | 6.742493e-02 | 1.222121856 | 2.230422e-01 |
| ar9 | 1.008078e-01 | 6.794228e-02 | 1.48372642 | 1.394325e-01 |
| ar10 | 1.187291e-01 | 6.758507e-02 | 1.75673596 | 8.047054e-02 |
| ar11 | 1.618325e-02 | 6.758477e-02 | 0.23945108 | 8.109974e-01 |
| ar12 | 4.788159e-02 | 6.733304e-02 | 0.70992760 | 4.785637e-01 |
| ar13 | -1.984978e-01 | 6.693280e-02 | -2.96562668 | 3.382632e-03 |
| ar14 | -0.139387e-02 | 6.856000e-02 | -1.18719176 | 2.365394e-01 |
| ar15 | 2.469566e-03 | 6.917152e-02 | 0.03570206 | 9.715550e-01 |
| ar16 | 5.836709e-02 | 6.951161e-02 | 0.83967404 | 4.020790e-01 |
| ar17 | 7.306084e-02 | 6.739150e-02 | 1.08412550 | 2.795951e-01 |
| ar18 | -6.216473e-02 | 6.381904e-02 | -0.97407799 | 3.311771e-01 |
| ar19 | -1.955277e-01 | 6.303154e-02 | -3.10206170 | 2.195290e-03 |
| beta0 | 3.549589e+00 | 3.636561e-02 | 97.60841259 | 1.471508e-172 |
| beta1 | 2.182403e-03 | 3.477993e-03 | 0.62748904 | 5.310439e-01 |
| beta2 | 2.801344e-04 | 1.107419e-04 | 2.52961609 | 1.217836e-02 |
| beta3 | -4.481422e-06 | 1.575909e-06 | -2.84370573 | 4.915403e-03 |
| beta4 | 2.919309e-08 | 1.110756e-08 | 2.62821765 | 9.239469e-03 |
| beta5 | -8.674080e-11 | 3.794288e-11 | -2.28608878 | 2.328119e-02 |
| beta6 | 9.781477e-14 | 5.011157e-14 | 1.95193964 | 5.232079e-02 |
| alfa1 | -4.124886e-02 | 3.580978e-03 | -11.51888142 | 5.954348e-24 |
| gamma1 | 1.472956e-02 | 3.527395e-03 | 4.17576133 | 4.406958e-05 |
| alfa2 | -2.968048e-02 | 3.580860e-03 | -8.28864463 | 1.551151e-14 |
| gamma2 | 1.357253e-02 | 3.506297e-03 | 3.87090019 | 1.461329e-04 |
| alfa3 | -1.924711e-02 | 3.533041e-03 | -5.44774799 | 1.467420e-07 |
| gamma3 | 2.034908e-02 | 3.550391e-03 | 5.73150444 | 3.562471e-08 |
| alfa4 | -1.534032e-02 | 3.571520e-03 | -4.29517779 | 2.704904e-05 |
| gamma4 | 2.346319e-02 | 3.508056e-03 | 6.68837561 | 2.145040e-10 |
| alfa5 | 4.155386e-03 | 3.542167e-03 | 1.17311965 | 4.212251e-01 |
| gamma5 | 2.377807e-02 | 3.530355e-03 | 6.73532061 | 1.648473e-10 |

(a)

```

> modelo3 = regexpo.ErrorARMA(respuesta=yt,names.param=param2
+ data=X1,newdata=X1nuevo,
+ order=c(3,0,9),
+ seasonal=list(order=c(1,0,0)),
+ method="ML")
> coef(modelo3)

```

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) |
|--------|---------------|--------------|-------------|---------------|
| ar1 | 5.103660e-01 | 1.939748e-01 | 2.6310940 | 9.145203e-03 |
| ar2 | 8.647654e-01 | 5.851095e-02 | 14.7795485 | 2.597356e-34 |
| ar3 | -5.913026e-01 | 1.712669e-01 | -3.4525213 | 6.721165e-04 |
| ma1 | -3.426672e-01 | 1.953564e-01 | -1.7540618 | 8.088559e-02 |
| ma2 | -5.804156e-01 | 8.823191e-02 | -6.5782962 | 3.752777e-10 |
| ma3 | 6.975854e-01 | 1.221268e-01 | 5.7119759 | 3.805971e-08 |
| ma4 | -2.050398e-01 | 1.087980e-01 | -1.8845916 | 6.087289e-02 |
| ma5 | 2.498174e-02 | 9.346104e-02 | 0.2672957 | 7.895050e-01 |
| ma6 | 1.192725e-01 | 9.222999e-02 | 1.2932078 | 1.973668e-01 |
| ma7 | -2.113339e-01 | 7.680277e-02 | -2.7516446 | 6.450625e-03 |
| ma8 | 1.771182e-01 | 7.890656e-02 | 2.2446574 | 2.583781e-02 |
| ma9 | 2.367893e-01 | 8.041070e-02 | 2.9447484 | 3.598147e-03 |
| sar1 | 9.205783e-02 | 7.850033e-02 | 1.1727064 | 2.422484e-01 |
| beta0 | 3.549589e+00 | 3.636561e-02 | 97.6084126 | 2.592133e-176 |
| beta1 | 2.182403e-03 | 3.477993e-03 | 0.6274890 | 5.310237e-01 |
| beta2 | 2.801344e-04 | 1.107419e-04 | 2.5296161 | 1.215629e-02 |
| beta3 | -4.481422e-06 | 1.575909e-06 | -2.8437057 | 4.902006e-03 |
| beta4 | 2.919309e-08 | 1.110756e-08 | 2.6282176 | 9.220350e-03 |
| beta5 | -8.674080e-11 | 3.794288e-11 | -2.2860888 | 2.325146e-02 |
| beta6 | 9.781477e-14 | 5.011157e-14 | 1.9519396 | 5.228120e-02 |
| alfa1 | -4.124886e-02 | 3.580978e-03 | -11.5188814 | 4.315128e-24 |
| gamma1 | 1.472956e-02 | 3.527395e-03 | 4.1757613 | 4.359843e-05 |
| alfa2 | -2.968048e-02 | 3.580860e-03 | -8.2886446 | 1.380199e-14 |
| gamma2 | 1.357253e-02 | 3.506297e-03 | 3.8709002 | 1.449471e-04 |
| alfa3 | -1.924711e-02 | 3.533041e-03 | -5.4477480 | 1.427183e-07 |
| gamma3 | 2.034908e-02 | 3.550391e-03 | 5.7315044 | 3.445941e-08 |
| alfa4 | -1.534032e-02 | 3.571520e-03 | -4.2951779 | 2.672905e-05 |
| gamma4 | 2.346319e-02 | 3.508056e-03 | 6.6883756 | 2.026412e-10 |
| alfa5 | 4.155386e-03 | 3.542167e-03 | 1.1731196 | 4.20831e-01 |
| gamma5 | 2.377807e-02 | 3.530355e-03 | 6.7353206 | 1.555158e-10 |

(c)

```

> modelo2 = regexpo.ErrorARMA(respuesta=yt,names.param=param2,
+ data=X1,newdata=X1nuevo,
+ order=c(7,0,11),method="ML")
> coef(modelo2)

```

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) |
|--------|---------------|--------------|-------------|---------------|
| ar1 | 8.963682e-01 | 6.109229e-02 | 14.6723625 | 9.471315e-34 |
| ar2 | 4.892166e-01 | 5.273085e-02 | 9.2776165 | 2.581680e-17 |
| ar3 | -2.351110e-01 | 7.246369e-02 | -3.2445356 | 1.374743e-03 |
| ar4 | -4.662929e-01 | 6.746952e-02 | -6.9111649 | 6.023468e-11 |
| ar5 | 1.174053e-01 | 6.924108e-02 | 1.6966024 | 9.140681e-02 |
| ar6 | 9.492311e-01 | 5.502015e-02 | 17.2524270 | 1.008539e-41 |
| ar7 | -8.042922e-01 | 5.652851e-02 | -14.2280821 | 2.294390e-32 |
| ma1 | -8.087215e-01 | 9.208329e-02 | -8.7824995 | 6.537360e-16 |
| ma2 | -2.640142e-01 | 1.011601e-01 | -2.6098645 | 9.729344e-03 |
| ma3 | 1.568038e-01 | 1.067485e-01 | 1.4689087 | 1.433979e-01 |
| ma4 | 2.813034e-01 | 1.025136e-01 | 2.7440602 | 6.609341e-03 |
| ma5 | -1.685159e-01 | 1.047652e-01 | -1.6085111 | 1.092690e-01 |
| ma6 | -9.457112e-01 | 6.004343e-02 | -15.5433586 | 1.853628e-36 |
| ma7 | 6.806825e-01 | 1.112895e-01 | 6.1163221 | 4.808449e-09 |
| ma8 | -9.844120e-01 | 1.018134e-01 | -9.668783 | 3.347497e-01 |
| ma9 | 1.191803e-01 | 9.941799e-02 | 1.1987800 | 2.320042e-01 |
| ma10 | 1.015972e-01 | 1.009136e-01 | 1.0067736 | 3.152363e-01 |
| ma11 | -5.391192e-02 | 9.021265e-02 | -0.5976094 | 5.607346e-01 |
| beta0 | 3.549589e+00 | 3.636561e-02 | 97.6084126 | 3.463634e-173 |
| beta1 | 2.182403e-03 | 3.477993e-03 | 0.6274890 | 5.310404e-01 |
| beta2 | 2.801344e-04 | 1.107419e-04 | 2.5296161 | 1.217459e-02 |
| beta3 | -4.481422e-06 | 1.575909e-06 | -2.8437057 | 4.913115e-03 |
| beta4 | 2.919309e-08 | 1.110756e-08 | 2.6282176 | 9.236203e-03 |
| beta5 | -8.674080e-11 | 3.794288e-11 | -2.2860888 | 2.327620e-02 |
| beta6 | 9.781477e-14 | 5.011157e-14 | 1.9519396 | 5.231400e-02 |
| alfa1 | -4.124886e-02 | 3.580978e-03 | -11.5188814 | 5.67830e-24 |
| gamma1 | 1.472956e-02 | 3.527395e-03 | 4.1757613 | 4.398909e-05 |
| alfa2 | -2.968048e-02 | 3.580860e-03 | -8.2886446 | 1.520653e-14 |
| gamma2 | 1.357253e-02 | 3.506297e-03 | 3.8709002 | 1.459032e-04 |
| alfa3 | -1.924711e-02 | 3.533041e-03 | -5.4477480 | 1.460404e-07 |
| gamma3 | 2.034908e-02 | 3.550391e-03 | 5.7315044 | 3.56242e-08 |
| alfa4 | -1.534032e-02 | 3.571520e-03 | -4.2951779 | 2.699420e-05 |
| gamma4 | 2.346319e-02 | 3.508056e-03 | 6.6883756 | 2.124363e-10 |
| alfa5 | 4.155386e-03 | 3.542167e-03 | 1.1731196 | 2.421158e-01 |
| gamma5 | 2.377807e-02 | 3.530355e-03 | 6.7353206 | 1.632280e-10 |

(b)

```

> modelo4 = regexpo.ErrorARMA(respuesta=yt,names.param=param2,
+ data=X1,
+ newdata=X1nuevo, order=c(12,0,10),
+ fixed= c(NA,NA,NA,rep(0,3),NA,rep(0,4),
+ NA,rep(0,3),NA,rep(0,4),NA,NA),
+ method="ML")
Warning message:
In sqrt(diag(se)) : NaNs produced
> coef(modelo4)

```

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) |
|--------|---------------|--------------|-------------|---------------|
| ar1 | 1.411021e-01 | 6.977113e-03 | 20.2235656 | 1.483092e-51 |
| ar2 | 3.407267e-01 | NaN | NaN | NaN |
| ar3 | 3.128627e-01 | NaN | NaN | NaN |
| ar7 | -1.785836e-01 | NaN | NaN | NaN |
| ar12 | 8.857359e-02 | 9.110500e-03 | 9.7221431 | 9.763691e-19 |
| ma4 | 4.232216e-02 | 6.736438e-02 | 0.6282572 | 5.305054e-01 |
| ma9 | 1.737598e-01 | 2.553486e-02 | 6.8048065 | 9.997280e-11 |
| ma10 | 1.915163e-01 | 6.683651e-02 | 2.8654443 | 4.575527e-03 |
| beta0 | 3.549589e+00 | 3.636561e-02 | 97.6084126 | 2.054850e-179 |
| beta1 | 2.182403e-03 | 3.477993e-03 | 0.6274890 | 5.310077e-01 |
| beta2 | 2.801344e-04 | 1.107419e-04 | 2.5296161 | 1.213885e-02 |
| beta3 | -4.481422e-06 | 1.575909e-06 | -2.8437057 | 4.891428e-03 |
| beta4 | 2.919309e-08 | 1.110756e-08 | 2.6282176 | 9.205248e-03 |
| beta5 | -8.674080e-11 | 3.794288e-11 | -2.2860888 | 2.322790e-02 |
| beta6 | 9.781477e-14 | 5.011157e-14 | 1.9519396 | 5.224994e-02 |
| alfa1 | -4.124886e-02 | 3.580978e-03 | -11.5188814 | 3.333272e-24 |
| gamma1 | 1.472956e-02 | 3.527395e-03 | 4.1757613 | 4.328366e-05 |
| alfa2 | -2.968048e-02 | 3.580860e-03 | -8.2886446 | 1.257468e-14 |
| gamma2 | 1.357253e-02 | 3.506297e-03 | 3.8709002 | 1.440095e-04 |
| alfa3 | -1.924711e-02 | 3.533041e-03 | -5.4477480 | 1.396023e-07 |
| gamma3 | 2.034908e-02 | 3.550391e-03 | 5.7315044 | 3.356106e-08 |
| alfa4 | -1.534032e-02 | 3.571520e-03 | -4.2951779 | 2.647807e-05 |
| gamma4 | 2.346319e-02 | 3.508056e-03 | 6.6883756 | 1.936753e-10 |
| alfa5 | 4.155386e-03 | 3.542167e-03 | 1.1731196 | 2.420519e-01 |
| gamma5 | 2.377807e-02 | 3.530355e-03 | 6.7353206 | 1.484712e-10 |

(d)

Figura 10. Planteamiento de los diferentes modelos de regresión en **R** con la salida de los diferentes coeficientes estimados, así como sus errores estándar y el valor del estadístico de prueba T y su valor p asociado para las pruebas de significancia de cada parámetro. (a) modelo uno: AR(19), (b) modelo dos: ARMA(7, 11), (c) modelo tres: ARMA(3, 9)(1, 0)₁₂ y (d) modelo cuatro: ARMA(12, 10)

De esta forma, estas salidas pueden ser formateadas como se presenta en las subtablas asociadas a cada modelo de la **tabla 7**, presentada de forma íntegra en la siguiente página. Con todo esto, se llega a la **tabla 8**, en la cual se puede visualizar la ecuación ajustada para el modelo 3.

Tabla 8. Ecuación de ajuste modelo 3.

| Modelo 3. |
|--|
| $\hat{Y}_t \approx \exp \left(3.549589 + 2.182403 \times 10^{-3}t + 2.801344 \times 10^{-4}t^2 - 4.481422 \times 10^{-6}t^3 + 2.919309 \times 10^{-8}t^4 - 8.674080 \times 10^{-11}t^5 + 9.781477 \times 10^{-14}t^6 - 4.124886 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{1}{6}\pi t \right) + 1.472956 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{1}{6}\pi t \right) - 2.968048 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{1}{3}\pi t \right) + 1.357253 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{1}{3}\pi t \right) - 1.924711 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{1}{2}\pi t \right) + 2.034908 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{1}{2}\pi t \right) - 1.534032 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{2}{3}\pi t \right) + 2.346319 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{2}{3}\pi t \right) + 4.155386 \times 10^{-3} \sin \left(\frac{5}{6}\pi t \right) + 2.377807 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{5}{6}\pi t \right) \right) + \hat{E}_t,$ $\hat{E}_t = 5.10366 \times 10^{-1}E_{t-1} - 8.647654 \times 10^{-1}E_{t-2} - 5.913026 \times 10^{-1}E_{t-3} + 2.367893 \times 10^{-1}E_{t-12} + 4.6983186 \times 10^{-2}E_{t-13} + 7.960842618 \times 10^{-2}E_{t-14} - 5.443403423 \times 10^{-2}E_{t-15} - 3.426672 \times 10^{-1}a_{t-1} - 5.804156 \times 10^{-1}a_{t-2} + 6.975854 \times 10^{-1}a_{t-3} - 2.050398 \times 10^{-1}a_{t-4} + 2.49817 \times 10^{-1}a_{t-5} + 1.192725 \times 10^{-1}a_{t-6} - 2.113339 \times 10^{-1}a_{t-7} + 1.771182 \times 10^{-1}a_{t-8} + 2.367893 \times 10^{-1}a_{t-9}$ |

Asimismo, es importante realizar varias pruebas de hipótesis para poder verificar la significancia estadística de varios parámetros importantes ajustados para cada uno de los modelos, para lo cual es útil valerse de la **tabla 9**, presentada dos páginas después.

Tabla 7. Parámetros estimados para los modelos de regresión con error estructural E_t ARMA.

| Tabla 7a. Parámetros estimados para el modelo uno: AR(19) | | | | | Tabla 7b. Parámetros estimados para el modelo dos: ARMA(7, 11) | | | | |
|--|-----------------------------|----------------------------|-------------|-----------------------------|--|-----------------------------|----------------------------|------------|-----------------------------|
| Parámetros | Estimación | Error estándar | T_0 | $P(t_{203} > T_0)$ | Parámetros | Estimación | Error estándar | T_0 | $P(t_{204} > T_0)$ |
| ϕ_1 | 1.387662×10 ⁻¹ | 6.308629×10 ⁻² | 2.19962619 | 2.896224×10 ⁻² | ϕ_1 | 8.963682×10 ⁻¹ | 6.109229×10 ⁻² | 14.6723625 | 9.471314×10 ⁻³⁴ |
| ϕ_2 | 3.364239×10 ⁻¹ | 6.356109×10 ⁻² | 5.29292267 | 3.111356×10 ⁻⁷ | ϕ_2 | 4.892166×10 ⁻¹ | 5.273085×10 ⁻² | 9.2776165 | 2.581680×10 ⁻¹⁷ |
| ϕ_3 | 2.765654×10 ⁻¹ | 6.694652×10 ⁻² | 4.13113874 | 5.274759×10 ⁻⁵ | ϕ_3 | -2.351110×10 ⁻¹ | 7.246369×10 ⁻² | -3.2445356 | 1.374743×10 ⁻³ |
| ϕ_4 | -3.853654×10 ⁻² | 6.900018×10 ⁻² | -0.55849904 | 5.771192×10 ⁻¹ | ϕ_4 | -4.662929×10 ⁻¹ | 6.746952×10 ⁻² | -6.9111649 | 6.023468×10 ⁻¹¹ |
| ϕ_5 | -1.405333×10 ⁻² | 6.892447×10 ⁻² | -0.20389462 | 8.386401×10 ⁻¹ | ϕ_5 | 1.174053×10 ⁻¹ | 6.924108×10 ⁻² | 1.6956024 | 9.148681×10 ⁻² |
| ϕ_6 | -1.182494×10 ⁻² | 6.872281×10 ⁻² | -0.17206720 | 8.635561×10 ⁻¹ | ϕ_6 | 9.492311×10 ⁻¹ | 5.502015×10 ⁻² | 17.2524270 | 1.000539×10 ⁻⁴¹ |
| ϕ_7 | -1.258328×10 ⁻¹ | 6.735836×10 ⁻² | -1.86811035 | 6.318758×10 ⁻² | ϕ_7 | -8.042922×10 ⁻¹ | 9.208329×10 ⁻² | - | 2.294390×10 ⁻³² |
| ϕ_8 | 8.240800×10 ⁻² | 6.742493×10 ⁻² | 1.22221856 | 2.230422×10 ⁻¹ | θ_1 | -8.087215×10 ⁻¹ | 9.208329×10 ⁻² | 14.2280821 | 6.537360×10 ⁻¹⁶ |
| ϕ_9 | 1.008078×10 ⁻¹ | 6.794228×10 ⁻² | 1.48372642 | 1.394325×10 ⁻¹ | θ_2 | -2.640142×10 ⁻¹ | 1.011601×10 ⁻¹ | -8.7824995 | 9.729344×10 ⁻³ |
| ϕ_{10} | 1.187291×10 ⁻¹ | 6.758507×10 ⁻² | 1.75673596 | 8.047054×10 ⁻² | θ_3 | 1.568038×10 ⁻¹ | 1.067485×10 ⁻¹ | -2.6098645 | 1.433979×10 ⁻¹ |
| ϕ_{11} | 1.618325×10 ⁻² | 6.758477×10 ⁻² | 0.23945108 | 8.109974×10 ⁻¹ | θ_4 | 2.813034×10 ⁻¹ | 1.025136×10 ⁻¹ | 1.4689087 | 6.609341×10 ⁻³ |
| ϕ_{12} | 4.780159×10 ⁻² | 6.733304×10 ⁻² | 0.70992760 | 4.785637×10 ⁻¹ | θ_5 | -1.685159×10 ⁻¹ | 1.047652×10 ⁻¹ | 2.7440602 | 1.092698×10 ⁻¹ |
| ϕ_{13} | -1.984978×10 ⁻¹ | 6.693280×10 ⁻² | -2.96562868 | 3.382632×10 ⁻³ | θ_6 | -9.457112×10 ⁻¹ | 6.084343×10 ⁻² | -1.6085111 | 1.853628×10 ⁻³⁶ |
| ϕ_{14} | -8.139387×10 ⁻² | 6.856000×10 ⁻² | -1.18719176 | 2.365394×10 ⁻¹ | θ_7 | 6.806825×10 ⁻¹ | 1.112895×10 ⁻¹ | - | 4.808449×10 ⁻⁹ |
| ϕ_{15} | 2.469566×10 ⁻³ | 6.917152×10 ⁻² | 0.03570206 | 9.715550×10 ⁻¹ | θ_8 | -9.844120×10 ⁻² | 1.018134×10 ⁻¹ | 15.5433586 | 3.347497×10 ⁻¹ |
| ϕ_{16} | 5.836709×10 ⁻² | 6.951161×10 ⁻² | 0.83967404 | 4.020790×10 ⁻¹ | θ_9 | 1.191803×10 ⁻¹ | 9.941799×10 ⁻² | 6.1163221 | 2.320042×10 ⁻¹ |
| ϕ_{17} | 7.306084×10 ⁻² | 6.739150×10 ⁻² | 1.08412550 | 2.795951×10 ⁻¹ | θ_{10} | 1.015972×10 ⁻¹ | 1.009136×10 ⁻¹ | -0.9668783 | 3.152363×10 ⁻¹ |
| ϕ_{18} | -6.216473×10 ⁻² | 6.381904×10 ⁻² | -0.97407799 | 3.311771×10 ⁻¹ | θ_{11} | -5.391192×10 ⁻² | 9.021265×10 ⁻² | 1.1987800 | 5.507634×10 ⁻¹ |
| ϕ_{19} | -1.955277×10 ⁻¹ | 6.303154×10 ⁻² | -3.10206170 | 2.195290×10 ⁻³ | β_0 | 3.549589 | 3.636561×10 ⁻² | 1.0067736 | 3.463634×10 ⁻¹⁷³ |
| β_0 | 3.549589 | 3.636561×10 ⁻² | 97.60841259 | 1.471508×10 ⁻¹⁷² | | | | -0.5976094 | |
| β_1 | 2.182403×10 ⁻³ | 3.477993×10 ⁻³ | 0.62748904 | 5.310439×10 ⁻¹ | | | | 97.6084126 | |
| β_2 | 2.801344×10 ⁻⁴ | 1.107419×10 ⁻⁴ | 2.52961609 | 1.217836×10 ⁻² | β_1 | 2.182403×10 ⁻³ | 3.477993×10 ⁻³ | 0.6274890 | 5.310404×10 ⁻¹ |
| β_3 | -4.481422×10 ⁻⁶ | 1.575909×10 ⁻⁶ | -2.84370573 | 4.915403×10 ⁻¹³ | β_2 | 2.801344×10 ⁻⁴ | 1.107419×10 ⁻⁴ | 2.5296161 | 1.217459×10 ⁻² |
| β_4 | 2.919309×10 ⁻⁸ | 1.110756×10 ⁻⁸ | 2.62821765 | 9.239469×10 ⁻³ | β_3 | -4.481422×10 ⁻⁶ | 1.575909×10 ⁻⁶ | -2.8437057 | 4.913115×10 ⁻³ |
| β_5 | -8.674080×10 ⁻¹¹ | 3.794288×10 ⁻¹¹ | -2.28608878 | 2.328129×10 ⁻² | β_4 | 2.919309×10 ⁻⁸ | 1.110756×10 ⁻⁸ | 2.6282176 | 9.236203×10 ⁻³ |
| β_6 | 9.781477×10 ⁻¹⁴ | 5.011157×10 ⁻¹⁴ | 1.95193964 | 5.232075×10 ⁻² | β_5 | -8.674080×10 ⁻¹¹ | 3.794288×10 ⁻¹¹ | -2.2860888 | 2.327620×10 ⁻² |
| α_1 | -4.124886×10 ⁻² | 3.580978×10 ⁻³ | - | 5.954348×10 ⁻²⁴ | β_6 | 9.781477×10 ⁻¹⁴ | 5.011157×10 ⁻¹⁴ | 1.9519396 | 5.231400×10 ⁻² |
| γ_1 | 1.472956×10 ⁻² | 3.527395×10 ⁻³ | 4.17576133 | 4.406985×10 ⁻⁵ | α_1 | -4.124886×10 ⁻² | 3.580978×10 ⁻³ | - | 5.637830×10 ⁻²⁴ |
| γ_2 | -2.968048×10 ⁻² | 3.580860×10 ⁻³ | -8.28864463 | 1.551151×10 ⁻¹⁴ | γ_1 | 1.472956×10 ⁻² | 3.527395×10 ⁻³ | 4.1757613 | 4.398909×10 ⁻⁵ |
| γ_3 | -1.924711×10 ⁻² | 3.533041×10 ⁻³ | -5.44774799 | 1.467420×10 ⁻⁷ | α_2 | -2.968048×10 ⁻² | 3.580860×10 ⁻³ | -8.2886446 | 1.520653×10 ⁻¹⁴ |
| γ_4 | 2.034908×10 ⁻² | 3.550391×10 ⁻³ | 5.73150440 | 3.562471×10 ⁻⁸ | γ_2 | -2.968048×10 ⁻² | 3.580860×10 ⁻³ | -8.2886446 | 1.459352×10 ⁻⁴ |
| γ_5 | -1.534032×10 ⁻² | 3.571520×10 ⁻³ | -4.29517779 | 2.704904×10 ⁻⁵ | α_3 | -1.924711×10 ⁻² | 3.533041×10 ⁻³ | -5.4477480 | 1.460484×10 ⁻⁷ |
| α_1 | -4.124886×10 ⁻² | 3.580978×10 ⁻³ | - | 5.954348×10 ⁻²⁴ | γ_3 | -1.924711×10 ⁻² | 3.533041×10 ⁻³ | -5.4477480 | 1.460484×10 ⁻⁷ |
| α_2 | -2.968048×10 ⁻² | 3.580860×10 ⁻³ | -8.28864463 | 1.551151×10 ⁻¹⁴ | γ_4 | 2.034908×10 ⁻² | 3.550391×10 ⁻³ | 5.7315044 | 3.542342×10 ⁻⁸ |
| α_3 | -1.924711×10 ⁻² | 3.533041×10 ⁻³ | -5.44774799 | 1.467420×10 ⁻⁷ | α_4 | -1.534032×10 ⁻² | 3.571520×10 ⁻³ | -4.2951779 | 2.699420×10 ⁻⁵ |
| α_4 | -1.534032×10 ⁻² | 3.571520×10 ⁻³ | -4.29517779 | 2.704904×10 ⁻⁵ | γ_4 | 2.346319×10 ⁻² | 3.508056×10 ⁻³ | 6.6883756 | 2.124363×10 ⁻¹⁰ |
| α_5 | 4.155386×10 ⁻³ | 3.542167×10 ⁻³ | 1.17311965 | 2.421225×10 ⁻¹ | α_5 | 4.155386×10 ⁻³ | 3.542167×10 ⁻³ | 1.1731196 | 2.421158×10 ⁻¹ |
| γ_5 | 2.377807×10 ⁻² | 3.530355×10 ⁻³ | 6.73532056 | 1.648473×10 ⁻¹⁰ | γ_5 | 2.377807×10 ⁻² | 3.530355×10 ⁻³ | 6.7353206 | 1.632200×10 ⁻¹⁰ |
| AIC= 5.184053 BIC=8.751618 | | | | | AIC= 4.383091 BIC=7.292597 | | | | |
| Tabla 7c. Parámetros estimados para el modelo tres: ARMA(3, 9)(1, 0)[12] | | | | | Tabla 7d. Parámetros estimados para el modelo cuatro: ARMA(12, 10) | | | | |
| Parámetros | Estimación | Error estándar | T_0 | $P(t_{209} > T_0)$ | Parámetros | Estimación | Error estándar | T_0 | $P(t_{214} > T_0)$ |
| ϕ_1 | 5.103660×10 ⁻¹ | 1.939748×10 ⁻¹ | 2.6310940 | 9.145203×10 ⁻³ | ϕ_1 | 1.411021×10 ⁻¹ | 6.977113×10 ⁻³ | 20.2235656 | 1.483092×10 ⁻⁵¹ |
| ϕ_2 | 8.647654×10 ⁻¹ | 5.851095×10 ⁻² | 14.7795485 | 2.597356×10 ⁻³⁴ | ϕ_2 | 3.407267×10 ⁻¹ | NaN | NaN | NaN |
| ϕ_3 | -5.913026×10 ⁻¹ | 1.712669×10 ⁻¹ | -3.4525213 | 6.721165×10 ⁻⁴ | ϕ_3 | 3.128627×10 ⁻¹ | NaN | NaN | NaN |
| θ_1 | -3.426672×10 ⁻¹ | 1.953564×10 ⁻¹ | -1.7540618 | 8.088559×10 ⁻² | ϕ_7 | -1.785836×10 ⁻¹ | NaN | NaN | NaN |
| θ_2 | -5.804156×10 ⁻¹ | 8.823191×10 ⁻² | -6.5782962 | 3.752777×10 ⁻¹⁰ | ϕ_{12} | 8.857359×10 ⁻² | 9.110500×10 ⁻³ | 9.7221431 | 9.763691×10 ⁻¹⁹ |
| θ_3 | 6.975854×10 ⁻¹ | 1.221268×10 ⁻¹ | 5.7119759 | 3.805971×10 ⁻⁸ | θ_4 | 4.232216×10 ⁻² | 6.736438×10 ⁻² | 0.6282572 | 5.305054×10 ⁻¹ |
| θ_4 | -2.050398×10 ⁻¹ | 1.087980×10 ⁻¹ | -1.8845916 | 6.087289×10 ⁻² | θ_9 | 1.737598×10 ⁻¹ | 2.553486×10 ⁻² | 6.8048065 | 9.997280×10 ⁻¹¹ |
| θ_5 | 2.498174×10 ⁻² | 9.346104×10 ⁻² | 0.2672957 | 7.895050×10 ⁻¹ | θ_{10} | 1.915163×10 ⁻¹ | 6.683651×10 ⁻² | 2.8654443 | 4.579527×10 ⁻³ |
| θ_6 | 1.192725×10 ⁻¹ | 9.222999×10 ⁻² | 1.2932078 | 1.973668×10 ⁻¹ | β_0 | 3.549589 | 3.636561×10 ⁻² | 97.6084126 | 2.054850×10 ⁻¹⁷⁹ |
| θ_7 | -2.113339×10 ⁻¹ | 7.680277×10 ⁻² | -2.7516446 | 6.450625×10 ⁻³ | | | | | |
| θ_8 | 1.771182×10 ⁻¹ | 7.890656×10 ⁻² | 2.2446574 | 2.583781×10 ⁻² | β_1 | 2.182403×10 ⁻³ | 3.477993×10 ⁻³ | 0.6274890 | 5.310077×10 ⁻¹ |
| θ_9 | 2.367893×10 ⁻¹ | 8.041070×10 ⁻² | 2.9447484 | 3.598147×10 ⁻³ | β_2 | 2.801344×10 ⁻⁴ | 1.107419×10 ⁻⁴ | 2.5296161 | 1.213885×10 ⁻² |
| θ_{10} | 9.205783×10 ⁻² | 7.850033×10 ⁻² | 1.1727064 | 2.422484×10 ⁻¹ | β_3 | -4.481422×10 ⁻⁶ | 1.575909×10 ⁻⁶ | -2.8437057 | 4.891428×10 ⁻³ |
| β_0 | 3.549589 | 3.636561×10 ⁻² | 97.6084126 | 2.592133×10 ⁻¹⁷⁶ | β_4 | 2.919309×10 ⁻⁸ | 1.110756×10 ⁻⁸ | 2.6282176 | 9.205248×10 ⁻³ |
| β_1 | 2.182403×10 ⁻³ | 3.477993×10 ⁻³ | 0.6274890 | 5.310237×10 ⁻¹ | β_5 | -8.674080×10 ⁻¹¹ | 3.794288×10 ⁻¹¹ | -2.2860888 | 2.322790×10 ⁻² |
| β_2 | 2.801344×10 ⁻⁴ | 1.107419×10 ⁻⁴ | 2.5296161 | 1.215629×10 ⁻² | β_6 | 9.781477×10 ⁻¹⁴ | 5.011157×10 ⁻¹⁴ | 1.9519396 | 5.224994×10 ⁻² |
| β_3 | -4.481422×10 ⁻⁶ | 1.575909×10 ⁻⁶ | -2.8437057 | 4.902006×10 ⁻³ | α_1 | -4.124886×10 ⁻² | 3.580978×10 ⁻³ | - | 3.333272×10 ⁻²⁴ |
| β_4 | 2.919309×10 ⁻⁸ | 1.110756×10 ⁻⁸ | 2.6282176 | 9.220350×10 ⁻³ | γ_1 | 1.472956×10 ⁻² | 3.527395×10 ⁻³ | 4.1757613 | 4.322836×10 ⁻⁵ |
| β_5 | -8.674080×10 ⁻¹¹ | 3.794288×10 ⁻¹¹ | -2.2860888 | 2.325146×10 ⁻² | α_2 | -2.968048×10 ⁻² | 3.580860×10 ⁻³ | -8.2886446 | 1.257468×10 ⁻¹⁴ |
| β_6 | 9.781477×10 ⁻¹⁴ | 5.011157×10 ⁻¹⁴ | 1.9519396 | 5.228120×10 ⁻² | γ_2 | -2.968048×10 ⁻² | 3.580860×10 ⁻³ | -8.2886446 | 1.440095×10 ⁻⁴ |
| α_1 | -4.124886×10 ⁻² | 3.580978×10 ⁻³ | - | 5.954348×10 ⁻²⁴ | α_3 | -1.964711×10 ⁻² | 3.533041×10 ⁻³ | -5.4477480 | 1.396023×10 ⁻⁷ |
| γ_1 | 1.472956×10 ⁻² | 3.527395×10 ⁻³ | 4.1757613 | 4.359843×10 ⁻⁵ | γ_3 | -1.924711×10 ⁻² | 3.533041×10 ⁻³ | -5.4477480 | 1.396023×10 ⁻⁷ |
| γ_2 | -2.968048×10 ⁻² | 3.580860×10 ⁻³ | -8.2886446 | 1.380199×10 ⁻¹⁴ | γ_4 | 2.034908×10 ⁻² | 3.550391×10 ⁻³ | 5.7315044 | 3.356106×10 ⁻⁸ |
| γ_3 | -1.924711×10 ⁻² | 3.533041×10 ⁻³ | -5.4477480 | 1.427183×10 ⁻⁷ | α_4 | -1.534032×10 ⁻² | 3.571520×10 ⁻³ | -4.2951779 | 2.647807×10 ⁻⁵ |
| γ_4 | 2.034908×10 ⁻² | 3.550391×10 ⁻³ | 5.7315044 | 3.445941×10 ⁻⁸ | γ_5 | 2.346319×10 ⁻² | 3.508056×10 ⁻³ | 6.6883756 | 1.936753×10 ⁻¹⁰ |
| α_4 | | | | | | | | | |

| Para los modelos uno, dos, tres y cuatro. | | | |
|--|---|--|---|
| Pruebas de hipótesis para la tendencia | | | |
| Modelo | Tests de hipótesis | Estadístico de prueba y su distribución | Criterio de decisión |
| Uno | $H_0: \beta_6 = 0$ contra $H_1: \beta_6 \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\beta}_6}{se(\widehat{\beta}_6)} \sim t_{203}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{203} > T_0)$ es pequeño |
| Dos | $H_0: \beta_6 = 0$ contra $H_1: \beta_6 \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\beta}_6}{se(\widehat{\beta}_6)} \sim t_{204}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{204} > T_0)$ es pequeño |
| Tres | $H_0: \beta_6 = 0$ contra $H_1: \beta_6 \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\beta}_6}{se(\widehat{\beta}_6)} \sim t_{209}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{209} > T_0)$ es pequeño |
| Cuatro | $H_0: \beta_6 = 0$ contra $H_1: \beta_6 \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\beta}_6}{se(\widehat{\beta}_6)} \sim t_{214}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{214} > T_0)$ es pequeño |
| Pruebas de hipótesis para la estacionalidad. Para cada par (α_i, γ_i) con $i = 1, 2, 3, 4, 5$. | | | |
| Modelo | Tests de hipótesis | Estadístico de prueba y su distribución | Criterio de decisión |
| Uno | $H_0: \alpha_i = 0$ contra $H_1: \alpha_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\alpha}_i}{se(\widehat{\alpha}_i)} \sim t_{203}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{203} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \gamma_i = 0$ contra $H_1: \gamma_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\gamma}_i}{se(\widehat{\gamma}_i)} \sim t_{203}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{203} > T_0)$ es pequeño |
| Dos | $H_0: \alpha_i = 0$ contra $H_1: \alpha_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\alpha}_i}{se(\widehat{\alpha}_i)} \sim t_{204}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{204} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \gamma_i = 0$ contra $H_1: \gamma_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\gamma}_i}{se(\widehat{\gamma}_i)} \sim t_{204}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{204} > T_0)$ es pequeño |
| Tres | $H_0: \alpha_i = 0$ contra $H_1: \alpha_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\alpha}_i}{se(\widehat{\alpha}_i)} \sim t_{209}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{209} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \gamma_i = 0$ contra $H_1: \gamma_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\gamma}_i}{se(\widehat{\gamma}_i)} \sim t_{209}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{209} > T_0)$ es pequeño |
| Cuatro | $H_0: \alpha_i = 0$ contra $H_1: \alpha_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\alpha}_i}{se(\widehat{\alpha}_i)} \sim t_{214}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{214} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \gamma_i = 0$ contra $H_1: \gamma_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\gamma}_i}{se(\widehat{\gamma}_i)} \sim t_{214}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{214} > T_0)$ es pequeño |
| Pruebas de hipótesis para los parámetros de error estructural | | | |
| Modelo | Tests de hipótesis | Estadístico de prueba y su distribución | Criterio de decisión |
| Uno | $H_0: \phi_j = 0$ contra $H_1: \phi_j \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\phi}_j}{se(\widehat{\phi}_j)} \sim t_{203}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{203} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \theta_i = 0$ contra $H_1: \theta_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\theta}_i}{se(\widehat{\theta}_i)} \sim t_{203}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{203} > T_0)$ es pequeño |
| Dos | $H_0: \phi_j = 0$ contra $H_1: \phi_j \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\phi}_j}{se(\widehat{\phi}_j)} \sim t_{204}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{204} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \theta_i = 0$ contra $H_1: \theta_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\theta}_i}{se(\widehat{\theta}_i)} \sim t_{204}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{204} > T_0)$ es pequeño |

| | | | |
|--------|---|--|---|
| Tres | $H_0: \phi_j = 0$ contra $H_1: \phi_j \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\phi}_j}{se(\widehat{\phi}_j)} \sim t_{209}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{209} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \theta_i = 0$ contra $H_1: \theta_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\theta}_i}{se(\widehat{\theta}_i)} \sim t_{209}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{209} > T_0)$ es pequeño |
| Cuatro | $H_0: \phi_j = 0$ contra $H_1: \phi_j \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\phi}_j}{se(\widehat{\phi}_j)} \sim t_{214}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{214} > T_0)$ es pequeño |
| | $H_0: \theta_i = 0$ contra $H_1: \theta_i \neq 0$ | $T_0 = \frac{\widehat{\theta}_i}{se(\widehat{\theta}_i)} \sim t_{214}$ | Rechazar H_0 si $P(t_{214} > T_0)$ es pequeño |

Entonces, teniendo en cuenta las pruebas de hipótesis recién presentadas en la tabla 9 y los valores p mostrados en quinta columna de las tablas 7a, 7b, 7c y 7d, se puede determinar la significancia estadística de cada uno de los parámetros de interés. Así pues, en el caso de la tendencia, interesa que el parámetro asociado al término de mayor grado de cada polinomio, que para todos los modelos es de grado seis, sea estadísticamente significativo, y si se asumen un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$, se tiene que todos los modelos se cumple que $P(|t_{239-k}| > |T_0|) < 0.05 = \alpha$, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se concluye que existe evidencia muestral suficiente para sugerir que la tendencia es estadísticamente significativa, por lo que se puede afirmar que sí es de grado seis significativamente.

En el caso de la estacionalidad, interesa que al menos uno de los componentes sea significativo, de esta forma, asumiendo un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$, se tiene que todos los modelos, en todas sus frecuencias, al menos uno de los componentes es significativo, ya que $P(|t_{239-k}| > |T_0|) < 0.05 = \alpha$. Por otro lado, en el caso de error estructural, se tiene que para el modelo 1, solo los parámetros ϕ_{13} y ϕ_{19} , son estadísticamente significativo asumiendo un nivel de significancia de 0.05, ya que $P(|t_{204}| > |T_0|) < 0.05 = \alpha$; en el modelo 2, todos los parámetros son significativos excepto ϕ_5 , θ_k , con $k = 3, 5, 8, \dots, 11$; en el modelo 3, todos los parámetros son significativos excepto, ϕ_1 , θ_4 , θ_5 , θ_6 , ϕ_1 ; por último, en el modelo 4, todos los parámetros son significativos excepto θ_4 .

Por otro lado, vale la pena observar la **figura 11**, presentada de forma íntegra en la siguiente página, en la cual se observa cómo es el ajuste de cada uno de los modelos comparado con la serie temporal. De las gráficas de ajuste se observa que al modelar la componente de error estructural E_t se logra seguir la componente cíclica en todos los modelos ARMA considerados, gráficamente no se logra identificar cuál modelo tiene mejor ajuste porque todas parecen tener el mismo patrón, además se puede observar la presencia de datos atípicos que no se logran explicar por ningún modelo, esto debido que son observaciones que se comportan diferente, sin embargo, según las medidas de ajuste AIC y BIC, los modelos con mejor ajuste son el modelo exponencial polinomial de grado seis estacional con variables trigonométricas con errores estructurales ARMA(7,11) y el modelo exponencial polinomial de grado seis estacional con variables trigonométricas con errores estructurales ARMA(12,10) incluyendo ϕ_7 y θ_{10} , siendo mejor el primero.

5. ANÁLISIS DE RESIDUALES Y VALIDACIÓN DE SUPUESTOS

Ahora bien, se debe tener en cuenta que para el planteamiento de cada uno de los modelos se partieron de varios supuestos sobre los errores de ajuste a_t implícitos al suponer que estos son un ruido blanco, los cuales son: media cero, varianza constante y ausencia de patrones contrarios a la independencia y la distribución normal. No obstante, teniendo en cuenta que estos errores no son conocidos, para poder validar los supuestos se va a realizar esta revisión mediante los residuales, que son los estimadores de estos errores de ajuste, para lo cual se tiene la **figura 12**, en la que se pueden visualizar a los residuales contra el tiempo, y en la **figura 13**, los residuales contra los valores ajustados de cada modelo.

Así pues, vale la pena comenzar evaluando si se cumple el supuesto de media cero y varianza constante para cada modelo, y al revisar cada uno de los gráficos se evidencia que todos los modelos cumplen estos dos supuestos, como tampoco se detecta que hay patrones contrarios a la independencia mediante estos gráficos como ciclos o rachas de signos positivos y negativos.

Asimismo, es necesario evaluar las gráficas del ACF y PACF para cada uno de los modelos en la **figura 14**, donde las hipótesis a contrastar en la **ACF** son:

$$H_0: \rho(k) = \text{Corr}(a_t, a_{t+k}) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 36 \text{ vs. } H_1: \exists k: \rho(k) = \text{Corr}(a_t, a_{t+k}) \neq 0, k = 1, 2, \dots, 36$$

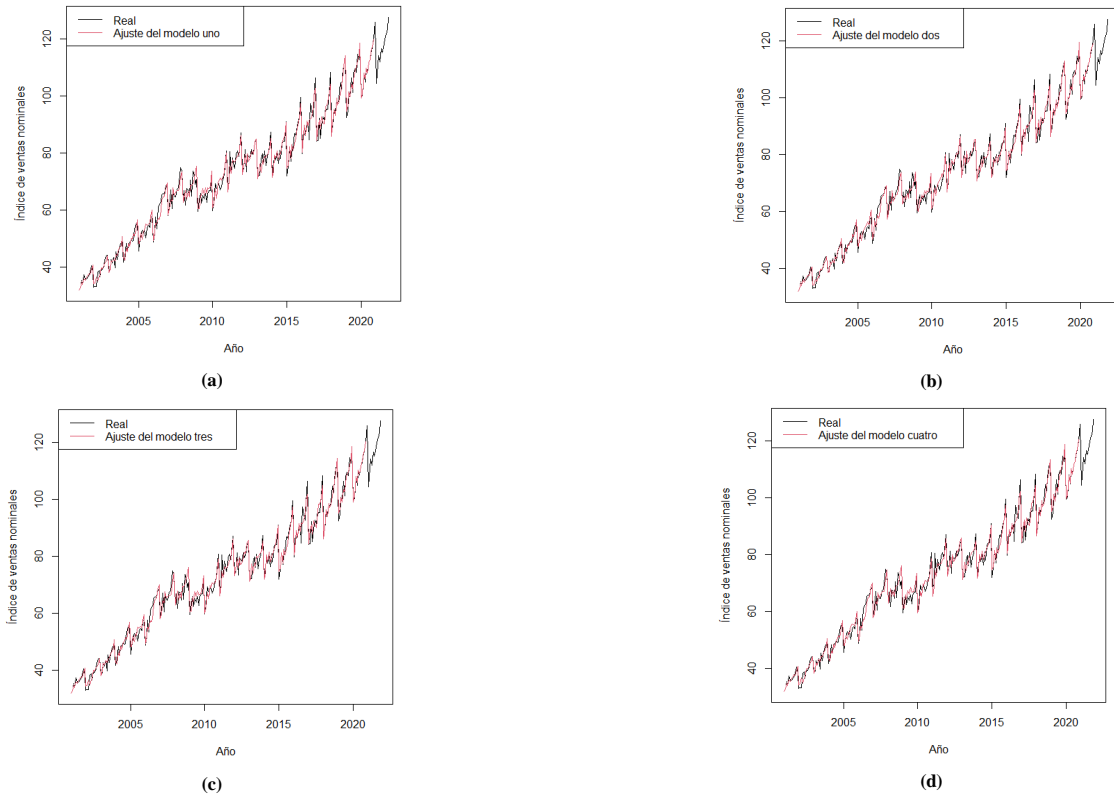


Figura 11. Graficas con ayuda de **R** de la serie original (en negro) y la serie ajustada (en rojo) para cada uno de los modelos, a saber: **(a)** modelo uno: AR(19), **(b)** modelo dos: ARMA(7, 11), **(c)** modelo tres: ARMA(3, 9)(1, 0)₁₂ y **(d)** modelo cuatro: ARMA(12, 10)

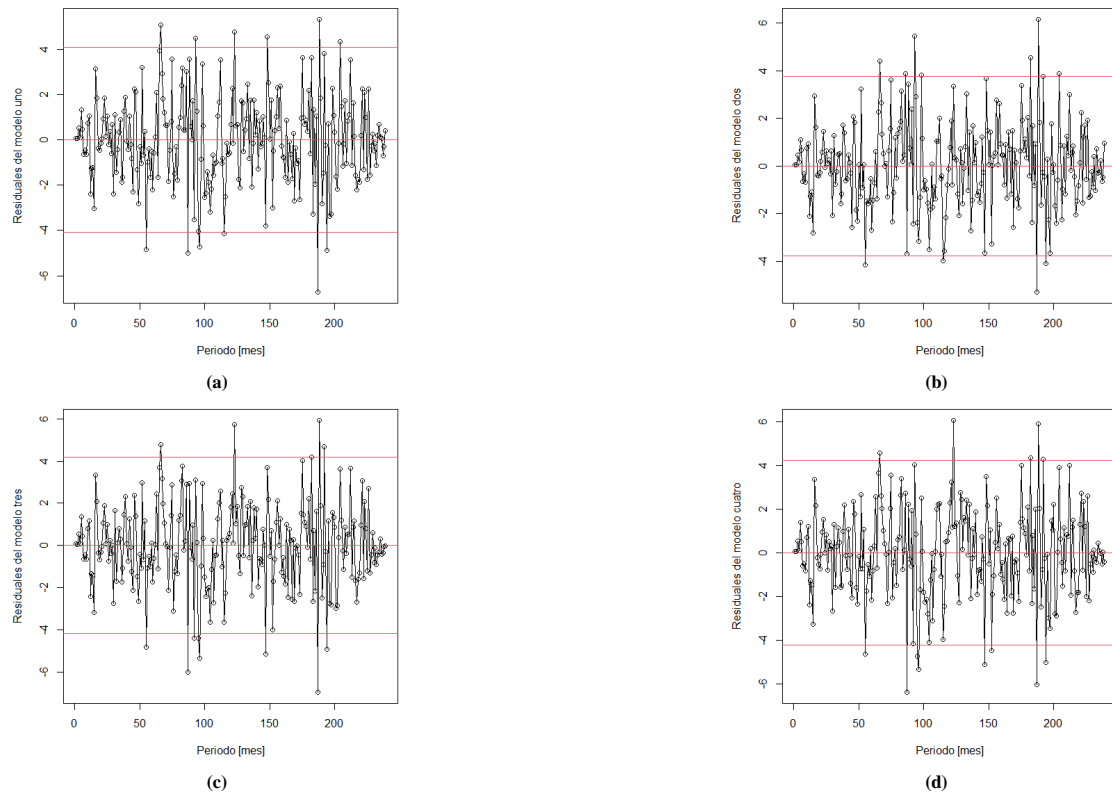


Figura 12. Graficas hechas con ayuda de **R** de los residuales contra el tiempo para cada modelo, a saber: **(a)** modelo uno: AR(19), **(b)** modelo dos: ARMA(7, 11), **(c)** modelo tres: ARMA(3, 9)(1, 0)₁₂ y **(d)** modelo cuatro: ARMA(12, 10). Nótese las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo. En el medio se marca el residual nulo y las otras dos corresponden a las delimitaciones del positivo y el negativo del doble de la varianza de los residuales asociados con cada modelo.

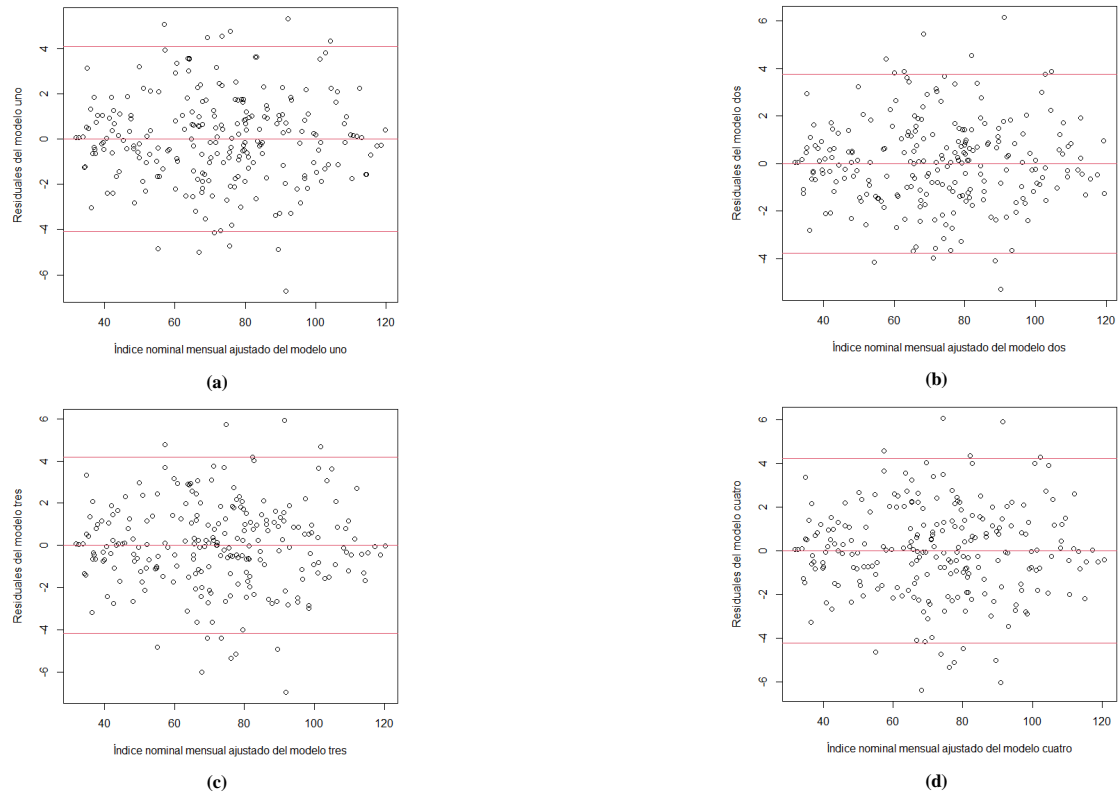


Figura 13. Graficas hechas con ayuda de **R** de los residuales contra el índice nominal de ventas para cada modelo, a saber: **(a)** modelo uno: AR(19), **(b)** modelo dos: ARMA(7, 11), **(c)** modelo tres: ARMA(3, 9)(1, 0)₁₂ y **(d)** modelo cuatro: ARMA(12, 10). Nótese las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo. En el medio se marca el residual nulo y las otras dos corresponden a las delimitaciones del positivo y el negativo del doble de la varianza de los residuales asociados con cada modelo.

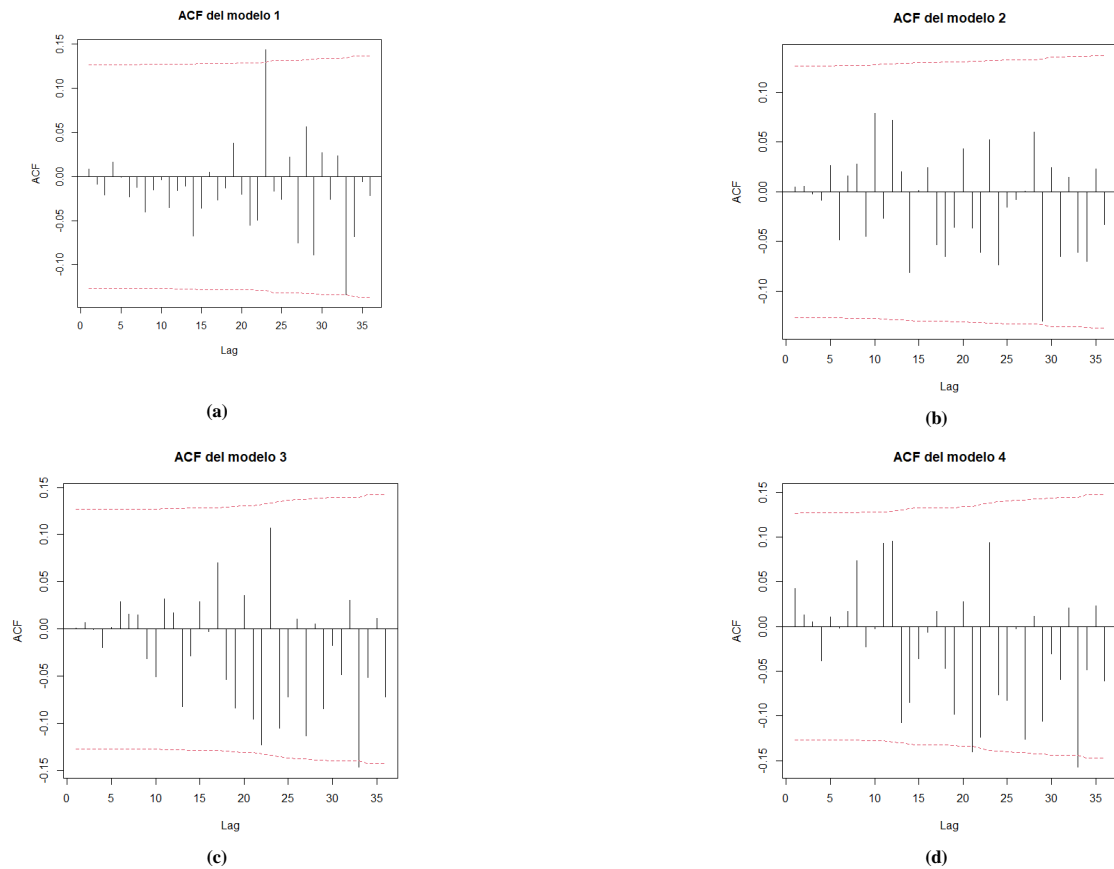


Figura 14. Graficas hechas con ayuda de **R** de las funciones de autocorrelación, **ACF**, estimadas para cada modelo, a saber: **(a)** modelo uno: AR(19), **(b)** modelo dos: ARMA(7, 11), **(c)** modelo tres: ARMA(3, 9)(1, 0)₁₂ y **(d)** modelo cuatro: ARMA(12, 10). Nótese las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo, las cuales corresponden a los límites de *Bartlett* para evaluar gráficamente la significancia de la ACF para cada rezago (graficados en el eje de las abscisas).

Y de igual forma, se presentan las gráficas de autocorrelación parcial, PACF, de cada uno de los modelos en la **figura 15**, mientras que las hipótesis a contrastar en la **PACF** es:

$$H_0: \phi_{kk} = \text{Corr}(a_t, a_{t+k} | a_{t+1}, \dots, a_{t+k-1}) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 36$$

$$vs.$$

$$H_1: \exists k: \phi_{kk} = \text{Corr}(a_t, a_{t+k} | a_{t+1}, \dots, a_{t+k-1}) \neq 0, k = 1, 2, \dots, 36$$

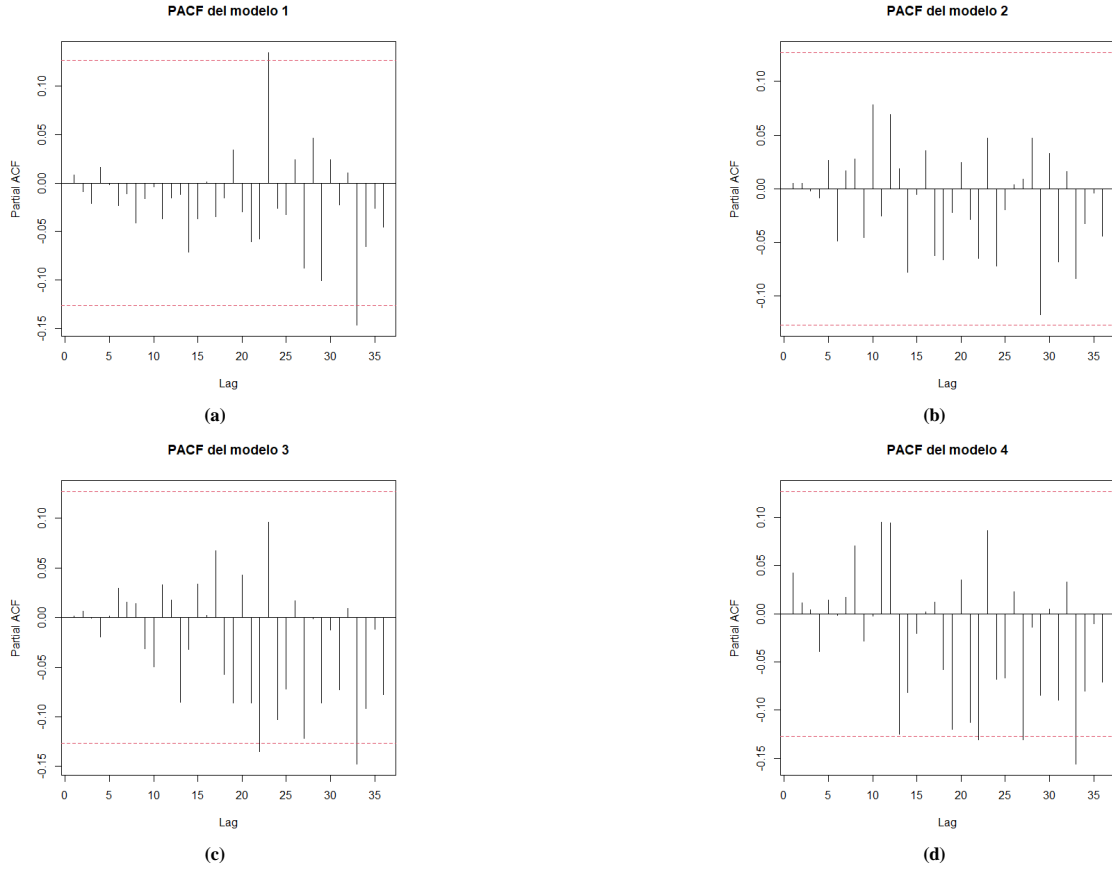


Figura 15. Gráficas hechas con ayuda de **R** de las funciones de autocorrelación parciales, **PACF**, estimadas para cada modelo, a saber: **(a)** modelo uno: AR(19), **(b)** modelo dos: ARMA(7, 11), **(c)** modelo tres: ARMA(3, 9)(1, 0)₁₂ y **(d)** modelo cuatro: ARMA(12, 10). Nótese las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo, las cuales corresponden a los límites de *Bartlett* para evaluar gráficamente la significancia de la PACF para cada rezago (graficados en el eje de las abscisas).

De las anteriores gráficas de ACF y PACF, se puede observar que en ninguno de los modelos se rechaza el supuesto de ruido blanco sobre el proceso asociado al error de ajuste $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ de cada uno de los cuatro modelos planteados, ya que ninguno supera las líneas rojas, que son los límites de *Bartlett* para rezagos pequeños, para valores pequeños de rezagos, si bien esto sí sucede para rezagos mayores, pero que pueden ser descartados teniendo presente que la probabilidad de cometer error tipo I aumenta con el valor del rezago.

De la misma forma, se recurre a las pruebas Ljung-Box, cuyos resultados son presentados en la **tabla 10** para evaluar el supuesto de ruido blanco sobre el error de ajuste $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$, de manera que, considerando $\rho(k) = \text{Corr}(a_t, a_{t+k})$, se tiene que las hipótesis son:

$$H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots \rho(m) = 0$$

$$vs.$$

$$H_1: \exists k: \rho(k) \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$$

Y se tiene que el estadístico de prueba es $Q_{LB} = 239 \times 241 \sum_{k=1}^m \frac{[\hat{\rho}(k)]^2}{239-k} \sim \chi_m^2$ y que tiene como criterio de rechazo que el valor p $V_p = P(\chi_m^2 \geq Q_{LB})$ sea pequeño. Con esto claro, se debe tener presente que se va a realizar seis veces este test conjunto para $m = 6, 12, 18, 24, 30, 36$

Así pues, usando un nivel de significancia de 5%, se tiene a la luz de los resultados que en ningún escenario se rechaza la hipótesis nula, por lo que hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los errores de ajuste a_t son incorrelacionados.

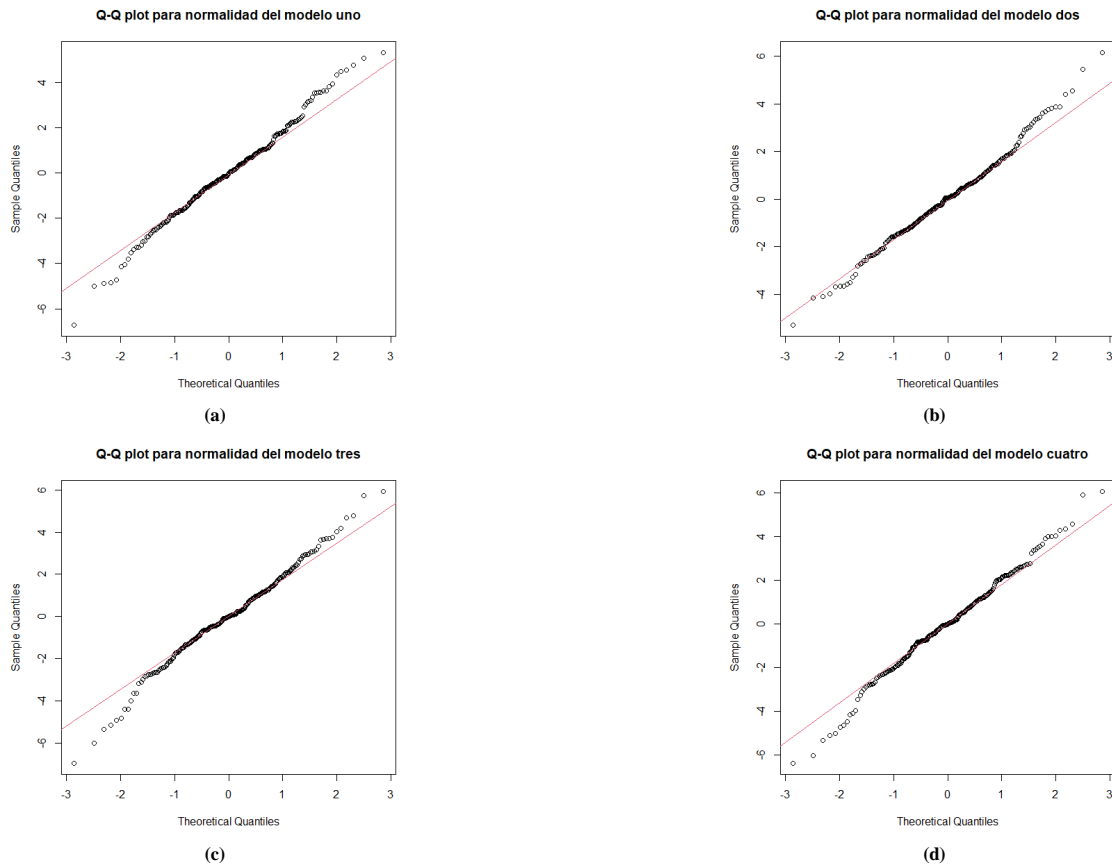
Tabla 10. Test de *Ljung-Box* para a_t para los modelos uno, dos, tres y cuatro con $\rho(k) = \text{Corr}(a_t, a_{t+k})$.

$$H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots \rho(m) = 0 \text{ vs. } H_1: \exists k: \rho(k) \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$$

| Tabla 10a. Modelo uno. | | | | Tabla 10b. Modelo dos. | | | |
|------------------------|-----------------|--------------------|----------------------|------------------------|-----------------|--------------------|----------------------|
| m | Q _{LB} | Grados de libertad | $P(\chi^2 > Q_{LB})$ | m | Q _{LB} | Grados de libertad | $P(\chi^2 > Q_{LB})$ |
| 6 | 0.3457743 | 6 | 0.9992430 | 6 | 0.7785545 | 6 | 0.9926364 |
| 12 | 1.2240504 | 12 | 0.9999567 | 12 | 4.5812777 | 12 | 0.9705249 |
| 18 | 2.9865758 | 18 | 0.9999732 | 18 | 8.3634928 | 18 | 0.9727197 |
| 24 | 10.5326155 | 24 | 0.9919748 | 24 | 12.7185469 | 24 | 0.9705362 |
| 30 | 15.6225203 | 30 | 0.9857176 | 30 | 18.6034936 | 30 | 0.9479235 |
| 36 | 22.4201553 | 36 | 0.9625322 | 36 | 22.7095125 | 36 | 0.9585481 |

| Tabla 10c. Modelo tres. | | | | Tabla 10d. Modelo cuatro. | | | |
|-------------------------|-----------------|--------------------|----------------------|---------------------------|-----------------|--------------------|----------------------|
| m | Q _{LB} | Grados de libertad | $P(\chi^2 > Q_{LB})$ | m | Q _{LB} | Grados de libertad | $P(\chi^2 > Q_{LB})$ |
| 6 | 0.3176636 | 6 | 0.9994069 | 6 | 0.8775359 | 6 | 0.98983181 |
| 12 | 1.6448616 | 12 | 0.9997865 | 12 | 6.9245801 | 12 | 0.86255709 |
| 18 | 5.8031658 | 18 | 0.9969313 | 18 | 12.7071484 | 18 | 0.80866839 |
| 24 | 20.3526417 | 24 | 0.6765557 | 24 | 28.6371281 | 24 | 0.23408695 |
| 30 | 27.2910944 | 30 | 0.6079480 | 30 | 38.1831368 | 30 | 0.14510388 |
| 36 | 36.3954279 | 36 | 0.4502497 | 36 | 48.0522881 | 36 | 0.08632259 |

Por último, sobre la normalidad del error de ajuste, donde se quiere contrastar las siguientes hipótesis: $H_0: \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ se distribuye normal vs $H_1: a_{t \in \mathbb{Z}^+}$ no se distribuye normal, se puede observar que en los tests de Shapiro-Wilk en la **tabla 11**, todas las pruebas no rechazan la normalidad usando una significancia de 5%, sin embargo, en los gráficos de normalidad de la **figura 16**, se puede observar que los residuos de los modelos **uno**, **tres** y **cuatro** se da un alejamiento de las colas, lo que indica que la distribución real de los errores podría ser alguna que tenga mayor probabilidad de valores atípicos en comparación con una distribución normal. Por otro lado, en el modelo **dos**, se observa que sus residuales presentan un mejor ajuste para su cola inferior pero no tanto para la cola superior, si bien se evidencia un acercamiento luego de alejarse una distancia no significativa, lo cual se le puede atribuir a valores atípicos, teniendo un comportamiento más adecuado, de manera que se concluye que los modelos **uno**, **tres** y **cuatro** tienen errores de ajuste que no se distribuyen normal, mientras que los errores de ajuste del **modelo dos** sí se distribuyen normal.

**Figura 16.** Tests de *Shapiro-Wilks* para verificar normalidad de los a_t para los modelos uno, dos, tres y cuatro.**Tabla 11.** Tests de *Shapiro-Wilks* para verificar normalidad de los a_t para los modelos uno, dos, tres y cuatro.

| Modelo | Errores estructurales | Estadístico W | Valor p | Validez R.B. | Validez normalidad |
|--------|--|---------------|---------|--------------|--------------------|
| Uno | AR(19) | 0.99224 | 0.2414 | No | No |
| Dos | ARMA(7,11) | 0.99104 | 0.15 | Sí | Sí |
| Tres | ARMA(3,9)(1,0)[12] | 0.98957 | 0.08255 | No | No |
| Cuatro | ARMA(12,10) con ϕ_7 y θ_{10} . | 0.99167 | 0.1936 | No | No |

NA. No aplica la evaluación del test de normalidad por no cumplirse la incorrelación.

De esta manera, se concluye que el mejor modelo es el **dos**, dado que cumple con todos los supuestos sobre los errores de ajuste, ya que estos son independientes e idénticamente distribuidos como una normal con media nula y homocedásticos.

6. PRONÓSTICOS PARA EL PERIODO *EX POST*

Los pronósticos realizados para el periodo *ex post*, como estrategia de validación cruzada, se harán nuevamente con origen en la observación $n = 239$. Es preciso recordar que para nuestro modelo no es posible obtener intervalos de pronóstico, en tanto el modelo global del que se partió es parcialmente multiplicativo, y en este sentido, únicamente se presentarán pronósticos puntuales y medidas de error asociados a este tipo de pronósticos (RMSE, MAE y MAPE). Además, se presentará la ecuación de pronósticos para el modelo **tres**, el cual se refleja en la **tabla 12**.

Tabla 12. Ecuación de pronósticos para el **modelo tres** con origen en $n = 239$.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{239}(L) = & \exp[3.55 + 2.182 \times 10^{-3}(239 + L) - 2.801 \times 10^{-4}(4239 + L)^2 - 4.481 \times 10^{-6}(239 + L)^3 + 2.919 \times 10^{-8}(239 + L)^4 - 8.674 \times 10^{-11}(239 + L)^5 \\ & + 9.781 \times 10^{-14}(239 + L)^6 - 4.125 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{6}(239 + L)\right) + 1.473 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{6}(239 + L)\right) - 2.968 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{3}(239 + L)\right) + 1.357 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{3}(239 + L)\right) \\ & - 1.925 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(239 + L)\right) + 2.035 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(239 + L)\right) - 1.534 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}(239 + L)\right) \\ & + 2.3456 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}(239 + L)\right) + 4.155 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{5\pi}{6}(239 + L)\right) + 2.378 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{5\pi}{6}(239 + L)\right) + \hat{E}_{239}(L)] \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \hat{E}_{239}(L) = & 5.10 \times 10^{-1} \hat{E}_{239}(L-1) + 8.65 \times 10^{-1} \hat{E}_{239}(L-2) - 5.91 \times 10^{-1} \hat{E}_{239}(L-3) - 3.423 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-1) - 5.80 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-2) + 6.98 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-3) \\ & - 3.423 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-4) + 2.50 \times 10^{-2} \hat{a}_{239}(L-5) + 1.19 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-6) - 2.11 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-7) + 1.77 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-8) + 2.37 \times 10^{-1} \hat{a}_{239}(L-9) \\ & + 9.20 \times 10^{-2} \hat{E}_{239}(L-12) + (9.20 \times 10^{-2} \times 5.10 \times 10^{-1}) \hat{E}_{239}(L-13) + (9.20 \times 10^{-2} \times 8.65 \times 10^{-1}) \hat{E}_{239}(L-14) + (9.20 \times 10^{-2} \times -5.91 \times 10^{-1}) \hat{E}_{239}(L-15) \end{aligned}$$

En las anteriores ecuaciones se tiene que

$$\hat{E}_{239}(L-j) = \begin{cases} \text{Residuo estructural } \hat{E}_{239+L-j} & \text{si } L-j \leq 0 \\ \text{pronóstico de los ciclo } L-j \text{ períodos después de } t = 239, & \text{si } L-j > 0 \end{cases}$$

$$\hat{a}_{239}(L-i) = \begin{cases} \text{Residuo de ajuste } \hat{a}_{239+L-i} & \text{si } L-i \leq 0 \\ 0, & \text{si } L-i > 0 \end{cases}$$

Por otro lado, se tiene que las medidas de precisión para los pronósticos puntuales de los cuatros modelos están presentes en la **tabla 13**.

Tabla 13. Precisión de los Pronósticos puntuales

| Medidas | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4 | Modelo local de descomposición multiplicativa y <i>loess</i> lineal |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|---|
| RMSE | 0.84 | 0.79 | 1.07 | 0.76 | 0.67 |
| MAE | 0.73 | 0.65 | 0.86 | 0.66 | 0.53 |
| MAPE (%) | 0.63 | 0.56 | 0.75 | 0.56 | 0.44 |
| Amplitud. Media I.P | NA | NA | NA | NA | NA |
| Cobertura (%) I.P | NA | NA | NA | NA | NA |

De la tabla se puede rescatar que los modelos en general presentan resultados aceptables ya que sus medidas de error son bajas, y para cada una de ellas se presentan que el modelo **cuatro** es el que tiene cifras de error más bajas si no tenemos en cuenta las obtenidas por el modelo local, seguidas por el modelo **dos** y el modelo **tres**, en ese orden, y finalmente se tiene al modelo **uno**, que es el que peores indicadores de error presenta. Entonces, tomando al modelo cuatro, que a la luz de estos valores se asume como el mejor modelo, según el RMSE el modelo cuatro se equivocó en promedio en cada pronóstico en 0.76 puntos del índice y según el MAE, se equivoca en promedio en 0.66 puntos del índice de ventas nominales, toda vez que según el MAPE este modelo se equivocó en promedio en cada pronóstico en un 0.56% respecto a cada valor real. Si ponemos a competir al modelo dos con el modelo local en estos términos, el modelo local es el ganador.

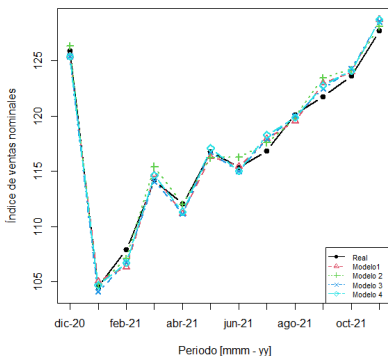


Figura 17. Comparación de los pronósticos.

Se presenta la **figura 17**, en la cual se compara el pronóstico realizado por cada uno de los modelos presentados y en el que se compara con los valores realmente observados del índice de ventas nominales de los meses del periodo *ex post*. En este es claro que todos los modelos realizan unos pronósticos adecuados para cada mes, pues los valores pronosticados se aproximan de forma aceptable a los índices reales. De esta gráfica se destaca al modelo **cuatro**, la cual está en color cian y se puede evidenciar su proximidad con los índices reales, especialmente para los primeros meses del periodo *ex post*.

7. COMPARACIÓN DE LOS MODELOS DE REGRESIÓN CON ERRORES ARMA CONTRA UN MODELO LOCAL DE DESCOMPOSICIÓN MULTIPLICATIVA Y LOESS LINEAL

Previo al planteamiento de los modelos de regresión con errores estructurales ARMA, se plantearon dos modelos globales y dos locales, siendo uno de ellos *Holt-Winters* y el segundo un modelo local de descomposición multiplicativa y *loess* lineal, donde se encontró que este último conseguía unos ajustes y pronósticos aceptables para la serie temporal del índice de ventas nominal. De esta manera, con el objeto de comparar a los modelos planteados en este documento, se va a traer nuevamente a colación al mejor modelo local antes mencionado y contrastarlo con los modelos ARMA. De esta forma, se presenta inicialmente la *figura 18*, en la cual se puede el ajuste realizado por esta gráfica.

Asimismo, se presenta en la *tabla 14* la compilación de los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC) para los cuatro modelos ajustados y el modelo local que está siendo considerado.

Tabla 14. Valores de los criterios de información AIC y BIC.

| Medidas | Modelo local | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4 |
|---------|--------------|----------|----------|----------|----------|
| AIC | 4.24 | 5.18 | 4.38 | 5.29 | 5.30 |
| BIC | 7.27 | 8.75 | 7.29 | 8.19 | 7.63 |

Y como se observa, entre los cuatro modelos de regresión con errores ARMA, el modelo **dos** es el que obtiene el menor **AIC** y **BIC**, por lo que se puede considerar al modelo **dos** como el que mejor ajustes realiza; no obstante, si tiene en cuenta también al modelo de descomposición multiplicativa y *loess* lineal, rotulado en la *tabla XXXX5* como “*modelo local*”, se advierte que este obtiene valores de AIC y BIC ligeramente inferiores al **modelo dos**, por lo que resulta competitivo en cuanto a ajustes se refiere. No obstante, es importante tener presente que cada uno de estos modelos supone que los errores de ajuste son un ruido blanco, de manera que vale la pena ver la *figura 19*, donde se incluyen los gráficos de los residuales del modelo local:

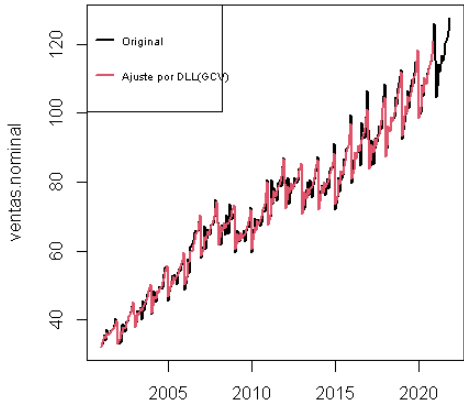


Figura 18. Gráficas de los ajustes del modelo de descomposición multiplicativa y *loess* lineal.

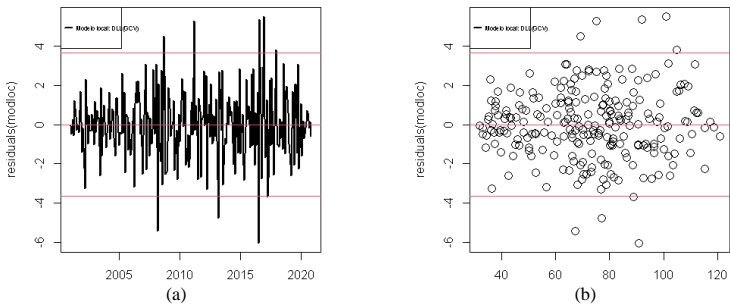


Figura 19: Gráfica Residuales del modelo local. (a) \hat{E}_t vs t ; (b) \hat{E}_t vs \hat{Y} .

Entonces, es posible observar que no existen evidencias gráficas en contra de media constante e igual a cero. De igual forma, tampoco parece que exista evidencia en contra de la homocedasticidad de los errores, y tampoco es evidente a simple vista la existencia de ciclos. Ahora bien, es necesario verificar que los errores estén incorrelacionados mediante sus residuales, y si es el caso, chequear su normalidad. De esta manera, se presenta en la *figura 20* las gráficas de la ACF y la PACF muestrales.

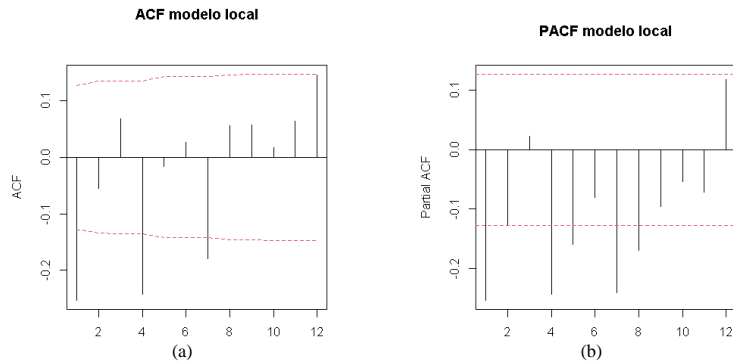


Figura 20. (a) Gráfica ACF sobre residuales de ajuste del modelo local. (b) Gráfica PACF sobre residuales de ajuste del modelo local.

De la **figura 20** se rescata que los patrones de ambas gráficas son tipo corte, lo cual es un aspecto característico de un proceso de ruido blanco, pero se ve en la **figura 20 (a)** que no se cumple que $\rho(k) = \text{Corr}(E_t, E_{t+k}) = 0$ para $k = 1, 4, 6$, hecho que no se puede ignorar ya que se sabe que a los primeros valores de k la prueba es bastante confiable. Similarmente en la **figura 20 (b)**, se evidencia que $\phi_{kk} = \text{Corr}(E_t, E_{t+k} | E_{t+1}, \dots, E_{t+k-1}) \neq 0$ para $k = 1, 4, 7, 8$; esta evidencia es suficiente para rechazar el supuesto de que el error del modelo local es un proceso ruido blanco, y dada la evidencia en contra del supuesto de independencia, no se procede con el test de normalidad para los residuales del modelo local. Es importante tener presente que este hecho imposibilita considerar a este modelo aunque sus medidas de error para los ajustes y los pronósticos sean mejores.

Asimismo, se compararán los pronósticos de los cuatro modelos planteados y el modelo ajustado DLL en la **tabla 15**.

Tabla 15. Pronósticos puntuales y por I.P del 95% de confianza

| Período | Modelo 1 | | | Modelo 2 | | | Modelo 3 | | | Modelo 4 | | | Modelo local de descomposición multiplicativa y loess lineal | | |
|----------|------------|----------|----------|------------|----------|----------|------------|----------|----------|------------|----------|----------|--|----------|----------|
| | Pronóstico | Lim. Inf | Lim. Sup | Pronóstico | Lim. Inf | Lim. Sup | Pronóstico | Lim. Inf | Lim. Sup | Pronóstico | Lim. Inf | Lim. Sup | Pronóstico | Lim. Inf | Lim. Sup |
| 2020 Dic | 125.436 | --- | --- | 126.321 | --- | --- | 125.399 | --- | --- | 125.389 | --- | --- | 124.636 | --- | --- |
| 2021 En | 105.037 | --- | --- | 104.733 | --- | --- | 104.056 | --- | --- | 104.652 | --- | --- | 104.008 | --- | --- |
| 2021 Feb | 106.327 | --- | --- | 107.094 | --- | --- | 106.760 | --- | --- | 106.70 | --- | --- | 107.576 | --- | --- |
| 2021 Mar | 114.673 | --- | --- | 115.413 | --- | --- | 114.062 | --- | --- | 114.645 | --- | --- | 114.089 | --- | --- |
| 2021 Abr | 111.147 | --- | --- | 112.007 | --- | --- | 111.143 | --- | --- | 111.319 | --- | --- | 111.831 | --- | --- |
| 2021 May | 116.313 | --- | --- | 116.233 | --- | --- | 116.726 | --- | --- | 117.096 | --- | --- | 116.674 | --- | --- |
| 2021 Jun | 115.431 | --- | --- | 116.260 | --- | --- | 114.970 | --- | --- | 115.030 | --- | --- | 114.654 | --- | --- |
| 2021 Jul | 117.954 | --- | --- | 117.566 | --- | --- | 117.924 | --- | --- | 118.274 | --- | --- | 117.262 | --- | --- |
| 2021 Ago | 119.546 | --- | --- | 119.848 | --- | --- | 120.038 | --- | --- | 119.841 | --- | --- | 118.653 | --- | --- |
| 2021 Sep | 122.980 | --- | --- | 123.470 | --- | --- | 122.454 | --- | --- | 122.772 | --- | --- | 121.303 | --- | --- |
| 2021 Oct | 123.982 | --- | --- | 124.217 | --- | --- | 124.312 | --- | --- | 124.085 | --- | --- | 123.221 | --- | --- |
| 2021 Nov | 128.741 | --- | --- | 128.107 | --- | --- | 128.541 | --- | --- | 128.705 | --- | --- | 127.196 | --- | --- |

De esta manera, vale la pena interpretar el resultado con algún periodo particular, como lo puede ser el mes de agosto de 2021, para el cual el modelo uno pronostica que el índice de ventas nominales será de 119.546 puntos. Por su parte, el modelo dos pronostica que el índice de ventas nominales de agosto de 2021 será de 119.848, mientras que el modelo tres proyecta que será de 120.038 puntos, mientras el modelo cuatro pronostica que el índice de ventas nominales de agosto de 2021 será de 119.841 puntos. Por último, el modelo local proyecta que el índice de ventas nominales de agosto de 2021 será de 118.653 puntos.

7.1. Conclusiones

Se encuentra que para el modelo global no se cumplía el supuesto de que los errores estructurales provenían de un proceso ruido blanco debido a que los residuos estructurales no tenían media constante y además se encontró que no eran incorrelacionados gracias a las pruebas ACF y PACF, y coherente con esto, la prueba *Ljung-Box* rechazó la hipótesis nula, además, no fue posible realizar la prueba de *Durbin-Watson* ya que esta solo se aplica a modelos que son lineales en su vector de parámetros, lo cual no se corresponde con el modelo global considerado. Sin embargo, se obtuvo que los errores estructurales eran un proceso estacionario. Por todo lo anterior, se procedió a proponer modelos exponencial polinomial de grado seis con componente estacional representada por funciones trigonométricas con errores ARMA, dado que anteriormente se obtuvo una gráfica con patrón tipo cola exponencial sinusoidal en la ACF, hecho que supone no considerar ningún modelo que proponga $p < 2$ y tipo corte en la gráfica PACF con últimos dos valores que corta los límites de rechazo en $k = 19$. Así, se consideró pertinente postular un modelo AR(19) para los errores estructurales debido a la probabilidad de cometer error tipo I a mayor k en dicha prueba. Ahora bien, gracias a los resultados de la gráfica EACF se postuló un modelo ARMA(7,11), luego, se empleó la herramienta de identificación automática con la función `auto.arima()` que arrojó como propuesta un modelo ARMA(1, 2)(0, 2)[12] y otros modelos AR(p), los cuales no fueron tenidos en cuenta debido a la condición que ya se había impuesto respecto a que p debe ser mayor o igual a dos. Más tarde, algo similar sucedió con la función `SelectModel()`, ya que se prefirió seguir las evidencias gráficas de la PACF para definir p ; por tanto el modelo tres se definió tal y como se indica en la

guía de trabajo. Por último, se postuló al modelo cuatro como un ARMA(12, 10), donde solo se incluyeron los parámetros $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_7, \phi_{12}, \theta_4, \theta_9$ y θ_{10} usando `armasubsets()`.

Hablando en términos de ajuste, el modelo con valores más pequeños en los criterios de información AIC y BIC es el **modelo dos** seguido por el modelo cuatro con el segundo valor más pequeño en BIC; en términos de cumplimiento de supuestos el mejor modelo es el **modelo dos**, siendo lo único reprochable de dicho modelo que en el gráfico Q-Q plot se ve evidencia que hacia el final trata de desviarse un poco de la línea recta pero rápidamente vuelve a direccionarse sobre la recta de cuantiles teóricos, lo que se considera un patrón aceptable, además de algunos datos atípicos para los cuales resulta pertinente ignorar para aceptar el supuesto de que los residuos de ajuste provienen de un $R. B \sim N(0, \sigma_a^2)$. Adicionalmente, en términos de pronóstico, se halló con ayuda de las medidas de error que los mejores modelos son el **dos** y el **cuatro**, dado que ambos empatan en el MAPE, el dos cuenta con menor MAPE y el cuatro con menor RMSE, si bien las diferencias son de dos y una centésima para cada medida respectivamente.

Después de todos los análisis pertinentes, postula al **modelo dos** como el mejor modelo en general. Ahora bien, resulta interesante comparar este modelo con el mejor modelo local que obtuvo en el trabajo número uno, el cual fue el filtro descomposición combinado con loess lineal, usando criterio GCV para escoger parámetro suavizamiento loess, ya que teniendo las herramientas para identificar la incorrelación de los errores estructurales de dicho modelo, se encuentra que los errores estructurales no son incorrelacionados, y por ello en términos de cumplimiento de supuestos el ganador sigue siendo el modelo **dos**, dejando así en segundo plano que los valores de los criterios de información obtenidos por este modelo lo hacían el mejor en términos de ajuste aunque con una pequeña diferencia, de igual forma que como lo había hecho en términos de predicción obteniendo los menos valores en RMSE, MAE y MAPE. De este modo, como siempre se tiene como prioridad el cumplimiento de los supuestos, se llegamos a la conclusión de que el mejor modelo para la serie de tiempo de ventas nominales es un modelo exponencial polinomial de grado seis con componente estacional representada por funciones trigonométricas y errores ARMA(7, 11), el cual tiene la desventaja que no es parsimonioso, en tanto este modelo cuenta con 37 parámetros, de tal suerte que resultaría interesante indagar algún método que permita proponer algún modelo más parsimonioso y cuyos supuestos se cumplan.