

### 3. AJUSTE DE MODELOS CON VALIDACIÓN CRUZADA

Se considerarán cuatro modelos SARIMA: ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12], ARIMA(4,1,0)(1,1,2)[12], ARIMA(6,1,10)(0,1,1)[12] y ARIMA(9,1,10)(0,1,1)[12]. Así, para poder realizar el ajuste de los cuatro modelos anteriores van a ser consideradas las primeras  $n = 239$  observaciones, mientras, de manera que las últimas  $m = 12$  van a ser consideradas para el periodo *out of sample* para poder realizar validación cruzada de los ajustes realizados y poder apoyar el proceso de selección del mejor modelo. En este sentido, primeamente, se presentan la ecuación de los modelos propuestos en la **tabla 3**.

**Tabla 3:** Ecuaciones teóricas de los modelos propuestos.

Modelo 1. ARIMA(2, 1, 0)(0, 1, 2)[12]
$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B)(1 - B^{12}) \log Y_t = (1 + \Theta_1 B^{12} + \Theta_2 B^{24}) E_t, \text{ con } E_t \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2)$
Modelo 2. ARIMA(4, 1, 0)(1, 1, 2)[12]
$(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \Phi_3 B^3 - \Phi_4 B^4)(1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24})(1 - B)(1 - B^{12}) \log Y_t = (1 + \Theta_1 B^{12} + \Theta_2 B^{24}) E_t, \text{ con } E_t \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2)$
Modelo 3. ARIMA(6, 1, 10)(0, 1, 1)[12]
$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_6 B^6)(1 - B)(1 - B^{12}) \log Y_t = (1 + \Theta_1 B^{10})(1 + \Theta_2 B^{12}) E_t, \text{ con } E_t \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2)$
Modelo 4. ARIMA(9, 1, 10)(0, 1, 1)[12]
$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_9 B^9)(1 - B)(1 - B^{12}) \log Y_t = (1 + \Theta_1 B^{10})(1 + \Theta_2 B^{12}) E_t, \text{ con } E_t \text{ un R. B. } \sim N(0, \sigma^2)$

Así, es importante realizar la evaluación de la significancia estadística de los parámetros ajustados para cada uno de los modelos, para lo cual es útil valerse de la **tabla 4**.

**Tabla 4:** Parámetros estimados modelos SARIMA

Tabla 4a. Parámetros estimados en Modelo 1				
Parámetros	Estimación	Error Std	Z <sub>0</sub>	P( Z  >  Z <sub>0</sub>  )
$\phi_1$	-0.721755	0.063428	-11.3791	< 2.2×10 <sup>-16</sup>
$\phi_2$	-0.332388	0.063474	-5.2366	1.636×10 <sup>-7</sup>
$\Theta_1$	-0.784245	0.082040	-9.5593	< 2.2×10 <sup>-16</sup>
$\Theta_2$	-0.125373	0.086879	-1.4431	0.149
AIC= 5.514306, BIC= 5.844665				

Tabla 4b. Parámetros estimados en Modelo 2				
Parámetros	Estimación	Error Std	Z <sub>0</sub>	P( Z  >  Z <sub>0</sub>  )
$\phi_1$	-0.684906	0.067280	-10.1799	< 2.2×10 <sup>-16</sup>
$\phi_2$	-0.292794	0.081324	-3.6003	0.0003178
$\phi_3$	0.023450	0.081146	0.2890	0.7725958
$\phi_4$	-0.069487	0.066520	-1.0446	0.2962056
$\Phi_1$	-0.668689	0.264019	-2.5327	0.0113177
$\Phi_2$	-0.091140	0.248068	-0.3674	0.7133203
$\Theta_2$	-0.704732	0.192679	-3.6575	0.0002546
AIC= 5.644018, BIC= 6.248974				

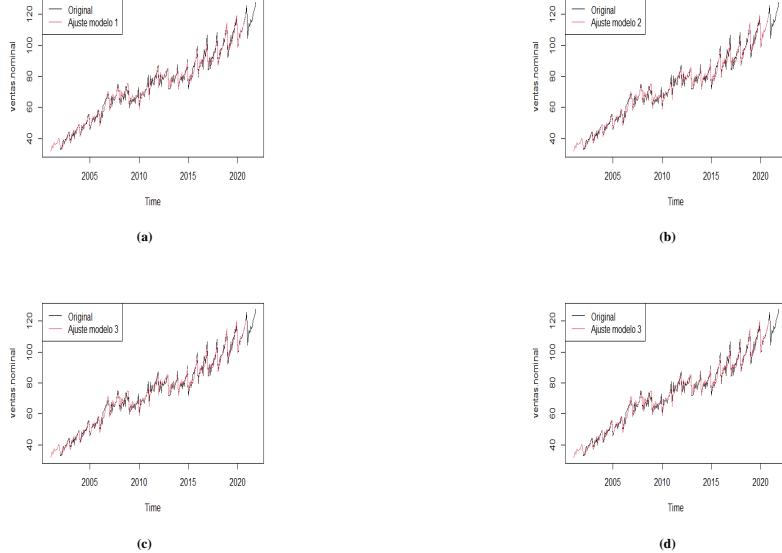
Tabla 4c. Parámetros estimados en Modelo 3				
Parámetros	Estimación	Error Std	Z <sub>0</sub>	P( Z  >  Z <sub>0</sub>  )
$\phi_1$	-0.742123	0.062208	-11.9298	< 2.2×10 <sup>-16</sup>
$\phi_2$	-0.344376	0.064892	-5.3069	1.115×10 <sup>-7</sup>
$\Phi_6$	0.099804	0.054453	1.8329	0.06682
$\Theta_{10}$	0.079693	0.069183	1.1519	0.24936
$\Theta_1$	-0.860131	0.056870	-15.1245	< 2.2×10 <sup>-16</sup>
AIC= 5.622459, BIC= 6.046614				

Tabla 4d. Parámetros estimados en Modelo 4				
Parámetros	Estimación	Error Std	Z <sub>0</sub>	P( Z  >  Z <sub>0</sub>  )
$\phi_1$	-0.757956	0.061594	-12.3056	< 2.2×10 <sup>-16</sup>
$\phi_2$	-0.367751	0.063044	-5.8333	5.436×10 <sup>-9</sup>
$\Phi_9$	0.120641	0.066607	1.8112	0.07010
$\Theta_{10}$	0.154306	0.087548	1.7625	0.07798
$\Theta_1$	-0.849464	0.054735	-15.5196	< 2.2×10 <sup>-16</sup>
AIC= 5.588376, BIC= 6.009960				

Entonces, teniendo en cuenta los valores  $p$  mostrados en quinta columna de las tablas 4a, 4b, 4c y 4d, se puede determinar la significancia estadística de cada uno de los parámetros de interés. Así pues, usando una significancia de 5%, en el modelo 1, todos los parámetros son significativos excepto  $\Theta_2$ ; en el modelo 2, todos los parámetros son significativos excepto  $\phi_3$ ,  $\phi_4$  y  $\Theta_1$ ; en el modelo 3, solo  $\phi_6$  y  $\Theta_{10}$  son no significativos y por último en el modelo 4, solo  $\phi_9$  y  $\Theta_{10}$  son no significativos.

Por otro lado, vale la pena observar la **figura 7**, en la cual se observa cómo es el ajuste de cada uno de los modelos comparado con la serie temporal. De las gráficas de ajuste se observa que al modelar  $\log(Y_t)$  se logra seguir la componente cíclica en todos los modelos SARIMA. Gráficamente no se logra identificar cuál modelo tiene mejor ajuste porque todas parecen tener el mismo patrón. Además, se puede observar la presencia de datos atípicos que no se logran explicar por ningún modelo, esto debido que son observaciones que se comportan diferente, sin embargo, según las medidas de ajuste AIC y BIC, los modelos con mejor ajuste son el modelo 1 ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12] y el modelo 4 ARIMA(9,1,10)(0,1,1)[12], siendo mejor el modelo 1 que tiene menor AIC y BIC.

**Commented [SCR1]:** ¿Es necesario cambiar el valor de los coeficientes por los presentados en la salidas de **R**? O se debe dejar así tal cual, indicado?

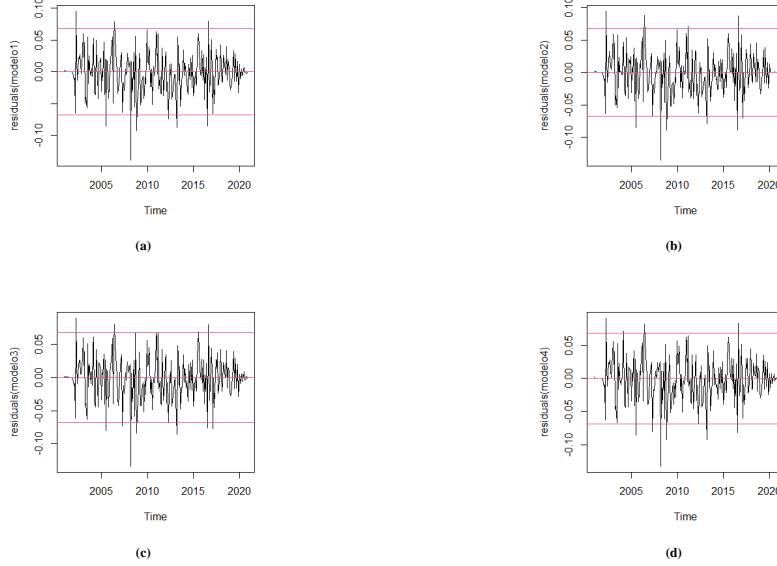


**Figura 7.** Graficas con ayuda de **R** de la serie original (en negro) y la serie ajustada (en rojo) para cada uno de los modelos, a saber: **(a)** modelo uno: ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12], **(b)** modelo dos: ARIMA(4, 1, 0)(1,1,2)[12], **(c)** modelo tres: ARIMA(6, 1, 10)(0, 1, 1)[12] y **(d)** modelo cuatro: ARIMA(9, 1, 10)(0, 1, 1)[12]

## 1. ANÁLISIS DE RESIDUALES Y VALIDACIÓN DE SUPUESTOS

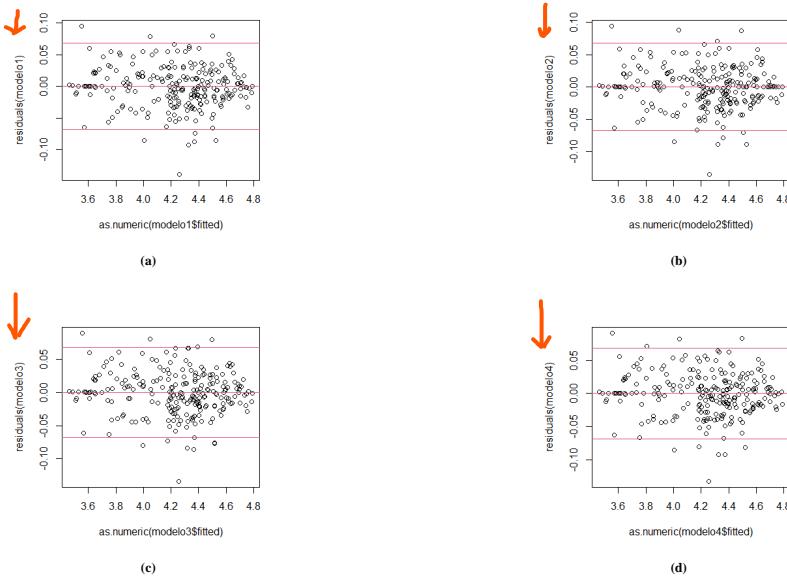
Ahora bien, se debe tener en cuenta que para el planteamiento de cada uno de los modelos se partieron de varios supuestos sobre  $E_t$  implícitos al suponer que estos son un ruido blanco, los cuales son: media cero, varianza constante y ausencia de patrones contrarios a la independencia y la distribución normal. No obstante, teniendo en cuenta que estos no son conocidos, para poder validar los supuestos se va a realizar esta revisión mediante los residuales, que son los estimadores de  $E_t$ , para lo cual se tiene la *figura 8*, en la que se pueden visualizar a los residuales contra el tiempo, y en la *figura 9*, los residuales contra los valores ajustados de cada modelo.

Así pues, vale la pena comenzar evaluando si se cumple el supuesto de media cero y varianza constante para cada modelo, y al revisar cada uno de los gráficos se valida que ninguna aporta evidencia en contra de los supuestos de homocedasticidad y media constante en cero, y tampoco se detecta que hayan patrones contrarios a la independencia mediante estos gráficos como ciclos o rachas de signos positivos y negativos.



**Figura 8.** Graficas hechas con ayuda de **R** de los residuales contra el tiempo para cada modelo, a saber: **(a)** modelo uno: ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12], **(b)** modelo dos: ARIMA(4,1,0)(1,1,2)[12], **(c)** modelo tres: ARIMA(6,1,10)(0,1,1)[12] y **(d)** modelo cuatro: ARIMA(9,1,10)(0,1,1)[12]. Nótese las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo. En el medio se marca el residual nulo y las otras dos correspondes a las delimitaciones del positivo y el negativo del doble de la varianza de los residuales asociados con cada modelo.

### Nombres de los ejes



 La leyenda debe estar al pie de la figura y no separada en páginas diferentes

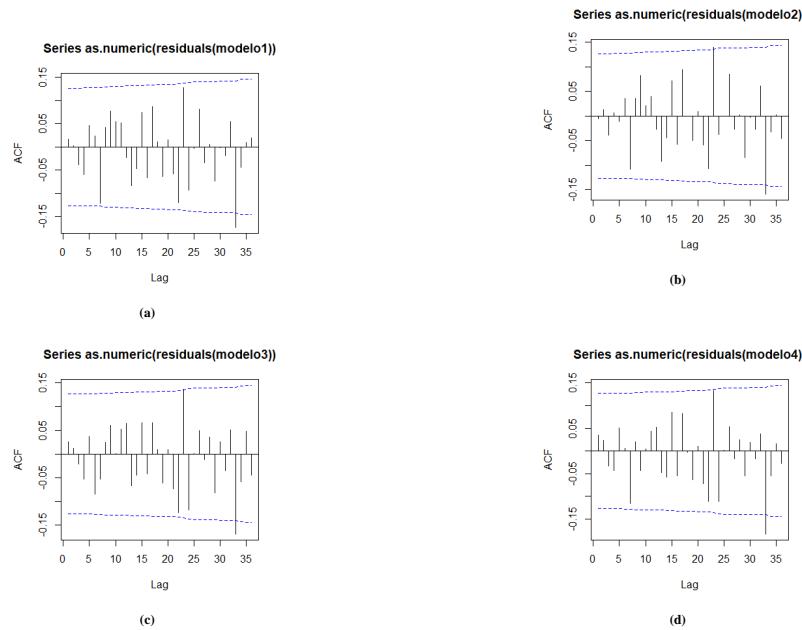
**Figura 9.** Graficas hechas con ayuda de **R** de los residuales contra el índice nominal de ventas para cada modelo, a saber: (a) modelo uno: ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12], (b) modelo dos: ARIMA(4,1,0)(1,1,2)[12], (c) modelo tres: ARIMA(6,1,10)(0,1,1)[12] y (d) modelo cuatro: ARIMA(9,1,10)(0,1,1)[12]. Nótese las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo. En el medio se marca el residual nulo y las otras dos corresponden a las delimitaciones del positivo y el negativo del doble de la varianza de los residuales asociados con cada modelo.

Asimismo, es necesario evaluar las gráficas del ACF y PACF para cada uno de los modelos en la *figura 10*, donde las hipótesis a contrastar en la **ACF** son:

$$H_0: \rho(k) = \text{Corr}(E_t, E_{t+k}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, 36$$

vs.

$$H_1: \rho(k) = \text{Corr}(E_t, E_{t+k}) \neq 0, k = 1, 2, \dots, 36$$



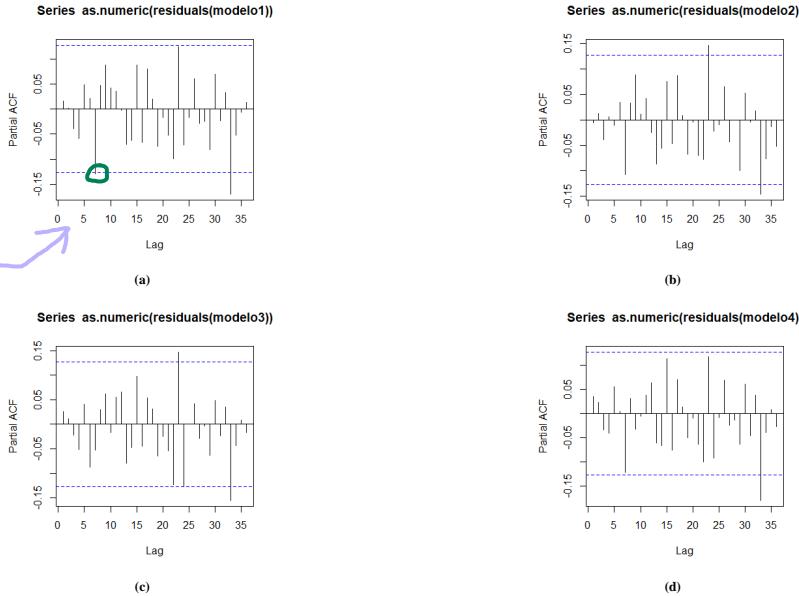
**Figura 10.** Graficas hechas con ayuda de **R** de las funciones de autocorrelación, **ACF**, estimadas para cada modelo, a saber: (a) modelo uno: ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12], (b) modelo dos: ARIMA(4,1,0)(1,1,2)[12], (c) modelo tres: ARIMA(6,1,10)(0,1,1)[12] y (d) modelo cuatro: ARIMA(9,1,10)(0,1,1)[12]. Nótese las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo, las cuales corresponden a los límites de *Bartlett* para evaluar gráficamente la significancia de la ACF para cada rezago (graficados en el eje de las abscisas).

Y de igual forma, se presentan las gráficas de autocorrelación parcial, PACF, de cada uno de los modelos en la *figura 11*, donde las hipótesis a contrastar en la **PACF** es:

$$H_0: \phi_{kk} = \text{Corr}(E_t, E_{t+k} | E_{t+1}, \dots, E_{t+k-1}) = 0, k = 1, 2, \dots, 36$$

vs.

$$H_1: \phi_{kk} = \text{Corr}(E_t, E_{t+k} | E_{t+1}, \dots, E_{t+k-1}) \neq 0, k = 1, 2, \dots, 36$$



**Figura 11.** Graficas hechas con ayuda de **R** de las funciones de autocorrelación parciales, PACF, estimadas para cada modelo, a saber: (a) modelo uno: ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12], (b) modelo dos: ARIMA(4,1,0)(1,1,2)[12], (c) modelo tres: ARIMA(6,1,10)(0,1,1)[12] y (d) modelo cuatro: ARIMA(9,1,10)(0,1,1)[12]. Nótense las líneas rojas horizontales presentes en cada modelo, las cuales corresponden a los límites de *Bartlett* para evaluar gráficamente la significancia de la PACF para cada rezago (graficados en el eje de las abscisas).

De las anteriores gráficas de ACF y PACF, se puede observar que en **ninguno de los modelos se rechaza el supuesto de ruido blanco sobre el proceso asociado al  $E_t$** , ya que **ninguno** de estos superan las líneas azules, que son los límites de *Bartlett* para rezagos **pequeños**, para valores pequeños de rezagos, si bien esto sí sucede para rezagos mayores, pero que pueden ser descartados teniendo presente que la probabilidad de cometer error tipo I aumenta con el valor del rezago.

De la misma forma, se recurre a las pruebas Ljung-Box, cuyos resultados son presentados en la **tabla 5** para evaluar el supuesto de ruido blanco sobre  $E_t$ , de manera que, considerando  $\rho(k) = \text{Corr}(E_t, E_{t+k})$ , se tiene que las hipótesis son:

$$H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(m) = 0$$

vs.

$$H_1: \rho(k) \neq 0, \text{ para algún } k = 1, 2, \dots, m$$

Y se tiene que el estadístico de prueba es  $Q_{LB} = 239 \times 241 \sum_{k=1}^m \frac{[\hat{\rho}(k)]^2}{239-k} \sim \chi_m^2$  y que tiene como criterio de rechazo que el valor  $P_{lb} V_p = P(\chi_m^2 \geq Q_{LB})$  sea pequeño. Con esto claro, se debe tener presente que se va a realizar seis veces este test conjunto para  $m = 6, 12, 18, 24, 30, 36$ .

Así pues, usando un nivel de significancia de 5%, se tiene a la luz de los resultados que en ningún escenario se rechaza la hipótesis nula, por lo que hay evidencia muestral suficiente para sugerir que  $E_t$  son incorrelacionados.

**Tabla 5.** Test de *Ljung-Box* para  $E_t$  para los modelos uno, dos, tres y cuatro con  $\rho(k) = \text{Corr}(E_t, E_{t+k})$ .

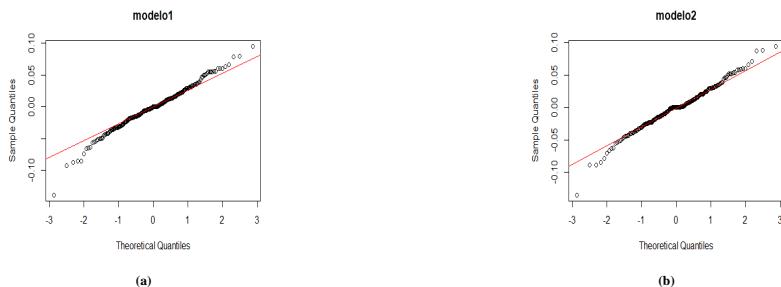
$H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(m) = 0$  vs.  $H_1: \exists k: \rho(k) \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$

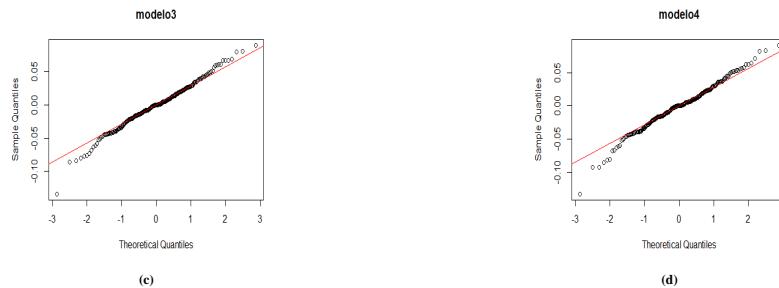
Tabla 10a. Modelo uno.				Tabla 10b. Modelo dos.			
m	Q <sub>LB</sub>	Grados de libertad	P( $\chi^2 > Q_{LB}$ )	m	Q <sub>LB</sub>	Grados de libertad	P( $\chi^2 > Q_{LB}$ )
6	1.982275	6	0.9213216	6	0.7928482	6	0.9922641
12	9.194579	12	0.6862271	12	6.3790678	12	0.8957813
18	16.002607	18	0.5923654	18	13.5704190	18	0.7566350
24	28.494640	24	0.2397309	24	23.8393628	24	0.4708133
30	32.057837	30	0.3648423	30	27.9345550	30	0.5739049
36	42.033452	36	0.2258933	36	37.1007297	36	0.4180456

Tabla 10c. Modelo tres.				Tabla 10d. Modelo cuatro.			
m	Q <sub>LB</sub>	Grados de libertad	P( $\chi^2 > Q_{LB}$ )	m	Q <sub>LB</sub>	Grados de libertad	P( $\chi^2 > Q_{LB}$ )
6	3.137233	6	0.7914361	6	1.788685	6	0.9380714
12	6.694835	12	0.8771039	12	6.832079	12	0.8685080
18	11.050634	18	0.8921956	18	12.671327	18	0.8107167
24	26.252068	24	0.3405000	24	26.435448	24	0.3314466
30	29.341449	30	0.4997173	30	28.376683	30	0.5504829
36	40.612890	36	0.2742943	36	39.258612	36	0.3259529

Por último, sobre la normalidad de  $E_t$ , donde se quiere contrastar las siguientes hipótesis:  $H_0: \{E_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$  se distribuye normal vs  $H_1: E_{t \in \mathbb{Z}^+}$  no se distribuye normal, se puede observar que en los tests de Shapiro-Wilk en la **tabla 5**, todas las pruebas se rechazan la normalidad usando una significancia de 5%, además, en los gráficos de normalidad de la **figura 12**, se puede observar que los residuos de los modelos **uno, dos y cuatro** se da un alejamiento de las colas, lo que indica que la distribución real de los errores podría ser alguna que tenga mayor probabilidad de valores atípicos en comparación con una distribución normal. Por otro lado, en el modelo **tres**, se observa que sus residuales presentan un mejor ajuste para ambas colas, de manera que se concluye que los modelos **uno, dos y cuatro** tienen errores de ajuste que no se distribuyen normal, mientras que los errores de ajuste del **modelo tres** sí se distribuyen normal.





**Figura 12.** Tests de Shapiro-Wilks para verificar normalidad de los  $E_t$  para los modelos uno, dos, tres y cuatro.

**Tabla 5.** Tests de Shapiro-Wilks para verificar normalidad de los  $E_t$  para los modelos uno, dos, tres y cuatro

Modelo	Errores estructurales	Estadístico W	Valor p	Validez R.B.	Validez normalidad
Uno	ARIMA(2,1,0)(0,1,2)[12]	0.98552	0.01577	Sí	No
Dos	ARIMA(4,1,0)(1,1,2)[12]	0.98415	0.009155	Sí	No
Tres	ARIMA(6,1,10)(0,1,1)[12]	0.98811	0.04529	Sí	Sí
Cuatro	ARIMA(9,1,10)(0,1,1)[12]	0.98572	0.01711	Sí	No

De esta manera se concluye que el mejor modelo

De esta manera, se concluye que el mejor modelo es el tres, dado que cumple con todos los supuestos sobre los errores de ajuste, ya que estos son independientes e idénticamente distribuidos como una normal con media nula y varianza constante.

## Espacio.