Outlines

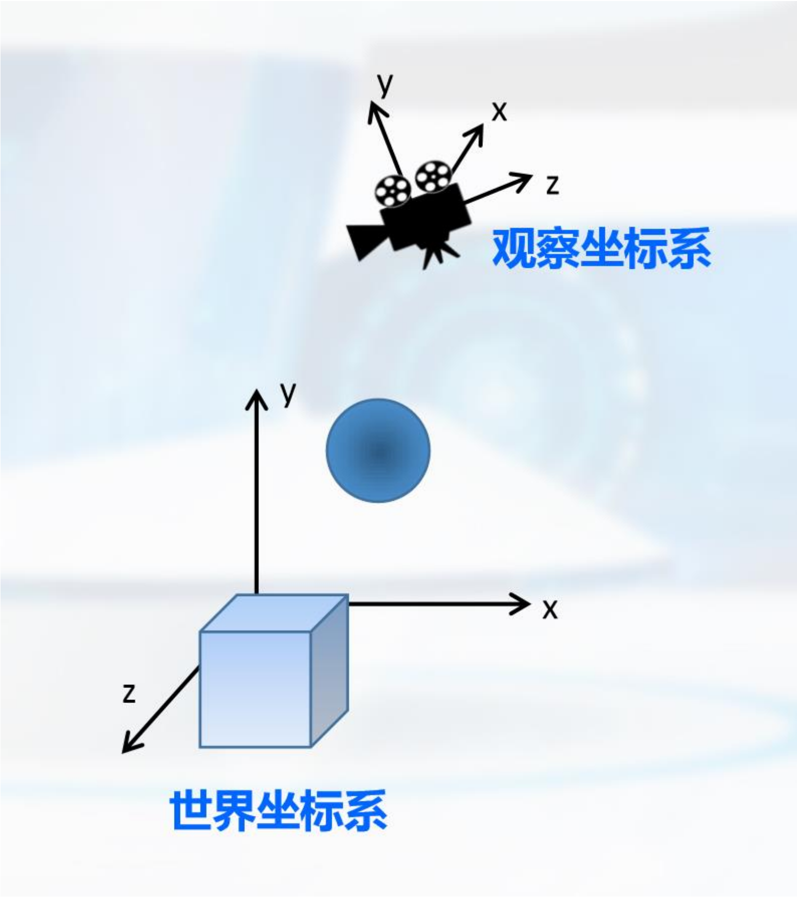
- Translation平移， Rotation旋转， Scaling缩放
- Homogeneous Coordinates齐次坐标表示
- Reflection对称/反射、Shear错切

- Composite Transformation组合变换(复合变换)

- 3D Geometric Transformation三维几何变换

图形动起来?

- 物体运动
- 相机运动

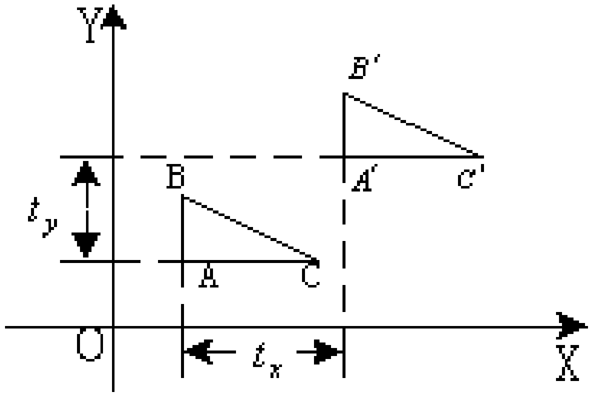


Geometric Transformation

- 主要的五种标准/基本的几何变换：演示“图形变换白云.EXE”

- 几何变换：改变几何对象的位置、方向或大小的操作
  - translation平移~ Position
  - scaling缩放~ Size
  - rotation旋转~ Orientation
  - reflection反射~ Position
  - shear错切~ Shapes

Translation



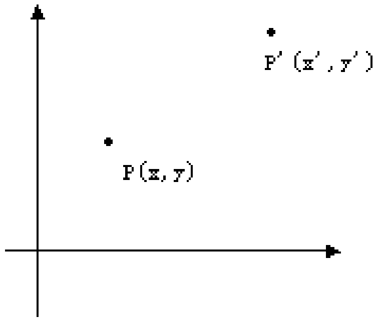
平移示意图

◆平移：物体沿直线路径从一个位置移到另一位置的重定位。

◆**刚体变换**：变换前后，物体的大小、形状都没有变。

➢**P’ = P+T ；　　T为平移变换距阵**

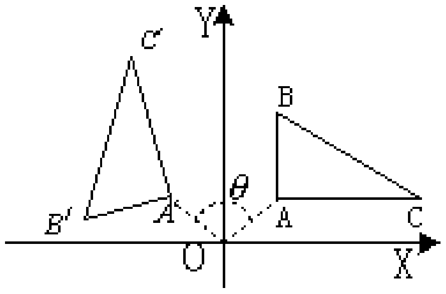
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$



➢ $x' = x + t_x$

➢ $y' = y + t_y$

标准Rotation

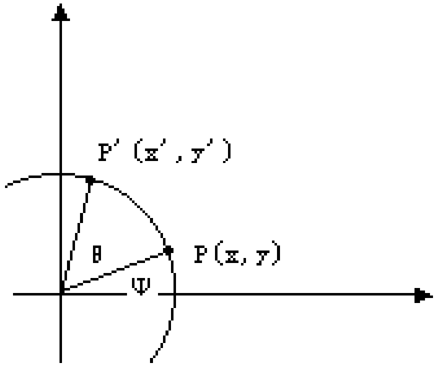


相对原点旋转 θ角

- **标准旋转：物体相对于坐标原点的旋转**
- **刚体变换：大小，形状没有改变**
- **旋转的方向：**
  - **正旋转：物体绕基准点逆时针旋转**
  - **负旋转：物体绕基准点顺时针旋转**

➢P' = RP ，R为旋转变换距阵

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



➢ $x' = r\cos(\theta+\Psi) = r\cos\theta\cos\Psi - r\sin\theta\sin\Psi$

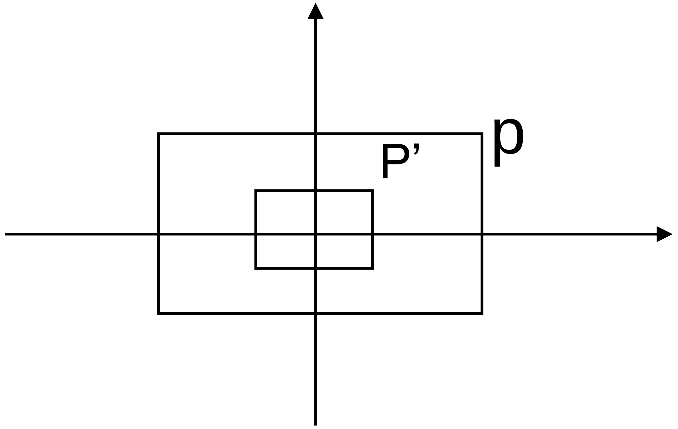
$= x\cos\theta - y\sin\theta$

➢ $y' = r\sin(\theta+\Psi) = r\sin\theta\cos\Psi + r\cos\theta\sin\Psi$

$= x\sin\theta + y\cos\theta$

注意：有$x = r\cos\Psi$， $y = r\sin\Psi$**代入得到。**

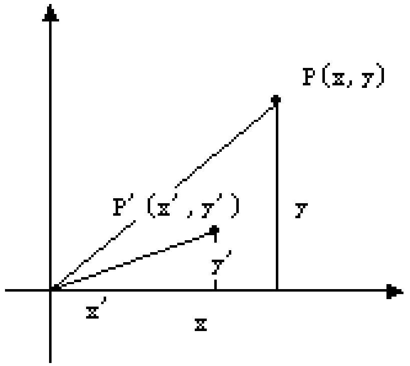
标准Scaling



- 标准的缩放：相对于原点，依X轴，Y轴进行的缩放
- 非刚体变换：物体形状发生改变
- 缩放因子：缩放系数s_x和s_y可为任意正实数。
  - 当二者相同时，等比缩放；
  - 当缩放因子小于1时，物体缩小，大于1时，物体放大。

➢ **P’ = S*P ； S为缩放变换距阵**

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



➢ $x' = x*s_x$

➢ $y' = y*s_y$

Outlines

- Translation**平移**，**R**otation**旋转**，**S**caling**缩放**
- **Homogeneous Coordinates齐次坐标表示**
- Reflection对称/反射、Shear错切

- Composite Transformation组合变换

- 3D Geometric Transformation三维几何变换

一般变换形式

- 可以把标准和非标准的单个基本变换（平移、旋转和缩放），统一表示为如下计算形式：

  $P_1 = M_1 \cdot P + M_2$　　（平移的时候M_1是单位矩阵I）

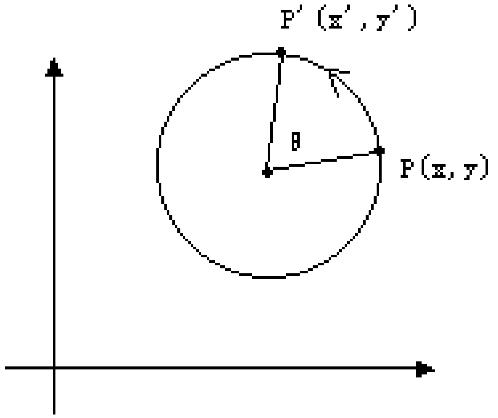
- 在实际应用中，一个复杂变换可能包含多个基本变换（平移，旋转和缩放），若采用如上计算形式，每一步包含乘法和加法：

$$
\begin{cases}
P_2 = M_1^1 \cdot P_1 + M_2^1 \\
P_3 = M_1^2 \cdot P_2 + M_2^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_n = M_1^n \cdot P_{n-1} + M_2^n
\end{cases}
$$

考虑：只包含一种乘法运算的计算形式?

任意参考点的旋转

P' = R*P+M　；参考点非原点的旋转

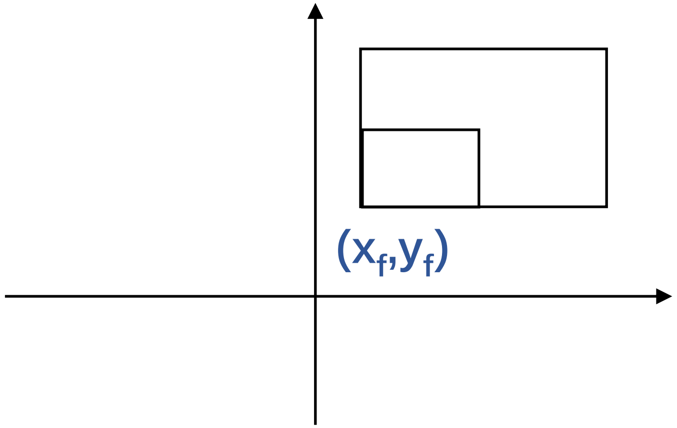


- $x' - x_r = (x-x_r)\cos\theta - (y-y_r)\sin\theta$
- $y' - y_r = (x-x_r)\sin\theta + (y-y_r)\cos\theta$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} x_r - x_r\cos\theta + y_r\sin\theta \\ y_r - x_r\sin\theta - y_r\cos\theta \end{bmatrix}$$

任意参考点的缩放

- **P’ = S*P +M ； 参考点是非原点的缩放**



- $x' - x_f = (x - x_f)s_x$
- $y' - y_f = (y - y_f)s_y$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} x_f - x_f * s_x \\ y_f - y_f * s_y \end{bmatrix}$$

Homogeneous Coordinate齐次坐标

- ◆提出者：Maxwell.E.A在1946年从几何的角度提出来的
- ◆基本思想：把一个n维空间的几何问题转换到n+1维空间中去，
- ◆形式上：用一个n+1维的向量表示一个n维向量的方法。
  - ➢**笛卡尔坐标(x , y)，**
  - ➢**齐次坐标(h*x ，h*y ，h)　　　(h≠0的任意实数)**
  - ➢**规格化齐次坐标（x, y, 1)　　　（h=1)**

- ◆**转换关系：x= xh/h ， y=yh/h**
  - ◆实例：(20,15,5) ，(16,12,4) ，(4,3,1)对应的笛卡尔坐标是
  - ◆ （ 4， 3 ）

用齐次坐标表示平移变换

$$P' = T(t_x , t_y)P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

用齐次坐标表示标准旋转变换

P’ = R(θ)P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

用齐次坐标表示标准缩放变换

$P' = S(s_x, s_y)P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

用齐次坐标表示变换的形式

$$
\begin{cases}
P_2 = M_1^1 \cdot P_1 + M_2^1 \\
P_3 = M_1^2 \cdot P_2 + M_2^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_n = M_1^n \cdot P_{n-1} + M_2^n
\end{cases}
$$

用齐次坐标表示

$$
\begin{cases}
P_2 = M_1 P_1 \\
P_3 = M_2 P_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_n = M_n P_{n-1}
\end{cases}
$$

$$P_n = M_{n-1} * \cdots * M_2 * M_1 * P_1 \quad = \quad M * \underline{P_1}$$

复杂变换表示成：多个标准矩阵的乘法，去掉了原来的加法运算

Outlines

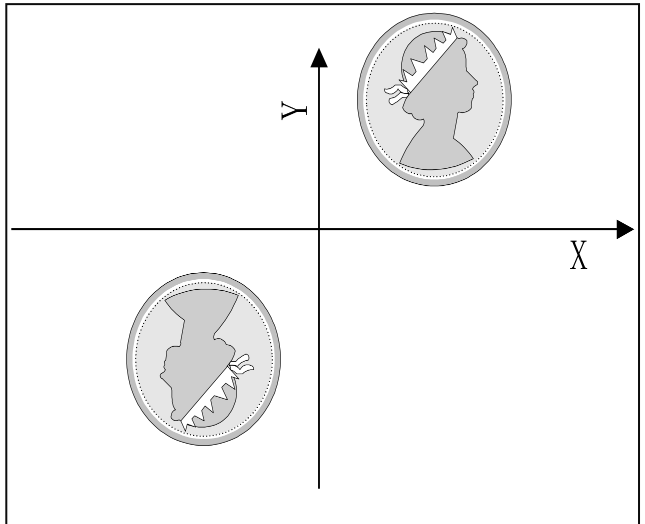
- Translation**平移**，**R**otation**旋转**，**S**caling**缩放**
- **Homogeneous Coordinates齐次坐标表示**

- **Reflection对称/反射、Shear错切**

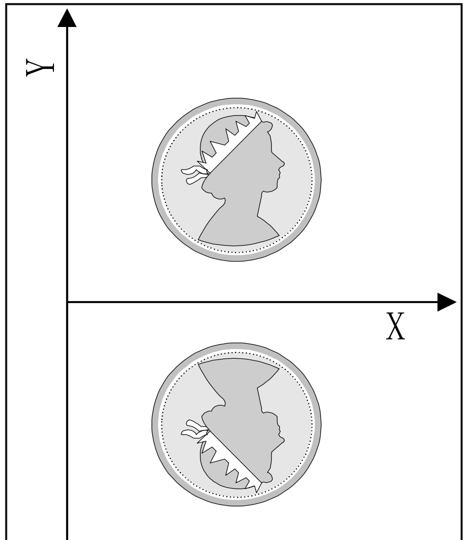
- Composite Transformation组合变换
- 3D Geometric Transformation三维几何变换

Reflection~对称/反射变换

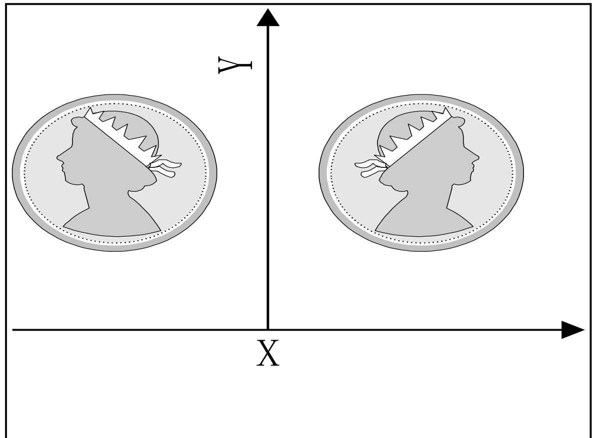
对称变换后：图形是原图形关于原点，某轴线的镜像。



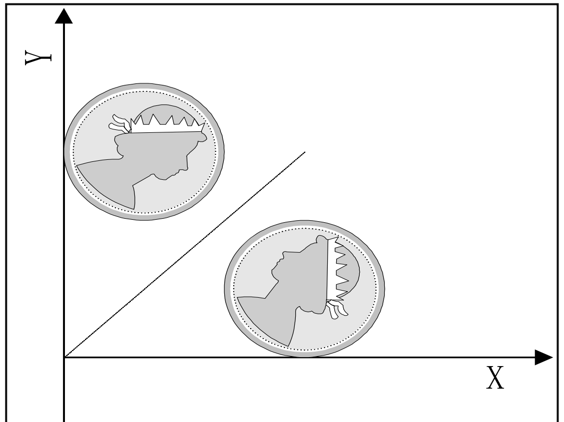
(c)关于原点对称



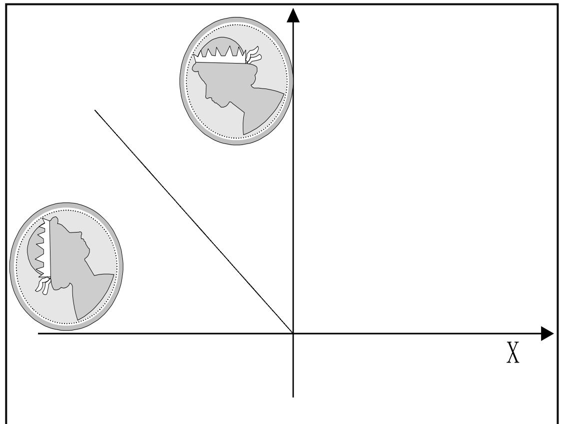
(a)关于x轴对称



(b)关于y轴对称



(d)关于x=y对称



(e)关于x=-y对称

课堂练习1：用齐次坐标表示简单反射变换

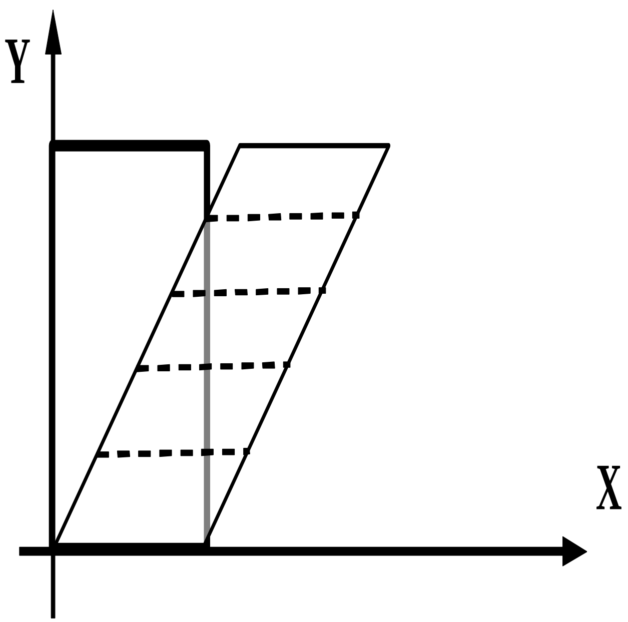
- 反射是产生物体的镜像的一种变换

1. 关于x轴的反射。
2. 关于y轴的反射。
3. 关于y=x直线的反射。
4. 关于y=-x直线的反射 .
5. 关于坐标原点的反射。

要求：推导其变换矩阵，用齐次坐标表示。

2D Shear错切

- 依赖轴：坐标保持不变的轴
- 方向轴：坐标关于依赖轴坐标呈线性变化的轴



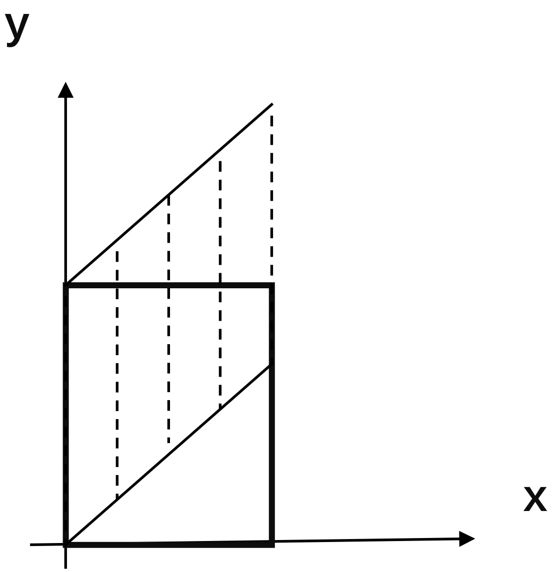
x依y轴的错切：

- $x' = x + sh_x \cdot y$
- $y' = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2D Shear错切

- 依赖轴：坐标保持不变的轴
- 方向轴：坐标关于依赖轴坐标呈线性变化的轴



Y方向上，依赖X轴的错切变换

- $x_1 = x$
- $y_1 = y + sh_y \cdot x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outlines

- Translation平移，Rotation旋转，Scaling缩放
- **Homogeneous Coordinates齐次坐标表示**
- **Reflection对称/反射、Shear错切**

- **Composite Transformation组合变换**
- 3D Geometric Transformation三维几何变换

Inverse 逆变换

标准平移变换的逆变换：

已知： $T=T(tx,ty)$, $T*T^{-1}=I$,

求逆： $T(tx,ty),^{-1}=T(-tx,-ty)$

标准旋转变换的逆变换：

已知： $R=R(\theta)$, $R*R^{-1}=I$,

求逆： $R(\theta)^{-1}=R(-\theta)$, 而且$R^{-1}=R^T$

标准缩放变换的逆变换

已知： $S=S(sx,sy)$, $S*S^{-1}=I$,

求逆： $S(sx,sy)^{-1}=S(1/sx, 1/sy)$

Composite Transformations

- 可将多个的变换按顺序写出的变换距阵乘在一起建立为组合变换距阵。
- 如对图形P先做标准平移，再做标准旋转，再做标准缩放，原来计算顺序是

$P'=M_1P$，

$P''=M_2P'$

$P'''=M_3P''$

现在先计算组合变换矩阵后再对图形变换

$P'''=MP$， 组合变换矩阵$M=M_3M_2M_1$

Composite Translation连续平移

$P' = T(t_{x2}, t_{y2})[T(t_{x1}, t_{y1})P] = [T(t_{x2}, t_{y2})\, T(t_{x1}, t_{y1})]\, P$

prove： $T(t_{x2}, t_{y2}) * T(t_{x1}, t_{y1}) = T(t_{x2} + t_{x1}, t_{y2} + t_{y1})$

so： $P' = T(t_{x2}, t_{y2})[T(t_{x1}, t_{y1})P] = T(t_{x2} + t_{x1}, t_{y2} + t_{y1})\, P$

连续平移：参数相加

Composite Rotation连续旋转

$$P' = R(\theta_2)[\, R(\theta_1)P] = [R(\theta_2)R(\theta_1)]P$$

prove： $R(\theta_2) * R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$

so： $P' = R(\theta 2)R(\theta 1)P = R(\theta 1+\theta 2)\, P$

连续旋转：参数相加

Composite Scaling连续缩放

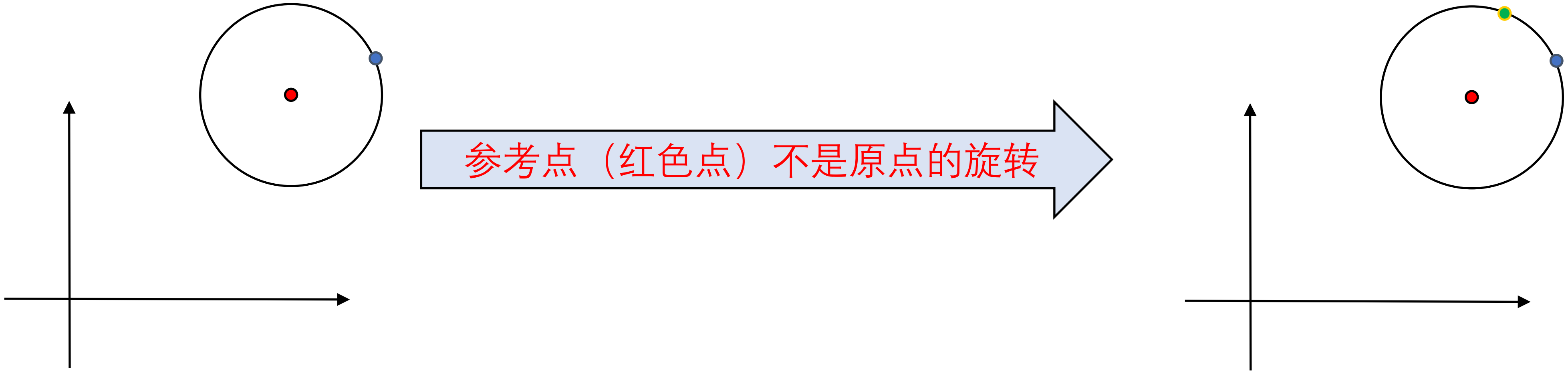
$P' = S(s_{x2}, s_{y2})\,[S(s_{x1}, s_{y1})P] = [S(s_{x2}, s_{y2})\,S(s_{x1}, s_{y1})\,]\,P$

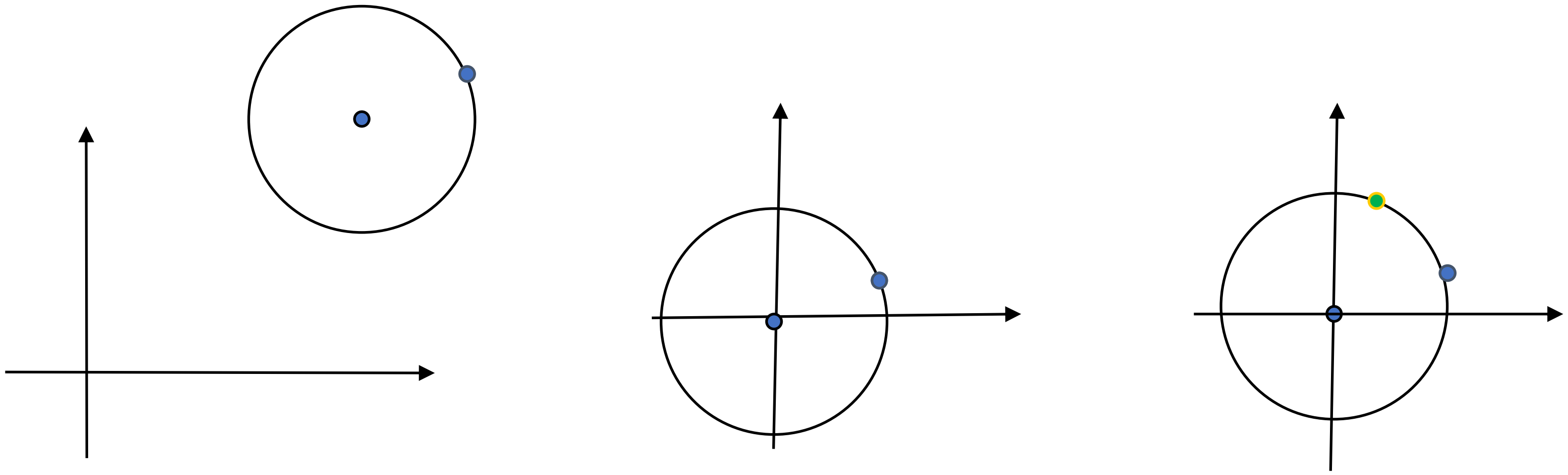
Prove : $S(s_{x2}, s_{y2})\,S(s_{x1}, s_{y1}) = S(s_{x1}\,s_{x2}, s_{y1}\,s_{y1})$

so： $P' = S(s_{x2}, s_{y2})\,[S(s_{x1}, s_{y1})P] = S(s_{x1}\,s_{x2}, s_{y1}\,s_{y1})\,P$

连续缩放：参数相乘

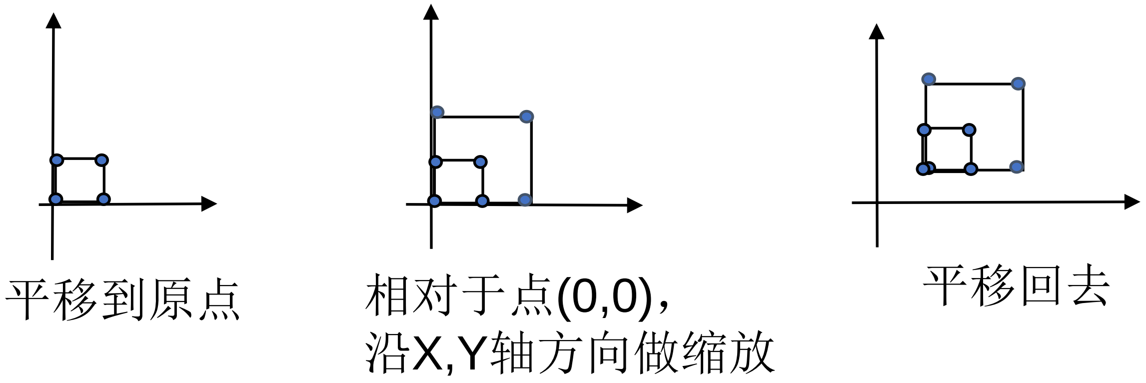
General Pivot-Point Rotation （一般参考点旋转变换）





- $R=T(x_r, y_r)R(\theta)T(-x_r, -y_r)$， 其中：$T(-x_r, -y_r)= T^{-1}(x_r, y_r)$

General Fixed-Point Scaling（一般参考点的缩放变换）



- **$S=T(x_f\ ,\ y_f)\ S(s_x\ ,\ s_y)\ T(-x_f\ ,\ -y_f)$，其中基准点为$(x_f\ ,\ y_f)$，缩放方向是坐标轴**

总结:非标准变换的组合变换形式

- 首先，T1-把”非标准”变换条件转换为标准变换条件
- 然后，T2-实施标准变换
- 最后，T3-逆变换回非标准条件下

$T=T3*T2*T1$

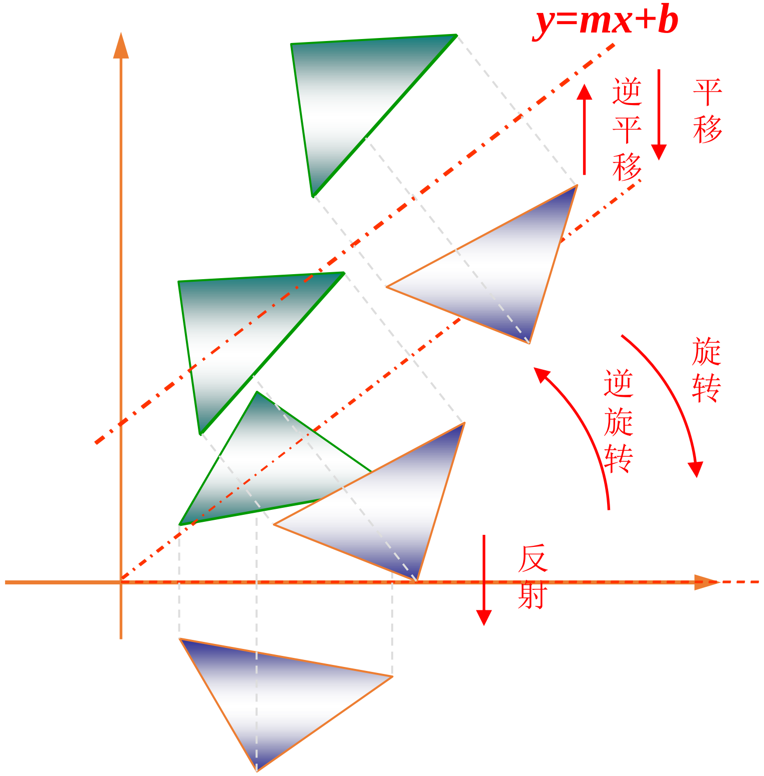
课堂练习2:组合变换练习

Please write the reflection transformation matrices about 2D objects using Homogeneous Coordinate

- **点 (2,3)对称**
- **轴 y=2对称**
- **轴 x=3对称**
- **轴 y=2x对称**
- **轴y=ax+b对称**

轴y=ax+b对称 (反射)变换过程

- 关于**xy平面内任意线$y=mx+b$**的反射可用平移-旋转-反射变换的组合来完成：
  - ①平移反射轴使其经过原点；
  - ②将反射轴旋转到坐标轴之一上，且进行关于坐标轴反射；
  - ③利用逆旋转和平移变换将线置回原处。



推导y=ax+b的复合变换矩阵

- 推导y=ax+b的变换矩阵
  - 1)平移 T(0,-b)
  - 2) θ=arctg(a)，顺时针旋转 R(-θ)
  - 3)关于X轴的反射 $F_{X轴}$
  - 4)旋转回去R(θ)
  - 5)平移回去T(0,b)

组合变换矩阵为: $T(0,b) \cdot R(\theta) \cdot F_{X轴} \cdot R(-\theta) \cdot T(0,-b)$

Outlines

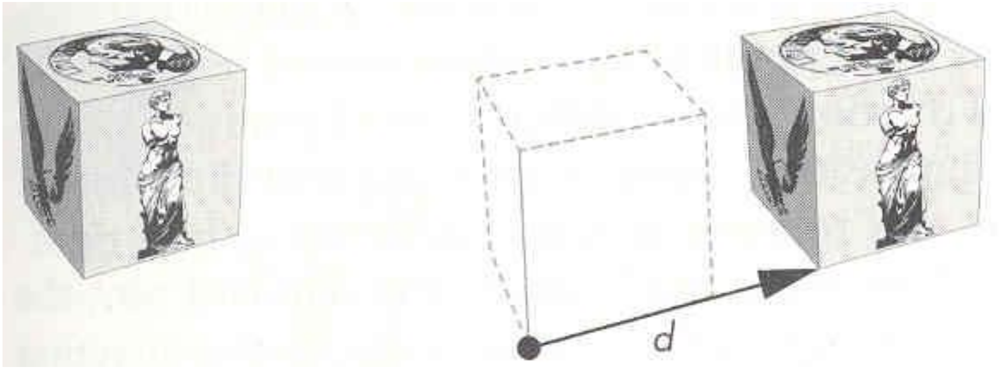
- Translation平移，Rotation旋转，Scaling缩放
- **Homogeneous Coordinates齐次坐标表示**

- **Reflection对称/反射、Shear错切**
- **Composite Transformation组合变换**

- 3D Geometric Transformation三维几何变换

3D Translation平移

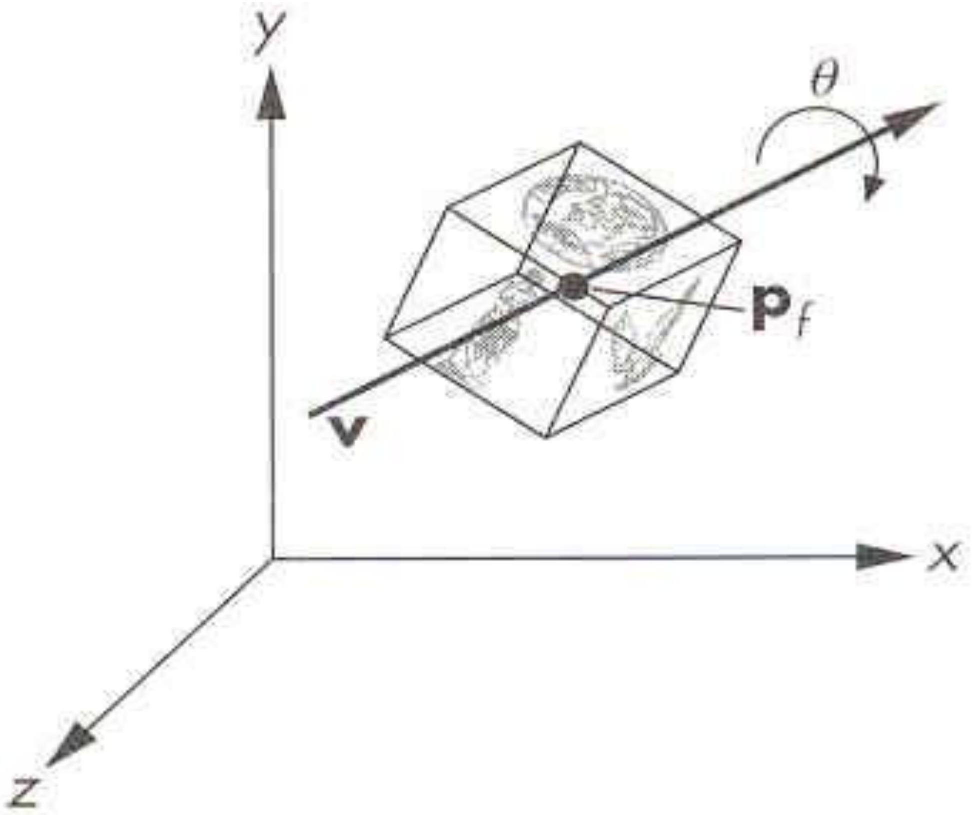
- **P’=T·P， T为平移变换距阵**



$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

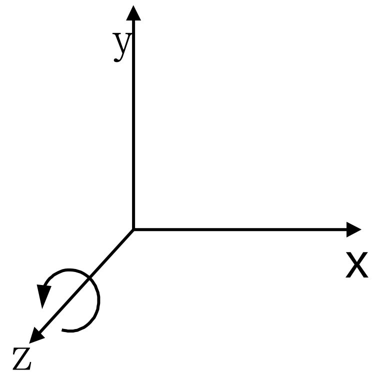
3D Rotation旋转

- 三维物体旋转除了指定一个旋转角度，还必须指定旋转轴。

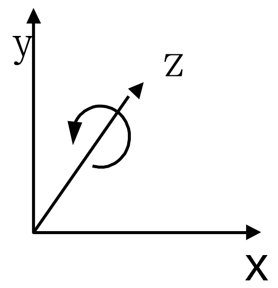


坐标系统和旋转正方向

右手坐标系：
绕某个坐标轴的正半轴方向向坐标原点看去，
逆时针的方向时为正方向。



左手坐标系：
绕某个坐标轴的正半轴方向向坐标原点看去，
顺时针的方向时为正方向。



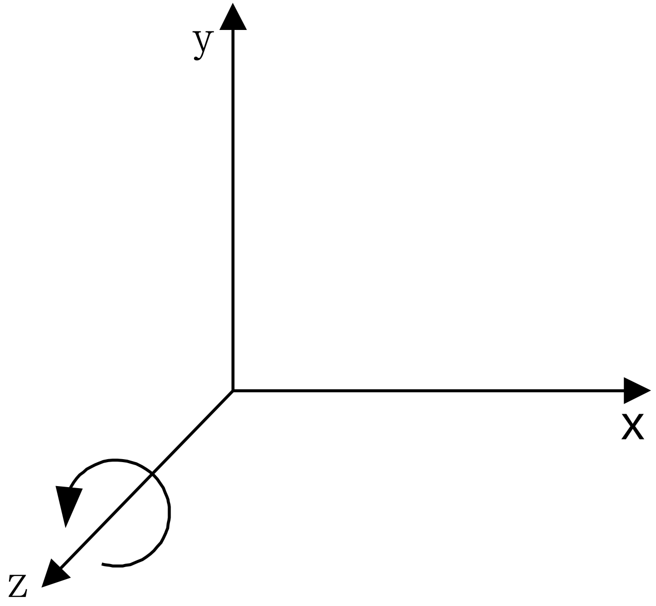
- *本书坐标系普遍采用右手坐标系中*

绕z轴的旋转(XOY平面)

x’=xcosθ-ysinθ

y’=xsinθ+ycosθ

z’=z



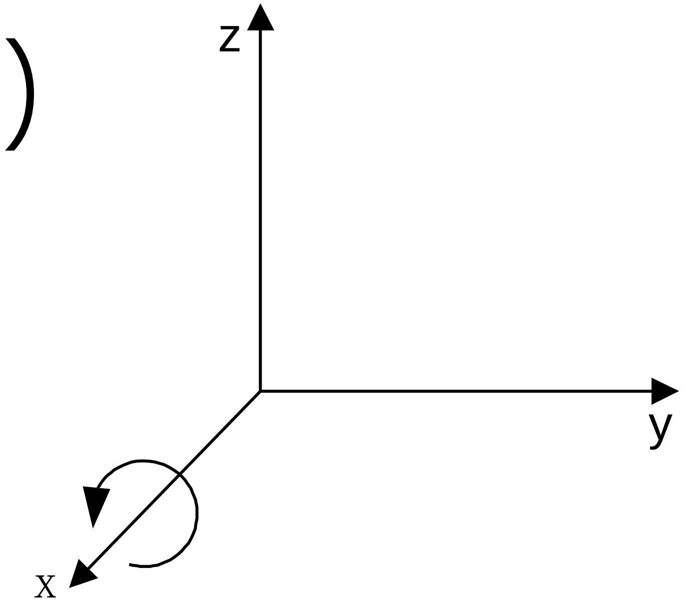
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

绕x轴的旋转（yoz平面）

y’= ycosθ-zsinθ

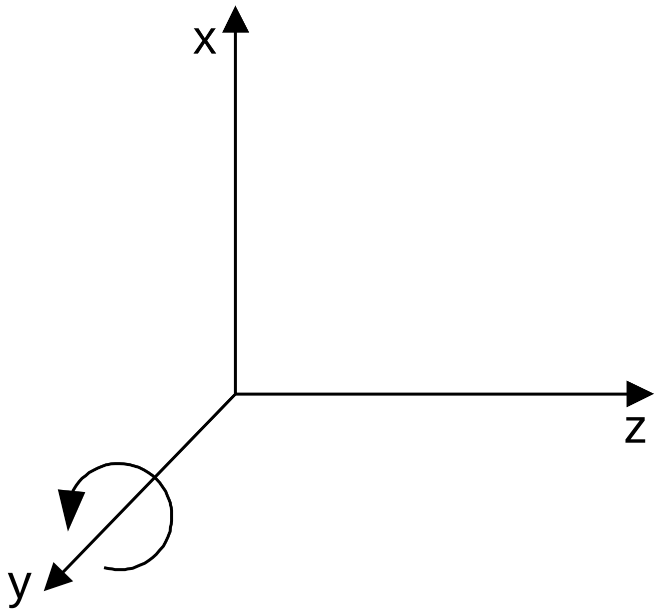
z’= ysinθ+zcosθ

x’=x



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

绕y轴的旋转 （zox平面）



z'= zcosθ- xsinθ

x'=z sinθ+x cosθ

y'=y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D Scaling缩放

- **标准的3D缩放**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

整体比例变换的变换矩阵

在齐次项h上赋值，可以表示整体同尺度缩放变换

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$T_S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Reflection反射

3D的标准反射/对称有三种情况：

1.关于原点的反射

2.关于坐标轴的反射

3.关于坐标平面的反射

关于原点的反射

$$T_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于坐标轴对称变换

$$T_{Fx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于**x**轴进行对称变换

$$T_{Fy}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于**y**轴进行对称变换

$$T_{Fz}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于**z**轴进行对称变换

关于坐标平面对称

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关于xoy平面对称变换

$$T_{Fyz}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关于yoz平面对称变换

$$T_{Fzx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关于zox平面对称变换

3D Shears错切

X为依赖轴：

$$x' = x$$
$$y' = dx + y$$
$$z' = gx + z$$

Y为依赖轴：

$$x' = x + by$$
$$y' = y$$
$$z' = hy + z$$

z为依赖轴：

$$x' = x + cz$$
$$y' = y + fz$$
$$z' = z$$

$$T_{SHx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ g & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{SHy} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{SHz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Inverse Transformation逆变换

(1)平移T(tx,ty,tz)的逆变换

$$T_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & 0 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 & -Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Inverse Transformation逆变换

（2）缩放变换Ts(a,e,i)的逆变换

$$T_s^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{e} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{i} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3D Inverse Transformation逆变换

- 旋转的逆变换

$$T_{RZ}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Composite Transformation三维组合变换

- 相对于参考点$F(x_f,y_f,z_f)$的一半基本变换的组合变换

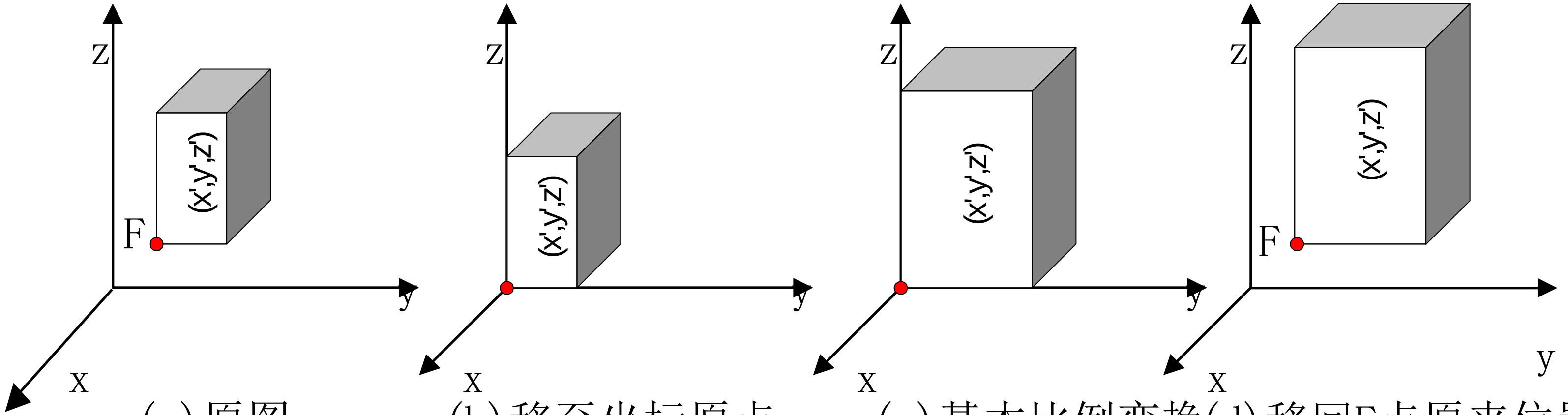
变换的过程分为以下三步：

(1)将参考点F平移至坐标原点

(2)针对原点进行标准的三维几何变换

(3)相对参考点F进行反平移

1.相对于任意点的缩放变换



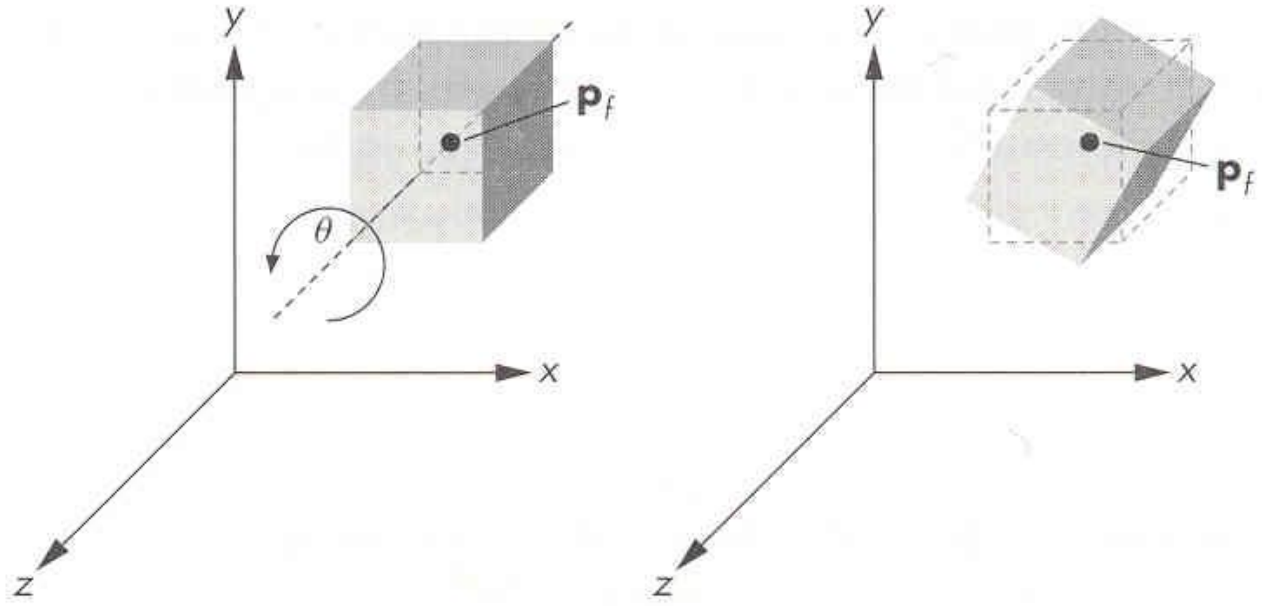
(a) 原图 (b) 移至坐标原点 (c) 基本比例变换 (d) 移回F点原来位置

图 相对参考点F的缩放变换

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & 0 & y_f \\ 0 & 0 & 1 & z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & 0 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 & -z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & (1-s_x)\cdot x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)\cdot y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)\cdot z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

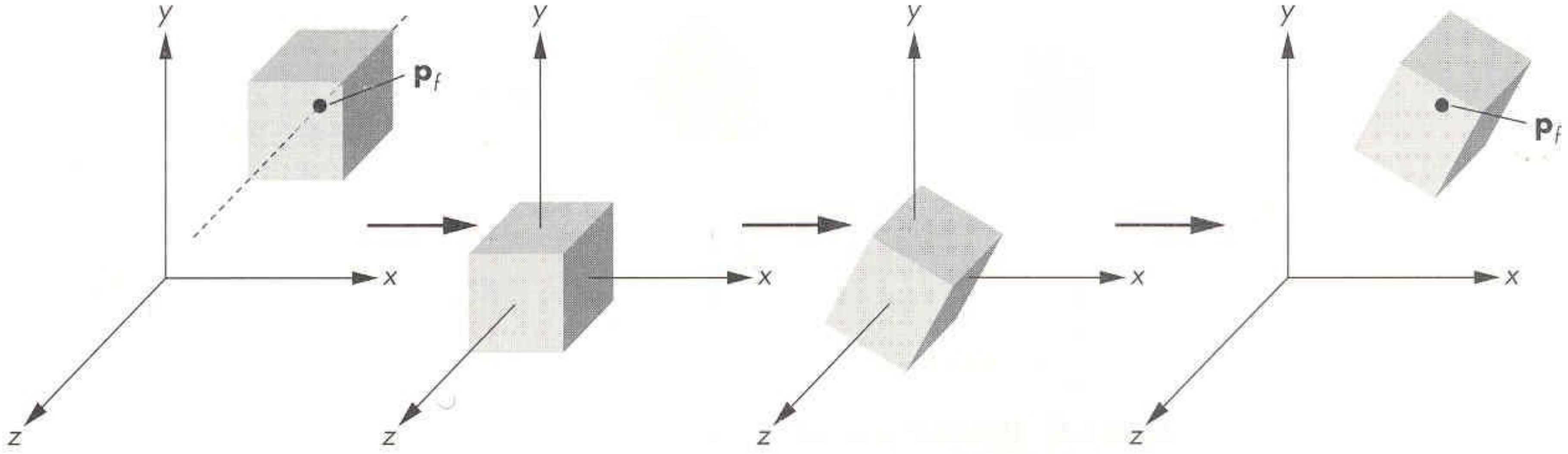
2.绕任意点的旋转变换

- Fixed point: $\mathbf{p}_f$, apply $R_z(\theta)$ to rotation about a fixed point



rotation of a cube about its center

- 即绕过P点且平行于Z轴的轴进行旋转

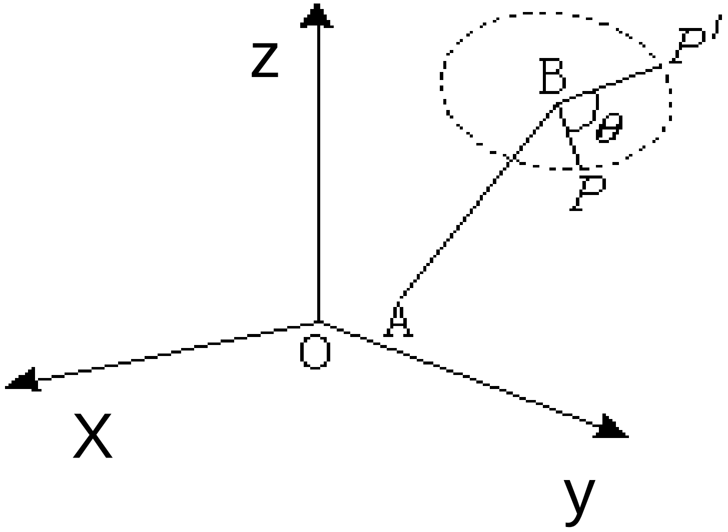


$$\mathbf{M} = T(p_f)R_z(\theta)T(-p_f)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & x_f - x_f\cos\theta + y_f\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & y_f - x_f\sin\theta - y_f\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.绕任意轴的旋转变换

- 空间一点$P(x_p, y_p, z_p)$ 绕AB轴旋转角到$P^/(x_p^/，y_p^/，z_p^/)$
- 试求Rab：

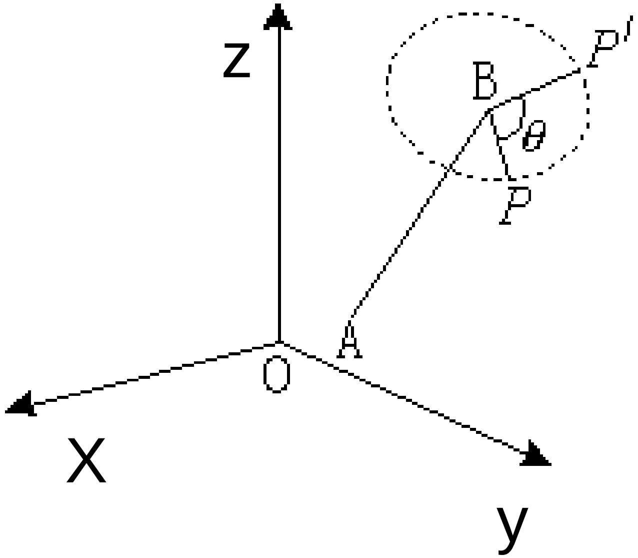


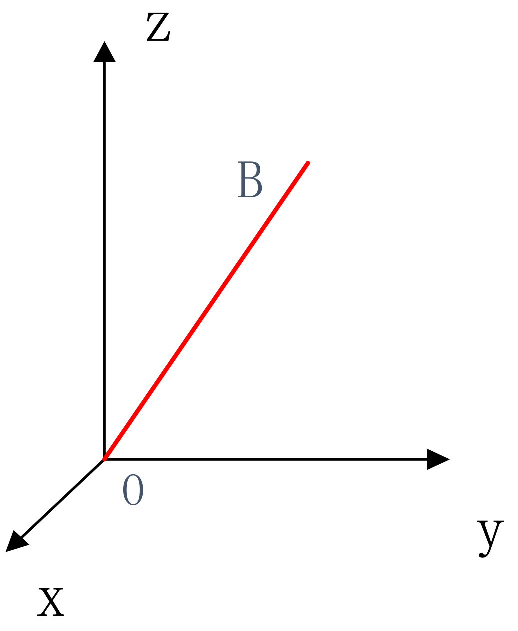
$$\begin{bmatrix} x_p' \\ y_p' \\ z_p' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{ab}(\theta) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Step1: 平移A点到原点

- **将AB平移,使A点与坐标原点重合，得到OB**

  OB的方向数设为(a,b,c), $a^2+b^2+c^2=|OB|^2$





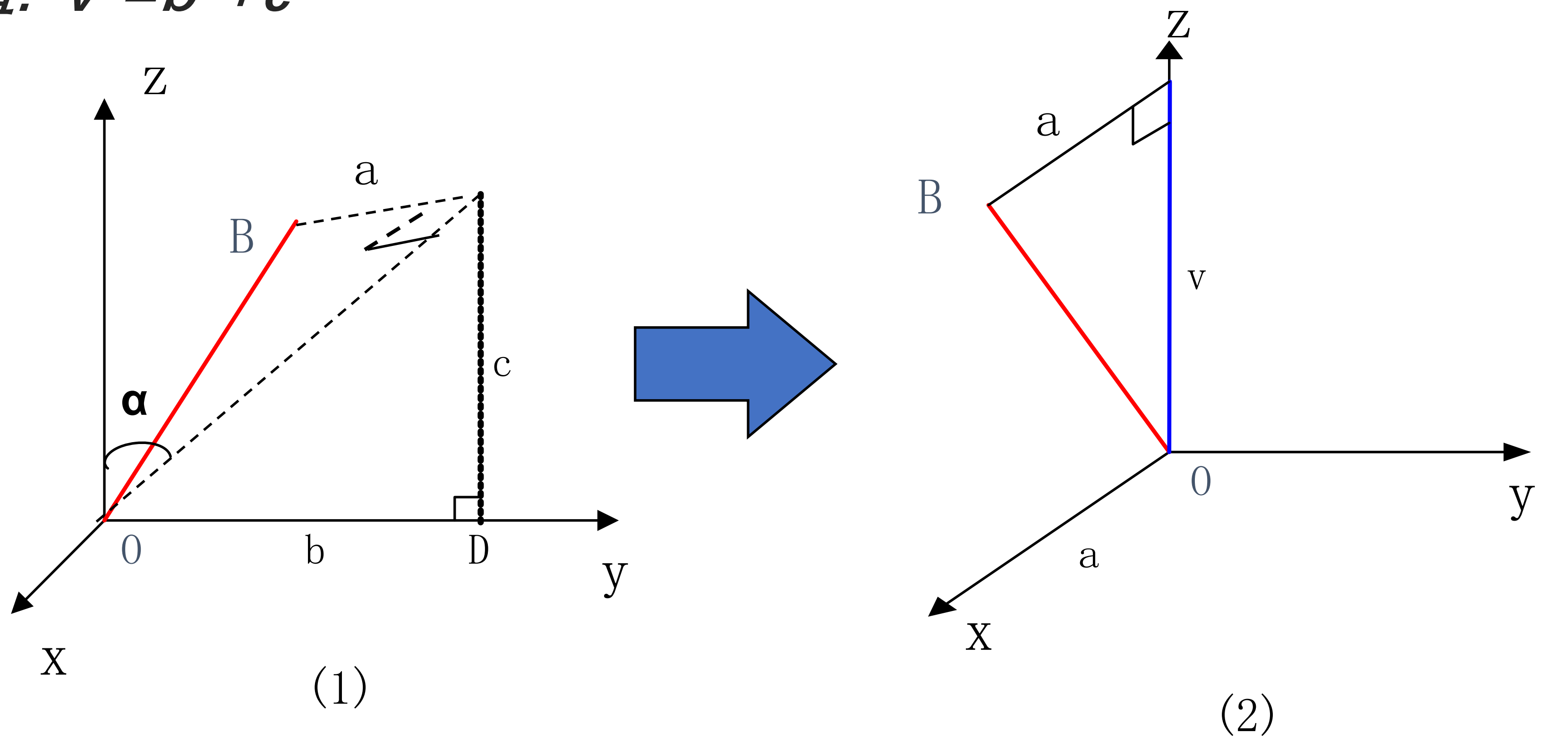
(1)

Step2：OB经绕X轴逆时针旋转到xoz面上

➢**将OB绕x轴逆时针旋转α角，则OB旋转到XOZ平面上**

α角：*将OB投影到YOZ面后的投影线和Z轴的夹角，也是OB旋转的角度。*

v值: $v^2=b^2+c^2$

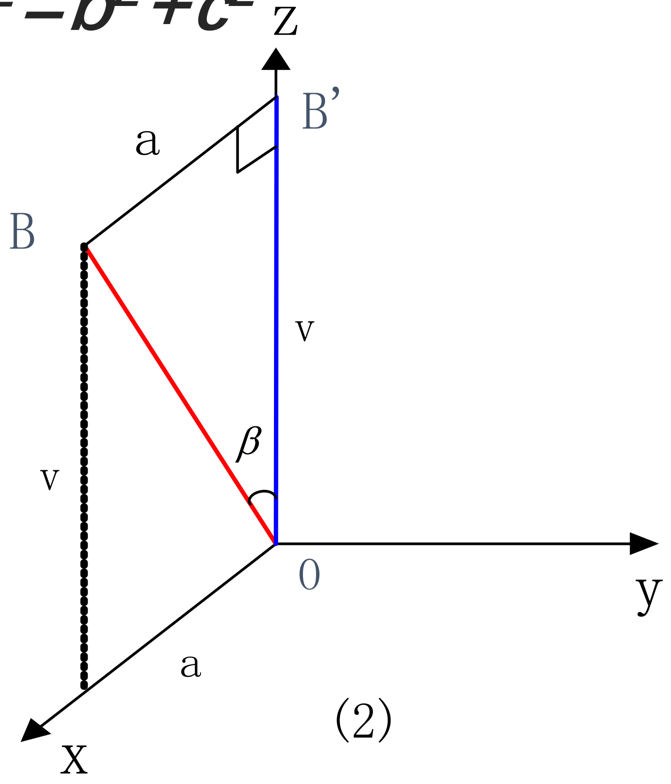


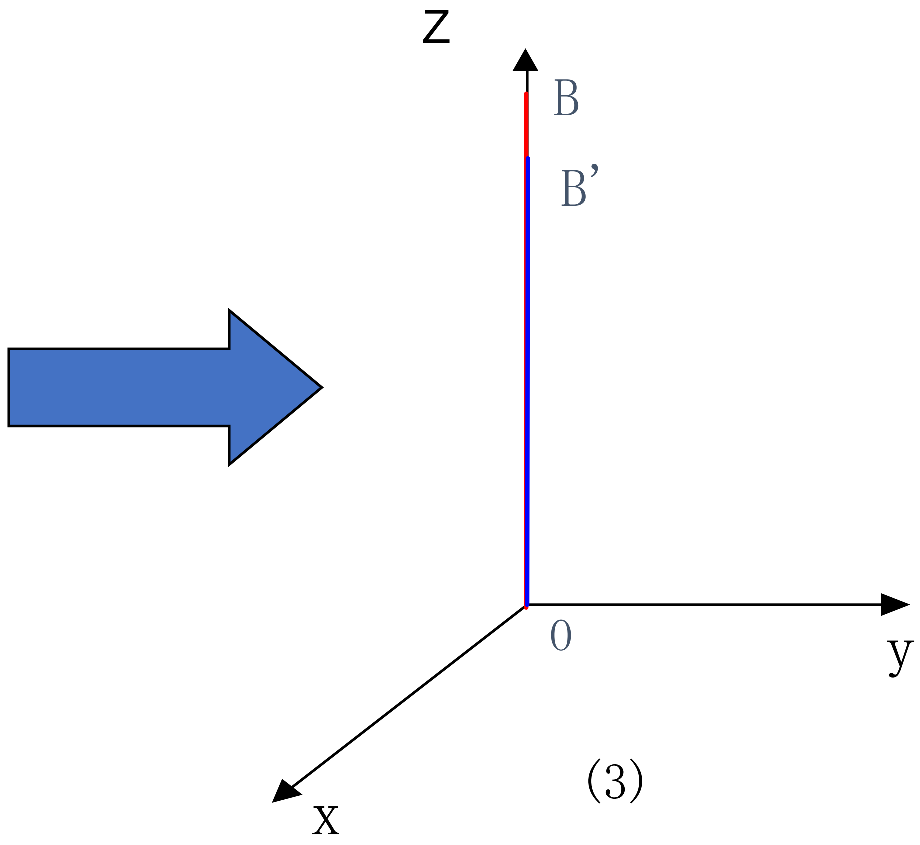
Step3：将OB绕Y轴顺时针旋转到Z轴上

➢**将OB绕Y轴顺时针旋转β角，则OB旋转到Z轴上**

β角： ***将OB绕Y轴顺时针旋转的角度***

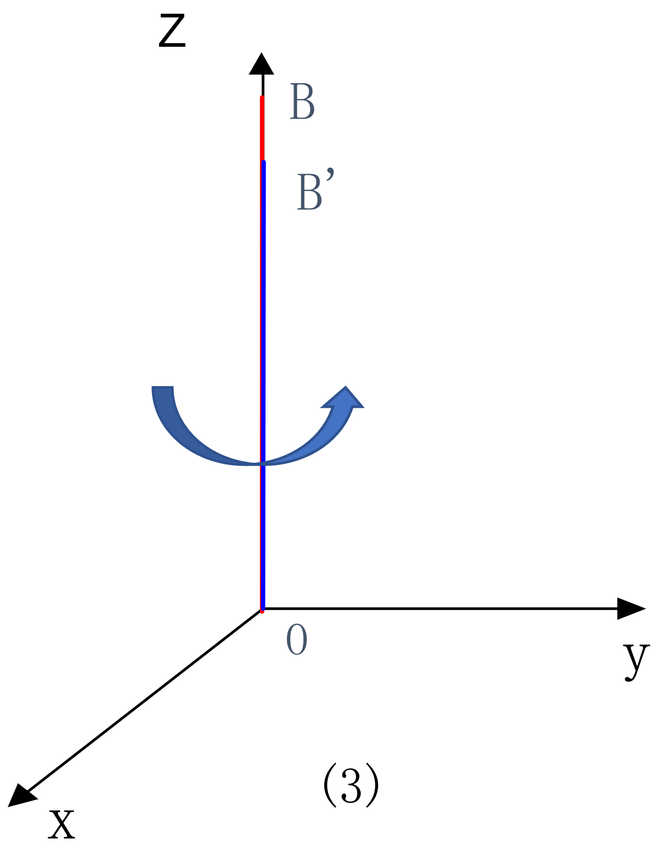
v值： $v^2=b^2+c^2$





Step4：物体绕OB轴（Z轴）旋转

➢绕OB轴（Z轴）作标准旋转 *Rz*

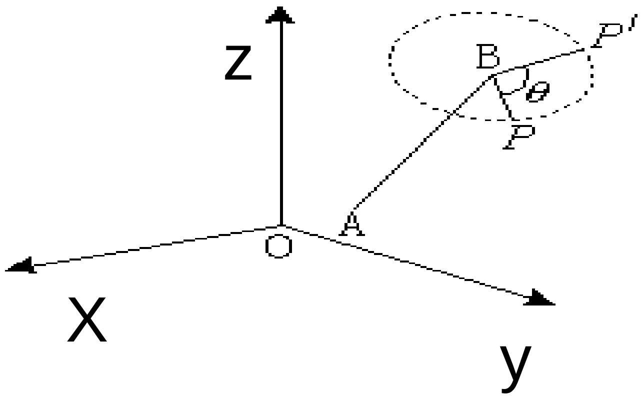


(3)

Step5~Step7: 逆变换

- **按(3)(2)(1)顺序，作前面step1,step2,step3对应的逆变换(省略)**
- 按顺序从右边到左排列这七个标准变换矩阵相乘，可求出Rab

$$T_{Rab} = T_{tA}^{-1} T_{Rx}^{-1} T_{Ry}^{-1} T_{Rz} T_{Ry} T_{Rx} T_{tA}$$



$$\begin{bmatrix} x_p' \\ y_p' \\ z_p' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{ab}(\theta) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

小结：变换&矩阵

- 任何图形变换都对应一个齐次变换矩阵
- 矩阵中每一个元素都有特殊含义

$$\left[\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hdashline g & h & i \end{array}\right]$$

$\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$ 平移变换

$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ 缩放、旋转、对称、错切等变换

$\begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix}$ **2D下为0,3D时与投影变换有关**

$\begin{bmatrix} i \end{bmatrix}$ **整体缩放变换**

仿射变换

集合S={v(x,y,z)}, 定义了一个向量空间，具有数乘和加法运算，是封闭性的空间，其上的运算描述为变换。

- 几何变换（S, G)=(仿射空间, 仿射变换)
  - 变换是在仿射空间的，变换是可逆的群变换
- 投影变换（S, T）=(线性空间，投影变换)
  - 投影将三维信息转换为二维信息，是不可逆的变换