The Equilibrium of a FPA

Assume a winner pays his own bid ⇒ we are in the FPA setting, that is,

p = (bi , if bi ≥ $\max_{j!=i}\{bj\}$

0, otherwise)

What is an equilibrium in this case?

1 Solution concept – a Bayesian Nash equilibrium

2 The game is symmetric ⇒ focus on a symmetric equilibrium:

- define a strategy:
  b : v → R +
- in words, if my valuation is v, I must bid b (v)
- in equilibrium, b (v) must be such that it maximizes each player's expected payoff, given the equilibrium bid functions of others
- generally, we do not know anything about b (v) but can impose some restrictions on this function

Solving the FPA: an Example

Assume $N = 10$ and $v \sim U[0, 1]$.

Claim. In equilibrium, each player bids $\frac{9}{10}$ of his valuation, i.e., $b(v) = \frac{9v}{10}$.

How do we know this? Well, let's check if this is indeed an equilibrium:

- Suppose all but one players bid $\frac{9}{10}$ of their valuations, and that one player has the valuation of v.
- We must find a bid that solves:

$$\max_{b \geq 0}\{(v - b)\, Pr(win|\, b)\}$$

Then, what is $Pr(win|\, b)$?

- If player i bids $\frac{9}{10}v_i$, the probability of overbidding him is $Pr\left(b > \frac{9}{10}v_i\right)$
- v_i is a random variable (private valuations!) ⇒ can rewrite this as $Pr\left(v_i < \frac{10}{9}b\right)$
- Valuations are i.i.d. ⇒ as long as $\left(\frac{10}{9}b \leq 1\right)$, the probability of winning looks like:

$$Pr(win|\, b) = \left(\frac{10}{9}b\right)^9$$

FIRST ORDER APPROACH

Now, let's solve a more general version of the FPA model:

1. Assume the equilibrium is *symmetric and features differentiable and monotonically increasing strategies*. In other words, players with higher valuations bid more:

$$b'(v) > 0$$

2. Let x be the inverse of $b(v)$, that is, $v = x(b)$.
3. A player with valuation v who bids b, wins against his rival i with probability

$$Pr(b \geq b(v_i)) = Pr(v_i \leq x(b)) = F(x(b))$$

4. As valuations are i.i.d., each player solves:

$$\max_{b \geq 0}\left\{[F(x(b))]^{N-1}(v - b)\right\}$$

1. Take a first-order condition:

$$(v - b)(N-1)[F(x(b))]^{N-2} f(x(b))\frac{dx}{db} - [F(x(b))]^{N-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(v-b)(N-1)f(x(b))}{F(x(b))} = \frac{db}{dx}$$

2. In a symmetric equilibrium, it must be $x(b) = v$, and we get:

$$\frac{(v-b)(N-1)f(v)}{F(v)} = \frac{db}{dv}$$

3. Solving this differential equation with the boundary condition $b(0) = 0$ delivers:

$$b = v - \frac{\int_0^v [F(\tilde{v})]^{N-1} d\tilde{v}}{[F(v)]^{N-1}} \equiv b^*(v)$$

It is easy to show that for $v \sim U[0, \bar{v}]$, it has to be $b^*(v) = \frac{N-1}{N}v$.

The Envelope Theorem (Cont.)

Now, we can apply the envelop theorem to the FPA:

- What we know:

$$\pi(v) = \max_{b \geq 0} \{f(b, v)\} = \max_{b \geq 0} \left\{ [F(x(b))]^{N-1}(v-b) \right\}$$

  where $\pi(v)$ is the value function.

- By the envelope theorem:

$$\pi'(v) = \frac{\partial f(b, v)}{\partial v}\bigg|_{b=b^*(v)} = [F(x(b))]^{N-1}\Big|_{b=b^*(v)} = [F(v)]^{N-1}$$

  and for any $v > 0$ we can rewrite $\pi(v)$ as:

$$\pi(v) = \pi(0) + \int_0^v [F(\tilde{v})]^{N-1} d\tilde{v}$$

  where $\pi(0) = 0$ because a player with the lowest valuation never wins the auction.

Производная прибыли по v = Pr(win|b)

If nobody can do better by deviating, then the strategy profile is stable — i.e., it is an equilibrium (typically a Bayesian Nash equilibrium in auction problems).

Expected Revenue

As we know the equilibrium, now it is possible to compute the expected revenue raised by the auctioneer, which is just the expected value of the highest bid:

- For simplicity, assume $F(v) = U[0, \bar{v}]$.
- With $v \sim U[0, \bar{v}]$, each player bids (his valuation)$\times \frac{N-1}{N}$.
- Let $g(v, N)$ be a probability that valuation v is the highest among N valuations.
- Take player 1. What is a probability that $v_1 > \max_{i \neq 1}\{v_i\}$?

$$Pr\left(v_1 > \max_{i \neq 1}\{v_i\}\right) = Pr(v_1 > v_2) \cdot \ldots \cdot Pr(v_1 > v_N) = [F(v_1)]^{N-1}$$

- We can write similar expressions for bidders 2, 3, ..., $N \Rightarrow$ there are N ways to get the highest valuation.
- Then, taking symmetry into account delivers:

$$g(v, N) = N[F(v)]^{N-1} f(v)$$

- Now, we can compute the expected highest valuation:

$$E(v_{\max}) = \int_0^{\bar{v}} vg(v, N)\, dv = N \int_0^{\bar{v}} v[F(v)]^{N-1} f(v)\, dv$$

  and the expected revenue of the auctioneer is:

$$R_1 = \frac{N-1}{N} \cdot E(v_{\max}) = (N-1) \int_0^{\bar{v}} v[F(v)]^{N-1} f(v)\, dv$$

1. As before, take $N = 10$ and $v \sim U[0, 1]$.
2. Then, $g(v, 10)$ becomes:

$$g(v, 10) = 10 \cdot (v)^9$$

3. Restore the expected highest valuation:

$$E(v_{\max}) = 10 \cdot \int_0^1 v \cdot (v)^9\, dv = 10 \cdot \frac{1}{11} \cdot v^{11}\Big|_0^1 = \frac{10}{11} \cdot 1 \equiv \frac{N}{N+1} \cdot \bar{v}$$

4. Find the expected revenue of the auctioneer:

$$R_1 = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} \cdot \bar{v} = \frac{N-1}{N+1} \cdot \bar{v} = \frac{9}{11}$$

Revenue Equivalence

Theorem

Consider N bidders with i.i.d. valuations $v_1, \ldots, v_N$ drawn from $F(v)$. Then, all auction formats that (1) always award the object to the bidder with the highest valuation and (2) give the bidder with the lowest valuation zero payoff, generate the same expected revenue.

Лекция 2

Определение регулярности

Распределение называется **регулярным**, если:

$$\phi(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}$$

монотонно возрастает по v.

То есть:

$$\frac{d\phi(v)}{dv} \geq 0$$

5️⃣ Ограничение: игроки должны хотеть говорить правду

Если бы продавец знал реальные v_i,
он бы просто забрал всё:

- отдал товар,
- взял цену = v_i.

Игрок получил бы 0.

Но проблема:

Игрок знает свой тип, продавец — нет.

Если продавец скажет:

> “Скажи свою оценку, я поставлю цену = твоей оценке”

Игрок всегда скажет 0.

Поэтому нужно:

- сделать механизм,
- который стимулирует говорить правду.

Это называется IC (incentive compatibility).

Виртуальная оценка = сколько дохода продавец реально получает от типа v
с учётом того, что он обязан оставить игроку информационную ренту.

Если бы можно было забрать всё — виртуальная оценка = реальная.

1️⃣ Что такое “оптимальный аукцион” в целом?

В модели Roger Myerson (1981) оптимальный аукцион — это:

> такой механизм, который максимизирует **ожидаемый доход продавца**,
> при условии, что игроки говорят правду и участвуют добровольно.

То есть формально задача:

$$\max \mathbb{E}\left[\sum_i x_i(v)\right]$$

при ограничениях:

- IC (стимулы говорить правду)
- IR (участие выгодно)

Продавец хочет продавать товар только если это выгодно.

Виртуальная оценка:

$$\phi(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}$$

Резервная цена определяется условием:

$$\phi(r) = 0$$

Почему?

Потому что:

- если $\phi(v) < 0$, такой покупатель в среднем приносит отрицательный вклад в доход,
- значит лучше не продавать.

То есть:

👉 резервная цена — это минимальная оценка, при которой продавец согласен продать.

Теперь главное: трансферы.

В симметричном регулярном случае:

> оптимальный аукцион = SPA + reserve price.

Это значит:

Игрок платит:

$$\max(\text{вторая по величине ставка},\ r)$$

Почему так?

Потому что:

- механизм должен быть incentive compatible,
- единственный способ сделать это при монотонном правиле распределения — использовать формулу платежей из IC.

И она приводит ровно к правилу второй цены + резерв.

Эффективный аукцион = Отдать товар игроку с максимальным vi