Standard Code Library
of
HUST Affiliated Kindergarten

Verson 1.1

Edited By

sddyzjh
DragoonKiller
dreactor

Huazhong University of Science and Technology

2017.09.01

目录

数学 **2**
- 常用公式 2
- 积性函数 2
- 莫比乌斯反演 2
- 常用等式 2

杂项 **3**
- 测速 3
- 读入挂 3
- 常用概念 3
- 映射 3
- 反演 3
- 弦图 3
- 五边形数 3
- 重心 3
- 第二类 Bernoulli number 3
- Catalan 数 4
- Stirling 数 4
- 三角公式 4

数学

常用公式

积性函数

$\sigma_k(n) = \Sigma_{d|n} d^k$ 表示 n 的约数的 k 次幂和
$\sigma_k(n) = \Pi_{i=1}^{k} \frac{(p_i^{a_i+1})^k - 1}{p_i^k - 1}$
$\varphi(n) = \Sigma_{i=1}^{n} [(n,i) = 1] = \Pi_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})$
$\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$
$\Sigma_{d|n} \varphi(n) = n \rightarrow \varphi(n) = n - \Sigma_{d|n,d<n}$
$n \geq 2$ 时 $\varphi(n)$ 为偶数
$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{有平方因子} \\ (-1)^t & n = \Pi_{i=1}^{t} p_i \end{cases}$
$[n = 1] = \Sigma_{d|n} \mu(d)$ 排列组合后二项式定理转换即可证明
$n = \Sigma_{d|n} \varphi(d)$ 将 $\frac{i}{n} (1 \leq i \leq n)$ 化为最简分数统计个数即可证明

莫比乌斯反演

$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) * F(\frac{n}{d})$
$F(n) = \sum_{n|d} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{n|d} \mu(\frac{n}{d}) * F(d)$
$f(n) = \sum_{d|n} \phi(d) \Rightarrow \phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$

常用等式

不知道有什么用
$\sum_{d|N} \phi(d) = N$
$\sum_{i \leq N} i * [(i,N) = 1] = \frac{N * \phi(N)}{2}$
$\sum_{d|N} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\phi(N)}{N}$
常用代换
$\sum_{d|N} \mu(d) = [N = 1]$
考虑每个数的贡献
$\sum_{i \leq N} \lfloor \frac{N}{i} \rfloor = \sum_{i \leq N} d(i)$

杂项

测速

读入挂

常用概念

映射

[injective] or [one-to-one] 函数值不重复
[surjective] or [onto] 值域都被取到
[bijective] or [one-to-one correspondence] 一一对应

反演

反演中心 O, 反演半径 r, 点 p 的反演点 p' 满足 $|OP||OP'| = r^2$
不经过反演中心的直线，反形为经过反演中心的圆
不经过反演中心的圆，反形为圆，反演中心为这两个互为反形的圆的位似中心

弦图

设 $next(v)$ 表示 $N(v)$ 中最前的点. 令 $w*$ 表示所有满足 $A \in B$ 的 w 中最后的一个点, 判断 $v \cup N(v)$ 是否为极大团, 只需判断是否存在一个 $w \in w*$, 满足 $Next(w) = v$ 且 $|N(v)| + 1 \leq |N(w)|$ 即可.

五边形数

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x^{2n+1})x^{n(3n+1)/2}$

重心

半径为 r，圆心角为 θ 的扇形重心与圆心的距离为 $\frac{4r\sin(\theta/2)}{3\theta}$
半径为 r，圆心角为 θ 的圆弧重心与圆心的距离为 $\frac{4r\sin^3(\theta/2)}{3(\theta-\sin(\theta))}$

第二类 Bernoulli number

$B_m = 1 - \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\frac{B_k}{m-k+1}$
$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}$

Catalan 数

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$

前 20 项:1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190

Stirling 数

第一类:n 个元素的项目分作 k 个环排列的方法数目

$s(n,k) = (-1)^{n+k}|s(n,k)|$

$|s(n,0)| = 0$

$|s(1,1)| = 1$

$|s(n,k)| = |s(n-1,k-1)| + (n-1) * |s(n-1,k)|$

第二类:n 个元素的集定义 k 个等价类的方法数

$S(n,1) = S(n,n) = 1$

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k * S(n-1,k)$

三角公式

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$

$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$

$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$

$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$

$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$

$\sin(na) = n\cos^{n-1} a \sin a - \binom{n}{3}\cos^{n-3} a \sin^3 a + \binom{n}{5}\cos^{n-5} a \sin^5 a - \dots$

$\cos(na) = \cos^n a - \binom{n}{2}\cos^{n-2} a \sin^2 a + \binom{n}{4}\cos^{n-4} a \sin^4 a - \dots$