

# Apuntes sobre inteligencia artificial

Sergio de Mingo

6 de Febrero de 2026

## Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. El perceptrón</b>                                   | <b>1</b>  |
| 1.1. El aprendizaje de un perceptrón . . . . .            | 2         |
| 1.2. Trabajando con el perceptrón . . . . .               | 2         |
| <b>2. Redes multicapa</b>                                 | <b>4</b>  |
| 2.1. Aprendizaje en varias capas . . . . .                | 4         |
| 2.2. Representación matricial . . . . .                   | 6         |
| 2.2.1. Forward Pass . . . . .                             | 7         |
| 2.2.2. Backpropagation o propagación del error . . . . .  | 8         |
| 2.2.3. Actualización de pesos . . . . .                   | 9         |
| 2.3. Estudio del error y del aprendizaje . . . . .        | 10        |
| <b>3. Reconocimiento de patrones</b>                      | <b>11</b> |
| 3.1. ReLU y el gradiente desvaneciente . . . . .          | 13        |
| 3.2. Propagación del error con entropía cruzada . . . . . | 14        |
| 3.3. Arquitectura de red para MNIST . . . . .             | 15        |
| 3.4. Desarrollo del modelo . . . . .                      | 16        |
| <b>4. Bibliografía recomendada</b>                        | <b>18</b> |

## 1. El perceptrón

El Perceptrón (propuesto por Rosenblatt en los 50) es la unidad atómica de la IA. Es básicamente una función matemática que intenta imitar a una neurona biológica. No es más que un clasificador lineal binario. Un clasificador binario es una función que puede decidir si una entrada, representada por un vector de números, pertenece o no a una clase específica.

$$y = f\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b\right)$$

- Entradas ( $x$ ): Los datos que llegan (ej. valores de píxeles).
- Pesos ( $w$ ): La “importancia” que la red le da a cada entrada. Aprender en IA es, literalmente, ajustar estos números.

- Bias ( $b$ ): El sesgo, que permite desplazar la función de activación hacia la izquierda o derecha para ajustarse mejor a los datos. Es como el umbral de un interruptor: Si el bias es muy alto y positivo, la neurona es «entusiasta» y se activa casi siempre. Por contra, si el bias es muy negativo, la neurona es «escéptica» y necesita señales de entrada muy fuertes para activarse.
- Función de activación ( $f$ ): Decide si la neurona “dispara” una señal o no. Antiguamente usábamos la Heaviside (escalón) o la Sigmoide.

La limitación de este algoritmo es que si dibujamos en un gráfico estos elementos, se deben poder separar con un hiperplano únicamente los elementos «deseados» discriminándolos (separándolos) de los «no deseados». Esto lo veremos mejor en el punto 2, donde estudiaremos una Red Neuronal Clásica (Multilayer Perceptron). Este tipo no es más que muchas de estas neuronas organizadas en capas: una de entrada, una o varias ocultas y una de salida.

## 1.1. El aprendizaje de un perceptrón

El proceso de aprendizaje de un perceptrón comienza con una fase de **inicialización**, donde el modelo parte de un estado de desconocimiento absoluto, asignando valores aleatorios a sus pesos y un valor inicial (normalmente cero) a su sesgo o bias. Una vez configurado, **el aprendizaje se convierte en un ciclo iterativo que se repite durante varias épocas**. En cada iteración, el perceptrón realiza primero un forward pass o predicción: toma los datos de entrada, los multiplica por sus respectivos pesos, suma el sesgo y pasa el resultado por una función de activación (como la función escalón) para decidir si la neurona debe activarse o no. Inmediatamente después, el modelo compara su predicción con el valor real ( $y_i$ ) que debería haber obtenido, calculando así el error:

$$Error = y_i - f(w_i \cdot x_i + b)$$

Si existe una discrepancia, entra en juego la regla de aprendizaje, donde el perceptrón ajusta sus pesos internos de forma proporcional a tres factores: la magnitud del error cometido, el valor de la entrada que causó dicho error y, fundamentalmente, la tasa de aprendizaje, que actúa como un regulador de la velocidad del cambio.

$$w_i = w_i + (x_i \times Error \times Tasa \text{ de aprendizaje})$$

Este ajuste busca “mover” la frontera de decisión del perceptrón (la línea recta que separa las clases) para que, en el siguiente intento, la predicción sea más precisa. A través de la repetición constante de este proceso con todos los datos del conjunto de entrenamiento, los pesos convergen gradualmente hacia unos valores óptimos que permiten al modelo clasificar correctamente las entradas, logrando así que la máquina “aprenda” la lógica subyacente de los datos,

## 1.2. Trabajando con el perceptrón

Para empezar a programar un perceptrón necesitamos establecer su estado interno, tanto los pesos  $W$  como el sesgo  $b$ . Normalmente estos se inicializarán con valores pequeños. Tras esto haremos el cálculo de la predicción en sí, donde aplicamos la fórmula inicial del perceptrón con la aplicación de la función de activación. Por último, el aprendizaje o el ajuste de los pesos. En este caso esto se ven el método `init()`. Este método recibe además el número de inputs que tendrá el perceptrón para poder generar un array de pesos adecuado. El método `predict()` es básicamente la aplicación de la función de activación para cada componente del vector de entrada  $X$ . En este caso  $Z$  es el producto de cada

componente del vector por el peso asignado (y al que al final sumamos el sesgo). Como activación usamos la función escalón por lo que el resultado será 1 si  $z > 0$  y 0 en cualquier otro caso. El mecanismo fundamental se encuentra en el método `train()`. En este método es donde se irá probando al perceptrón y ajustando sus pesos hasta que el resultado sea el esperado. En este caso probamos 100 veces. En cada prueba realizamos el proceso de aprendizaje/reajuste, teniendo en cuenta que los resultados esperados los tenemos en el vector `y_AND`:

1. Calculamos la predicción para esa entrada: `prediction = self.predict(X[i])`
2. Calculamos el error comparando el resultado con lo esperado: `error = y[i] - prediction`
3. Recalculamos los pesos: `self.weights += error * self.lr * X[i]`
4. Recalculamos el sesgo: `self.bias += error * self.lr`

La magia se produce cuando tras probar el perceptrón con el vector de aprendizaje `y_AND` y viendo que ha sabido hacer una operación AND cambiamos el vector por `y_OR` y aprende a hacer una OR haciéndola correctamente para las mismas entradas.

Siguiendo este razonamiento nos topamos con el primer gran problema del perceptrón. Al intentar implementar este mismo aprendizaje para XOR usando un vector `y_XOR = np.array([0, 1, 1, 0])` vemos que es imposible. Si visualizamos el espacio de entrada como un plano con dos ejes y cuatro puntos (0,0),(0,1),(1,0),(1,1), vemos que en el AND, solo el punto (1,1) es positivo. Puedes dibujar una línea recta que separe ese punto de los otros tres. Lo mismo pasa en el OR donde tres puntos son positivos y solo el (0,0) es negativo. También puedes trazar una línea recta para separarlos.

A continuación se muestra el código del fichero `src/perceptron.py`:

```
class Perceptron:
    def __init__(self, n_inputs, learning_rate=0.1):
        self.weights = np.random.randn(n_inputs)
        self.bias = 0
        self.lr = learning_rate

    def predict(self, x):
        z = np.dot(x, self.weights) + self.bias
        return 1 if z > 0 else 0

    def train(self, X, y, epochs=100):
        for _ in range(epochs):
            for i in range(len(X)):
                prediction = self.predict(X[i])
                error = y[i] - prediction
                self.weights += error * self.lr * X[i]
                self.bias += error * self.lr

X = np.array([[0,0], [0,1], [1,0], [1,1]])
y_AND = np.array([0, 0, 0, 1])
y_OR = np.array([0, 1, 1, 1])

p = Perceptron(n_inputs=2)
p.train(X, y_AND)

print("Probamos que sepa calcular un AND u OR:")
for t in X:
    print(f"Entrada: {t} -> Prediccion: {p.predict(t)}")
```

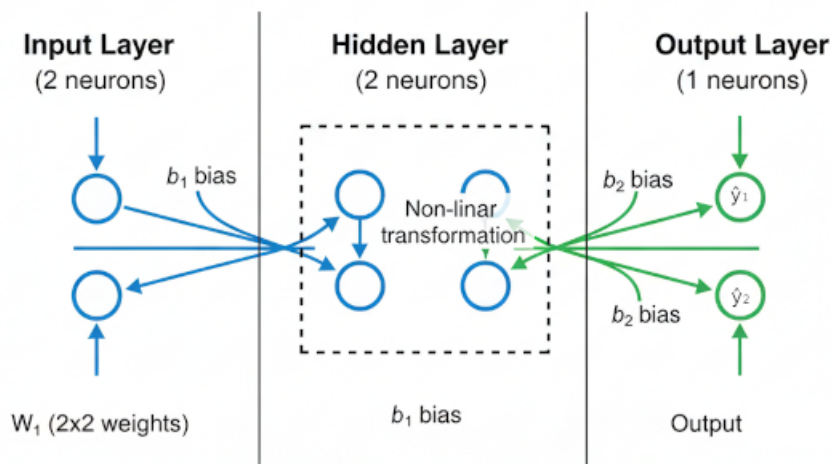


Figura 1: Esquema general de la red multicapa

## 2. Redes multicapa

Si recordamos el razonamiento del punto anterior donde definíamos en un plano de coordenadas los resultados del perceptrón, si intentamos separar los resultados positivos del XOR vemos que es imposible hacerlo con una sola línea. En el XOR, los puntos positivos (los resultados válidos con los que se obtiene un 1) son (0,1) y (1,0) y los negativos son (0,0) y (1,1). Es imposible separar ambos espacios (de positivos y negativos) con una sola línea recta. Necesitas dos o bien una curva. Esto se explica matemáticamente porque un perceptrón simple es matemáticamente un hiperplano. En 2D, es una recta. Si tus datos no son “linealmente separables”, el perceptrón se quedará oscilando para siempre sin encontrar una solución. Para resolver el XOR, necesitamos añadir hacer una pequeña red multicapa:

1. **Capa de entrada** formada por dos neuronas: Recibirá los valores  $x_1$  y  $x_2$
2. **Capa oculta** formada por dos o tres neuronas: Aquí es donde ocurre la magia debido a que estas neuronas crearán nuevas dimensiones.
3. **Capa de salida** formada por una neurona que nos da el resultado final de la operación: 0 o 1.

Para realizar el cálculo ya no multiplicaremos el peso por la entrada en bucle, como hacíamos antes. Ahora usaremos multiplicación de matrices. Siendo  $X$  la matriz de entrada y  $W_1$  la matriz de pesos de la capa oculta calcularemos  $Z_1 = X \cdot W_1 + b_1$  y luego aplicaremos la función de activación. En este caso usaremos la sigmoide. Para la capa de salida calcularemos  $Z_2 = A_1 \cdot W_2 + b_2$  y de nuevo activaremos con la función sigmoide. Como nota indicamos que usamos la función sigmoide debido a que es una función no lineal. Si usáramos una función lineal, por muchas capas que pongamos, la red seguiría siendo una simple combinación lineal (una sola línea recta). La no-linealidad es lo que permite “curvar” el espacio necesario para este caso.

### 2.1. Aprendizaje en varias capas

El concepto que revolucionó la IA en los 80 fue: ¿Cómo el error se calcula al final, en la salida? ¿cómo sabemos cuánto deben cambiar los pesos de la primera capa? El proceso de aprendizaje ahora se basa en estos tres pasos:

1. El *Forward Pass* o la multiplicación de las matrices y la activación

2. El cálculo del error; ¿Cuánto nos queda para el valor real?
3. El *Backpropagation* donde calculamos el «gradiente» de cada capa usando La Regla de la cadena.
4. Actualizamos los pesos restando el gradiente.

El **Gradiente** es lo que nos dice en qué dirección y con qué fuerza debemos mover el peso para que el error total disminuya lo más rápido posible. En una red neuronal, para saber cómo afecta un peso de la Capa 1 al error final (que se mide en la Salida), tenemos que aplicar **La Regla de La Cadena** a través de todas las capas intermedias. El gradiente que llega a la Capa 1 es el producto de las derivadas de las capas superiores. La derivada es como la velocidad a la que fluye la información del error. Si la derivada es alta (cercana a 1 o mayor): El error viaja con fuerza. El peso  $w_1$  recibe un mensaje claro: “¡Oye! Te has equivocado mucho, cambia tu valor rápido”. Hay aprendizaje. Si la derivada es pequeña, el error se va atenuando en cada capa. ¿Por qué usamos derivadas? El objetivo de la red es minimizar una función de Error (o Pérdida). Imagina que el error es una montaña y tú estás en la cima, a ciegas. Quieres bajar al valle (error cero). ¿Cómo sabes hacia dónde dar el paso? Tocando el suelo con el pie para ver la pendiente. Esa pendiente es la derivada. Si la derivada es positiva, el terreno sube; vas hacia atrás. Si es negativa, el terreno baja; vas hacia adelante. El uso de la regla de la cadena es una cuestión de esto anterior. En definitiva una red neuronal es una función compuesta gigante. Si tenemos dos capas, una entrada  $X$ , una salida  $Y$  y una función de activación  $\sigma$ . La función que resumiría la primera fase sería:

$$Y = \sigma_2(W_2 \cdot \sigma_1(W_1 \cdot X))$$

Cuando queremos saber cómo afecta el peso de la primera capa  $W_1$  al error final, tenemos que “deshacer” la función de fuera hacia adentro. La Regla de la Cadena nos dice que **la derivada de una función compuesta es el producto de las derivadas de sus componentes**. Usamos la derivada de la activación porque es la única forma matemática de saber cuánta responsabilidad tiene una neurona específica en el error final. Esto es exactamente lo mismo que el análisis de sensibilidad en ingeniería de sistemas. ¿Cómo afecta una pequeña variación en la entrada a la salida del sistema? La respuesta es siempre la derivada. Si definimos el error como  $E$  y recordamos que  $\sigma'$  es la derivada de la función de activación, la fórmula compacta para calcular el gradiente de la primera capa (la más profunda en el Backpropagation) es:

$$\delta_1 = \underbrace{\left( \underbrace{\overbrace{(A_2 - y)}^{\text{Error}} \odot \sigma'(Z_2)}_{\text{Gradiente Salida } (\delta_2)} \cdot W_2^T \right) \odot \sigma'(Z_1)}_{\text{Error retropropagado}}$$

1. El inicio del error:  $(A_2 - y)$  calcula cuánto nos alejamos del objetivo.
2. El filtro de la salida: Al multiplicar por  $\odot \sigma'(Z_2)$ , decidimos cuánta importancia dar a ese error según el estado de la neurona de salida.
3. El salto al pasado: Al multiplicar por  $W_2^T$ , proyectamos ese error de la salida hacia las neuronas ocultas usando los mismos pesos (pero transpuestos).
4. El filtro oculto: Finalmente,  $\odot \sigma'(Z_1)$  ajusta ese error proyectado según la sensibilidad de la capa oculta.

A continuación se muestra el bucle de aprendizaje de la multicapa implementada de forma completa en `src/multicapa.py`:

```
for epoch in range(epochs):
    # --- FORWARD PASS ---
    hidden_layer_input = np.dot(X, W1) + b1
    hidden_layer_output = sigmoid(hidden_layer_input)

    output_layer_input = np.dot(hidden_layer_output, W2) + b2
    predicted_output = sigmoid(output_layer_input)

    # --- BACKPROPAGATION ---
    error = y - predicted_output
    d_predicted_output = error * sigmoid_derivative(predicted_output)

    error_hidden_layer = d_predicted_output.dot(W2.T)
    d_hidden_layer = error_hidden_layer * sigmoid_derivative(hidden_layer_output)

    # --- ACTUALIZACION DE PESOS (Gradiente Descendente) ---
    W2 += hidden_layer_output.T.dot(d_predicted_output) * learning_rate
    b2 += np.sum(d_predicted_output, axis=0, keepdims=True) * learning_rate
    W1 += X.T.dot(d_hidden_layer) * learning_rate
    b1 += np.sum(d_hidden_layer, axis=0, keepdims=True) * learning_rate
```

Tras la aplicación del *forward pass* y el cálculo de la predicción vemos como empieza la siguiente fase, el *backpropagation*. En el código, la variable `d_predicted_output` ya representa la derivada del error respecto a la salida. A esta variable la llamaremos también **Delta de salida** ( $\delta_{out}$ ). Es básicamente el error ponderado por la pendiente o derivada de la función de activación. Necesitamos ponderar a la pendiente de la función para ver como de grande o pequeño tiene que ser el ajuste de los pesos. Para seguir propagando este error hacia adentro, ahora calculamos el reajuste en la capa intermedia u «oculta». Para actualizar los pesos de la segunda capa ( $W_2$ ), aplicamos la regla de la cadena igualmente: la variación o delta del error en este caso depende del delta de salida anterior y de los pesos de esta capa. Esto lo guardamos en `error_hidden_layer` e igual que antes lo ponderamos a la derivada de la función de activación de esa capa.

Tras el cálculo de estas deltas comenzaría la fase de *Actualización de pesos*. La actualización de pesos en la salida la estamos haciendo en `W2 += hidden_layer_output.T.dot(...)` .... Aquí estamos calculando el gradiente para la matriz de pesos completa. Usamos la transpuesta (`.T`) porque queremos relacionar cada neurona oculta con cada error de salida, creando una matriz de ajustes que coincida con las dimensiones de  $W_2$ . La actualización de pesos en la entrada sigue la misma lógica pero un paso más atrás. La hacemos en `W1 += X.T.dot(...)`. Aquí, el gradiente depende de la entrada original  $X$  y del error que hemos “retropropagado” hasta la capa oculta (`d_hidden_layer`).

Con los sesgos no tenemos una propagación. Cada sesgo se actualiza en base a su propia neurona ya que el sesgo realmente determina qué tan fácil es que la neurona se active, independientemente de la señal de entrada. Para entender bien su actualización pensemos en una ecuación lineal  $y = wx + b$ . El peso ( $w$ ) controla la pendiente (la inclinación de la línea) pero el bias ( $b$ ) controla la intersección con el eje Y (desplaza la línea hacia arriba o hacia abajo). Si solo ajustáramos los pesos, todas nuestras líneas de decisión tendrían que pasar obligatoriamente por el origen (0,0). El bias permite que la línea se mueva libremente por el espacio para rodear los datos donde sea que estén.

## 2.2. Representación matricial

Vamos a representar las diferentes matrices que más juego tienen en el ejemplo para visualizar mejor todo esto. Partimos de las dos matrices iniciales: la **matriz de datos de entrada** o  $X$ , donde la primera columna es la entrada  $x_1$  y la segunda es  $x_2$  y la **matriz de resultados esperados** o  $y$ :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 2.2.1. Forward Pass

Ahora empezamos con las matrices más importantes y relacionadas con el proceso de aprendizaje. Primeramente tenemos la **matriz de pesos de la capa oculta** o  $W_1$ . Esta matriz conecta las 2 entradas con las 2 neuronas ocultas. Es una matriz de  $2 \times 2$ . Cada columna representa los pesos que llegan a una neurona oculta específica.

$$W_1 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

Tras esta también tenemos la **matriz de Salida de la Capa Oculta** o  $A_1$  o `hidden_layer_output`). Es el resultado de multiplicar la entrada  $X$  (de  $4 \times 2$ ) por  $W_1$ . Con esto obtenemos el resultado parcial  $Z_1$  y finalizamos aplicando la función de activación (sigmoide). El resultado es una matriz de 4 filas (ejemplos) y 2 columnas (activaciones de las neuronas ocultas). Cada fila  $i$  representa cómo “ve” la capa oculta el ejemplo  $i$  del XOR.

$$Z_1 = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \right) + (b_1, b_1)$$

$$A_1 = \sigma(Z_1) = \begin{pmatrix} \sigma(z_{11}) & \sigma(z_{12}) \\ \sigma(z_{21}) & \sigma(z_{22}) \\ \sigma(z_{31}) & \sigma(z_{32}) \\ \sigma(z_{41}) & \sigma(z_{42}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{pmatrix}$$

Vamos ahora con el siguiente paso del aprendizaje. Ahora igual que antes obtenemos la salida de esta capa aplicando como entrada  $A$  (calculada anteriormente) con los pesos  $W_2$  y el sesgo apropiado. A esto lo llamamos  $Z_2$  y a esto le aplicaremos la función de activación para obtener  $A_2$  o lo que es lo mismo, la **matriz de predicción final**:

$$Z_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_2 \\ b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} \cdot w'_1 + a_{12} \cdot w'_2) + b_2 \\ (a_{21} \cdot w'_1 + a_{22} \cdot w'_2) + b_2 \\ (a_{31} \cdot w'_1 + a_{32} \cdot w'_2) + b_2 \\ (a_{41} \cdot w'_1 + a_{42} \cdot w'_2) + b_2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \sigma(Z_2) = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}$$

Cada  $\hat{y}_i$  es ahora una combinación no lineal de las activaciones ocultas. Si la capa oculta ha hecho bien su trabajo, habrá separado los puntos de tal manera que para el caso (0,1) y (1,0), los valores de  $a_{i1}$  y  $a_{i2}$  activen con fuerza a  $W_2$ , mientras que para (0,0) y (1,1) la combinación resulte en un valor que la sigmoide convierta en casi 0.

### 2.2.2. Backpropagation o propagación del error

Entramos en la parte más profunda del backpropagation de la IA. Aquí es donde el error viaja hacia el pasado. Primeramente calculamos cuánto error hay en la salida final. Este valor también lo llamaremos **delta de salida** y se representa en código con la variable `d_predicted_output`. Es el producto elemento a elemento (Hadamard product, representado por  $\odot$ ) entre el error residual y la derivada de lo que salió. Esto nos devuelve finalmente una matriz  $4 \times 1$ :

$$\delta_{out} = (y - A_2) \odot \sigma'(Z_2)$$

$$\delta_{out} = \begin{pmatrix} (y_1 - \hat{y}_1) \cdot \sigma'(z_{2,1}) \\ (y_2 - \hat{y}_2) \cdot \sigma'(z_{2,2}) \\ (y_3 - \hat{y}_3) \cdot \sigma'(z_{2,3}) \\ (y_4 - \hat{y}_4) \cdot \sigma'(z_{2,4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{out,1} \\ \delta_{out,2} \\ \delta_{out,3} \\ \delta_{out,4} \end{pmatrix}$$

Aquí es donde aplicamos la línea: `error_hidden_layer = d_predicted_output.dot(W2.T)`. Como ingeniero, piensa en esto como una proyección inversa: estamos enviando el error de salida de vuelta a través de los mismos cables ( $W_2$ ) por los que vino.

$$\text{Error}_{hidden} = \delta_{out} \times W_2^T$$

$$\text{Error}_{hidden} = \begin{pmatrix} \delta_{out,1} \\ \delta_{out,2} \\ \delta_{out,3} \\ \delta_{out,4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w'_1 & w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{out,1} \cdot w'_1 & \delta_{out,1} \cdot w'_2 \\ \delta_{out,2} \cdot w'_1 & \delta_{out,2} \cdot w'_2 \\ \delta_{out,3} \cdot w'_1 & \delta_{out,3} \cdot w'_2 \\ \delta_{out,4} \cdot w'_1 & \delta_{out,4} \cdot w'_2 \end{pmatrix}$$

El resultado es una matriz de  $4 \times 2$ . Cada columna representa cuánto ruido o error le llegó a cada una de las 2 neuronas ocultas. Finalmente, para saber cuánto debemos cambiar los pesos  $W_1$ , necesitamos filtrar ese error por la sensibilidad de la activación de la capa oculta. Es decir, multiplicamos por la derivada de la sigmoide de la capa oculta. Esto se representa en el código con la variable `d_hidden_layer`:

$$\delta_{hidden} = \text{Error}_{hidden} \odot \sigma'(Z_1)$$



$$\delta_{hidden} = \begin{pmatrix} \text{err}_{1,1} \cdot \sigma'(z_{1,1}) & \text{err}_{1,2} \cdot \sigma'(z_{1,2}) \\ \text{err}_{2,1} \cdot \sigma'(z_{2,1}) & \text{err}_{2,2} \cdot \sigma'(z_{2,2}) \\ \text{err}_{3,1} \cdot \sigma'(z_{3,1}) & \text{err}_{3,2} \cdot \sigma'(z_{3,2}) \\ \text{err}_{4,1} \cdot \sigma'(z_{4,1}) & \text{err}_{4,2} \cdot \sigma'(z_{4,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{h1,1} & \delta_{h2,1} \\ \delta_{h1,2} & \delta_{h2,2} \\ \delta_{h1,3} & \delta_{h2,3} \\ \delta_{h1,4} & \delta_{h2,4} \end{pmatrix}$$

Mientras que `error_hidden_layer` es el error en bruto que le llega a la capa oculta desde la salida, `d_hidden_layer` es el error ya ponderado por la pendiente de la activación. Si una neurona oculta estaba en la zona plana de la sigmoide (valor muy alto o muy bajo), su derivada será casi 0, y por tanto, su `d_hidden_layer` será casi 0. Dicho de otra manera, si la neurona ya estaba muy convencida de su respuesta (activación saturada), no le importa el error que le mandes porque no va a cambiar sus pesos.

### 2.2.3. Actualización de pesos

Para completar el ciclo, vamos a ver cómo ese error que ha viajado hacia atrás se convierte finalmente en instrucciones de ajuste para los pesos. En el código, estas son las líneas de Gradiente Descendente. La variable en el código que vamos a desarrollar ahora sería: `W2 += hidden_layer_output.T.dot(...) * learning_rate`. En ella se actualizan los valores de  $W_2$ . Para ajustar esos pesos (recordamos que són los que conectan la capa oculta con la salida), multiplicamos la activación que salió de la capa oculta ( $A_1^T$ ) y que calculamos en la fase de *Forward Pass* por el delta de salida ( $\delta_{out}$ ) obtenido en la fase de *backpropagation*. En la formulación usaremos  $\eta$  para referirnos al *learning rate*. El resultado es una matriz de  $[2 \times 1]$ , que encaja perfectamente con las dimensiones de  $W_2$ :

$$\Delta W_2 = \eta \cdot \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_{out,1} \\ \delta_{out,2} \\ \delta_{out,3} \\ \delta_{out,4} \end{pmatrix} \right)$$

$$\Delta W_2 = \eta \cdot \begin{pmatrix} \sum(a_{i1} \cdot \delta_{out,i}) \\ \sum(a_{i2} \cdot \delta_{out,i}) \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos algo similar con los pesos iniciales o  $W_1$ . La variable en el código es: `W1 += X.T.dot(d_hidden_layer) * learning_rate`. Aquí es donde resolvemos el misterio del XOR. Usamos la entrada original ( $X^T$ ) y la multiplicamos por el error que hemos calculado para la capa oculta ( $\delta_{hidden}$ ). El resultado es una matriz de  $[2 \times 2]$ , lista para sumarse a  $W_1$ :

$$\Delta W_1 = \eta \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_{h1,1} & \delta_{h2,1} \\ \delta_{h1,2} & \delta_{h2,2} \\ \delta_{h1,3} & \delta_{h2,3} \\ \delta_{h1,4} & \delta_{h2,4} \end{pmatrix} \right)$$

$$\Delta W_1 = \eta \cdot \begin{pmatrix} \sum(x_{i1} \cdot \delta_{h1,i}) & \sum(x_{i1} \cdot \delta_{h2,i}) \\ \sum(x_{i2} \cdot \delta_{h1,i}) & \sum(x_{i2} \cdot \delta_{h2,i}) \end{pmatrix}$$

Es importante fijarse en la belleza de la operación  $X^T \cdot \delta_{hidden}$ . Si la entrada  $x_{11}$  fue 0, no importa cuán grande sea el error  $\delta_{h1,1}$ , el producto será 0. Esto tiene todo el sentido lógico: si una entrada fue

cero, no pudo haber contribuido al error final de esa neurona, por lo tanto, no hay razón para cambiar el peso que viene de ella.

Para terminar dejamos aquí una relación entre las variables usadas en el código fuente y su simbología matemática utilizada en el desarrollo:

- **X:** ( $X$ ) Matriz de Entrada: Los 4 casos del XOR ( $4 \times 2$ ).
- **y:** ( $y$ ) Etiquetas Reales: Los resultados deseados ( $4 \times 1$ ).
- **W1, W2:** ( $W_1, W_2$ ) Matrices de Pesos: Las conexiones entre capas.
- **b1, b2:** ( $b_1, b_2$ ) Vectores de Sesgo (Bias): El umbral de activación.
- **hidden\_layer\_output:** ( $A_1$ ) Activación Oculta: La salida de la capa intermedia.
- **predicted\_output:** ( $A_2$  o  $\hat{y}$ ) Predicción Final: La salida de la red.
- **error:** ( $y - A_2$ ) Error Residual: Diferencia bruta entre realidad y predicción.
- **d\_predicted\_output:** ( $\delta_2$  o Delta 2) Gradiente de Salida: Error de salida multiplicado por la derivada.
- **error\_hidden\_layer:** ( $E_{hidden}$ ) Error Retropropagado: El error que “rebota” hacia la capa oculta.
- **d\_hidden\_layer:** ( $\delta_1$  o Delta 1) Gradiente Oculto: El error en la capa oculta listo para ajustar  $W_1$ .
- **learning\_rate:** ( $\eta$ ) Tasa de Aprendizaje: El factor de escala de los ajustes.

### 2.3. Estudio del error y del aprendizaje

En la gráfica que se muestra a continuación se ve un estudio de como evoluciona el error en las diferentes iteraciones del aprendizaje con diferentes tasas de aprendizaje  $\eta$ . Recordamos que para calcular el error durante el aprendizaje usamos en cada iteración la formula del Error Cuadrático Medio aunque realmente lo que propagábamos era su derivada. Con `square()` elevamos cada miembro del array al cuadrado y con `mean()` calculamos la media de todos los valores del vector de errores. Si se usa una tasa muy grande como  $\eta = 10$  el modelo “saltará” tan fuerte que nunca caerá en el valle del error. Verás que los resultados oscilan locamente. Por contra si usamos una tasa muy baja el modelo tardará millones de épocas en aprender. Es como intentar vaciar el océano con una cuchara.

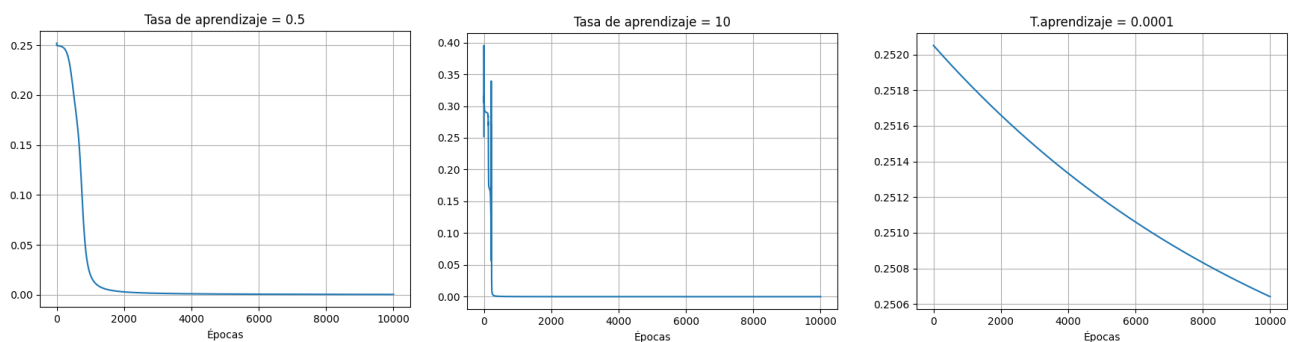


Figura 2: Evolución del error con diferentes tasas de aprendizaje

Usamos una tasa intermedia ( $\eta = 0,5$ ). Verás que al principio el error baja muy poco (la red está explorando), luego hay una caída vertical pronunciada (ha encontrado la lógica del XOR) y finalmente se estabiliza cerca de cero. Si el error se queda plano en un valor alto (por ejemplo, 0.25),

significa que la red se ha quedado atrapada en un mínimo local. En el XOR, esto suele significar que la red ha decidido que «la mejor opción es decir siempre 0.5», porque no logra entender la lógica no lineal. En estos casos es posible que necesitemos reiniciar la red debido a la mala asignación de pesos aleatoria al comienzo. Como los pesos iniciales son aleatorios, a veces la red empieza en una posición «desafortunada» del mapa matemático. Se pueden utilizar otras técnicas (como Xavier/Glorot) para realizar una preasignación más eficiente que la simplemente aleatoria.

Si el error colapsa hacia cero alrededor de las 1500 iteraciones (como en el caso de usar  $\eta = 0,5$ ) en un problema como el XOR, significa que la tasa de aprendizaje está muy bien balanceada. Que la curva baje muy rápido tampoco es siempre un buen síntoma. Por ejemplo, si cayera a las 10 iteraciones: Sospecharíamos de overfitting (sobreajuste) o de que el problema es demasiado simple para la potencia de la red. A veces también puede ocurrir que una caída rápida se detiene en seco antes de llegar a cero. Eso significa que la red «se ha rendido» en un punto que le parece aceptable pero que no es la solución óptima. Para confirmar que esa tasa de 1500 es perfecta, haz esta prueba: fíjate en el final de la curva. Si es plana y suave al final tu tasa es perfecta. La red ha aterrizado suavemente en el mínimo. Si el final de la curva tiene ruido (pequeños dientes de sierra) tu tasa es un poco alta. La red ha llegado al fondo pero está rebotando un poco en las paredes del valle.

### 3. Reconocimiento de patrones

Hasta ahora, tu red solo ha tenido que distinguir entre 4 combinaciones. Pero, ¿qué pasa cuando la entrada no son dos bits (0 o 1), sino una imagen de 28x28 píxeles de un número de 0 a 9 escrito a mano? El dataset MNIST es el “Hola Mundo” del Deep Learning. Son imágenes de dígitos del 0 al 9. MNIST Es una extensa colección de base de datos que se utiliza ampliamente para el entrenamiento de diversos sistemas de procesamiento de imágenes. La base de datos MNIST consta de 60.000 imágenes de entrenamiento y 10.000 imágenes de prueba. Ahora nuestra entrada  $X$  ya no es una matriz de  $4 \times 2$ . Ahora cada imagen se aplanan en un vector de 784 números (28 píxeles x 28 píxeles). Si procesamos un *batch* o lote de 64 imágenes,  $X$  será  $[64 \times 784]$ . La salida  $Y$  ya no es un solo valor. Ahora necesitamos saber la probabilidad de que sea un 0, un 1, un 2... hasta el 9. Por tanto, la salida tiene 10 neuronas.

Para procesar las imágenes comenzaremos aplicando un proceso de aplanamiento o *flattening*. Una imagen del dataset MNIST es una cuadrícula de  $28 \times 28$  píxeles. Cada píxel tiene un valor (normalmente de 0 a 255, que luego normalizamos a  $[0,1]$ ) que indica qué tan oscuro es ese punto. Como nuestras capas ocultas esperan un vector (una fila de entradas), no podemos meterle un “cuadrado”. Tenemos que desenrollar o aplanar la imagen. El proceso es justo un aplanamiento pues tomamos la primera fila de 28 píxeles, luego pegamos la segunda fila a continuación, luego la tercera, y así sucesivamente hasta la fila 28. Pasamos de un tensor de  $[28,28]$  a un vector de  $[784]$ . Si tenemos un *batch* o lote de, por ejemplo, 100 imágenes, nuestra matriz de entrada  $X$  para la red tendrá unas dimensiones de:  $X=[100 \times 784]$ . Esto significa que cada fila de tu matriz es una imagen completa pero estirada.

En el XOR usamos la Sigmoide, pero para redes más profundas existe un problema importante con esta función: El gradiente desvaneciente o *Vanishing Gradient*, del que hablaremos a continuación. Otro problema ahora es que en la salida necesitamos varias neuronas, en concreto 10. Así cada una nos devolverá una probabilidad de que el patrón de la entrada es el número asociado a ellas. En el XOR, la salida era un valor entre 0 y 1. En clasificación de números, queremos que la red nos diga: «Estoy un 80 % seguro de que es un ‘5’, un 15 % de que es un ‘3’ y un 5 % de que es un ‘6’». Para esto usamos la función Softmax en la última capa. Lo que hace es agarrar los valores brutos de salida y convertirlos en una distribución de probabilidad que suma exactamente 100 %.

$$\text{softmax}(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum e^{x_j}}$$

Otro cambio importante es el cálculo del error. Ahora usaremos la función de la **Entropía cruzada** o *Cross Entropy* de la que hablaremos más adelante. La principal ventaja de esta función es que aumenta la rapidez del aprendizaje de la red. En resumen, esta nueva red tendrá la siguiente estructura:

- **Capa de Entrada ( $X$ ):** Ya no son 2 bits. Aplanamos la imagen en un vector de 784 neuronas. Pues cada imagen se aplanan en un vector de  $28 \times 28 = 784$ .
- **Capa Oculta:** Digamos que elegimos 128 neuronas para que la red tenga “memoria” suficiente para las formas de los números.
- **Capa de Salida:** Ahora necesitamos 10 neuronas (una para cada dígito del 0 al 9).

El desarrollo matricial ahora nos quedaría de la siguiente forma:

$$Z_1 = X_{batch \times 784} \cdot W_{1(784 \times 128)} + b_{1(128)}$$

$$A_1 = \text{ReLU}(Z_1)$$

$$Z_2 = A_{1(batch \times 128)} \cdot W_{2(128 \times 10)} + b_{2(10)}$$

$$A_2 = \text{Softmax}(Z_2)$$

El primer cambio se aprecia en  $W_1$  donde vemos que tiene 100,352 pesos ( $784 \times 128$ ). Esto es solo en la primera capa. El aumento de la complejidad es apreciable pues pasamos de tener que reajustar apenas 4 pesos en esta primera capa en el ejemplo anterior a más de 100 mil en este modelo. Vamos ahora a resumir el bucle de entrenamiento igual que hicimos en la red multicapa clásica del ejemplo para el XOR:

```
for epoch in range(epochs):
    # 1. Forward Pass con Softmax
    z1 = np.dot(X_train, W1) + b1
    a1 = relu(z1) # Cambiamos Sigmoide por ReLU

    z2 = np.dot(a1, W2) + b2
    predicted_output = softmax(z2)

    # 2. El gradiente con la Cross-Entropy
    d_output = predicted_output - y_train

    # 3. Backpropagation
    error_hidden = d_output.dot(W2.T)
    d_hidden = error_hidden * relu_derivative(z1)

    # 4. Actualizacion
    W2 -= learning_rate * a1.T.dot(d_output)
    W1 -= learning_rate * X_train.T.dot(d_hidden)
```

En el XOR, tu salida era un punto. Aquí, tu salida es una distribución. Si la red ve un “3” escrito de forma extraña, la neurona del “3” se encenderá mucho (digamos 0.7), pero la del “8” también podría encenderse un poco (0.2) porque se parecen. El Softmax es el que gestiona esa competencia entre neuronas. El valor que devuelve en `predicted_output` será siempre un vector que suma 1 (por ejemplo `[0.1, 0.0, 0.8, ...]`). El gradiente de la Entropía cruzada es sorprendentemente simple: `# (Predicción - Realidad)`. Si `y_train` es `[0, 0, 1, 0...]` (es un ‘2’) `# y predicted` es `[0.1, 0.1, 0.7, 0.1...]`, el error es la diferencia. La fase de propagación del error hacia atrás es similar aunque ahora usaremos la derivada de ReLU.

### 3.1. ReLU y el gradiente desvaneciente

El paso de Sigmoid a ReLU (Rectified Linear Unit) es, probablemente, el avance más sencillo pero más importante que permitió que las redes neuronales pasaran de tener 2 capas a tener cientos. Ya se ha explicado anteriormente el problema del gradiente desvaneciente. Si observamos la curva de la sigmoide, vemos que sus valores de entrada están comprimidos entre el 0 y el 1.

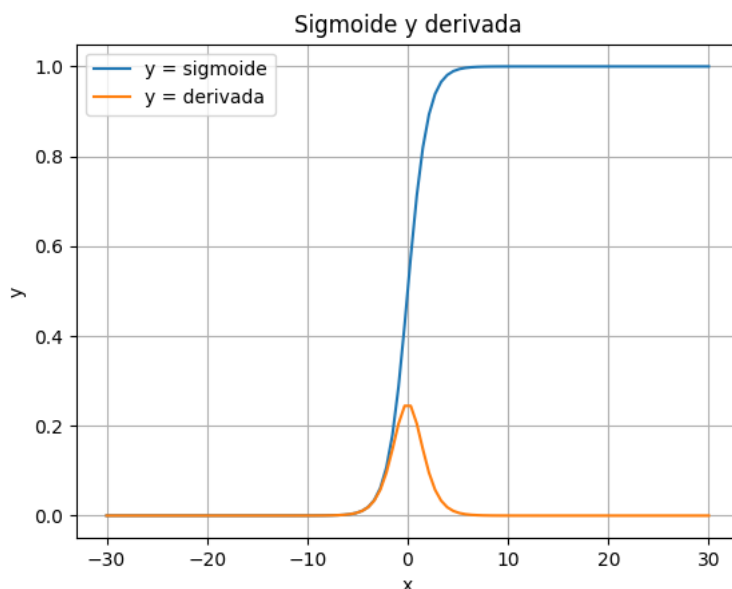


Figura 3: Curva de la sigmoide y su derivada

El problema se encuentra en su derivada cuyo valor máximo es 0.25. Eso es cuando la entrada es 0. Si no lo es, este valor se va rápidamente a 0. En una red con múltiples capas como puede ser la necesaria para MNIST necesitamos aplicar la regla de la cadena con todas ellas y acabamos multiplicando valores muy pequeños (0.25 en el mayor de los casos) o incluso 0. El resultado es que las capas profundas y cercanas a la salida si «aprenden» algo y actualizan sus pesos pero a medida que nos acercamos a las primeras capas, a estas les llega el delta casi reducido a 0 y por lo tanto no ajustarán sus pesos nada, ni se producirá aprendizaje alguno. Para solucionar esto usaremos ReLU, cuya función está formulada anteriormente. ReLU es una función “a trozos” extremadamente simple, y ahí reside su genio:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Su derivada es la clave pues es similar. Para el primer caso es 1 y para el segundo caso es 0. Al multiplicar gradientes en la Regla de la Cadena, multiplicar por 1 no reduce la señal. El error viaja íntegro desde la salida hasta la entrada, sin importar cuántas capas haya por medio. Esto permite que las redes sean mucho más profundas. Además se produce una mejora computacional importante debido a que es una función mucho más sencilla de computar (un simple `if`). ReLU tiene un pequeño riesgo. Si una neurona recibe un golpe de gradiente muy fuerte y sus pesos se vuelven tan negativos que su entrada siempre es  $< 0$ , su salida será siempre 0 y su derivada siempre 0. Esa neurona «muere» y deja de aprender para siempre. De ahí que también usemos variantes como Leaky ReLU que deja pasar un poquito de información negativa ( $0.01x$ ) para que la neurona tenga una oportunidad de «resucitar».

### 3.2. Propagación del error con entropía cruzada

En la red multicapa usamos para calcular el error que propagábamos la función del Error Cuadrático Medio o MSE. Realmente usábamos su derivada justo en la línea `error = y - predicted_output`. Si vemos la función del error cuadrático medio o  $E$  entendemos que su derivada sea la indicada en el código. El  $\frac{1}{2}$  se añade por pura conveniencia matemática para que se cancele al derivar:

$$E = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2 \quad \frac{\partial E}{\partial \hat{y}} = -(y - \hat{y})$$

En esta nueva red para reconocer patrones usaremos una nueva función para calcular el error llamada **Entropía cruzada** o *Cross Entropy*. Su derivada es mucho más agresiva. Si la red está muy segura de que un número es un “3” pero en realidad es un “8”, la Cross-Entropy genera un gradiente gigantesco para obligar a la red a cambiar rápido.

Una vez que la red ha procesado ese vector de 784 píxeles a través de las capas y llegamos a la salida, tenemos 10 neuronas (una por cada dígito). Gracias a la función Softmax, estas 10 neuronas nos dan probabilidades ya que convierte números brutos en una «repartición de apuestas» o distribución de probabilidades. Supongamos que le pasamos la imagen de un “3”. En ese caso tendremos un vector de salida esperada  $y$  que compararemos con el vector de salida predicha u obtenida  $\hat{y}$ . Para interpretar bien ambos vectores hay que entender que el primer número es la salida de la primera neurona (la asociada al “0”), el segundo el de la segunda neurona o la asociada al “1” y así para todo el vector.

$$y = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\hat{y} = [0,01, 0,02, 0,05, \underline{0,70}, 0,02, 0,10, 0,0, 0,0, 0,10, 0,0]$$

El error ( $L$ ) se calcula solo mirando la neurona que debería haber acertado. Esto es la cuarta o la correspondiente al número tres con un resultado de 0,70. Como en el vector  $y$  casi todos son cero, la fórmula se reduce a:

$$L = - \sum_{i=0}^9 y_i \cdot \ln(\hat{y}_i) = -\ln(\hat{y}_4)$$

Aunque la fórmula del Softmax es compleja y la de la Entropía Cruzada tiene logaritmos, cuando calculas la derivada para el *Backpropagation* para saber cuánto error enviar atrás, ocurre una simplificación mágica:

$$\frac{\partial L}{\partial Z_2} = \hat{y} - y$$

Es exactamente la misma resta simple usábamos en el XOR anteriormente. Si la red dijo 0.70 para el “3” y la realidad era 1.0, el error es  $-0,30$ . Si la red dijo 0.10 para el “5” y la realidad era 0.0, el error es 0,10. Esa diferencia es la que fluye hacia atrás para ajustar los 100,000 pesos de tu red. Vamos ahora a explicar la mejora que obtenemos usando esta función frente al MSE anterior. Cuando usas MSE con una Sigmoide, la red sufre un fenómeno llamado Saturación. Si la red está muy equivocada (por ejemplo, la salida real es 1 pero la red predice 0.001), el valor de la predicción está en la zona plana de la sigmoide. Al calcular el error para el backpropagation, multiplicas por la derivada de la sigmoide:

$$\text{Gradiente} = (y - \hat{y}) \cdot \underbrace{\sigma'(z)}_{\text{¡Casi cero!}}$$

Aunque el error ( $y - \hat{y}$ ) es muy grande (casi 1), al multiplicarlo por una derivada que es casi 0, el gradiente final es diminuto. La red se queda atascada: sabe que está mal, pero no tiene fuerza para moverse porque la pendiente es plana. Cuando usas Cross-Entropy, la función de coste está diseñada específicamente para cancelar esa zona plana de la sigmoide (o softmax). La Cross-Entropy tiene un logaritmo ( $\ln$ ) cuya derivada es  $1/x$ . Al aplicar la regla de la cadena para obtener el gradiente, el término que “aplastaba” el aprendizaje en la sigmoide desaparece matemáticamente. Mientras que con MSE si la red falla por mucho, el gradiente es pequeño (porque la sigmoide es plana al final) y el aprendizaje es lento al principio, con Cross-Entropy: Si la red falla por mucho, el gradiente es máximo. Cuanto más equivocada está la red, más fuerte es el «latigazo» que la obliga a corregir.

### 3.3. Arquitectura de red para MNIST

En el XOR solo necesitabas una capa para separar puntos. Para reconocer números (MNIST), la primera capa oculta puede aprender a detectar bordes y líneas, mientras que la segunda capa combina esos bordes para reconocer curvas y círculos (como los de un “8” o un “0”). Vamos a seguir un esquema entonces a 4 capas:  $[768 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 10]$ :

- Entrada ( $X$ ):  $[\text{Batch} \times 784]$  Lote de imágenes aplanadas.
- Capa Oculta 1 ( $W_1$ ):  $[784 \times 128]$ . Transforma píxeles en rasgos básicos.
- Capa Oculta 2 ( $W_2$ ):  $[128 \times 64]$ . Transforma rasgos básicos en formas complejas.
- Capa de Salida ( $W_3$ ):  $[64 \times 10]$ . Clasifica las formas en dígitos del 0 al 9.

Usaremos dos capas debido a que se gana eficiencia en este reparto de tareas. La profundidad suele ser sinónimo de inteligencia en una red neuronal. Esta profundidad permite a la red entender conceptos jerárquicos. El ancho de la red permite recordar muchos detalles específicos. A mayor ancho la red tiene más capacidad de memoria. Respecto al dimensionado de las capas diremos que, mientras que el 128 de la capa de entrada es una obligación física para almacenar el aplanado de las imágenes (explicado en el apartado anterior), el 128 y el 64 de las capas siguientes son una decisión de diseño. Para el 128 no hay una ley física que marque. Podría ser 100, 200 o 512. Sin embargo, en computación usamos potencias de 2 ( $2^7 = 128$ ) porque las GPUs y CPUs gestionan mucho más rápido la memoria en bloques de este tamaño. Con el 64 pasa lo mismo. Se han diseñado ambas capas como un embudo: Empiezas con 784 detalles brutos (píxeles sueltos, la primera capa los resume en 128 rasgos (líneas, ángulos, bordes), la segunda capa resume esos rasgos en 64 conceptos más complejos (curvas cerradas, cruces) y finalmente todo se reduce a 10 categorías (los dígitos). Podemos jugar a modificar estos números. Si pones números muy pequeños, la red tiene un «cuello de botella». Estás intentando resumir mucha información en muy pocas neuronas. La red será muy rápida, pero probablemente sea menos inteligente y no aprenda bien los detalles. Mientras que si pones números muy grandes la red tendrá una memoria fotográfica increíble. El problema es que será muy lenta de entrenar y, lo más peligroso, podría sufrir de Overfitting, asunto del que hablaremos a continuación. No debemos olvidar además que para que la multiplicación de matrices funcione, la regla es que **la salida de una capa debe ser la entrada de la siguiente**. Resumimos por tanto como queda el proceso matricial o *Forward Pass*:

1. Capa 1:  $Z_1 = X \cdot W_1 + b_1 \Rightarrow A_1 = \text{ReLU}(Z_1)$
2. Capa 2:  $Z_2 = A_1 \cdot W_2 + b_2 \Rightarrow A_2 = \text{ReLU}(Z_2)$
3. Capa 3:  $Z_3 = A_2 \cdot W_3 + b_3 \Rightarrow A_3 = \text{Softmax}(Z_3)$

Ahora el error ahora viajará a través de tres capas por lo que la cadena se alarga y se complica. Para llegar a actualizar  $W_1$  (la capa más alejada de la salida) la señal de error debe propagarse de la

siguiente manera: Surge en la salida ( $\delta_3 = A_3 - y$ ), luego pasa por  $W_3^T$  para llegar a la Capa 2 y por último pasa por  $W_2^T$  para llegar a la Capa 1. Por lo que la fórmula de la Delta 1 ( $\delta_1$ ) compelta sería:

$$\delta_1 = \underbrace{((A_3 - y) \cdot W_3^T)}_{\delta_3} \odot \text{ReLU}'(Z_2) \cdot W_2^T \odot \text{ReLU}'(Z_1)$$

Antes de terminar hablaremos del problema del *overfitting* (en español conocido como sobreajuste) que hemos mencionado anteriormente. Es el enemigo número uno del aprendizaje automático. En términos sencillos, ocurre cuando tu red neuronal tiene tanta memoria que, en lugar de aprender a reconocer los patrones de un número, se memoriza las imágenes exactas de tu set de entrenamiento. Igual que un estudiante que, en lugar de entender las fórmulas de física, se memoriza de memoria las respuestas de los 100 problemas del libro. Si en el examen le pones el problema 101 (aunque sea igual de fácil), suspenderá porque no sabe razonar, solo repetir. Para detectar el overfitting, los ingenieros dividen los datos en dos grupos: Entrenamiento (Training) y Prueba (Testing/Validation). Los primeros son los datos que ve la red y que usa para ajustar los procesos. Los segundos son datos nuevos que la red nunca ha visto. Detectar este sobreajuste puede hacerse cuando el error en el entrenamiento es casi 0. La red parece casi perfecta con lo que conoce. Sin embargo, el error en la prueba con los datos reales es muy alto. Para evitar esto podemos aplicar varias técnicas:

- **Early Stopping** (Parada temprana): Dejamos de entrenar en el momento en que el error de Prueba deja de bajar y empieza a subir, aunque el error de Entrenamiento siga bajando.
- **Dropout** (Abandono): Durante el entrenamiento, «apagamos» aleatoriamente algunas neuronas en cada paso (por ejemplo, el 20 %). Esto obliga a la red a no depender de una sola neurona o camino, forzándola a crear representaciones más robustas y generales.
- **Regularización** (L2): Añadimos una penalización al error si los pesos (W) se vuelven demasiado grandes. Pesos gigantes suelen ser señal de que la red está forzando una curva muy compleja para pasar exactamente por todos los puntos.

### 3.4. Desarrollo del modelo

Para este desarrollo usaremos PyTorch. Principalmente porque PyTorch hace el Backpropagation automáticamente por ti. Tú solo defines el *Forward*, y él se encarga de las derivadas de la regla de la cadena que tanto nos costó calcular anteriormente. El código está completamente desarrollado en `src/mnist.py`. Necesitamos instalar las librerías de Python `torchy torchvision` usando `pip3`.

```
class RedMNIST(nn.Module):
    def __init__(self):
        super(RedMNIST, self).__init__()
        self.flatten = nn.Flatten()
        self.stack = nn.Sequential(
            nn.Linear(784, 128),
            nn.ReLU(),
            nn.Linear(128, 64),
            nn.ReLU(),
            nn.Linear(64, 10),
            nn.LogSoftmax(dim=1)
        )

    def forward(self, x):
        x = self.flatten(x)
        return self.stack(x)
```



El primer punto importante del código es la preparación de los datos. De esto se encarga **DataLoader**: En lugar de darle las 60,000 imágenes de golpe, se las damos en *batches* o lotes de 64. El conjunto de todas las imágenes están ubicadas en **trainset**.

Vamos ahora a explicar el código del modelo. En el constructor inicializaremos los parámetros (pesos y sesgos). El método **self.flatten** será el que reciba la imagen y la aplane. de ahí comenzaremos a aplicar toda el flujo de la red que definimos capa a capa el método **nn.Sequential()**. Este método es realmente el cerebro de nuestra red y que hemos explicado en el apartado anterior<sup>1</sup>. Desde fuera del modelo, el punto de inicio será la llamada al método **forward()**. Cuando llamemos a ese método habrá que pasarle un lote de imágenes en el parámetro **x**. Para terminar con el constructor diremos que la función **nn.Linear()** crea automáticamente las matrices de pesos y el vector de bias con las dimensiones correctas. Además, inicializa los pesos de forma inteligente (usando Xavier/Glorot), así que ya no tienes que preocuparte por si empiezan en cero.

```
criterion = nn.NLLLoss()
optimizer = optim.Adam(model.parameters(), lr=0.003)

for epoch in range(2):
    running_loss = 0.0
    for images, labels in trainloader:
        optimizer.zero_grad()          # Reset de gradientes
        outputs = model(images)         # Forward
        loss = criterion(outputs, labels) # Error
        loss.backward()                 # Backpropagation
        optimizer.step()                # Ajuste de pesos
        running_loss += loss.item()
    print(f"Epoca {epoch+1} - Error: {running_loss/len(trainloader):.4f}")
```

Vamos ahora a explicar el proceso de entrenamiento. Para acortar la prueba únicamente realizaremos dos vueltas pero podríamos incrementarlo si quisiéramos. En cada imagen del **trainloader**, además de reiniciar los gradientes, corremos el modelo con la imagen que toque y calculamos el error con el método **criterion()**. Este método recibe el vector de salida y el vector asociado a la imagen o **labels** con los resultados que deberíamos haber obtenido. Una vez obtenido este error lo propagaremos hacia atrás con **loss.backward()** y ajustaremos los pesos de toda la red usando **optimizer.step()**. En **running\_loss** iremos acumulando los errores de cada lote de 64 imágenes. La idea es que al final de la época calculemos la media dividiendo ese **running\_loss** entre el número de lotes que hemos tratado. Como curiosidad técnica diremos que el uso de **loss.item()** provoca que el computador no consuma tanta memoria RAM. La variable **loss** no es un número normal de Python; es un Tensor de un solo elemento. Este tensor no solo guarda el valor del error (ej. 2.34), sino que también guarda todo el Grafo Computacional (el historial de todas las operaciones matemáticas que llevaron a ese número) para poder hacer el *Backpropagation*. Si hicieramos un **running\_loss += loss** estaríamos guardando el tensor completo junto con su historial de cálculos. Al final de la época, tendrías una cadena gigante de miles de operaciones guardadas en tu memoria RAM. Tu ordenador se quedaría sin memoria rápidamente (Memory Leak). De ahí que usemos **loss.item()**, así extraemos del tensor el valor numérico puro (un float), descartando el resto y salvando memoria en cada época.

Por último explicaremos el uso del optimizador Adam. Antes, en redes anteriores hemos usado una tasa de aprendizaje fija o  $\eta$ . Adam es un optimizador con memoria y adaptabilidad. Si el error baja siempre en la misma dirección, Adam “acelera” (como una bola rodando por una colina). A esto le llamamos *Momentum*. Adam también posee una tasa adaptativa. Si una neurona recibe gradientes muy bruscos, Adam le baja la velocidad individualmente para que no se vuelva loca. Si otra neurona casi no se mueve, le sube la velocidad para que aprenda más rápido. Es el estándar de la industria porque hace que casi cualquier red converja mucho más rápido y sin romperse la cabeza ajustando la tasa de aprendizaje manualmente.

---

<sup>1</sup>Usamos **nn.LogSoftmax** en lugar de **nn.Softmax** porque trabajar con logaritmos de probabilidades es numéricamente más estable. Evita que el ordenador trabaje con números tan pequeños que se conviertan en cero por error

### Prácticas propuestas:

1. Realiza una implementación de la Red XOR de la sección anterior pero usando PyTorch. (Hecho en `src/multicapa-ptorch.py`)
2. Realiza una implementación de una Red multicapa con PyTorch que aprenda a resolver ecuaciones de segundo grado. (Hecho en `src/ecuaciones-ptorch.py` y documentado en `pdf/prac-01-ecuaciones.pdf`).
3. Modifica la arquitectura presentada en este apartado añadiendo una tercera capa oculta de 32 neuronas, cambiando el analizador a uno de tipo estocástico (`optim.SGD`) y observa que ocurre con `running_loss`.

## 4. Bibliografía recomendada

- Deep Learning. Ian Goodfellow, Yoshua Bengio y Aaron Courville. *Es el libro de referencia absoluto. Ian Goodfellow es el inventor de las GANs. Los capítulos sobre MLP (Multilayer Perceptrons) y Optimización. Te dará el rigor matemático detrás de por qué la Cross-Entropy y Adam funcionan tan bien.* (<https://www.deeplearningbook.org/>).
- Neural Networks and Deep Learning. Michael Nielsen. *Un enfoque muy visual. Es un libro online interactivo que explica el Backpropagation mejor que nadie en el mundo. El capítulo 2 es una obra maestra sobre la matemática del error. Si quieres ver diagramas claros de cómo fluyen los pesos, este es tu sitio.* (<http://neuralnetworksanddeeplearning.com/>).
- Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow. Aurélien Géron. *Es el manual de ingeniería más vendido. Aunque el título menciona TensorFlow, los conceptos de arquitectura y pre-procesamiento de datos (como el MNIST) son universales. Fundamentales, las secciones sobre Regulación, Batch Normalization y cómo evitar el Overfitting.*
- Deep Learning with PyTorch. Eli Stevens, Luca Antiga y Thomas Viehmann.