Κωνσταντίνος Χαϊδεμένος

Sdi2200262

Αριθμητική Ανάλυση

1η εργαστηριακή άσκηση

Links στα μέρη εργασίας:

* [Εισαγωγή - Επεξηγήσεις](#Bookmark1)
* [Αποτελέσματα Εκτέλεσης](#Bookmark2)
* [Παρατηρήσεις αποτελεσμάτων - Σύγκριση Τέμνουσας με Newton-Raphson (NR)](#Bookmark3)
* [Ερώτημα 1.4 - Θεωρία](#Bookmark4)

Το directory του προγράμματος περιέχει 3 αρχεία:

* Main.m - περιέχει τις απαντήσεις των ερωτημάτων και τις κλήσεις των συναρτήσεων παρακάτω
* Syndiasmos\_D\_NR.m - υλοποίηση συνδιαστικής μεθόδου Διχοτόμισης και Newton-Raphson (NR)
* Syndiasmos\_D\_T.m - υλοποίηση συνδιαστικής μεθόδου Διχοτόμισης και Newton-Raphson (NR)

Ο κώδικας των υλοποιήσεων των παραπάνω μεθόδων είναι από τον αντίστοιχο φάκελο στο e-class του μαθήματος. Υπάρχουν μερικές αλλαγές μόνο για να επιτευχθεί ο συνδιασμός των μεθόδων. Επίσης προσθέσαμε μερικές πινελιές για την όμορφη εκτύπωση των αποτελεσμάτων.

Για την σωστή εκτέλεση του προγράμματος πρέπει όλα τα αρχεία να βρίσκονται στο ίδιο directory και αυτό να ανήκει στο εκτελέσιμο path του Matlab.

Τρέχουμε την εντολή main στο command window που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο directory και εκτυπώνονται τα αποτελέσματα ενώ ταυτόχρονα δημιουργούνται σε 2 νέα παράθυρα οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις.

Αποτελέσματα εκτέλεσης :

(copy – paste + λίγο δουλίτσα για να είναι πιο κατανοητά)

**Ερώτημα 1.1**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ D\_NR**

Ψάχνουμε τη ρίζα της f1 κοντά στο x = -1...

Ελέγχουμε το διάστημα [-3,0]

Αποτελέσματα Διχοτόμισης μέχρι 0.0050000000

**Iteration a b c f(c)**

------------------------------------------------------------------------

1 -3.000000 0.000000 -1.500000 0.43750000

2 -1.500000 0.000000 -0.750000 -0.04296875

3 -1.500000 -0.750000 -1.125000 0.00610352

4 -1.125000 -0.750000 -0.937500 -0.00071716

Αποτελέσματα Newton-Raphson από 0.0050000000 μέχρι 0.0000005000

Έχουμε ως αρχικό x0 το τελευταίο c της μεθόδου Διχοτόμισης

**Iteration x(k) f(k)**

---------------------------------------------

1 -0.937500 -0.000717

2 -0.958482 -0.000212

3 -0.972386 -0.000063

4 -0.981620 -0.000019

5 -0.987759 -0.000005

6 -0.991845 -0.000002

7 -0.994566 -0.000000

8 -0.996378 -0.000000

9 -0.997586 -0.000000

10 -0.998391 -0.000000

11 -0.998927 -0.000000

12 -0.999285 -0.000000

13 -0.999523 -0.000000

14 -0.999682 -0.000000

15 -0.999788 -0.000000

16 -0.999859 -0.000000

17 -0.999906 -0.000000

18 -0.999937 -0.000000

19 -0.999958 -0.000000

20 -0.999972 -0.000000

21 -0.999981 -0.000000

22 -0.999988 -0.000000

23 -0.999992 -0.000000

24 -0.999994 -0.000000

25 -0.999996 -0.000000

26 -0.999998 -0.000000

27 -0.999998 -0.000000

28 -0.999999 -0.000000

29 -0.999999 -0.000000

Ψάχνουμε τη ρίζα της f1 κοντά στο x = 2...

Ελέγχουμε το διάστημα [0,3]

Αποτελέσματα Διχοτόμισης μέχρι 0.0050000000

**Iteration a b c f(c)**

------------------------------------------------------------------------

1 0.000000 3.000000 1.500000 -7.81250000

2 1.500000 3.000000 2.250000 8.58203125

3 1.500000 2.250000 1.875000 -2.97045898

4 1.875000 2.250000 2.062500 1.79518127

5 1.875000 2.062500 1.968750 -0.81765652

6 1.968750 2.062500 2.015625 0.42850119

7 1.968750 2.015625 1.992188 -0.20929384

8 1.992188 2.015625 2.003906 0.10588127

9 1.992188 2.003906 1.998047 -0.05263145

10 1.998047 2.003906 2.000977 0.02639295

11 1.998047 2.000977 1.999512 -0.01317716

12 1.999512 2.000977 2.000244 0.00659341

13 1.999512 2.000244 1.999878 -0.00329550

Αποτελέσματα Newton-Raphson από 0.0050000000 μέχρι 0.0000005000

Έχουμε ως αρχικό x0 το τελευταίο c της μεθόδου Διχοτόμισης

**Iteration x(k) f(k)**

---------------------------------------------

1 1.999878 -0.003295

2 2.000000 0.000000

3 2.000000 0.000000

Ψάχνουμε τη ρίζα της f2 μέσα στο διάστημα [0,2]...

Αποτελέσματα Διχοτόμισης μέχρι 0.0050000000

**Iteration a b c f(c)**

------------------------------------------------------------------------

1 0.000000 2.000000 1.000000 -0.28171817

2 1.000000 2.000000 1.500000 0.23168907

3 1.000000 1.500000 1.250000 -0.07215704

4 1.250000 1.500000 1.375000 0.06445172

5 1.250000 1.375000 1.312500 -0.00720551

6 1.312500 1.375000 1.343750 0.02772774

7 1.312500 1.343750 1.328125 0.01004456

8 1.312500 1.328125 1.320312 0.00136628

Αποτελέσματα Newton-Raphson από 0.0050000000 μέχρι 0.0000005000

Έχουμε ως αρχικό x0 το τελευταίο c της μεθόδου Διχοτόμισης

**Iteration x(k) f(k)**

---------------------------------------------

1 1.320312 0.001366

2 1.319075 0.000001

3 1.319074 0.000000

4 1.319074 -0.000000

**Ερώτημα 1.2**

Πίνακας 1: Αποτελέσματα Συνδιασμού D NR

**[a,b] x0 xn n**

**f1** [-3,0] -0.937500 -0.999999 33.000000

**f1**  [0,3] 1.999878 2.000000 16.000000

**f2**  [0,2] 1.320312 1.319074 12.000000

**Ερώτημα 1.3**

Πίνακας 2: Μελέτη Σύγκλισης f1 για ρίζα x=-1

**n |ε\_n| |ε\_(n+1)/ε\_n^1| |ε\_(n+1)/ε\_n^2|**

----------------------------------------------------------------------------

0 0.0624992743 NaN NaN

1 0.0415171315 0.6642818164 10.6286324677

2 0.0276128036 0.6650942070 16.0197533738

3 0.0183797020 0.6656224486 24.1055728129

4 0.0122402771 0.6659671153 36.2338364633

5 0.0081543628 0.6661910274 54.4261393686

6 0.0054335278 0.6663338368 81.7150101223

7 0.0036210136 0.6664203658 122.6496644465

8 0.0024132806 0.6664654834 184.0549513195

9 0.0016083958 0.6664769034 276.1704990581

10 0.0010719260 0.6664566082 414.3610796458

11 0.0007143328 0.6664012341 621.6858628551

12 0.0004759610 0.6663015246 932.7606432691

13 0.0003170570 0.6661407679 1399.5699610201

14 0.0002111257 0.6658919470 2100.2275382615

15 0.0001405069 0.6655130792 3152.2120011253

16 0.0000934287 0.6649398594 4732.4343220404

17 0.0000620436 0.6640741225 7107.8199493330

18 0.0000411203 0.6627656086 10682.2630536920

19 0.0000271716 0.6607826086 16069.4844423749

20 0.0000178725 0.6577633121 24207.7475491417

21 0.0000116731 0.6531317597 36543.9839706378

22 0.0000075402 0.6459441884 55336.1935418592

23 0.0000047849 0.6345861748 84160.8082181217

24 0.0000029480 0.6161135554 128762.5144955322

25 0.0000017235 0.5846152653 198307.0126727985

26 0.0000009071 0.5263157178 305382.4743200676

27 0.0000003628 0.3999999637 440972.3729765152

28 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

Πίνακας 2: Μελέτη Σύγκλισης f1 για ρίζα x=2

**n |ε\_n| |ε\_(n+1)/ε\_n^1| |ε\_(n+1)/ε\_n^2|**

----------------------------------------------------------------------------

0 0.0001220703 NaN NaN

1 0.0000000149 0.0001220902 1.0001627505

2 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

Πίνακας 2: Μελέτη Σύγκλισης f2 για άγνωστη ρίζα μέσα στο δίαστημα [0,2]

**n |x\_{n+1} - x\_n| (...)/(...)^1 (...)/(...)^2**

----------------------------------------------------------------------------

1 0.0012376116 NaN NaN

2 0.0000012115 0.0009789415 0.7909924966

3 0.0000000000 0.0000009569 0.7897901570

**Ερώτημα 1.5 - ΞΑΝΑ τα ερωτήματα 1.1 - 1.3 αυτή τη**   **φορά με συνδιαστική επαναληπτική**   **μέθοδο Διχοτόμος - Τέμνουσα**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ D\_T**

Ψάχνουμε τη ρίζα της f1 κοντά στο x = -1...

Ελέγχουμε το διάστημα [-3,0]

Αποτελέσματα Διχοτόμισης μέχρι 0.0050000000

**Iteration a b c f(c)**

------------------------------------------------------------------------

1 -3.000000 0.000000 -1.500000 0.43750000

2 -1.500000 0.000000 -0.750000 -0.04296875

3 -1.500000 -0.750000 -1.125000 0.00610352

4 -1.125000 -0.750000 -0.937500 -0.00071716

Αποτελέσματα Τέμνουσας από 0.0050000000 μέχρι 0.0000005000

Έχουμε ως αρχικά x0 και x1 τα τελευταία [a,b] της μεθόδου Διχοτόμισης

**Iteration x(k) f(k) eps(k) conv\_rate(k)**

----------------------------------------------------------------------------

1 -1.125000 0.006104 0.000000 0.000000

2 -0.750000 -0.042969 0.000000 0.000000

3 -1.078358 0.001481 2.277049 Inf

4 -1.067417 0.000940 2.266109 0.607414

5 -1.048414 0.000346 2.247106 0.606980

6 -1.037347 0.000158 2.236038 0.612184

7 -1.028019 0.000067 2.226710 0.614465

8 -1.021237 0.000029 2.219928 0.616705

9 -1.016027 0.000012 2.214718 0.618267

10 -1.012111 0.000005 2.210803 0.619499

11 -1.009146 0.000002 2.207837 0.620422

12 -1.006907 0.000001 2.205598 0.621125

13 -1.005215 0.000000 2.203906 0.621657

14 -1.003938 0.000000 2.202629 0.622060

15 -1.002973 0.000000 2.201664 0.622365

16 -1.002244 0.000000 2.200936 0.622595

17 -1.001694 0.000000 2.200386 0.622769

18 -1.001279 0.000000 2.199970 0.622901

19 -1.000966 0.000000 2.199657 0.623000

20 -1.000729 0.000000 2.199420 0.623075

21 -1.000550 0.000000 2.199242 0.623132

22 -1.000415 0.000000 2.199107 0.623174

23 -1.000314 0.000000 2.199005 0.623207

24 -1.000237 0.000000 2.198928 0.623231

25 -1.000179 0.000000 2.198870 0.623249

26 -1.000135 0.000000 2.198826 0.623263

27 -1.000102 0.000000 2.198793 0.623274

28 -1.000077 0.000000 2.198768 0.623282

29 -1.000058 0.000000 2.198749 0.623288

30 -1.000044 0.000000 2.198735 0.623292

31 -1.000033 0.000000 2.198724 0.623296

32 -1.000025 0.000000 2.198716 0.623298

33 -1.000019 0.000000 2.198710 0.623300

34 -1.000014 0.000000 2.198705 0.623302

35 -1.000011 0.000000 2.198702 0.623303

36 -1.000008 0.000000 2.198699 0.623304

37 -1.000006 0.000000 2.198697 0.623304

38 -1.000005 0.000000 2.198696 0.623305

39 -1.000003 0.000000 2.198695 0.623305

40 -1.000003 0.000000 2.198694 0.623305

41 -1.000002 0.000000 2.198693 0.623306

42 -1.000001 0.000000 2.198693 0.623306

Ψάχνουμε τη ρίζα της f1 κοντά στο x = 2...

Ελέγχουμε το διάστημα [0,3]

Αποτελέσματα Διχοτόμισης μέχρι 0.0050000000

**Iteration a b c f(c)**

------------------------------------------------------------------------

1 0.000000 3.000000 1.500000 -7.81250000

2 1.500000 3.000000 2.250000 8.58203125

3 1.500000 2.250000 1.875000 -2.97045898

4 1.875000 2.250000 2.062500 1.79518127

5 1.875000 2.062500 1.968750 -0.81765652

6 1.968750 2.062500 2.015625 0.42850119

7 1.968750 2.015625 1.992188 -0.20929384

8 1.992188 2.015625 2.003906 0.10588127

9 1.992188 2.003906 1.998047 -0.05263145

10 1.998047 2.003906 2.000977 0.02639295

11 1.998047 2.000977 1.999512 -0.01317716

12 1.999512 2.000977 2.000244 0.00659341

13 1.999512 2.000244 1.999878 -0.00329550

Αποτελέσματα Τέμνουσας από 0.0050000000 μέχρι 0.0000005000

Έχουμε ως αρχικά x0 και x1 τα τελευταία [a,b] της μεθόδου Διχοτόμισης

**Iteration x(k) f(k) eps(k) conv\_rate(k)**

----------------------------------------------------------------------------

1 1.999512 -0.013177 0.000000 0.000000

2 2.000244 0.006593 0.000000 0.000000

3 2.000000 -0.000003 0.801309 Inf

4 2.000000 -0.000000 0.801309 1.142142

Ψάχνουμε τη ρίζα της f2 μέσα στο διάστημα [0,2]...

Αποτελέσματα Διχοτόμισης μέχρι 0.0050000000

**Iteration a b c f(c)**

------------------------------------------------------------------------

1 0.000000 2.000000 1.000000 -0.28171817

2 1.000000 2.000000 1.500000 0.23168907

3 1.000000 1.500000 1.250000 -0.07215704

4 1.250000 1.500000 1.375000 0.06445172

5 1.250000 1.375000 1.312500 -0.00720551

6 1.312500 1.375000 1.343750 0.02772774

7 1.312500 1.343750 1.328125 0.01004456

8 1.312500 1.328125 1.320312 0.00136628

Αποτελέσματα Τέμνουσας από 0.0050000000 μέχρι 0.0000005000

Έχουμε ως αρχικά x0 και x1 τα τελευταία [a,b] της μεθόδου Διχοτόμισης

**Iteration x(k) f(k) eps(k) conv\_rate(k)**

----------------------------------------------------------------------------

1 1.312500 -0.007206 0.000000 0.000000

2 1.328125 0.010045 0.000000 0.000000

3 1.319027 -0.000052 0.120335 Inf

4 1.319073 -0.000000 0.120382 3.563954

5 1.319074 0.000000 0.120382 3.561755

Πίνακας ερωτήματος 1.2 με δεδομένα ερωτήματος 1.5

Αποτελέσματα Συνδιασμού D T

**[a,b] x0 xn n**

**f1** [-3,0] -0.937500 -1.000001 46.000000

**f1**  [0,3] 1.999878 2.000000 17.000000

**f2** [0,2] 1.320312 1.319074 13.000000

Πίνακες ερωτήματος 1.3 με δεδομένα ερωτήματος 1.5

Πίνακας 2: Μελέτη Σύγκλισης f1 για ρίζα x=-1

**n |ε\_n| |ε\_(n+1)/ε\_n^1| |ε\_(n+1)/ε\_n^2|**

----------------------------------------------------------------------------

0 0.1249985001 NaN NaN

1 0.2500014999 2.0000359986 16.0004799844

2 0.0783567090 0.3134249557 1.2536923010

3 0.0674158701 0.8603713824 10.9801878233

4 0.0484127569 0.7181210722 10.6521071587

5 0.0373453273 0.7713943529 15.9337001709

6 0.0280170878 0.7502166897 20.0886360984

7 0.0212354668 0.7579469687 27.0530247086

8 0.0160253573 0.7546505798 35.5372729921

9 0.0121099724 0.7556756557 47.1549957376

10 0.0091441373 0.7550915094 62.3528679272

11 0.0069053532 0.7551672680 82.5848563308

12 0.0052136654 0.7550179224 109.3380598424

13 0.0039361864 0.7549748748 144.8069279501

14 0.0029714378 0.7549027209 191.7853075981

15 0.0022429798 0.7548466066 254.0341242154

16 0.0016929619 0.7547825250 336.5088431580

17 0.0012777002 0.7547129131 445.7943799611

18 0.0009641901 0.7546293220 590.6153142465

19 0.0007275066 0.7545261842 782.5492272629

20 0.0005488272 0.7543948017 1036.9593284038

21 0.0004139391 0.7542247742 1374.2480903165

22 0.0003121110 0.7540023116 1821.5295966525

23 0.0002352410 0.7537093909 2414.8758252588

24 0.0001772123 0.7533220861 3202.3415582799

25 0.0001334069 0.7528085115 4248.0612646802

26 0.0001003388 0.7521259102 5637.8339437271

27 0.0000753762 0.7512166228 7486.8023724839

28 0.0000565323 0.7500023554 9950.1268607633

29 0.0000423074 0.7483758855 13238.0235172081

30 0.0000315693 0.7461887558 17637.3071741417

31 0.0000234633 0.7432324732 23542.8781196158

32 0.0000173443 0.7392087430 31504.8412893166

33 0.0000127252 0.7336803039 42300.9349828049

34 0.0000092383 0.7259854718 57051.1201674030

35 0.0000066061 0.7150801682 77403.9368501107

36 0.0000046191 0.6992228385 105844.7174138712

37 0.0000031192 0.6752822116 146191.8921701562

38 0.0000019870 0.6370075953 204219.5329795924

39 0.0000011323 0.5698403722 286788.1962032497

40 0.0000004871 0.4301597553 379913.4060531292

41 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

Πίνακας 2: Μελέτη Σύγκλισης f1 για ρίζα x=2

**n |x\_{n+1} - x\_n| (...)/(...)^1 (...)/(...)^2**

----------------------------------------------------------------------------

0 0.0004882812 NaN NaN

1 0.0002441407 0.5000000894 1024.0002441407

2 0.0000001192 0.0004882414 1.9998367355

3 0.0000000000 0.0000000000 0.0000000000

Πίνακας 2: Μελέτη Σύγκλισης f2 για άγνωστη ρίζα μέσα στο δίαστημα [0,2]

**n |ε\_n| |ε\_(n+1)/ε\_n^1| |ε\_(n+1)/ε\_n^2|**

----------------------------------------------------------------------------

1 0.0156250000 NaN NaN

2 0.0090982945 0.5822908478 37.2666142574

3 0.0000466359 0.0051257834 0.5633784875

4 0.0000003355 0.0071935891 154.2500754444

>>

Μετά από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε τα εξής:

* Στους δύο πίνακες αποτελεσμάτων των ερωτημάτων 1.2 και 1.5 δεν υπάρχουν διαφορές στις τελικές τιμές... Ωστόσο παρατηρούμε πως και στις 3 περιπτώσεις ο συνδιασμός Διχοτόμισης και Τέμνουσας ολοκληρώνεται σε περισσότερες επαναλήψεις. Συγκεκριμένα στην πρώτη περίπτωση κάνει 14 επαναλήψεις παραπάνω ενώ στις άλλες δύο 1 παραπάνω.
* Επίσης στους πίνακες μελέτης σύγκλισης των ερωτημάτων 1.3 και 1.5 βλέπουμε ανάλογες τιμές στα πεδία του απόλυτου σφάλματος και του σχετικού σφάλματος, τόσο με εκθέτη p=1 όσο και με p=2

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως ενώ οι ακρίβεια των τιμών δεν αλλάζει σημαντικά, η προτιμότερη επιλογή επαναληπτικής μεθόδου, για τα συγκεκριμένα παραδείγματα, είναι η Διχοτόμιση + Newton-Raphson (NR) καθώς ολοκληρώνεται σε λιγότερες επαναλήψεις.

ΠΑΡ’ΌΛΑ ΑΥΤΆ... σε γενικές γραμμές είναι προτιμότερη η χρήση της μεθόδου Τέμνουσας καθώς απαιτεί λιγότερες πράξεις. Επιπλέον, δεν χρειάζεται η εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης εισόδου.

Αυτό το πλεονέκτημα ωστόσο μπορεί να εξαλείφεται με την πάροδο του χρόνου. Καθώς αν μια συνάρτηση απαιτεί πολλές επαναλήψεις για την εύρεση της ρίζας, τότε οι υπολογισμοί αυτών των επαναλήψεων αντισταθμίζουν τους υπολογισμούς που “γλιτώνουμε” αφού δεν υπολογίσαμε την παράγωγο.

**Ερώτημα 1.4 - Θεωρία**

Σε αυτό το ερώτημα εξετάζουμε τις περιπτώσεις του ερωτήματος 1.1 και τα αποτελέσματα του ερωτήματος 1.2. Επομένως αναφερόμαστε στην μέθοδο Διχοτόμισης και NR...

Στην πρώτη περίπτωση γίνεται εύρεση της προφανής ρίζας x = -1 στο διάστημα [-3,0] . Εκτελούνται 33 επαναλήψεις εκ των οποίων 29 ήταν της μεθόδου NR. Αυτό συμβαίνει γιατί στη συγκεκριμένη συνάρτηση η πολλαπλότητα της ρίζας -1 είναι k = 3 άρα η σύγκλιση είναι γραμμική, σύμφωνα με τη θεωρία. Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εκδοχή της NR θα παρατηρούσαμε τετραγωνική σύγκλιση...

Στην δεύτερη περίπτωση η πολλαπλότητα της ρίζας είναι απλή k=1. Από θεωρία θα γνωρίζουμε πως σε αυτές τις περιπτώσεις η σύγκλιση της NR είναι τετραγωνική . Πράγματι αυτό αποτυπώνεται στα αποτελέσματα της εκτέλεσης, αφού σε 16 βήματα εκ των οποίων μόλις τα 3 είναι της NR, προσεγγίζεται η ρίζα.

Στην τρίτη περίπτωση έχουμε άγνωστη ρίζα, επομένως δεν γνωρίζουμε άμεσα την πολλαπλότητα της. Παρατηρούμε ωστόσο ότι η τιμή της παραγώγου της f2 στο σημείο ξ διαφέρει από το 0, επομένως αναγκαστικά η ρίζα είναι απλή k=1. Άρα περιμένουμε τετραγωνική σύγκλιση της NR προς την ρίζα, όπως και έχουμε. Με μόλις 12 βήματα εκ των οποίων μόνο τα 4 είναι της NR, προσεγγίζεται η ρίζα.

Στο ερώτημα 1.5 στο οποίο η μέθοδος NR αντικαταστείται από την μέθοδο Τέμνουσας παρατηρούμε μια αύξηση στον αριθμό επαναλήψεων.

Η αύξηση στην πρώτη περίπτωση, όπου η πολλαπλότητα είναι 3, είναι αρκετά μεγάλη ( 14 ). Άρα έχουμε πάλι γραμμική σύγκλιση όπως αναμέναμε και βάση της θεωρίας.

Στις επόμενες 2 περιπτώσεις όπως δείξαμε η πολλαπλότητα είναι 1, επομένως περιμένουμε βάση της θεωρίας τετραγωνική συγκλιση. Πράγματι παρατηρούμε αύξησεις μόνο κατά μία επανάληψη.

The end – Fin