A-2ª PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Ethil S.p.A. vuole investire nella produzione delle 5 bevande alcoliche in tabella.
La loro produzione richiede di utilizzare due uvaggi (Sangiovese, Trebbiano) nelle proporzioni indicate in tabella. In particolare ciascuna colonna indica il profitto per bottiglia in euro e le quantità di uve (in kg) necessarie alla produzione di una bottiglia del vino o liquore corrispondente a quella colonna.
L'ultima colonna indica le disponibilità di uvaggi (in q.li) previste per la prossima stagione.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quante bottiglie produrre con le uve disponibili al fine di massimizzare i profitti della Ethil S.p.A.
2. Costruire il problema duale e risolverlo con il metodo grafico o con il metodo di Fourier-Motzkin (uno a scelta).
3. Dalla soluzione ottima duale ricavare la soluzione ottima primale con le condizioni di ortogonalità.

	Vermut Venerini	Vino Brindisino	Vino Morello	Spumante Ottonari	Grappa Decino	Disp. Uve
Profitto Unitario	10	5	12	18	40	
Sangiovese	1	4	3	6	20	120000
Trebbiano	3	2	4	0	15	80000

Soluzione

1. Il problema proposto è evidentemente un problema di allocazione di risorse (o pianificazione della produzione) con 5 prodotti e 2 risorse, corrispondenti a 5 variabili (numero di bottiglie prodotte per ciascuna bevanda: 1=vermut venerini, 2=vino brindisino, 3=vino morello, 4=spumante ottonari, 5=grappa decino) e 2 vincoli (disponibilità di uve sangiovese e trebbiano).

Si ha quindi la formulazione (dove la disponibilità di uve è espressa in kg):

$$\max 10x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 40x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 20x_5 \leq 12.000.000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 15x_5 \leq 8.000.000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2. Problema duale:

$$\min 12000000y_1 + 8000000y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 10 \\ 4y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ 3y_1 + 4y_2 \geq 12 \\ 6y_1 \geq 18 \\ 20y_1 + 15y_2 \geq 40 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo, per es., con il metodo di Fourier-Motzkin, si trasforma il problema come segue:

$$\min z$$

$$\begin{cases} z = 12000000y_1 + 8000000y_2 \\ y_1 + 3y_2 \geq 10 \\ 4y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ 3y_1 + 4y_2 \geq 12 \\ 6y_1 \geq 18 \\ 20y_1 + 15y_2 \geq 40 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Proiezione di y_2 per sostituzione: $y_2 = \frac{z}{8000000} - \frac{3}{2}y_1$

$$\begin{cases} y_1 + 3\left(\frac{z}{8000000} - \frac{3}{2}y_1\right) \geq 10 \\ 4y_1 + 2\left(\frac{z}{8000000} - \frac{3}{2}y_1\right) \geq 5 \\ 3y_1 + 4\left(\frac{z}{8000000} - \frac{3}{2}y_1\right) \geq 12 \\ 6y_1 \geq 18 \\ 20y_1 + 15\left(\frac{z}{8000000} - \frac{3}{2}y_1\right) \geq 40 \\ y_1 \geq 0 \\ \frac{z}{8000000} - \frac{3}{2}y_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \leq \frac{6}{7}\left(\frac{z}{8000000}\right) - \frac{20}{7} \\ y_1 \geq 5 - \frac{z}{4000000} \\ y_1 \leq -4 + \frac{z}{6000000} \\ y_1 \geq 3 \\ y_1 \leq +6\left(\frac{z}{8000000}\right) - 16 \\ y_1 \geq 0 \quad ridondante \\ y_1 \leq \frac{z}{12000000} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \leq \frac{6}{7}\left(\frac{z}{8000000}\right) - \frac{20}{7} \\ y_1 \leq -4 + \frac{z}{6000000} \\ y_1 \leq +6\left(\frac{z}{8000000}\right) - 16 \\ y_1 \leq \frac{z}{12000000} \\ \\ y_1 \geq 5 - \frac{z}{4000000} \\ y_1 \geq 3 \end{cases}$$

Per proiezione di y_1 si ottiene:

$$\min z$$

$$\begin{cases} \frac{6}{7}\left(\frac{z}{8000000}\right) - \frac{20}{7} \geq 5 - \frac{z}{4000000} \\ -4 + \frac{z}{6000000} \geq 5 - \frac{z}{4000000} \\ 6\left(\frac{z}{8000000}\right) - 16 \geq 5 - \frac{z}{4000000} \\ \frac{z}{12000000} \geq 5 - \frac{z}{4000000} \\ \frac{6}{7}\left(\frac{z}{8000000}\right) - \frac{20}{7} \geq 3 \\ -4 + \frac{z}{6000000} \geq 3 \\ 6\left(\frac{z}{8000000}\right) - 16 \geq 3 \\ \frac{z}{12000000} \geq 3 \end{cases}$$

Che risolto per ispezione fornisce l'ottimo: $z^* = \frac{164.000.000}{3}$

$$\begin{cases} z \geq 22000000 \\ z \geq 21600000 \\ z \geq 4421052,\dots \\ z \geq 15000000 \\ \boldsymbol{z \geq 54666666}, \dots \\ z \geq 42000000 \\ z \geq 25333333, \dots \\ z \geq 36000000 \end{cases}$$

Si ottiene quindi a ritroso la soluzione ottima:

$$y_1^* = 3; y_2^* = \frac{7}{3}.$$

3. Condizioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 3y_2 - 10) = 0 \\ x_2(4y_1 + 2y_2 - 5) = 0 \\ x_3(3y_1 + 4y_2 - 12) = 0 \\ x_4(6y_1 - 18) = 0 \\ x_5(20y_1 + 15y_2 - 40) = 0 \\ y_1(x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 20x_5 - 12.000.000) = 0 \\ y_2(3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 15x_5 - 8.000.000) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo y^* nei vincoli si ha:

$$x_2 = 0; x_3 = 0; x_5 = 0; x_1 + 6x_4 = 12.000.000; 3x_1 = 8.000.000$$

Da cui: $x_1 = \frac{8.000.000}{3}$; $x_4 = \frac{14.000.000}{9}$.

Esercizio 2

In tabella è riportata una rete di flusso con 7 nodi e 11 archi, con i pesi degli archi e le forniture dei nodi.

archi	**(3,2)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(4,2)**	**(2,6)**	**(2,7)**	**(4,5)**	**(6,7)**	**(6,5)**	**(5,1)**	**(1,2)**
pesi	13	2	7	4	1	6	3	2	1	2	1
nodi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**				
forniture	+1	+1	+1	0	-2	0	-1				

Determinare una soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo per la rete data utilizzando l'algoritmo del simplesso su rete (fase 1 e fase 2), ovvero dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.

Soluzione

Fase 1. Si aggiunge il nodo artificiale 8 e gli archi: (1,8), (2,8), (3,8), (8,5), (8,7). Si sceglie come base iniziale l'albero formato dagli archi: (1,8), (2,8), (3,8), (8,5), (8,7), (3,4), (2,6) con flussi iniziali rispettivamente 1, 1, 1, 2, 1, 0, 0. Entra in base (6,7), esce (8,7). Nuova base: (1,8), (2,8), (3,8), (8,5), (6,7), (3,4), (2,6) con flussi 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1. Entra in base (3,5), esce (3,8). Nuova base: (1,8), (2,8), (3,5), (8,5), (6,7), (3,4), (2,6) con flussi 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1. Entra in base (6,5), esce (2,8), iterazione degenere. Nuova base: (1,8), (6,5), (3,5), (8,5), (6,7), (3,4), (2,6) con flussi 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1. Entra in base (1,2), esce (8,5). Nuova base: (1,8), (6,5), (3,5), (1,2), (6,7), (3,4), (2,6) con flussi 0, 1, 1, 1, 1, 0, 2. Fine fase 1.
Fase 2. Base iniziale: (6,5), (3,5), (1,2), (6,7), (3,4), (2,6) con flussi 1, 1, 1, 1, 0, 2. Entra (4,5) esce (3,5).
Nuova base: (6,5), (4,5), (1,2), (6,7), (3,4), (2,6) con flussi 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2. La base corrente è ottima.

A-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Ethil S.p.A. vuole investire nella produzione delle 5 bevande alcoliche in tabella.
La loro produzione richiede di utilizzare due uvaggi (Sangiovese, Trebbiano) nelle proporzioni indicate in tabella. In particolare ciascuna colonna indica il profitto per bottiglia in euro e le quantità di uve (in kg) necessarie alla produzione di una bottiglia del vino o liquore corrispondente a quella colonna.
L'ultima colonna indica le disponibilità di uvaggi (in q.li) previste per la prossima stagione.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quante bottiglie produrre con le uve disponibili al fine di massimizzare i profitti della Ethil S.p.A.
2. Risolvere il problema primale con l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2)
3. Costruire il problema duale
4. Dalla soluzione ottima primale ricavare la soluzione ottima duale con le condizioni di ortogonalità.
5. Utilizzando l'analisi di sensitività, ricavare la minima quantità di uva Sangiovese necessaria affinché la base ottima ricavata al punto 2 resti ottima.

	Vermut Venerini	Vino Brindisino	Vino Morello	Spumante Ottonari	Grappa Decino	Disp. Uve
Profitto Unitario	10	5	12	18	40	
Sangiovese	1	4	3	6	20	120000
Trebbiano	3	2	4	0	15	80000

Soluzione

Le soluzioni sono chiaramente le stesse del compito A-2a PI.
Per l'ultimo punto è sufficiente osservare che la CARRY finale ottenuta al punto 2 contiene l'inversa della base ottima $B = \{1,4\}$:

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \end{bmatrix}$ e che questa base resta ottima finché resta ammissibile, ovvero: $A_B^{-1}b \geq 0$.

Per quanto riguarda il vettore b dobbiamo considerare invariata la disponibilità di Trebbiano e rendere variabile la disponibilità di Sangiovese, quindi:

$$b = \begin{bmatrix} t \\ 8.000.000 \end{bmatrix}$$

Infine dobbiamo risolvere il problema: $\min\{t: A_B^{-1}b \geq 0\}$, ovvero:
$\min\{t: 3t - 8.000.000 \geq 0\}$, da cui l'ottimo: $t^* = \frac{8.000.000}{3}$.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete, con 7 nodi e 14 archi, e i loro pesi.

archi	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(4,2)	(2,6)	(2,7)	(4,6)	(6,7)	(6,5)	(5,7)	(5,1)	(2,1)	(1,2)	(4,5)
pesi	13	2	7	4	4	6	15	2	1	10	2	1	1	3

1. Utilizzando l'algoritmo di Dijkstra trovare il cammino minimo dal nodo 3 al nodo 7.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso su rete dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione ottenuta al punto 1. Allo scopo si ponga pari a: +1 la fornitura del nodo 3, -1 quella del nodo 7 e 0 quella degli altri nodi.

Soluzione

1. Il cammino minimo è il cammino 3, 4, 5, 2, 1, 6, 7, di peso 11.
2. La domanda equivale a dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione:

archi	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(4,2)	(2,6)	(2,7)	(4,6)	(6,7)	(6,5)	(5,7)	(5,1)	(2,1)	(1,2)	(4,5)
flussi	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Allo scopo si nota che la soluzione proposta è una soluzione base ammissibile non degenere, in cui gli archi in base sono gli archi di flusso non nullo. Le condizioni di ottimalità del simplesso su rete sono verificate, pertanto la soluzione data è ottima per il problema di flusso di costo minimo corrispondente al problema di percorso minimo dato.

B-2ª PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	O O	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Farm S.p.A. vuole modificare le caratteristiche chimiche di un terreno di 200 ettari per adattarlo alla produzione di fagioli zolfanelli. Allo scopo deve arricchire il terreno con i 5 elementi in tabella, secondo le quantità minime riportate nella prima riga.
Il mercato offre due concimi composti A e B, che hanno un contenuto di ciascun elemento indicato in tabella (in grammi di elemento per kilogrammo di concime). L'ultima colonna riporta il costo di ciascun concime in euro per quintale.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quanto concime acquistare al fine di concimare i 200 ettari di terreno al costo minimo.
2. Risolvere il problema con il metodo grafico o con il metodo di Fourier-Motzkin (uno a scelta).
3. Costruire il problema duale.
4. Ricavare la soluzione ottima duale con le condizioni di ortogonalità, a partire dalla soluzione trovata al punto 2.

	Ferro	Azoto	Potassio	Fosforo	Zolfo	Costo (€/ql)
Quantità (gr/ettaro)	10	5	12	18	40	
Concime A (gr/kg)	1	4	3	6	20	120
Concime B (gr/kg)	3	2	4	0	15	80

Soluzione

1. Il problema proposto è evidentemente un problema di miscelazione con 2 ingredienti da miscelare (A e B) e 5 componenti di interesse, corrispondenti a 2 variabili (contenuto x_A di concime A e x_B di concime B nella miscela, che possiamo, per es. esprimere in quintali) e 5 vincoli (quantità di ciascun elemento nella miscela sufficiente a concimare 200 ettari). Per i termini noti dobbiamo tenere conto del fatto che è necessario concimare 200 ettari e che un quintale di concime contiene 100 volte il contenuto di 1 kg di concime. Si ha:

$$\min 120x_A + 80x_B$$
$$\begin{cases} x_A + 3x_B \geq 20 \\ 4x_A + 2x_B \geq 10 \\ 3x_A + 4x_B \geq 24 \\ 6x_A \geq 36 \\ 20x_A + 15x_B \geq 80 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2. Risolvendo con Fourier-Motzkin (la procedura è del tutto simile a quella del compito A-2a PI) si ottiene la soluzione ottima: $x_A^* = 6$; $x_B^* = \frac{14}{3}$.
3. Problema duale:

$$\max 20y_1 + 10y_2 + 24y_3 + 36y_4 + 80y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 20y_5 \leq 120 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 15y_5 \leq 80 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4. Con una procedura analoga a quella del compito A-2a PI si ottiene: $y^* = (\frac{80}{3} \;\; 0 \;\; 0 \;\; \frac{14}{3} \;\; 0)^T$.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 7 nodi 1…7. Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, 1 è il nodo sorgente e 7 è il nodo pozzo.

Archi	**(1,2)**	**(1,3)**	**(7,1)**	**(2,4)**	**(5,2)**	**(3,5)**	**(3,6)**	**(6,5)**	**(5,4)**	**(4,5)**	**(4,7)**	**(5,7)**
Flussi	0	2	1	1	1	2	0	0	1	0	1	1
Capacità	8	7	2	5	2	2	1	3	2	1	5	4

1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale entrante nel pozzo e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson.
2. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi 1 e 7.
3. Si aggiunga l'arco scarico (2, 5) di capacità 3 alla rete. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo. Evidenziare il nuovo taglio ottimo trovato.

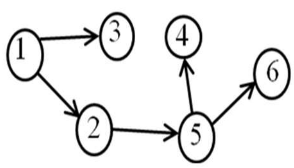
Soluzione

2.1 La distribuzione di flusso iniziale data non è ammissibile perché non sono rispettati i vincoli di conservazione del flusso ai nodi 4 e 5. Da cui, si scarica il flusso iniziale e si risolve il problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. La ricerca di cammini aumentanti porta a trovare, ad esempio, i cammini:

1 →3→5→4→7 flusso aumentante 2, flusso totale sulla rete 2.
1 →2→4→7 flusso aumentante 3, flusso totale sulla rete 5.
1 →2→4→5→7 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 6.
1 →2→4→5→7 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 7.
1 →3→6→5→7 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 8.

2.2 La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 1 porta a costruire l'albero orientato:
3←1→2 che individua il taglio $S = \{1,2,3\}$ e $\underline{S} = \{4,5,6,7\}$
Gli archi del taglio diretto sono (2,4); (3,5); (3,6) di capacità 5+2+1=8, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

2.3 Per rispondere alla terza domanda si osserva che l'arco (2,5) è un nuovo arco del taglio diretto minimo, che quindi aumenta a 11 la capacità di quel taglio. Il flusso 8 pertanto potrebbe non essere più massimo e si cerca, a partire da questo (che resta ammissibile) un nuovo cammino aumentante:
1 →2→5→7 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 9.
La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 1 porta a costruire l'albero orientato:



che individua il taglio $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $\underline{S} = \{7\}$

Gli archi del taglio diretto sono (4,7); (5,7) di capacità 5+4=9, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

B-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Farm S.p.A. vuole modificare le caratteristiche chimiche di un terreno di 200 ettari per adattarlo alla produzione di mais. Allo scopo deve arricchire il terreno con i 5 elementi in tabella, secondo le quantità minime riportate nella prima riga.
Il mercato offre due concimi composti A e B, che hanno un contenuto di ciascun elemento indicato in tabella (in grammi di elemento per kg di concime). L'ultima colonna riporta il costo di ciascun concime in euro per quintale.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quanto concime acquistare al fine di concimare i 200 ettari di terreno al costo minimo.
2. Costruire il problema duale.
3. Risolvere il problema duale con l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2).
4. Ricavare la soluzione ottima primale con le condizioni di ortogonalità, a partire dalla soluzione ottima duale.
5. Utilizzando l'analisi di sensitività, ricavare il minimo costo del concime A tale che la base ottima duale ricavata al punto 3 resti ottima.

	Ferro	Azoto	Potassio	Fosforo	Zolfo	Costo (€/ql)
Quantità (gr/ettaro)	10	5	12	18	40	
Concime A (gr/kg)	1	4	3	6	20	120
Concime B (gr/kg)	3	2	4	0	15	80

Soluzione

Le soluzioni sono chiaramente le stesse del compito B-2a PI.
Per l'ultimo punto è sufficiente osservare che la CARRY finale ottenuta al punto 2 contiene l'inversa della base ottima $B = \{1,4\}$ del problema duale:

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \end{bmatrix}$ e che questa base resta ottima finché resta ammissibile, ovvero: $A_B^{-1}b \geq 0$.

Per quanto riguarda il vettore b dei termini noti del duale (e quindi dei costi del primale) dobbiamo considerare invariato il costo del concime B e rendere variabile il costo del concime A, quindi:

$$b = \begin{bmatrix} t \\ 80 \end{bmatrix}$$

Infine dobbiamo risolvere il problema: $\min\{t: A_B^{-1}b \geq 0\}$, ovvero:
$\min\{t: 3t - 80 \geq 0\}$, da cui l'ottimo: $t^* = \frac{80}{3}$.

Esercizio 2

In tabella è riportata una rete di flusso con 7 nodi e 11 archi, con i pesi degli archi e le forniture dei nodi.

archi	**(3,2)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(4,2)**	**(2,6)**	**(2,7)**	**(4,5)**	**(6,7)**	**(6,5)**	**(5,1)**	**(1,2)**
pesi	13	2	7	4	1	6	3	2	1	2	1
nodi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**				
forniture	+1	+1	+1	0	-2	0	-1				

1. Utilizzando l'algoritmo di Prim, a partire dal nodo 4, trovare un albero ricoprente di peso minimo nel grafo sottostante la rete (trascurando quindi il verso degli archi).
2. Utilizzare l'albero ottenuto al punto 1 come base iniziale del problema di flusso a costo minimo per la rete in tabella (considerando quindi il verso degli archi). Determinare i flussi di tutti gli archi in base e determinare se la base così ottenuta è ammissibile o meno.
3. Determinare una soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo utilizzando l'algoritmo del simplesso su rete. Se la base ottenuta al punto 2 è ammissibile, partire da questa (quindi eseguendo solo la fase 2), altrimenti cercare una base ammissibile con la fase 1 del simplesso su rete e poi ottenere la base ottima con la fase 2.

Soluzione

1. Il minimo albero ricoprente è dato dagli archi è il cammino (3,4), (4,5), (6,5), (2,6), (1,2), (6,7), di peso totale 10.
2. La domanda equivale a dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione:

archi	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(4,2)	(2,6)	(2,7)	(4,5)	(6,7)	(6,5)	(5,1)	(1,2)
flussi	0	1	0	0	2	0	1	1	1	0	1

Allo scopo si nota che la soluzione proposta è una soluzione base ammissibile non degenere, in cui gli archi in base sono gli archi di flusso non nullo. Le condizioni di ottimalità del simplesso su rete sono verificate, pertanto la soluzione data è ottima per il problema di flusso di costo minimo dato.

C-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso con 7 nodi 1…7. Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, 2 è il nodo sorgente e 6 è il nodo pozzo.

Archi	**(2,1)**	**(2,4)**	**(5,2)**	**(6,2)**	**(7,6)**	**(1,3)**	**(3,4)**	**(3,6)**	**(5,4)**	**(4,5)**	**(4,7)**	**(5,7)**
Flussi	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2	0	1
Capacità	4	9	2	2	8	5	3	4	3	5	5	4

a. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
b. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi 2 e 6.
c. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto a, si determini il nuovo flusso massimo se l'arco scarico (2, 3) di capacità 1 è inserito nella rete di flusso. Evidenziare il taglio ottimo trovato.

Soluzione

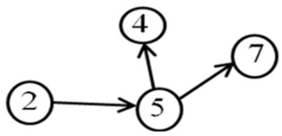
1.a La distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile perché sono rispettati tutti i vincoli di conservazione del flusso sui nodi della rete e tutti i vincoli di capacità sugli archi della rete. Il flusso totale sulla rete è nullo. Si risolve il problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. La ricerca di cammini aumentanti porta a trovare, ad esempio, i cammini:

2 →1→3→6 flusso aumentante 3, flusso totale sulla rete 3.
2 →4→7→6 flusso aumentante 5, flusso totale sulla rete 8.
2 →4→5→7→6 flusso aumentante 2, flusso totale sulla rete 10.
2 →6 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 11.
2 →4→3→6 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 12.

1.b La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 2 porta a costruire l'albero orientato:
che individua il taglio $S = \{2,5,4,7\}$ e $\underline{S} = \{1,3,6\}$

Gli archi del taglio diretto sono (2,1); (7,6) di capacità 4+8=12, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

1.c Per rispondere alla terza domanda si osserva che l'arco (2,3) è un nuovo arco del taglio diretto minimo, che quindi aumenta a 13 la capacità di quel taglio. Il flusso 12 pertanto potrebbe non essere più massimo e si cerca, a partire da questo (che resta ammissibile) un nuovo cammino aumentante. La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 2 porta a costruire l'albero orientato:



che individua il taglio $S = \{2,5,4,7,3,1\}$ e $\underline{S} = \{6\}$

Gli archi del taglio diretto sono (3,6); (7,6) di capacità 4+8=12, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo di Fourier-Motzkin.
2. Formulare il problema duale e ridurlo in forma standard.
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema duale in forma standard o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.
4. Verificare il soddisfacimento delle condizioni di ortogonalità per le soluzioni trovate ai punti 1 e 3.

$$\max \quad -3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \quad \textit{libera} \end{cases}$$

Soluzione

1. Soluzione del primale con il metodo di Fourier-Motzkin.

$$\max \quad z \qquad \begin{cases} z = -3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Proiezione di } x_2 = z + 3x_1 \quad \Rightarrow \quad \max \quad z \qquad \begin{cases} x_1 + z + 3x_1 \geq 1 \\ -x_1 + z + 3x_1 \leq 2 \\ -x_1 + 2(z + 3x_1) \geq -1 \\ z + 3x_1 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \max \quad z \qquad \begin{cases} z + 4x_1 \geq 1 \\ z + 2x_1 \leq 2 \\ 2z + 5x_1 \geq -1 \\ z + 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Proiezione di x_1:

$$\max \quad z \qquad \begin{cases} x_1 \geq \dfrac{(1-z)}{4} \\ x_1 \geq \dfrac{(-1-2z)}{5} \\ x_1 \geq \dfrac{-z}{3} \\ x_1 \leq \dfrac{(2-z)}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \max \quad z \qquad \begin{cases} \dfrac{(2-z)}{2} \geq \dfrac{(1-z)}{4} \\ \dfrac{(2-z)}{2} \geq \dfrac{(-1-2z)}{5} \\ \dfrac{(2-z)}{2} \geq \dfrac{-z}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \max \quad z \qquad \begin{cases} 3 \geq z \\ 12 \geq z \\ 6 \geq z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z^* = 3$$

Da cui si ottiene (a ritroso) la soluzione ottima:

$$\begin{cases} x_1^* \geq \dfrac{(1-3)}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ x_1^* \geq \dfrac{(-1-6)}{5} = -\dfrac{7}{5} \\ x_1^* \geq \dfrac{-3}{3} = -1 \\ x_1^* \leq \dfrac{(2-3)}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2^* = z^* + 3x_1^* = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

2. Formulazione del duale.

$$\max \quad -3x_1 + x_2 \qquad\qquad \min \quad y_1 + 2y_2 - y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \quad \textit{libera} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 = -3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_2 \geq 0 \\ y_1, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

3. Soluzione del duale.

Forma standard: $\min \quad -y_1 + 2y_2 + y_3$ $\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Problema artificiale: $\min \quad \phi_1 + \phi_2$ $\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 + \phi_1 = 3 \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4 + \phi_2 = 1 \\ y, \phi \geq 0 \end{cases}$

Fase 1. Entra y_2 esce ϕ_2; entra y_1 esce ϕ_1. Fine fase 1.

Fase 2. Base B={1,2}. $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow -y^T = -(-1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (-1/2 \quad -3/2)$

$-z = (-1/2 \quad -3/2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$. La SBA corrente risulta ottima.

Soluzione ottima duale in forma standard: $y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Soluzione ottima duale originale: $y^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Soddisfacimento delle condizioni di ortogonalità:

Condizioni di ortogonalità: $\begin{cases} y_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ y_2(-x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ y_3(-x_1 + 2x_2 + 1) = 0 \\ x_1(y_1 - y_2 - y_3 + 3) = 0 \\ x_2(y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right) = 0 \\ 2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2\right) = 0 \\ 0\left(\frac{1}{2} + 2\frac{3}{2} + 1\right) = 0 \\ -\frac{1}{2}(-1 - 2 + 3) = 0 \\ \frac{3}{2}(-1 + 2 - 1) = 0 \end{cases}$ tutte verificate.

D-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

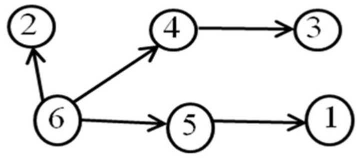
In tabella sono riportati gli archi di un digrafo pesato con 6 nodi, 12 archi e i rispettivi pesi.

Archi/Lati	**(2,1)**	**(3,1)**	**(5,1)**	**(2,3)**	**(6,2)**	**(4,2)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(4,3)**	**(5,4)**	**(6,5)**	**(6,4)**
Pesi	3	3	3	2	2	1	2	4	1	2	1	2

a. Trovare l'albero dei cammini orientati di peso minimo dal nodo 6 verso tutti gli altri nodi utilizzando la versione efficiente dell'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i nodi in *S*. Mostrare l'albero dei cammini orientati minimi e calcolare il peso del percorso orientato minimo dal nodo 6 al nodo 3.
b. Dal digrafo in tabella ricavare il grafo sottostante, con 6 vertici, 12 lati e i rispettivi pesi. Trovare e mostrare un albero ricoprente di peso minimo partendo dal vertice 6 tramite la versione efficiente dell'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero e calcolare il peso dell'albero.
c. In che cosa differiscono i due alberi trovati ai punti a e b? L'albero trovato al punto a è ottimo per il problema presentato al punto b? Se no, perché?

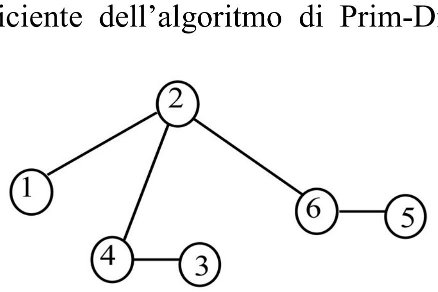
Soluzione

1.a Applicando la versione efficiente dell'algoritmo di Dijkstra si ottiene il seguente albero ottimo:



S = {6,5,2,4, 3,1}
Il peso dell'albero è 9.
In particolare, il cammino orientato ottimo dal nodo 6 al nodo 3 pesa 3.

1.b Applicando la versione efficiente dell'algoritmo di Prim-Dijkstra si ottiene ad esempio il seguente albero ottimo:



S = {6,5,2,4,3,1}
Il peso dell'albero è 8.

1.c L'albero trovato al punto b ha un peso inferiore all'albero trovato al punto a, perché il problema del punto b è quello di trovare l'albero di peso minore. L'albero trovato al punto a mostra le distanze minime per raggiungere ciascun nodo a partire dal nodo 6, cosa non garantita dall'albero del punto b (per esempio raggiungere i nodi 4 e 3 ha un costo superiore nell'albero b rispetto all'albero a).

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo di Fourier-Motzkin.
2. Formulare il problema duale e ridurlo in forma standard.
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema duale in forma standard o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.
4. Verificare il soddisfacimento delle condizioni di ortogonalità per le soluzioni trovate ai punti 1 e 3.

$$\min \quad 2x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \quad \textit{libera} \end{cases}$$

Soluzione

1. Soluzione del primale con il metodo di Fourier-Motzkin.

$$\min \quad z \qquad\qquad\qquad\qquad \min \quad z \qquad\qquad\qquad \min \quad z$$
$$\begin{cases} z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \text{Proiezione di } x_2 = z - 2x_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2(z - 2x_1) \geq 4 \\ -x_1 + 3(z - 2x_1) \leq 9 \\ 3x_1 - (z - 2x_1) \leq 5 \\ z - 2x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z - 3x_1 \geq 4 \\ 3z - 7x_1 \leq 9 \\ -z + 5x_1 \leq 5 \\ z - 2x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Proiezione di x_1 e soluzione per ispezione:

$$\min \quad z \qquad\qquad \min \quad z \qquad\qquad \min \quad z$$
$$\begin{cases} x_1 \leq \dfrac{2z-4}{3} \\ x_1 \geq \dfrac{3z-9}{7} \\ x_1 \leq \dfrac{5+z}{5} \\ x_1 \leq \dfrac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3z-9}{7} \leq \dfrac{2z-4}{3} \\ \dfrac{3z-9}{7} \leq \dfrac{5+z}{5} \\ \dfrac{3z-9}{7} \leq \dfrac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5} \leq z \\ z \leq 10 \\ -18 \leq z \end{cases} \Rightarrow z^* = \frac{1}{5} \Rightarrow x_1^* = -\frac{6}{5};\ x_2^* = \frac{13}{5}$$

2. Problema duale:

$$\min \quad 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \max \quad 4y_1 + 9y_2 + 5y_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \quad \textit{libera} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 + 3y_3 = 2 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Duale in forma standard:

$$\min \quad -4y_1+9y_2^-+5y_3^-$$

$$\begin{cases} y_1+y_2^- -3y_3^- =2 \\ 2y_1-3y_2^- +y_3^- +y_4=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

3. Problema artificiale:

$$\min \quad \phi_1$$

$$\begin{cases} y_1+y_2^- -3y_3^- +\phi_1 =2 \\ 2y_1-3y_2^- +y_3^- +y_4=1 \\ y,\phi_1\geq 0 \end{cases}$$

Base iniziale (indicizzando con 5 la colonna di ϕ_1): B={5,4}.

Soluzione ottima duale in forma standard: $y^* = \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 0{,}6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzione ottima duale originale: $y^* = \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ -0{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Condizioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} y_1(x_1+2x_2-4)=0 \\ y_2(-x_1+3x_2-9)=0 \\ y_3(3x_1-x_2-5)=0 \\ x_1(y_1-y_2+3y_3-2)=0 \\ x_2(2y_1+3y_2-y_3-1)=0 \end{cases}$$

Sostituendo le soluzioni trovate si ha:

$$\begin{cases} 1{,}4\left(-\frac{6}{5}+2\frac{13}{5}-4\right)=0 \\ -0{,}6\left(\frac{6}{5}+3\frac{13}{5}-9\right)=0 \\ 0\left(-\frac{18}{5}-\frac{13}{5}-5\right)=0 \\ -\frac{6}{5}(1{,}4+0{,}6-2)=0 \\ \frac{13}{5}(2{,}8-1{,}8-1)=0 \end{cases}$$

Come atteso sono tutte verificate.