Dimostrare condizioni algebriche e geometriche di ottimalità

Basandosi sul teorema di W. M per il quale ricordiamo che un qualsiasi punto può essere espresso come somma di combinazione convessa di tutti i vertici e combinazione conica delle direzioni estreme

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v^{(j)} + \sum_{i=1}^{h} \mu_i d^{(i)}$$

COMBINAZIONE CONVESSA

$\sum_{i=1} \lambda^i = 1$ — AFFINE

$\forall \lambda^i \geq 0$ — CONICA

COMBINAZIONE CONICA

$\forall \mu^i \geq 0$

CONDIZIONE GEOMETRICA DI OTTIMALITÀ

Dato un problema di P.L con funzione obiettivo espressa come $\min\{c^T x : x \in P\}$ con P poliedro non vuoto se esiste una soluzione ottima del problema per ogni direzione d del poliedro avremo che $c^T d \geq 0$.

Esistendo una soluzione ottima il problema non può essere illimitato inferiormente (condizioni geometriche di illimitatezza) poiché non possono esistere direzioni di P che hanno $c^T d < 0$

Teorema

Dato un problema di P.L con funzione obiettivo espressa come $\min\{c^T x : x \in P\}$ con P poliedro non vuoto se esiste una soluzione ottima del problema esiste un vertice di P ottimo

Dimostrazione

Siano v i vertici che vanno da $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ e d tutte le direzioni che vanno da $d^{(1)}, \dots, d^{(h)}$ indichiamo con x^* il vertice di valore minimo tale che il $c^T x^* = \min\{c^T x^{(i)},\ i = 1, \dots, k\}$.
Dimostriamo il teorema dimostrando che $c^T x^* \leq c^T x$

$$c^T x = c^T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v^{(j)} + \sum_{i=1}^{h} \mu_i d^{(i)}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c^T x^{(j)} + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{h} \mu_i c^T d^{(i)}}}_{c^T d \geq 0} \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c^T x^* = c^T x^*$$

La funzione obiettivo in corrispondenza del vertice x^* è minore o uguale al valore in corrispondenza di qualsiasi altro punto $\in P$, ovvero x^* è soluzione ottima

CONDIZIONI ALGEBRICHE DI OTTIMALITÀ

Dato un problema di P.L in F.S $\min\{c^T x : Ax = b;\ x \geq 0\}$ attraverso le condizioni algebriche di ottimalità cerchiamo l'ottimo tra le SBA. Per riconoscere una SBA ottima, portando il problema in F.C $\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N : x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N,\ x_B, x_N \geq 0\}$ se $\bar{c}_N \geq 0$ e la SBA $\bar{x}_B = \bar{b}$, $\bar{x}_N = 0$ allora la base è ottima e non degenere.

Il criterio dell'ottimalità algebrico fornisce una condizione sufficiente osservando i valori della SBA, mentre la condizione necessaria deve essere dimostrata per assurdo. Ponendo infatti la possibilità che esista un costo ridotto $\bar{c}_j < 0$ stiamo ipotizzando che esiste un costo migliore dell'ottimo. Così facendo stiamo contraddicendo l'ipotesi che avevamo una soluzione ottima.

Per SBA degeneri la condizione di ottimalità è solamente sufficiente ma andando a ricercare l'ottimo si verifica che almeno una delle basi associate alla SBA rispettano le condizioni di ottimalità.