

# TEORIA FDA PANZIERI

2019/2020 – ING. INFORMATICA

## 1. Il controllo a catena aperta e il controllo a controreazione

Durante il corso abbiamo studiato due tipologie di sistemi di controllo: quelli a catena aperta e quelli a catena chiusa, anche detti di “controreazione”.

A differenza dei sistemi di controllo a catena aperta, nei sistemi di controllo a controreazione l'azione di controllo dipende dall'uscita; si utilizzano quindi quando c'è la necessità di regolare l'uscita in funzione delle condizioni esterne o di altre condizioni che possono influire sul risultato del sistema.

### Controllo a catena aperta

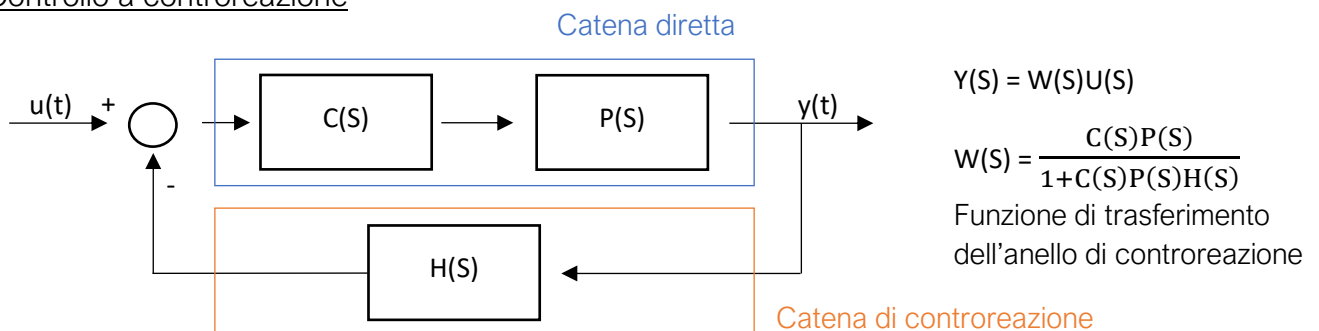


Gli elementi principali sono:

- Sistema ( $P(S)$ ) è la realtà stiamo analizzando e che vogliamo controllare.
- Controllore: in base all'errore elabora un valore corrispondente all'ingresso del sistema da controllare.

E' un sistema che può svolgere attività semplici (ex. accensione/spegnimento); è quindi semplice da implementare e ha un costo ridotto rispetto al sistema di controllo a controreazione. Tuttavia non è in grado di rigettare disturbi, non ha nessun controllo sugli errori, è molto sensibile a variazioni parametriche e non ha modo di effettuare operazioni di regolazione e/o asservimento.

### Controllo a controreazione



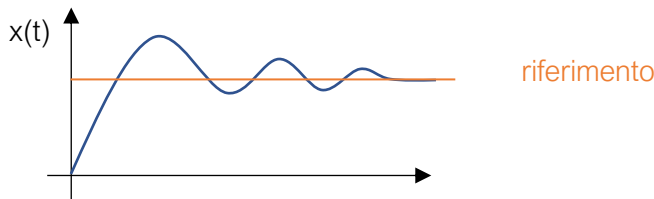
La differenza principale è la presenza di un

- Trasduttore ( $H(S)$ ), il quale trasforma l'uscita del sistema in un segnale compatibile con il Comparatore, che lo confronterà con il riferimento in modo da valutare gli opportuni interventi di correzione sul sistema

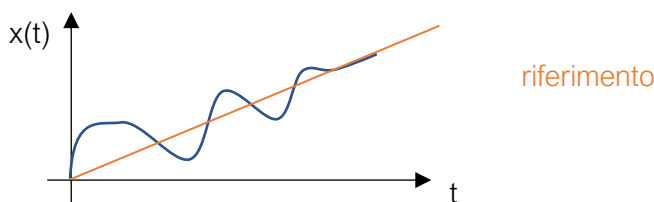
Questa tipologia di sistema di controllo è in grado di svolgere attività di regolazione/asservimento, rigettare eventuali disturbi in catena diretta, controllare o talvolta annullare gli errori e ha un effetto linearizzante su processi che potrebbero non esserlo. Tuttavia la sua complessità lo rende economicamente più costoso.

## 2. Regolazione e Asservimento

In un sistema di Regolazione le grandezze di riferimento sono costanti, e quindi la sua finalità è quella di mantenere costanti e pari al livello desiderato le grandezze di uscita contrastando gli effetti dei disturbi e delle variazioni parametriche.



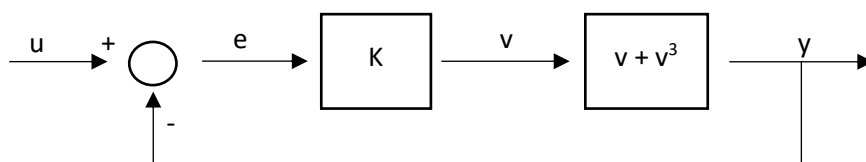
Un sistema di Asservimento è invece caratterizzato dal fatto che le grandezze di comando sono generiche funzioni del tempo, e la sua finalità è quella di forzare le grandezze di uscita ad assumere un andamento proporzionale a quello delle grandezze di ingresso, entro prefissati margini di tolleranza, opponendosi anche in questo caso agli effetti dei disturbi e delle variazioni parametriche.



## 3. Proprietà linearizzante della controreazione

Uno degli effetti più utili della controreazione è la linearizzazione del blocco diretto. Questo grazie ad un'azione di compensazione automatica: qualsiasi variazione della grandezza d'uscita, comunque provocata, si traduce in una corrispondente variazione del segnale d'errore e dunque in una azione correttiva.

Iniziamo, per semplicità, ad analizzare un sistema statico non lineare, nel quale le equazioni differenziali che lo rappresentano non dipendono dal tempo:



$$\begin{aligned} \text{Guadagno ad anello} \\ = G(S)H(S) = K(v+v^3) \end{aligned}$$

$$e = u - y; \quad v = Ke; \quad v + v^3 = y;$$

Procedendo con qualche sostituzione otteniamo

$$K(u - y) + K^3(u - y)^3 = y \quad \text{questa relazione definisce un legame implicito tra } u \text{ e } y$$

supponendo  $K > 0$  e dividendo tutto per  $K^3$ , tentiamo di esplicitare tale legame

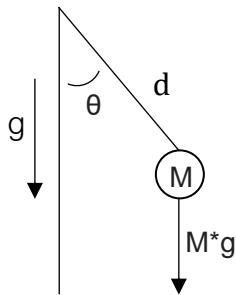
$$\frac{K(u - y) - y}{K^3} + (u - y)^3 = 0$$

facendo tendere  $K \rightarrow \infty$  (guadagno  $\rightarrow \infty$ ), posso trascurare il primo termine

$$(u - y)^3 = 0 \rightarrow u - y = 0 \rightarrow u = y \quad \text{ed ottenere una relazione lineare.}$$

Quindi, partendo da un sistema non lineare statico, aggiungendo una controreazione ed aumentando il guadagno, lo si può rendere lineare. In questo caso si fa riferimento al guadagno della catena diretta e, senza farlo tendere ad infinito, la relazione non sarebbe mai potuta diventare lineare.

Consideriamo adesso un sistema dinamico non lineare, le cui equazioni differenziali dipendono dal tempo. In particolare analizziamo l'esempio di pendolo con un guadagno in velocità molto elevato:



$$u(t) = Md^2\ddot{\theta} + Mgd\sin(\theta) \quad (\text{possiamo ignorare lo smorzamento})$$

Lavoriamo in velocità e scegliamo un feedback con alto guadagno ( $\varepsilon$  piccolo)

$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon}(v - \dot{\theta})$$

nella quale:  $1/\varepsilon$  è il guadagno,  
 $\dot{\theta}$  è la velocità del pendolo e,  
 $v$  è una velocità di riferimento

Quindi prendo la velocità del pendolo, la confronto con un riferimento e poi mando all'ingresso del sistema l'errore di velocità moltiplicato per una costante  $1/\varepsilon$ .

Uguagliando le due equazioni e moltiplicando tutto per  $\varepsilon$  ottengo:

$$Md^2\ddot{\theta} + Mgd\sin(\theta) = \frac{1}{\varepsilon}(v - \dot{\theta}) \rightarrow \varepsilon Md^2\ddot{\theta} + \varepsilon Mgd\sin(\theta) = (v - \dot{\theta})$$

Ora si può chiaramente notare come, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , quindi per il guadagno  $1/\varepsilon \rightarrow \infty$ , rimane solo  $v - \dot{\theta} = 0 \rightarrow v = \dot{\theta}$  una relazione lineare tra il riferimento e la velocità.

Quindi, anche nel caso di sistemi dinamici non lineari, un alto guadagno può riportare la linearità.

Una domanda ulteriore da porsi è se, quando  $\varepsilon = 0$ , il sistema continuerà a rimanere stabile? Questo varia caso per caso; per quanto riguarda il pendolo in particolare, siccome per  $\varepsilon = 0$  andiamo a cancellare solamente dinamiche stabili non andremo a creare problemi di stabilità interna. Quindi sì.

## 4. La trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace associa a funzioni di variabili reali, funzioni a variabili complesse. Il vantaggio sta nel poter semplificare lo studio di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, trasformandole in equazioni algebriche.

La trasformata di Laplace unilatera sinistra, quella utile al nostro studio, si definisce come:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dove per  $t < 0 \rightarrow f(t) = 0$  ed  $s$  è pari a  $s = \sigma + j\omega$ ;

$\sigma$  è detta ascissa di convergenza ed identifica la variabile che rende sommabile, ovvero integrabile, la funzione di Laplace. Solitamente un esponente negativo converge sempre, ma la presenza di  $s$  può creare squilibrio. L'ascissa di convergenza fa sì che ci sia sempre una convergenza assoluta. Divide in due lo spazio gaussiano così che alla sua destra sia integrabile, mentre alla sua sinistra non lo sia. Assume quindi alternativamente il valore di 0 o di -infinito a seconda dei casi.

Esistono alcune trasformate elementari:

- Esponenziale

$$f(t) = \begin{cases} e^{pt} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-p} \rightarrow \begin{aligned} L\{e^{pt}\} &= \frac{1}{s-p} \\ L\{e^{j\omega t}\} &= \frac{1}{s-j\omega} \end{aligned}$$

- Seno e Coseno (sfrutto le formule di Eulero)

$$L\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}; \quad L\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2};$$

- Delta

Sapendo che per  $t > 0 \rightarrow \delta_{-x}(t) = \frac{t^{x-1}}{x-1}$ , posso ricavare facilmente le trasformate delle varie delta utilizzando la formula

$$L\{K\delta_{-x}(t)\} = \frac{K}{s^x} \rightarrow L\{at^k\} = a \frac{K!}{s^{k+1}}$$

Impulso	Gradino	Rampa	Parabola	
$\delta_0(t)$	$\delta_{-1}(t)$	$\delta_{-2}(t)$	$\delta_{-3}(t)$	
?	1	$t$	$t^2/2$	$t > 0$
1	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$	Trasformata

Per poter ritornare alla funzione originale si sfrutta l'anti-trasformata di Laplace.

In generale sappiamo che una funzione di trasferimento di un sistema lineare è esprimibile come un rapporto tra due polinomi della variabile  $s$ :

$$F(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i};$$

Le radici del polinomio del numeratore  $z_1 \dots z_m$  sono dette zeri e per questi valori la funzione di trasferimento si annulla. Le radici del polinomio al denominatore  $p_1 \dots p_n$  sono dette poli e per questi valori la funzione di trasferimento vale infinito.

Al fine di ricavare la funzione di partenza risulta utile scomporre la  $F(S)$  in frazioni parziali, ottenendo,

– nel caso di poli singoli:

$$F(S) = \frac{N(S)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = R_0 + \frac{R_1}{(s - p_1)} + \dots + \frac{R_n}{(s - p_n)} = R_0 + \sum_1^n \frac{R_i}{(s - p_i)};$$

$$f(t) = \sum_1^n R_i e^{p_i t};$$

I termini  $R$  sono detti residui e sono ottenibili tramite il metodo dei residui:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \frac{N(S)}{D(S)};$$

– nel caso di poli multipli:

si suppone di avere  $k$  poli diversi  $p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità  $r_i > 1$ .

$$F(S) = \frac{N(S)}{(s - p_1)^{r_1} \dots (s - p_k)^{r_k}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{R_{ij}}{(s - p_i)^{r_i - j + 1}};$$

$$R_{ij} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(j - 1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} (s - p_i)^{r_i} \frac{N(S)}{D(S)};$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{R_{ij}}{(r_i - j)!} t^{r_i - j} e^{p_i t};$$

## 5. Modi propri d'evoluzione di un sistema lineare e stabilità di un sistema lineare

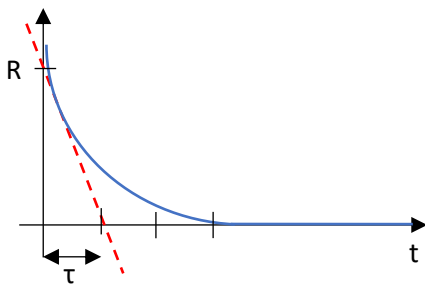
La risposta nel tempo di un sistema lineare è una somma di andamenti esponenziali, eventualmente complessi, chiamati modi propri del sistema. Questi possono avere tre configurazioni:  $R, Re^{pt}, Re^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$ ; cioè avranno tre tipi di andamenti: costante, esponenziale o oscillatorio.

Nei primi due casi ci troviamo in una struttura in trasformata di Laplace che presenta poli reali semplici, che svilupperà un modo aperiodico

$$Y(S) = \frac{N(S)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)};$$

prendiamo di esempio la struttura più semplice  $Y(S) = \frac{1}{(s-p)}$ ; e applichiamo la anti-trasformata per portarla nel dominio del tempo  $y(t) = Re^{pt}$ ;  $\dot{y}(0) = Rp$ ;

Ovviamente questa funzione avrà un andamento nel tempo che dipende dal valore  $p$ :  
 $p < 0 \rightarrow$  il modo è convergente;  $p = 0 \rightarrow$  il modo è costante;  $p > 0 \rightarrow$  il modo è divergente.



$R$  è l'ampiezza del modo,  
 $\tau = -\frac{1}{p}$ ; è una costante di tempo che indica quanto velocemente l'esponenziale tende a zero.

Nel caso di un moto oscillatorio invece, ho una funzione nel dominio di Laplace che presenta poli complessi e coniugati ed un andamento nel tempo pseudoperiodico

$$Y_t(S) = \frac{N(S)}{(s^2 + a_1s + a_0) \dots}; \quad Y(S) = \frac{R}{s-p} + \frac{R^*}{(s-p)^*} = \frac{R}{s-\sigma-j\omega} + \frac{R^*}{(s-\sigma+j\omega)^*};$$

dove le radici  $p = \sigma + j\omega$ ;

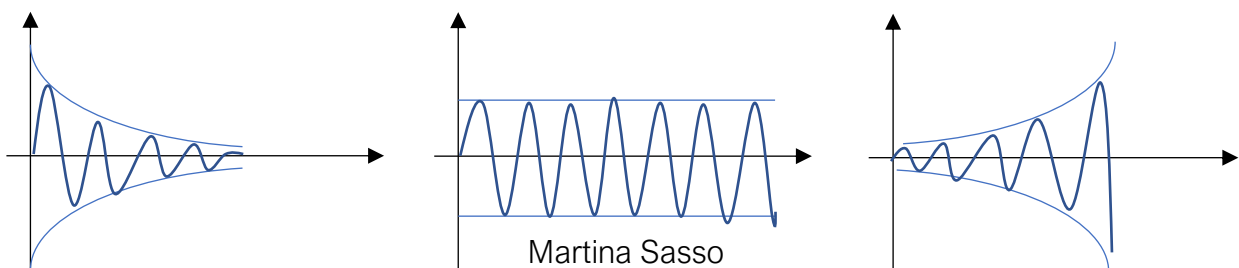
Applicando la anti-trasformata per riportarli nel dominio del tempo otterremo

$$y(t) = Re^{(\sigma+j\omega)t} + R^*e^{(\sigma-j\omega)t}; \quad \text{dove } R = |R|e^{j\varphi};$$

Elaborando ulteriormente e sfruttando le formule di Eulero otteniamo che

$$y(t) = 2|R|e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi);$$

Questa funzione avrà un andamento oscillatorio nel tempo, dipendente dal valore di  $\sigma$ :  
 $\sigma < 0 \rightarrow$  il modo è convergente;  $\sigma = 0 \rightarrow$  il modo è stazionario;  $\sigma > 0 \rightarrow$  il modo è divergente.



Un sistema lineare si dice essere asintoticamente stabile se i modi di evoluzione di tale sistema sono tutti convergenti. Basta un unico modo divergente per rendere il sistema instabile. Esiste poi la possibilità che non ci siano modi divergenti ma solamente modi convergenti o stazionari; in tal caso il sistema è semplicemente stabile.

Matematicamente questo implica che: se i coefficienti del denominatore sono tutti positivi, allora il sistema è asintoticamente stabile; se i coefficienti del denominatore sono tutti positivi ma esiste un polo nell'origine allora siamo al limite della stabilità; se invece esiste almeno un polo a parte reale positiva, cioè se ho un coefficiente negativo, il sistema è instabile.

## 6. Risposta libera e risposta forzata

Analizziamo una generica equazione differenziale lineare, ordinaria e stazionaria a coefficienti costanti, causale ( $m \leq n$ ):

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i}{dt^i} u(t)$$

E andiamo a studiarla nel piano S di Laplace sapendo che

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n} y(t)\right\} = s^n Y(S) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{(k)}(0); \quad \text{condizioni iniziali}$$

quindi risolviamo per Y(S) ottenendo

$$Y(S) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} U(S) - \frac{CI_y^{(n-1)}(S)}{a_n s^n + \dots + a_0} + \frac{CI_u^{(m-1)}(S)}{a_n s^n + \dots + a_0};$$

L'ultimo termine contenente le condizioni iniziali dell'ingresso u è eliminabile poiché, nella trasformata di Laplace unilatera sinistra si verifica sempre che  $t < 0 \rightarrow u(t) = 0$ ;

La risposta libera è la risposta di un sistema considerando soltanto le condizioni iniziali del sistema stesso (trascurando l'ingresso) e facendo agire lo stato del sistema; La risposta forzata, invece, è quella ottenuta facendo agire soltanto l'ingresso e trascurando lo stato del sistema.

Quindi, rispetto all'equazione precedente, avremo che Y(S) è scomponibile in *risposta forzata* – *risposta libera*.

$$Y(S) = Y_f(S) - Y_l(S) = F(S)U(S) - Y_l(S);$$

dove F(S) è detta Funzione di trasferimento del sistema; inoltre entrambe le tipologie di risposta hanno un denominatore comune, chiamato polinomio caratteristico. Lo studio di tale polinomio ci può fornire informazioni importanti sull'uscita del sistema: qualora fossero presenti al suo interno solo radici (poli) a parte reale negativa, il sistema risulterà asintoticamente stabile. Questo vuol dire che la risposta libera tenderà a zero, e l'uscita del sistema sarà pari a

$$Y(S) = F(S)U(S);$$

## 7. Funzione di trasferimento

Si definisce funzione di trasferimento il rapporto tra le trasformate di Laplace dell'uscita e dell'ingresso del sistema, con condizioni iniziali nulle.

Per capire meglio questo concetto partiamo analizzando una generica equazione differenziale lineare, ordinaria e stazionaria a coefficienti costanti, causale ( $m \leq n$ ):

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i}{dt^i} u(t)$$

E andiamo a studiarla nel piano S di Laplace sapendo che

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n} y(t)\right\} = s^n Y(S) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{(k)}(0); \quad \text{condizioni iniziali}$$

quindi risolviamo per Y(S) ottenendo

$$Y(S) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} U(S) - \frac{CI_y^{(n-1)}(S)}{a_n s^n + \dots + a_0} + \frac{CI_u^{(m-1)}(S)}{a_n s^n + \dots + a_0};$$

L'ultimo termine contenente le condizioni iniziali dell'ingresso u è eliminabile poiché, nella trasformata di Laplace unilatera sinistra si verifica sempre che  $t < 0 \rightarrow u(t) = 0$ ;

Rispetto all'equazione precedente, notiamo che Y(S) è scomposta in *risposta forzata* – *risposta libera*. In particolare, la frazione di polinomi che precede la U(S) è detta Funzione di trasferimento F(S) del sistema.

Possiamo notare che entrambi i termini presentano un denominatore comune, chiamato polinomio caratteristico. Lo studio di tale polinomio ci può fornire informazioni importanti sull'uscita del sistema: qualora fossero presenti al suo interno radici (poli) a parte reale negativa, il sistema risulterà asintoticamente stabile. Questo vuol dire che la risposta libera tenderà a zero, e l'uscita del sistema sarà pari semplicemente a

$$Y(S) = F(S)U(S); \rightarrow F(S) = \frac{Y(S)}{U(S)};$$

La funzione di trasferimento, in questo caso, descrive quasi completamente il sistema in analisi e ci permette di determinare rapidamente alcune informazioni:

- Stabilità asintotica:  
se ho tutti poli a parte reale negativa, il sistema sarà asintoticamente stabile;
- Velocità di convergenza:  
più i poli a parte reale negativa sono piccoli, più rapidamente la funzione convergerà;
- Comportamento oscillatorio:  
presente nel caso in cui ci fossero poli complessi;
- L'uscita permanente, per  $t \rightarrow \infty$ :  
calcolata grazie al teorema del valor finale  $y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s * F(S) * U(S)$ ;



## 8. Risposta transitoria e permanente

Consideriamo un sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento  $F(S) = N(S)/D(S)$ ; ed applichiamo un ingresso canonico (generalmente è un polinomio di ordine  $k$  del tipo  $u(t) = t^k/k!$ ). La risposta in termini di trasformata di Laplace sarà

$$Y(S) = \frac{N(S)}{D(S)} U(S);$$

Mettiamo in evidenza nella composizione in fratti semplici i termini associati a poli asintoticamente stabili, semplicemente stabili ed instabili, ottenendo

$$y(t) = \underbrace{L^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i}{s - p_i} \right]}_{\text{Contributo dei poli asintoticamente stabili}} + \underbrace{L^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j}{s - p_j} \right]}_{\text{Contributo dei poli semplicemente stabili}} + \underbrace{L^{-1} \left[ \sum_{k=1}^{n_{inst.}} \frac{R_k}{s - p_k} \right]}_{\text{Contributo dei poli instabili}};$$

Il contributo alla risposta dovuto ai termini associati ai poli a parte reale negativa è un contributo che svanisce nel lungo tempo, poiché tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ : per questo è detto risposta transitoria.

I contributi alla risposta dovuti ai termini associati ai poli semplicemente stabili oppure instabili certamente non tendono a zero al crescere del tempo: in realtà man mano che il tempo passa la risposta diviene sempre più simile a quella ottenibile da solo questi due contributi: per questo il loro insieme è detto risposta a regime permanente.

Applicando il teorema del valor finale alla  $y(t)$  è possibile conoscere a che valore il sistema tenderà (la sua risposta a regime permanente). Tale teorema dice che se una funzione reale  $y(t)$  ha trasformata razionale con grado del denominatore maggiore del numeratore e radici del denominatore (poli) nell'origine e/o a parte reale negativa, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(S);$$

Lo studio della risposta transitoria invece, cioè ciò che accade alla nostra funzione prima di raggiungere la risposta permanente, si può studiare utilizzando una diversa parametrizzazione del polinomio caratteristico:

$$a_n s^n + \dots + a_0 = (s - p)(s - p)^* = s^2 + 2\sigma s + \omega^2 + \sigma^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2;$$

$$\omega_n = \sqrt{a_0}; \quad \zeta = \frac{a_1}{2\omega_n};$$

$\omega_n$  è detta pulsazione naturale, invece  $\zeta$  è lo smorzamento. In base a questi due valori riusciamo a dedurre il comportamento della risposta transitoria:

- $\zeta = 0 \rightarrow s^2 + \omega_n^2 = 0 \rightarrow s = \pm j\omega_n$ ; in questo caso ho poli solo sull'asse immaginario, quindi non converge né diverge, ma oscilla perennemente.
- $\zeta = 1$ ; nel caso limite avrò solo poli reali, quindi non sarà presente nessuna oscillazione.
- $0 < \zeta < 1$ ; qui saranno presenti poli complessi e coniugati del tipo  $\sigma \pm j\omega$ ; la risposta permanente oscillerà, con andamenti convergenti ( $\sigma < 0$ ) o divergenti ( $\sigma > 0$ ) sulla base del valore di  $\sigma$ .

## 9. Criterio di Routh

Sappiamo che, nel caso di sistemi lineari, la stabilità è deducibile dalla parte reale dei poli della funzione di trasferimento. In particolare se tutti i poli hanno parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile; sono tollerati anche i poli semplici, la cui parte reale è zero, e nel cui caso il sistema sarà semplicemente stabile.

I poli sono certamente calcolabili ponendo il denominatore della  $F(S)$  pari a zero; ma i calcoli potrebbero essere laboriosi e non avremmo informazioni per agire sui sistemi instabili.

Il criterio di Routh permette di determinare se un sistema a controreazione è stabile senza dover calcolare esattamente la posizione delle radici stesse; ma interessandosi solo a scoprire se tutti i poli sono a sinistra dell'asse immaginario.

Poniamo il polinomio caratteristico  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ ; e poi procediamo costruendo la tabella di Routh:

n	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...	I valori dei vari $b_x \dots k_x$ sono dati dal determinante delle due righe superiori a tale elemento (prima colonna e colonna a destra dell'elemento), diviso l'inverso dell'elemento in basso a sinistra di tale determinante:
n-1	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...	
n-2	$b_1$	$b_2$	...		
...	...	...	...		
0	$k_1$	$k_2$	...		

$$b_1 = \frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}}{-a_{n-1}}; \quad b_2 = \frac{a_n a_{n-5} - a_{n-1} a_{n-4}}{-a_{n-1}};$$

Per il teorema di Routh, se tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono positivi, allora il sistema è stabile. Ci permette anche di conoscere esattamente il numero di radici reali positive, dato dal numero di variazioni di segno dei coefficienti della prima colonna.

Sono previsti anche 2 casi particolari:

- Elemento nullo nella prima colonna

Andrò a sostituire tale elemento con un valore  $\varepsilon$ , mantenuto anche nel calcolo dei coefficienti sottostanti. A questo punto, se voglio solamente studiare la stabilità posso fermarmi; se invece voglio scoprire il numero di radici reali positive devo andare a studiare i risultati per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e  $\varepsilon \rightarrow 0^-$ .

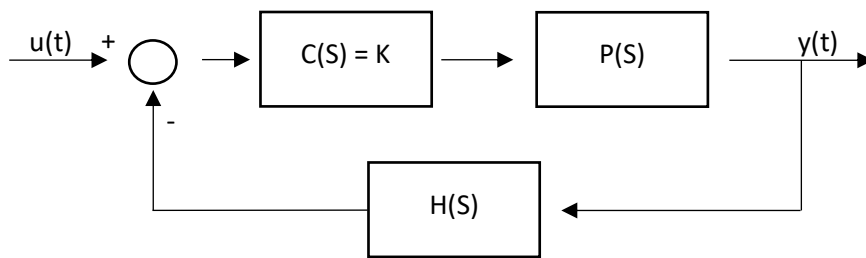
- Riga completamente nulla

In questo caso ho due possibilità, che partono con il dividere il polinomio di partenza in due sotto polinomi  $P(S) = P_1(S)P_2(S)$ .

1. La variazione delle radici di  $P_1(S)$  sarà data dalle righe fino a quella precedente alla riga nulla, non inclusa. La riga immediatamente sovrastante quella nulla fornisce  $P_2(S)$ , detta equazione ausiliaria, che è sempre di grado pari e risolta ci fa ottenere le ultime radici.
2. In alternativa si sostituisce la riga nulla con la derivata dell'equazione ausiliaria. E le variazioni delle ultime  $q+1$  righe (dove  $q$  è la  $n$  corrispondente alla riga precedente a quella nulla) corrispondono alle radici a parte reale positiva di  $P_2(S)$ ; le rimanenti sono immaginarie.

Il criterio di Routh è molto utile nel caso si necessiti di individuare un coefficiente K appartenente al controllore, in modo tale che il mio sistema sia asintoticamente stabile.

Preso un sistema a controreazione del tipo



Vado a scrivere la mia funzione di trasferimento dell'anello di controreazione come

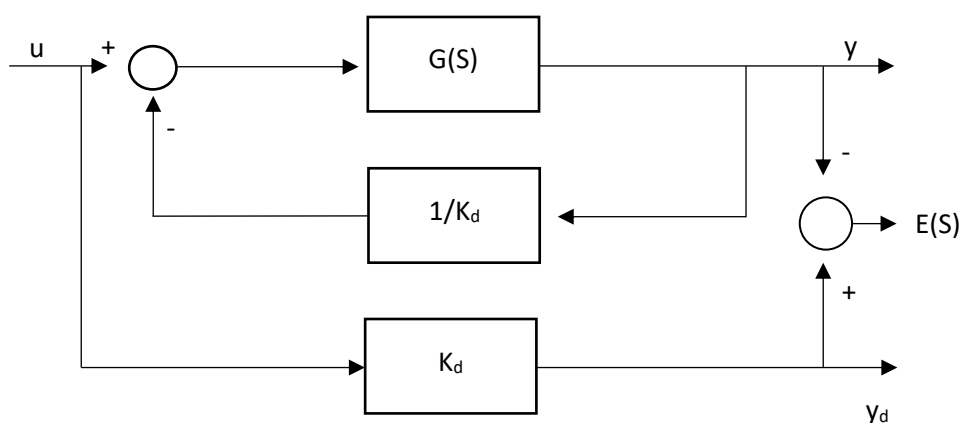
$$W(S) = \frac{C(S)P(S)}{1 + C(S)P(S)H(S)};$$

Applicando il teorema di Routh al polinomio caratteristico (denominatore di tale funzione) avremo una serie di coefficienti parametrici rispetto a K. Ponendo tali coefficienti  $>0$  e risolvendo il sistema risultante, riusciremo ad individuare per quali valori di K il sistema risulti asintoticamente stabile.

## 10. Comportamento a regime: classificazione in tipi

Per comportamento a regime si intende il comportamento del sistema a controreazione dopo un certo tempo dall'applicazione del segnale d'ingresso. L'analisi del comportamento a regime è importante per comprendere con precisione il funzionamento del sistema: in particolare la sua risposta. Una volta estinto il transitorio, la differenza che esiste tra il valore desiderato e quello ottenuto identifica l'indice di fedeltà della risposta, o l'errore.

Prendiamo il sistema



Ovviamente vorrei che la mia uscita  $y$ , a regime permanente, fosse equivalente all'uscita desiderata  $y_d$ ; per fare ciò, l'errore  $e$  per  $t \rightarrow \infty$ , dev'essere zero.

$$y = y_d \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0;$$

L'errore nel piano S è esprimibile come

$$E(S) = -W(S)U(S) + k_d U(S) = \left( k_d - \frac{G(S)}{1 + G(S) \frac{1}{k_d}} \right) U(S)$$

$$= \left( k_d - \frac{G(S)k_d}{k_d + G(S)} \right) U(S) = \frac{k_d^2}{k_d + G(S)} U(S);$$

siccome mi interessa il suo valore per  $t \rightarrow \infty$ , posso applicare il teorema del valor finale applicando un ingresso canonico (ricordando che  $L_{-} \{t^k/k!\} = 1/s^{k+1}$ )

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{k_d^2}{k_d + G(S)} \frac{1}{s^{k+1} \cancel{s}} = 0;$$

Esplicitiamo la  $G(S)$  come controllore + processo da controllare  $G(S) = C(S)P(S)$ . Ovviamente non possiamo intervenire sul processo, ma possiamo creare un controllore che ci permetta di mandare l'errore a zero; l'unica condizione è che sia causale (grado del numeratore maggiore del grado del denominatore). Riesco così ad esprimere  $G(S)$  con la struttura

$G(S) = \frac{G'(S)}{s^h}$ ; dove  $h$  è il numero di integratori in catena diretta ( $n^\circ$  di poli nell'origine)

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_d^2}{k_d + G'(S)/s^h} \frac{1}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_d^2}{s^h k_d + G'(S)} s^{h-k} = 0$$

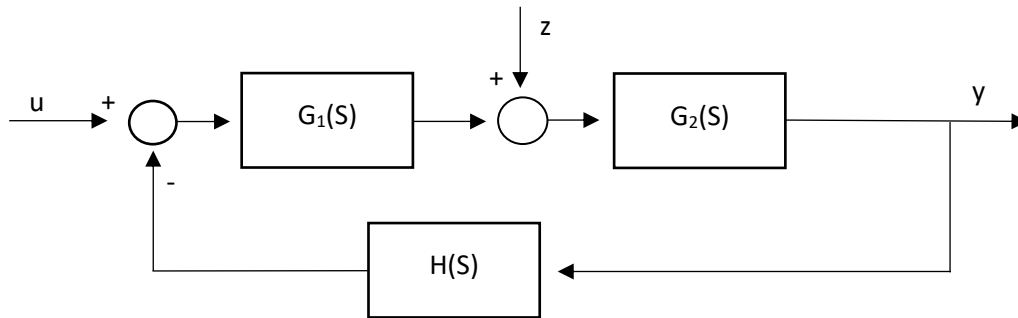
Posto  $G'(0) = k_G$ , il risultato di tale limite dipenderà dalla relazione tra  $h$  e  $k$ :

- $h > k \rightarrow e(\infty) = 0;$
- $h < k \rightarrow e(\infty) = \infty;$
- $h = k \rightarrow e(\infty) = \begin{matrix} \nearrow h = 0 \rightarrow \frac{k_d^2}{k_d + k_G} \\ \longrightarrow h \geq 1 \rightarrow \frac{k_d^2}{k_G} \end{matrix}$

E' il valore  $h$  che definisce la classificazione del tipo di sistema di controllo che sto sviluppando, proprio in base al numero di poli nell'origine presenti nella funzione di trasferimento a catena diretta, che corrispondono al numero di integratori in catena diretta.

## 11. Reiezione dei disturbi

Lo stesso ragionamento fatto prima è applicabile alla reiezione dei disturbi. Per disturbo si intende quella classe di ingressi che non risultano misurabili, quindi non sono noti, i quali provocano un'uscita indesiderata. Prendiamo un sistema a controreazione ed iniettiamo un disturbo  $z$  di tipo canonico in ingresso in catena diretta:



Andiamo a calcolare la funzione di trasferimento dell'anello di controreazione tenendo conto del disturbo, come

$$W_z(S) = \frac{G_2(S)}{1 + G_1(S)G_2(S)H(S)}; \quad Z(S) = \frac{1}{s^{k+1}};$$

Applicando il teorema del valor finale vado a studiare il comportamento del sistema per  $t \rightarrow \infty$ , tendendo di annullare il disturbo portando il limite a zero:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s W_z(S) Z(S) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2(S)}{1 + G_1(S)G_2(S)H(S)} \frac{1}{s^{k+1}} = 0;$$

L'unico modo per annullare tale disturbo è agire sulla funzione che nel sistema lo precede, riscrivendola come  $G_1(S) = G_1'(S)/s^h$ ;

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2(S) s^h}{s^h + G_1'(S)G_2(S)H(S)} \frac{1}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2(S)}{s^h + G_1'(S)G_2(S)H(S)} s^{h-k} = 0;$$

Anche in questo caso, la reiezione del disturbo è determinata dalla relazione tra  $h$  e  $k$ , quindi posto  $G_1'(0) = k_{G_1}$  e  $G_2(0) = k_{G_2}$ , ottengo:

- $h > k \rightarrow e_z \rightarrow 0$ ;
- $h < k \rightarrow e_z \rightarrow \infty$ ;
- $h = k \rightarrow e_z \rightarrow \frac{k_{G_2}}{k_{G_1} k_{G_2} \frac{1}{k_d}}$ ;

Quindi, per azzerare il disturbo, devo trovarmi nel caso in cui  $h > k$ , cioè devo avere almeno un integratore a monte del disturbo. Un sistema di questo tipo, che rigetta un disturbo costante, è detto astatico.

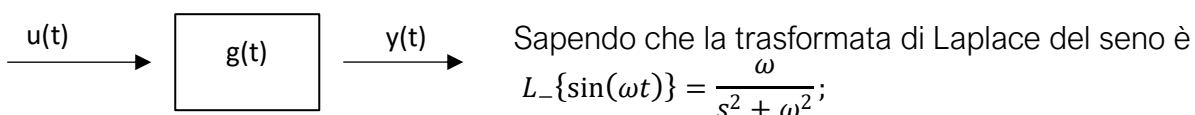
Questo ragionamento è valido solamente per i disturbi in catena diretta. I sistemi a controreazione non sono mai in grado di rigettare disturbi presenti nella catena di controreazione.

Adesso siamo in grado di definire i parametri necessari al fine di rigettare completamente disturbi appartenenti alle classi canoniche dei gradini, rampe e parabole:

- gradino  
 $z(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow Z(S) = \frac{1}{s} \rightarrow k = 0$ ; quindi mi basta  $h = 1$  integratore a monte di  $z$ .
- rampa  
 $z(t) = \delta_{-2}(t) \rightarrow Z(S) = \frac{1}{s^2} \rightarrow k = 1$ ; quindi mi servono  $h = 2$  integratori a monte di  $z$ .
- parabola  
 $z(t) = \delta_{-3}(t) \rightarrow Z(S) = \frac{1}{s^3} \rightarrow k = 2$ ; quindi mi servono  $h = 3$  integratori a monte di  $z$ .

## 12. Risposta armonica e le sue rappresentazioni grafiche

Prendiamo un sistema asintoticamente stabile, per il quale il segnale d'uscita corrisponde al segnale d'ingresso, ed immettiamo in ingresso una sinusoide del tipo  $u(t) = \sin(\omega t)$ ;



Posso esprimere l'uscita nel piano S come

$$Y(S) = G(S) * \frac{\omega}{s^2 + \omega^2};$$

e poi utilizzare la decomposizione in poli e residui per individuare due dinamiche:

$$Y(S) = \left[ \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots + \frac{R_i}{s - p_i} \right] + \left[ \frac{R}{s - j\omega} + \frac{R^*}{s + j\omega} \right];$$

Nella **prima parte** troviamo le dinamiche del sistema che convergono a zero, cioè la risposta transitoria. Una volta esaurita, rimarrà solamente la **risposta a regime permanente**, composta in questo caso da dinamiche complesse e coniugate corrispondenti all'ingresso del sistema. Di conseguenza, tali dinamiche daranno vita necessariamente ad un segnale oscillatorio.

In particolare possiamo notare un' ulteriore relazione tra il segnale d'ingresso e quello d'uscita. Andiamo ad esplicitare i residui del permanente e le dinamiche nel tempo

$$R = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) G(S) \frac{\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{2j}; \quad R^* = \frac{G^*(j\omega)}{-2j};$$

$$L_{-}\left\{ \frac{R}{s - j\omega} \right\} = R e^{j\omega t}; \quad L_{-}\left\{ \frac{R^*}{s + j\omega} \right\} = R^* e^{-j\omega t};$$

Sapendo che un numero complesso è esprimibile anche in modulo e fase  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi}$  allora posso scrivere l'uscita permanente nel dominio del tempo come

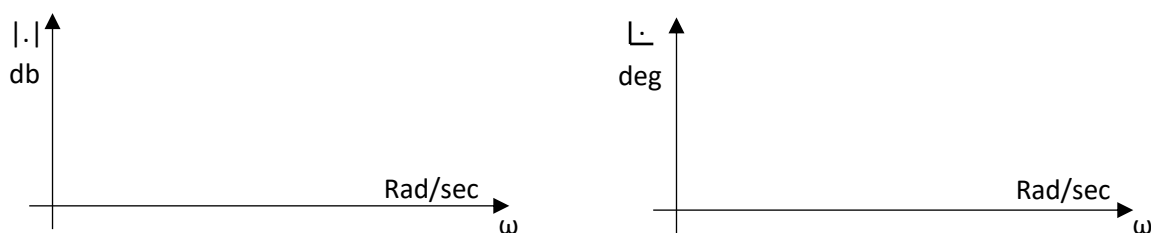
$$\begin{aligned}
 y_p(t) &= Re^{j\omega t} + R^*e^{-j\omega t} = |G(j\omega)|e^{j\varphi} \frac{1}{2j}e^{j\omega t} + |G(j\omega)|e^{-j\varphi} \frac{1}{-2j}e^{-j\omega t} \\
 &= |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t - \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi);
 \end{aligned}$$

Quindi, nota la pulsazione  $\omega$ , l'uscita rimane determinata dal modulo e dalla fase della funzione di trasferimento calcolati su  $j\omega$ . Gli andamenti del modulo e della fase di  $G(S)$  prendono il nome di risposta armonica: questa definisce come il sistema si comporta quando è eccitato da una sinusoide.

Per rappresentare la risposta armonica posso sfruttare 3 tipologie di grafici:

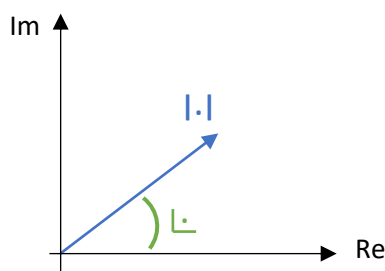
### 1. Diagramma di Bode

Si compone di due diagrammi distinti per il modulo e per la fase; in questo modo ci permette di vedere nel dettaglio l'evoluzione di tali parametri del sistema per le varie pulsazioni  $\omega$ .



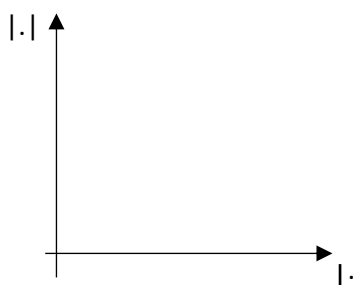
### 2. Diagramma di Nyquist

Utilizza una rappresentazione polare, con asse immaginario ed asse reale. I parametri sono rappresentati con un vettore di lunghezza pari al modulo, e angolo pari alla fase. E' il più immediato nel valutare la stabilità di un sistema lineare, grazie all'omonimo criterio.



### 3. Rappresentazione cartesiana

Classica rappresentazione su due assi: uno per il modulo, ed uno per la fase. Usata raramente nello studio dei sistemi lineari, poiché non riesce a dare abbastanza informazioni.

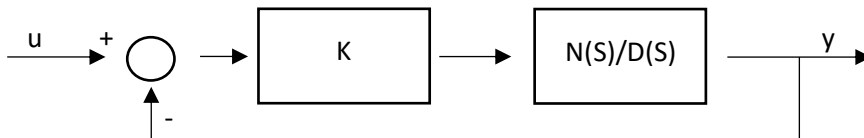


### 13. Sistemi a fase non minima

I sistemi a fase non minima sono sistemi di controllo che, a ciclo aperto, hanno uno o più zeri e/o poli allocati nel semipiano positivo, cioè sono a parte reale positiva. Per i sistemi con poli a parte reale positiva, l'instabilità è certa; tuttavia, per sistemi che presentano solo zeri a parte reale positiva, e non poli, si può ottenere la stabilità.

Il problema principale è che la fase tende a scendere sotto i  $-180^\circ$ , non essendoci termini che permettano di farla risalire, cioè poli a parte reale negativa.

Prendiamo un sistema a controreazione del tipo



ed ipotizziamo che in  $N(S)$  siano presenti zeri con parte reale positiva. Quanto valgono i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(S)$  al variare di  $K$ ?

$$W(S) = \frac{K \frac{N(S)}{D(S)}}{1 + K \frac{N(S)}{D(S)}} = \frac{K N(S)}{D(S) + K N(S)};$$

- $K \rightarrow 0$  allora  $K N(S) \rightarrow 0$

Quindi i poli di  $W(S)$  saranno all'incirca pari al numero delle radici di  $D(S)$ , che non sono mai a parte reale positiva; quindi il sistema è stabile.

- $K \rightarrow \infty$  allora  $K N(S) \rightarrow \infty$

Di conseguenza il termine  $D(S)$  sarà trascurabile, e quindi i poli di  $W(S)$  saranno all'incirca pari alle radici di  $N(S)$ , che sono a parte reale positiva.

Quindi, per guadagni elevati, rischio di ritrovarmi con dei poli a parte reale positiva, il che implica un'instabilità sicura.

### 14. Sistemi con ritardo finito

A volte è possibile che, nella catena di controreazione o in quella diretta, sia presente un ritardo finito, il quale fa sì che il segnale d'ingresso esca identico, ma dopo un certo intervallo di tempo  $\Delta T \neq 0$ . L'uscita è quindi traslata nel tempo rispetto all'ingresso di una quantità  $T$  che rappresenta il ritardo.

Nel dominio di Laplace sappiamo trattare i ritardi, poiché una traslazione nel tempo è definita introducendo un esponenziale

$$L_{-}\{f(t - T)\} = e^{-sT} L_{-}\{f(t)\}; \rightarrow F'(S) = F(S)e^{-sT};$$



Bisogna solo capire come questo esponenziale altera la funzione originale; per farlo poniamo  $s = j\omega \rightarrow e^{-j\omega T}$ :

- Il modulo vale 1 poiché non c'è parte reale, quindi 0db. Di conseguenza non va ad alterare i moduli della  $F(S)$ .
- La fase vale  $-\omega T$ , quindi scende linearmente con  $\omega$ . Essendo la scala di  $\omega$  logaritmica, cioè con  $\omega$  che cresce esponenzialmente su scala lineare, allora  $-\omega T$  scenderà in maniera esponenziale.

Possiamo trovarci in due situazioni:

1. La fase del ritardo decresce esponenzialmente solo dopo l'omega di taglio  $\omega_t$ ; in questo caso non va ad alterare negativamente il sistema.
2. La fase del ritardo decresce esponenzialmente prima dell'omega di taglio  $\omega_t$ ; questo fa sì che il margine di fase  $m_\varphi$  diminuisca, rischiando di farlo avvicinare troppo, se non superare, la linea dei  $-180^\circ$  rendendo il sistema instabile.

Quindi, maggiore è il ritardo  $T$ , prima scenderà l'esponenziale, rischiando di portare il sistema all'instabilità.

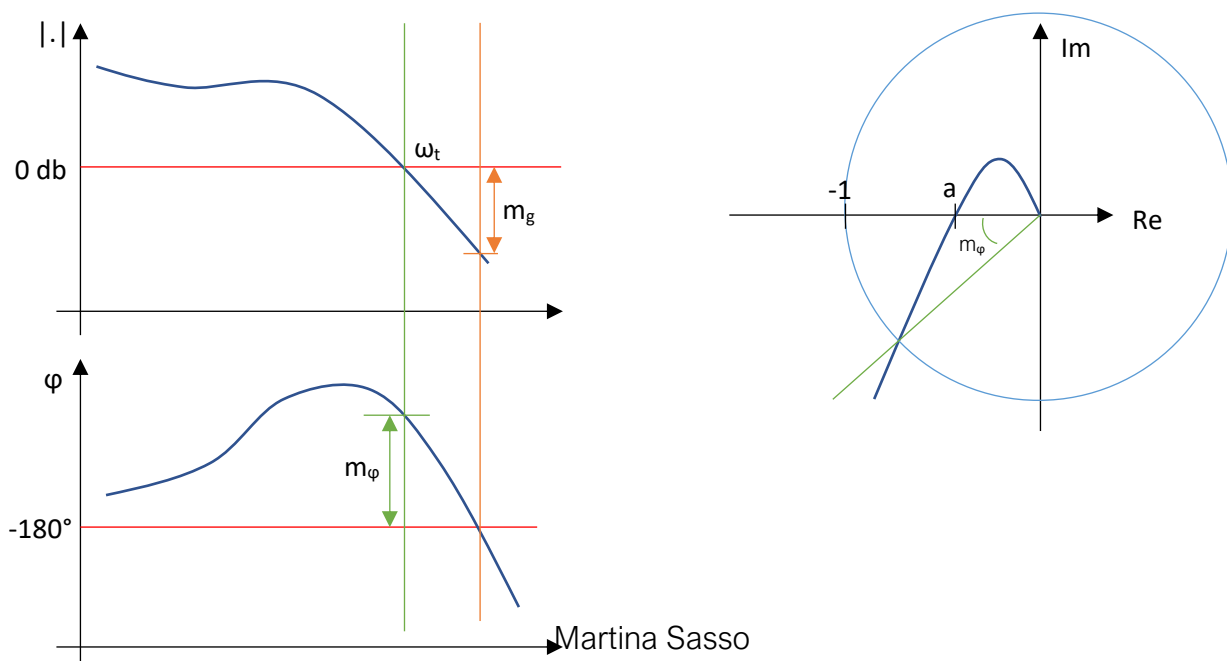
Si potrebbe ristabilizzare spostando l'omega di taglio  $\omega_t$  verso sinistra, cioè abbassando il guadagno, ma questo compromette la qualità del sistema di controllo sia dal punto di vista della riproduzione dei segnali, sia da quello della reiezione dei disturbi.

## 15. Margini di stabilità

Partendo dal presupposto che il sistema a controreazione in analisi sia asintoticamente stabile, per cui  $Y(S) = F(S)U(S)$  e le radici del polinomio caratteristico sono tutte a parte reale negativa, voglio individuare dei parametri che mi diano una metrica sulla qualità della stabilità.

Per fare ciò ho a disposizione due parametri: il margine di guadagno  $m_g$  e il margine di fase  $m_\varphi$ .

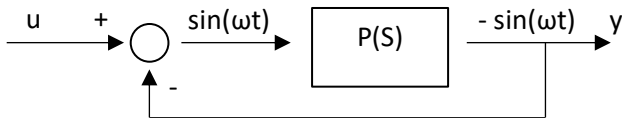
Prendiamo una generica rappresentazione con i diagrammi di Bode e Nyquist di un sistema asintoticamente stabile con fase che scende sotto i  $-180^\circ$ .



Osserviamo prima il grafico di Nyquist, dove vediamo il punto -1 evidenziato. Se la nostra curva passasse proprio per quel punto avremmo delle condizioni ben precise:

$$|F(j\omega)| = 1; \quad \angle F(j\omega) = -180^\circ;$$

Questo vuol dire che l'ingresso che entra nel sistema  $u(t) = \sin(\omega t)$ , esce dal sistema ribaltato di  $-180^\circ$   $y(t) = -\sin(\omega t)$  e poi, grazie alla catena di controreazione, ritorna ad essere positivo.



Il sistema quindi mantiene l'oscillazione posta in input, ritrovandosi al limite della stabilità. In particolare: se il grafico passa a destra di -1, il sistema è stabile; se passa proprio per il punto -1, è al limite della stabilità; se passa a sinistra del punto -1, il sistema è instabile.

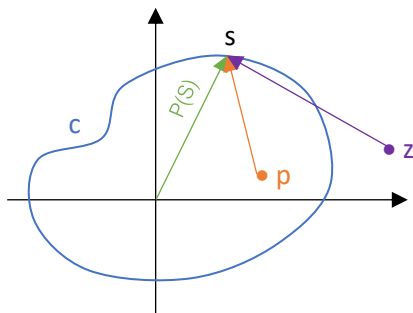
Il valore di omega nel quale il diagramma di Bode del modulo incontra i 0db è detto omega di taglio  $\omega_t$ . In quella stessa omega, sul diagramma della fase, possiamo individuare il marginale di fase  $m_\varphi$ : quest'ultimo è un angolo che segna la differenza tra i  $-180^\circ$  e la fase del sistema, quindi la distanza in gradi dalla linea dei  $-180^\circ$  di Bode; dal diagramma di Nyquist di può notare bene come più è piccolo, più ci si avvicina a -1, punto limite per la stabilità del sistema.

Nella stessa omega in cui il diagramma di Bode della fase taglia i  $-180^\circ$ , nel diagramma del modulo possiamo individuare il marginale di guadagno  $m_g$ , come la distanza in decibel dalla linea degli 0db di Bode. Sul diagramma di Nyquist l'intersezione con i  $-180^\circ$  è segnata dal punto a: il margine di guadagno è quindi anche individuabile come  $1/a$ . Si può notare come, maggiore sarà il margine di guadagno, minore sarà il valore di a, e quindi migliore sarà la stabilità. In particolare, per  $a \rightarrow 0$ , cioè per un diagramma della fase che tende a non incrociare mai la linea dei  $-180^\circ$ , maggiore sarà il mio margine di guadagno fino ad avere  $m_g = \infty$ ;

## 16. Criterio di Nyquist di stabilità

Il criterio di Nyquist si basa sul criterio dell'indicatore logaritmico:

presa una funzione  $P(S)$  analitica (localmente espressa da una serie di potenze convergente), presa una curva chiusa  $c$  su un piano, e preso un punto  $s$  che percorre tutta la curva, ipotizziamo che all'interno ci siano  $n$  poli e  $m$  zeri. Allora, la  $P(S)$  compirà  $m-n$  giri nello stesso verso, intorno all'origine.



$$P(S) = K \frac{(s-z)}{(s-p)};$$

facciamo un ragionamento con un solo zero  $z$  e un solo polo  $p$ , sarà poi applicabile ad una qualsiasi quantità di zeri e poli.

Ipotizziamo che lo zero  $z$  si collochi all'esterno della curva chiusa  $c$ , mentre il polo  $p$  si all'interno. Al variare di  $s$ , la  $P(S)$  camminerà, percorrendo la curva chiusa. Bisogna capire se  $P(S)$  giri effettivamente attorno all'origine, ed eventualmente anche quanti giri compia.

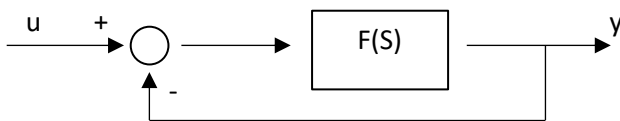
Grazie ai diagrammi di Bode sappiamo che la variazione di fase di una  $P(S)$  è data dalla variazione di fase del numeratore meno la variazione di fase del denominatore. Al variare di  $s$  il vettore  $(s - z) = re^{j\theta}$  cambia fase, ma non gira mai su se stesso poiché  $z$  è fuori dalla curva; quindi non darà alcun contributo di fase. Al contrario il vettore  $(s - p) = \rho e^{j\varphi}$  compie un giro, poiché  $p$  è interno alla curva; darà quindi un contributo di  $-360^\circ$  ("-" perché è al denominatore).

Quindi, il numero di rotazioni di  $P(S)$  intorno all'origine è pari a

$$n^\circ \text{zeri}_{in c}(P) - n^\circ \text{poli}_{in c}(P);$$

Adesso possiamo applicare questo criterio al contrario per capire quanti poli e quanti zeri ci sono all'interno di un sistema; in particolare ci interessa scoprire quanti sono i poli a parte reale positiva presenti nella funzione di trasferimento dell'anello di controreazione  $W(S)$  poiché sappiamo che la loro completa assenza implica la stabilità del sistema.

Prendiamo ad esempio il sistema



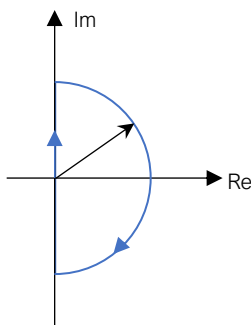
$$W(S) = \frac{F(S)}{1 + F(S)}; \quad F(S) = \frac{N(S)}{D(S)};$$

$$W(S) = \frac{N(S)}{D(S) + N(S)};$$

$$1 + F(S) = 1 + \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{D(S) + N(S)}{D(S)};$$

Notiamo che i poli di  $W(S)$  sono uguali agli zeri di  $1 + F(S)$ ,  
e che i poli di  $F(S)$  sono uguali ai poli di  $1 + F(S)$ .

La funzione  $1 + F(S)$  ci permette quindi di rappresentare una curva che contenga tutti i poli a parte reale positiva del sistema: tale curva è detta curva/percorso di Nyquist; una semicirconferenza che si richiude sull'asse immaginario.



Il numero di rotazioni della funzione  $1 + F(S)$  intorno all'origine è espresso da

$$\begin{aligned} R_{1+F(S),0} &= n^\circ \text{zeri}_{p.r.p.}(1 + F(S)) - n^\circ \text{poli}_{p.r.p.}(1 + F(S)) \\ &= n^\circ \text{poli}_{p.r.p.}W(S) - n^\circ \text{poli}_{p.r.p.}F(S) \end{aligned}$$

Siccome noi vogliamo che il sistema, a ciclo chiuso, sia stabile, allora il numero di poli a parte reale positiva di  $W(S)$  dev'essere paria zero, quindi

$$R_{(1+F),0} = -n^\circ \text{poli}_{p.r.p.}F(S); \quad \longleftarrow \quad \text{Criterio di stabilità di Nyquist}$$

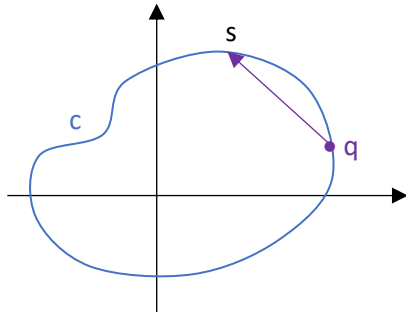
Nei nostri studi ci ritroveremo più spesso ad avere nota  $F(S)$ , e non  $1 + F(S)$ , quindi applichiamo una piccola modifica per ottenere il numero di rotazioni della funzione  $F(S)$  intorno al punto  $-1$ :

$R_{F,-1} = -n^\circ \text{poli}_{p,r,p}.F(S)$ ; se questo è vero, allora il sistema a ciclo chiuso è stabile.

Questo criterio è molto utile anche dal punto di vista grafico: utilizzando la rappresentazione di una  $F(S)$  tramite diagramma di Nyquist ed evidenziando il punto -1, se il diagramma non passa mai a sinistra di tale punto (quindi non vi gira mai attorno), il sistema sarà stabile.

Ci sono alcune situazioni particolari ancora da considerare:

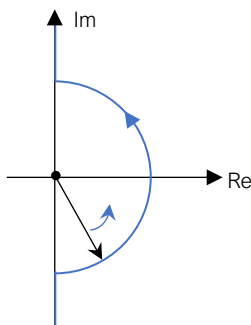
- Presenza di un polo e/o uno zero proprio sulla curva chiusa



$$P(S) = K \frac{(s-z)}{(s-p)(s-q)};$$

finché  $q \neq s$  il vettore  $(s - q)$  rimane definito. Nel punto esatto di coincidenza “scompare” per poi ripresentarsi con una fase esattamente opposta: effettua un salto di  $180^\circ$ , in positivo o in negativo in base alla convenienza.

- Presenza di poli nell'origine (dovuti ad esempio ad integratori in catena diretta)



In questo caso si immagina un percorso uncinato che lascia a sinistra tutti gli eventuali termini presenti sull'asse immaginaria, effettuando così il vettore una rotazione di  $180^\circ$  (con una variazione di fase di  $-180^\circ$  essendo al denominatore).

Numeratore =  $+180^\circ \cdot \text{molteplicità}$

Denominatore =  $-180^\circ \cdot \text{molteplicità}$

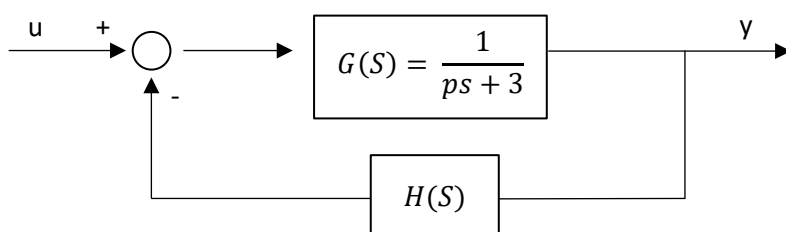
## 17. Funzione di sensibilità e applicazione ai sistemi a controreazione

La funzione di sensibilità serve a capire cosa succede ad un sistema, in particolare alla sua funzione di trasferimento a ciclo chiuso  $W(S)$ , quando ho un parametro che varia.

Presa una funzione  $Q$  ed un parametro  $\alpha$ , la funzione di trasferimento  $S_\alpha^Q$  ci dice quanto la funzione  $Q$  sia sensibile alle variazioni di  $\alpha$ .

$$S_\alpha^Q \triangleq \frac{dQ/Q}{d\alpha/\alpha} = \frac{\alpha}{Q} \frac{dQ}{d\alpha};$$

Poniamoci in un sistema dove la  $G(S)$  dipende da un parametro  $p$ , ad esempio



$$W(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)};$$

Calcoliamo la sensibilità di  $W(S)$  rispetto a  $p$ , per poi moltiplicare e dividere per  $G$  e  $dG$ , ottenendo

$$S_p^W = \frac{p}{W} \frac{dW}{dp}; \rightarrow S_p^W = \frac{p}{W} \frac{dW}{dp} \frac{G}{G} \frac{dG}{dG} = \left( \frac{dW}{W} \frac{G}{dG} \right) \left( \frac{p}{dp} \frac{dG}{G} \right) = S_G^W * S_p^G;$$

Quindi la funzione di sensibilità è componibile da due sotto funzioni: una funzione che descrive la sensibilità di  $G(S)$  rispetto al parametro  $p$  ed una, più rilevante per le nostre analisi, chiamata sensibilità diretta  $S_G^W$ , la quale descrive la sensibilità di  $W(S)$  al variare di  $G(S)$ .

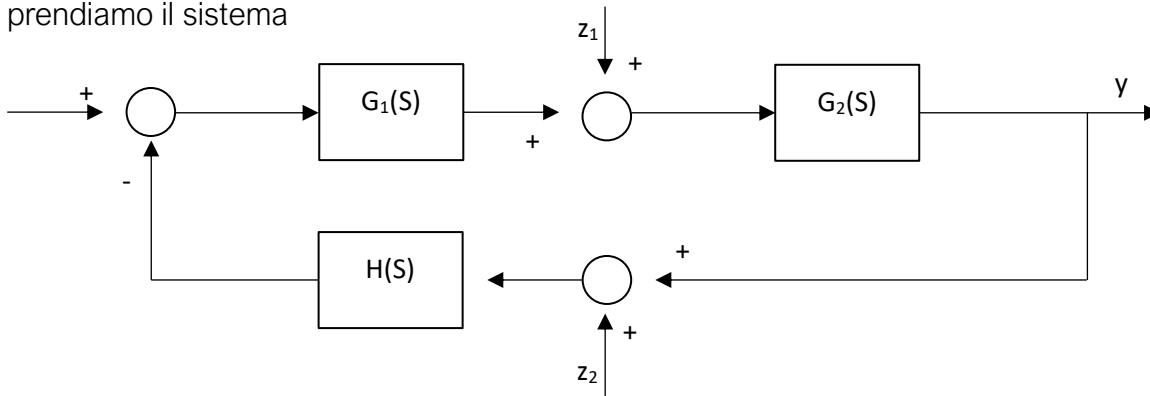
E' utile definire anche la sensibilità inversa  $S_H^W$ , la quale descrive la sensibilità di  $W(S)$  al variare di  $H(S)$ .

$$S_G^W(S) = \frac{G(S)}{W(S)} \frac{dW(S)}{dG(S)} = \frac{1}{1 + G(S)H(S)}; \quad \text{tende a zero per guadagni di anello elevati}$$

$$S_H^W(S) = \frac{H(S)}{W(S)} \frac{dW(S)}{dH(S)} = -\frac{G(S)H(S)}{1 + G(S)H(S)}; \quad \text{tende a uno per guadagni di anello elevati}$$

Nonostante sarebbe utile averle entrambe basse, notiamo che sono proporzionali, quindi al diminuire di una, l'altra aumenta.

Dalla loro osservazione possiamo dedurre importanti informazioni sulla reiezione dei disturbi; prendiamo il sistema



Per quanto riguarda il disturbo  $z_1$ , l'uscita è calcolata come

$$Y(S) = \frac{G_2(S)}{1 + G_1(S)G_2(S)H(S)} Z_1(S) = S_G^W G_2(S) Z_1(S);$$

in questo caso, più la sensibilità di  $W(S)$  rispetto a  $G(S)$  è bassa e più l'effetto del disturbo in uscita è basso poiché  $S_G^W \rightarrow 0$ ,  $S_G^W G_2(S) Z_1(S) \rightarrow 0$ . Quindi i disturbi in catena diretta, grazie alla controreazione, vengono attenuati.

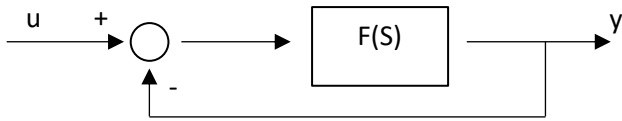
Rispetto al disturbo  $z_2$  invece, l'uscita è calcolata come

$$Y(S) = \frac{H(S)G_1(S)G_2(S)}{1 + G_1(S)G_2(S)H(S)} Z_2(S) = S_H^W Z_2(S);$$

e siccome  $S_H^W$  tende quasi sempre ad 1, il disturbo non riesce quasi mai ad essere attenuato.

## 18. Specifiche ad anello chiuso e ad anello aperto per un sistema di controllo

Per definire le specifiche di un sistema di controllo a controreazione partiamo con la struttura più semplice

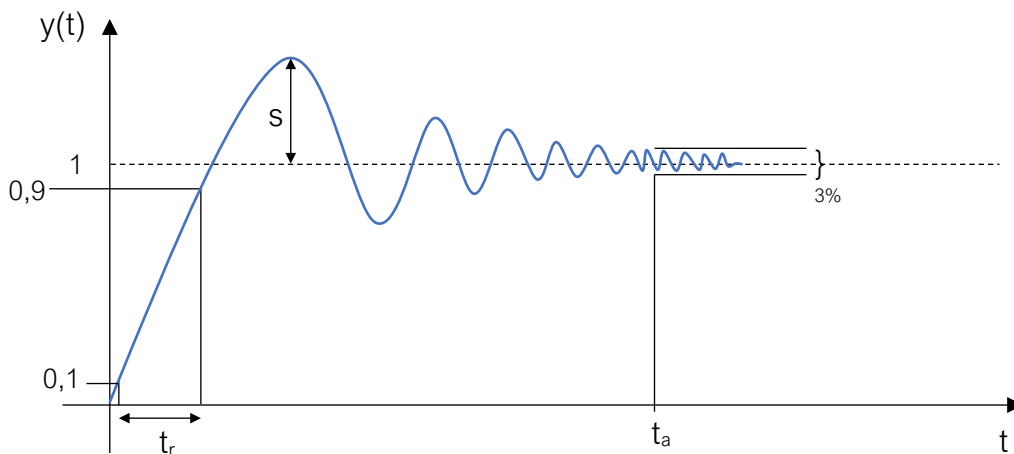


E definiamo la sua funzione di trasferimento a ciclo chiuso  $W(S)$  con controreazione unitaria, ed esplicitiamo anche la sua funzione a ciclo aperto  $F(S)$

$$W(S) = \frac{F(S)}{1 + F(S)}; \rightarrow F(S) = \frac{W(S)}{1 - W(S)};$$

Andiamo adesso ad analizzare tale sistema nel tempo ed in frequenza.

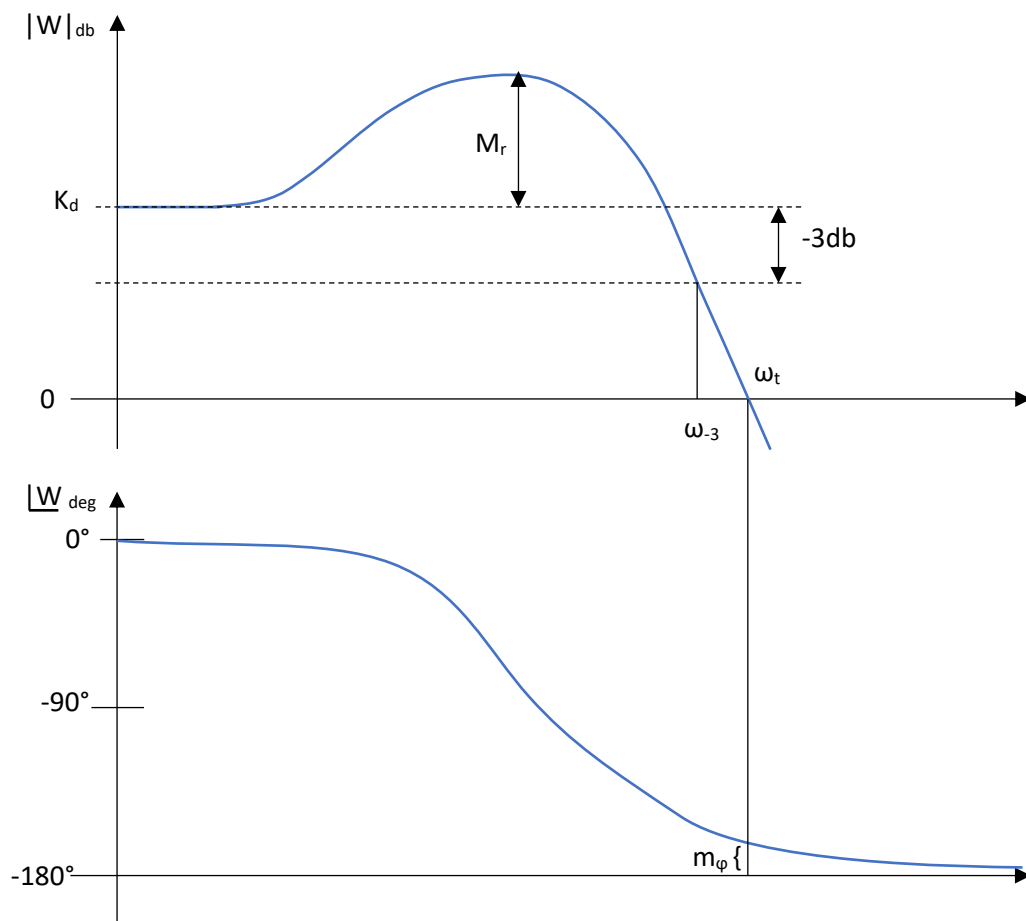
Iniziamo a graficare la funzione a ciclo aperto nel tempo rispetto ad una risposta indiciale, cioè la risposta forzata al gradino, la quale risulta molto utile per studiare in via sperimentale quei sistemi per i quali è difficile trovare un modello analitico;



Dalla risposta nel tempo riusciamo ad individuare tre valori importanti:

- Sovraelongazione  $s$   
È la differenza fra il valore massimo raggiunto dall'uscita e il valore finale; normalmente si esprime in % del valore finale. Nella creazione di un sistema va tenuta in considerazione poiché una sovraelongazione elevata può danneggiare fisicamente parti del sistema stesso.
- Tempo di salita  $t_r$   
È il tempo che la funzione impiega per andare dal 10% al 90% del suo valore permanente.
- Tempo di assestamento  $t_a$   
È il tempo entro il quale il sistema si assesta intorno al 3% del valore di regime.

Vediamo ora la risposta in frequenza; da risposta indiciale si passa alla risposta armonica, sulla funzione a ciclo chiuso (quindi sarà presente una  $H(S) = 1/k_d$ ).



I parametri estraibili da questo grafico sono:

- Modulo alla risonanza  $M_r$   
Indica la massima distanza che il grafico raggiunge rispetto al valore di regime  $k_d$ .  
 $M_r = \max|W| - k_d db$ ;
- Banda passante  $\omega_{-3}$   
È la frequenza che abbiamo 3 decibel sotto la linea di regime. Rappresenta un riferimento che indica il punto dopo il quale le frequenze subiscono un'attenuazione di oltre il 30%. In pratica, il punto oltre il quale il sistema smette di funzionare come vorremmo.

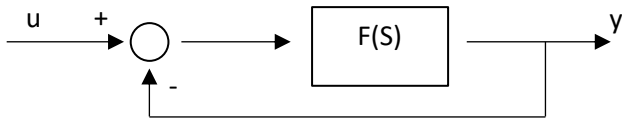
Siamo in grado di definire delle relazioni tra i parametri del sistema e questi parametri di prestazione:

- $\zeta, s, M_r \rightarrow$  La sovraelongazione  $s$  è legata allo smorzamento del termine trinomio  $\zeta$ : più è piccolo lo smorzamento, più il sistema oscilla. Di conseguenza influenza anche il modulo alla risonanza, poiché uno smorzamento piccolo implica una risonanza elevata.
- $\omega_{-3}, t_r \rightarrow$  Un tempo di salita breve implica una risposta rapida del sistema. Un sistema con banda passante elevata supporta frequenze elevate, quindi è in grado di oscillare più rapidamente. Ne deduciamo che più è alta la banda passante, più è breve il tempo di risalita e viceversa.
- $\omega_{-3}, \omega_t, t_r, m_\phi \rightarrow$  Aumentando il guadagno, il grafico della risposta in frequenza del modulo viene traslato verso l'alto, il che implica una traslazione verso destra sia dell'omega di taglio  $\omega_t$  che della banda passante  $\omega_{-3}$ ; entrambe aumenteranno. Al contrario, il tempo di salita  $t_r$  e il margine di fase  $m_\phi$  diminuiranno.
- $s, M_r, m_\phi \rightarrow$  Se si aumenta il margine di fase  $m_\phi$ , il modulo alla risonanza  $M_r$  diminuisce; essendo quest'ultimo legato alla sovraelongazione  $s$ , per diminuirla devo aumentare il margine di fase.



## 19. Carta di Nichols

La carta di Nichols ci permette di legare fra loro i vari parametri che descrivono un sistema di controllo. Modificare i parametri implica modificare la funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(S)$ . Preso un sistema



Partiamo dalla sua funzione di trasferimento a ciclo chiuso  $W(S)$  per esplicitare quella a ciclo aperto  $F(S)$

$$W(S) = \frac{F(S)}{1 + F(S)}; \rightarrow F(S) = \frac{W(S)}{1 - W(S)};$$

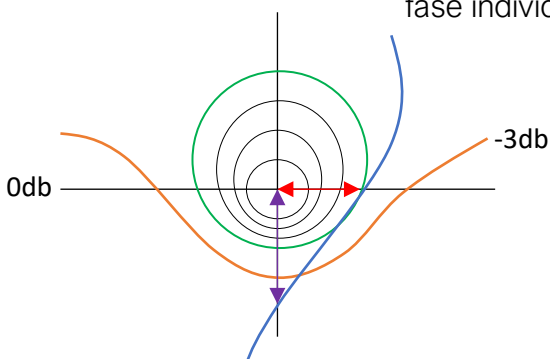
Il diagramma di Nichols lega graficamente le due funzioni.

Le curve sulla carta di Nichols descrivono le variazioni di modulo e fase della funzione a ciclo aperto  $F(S)$ . Il diagramma che vi viene costruito sopra invece riassume il diagramma di Bode di tale funzione, permettendo di comprendere la stabilità della funzione a ciclo chiuso  $W(S)$ .

La carta di Nichols è centrata in (0db, -180°), punto che rappresenta l'instabilità.

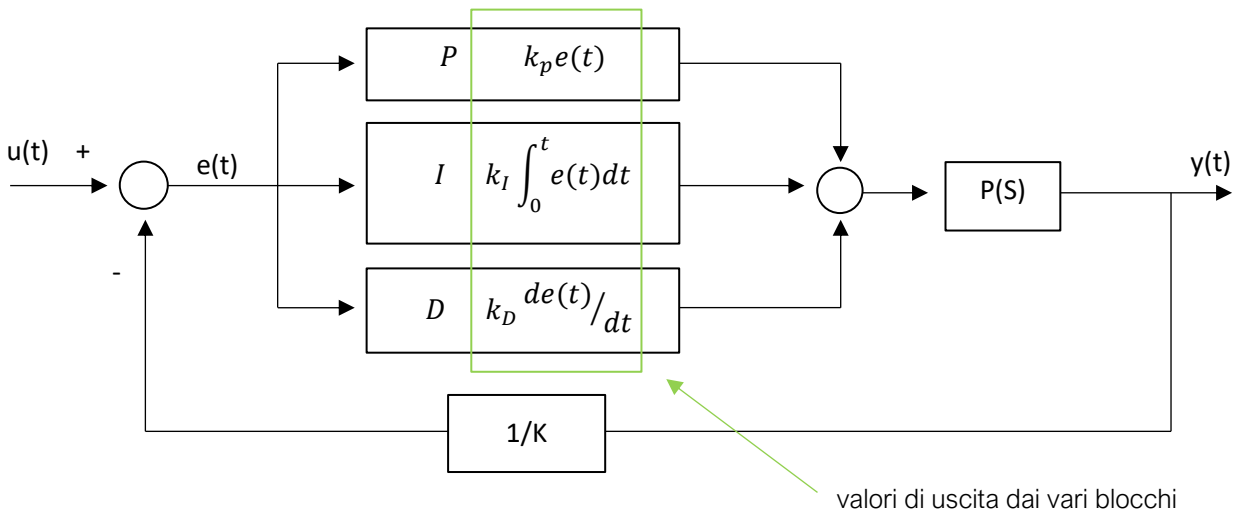
Grazie alla trasposizione del grafico da Bode a Nichols, posso ottenere i seguenti valori:

- Margine di guadagno  $m_g$  = distanza verticale tra la linea degli 0db e l'incrocio del grafico con i -180°.
- Margine di fase  $m_\phi$  = distanza orizzontale tra la linea dei -180° e l'intersezione del grafico con gli 0db.
- Modulo alla risonanza  $M_r$  = valore del cerchio interno tangente al grafico
- Banda passante  $\omega_{-3}$  = valore di omega sul grafico di Bode corrispondente al modulo e/o fase individuati dall'intersezione del grafico con la curva dei -3db.



## 20. Regolatori standard

Il regolatore standard o PID (Proporzionale - Integrale - Derivativo dell'errore) è una tipologia di controllori industriali di semplice implementazione e quindi abbastanza diffuso.



$$PID(S) = k_p \frac{k_I}{s} k_D s = \frac{k_D s^2 + k_p s + k_I}{s};$$

Di solito le tre componenti sono sviluppate in parallelo e i vari coefficienti assumono valori differenti. PID(S) è non causale, per via della parte derivativa, quindi non è esattamente realizzabile; va approssimato.

Per molte implementazioni industriali (come su MATLAB) esistono due forme equivalenti:

$$P \left( 1 + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \right); \quad P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \quad \text{derivatore reale}$$

forma ideale                      forma parallela

Quali sono gli effetti delle singole azioni?

- Azione proporzionale  $k_p e(t)$

$$W(S) = \frac{K_p P(S)}{1 + K_p P(S)}; \quad K_p \rightarrow \infty; \quad W(S) \rightarrow 1;$$

Questa azione è in grado di aumentare la banda passante e ridurre l'effetto di variazioni parametriche e/o disturbi. Tuttavia riduce i margini di stabilità.

- Azione integrale  $k_I \int_0^t e(t) dt$

$$W(S) = \frac{K_I P(S)}{s + K_I P(S)}; \quad s \rightarrow 0 \cong t \rightarrow \infty; \quad W(S) \rightarrow 1;$$

Azzera l'effetto di disturbi e/o variazioni parametriche a valle, sull'uscita a regime. Tuttavia, riduce la banda passante e riduce di molto i margini di stabilità.

- Azione derivativa  $k_D \frac{de(t)}{dt}$

Riesce a prevedere l'andamento dell'errore, migliora i margini di stabilità ( $m_\varphi + 90^\circ$ ) e riduce la sovraelongazione ed i transitori. Tuttavia, utilizzato da solo azzererebbe il guadagno per  $\omega \rightarrow 0$ , enfatizza le alte frequenze dove spesso sono presenti rumori, e soprattutto non è fisicamente realizzabile, va approssimato.

In genere si utilizza un mix di azioni, portando a creare varie tipologie di controllori: P, PI, PD, PID. Per individuare i valori dei coefficienti  $k$  delle varie azioni esistono i 2 metodi di Ziegler-Nichols, alternativi:

1. Inizio impostando  $k_p, k_I$  e  $k_D$  pari a zero. Dopo di che inizio ad aumentare  $k_p$  osservando la variazione del grafico, finché quest'ultimo non presenta oscillazioni persistenti. Cioè, preso il mio sistema a controeazione, aumento il guadagno fino a farlo oscillare. A quel punto fisso tale  $k_p$  e il periodo di oscillazione  $T$ . Utilizzo in seguito delle formule di conversione ed una tabella per ottenere gli altri coefficienti.
2. Inizio impostando  $k_I$  e  $k_D$  pari a zero. Invece  $k_p$  parte da un valore qualsiasi. Adesso, applico un gradino in ingresso e registro l'uscita. Applico questo metodo quando non ho la possibilità di portare il sistema all'oscillazione. Grazie a delle formule empiriche posso ricavare i parametri  $k_p$  e  $T$  di cui ho bisogno, e poi continuare grazie alla tabella di conversione.

## 21. Linearizzazione intorno a un punto d'equilibrio

La linearizzazione intorno a un punto d'equilibrio è l'approccio più utilizzato per linearizzare sistemi con comportamenti non lineari, ed essere così in grado di studiarli più facilmente.

Il concetto alla base di questo metodo è calcolare l'approssimazione lineare tramite la derivata in un certo punto. Gli sviluppi di Taylor sono un utile strumento per realizzare tale operazione.

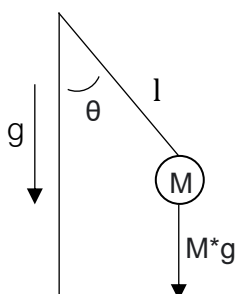
Partiamo da un semplice esempio

$$y = \sin(x) \rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \sin(x_0)}{dx_0} \frac{1}{n!} (x - x_0)^n = \sin(x_0) + \frac{d \sin(x_0)}{dx_0} (x - x_0) + \dots$$

Tutti i termini oltre quelli per  $n = 0, 1$  sono non lineari, poiché presentano il termine  $(x - x_0)$  di grado maggiore di 1 e sempre più crescente. Quindi la parte lineare riguarda solo i primi due termini; questi sono i termini a cui ci limiteremo per avere descrizione lineare.

L'obiettivo è progettare un sistema di controllo che cerchi di tenere il nostro sistema nell'intorno di  $x_0$ .

Passiamo adesso ad un caso più elaborato: il pendolo



$$Ml^2\ddot{\theta} = -Mgl\sin(\theta) - D\dot{\theta} + \tau \rightarrow \boxed{Ml^2\ddot{\theta}} + \boxed{D\dot{\theta}} + \boxed{Mgl\sin(\theta)} = \boxed{\tau};$$

Inerzia      Attrito      Forza      Coppia imposta

Martina Sasso

Il termine legato alla forza,  $Mgl\sin(\theta)$ , è quello che crea problemi, poiché non è lineare. Per risolvere il problema identifico il punto d'equilibrio in  $\theta_0$ : quindi posso esprimere teta come  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ ;

Vado quindi ad esplicitare anche tutti gli altri termini teta del sistema, utilizzando lo sviluppo di Taylor per il termine  $\sin(\theta)$ :

$$\dot{\theta} = \Delta\dot{\theta}; \quad \ddot{\theta} = \Delta\ddot{\theta}; \quad \sin(\theta) = \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) \Delta\theta;$$

$$\rightarrow Ml^2\Delta\ddot{\theta} + D\Delta\dot{\theta} + Mgl(\sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) \Delta\theta) = \tau;$$

Adesso dobbiamo capire se, nel punto d'equilibrio, ci siano particolari condizioni da rispettare: in effetti in tale punto il sistema è fermo, quindi le derivate valgono zero; così come l'accelerazione e la velocità.

$$\rightarrow Mgl\sin(\theta_0) = \tau_0; \text{ dove } \tau_0 \text{ è la coppia che serve a tenere fermo il sistema.}$$

Avendo adesso individuato un  $\tau_0$  posso riscrivere l'equazione iniziale tenendo in considerazione che  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$

$$Ml^2\Delta\ddot{\theta} + D\Delta\dot{\theta} + Mgl(\cancel{\sin(\theta_0)} + \cos(\theta_0) \Delta\theta) = \cancel{\tau_0} + \Delta\tau$$

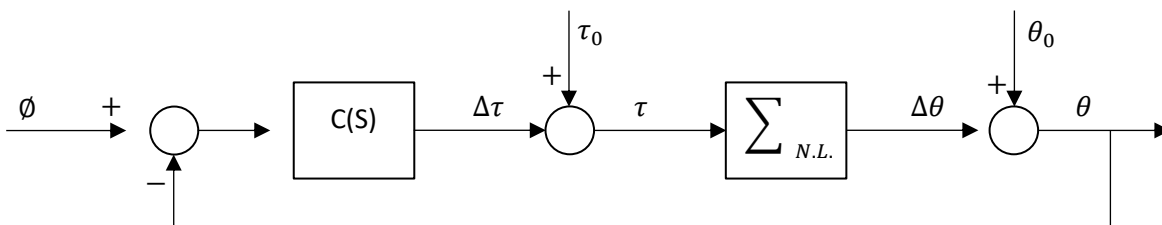
$$\rightarrow Ml^2\Delta\ddot{\theta} + D\Delta\dot{\theta} + Mgl\cos(\theta_0)\Delta\theta = \Delta\tau;$$

Questa è l'equazione linearizzata che descrive il comportamento del sistema nell'intorno della posizione d'equilibrio  $(\theta_0, \tau_0)$ .

Applicandovi la trasformata di Laplace otteniamo la funzione di trasferimento del nostro sistema linearizzato

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\tau} = \frac{1}{Ml^2s^2 + Ds + Mgl\cos(\theta_0)} = P(S);$$

Il sistema lineare prende in ingresso  $\Delta\tau$  e produce  $\Delta\theta$ ; quello non lineare prende  $\tau$  e produce  $\theta$ . Quindi per implementare un eventuale controllore vanno ricavate alcune grandezze:



Questo appena realizzato è un sistema di controllo reale basato sulla funzione di trasferimento linearizzata e sulla conoscenza del punto d'equilibrio.

C'è una relazione importante tra la stabilità del sistema non lineare e quello linearizzato: le traiettorie del sistema non lineare convergono asintoticamente al punto d'equilibrio considerato se il sistema linearizzato associato è asintoticamente stabile.

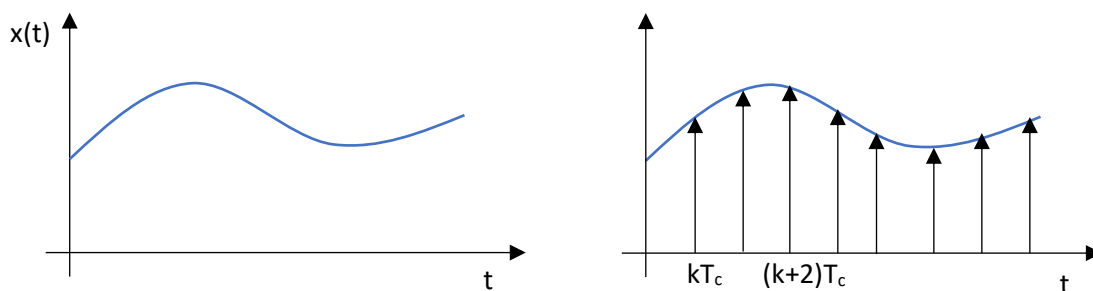
## 22. Teorema del campionamento

I sistemi digitali non possono lavorare con segnali continui; ragionano solamente nel tempo discreto. Quindi, qualora il volessi studiare un segnale tempo continuo su in sistema digitale, non ho altra scelta che campionarlo, cioè trasporlo nel tempo discreto trasformandolo in un treno di impulsi.

Il teorema afferma che dato un segnale a banda limitata, nella sua conversione analogico-digitale la minima frequenza di campionamento necessaria per evitare aliasing e perdita di informazione nella ricostruzione del segnale analogico originario dev'essere maggiore del doppio della sua frequenza massima.

Cerchiamo adesso di dimostrarlo.

Preso un segnale  $x(t)$  da trattare analiticamente, prelevo i valori della funzione negli istanti di campionamento  $kT_c$ :



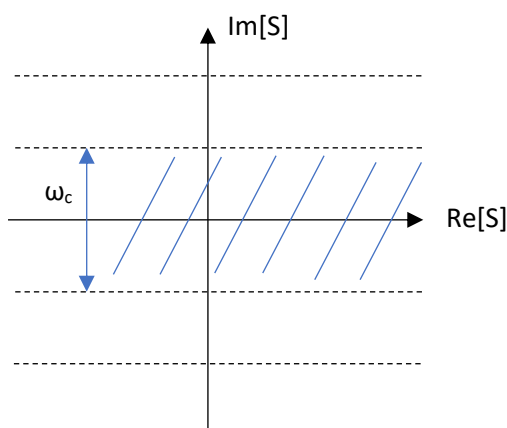
In particolare, il mio segnale campionato presenterà, nei vari istanti di campionamento  $kT_c$ , un impulso di ampiezza pari alla valore della funzione in quell'istante. Analiticamente, è esprimibile come il prodotto tra la  $x(t)$  e un treno di impulsi

$$x_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta_0(t - kT_c); \rightarrow X_c(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) e^{-skT_c};$$

Sapendo che la pulsazione di campionamento  $\omega_c = 2\pi f_c$  ( $f_c = 1/T_c$  è la frequenza di campionamento), quindi  $T_c = 2\pi/\omega_c$ , e ponendo  $s = \sigma + j\omega$ , riscrivo la  $X_c(S)$  come

$$X_c(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) e^{-\sigma k \frac{2\pi}{\omega_c}} e^{-j\omega k \frac{2\pi}{\omega_c}};$$

Questa funzione va a suddividere il piano S in fasce periodiche, poiché l'esponenziale è periodico sulla parte immaginaria, visto che la fase si ripete ogni  $\omega_c$ ; Tutte le fasce, distinguibili al variare di  $\sigma$ , riproducono quello che troviamo nella fascia principale.



La  $X_c(S)$  nella forma attuale ci aiuta a comprendere la periodicità, ma non a giungere al teorema del campionamento. Per arrivarci, necessitiamo della serie di Fourier.

Quest'ultima ci permette di riscrivere una funzione  $f(t)$  periodica di periodo  $T$ , come sommatoria di seni e coseni, più un valore medio diverso da zero.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_c t) + b_k \sin(k\omega_c t)]$$

Utilizzando le formule d'Eulero  $f(t)$  è equivalente a  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_c t}$ ;

Inoltre, applicando il prodotto interno tra la  $f(t)$  e le funzioni seno e coseno, posso ricavare  $c_k$

$$c_k = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} f(t) e^{-jk\omega_c t} dt;$$

Andiamo quindi ad applicare la serie di Fourier al mio segnale campionato nel tempo  $x_c(t)$ , ovviamente soltanto alla parte periodica. Inizio individuando il suo coefficiente di Fourier  $c_k$

$$c_k = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(t - kT_c) e^{-jk\omega_c t} dt = \text{siccome tra } \frac{T_c}{2} \text{ e } -\frac{T_c}{2} \text{ c'è solo un impulso, ed il suo integrale è 1, allora}$$

$$c_k = \frac{1}{T_c};$$

$$\rightarrow x_{c,periodica}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} e^{jk\omega_c t};$$

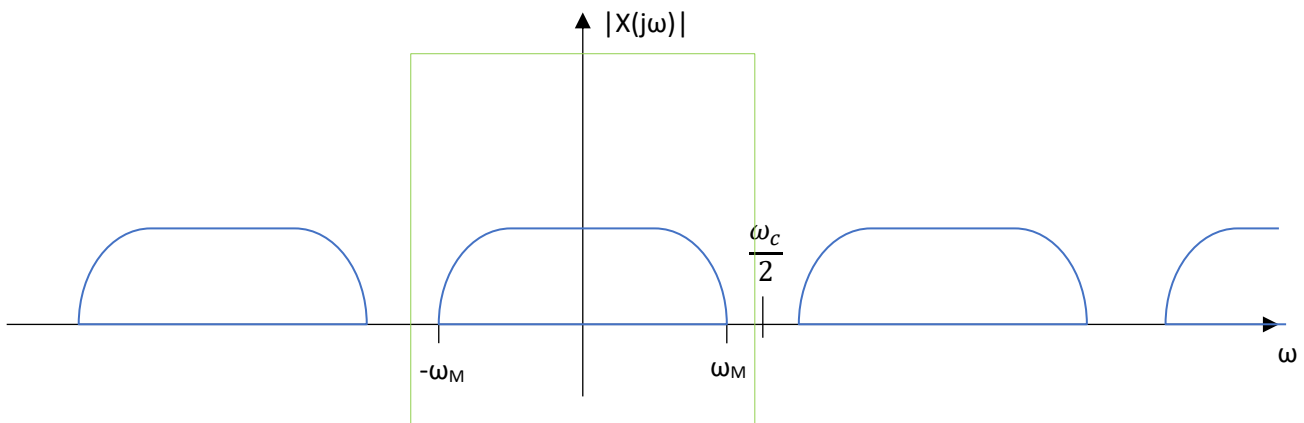
$$\rightarrow x_c(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} e^{jk\omega_c t} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_c t};$$

Adesso possiamo riportarla nel piano S applicando la trasformata di Laplace

$$X_c(S) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L\{x(t) e^{jk\omega_c t}\} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\omega_c);$$

Poniamo  $s = j\omega$  ed effettuiamo uno studio solo nell'asse immaginario, utilizzando i diagrammi di Bode:

$$X_c(S) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_c);$$



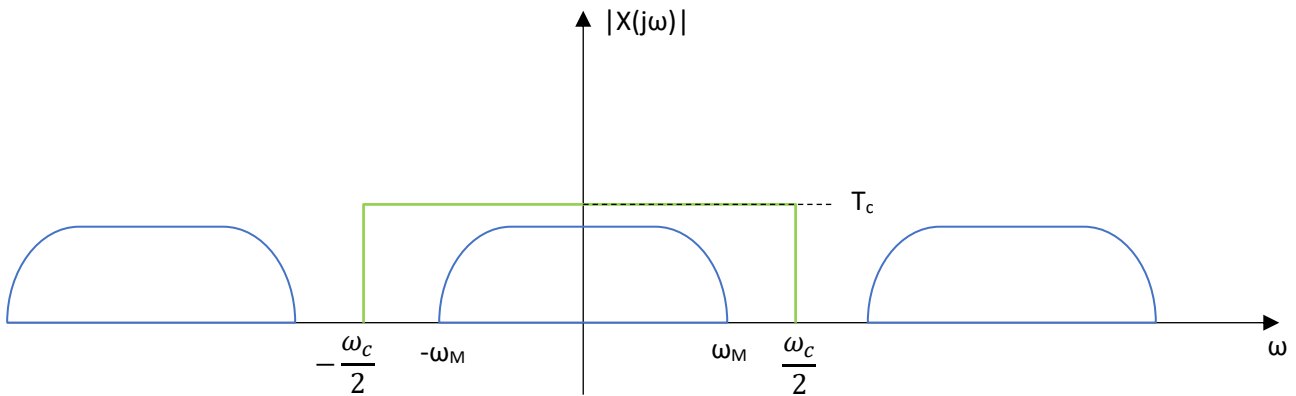
La fascia centrale, avente come estremi la pulsazione massima  $\omega_M$ , corrisponde al segnale non campionato  $X(j\omega)$ ; il grafico completo invece rappresenta il segnale campionato  $X_c(j\omega)$ . Quindi, campionando il segnale iniziale tramite  $T_c$  e passando attraverso la serie di Fourier e la trasformata di Laplace, si ottiene un segnale campionato costituito da infinite repliche del segnale di partenza, traslate di  $\omega_c k$ . Questo è quello che in sostanza fa il teorema del campionamento: replica il segnale a frequenze più alte.

Per ricostruire il segnale devo distinguere due casi:

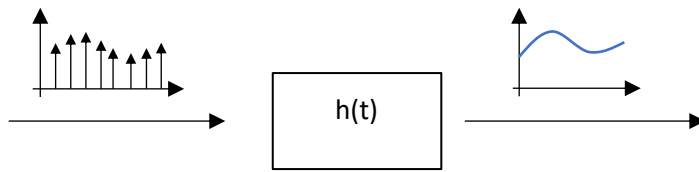
1.  $\omega_c > 2\omega_M$

Le repliche sono distanziate tra loro.

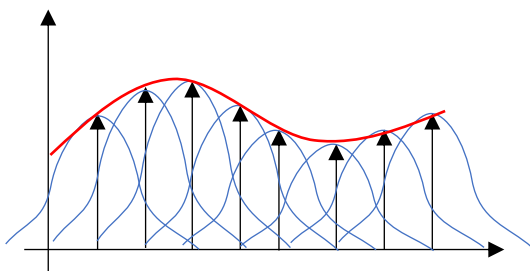
} Teorema del campionamento di Shannon



Per ricostruire il segnale parto facendo l'anti-trasformata del segnale campionato, ottenendo una  $x_c(t)$  composta da impulsi. Dopo di che devo interpolare tante sinc (anti-trasformata della rect) quanti sono gli impulsi del segnale da ricostruire, utilizzando la risposta impulsiva  $\text{sinc} = \frac{\sin(\omega_c/2)}{\omega_c/2} = h(t)$ ;



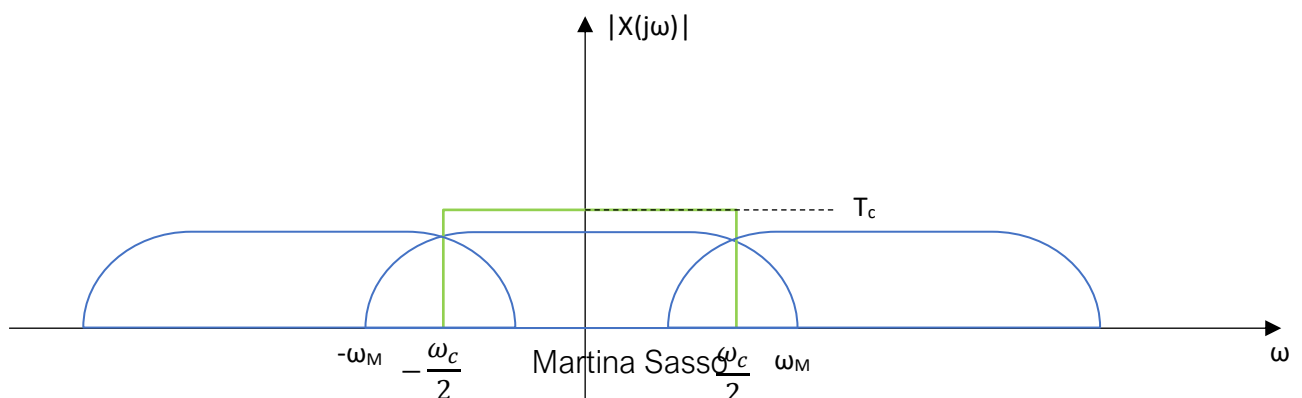
Interpolando gli impulsi con  $h(t)$  si ottiene il segnale originale. Questa metodologia è il ricostruttore ideale di Shannon.



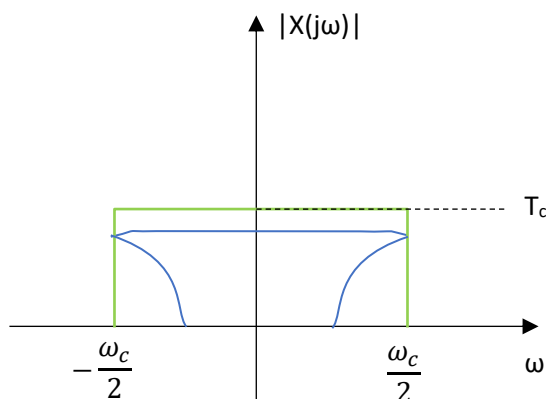
Bisogna evidenziare che se lavoriamo su sistemi real-time, dove i campioni vengono prodotti mentre li elaboriamo, questo tipo di ricostruttore non è applicabile, poiché la sinc è un filtro non è causale, che per ricostruire un singolo segnale necessita delle sinc passate e di quelle future.

2.  $\omega_c < 2\omega_M$

Le repliche sono sovrapposte.



Siccome a priori non sappiamo se capiteremo in questa situazione, applichiamo comunque un filtro passa-basso per isolare il lobo centrale



Questo segnale è abbastanza distante da quello di partenza: ho perso informazioni alle alte frequenze e ho la presenza di aliasing (informazioni aggiuntive che non erano presenti nell'originale).

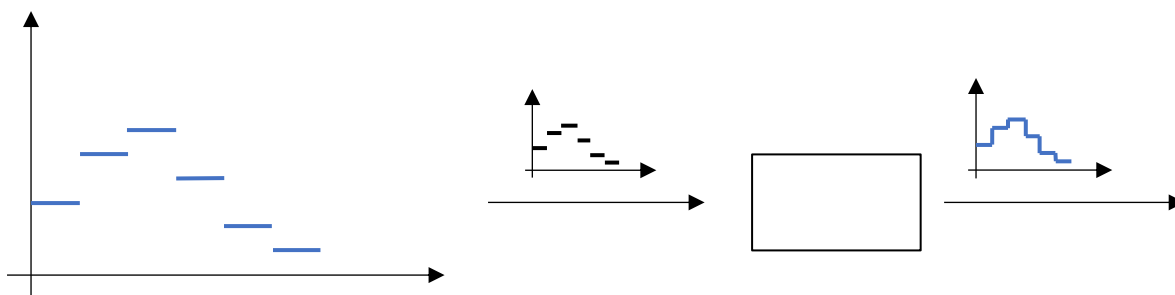
Per correggerlo ho un paio di opzioni:

- Diminuire il tempo di campionamento così da evitare le repliche sovrapposte
- Pre-filtrare il segnale prima del campionamento con un filtro anti-aliasing. Questo elimina il contenuto in eccesso; tuttavia perdo ugualmente il contenuto alle alte frequenze, che spesso è rumore, quindi potrei anche trarne vantaggio.

Una volta risolto l'aliasing, posso ricostruire il segnale con il ricostruttore di Shannon.

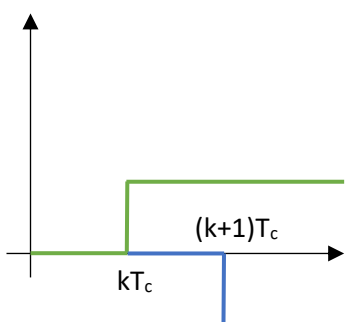
## 23. Organo di tenuta

Supponiamo di avere un sistema che, per ogni istante di campionamento, mantenga il valore fino all'istante successivo; per ritornare al segnale originale mi serve necessariamente un filtro causale, che non necessiti di informazioni future. Tale filtro è detto organo di tenuta.



In questo caso specifico, siccome si occupa di mantenere il valore costante, è detto organo di tenuta di ordine zero.

Il segnale in analisi è un oggetto lineare del quale possiamo calcolare la funzione di trasferimento:



$$x_{gradino}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [x_k \delta_{-1}(t - kT_c) - x_k \delta_{-1}(t - (k+1)T_c)];$$

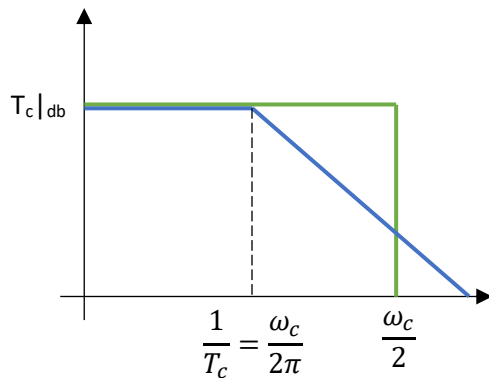
$$X_{gradino}(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ x_k \frac{1}{s} e^{-skT_c} - x_k \frac{1}{s} e^{-s(k+1)T_c} \right]$$

$$= \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-skT_c} \right)}_{X_c(S)} \underbrace{\left( \frac{1 - e^{-sT_c}}{s} \right)}_{T(S)};$$

Martina Sasso



Quindi il segnale a gradino si ottiene moltiplicando il segnale campionato  $X_c(S)$  per la funzione di trasferimento dell'organo di tenuta  $T(S)$ . Per capire il funzionamento di tale oggetto grafichiamolo su Bode:



$e^x = 1 + x$  per l'espansione in serie del primo ordine,

$$e^{sT_c} = 1 + sT_c; \rightarrow T(S) = \frac{1 - e^{-sT_c}}{s} = \frac{1 - \frac{1}{1 + sT_c}}{s};$$

integro per eliminare l'integratore

$$T(S) = \frac{1}{s} \frac{1 + sT_c - 1}{1 + sT_c} = \frac{T_c}{1 + sT_c};$$

La linea verde è il ricostruttore di Shannon, quella blu l'organo di tenuta. Sono simili finché non si inserisce un filtro ideale che taglia esattamente in  $\omega_c/2$ .

Quindi, dove va posta la frequenza massima  $\omega_M$ ?

- Nel caso ideale del ricostruttore di Shannon, a sinistra di  $\omega_c/2$   
 $\rightarrow \omega_M < \omega_c/2 \rightarrow \omega_c > 2\omega_M$
- Nel caso dell'organo di tenuta va a sinistra di  $\omega_c/2\pi$   
 $\rightarrow \omega_M < \omega_c/2\pi \rightarrow \omega_c > 2\pi\omega_M \cong 6\omega_M$
- Ingegneristicamente parlando sarebbe buono che la frequenza di campionamento fosse almeno maggiore di  $2\pi$  volte la frequenza massima; 10 volte tanto è spesso un'ottima scelta.

## 24. Scelta del tempo di campionamento

L'elaborazione digitale dei segnali analogici prevede la memorizzazione di questi all'interno di strutture a precisione finita. Quindi, per lavorare con un segnale analogico sul digitale, è necessario campionarlo; ma come scegliamo il tempo di campionamento  $T_c$ , ossia la distanza tra ogni campione?

Il passo di campionamento è un parametro fondamentale la cui scelta influenza in modo molto significativo le prestazioni di un sistema di controllo; un campionamento più rapido corrisponde a prestazioni migliori del sistema di controllo, in quanto implica una maggiore fedeltà delle tecniche per l'approssimazione discreta del controllore continuo e una banda dei segnali elaborabili dal sistema più estesa. Viceversa, un campionamento più lento permette di utilizzare algoritmi più raffinati a parità di hardware, disponendo ad ogni passo di una maggior quantità di tempo per il calcolo dell'azione di controllo; potremmo impiegare convertitori meno costosi e ci sarà una minore sensibilità agli errori numerici.

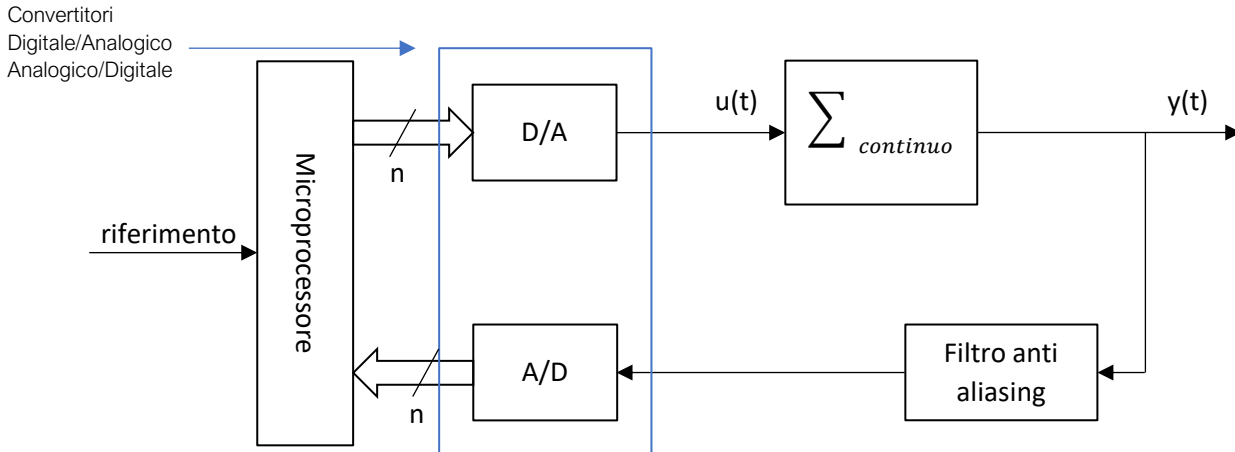
Una limitazione fondamentale alla scelta di  $T_c$  è data dal teorema di Shannon il quale dice che dato un segnale a banda limitata, nella sua conversione analogico-digitale la minima frequenza

di campionamento necessaria per evitare aliasing e perdita di informazione nella ricostruzione del segnale analogico originario dev'essere maggiore del doppio della sua frequenza massima.

$$\omega_c > 2\omega_M; \quad \omega_c = 2\pi \frac{1}{T_c}; \quad \rightarrow \quad T_c > \frac{\pi}{\omega_M};$$

Tuttavia, questa non è l'unica limitazione per la scelta del tempo di campionamento.

I sistemi di controllo visti finora, siano essi lineari o meno, lavorano sempre nel tempo continuo. Per adattarli a lavorare nel tempo discreto, ho bisogno di inserire nuovi elementi:



La conversione di un segnale da analogico a digitale avviene tramite campionamento, cioè leggendo il segnale ad istanti di tempo  $T_c$ . Successivamente il segnale dev'essere quantizzato, cioè bisogna associare ad ogni simbolo un valore riconoscibile; questo avviene all'interno dei convertitori.

Tali apparecchi sono spesso variabili, permettendo di scegliere il range di valori con cui rappresentare il segnale; quindi, scelti gli  $n$  bit a disposizione, posso ottenere fino a  $2^n$  simboli differenti. In pratica la quantizzazione associa ad ogni  $x_c(n)$  un valore discreto.

In particolare posso ricavare il passo di quantizzazione  $q$  come

$$q = \frac{\text{ampiezza segnale d'ingresso}}{2^n};$$

Si nota subito che aumentando  $n$ , diminuisce  $q$ . Questo vuol dire che diminuendo  $n$  diventa più probabile ritrovarsi nella situazione in cui la variazione di un simbolo rispetto al successivo non sia abbastanza da superare  $q$ , perdendo tale simbolo. Come conseguenza della quantizzazione quindi, vi sono intervalli di valori che vengono mappati in un unico valore. Il formato di rappresentazione dei dati ed il numero di bit costituiscono due parametri fondamentali che influenzano le prestazioni del sistema digitale e la scelta del tempo di campionamento  $T_c$ . Bisogna quindi trovare un compromesso tra la precisione del passo di quantizzazione e la quantità di disturbo che non dev'essere campionato dal sistema.

Il legame tra il passo di quantizzazione e il tempo di campionamento è evidente: se scelgo un tempo di campionamento troppo piccolo e lo abbinò un passo di quantizzazione troppo grande avrò intervalli di valori che vengono mappati in un unico valore.

## 25. Trasformata Z

La trasformata Z è una tecnica che ci permette di trattare le equazioni alle differenze, che sarebbero il corrispondente in discreto delle equazioni differenziali.

Ad esempio  $y_{k+1} = 3y_k + u_k$ ;

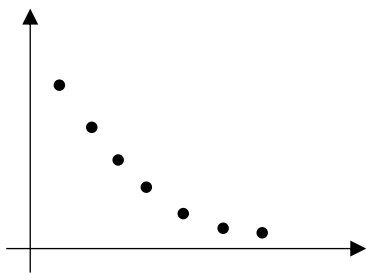
La trasformata Z è l'equivalente in discreto della trasformata di Laplace nel continuo, ma applicata ad una sequenza. Quindi, data una sequenza  $y_k$ , la sua trasformata Z vale

$$Z\{y_k\} = Y_k(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k};$$

Inoltre, grazie alle serie geometriche è anche esprimibile come

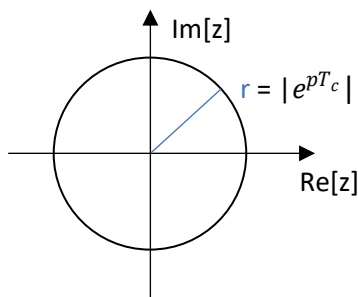
$$Y_k(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = \frac{1}{1 - y_k z^{-k}}; \quad |x| < 1;$$

Ipotizziamo un segnale pari ad una sequenza di campioni  $y_k = e^{pkT_c}$



$$\begin{aligned} Y_k(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{pkT_c} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{pT_c} z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{pT_c} z^{-1}} = \\ &= \frac{z}{z - e^{pT_c}}; \end{aligned}$$

Tale funzione presenta uno zero in 0 e un polo in  $e^{pT_c}$ ; ricordandoci che tale semplificazione realizzabile grazie alle serie geometriche è valida solo se  $|e^{pT_c} z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > e^{pT_c}$ , allora la sua rappresentazione su un diagramma polare genererà un cerchio nel piano complesso per cui la trasformata Z, al di fuori di esso, converge.



La trasformata Z e il teorema del campionamento sono evidentemente legati. Il teorema del campionamento si occupa di utilizzare quando si vuole convertire un segnale dal tempo continuo al tempo discreto; la trasformata Z invece lavora proprio nel tempo discreto.

Prendendo un segnale campionato  $X_c(S)$  in Laplace e confrontandolo con una trasformata Z  $Y_k(Z)$  noto alcune somiglianze

$$\begin{aligned} X_c(S) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-skT_c}; \\ Y_k(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}; \end{aligned}$$

Quindi si può passare da uno all'altro ponendo

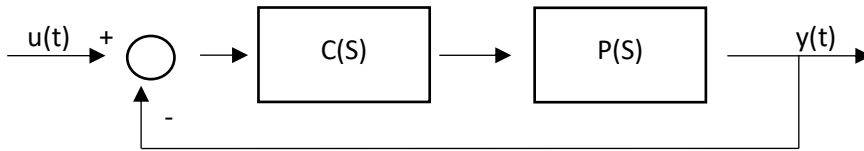
$$z = e^{sT_c} \leftrightarrow s = 1/T_c \ln z;$$

In pratica posso trasformare un'equazione differenziale in un'equazione alle differenze in modo da poterla implementare in un calcolatore.

Martina Sasso

## 26. Trasformazione esatta da F(S) a F(Z)

Prendiamo un sistema a controreazione costituito da un controllore C(S) ed un processo P(S)



$$C(S) = \frac{1}{s - p};$$

Procediamo a riportarlo nel dominio del tempo applicando l'anti-trasformata di Laplace

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s - p}\right\} = e^{pt} = c(t);$$

E campioniamo tale segnale, ricordandoci che  $x_k = x(kT_c) = e^{pkT_c}$  dove  $t = kT_c$

$$c_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{pkT_c} \delta(t - kT_c);$$

Adesso che abbiamo un'equazione alle differenze, applichiamo la trasformata Z della sequenza di campioni della funzione esponenziale

$$C(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{pkT_c} Z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{pT_c} Z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{pT_c} Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - e^{pT_c}}; \quad \text{per } |Z| > e^{pT_c};$$

Questa è la trasformazione esatta da C(S) a C(Z).

Possiamo anche calcolarne i relativi guadagni tramite i teoremi del valor finale, su una risposta a gradino  $\delta_{-1}(t)$ :

- C(S)

$$k_{c_s} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s + p} \frac{1}{s} = \frac{1}{p};$$

- C(Z)

$$k_{c_z} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z - e^{pT_c}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{pT_c}};$$

Chiaramente questi guadagni sono diversi poiché nel discreto non si preserva né la risposta a gradino, né quella armonica, solo quella impulsiva. Per via di ciò la trasformazione esatta non è molto usata; esistono trasformazioni approssimate più utili.

## 27. Mapping dal piano S al piano Z

Prendendo un segnale campionato  $X_c(S)$  in Laplace e confrontandolo con una trasformata  $Z$   $Y_k(Z)$  notiamo che è possibile passare da uno all'altro ponendo  $z = e^{sT_c} \leftrightarrow s = \frac{1}{T_c} \ln z$ ;

$$X_c(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-skT_c};$$

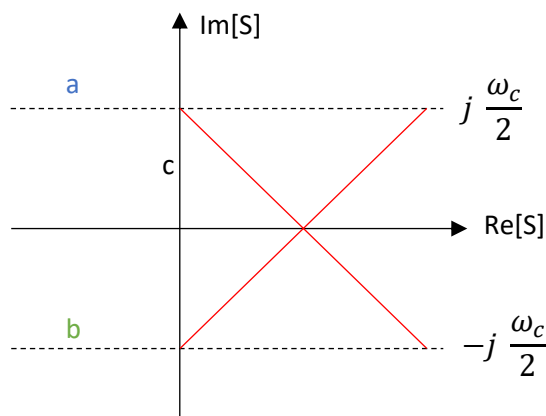
$$Y_k(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k Z^{-k};$$

Cerchiamo adesso una relazione tra i due piani S e Z. Poniamo  $s = \sigma + j\omega$  e sostituiamo:

$$z = e^{sT_c} = e^{(\sigma + j\omega)T_c} = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c};$$

Sapendo che nei segnali campionati  $T_c = 2\pi/\omega_c$ , allora  $z = e^{\sigma 2\pi/\omega_c} e^{j\omega 2\pi/\omega_c}$ ;

Partiamo intanto disegnando il piano S, il quale presenta una periodicità  $\omega_c/2$ , per cui posso analizzare anche solo la striscia centrale nel semipiano negativo, le altre sono identiche:



Siamo quindi nel caso in cui  $\text{Re}[s] < 0$ , cioè ho solo poli a parte reale negativa, per cui il sistema è asintoticamente stabile.

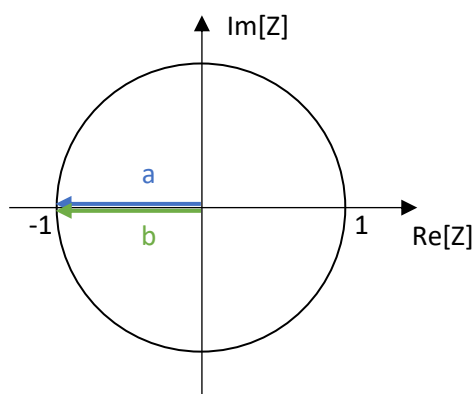
In particolare, se mi trovo su  $c$ , ho solo la parte immaginaria, quindi  $\text{Re}[s] = 0$ , mentre  $\text{Im}[S]$  varia.

Quindi, secondo la relazione di prima,  $z$  diventa  $z = e^{j\omega 2\pi/\omega_c}$ ;

Poiché la parte immaginaria  $\text{Im}[s]$  va da  $-\frac{\omega_c}{2}$  a  $\frac{\omega_c}{2}$ , allora  $z$  può assumere agli estremi due valori:

$$z = e^{j(-\frac{\omega_c}{2})2\pi/\omega_c} = e^{-j\pi}; \quad z = e^{j(\frac{\omega_c}{2})2\pi/\omega_c} = e^{j\pi};$$

Quindi  $a$  ruota in senso orario, invece  $b$  in senso anti orario, descrivendo una circonferenza di raggio unitario



Inoltre, ponendo  $\text{Im}[S] = 0$  ottengo  $z = e^{j0 2\pi/\omega_c} = 1$ ; quindi lo zero nel piano S corrisponde all'1 nel piano Z.

Da questa analisi l'informazione più importante che possiamo trarre è legata alla stabilità dei sistemi:

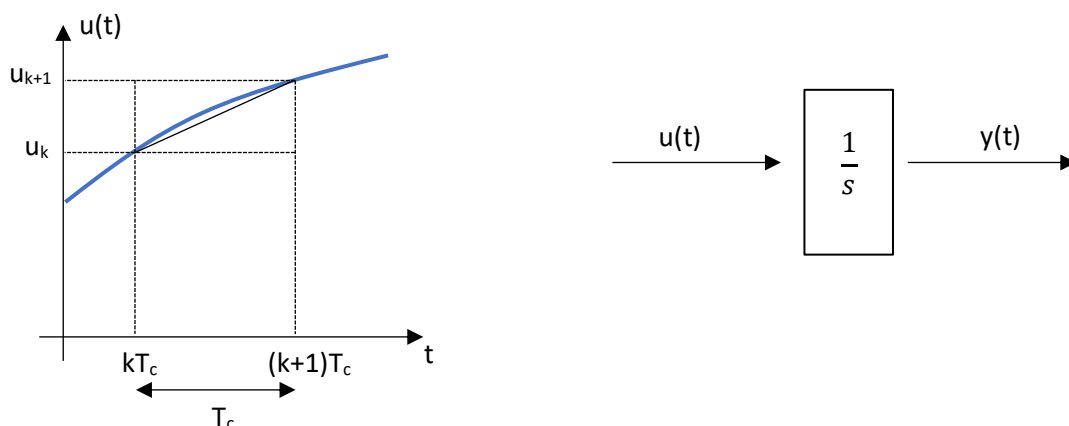
- I punti del piano S a parte reale negativa ( $\sigma < 0$ ) sono mappati nei punti del piano Z all'interno del disco unitario.
- I punti del piano S collocati sull'asse immaginario, aventi cioè parte reale nulla ( $\sigma = 0$ ) hanno modulo unitario e sono in corrispondenza con i punti del piano Z collocati sul perimetro del disco unitario.
- I punti del piano S a parte reale positiva ( $\sigma > 0$ ) sono in corrispondenza con i punti del piano Z all'esterno del disco unitario.

Questo vuol dire che un sistema discreto è stabile se ha tutti i poli all'interno del disco unitario; più nello specifico, essendo  $|z| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ , allora se il  $|z| \geq 1$  il sistema è stabile, o al suo limite; se  $|z| < 1$  invece è instabile.

## 28. Trasformazioni approssimate dal piano S al piano Z

Nonostante sia possibile ricavare una trasformazione esatta tra una funzione  $F(S)$  nel piano S ed una funzione  $F(Z)$  nel piano Z, risulta che il guadagno, una volta trasformata, è diverso. Per questo motivo, la trasformazione esatta non è molto usata; si preferisce l'uso di trasformazioni approssimate che possono però rendere i guadagni uguali.

Ipotizziamo di avere la funzione  $u(t)$  e di voler creare un controllore discreto che si comporti come un integratore:



L'integrale in  $(k+1)$ , cioè l'area della superficie che sta sotto la curva fino a quel punto, chiamato  $y_{k+1}$  sarà calcolabile come l'integrale che avevamo calcolato fino a  $k$ , indicato con  $y_k$  più l'integrale tra i punti  $k$  e  $(k+1)$ . Il problema è che noi abbiamo solo dei campioni  $u_k$  e  $u_{k+1}$ , quindi la classica forma integrale non è applicabile. Posso quindi approssimare tale area in tre modi:

1. Per difetto, considerando il rettangolo di altezza  $u_k$   

$$y_{k+1} = y_k + u_k T_c;$$
2. Per eccesso, considerando il rettangolo di altezza  $u_{k+1}$   

$$y_{k+1} = y_k + u_{k+1} T_c;$$
3. Con la forma trapezoidale  

$$y_{k+1} = y_k + (u_k + u_{k+1}) \frac{T_c}{2};$$

Queste tre opzioni danno luogo a tre funzioni di trasferimento diverse:

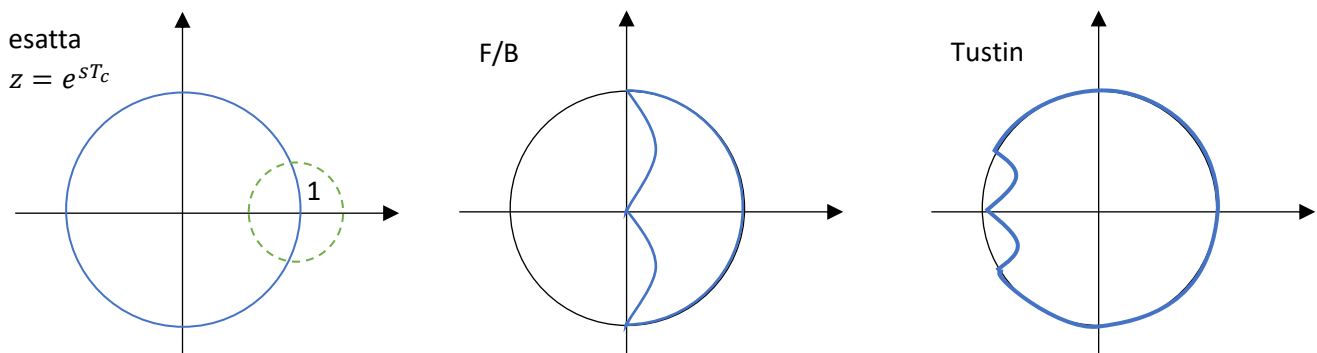
$$\begin{aligned}
 1. \quad Y(Z)(1 - z^{-1}) &= T_c U(Z) z^{-1}; & \rightarrow \frac{Y(Z)}{U(Z)} &= \frac{T_c z^{-1}}{1 - z^{-1}}; \\
 2. \quad Y(Z)(1 - z^{-1}) &= T_c U(Z); & \rightarrow \frac{Y(Z)}{U(Z)} &= \frac{T_c}{1 - z^{-1}}; \\
 3. \quad Y(Z)(1 - z^{-1}) &= \frac{T_c}{2} U(Z)(1 + z^{-1}); & \rightarrow \frac{Y(Z)}{U(Z)} &= \frac{T_c}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}};
 \end{aligned}$$

Se le poniamo circa uguali a  $1/s$ , (ovviamente un'uguaglianza non è possibile perché siamo su due piani diversi) otteniamo:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{T_c z^{-1}}{1 - z^{-1}} &\cong \frac{1}{s} \rightarrow s = \frac{1 - z^{-1}}{T_c z^{-1}}; & \longleftarrow \text{Forward integration} \\
 2. \quad \frac{T_c}{1 - z^{-1}} &\cong \frac{1}{s} \rightarrow s = \frac{1 - z^{-1}}{T_c}; & \longleftarrow \text{Backward integration} \\
 3. \quad \frac{T_c}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} &\cong \frac{1}{s} \rightarrow s = \frac{2}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}; & \longleftarrow \text{Trasformazione bilineare o Metodo di Tustin}
 \end{aligned}$$

A questo punto posso sostituire la  $s$  nel mio controllore  $C(S)$ , ottenere  $C(Z)$ .

Vediamo adesso cosa succede nella semi-striscia centrale del piano  $S$  spostandoci nel piano  $Z$  secondo queste diverse trasformazioni



Nella trasformazione esatta, la semi-striscia centrale del piano  $S$  si trasforma nell'area del cerchio unitario; Nel caso di Forward o Backward integration tutti i poli si trasferiscono nella parte destra, perché è come avere una compressione delle frequenze. Ricordiamoci anche che nella trasformata esatta, al diminuire di  $T_c \rightarrow 0$  la  $z$  tenderà a 1; man mano che diminuisco  $T_c$ , i poli tendono ad aggregarsi in un intorno di 1. Quindi per  $T_c$  piccoli, la differenza tra la trasformazione esatta e quelle Forward o Backward non è così rilevante.

Il metodo di Tustin è quello che genera una superficie migliore; è sufficientemente accurata e non troppo complessa. Sicuramente la migliore per  $T_c$  più elevate.

Inoltre esiste una tecnica che ci permette di recuperare anche quella minima compressione indotta dal metodo di Tustin per una particolare pulsazione che magari è rilevante per la costruzione del mio controllore, chiamata Tustin+Prewarping. Consiste nell'espandere i poli interessati prima di effettuare la compressione di una quantità tale che, quando poi verrà applicato Tustin, tali poli si troveranno in  $Z$  proprio dov'erano prima dell'espansione.