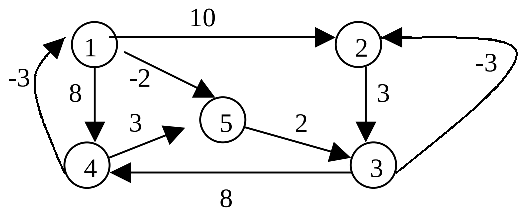
Compito di esonero **Compito A**
II modulo di Ricerca Operativa
20 Aprile 2001

Nome e Cognome____________________

Esercizio 1: Si consideri il seguente problema di pianificazione di progetti in cui sono state identificate 8 attività principali Ai, i=1,2,…8 con durate: d1=3, d2=2, d3=3, d4=2, d5=4, d6=1, d7=1, d8=10. La lista delle relazioni di precedenza è la seguente: A1<A3; A2<A3; A2<A8; A3<A8; A3<A4; A4<A5; A4<A6; A5<A7; A6<A7 (dove con Ai<Aj si rappresenta il fatto che l'attività Ai deve terminare prima dell'inizio dell'attività Aj). Si costruisca un grafo che rappresenti il progetto. Si calcoli la durata minima di questo progetto e si calcolino gli istanti minimo e massimo di inizio per ogni attività. Si evidenzi inoltre il cammino critico dal nodo sorgente al nodo pozzo.

Esercizio 2: Si consideri il grafo G in figura, orientato e pesato sugli archi. Procedendo in modo algoritmico, si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano ogni nodo con tutti gli altri nodi.
Si scrivano esplicitamente i cammini dal nodo 1 al nodo 3, dal nodo 5 al nodo 1. Fornire infine la rappresentazione tramite liste di adiacenza del grafo G.



Esercizio 3: Si determini, procedendo in modo algoritmico, un albero ricoprente di peso minimo per il grafo di cui nel seguito viene fornita la matrice di adiacenza nodi-nodi e la matrice dei pesi degli archi.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	1	1
B	1	0	1	1	1	0
C	1	1	0	1	1	0
D	0	1	1	0	1	1
E	1	1	1	1	0	1
F	1	0	0	1	1	0

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	2	-	4	4
B	2	-	1	5	8	-
C	2	1	-	6	3	-
D	-	5	6	-	5	6
E	4	8	3	5	-	7
F	4	-	-	6	7	-

Si supponga quindi che il peso dell'arco (E,C) sia pari a 6 (mentre i pesi degli altri archi rimangono immutati). Senza procedere in modo algoritmico, dire se l'albero individuato al punto precedente è ancora minimo.

Esercizio 4: Si descriva formalmente il problema dell'albero ricoprente di peso minimo; in particolare si dimostrino le condizioni di ottimalità.

Esercizio 5: Si risolva il seguente problema di PLI con la tecnica del Branch and Bound.

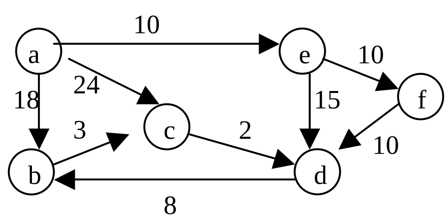
$$\max \quad 32x_1 + 44x_2 + 30x_3 + 25x_4 + 10x_5$$
$$8x_1 + 11x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 19$$
$$0 \leq x_i \leq 1 \text{ intero } \quad i=1,2,3,4,5$$

Esercizio 6: Sia dato il problema di programmazione lineare a numeri interi P.

$$\max \quad x_1 + x_2$$
$$6x_1 - 12x_2 \geq -9$$
$$6x_1 - 4x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi}$$

Si richiede quanto segue: (1) Eseguire la prima iterazione dell'algoritmo dei piani di taglio generando un taglio di Gomory nella forma intera e un taglio di Dantzig. (2) Rappresentare graficamente il politopo associato al problema P, i tagli generati al punto 1 e fornire la formulazione ideale per il problema P.

Esercizio 7: Si consideri il grafo G in figura, orientato e pesato sugli archi. Utilizzando l'algoritmo di Dijkstra, si determini un cammino minimo dal nodo **a** al nodo **d**.



Compito di esonero **Compito B**
II modulo di Ricerca Operativa
20 Aprile 2001

Nome e Cognome____________________

Esercizio 1: Si determini, procedendo in modo algoritmico, un albero ricoprente di peso minimo per il grafo di cui nel seguito viene fornita la matrice di adiacenza nodi-nodi e la matrice dei pesi degli archi.

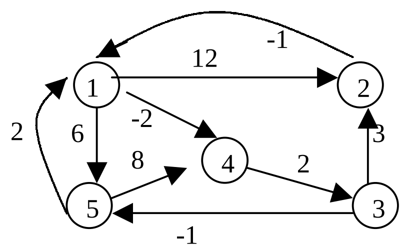
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	1	1
B	1	0	1	0	1	0
C	1	1	0	1	1	0
D	1	0	1	0	1	1
E	1	1	1	1	0	1
F	1	0	0	1	1	0

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	3	6	4	9
B	2	-	1	-	5	-
C	3	1	-	6	5	-
D	6	-	6	-	5	8
E	4	5	5	5	-	9
F	9	-	-	8	9	-

Si supponga quindi che il peso dell'arco (D,C) sia pari a 3 (mentre i pesi degli altri archi rimangono immutati). Senza procedere in modo algoritmico, dire se l'albero individuato al punto precedente è ancora di peso minimo.

Esercizio 2: Si consideri il seguente problema di pianificazione di progetti in cui sono state identificate 8 attività principali Ai, i=1,2,…8 con durate: d1=2, d2=12, d3=3, d4=2, d5=6, d6=2, d7=1, d8=10. La lista delle relazioni di precedenza è la seguente: A1<A3; A2<A3; A2<A6; A3<A4; A3<A5; A4<A5; A4<A6; A6<A7; A6<A8; (dove con Ai<Aj si rappresenta il fatto che l'attività Ai deve terminare prima dell'inizio dell'attività Aj).
Si costruisca un grafo che rappresenti il progetto. Si calcoli la durata minima di questo progetto e si calcolino gli istanti minimo e massimo di inizio per ogni attività. Si individuino 2 attività critiche e 2 non critiche.

Esercizio 3: Si consideri il seguente grafo *G* orientato e pesato sugli archi. Procedendo in modo algoritmico, si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano ogni nodo con tutti gli altri nodi.
Si scrivano esplicitamente i cammini di peso minimo dal nodo 1 al nodo 5, dal nodo 4 al nodo 1.



Esercizio 4: Si discuta della teoria della complessità computazionale. In particolare si dimostri la NP-completezza del problema CLIQUE.

Esercizio 5: Si risolva il seguente problema di PLI con la tecnica del Branch and Bound.

$$\max \quad 18x_1 + 40x_2 + 34x_3 + 20x_4 + 49x_5$$
$$6x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 14x_5 \leq 20$$
$$0 \leq x_i \leq 1 \text{ intero } \quad i=1,2,3,4,5$$

Esercizio 6: Si vogliono usare delle talvole di legno per ottenere gli elementi per costruire delle scaffalature. Ciascuna tavola è lunga 10 metri. La descrizione delle richieste per ciascun elemento è riportata in tabella.

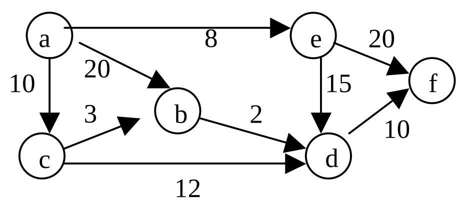
Numero elementi	Lunghezza elementi (in metri)
25	2
8	3
6	5

Si vuole minimizzare il numero di tavole da sezionare per soddisfare le richieste. Formulare il problema di cutting stock ed eseguire la prima iterazione dell'algoritmo di generazione di colonne sapendo che considerando la base:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

si ottiene una soluzione di valore 10,67 e il vettore delle variabili duali $u^T = (1/5 \;\; 1/3 \;\; 1/2)$.

Esercizio 7: Si consideri il grafo G in figura, orientato e pesato sugli archi. Utilizzando l'algoritmo di Dijkstra, si determini un cammino minimo dal nodo **a** al nodo **f**.

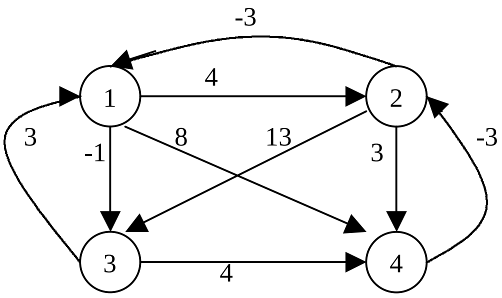


Compito di esonero **Compito C**
II modulo di Ricerca Operativa
20 Aprile 2001

Nome e Cognome____________________

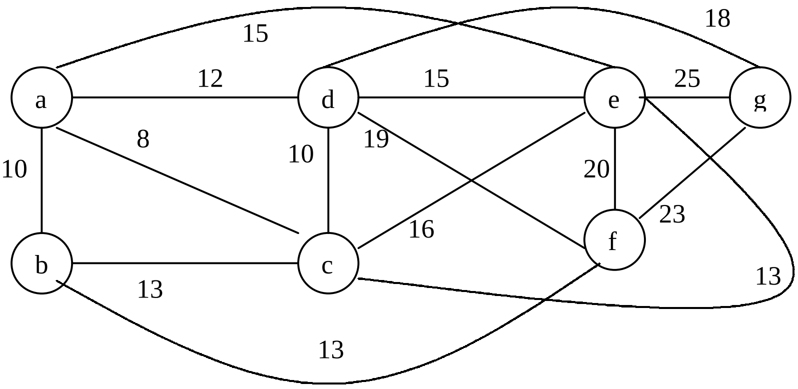
Esercizio 1: Si consideri il seguente problema di pianificazione di progetti in cui sono state identificate 8 attività principali Ai, i=1,2,…8 con durate: d1=2, d2=12, d3=3, d4=2, d5=6, d6=1, d7=1, d8=1. La lista delle relazioni di precedenza è la seguente: A1<A3; A2<A3; A2<A5; A3<A4; A4<A5; A4<A6; A6<A7; A6<A8; A7<A8 (dove con Ai<Aj si rappresenta il fatto che l'attività Ai deve terminare prima dell'inizio dell'attività Aj).
Si costruisca un grafo che rappresenti il progetto. Si calcoli la durata minima di questo progetto e si calcolino gli istanti minimo e massimo di inizio per ogni attività. Si elenchino 2 attività critiche e 2 non critiche.

Esercizio 2: Sia dato il seguente grafo orientato pesato.
Applicando l'algoritmo di Floyd-Warshall si determinino i valori di tutti i cammini minimi che collegano ogni vertice con tutti gli altri vertici. Si scriva esplicitamente il cammino di peso minimo dal nodo 4 al nodo 1 e quello dal nodo 2 al nodo 3. Fornire infine la rappresentazione tramite liste di adiacenza del grafo G.



Esercizio 3: Si descriva formalmente il problema dell'albero ricoprente di peso minimo, si descriva un modello di PLI per tale problema e si dimostri almeno una delle condizioni di ottimalità.

Esercizio 4: Si determini un albero ricoprente di peso minimo del seguente grafo non orientato pesato applicando l'algoritmo di Prim, a partire dal vertice **b**.



Si supponga quindi che il peso dell'arco (f,e) sia pari a 10 (mentre i pesi degli altri archi rimangono immutati). Senza procedere in modo algoritmico, dire se l'albero individuato al punto precedente è ancora minimo. Fornire inoltre la rappresentazione tramite matrice di adiacenza del grafo G.

Esercizio 5: Si risolva il seguente problema di PLI con la tecnica del Branch and Bound.

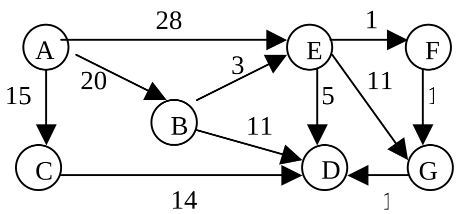
$$\max \quad 49x_1 + 8x_2 + 18x_3 + 42x_4$$
$$12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 14x_4 \leq 18$$
$$0 \leq x_i \leq 1 \text{ intero } i=1,2,3,4$$

Esercizio 6: Sia dato il problema di programmazione lineare a numeri interi P:

$$\max \quad 2x_1 + 2x_2$$
$$-2x_1 + 4x_2 \leq 3$$
$$-6x_1 + 4x_2 \geq -9$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi}$$

si richiede quanto segue: (1) Eseguire la prima iterazione dell'algoritmo dei piani di taglio generando un taglio di Gomory nella forma frazionaria e un taglio di Dantzig. (2) Rappresentare graficamente il politopo associato al problema P, i tagli generati al punto 1 e fornire la formulazione ideale per il problema P.

Esercizio 7: Si consideri il grafo G in figura, orientato e pesato sugli archi. Utilizzando l'algoritmo di Dijkstra, si determini un cammino minimo dal nodo **A** al nodo **D**.



Compito di esonero **Compito D**
II modulo di Ricerca Operativa
20 Aprile 2001

Nome e Cognome____________________

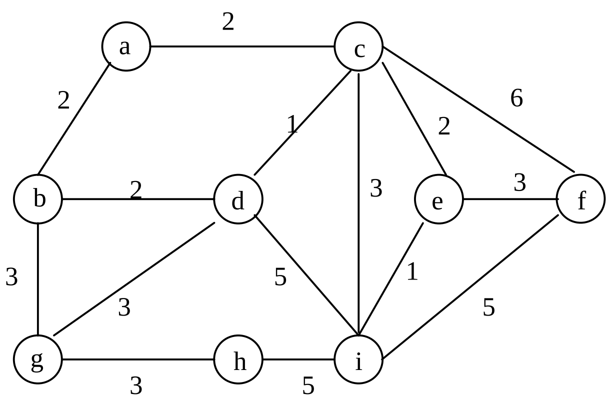
Esercizio 1: Si determinino, procedendo in modo algoritmico, i valori di tutti i cammini minimi che collegano ogni nodo con tutti gli altri nodi del il grafo di cui nel seguito viene fornita la matrice di adiacenza nodi-nodi e la matrice dei pesi degli archi.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	0	0	1	1	0
C	0	1	0	1	1
D	0	1	0	0	1
E	1	0	1	0	0

	A	B	C	D	E
A	-	2	2	-	4
B	-	-	1	5	-
C	-	1	-	-1	-2
D	-	5	-	-	3
E	4	-	4	-	-

Esercizio 2: Si consideri il seguente problema di pianificazione di progetti in cui sono state identificate 8 attività principali Ai, i=1,2,…8 con durate: $d_1=6$, $d_2=12$, $d_3=3$, $d_4=2$, $d_5=4$, $d_6=6$, $d_7=6$, $d_8=10$. La lista delle relazioni di precedenza è la seguente: A1<A4; A2<A3; A3<A4; A4<A5; A4<A6; A5<A8; A6<A7; A6<A8 (dove con Ai<Aj si rappresenta il fatto che l'attività Ai deve terminare prima dell'inizio dell'attività Aj). Si costruisca un grafo che rappresenti il progetto. Si calcoli la durata minima di questo progetto e si calcolino gli istanti minimo e massimo di inizio per ogni attività. Si elenchino 2 attività critiche e 2 non critiche.

Esercizio 3: Si determini un albero ricoprente di peso minimo del seguente grafo G pesato non orientato applicando l'algoritmo di Kruskal.
Si supponga quindi che il peso dell'arco (c,d) sia pari a 3 (mentre i pesi degli altri archi rimangono immutati). Senza procedere in modo algoritmico, dire se l'albero individuato al punto precedente è ancora minimo.



Esercizio 4: Si consideri il grafo G non orientato dell'esercizio 3. Si renda tale grafo orientato considerando per ogni arco non orientato (i,j) gli archi (i,j) e (j,i) con lo stesso peso. Si calcoli su questo grafo il cammino minimo dal nodo **a** al nodo **f** utilizzando l'algoritmo di Dijkstra.

Esercizio 5: Si risolva il seguente problema di PLI con la tecnica del Branch and Bound.

$$\max \quad 25x_1 + 30x_2 + 32x_3 + 4x_4$$
$$5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 \le 17$$
$$0 \le x_i \le 1 \text{ intero } \quad i=1,2,3,4$$

Esercizio 6: Si discuta della teoria della complessità computazionale. Si discuta inoltre della complessità del problema di cammino minimo.

Esercizio 7: Si vogliono usare delle unità di nastro metallico per ottenere gli elementi per costruire dei serbatoi per caldaie. Ciascun nastro è lungo 10 metri. La descrizione delle richieste per ciascun elemento è riportata in tabella.

Numero elementi	Lunghezza elementi (in metri)
28	2
6	3
6	6

Si vuole minimizzare il numero di nastri da sezionare per soddisfare le richieste. Formulare il problema di cutting stock ed eseguire la prima iterazione dell'algoritmo di generazione di colonne sapendo che considerando la base:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene una soluzione di valore 13,6 e il vettore delle variabili duali $u^T = (1/5 \;\; 1/3 \;\; 1)$.