TEORIA DELLA PROBABILITA' e TEORIA DELLE CODE

L'obiettivo di questa breve dispensa è quello di richiamare i concetti base della teoria della probabilità necessari per affrontare lo studio della teoria delle code. In questa sede non daremo una rigorosa definizione di probabilità o del metodo per determinare la probabilità del verificarsi degli eventi.

Data l'imprevedibilità dei fenomeni naturali, si ha a che fare con fenomeni aleatori e benché il risultato di un esperimento non possa essere esattamente previsto, può essere descritto ogni possibile risultato. Il gruppo di tutti i possibili risultati dell'esperimento è chiamato *spazio campione* (Ω) dell'esperimento. Ogni risultato nello spazio campione è chiamato punto (ω) dello spazio campione.
In realtà è molto difficile caratterizzare con precisione lo spazio campione, ci si accontenta di ricordare quei fattori che si ritiene sono necessari per gli scopi dell'esperimento.

Quindi un concetto fondamentale della teoria della probabilità è quello di esperimento, che può definirsi come un'operazione il cui risultato è incerto. L'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento è detto spazio campione Ω. Un sottoinsieme dello spazio delle prove è un evento; l'insieme degli eventi considerati per un esperimento si chiama spazio degli eventi E, $E \subseteq \Omega$, soddisfa gli assiomi seguenti:

1. se A è un evento, il suo complemento è anch'esso un evento
2. l'unione di più eventi A,B… è ancora un evento

Ad ogni evento può essere associata una misura che quantifica la possibilità che questo evento accada durante l'esperimento. Tale quantità numerica è definita probabilità dell'evento e si può interpretare semplicemente attraverso una definizione in frequenza. Così dato un evento A, la definizione in frequenza della sua probabilità

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \left[\frac{Na}{N} \right]$$

N è il numero di volte che l'esperimento viene effettuato e Na è il numero di volte che accade l'evento A.

PROBABILITA'

Dato uno spazio campione $\Omega : \{ \omega_1\ \omega_2, \ldots, \omega_m \}$, di cardinalità $|\Omega| = m$.
La probabilità è una funzione:
$P(\ ) : \Omega \Rightarrow [0,1]$
che associa ad ogni evento elementare $\omega_i \in \Omega$ la sua probabilità $P(\omega_i)$.
Sotto l'assunzione che gli elementi/eventi ω_i possano a no avvenire, la probabilità $P(\omega_i)$, che viene associata all'evento ω_i, rappresenta la percentuale di volte che ci si aspetta che l'evento elementare accada.

Intuitivamente, il concetto di probabilità è più o meno noto a tutti. Se, ad esempio, prendiamo una carta a caso in un mazzo di (40) carte napoletane, e' noto che la probabilità di estrarre una carta di valore "3" e' 1 su 10, mentre la probabilità di estrarre una carta di bastoni e' 1 su 4.

Dobbiamo formalizzare il concetto di probabilità per arrivare ad una struttura logico/matematica che consenta elaborazioni quantitative. Saltando tutta la teoria assiomatica della probabilità diciamo solo che lavoriamo con un insieme di "casi possibili" Ω (detto talvolta insieme universale). Un sottoinsieme $\boldsymbol{A} \subseteq \Omega$ prende il nome di "evento" ed in genere e' descritto da una frase che individua il sottoinsieme.

<u>Esempio 1</u>

A: estrazione di una carta di valore 3 da un mazzo di 40 carte napoletane non truccato

Gli elementi di Ω (il mazzo di 40 carte) che soddisfano l'evento ***A*** si dicono "casi favorevoli" e sono evidentemente le 4 carte: 3bastoni, 3coppe, 3denari, 3spade. Il sottoinsieme ***A*** e' quindi composto da queste 4 carte. In generale quindi i casi favorevoli ad un evento denotano un sottoinsieme di Ω, e nel seguito parleremo di evento riferendoci sia alla frase che al sottoinsieme.

$|A|$ indica invece la cardinalità del sottoinsieme ***A***, cioè il numero di casi favorevoli ad ***A***

$\Rightarrow |A| = 4$

Possiamo ora definire la probabilità di un evento ***A*** come il rapporto

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

cioè il rapporto tra numero di casi favorevoli ad ***A*** e numero di casi totali.

A questo punto dobbiamo introdurre le ***variabili aleatorie***. Il modo migliore per capirle e' quello di partire dalle variabili matematiche: nella matematica deterministica sappiamo che una variabile può assumere un valore noto (p. es x=3), e in generale si parla di incognite. Sulle incognite non si dice molto di più del fatto di non essere note, al massimo si definisce un insieme ammissibile (i.e. $3 \leq x \geq 7$).
La matematica probabilistica nasce invece proprio con lo scopo di dire qualcosa di più, ovvero per "prevedere il futuro". Poiché il futuro non e' noto a priori, possiamo "prevedere" il valore di x solo in termini probabilistici. In altre parole, dato l'insieme di definizione **X**, per ogni elemento di $i \in X$ possiamo conoscere la probabilità che x assuma quel valore, che indicheremo con $\mathbf{Pr}\ (\boldsymbol{x} = \mathbf{i})$ oppure $\mathbf{P_i}$.

<u>Esempio</u>

Una variabile aleatoria rappresenta il valore numerico x di una carta estratta dal solito mazzo di 40 carte. L'insieme di definizione in questo caso e' $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e le probabilità di ogni valore e' $\mathbf{P_i} = 1/10$, $i = 1\ldots10$.

Possiamo definire a questo punto il concetto di media d'insieme. Partiamo dall'insieme universale e associamo un valore numerico ad ogni elemento di Ω . Per esempio, nel mazzo di 40 carte associo ad ogni carta il suo valore numerico. Su 40 carte avrò allora 4 carte di valore 1, 4 carte di valore 2, e cosi via. La media d'insieme e' esattamente il valor medio di tutti i valori possibili:

Media d'insieme: $$\frac{(4\times1)+(4\times2)\ldots+(4\times10)}{40}$$

Associamo una variabile aleatoria x all'evento "estrazione di una carta" e P_i indica la probabilità che la carta estratta abbia valore numerico i, $i = 1\ldots10$.

La media d'insieme può essere interpretata come $\sum_{i=1}^{10} i \Pr(x = i)$. Questo valore si chiama per definizione ***valore atteso*** della variabile aleatoria x, o valor medio d'insieme.
In generale, data una variabile aleatoria x con il suo insieme di definizione X, definiamo valore atteso di x la quantità:

valore atteso di x $\sum_{i \in X} i \Pr(x = i)$

Esempio

Utilizziamo un mazzo di carte truccato formato da 10 carte:

Ω = { 1bastoni, 2bastoni, 2coppe, 3coppe, 3coppe, 5denari, 5bastoni, 5spade, 7bastoni, 8coppe }

Esistono due 3 di coppe. Queste vanno considerate come due carte diverse (e fisicamente lo sono) anche se con lo stesso valore numerico e con lo stesso seme.
L'insieme di definizione **X** e' composto dai 10 possibili interi da 1 a 10, come in tutti i mazzi di carte, solo che qui alcuni numeri non potranno mai uscire (p. es. 4, 6, 9, 10).

media d'insieme di Ω : $\frac{1+2+2+3+3+5+5+5+7+8}{10} = 4{,}1$

Si definisce la variabile aleatoria x pari al valore della carta estratta dal mazzo truccato. E' quindi, possibile calcolare la probabilità di ogni suo possibile valore:

Pr (x = 1) = Pr (x = 7) = Pr (x = 7) = 1/10 (ho solo un caso favorevole tra i 10 possibili)

Pr (x = 2) = Pr (x = 3) = 2/10 (ho due casi favorevoli tra i 10 possibili)

Pr (x = 4) = Pr (x = 6) = Pr (x = 9) = Pr (x = 10) = 0 (ho zero casi favorevoli tra i 10 possibili)

Pr (x = 5) = 3/10 (ho tre casi favorevoli tra i 10 possibili)

(Se calcolo il valore atteso di x ottengo esattamente il valor medio calcolato precedentemente).

Un evento è definito come un insieme di risultati di un esperimento. Può capitare spesso che nello svolgimento di un esperimento non si sia direttamente interessati a tutto lo spazio campione o ad eventi non definiti in Ω. Una variabile aleatoria è una funzione numericamente valutata, definita nello spazio campione. Si noti che una funzione, in senso matematico, è una regola che assegna un numero ad ogni valore nel suo campo di definizione, che in questo caso è lo spazio campione.

La scelta della variabile aleatoria dà la possibilità a chi compie l'esperimento di rilevare i fattori che ritiene importanti, e gli permette automaticamente di scartare le caratteristiche superflue che possono essere molto difficili da identificare.

Esempio

Un esperimento a cui si può interessati è l'arrivo del primo cliente in un negozio.

Prendendo in considerazione una giornata di 8 ore, il cliente può arrivare in un qualunque momento dall'apertura fino alla chiusura.
Lo spazio campione può essere considerato composto di tutti i punti sull'asse reale tra le 0 e le 8 ore.

$\Omega : \{\ \omega :\ 0 \leq \omega \leq 8\ \}$

Tale esperimento può essere modificato, consideriamo l'arrivo del primo cliente in due giornate consecutive

$\Omega : \{\ \omega_1\, \omega_2 :\ 0 \leq \omega_1 \leq 8\ ,\ 0 \leq \omega_2 \leq 8\ \}$
Ω è l'insieme dei punti ω dello spazio a due dimensioni limitato dal quadrato di lato 8.

Supponiamo che l'esperimento che misura i tempi del primo arrivo in due giorni sia svolto per determinare a quali ore aprire il negozio.
Il proprietario decide che se la media dei tempi di arrivo è superiore ad un'ora, egli aprirà un'ora più tardi. Egli prende la sua decisione non secondo l'osservazione diretta dei risultati dell'esperimento, ma secondo i risultati di una regola che attribuisce la media aritmetica a ciascun punto dello spazio campione Ω.
L'insieme d'interesse è quindi diviso in parti: da una parte ci sono quei punti che sono al di sotto di 1, dall'altra quei punti che sono al di sopra. E' da notare che la nostra variabile aleatoria di interesse è proprio la funzione media aritmetica.

Più formalmente possiamo dare la seguente definizione di variabile aleatoria:

VARIABILE ALEATORIA

Ogni singolo evento ω di uno spazio campione delle prove Ω può essere associato in modo biunivoco a un numero attraverso una particolare funzione matematica:

$$X(\ ) : \Omega \rightarrow \Re$$

Tale corrispondenza si chiama variabile aleatoria è discreta se assume solo un insieme finito o almeno numerabile di valori (continua o mista altrimenti).

Abbiamo già indicato come le variabili aleatorie possano essere interessanti, ed è molto importante la relazione che esiste tra probabilità associate con eventi dello spazio campione e le "probabilità" associate alle variabili aleatorie.

La relazione tra i valori di una v.a. e le probabilità ad essi corrispondente è espressa dalla legge di probabilità che può assumere forme diverse.

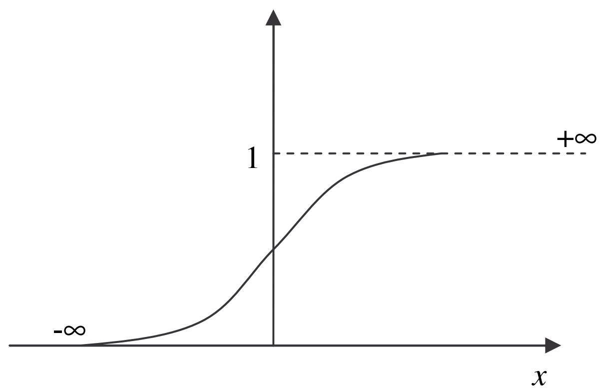
FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA'

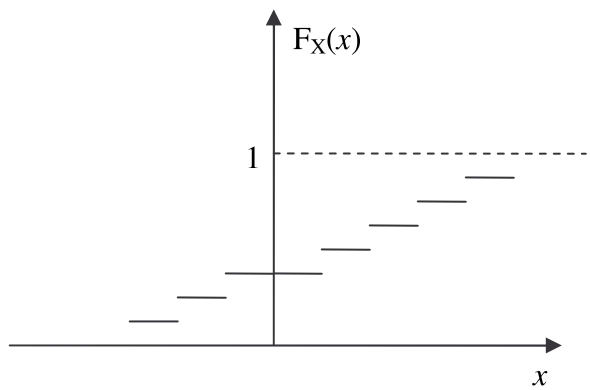
La distribuzione di probabilità $F_X(x)$ di una variabile aleatoria X esprime la probabilità che X assuma un valore minore o uguale a x ed è definita $\forall x \in \Re$ come

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$$

Tale funzione è monotona non decrescenze e tale che $0 \leq F_X(x) \leq 1$, con $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(+\infty) = 1$; per x_1 e x_2 tali che $x_1 \leq x_2$, si ha
$F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ e $F_X(x_1) - F_X(x_2) = \Pr(x_1 < X \leq x_2)$.

La funzione di distribuzione di una v.a. continua è continua e derivabile. La funzione di distribuzione di una v.a. discreta presenta invece un andamento a "scalinata", con punti di discontinuità in corrispondenza dei valori x considerati, con "salti" pari alla probabilità corrispondenti.





FUNZIONE DENSITA' DI PROBABILITA'

$f_X(\cdot): X \Rightarrow [0,1]$ ($p_X(\cdot)$ per il caso discreto)

La funzione densità di probabilità rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria X assuma il valore Xi in conseguenza dell'accadere di un certo evento elementare

La funzione densità di probabilità e funzione di distribuzione sono legate dalla seguente relazione

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} p_X(y)$$

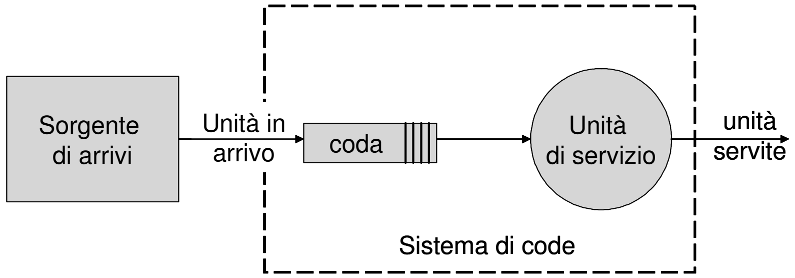
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)$$

TEORIA DELLE CODE

La teoria delle code comprende lo studio matematico delle code o linee d'attesa. La formazione delle linee di attesa è un fenomeno comune che si verifica ogni volta che la normale domanda per un servizio supera la capacità normale di attuare quel servizio. Poiché non è sempre possibile prevedere con precisione quando si dovrà provvedere al servizio e/o quanto tempo sarà necessario per effettuarlo, queste decisioni sono spesso difficili. L'obiettivo è raggiungere un equilibrio economico fra il costo del servizio e il costo dell'attesa per quel servizio. La teoria delle code non risolve direttamente, da sola, questo problema. Comunque, fornisce importanti dati necessari per una simile decisione prevedendo varie caratteristiche della linea di attesa come il tempo medio di attesa.

Il processo tipico della coda

Il processo fondamentale usato dalla maggior parte dei modelli di code è il seguente. Le unità che hanno bisogno di servizio generalmente appartengono ad una popolazione di probabili utenti. Queste unità entrano nel sistema e formano una *coda*. Ad un certo punto, un componente della coda viene scelto per usufruire del servizio secondo certe regole conosciute come la *disciplina del servizio*. Il servizio richiesto da un'unità è eseguito dalla *stazione di servizio*, dopo che l'unità ha lasciato il sistema delle code. Nella fig. 1 è rappresentato questo processo



I sistemi di file d'attesa (sistemi di congestione) sono caratterizzati da un arrivo casuale di clienti, ciascun richiedente un'operazione (servizio) ad un'apposita unità/stazione di servizio. Anche quando l'afflusso di clienti non sia in media superiore alla massima capacità di smaltimento dell'unità di servizio, a causa dell'aleatorietà dei fenomeni coinvolti, si avrà la formazione di una fila d'attesa, in cui si disporranno i clienti non ancora serviti.
I parametri che concorrono a determinare la capacità di smaltimento dell'unità di servizio sono sostanzialmente due: il *numero di serventi*, cioè il numero di dispositivi interni all'unità che possono contemporaneamente fornire il servizio richiesto, ed il *tempo di servizio* t_s impiegato per completare un servizio da ciascuno di essi.
Una fila d'attesa è caratterizzata dai seguenti parametri:

- t_a intervallo di tempo tra gli arrivi
- t_s tempo di servizio
- t_q tempo complessivo speso dal generico cliente nella coda prima di essere servito
- t_w tempo complessivo speso dal generico cliente nel sistema $t_w = t_s + t_q$
- ***s*** numero di serventi
- ***n*** numero di clienti nel sistema (stato del sistema)
- ***disciplina di servizio*** legge secondo la quale i clienti in fila d'attesa vengono serviti
- ***dimensione popolazione di utenti***
- ***comportamento del cliente dopo il servizio***

- ***l*** lunghezza massima della coda, cioè massimo numeri di utenti in attesa.

Quindi un sistema di file d'attesa è costituito dalla combinazione di due processi stocastici: uno di arrivi, caratterizzato da t_a, ed uno di servizio caratterizzato da t_s.
Il processo degli arrivi/uscite può dipendere dal numero ***n*** di clienti presenti nel sistema.

Sia ***s*** il numero dei serventi, la lunghezza ***l*** della coda è evidentemente data dallo stato del sistema meno il numero di clienti in fase di servizio. Si ha cioè:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } n \le s \\ n-s & \text{se } n \ge s \end{cases}$$

Inoltre, si può notare che il tempo complessivo speso nel sistema da un cliente è pari a

- $t_w = t_q + t_s$

Un'importanza particolare assumono spesso i valori attesi dell'intervallo di tempo tra gli arrivi $E\{t_a\}$ e del tempo di servizio $E\{t_s\}$. Di solito si usa introdurre una *frequenza media di arrivi* λ ed una *velocità di servizio* ν:

- $\lambda = \dfrac{1}{E\{t_a\}}$
- $\nu = \dfrac{1}{E\{t_s\}}$

Se ***s* = 1** si definisce inoltre *fattore di utilizzazione* ρ il rapporto

- $\rho = \dfrac{E\{t_s\}}{E\{t_a\}} = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Tale rapporto può essere interpretato come la frazione di tempo in cui il servente è occupato.
Nel caso in cui ***s* > 1**, evidentemente, per poter definire il fattore di utilizzazione del generico servente occorre porre attenzione al fatto che la frequenza degli arrivi al singolo servente certamente non coincide con la frequenza degli arrivi all'unità di servizio, ma sarà in generale un'opportuna frazione di questa. Maggiori dettagli su questo argomento saranno esposti nelle sezioni dedicate ai sistemi a più serventi.

Scopo dell'analisi di un sistema di file d'attesa è fondamentalmente quello di determinare la *probabilità* $P_n(t)$ *dei vari stati nel tempo*. Da questo è infatti possibile risalire, come si vedrà, a moltissime altre grandezze di interesse. Tranne che in casi particolarmente semplici, la determinazione di queste probabilità è estremamente difficoltosa quando il sistema non è in condizioni di stazionarietà; di qui anche l'importanza di determinare le condizioni sotto le quali il sistema può raggiungere la stazionarietà. Una volta note le probabilità $P_n(t)$ è possibile ricavare il valore atteso ***N*** del numero di clienti nel sistema:

• $N = E\{n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$

ed il valore atteso ***L*** del numero di clienti in fila d'attesa:

• $L = E\{l\} = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n$.

Un altro obiettivo dell'analisi di un sistema di file d'attesa è la determinazione del valore atteso del tempo trascorso rispettivamente nel sistema ***W*** ed in coda $\boldsymbol{W_q}$ dal generico cliente.

$$W = E\{t_w\} = \int_0^{\infty} t \cdot f_{t_w}(t)dt$$

$$W_q = E\{t_q\} = \int_0^{\infty} t \cdot f_{t_q}(t)dt$$

dove $f_{t_w}(t)$ e $f_{t_q}(t)$ sono rispettivamente la funzione densità di probabilità del tempo trascorso nel sistema ed in coda.

Nel seguito, i sistemi studiati saranno classificati secondo il tipo di distribuzioni di t_a e t_s, il *numero di serventi*, la *lunghezza* massima ammissibile della *coda*, la *dimensione della sorgente*.
Si adotterà per brevità la *notazione di Kendall*, che consiste nell'uso dei seguenti simboli:

- ***M*** per indicare una distribuzione esponenziale;
- ***D*** per indicare una distribuzione deterministica;
- ***G*** per indicare una distribuzione di tipo generale;
- $\boldsymbol{E_k}$ per indicare una distribuzione di tipo Erlang con parametro k.

Nella notazione di *Kendall* la prima lettera indica il tipo di *ingressi*, la seconda il tipo di *servizi* e la terza il numero di *serventi*; ad esempio col simbolo $\boldsymbol{M / E_k / s}$ si individua un sistema di file di attesa con *arrivi* esponenziali, *servizi* di tipo Erlang con parametro k ed s *serventi*.
Verranno inoltre aggiunte altre 2 lettere ad indicare rispettivamente la *capacità massima della coda* e la *dimensione della popolazione sorgente*; si avrà così in generale il simbolo $\boldsymbol{M / E_k / s / A / B}$ ad individuare un sistema che oltre alle precedenti caratteristiche abbia una popolazione *sorgente* di dimensione ***B*** e la capacità di accettare un numero massimo di clienti pari ad ***A***; ogni cliente in arrivo è perso se $\boldsymbol{n = A}$. L'omissione d'uso degli ultimi 2 simboli sta ad indicare che essi hanno valore infinito.

Relazioni Fondamentali

Nell'analisi e nel dimensionamento dei sistemi di file d'attesa un ruolo importante è giocato dai valori attesi del numero di *clienti* del sistema ***N***, dalla lunghezza della coda ***L***, dal tempo speso da un cliente nel sistema ***W*** e dal tempo di attesa in coda $\boldsymbol{W_q}$. Tali grandezze, come è facilmente intuibile, non sono indipendenti tra loro:

$N(T) = \lambda(T) \cdot W(T)$

dove, nell'intervallo di tempo T, N(T) è il valor medio di clienti nel sistema, λ(T) il numero medio di arrivi nel sistema e W(T) il valor medio del tempo speso nel sistema da un cliente.
Se sono soddisfatte le ipotesi di ergodicità, tale relazione è indipendente dal tempo:

$$N = \lambda \cdot W$$

Analogamente possono essere ricavate le successive relazioni fondamentali:

$$L = \lambda \cdot W_q$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Tali relazioni mostrano le correlazioni tra i parametri fondamentali d'interesse, è quindi sufficiente calcolarne uno per poter ricavare gli altri.

<u>OSSERVAZIONE</u>

Nel caso ***s=1***, si può ricavare un'altra relazione tra *fattore di utilizzazione* $\boldsymbol{\rho}$ del servente e la probabilità che il sistema di file d'attesa si trovi nello stato 0.

$$N = L + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)P_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = N - (1 - P_0)$$

Interpretando $\boldsymbol{P_0}$ come la frazione di tempo durante la quale il servente è inoperoso, il completamento ad 1 di $\boldsymbol{P_0}$ viene a rappresentare la frazione di tempo in cui il servente è attivo:

$$\rho = 1 - P_0$$

Processo di Nascita e Morte

La maggior parte dei modelli elementari di coda considerano che le entrate, *unità di arrivo,* e le uscite, *unità di partenza,* del sistema si verifichino secondo un processo di nascita e morte.
Il termine *nascita* si riferisce all'arrivo di una nuova unità e il termine *morte* alla partenza di un'unità servita.
Le nascite e le morti si verificano a caso con una cadenza media che dipende solo dallo stato:

*Stato al tempo **t***	*Eventi da **t** a **t+Δt***	*Probabilità*
E_{n-1}	*un'entrata*	$P_{n-1}(t) \cdot [\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t)]$
E_{n+1}	*un'uscita*	$P_{n+1}(t) \cdot [\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)]$
?	*eventi multipli*	$o(\Delta t)$
E_n	*nessun evento*	$P_n(t) \cdot [1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t + o(\Delta t)]$

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\, \lambda_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)\, \mu_{n+1}\Delta t + P_n(t)\, [1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t\,] + o(\Delta t)$$

per $n>0$ rappresenta la probabilità $\boldsymbol{E_n}$ al tempo $\boldsymbol{(t+\Delta t)}$

Portando $P_n(t)$ al primo membro e dividendo tutto per Δt *si ottiene:*

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) - (\lambda_n+\mu_n)P_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

facendone il limite per $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) - (\lambda_n+\mu_n)P_n(t) \quad \textit{tutto per } n>0$$

Nel caso in cui $n=0$ *(e ricordando che* $\lambda_{-1}=0$ *e che* $\mu_0=0$*)*

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t)$$

Per ottenere una soluzione bisogna specificare le condizioni iniziali $P_i(0)$ per i = 0,1,….
E' opportuno ricordare che le condizioni iniziali devono soddisfare la condizione

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(0) = 1$$

Assegnate le condizioni iniziali è possibile in linea di principio trovare la soluzione; tuttavia, essendo ciò alquanto laborioso, ci si limiterà a considerare solo alcuni casi particolari.

<u>*Caso particolare di processi di sole nascite:* $\lambda_i = \lambda$</u>

In questo caso è possibile ricavare un'espressione esplicita per la $P_n(t)$:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \quad \text{per } i\geq 1$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

dove siano $P_n(0)=P_n$ per $n=0,1,2,\ldots$ le condizioni iniziali.
Moltiplicando ogni equazione per z^n e sommando rispetto all'indice n otteniamo:

$$\frac{\partial P(z;t)}{\partial t} = \lambda(z-1)P(z;t)$$

dove $P(z;t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t)$ è la funzione generatrice di probabilità del processo in esame.

Risolvendo con condizione iniziale $P(z;0) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(0) = P(z)$ si avrà:

$$P(z;t) = P(z)e^{\lambda(z-1)t}$$

Nel caso particolare che il processo inizi nello stato E_0 cioè sia

$$P_0=1$$

$$P_n=0 \qquad \text{per} \quad n\geq 1$$

si avrà $\quad P(z)=P_0=1$

e $\quad P(z;t)=e^{\lambda(z-1)t}$.

Da quest'ultima, ricaveremo tutte le $P_n(t)$ nel seguente modo:

$$P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n P(z;t)}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}$$

che risulterà

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \qquad \text{per} \quad n=0,1,2,\ldots$$

che altro non è che una <u>*distribuzione di Poisson*</u> con parametro $\lambda\, t$.
Il valore atteso del numero di arrivi nell'intervallo $(0,t)$ risulta:

$$E(\underline{n}(t)) = \lambda\, t$$

per cui λ assume il significato di <u>*frequenza media degli arrivi*</u>.

Vediamo ora le caratteristiche di tale processo:
Sia $t=0$ coincidente con l'istante di un arrivo e sia n il numero di clienti che arrivano successivamente a tale istante.
In questo caso l'istante del primo arrivo $\boldsymbol{t_a}$ rappresenta l'intervallo tra 2 arrivi consecutivi:

$$Pr\{t_a \leq t\}=Pr\{almeno\ un\ arrivo\ in\ (0\ ,\ t]\}= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) = 1 - P_0(t) & \text{per } t\geq 0 \\ 0 & \text{per } t<0 \end{cases}$$

Data l'arbitrarietà nella scelta dell'origine dei tempi, l'espressione trovata rappresenta la *funzione di distribuzione dell'intervallo tra 2 arrivi consecutivi qualsiasi.*
Possiamo così scrivere

$$F_{t_a}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

Essa è una distribuzione di tipo *esponenziale* e quindi con valore atteso:

$$E(t_a) = \frac{1}{\lambda}$$

Quindi definiremo usualmente *Arrivi Poissoniani* o *Arrivi esponenziali* il processo di arrivi ad un sistema di file d'attesa che soddisfi le ipotesi dei processi di sole nascite con $E(n)=\lambda$.

Una proprietà fondamentale della *distribuzione esponenziale* è la sua *assenza di memoria* o *proprietà di Markov* che si esprime:

$$\Pr\langle t_a \leq t \mid t_a > t_0 \rangle = \Pr(t_a \leq t - t_0) \qquad \text{per } t \geq t_0$$

Ciò significa che il sapere che in un certo intervallo t_0 non si è verificato nessun arrivo non fornisce alcuna informazione in termini di probabilità, ovvero, qualsiasi sia l'istante in cui si inizi ad esaminare un processo esponenziale è come se il processo iniziasse in quell'istante.
La dimostrazione della suddetta proprietà è molto semplice:

Risulta infatti: $\Pr\langle t_a \leq t \mid t_a > t_0 \rangle = \dfrac{\Pr(t_0 < t_a \leq t)}{\Pr(t_a > t_0)} = 1 - e^{-\lambda(t-t_0)} = \Pr(t_a \leq t - t_0)$ per $t \geq t_0$

Distribuzione Stazionaria dei Processi di nascita e morte

Quando il sistema di code ha raggiunto il regime stazionario, le probabilità di stato $\{P_n(t)\}$ diventano costanti indipendenti dal tempo.
La soluzione in regime stazionario per P_n può essere ottenuta in 2 modi:

- risolvendo $P_n(t)$ nel caso transitorio e ponendo $t \to \infty$
- ponendo $\dfrac{dP_n(t)}{dt} = 0$ nelle equazioni differenziali e risolvendo le equazioni restanti.

Esiste una soluzione stazionaria se esistono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{t \to \infty} P_n(t) = P_n \qquad \text{per } n=0,1,2,\ldots$$

Calcoliamo la soluzione:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) \qquad \text{per } n > 0$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0 = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t) \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Per la stazionarietà la prima diventa:

$$\mu_{n+1} P_{n+1} - \lambda_n P_n = \mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1} \qquad \text{per } n > 0$$

Nel caso $n=1$, essendo $\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0$, diventa:

$$\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1 = 0$$

In generale avremo:

$$\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0 \quad \text{per } n > 0$$

da cui

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} P_{n-2}\right) = \ldots = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\ldots\mu_1} P_0 = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{j=1}^{n}\mu_j} P_0 \quad \text{per } n > 0$$

Si è così ottenuta l'espressione di P_n in funzione di P_0 per $n=1,2,3,\ldots$

Ora, ricordando che $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, avremo che:

$$P_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{j=1}^{n}\mu_j} P_0$$

da cui: $$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{j=1}^{n}\mu_j}}$$

Da notare che si è esplicitamente fatta l'ipotesi che la serie a denominatore converga, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{j=1}^{n}\mu_j} < \infty$$

Definito cosi P_0 si avrà:

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

$$L = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n$$

Queste serie hanno somma nota per numerosi casi speciali interessanti.
Se così non fosse si può cercare di approssimarle sommando un numero finito sufficientemente alto di termini con l'aiuto di un calcolatore elettronico.

Alcune Applicazioni dei Processi di Nascita e Morte

Esamineremo alcuni casi particolari che risultano molto utili nelle applicazioni. Per ciascun caso faremo una scelta dei valori da assegnare ai parametri λ_n, μ_n che ci porterà a particolarizzare le formule viste in precedenza.
Supporremo, come ipotesi comune a tutti i casi, che i clienti siano serviti nell'ordine di arrivo, *strategia FIFO*.

SISTEMI M /M /1

Si consideri un sistema di file d'attesa con un solo servente in cui il *processo degli arrivi sia Poissoniano* con parametro λ e la *funzione di distribuzione dei tempi di servizio sia esponenziale* con parametro μ:

$\lambda_n = \lambda$ per $n = 0,1,2,\ldots$

$\mu_n = \mu$ per $n = 1,2,3,\ldots$

Queste ipotesi fanno sì che la condizione per la stazionarietà diventi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n < \infty$$

e cioè deve risultare:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda < \mu$$

Supposta vera la condizione sopra, quindi la stazionarietà soddisfatta, possiamo ricavare:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

dove P_0 rappresenta la frazione di tempo in cui il servente è inattivo. Tale espressione è valida solo in questo caso in esame.
Inoltre possiamo ricavare:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n(1-\rho) \qquad \text{per} \qquad n > 0$$

Una volta note le probabilità stazionarie P_n, che nel sistema di fila di attesa si trovino n clienti, possiamo calcolare alcune grandezze caratteristiche.
Il valore atteso del numero di clienti nel sistema sarà:

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i = (1-\rho)\rho\sum_{i=1}^{\infty} i\rho^{i-1} = (1-\rho)\rho\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^i\right) =$$
$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\rho^i\right] = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{1-\rho}\right] =$$

cioè

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Essendo $\qquad W = \frac{N}{\lambda} \qquad W_q = W - \frac{1}{\mu} \qquad L = N - \frac{\lambda}{\mu}$

per il valore atteso W del tempo speso nel sistema ricaviamo la seguente espressione:

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Otteniamo inoltre per W_q ed L i seguenti valori:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$L = N - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

OSSERVAZIONE

$\lambda \geq \mu$ essendo la velocità di arrivo superiore alla velocità di servizio, le dimensioni della coda crescerebbero a dismisura fino a diventare infinitamente grande.

$\lambda < \mu$ in questo caso è possibile ricavare la distribuzione di probabilità del tempo di attesa.

Data *T*, variabile causale tempo di attesa, comprendente il servizio di un *arrivo* causale, e supposto che tale *arrivo* trovi in fila prima di lui *n-1* utenti, quindi trovi il sistema nello stato E_{n-1} , avremo per il teorema delle probabilità totali:

$$\Pr(T > t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \Pr(T > t | E_n) = e^{-\mu(1-\rho)t}$$

e quindi

$$f_T(t) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad \text{per } t \geq 0$$

Il tempo speso nel sistema ha quindi una distribuzione di tipo esponenziale con parametro ($\mu - \lambda$).

SISTEMI M /M /1 /K

L'ipotesi che il sistema di file di attesa possa accomodare un numero comunque grande di clienti in attesa di essere serviti non può mai essere verificata. Tuttavia, se è sufficientemente piccola la probabilità che il numero di clienti nel sistema superi il numero massimo per cui è disponibile spazio, l'ipotesi di coda illimitata può essere accettata.
Supponiamo ora che la coda sia limitata, ossia che il numero massimo di clienti che possono stare contemporaneamente nel sistema sia *K*.
Supponiamo inoltre che l'intervallo tra arrivi consecutivi sia esponenziale con parametro γ e che un cliente che al suo arrivo trovi il sistema nello stato E_K abbandoni il sistema cercando servizio altrove senza alterare la distribuzione degli arrivi. Ciò equivale ad assumere che sia nulla la probabilità di transizione $P_{K,K+1}(\Delta t)$.

Pertanto il processo in esame è un processo di nascita e morte in cui risulti:

$$\lambda_n = \begin{cases} \gamma & 0 \leq n \leq K-1 \\ 0 & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu \qquad n=1,2,3,\ldots$$

In questo caso avremo:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{K}\frac{\prod_{n=0}^{n-1}\lambda_n}{\prod_{n=1}^{n}\mu_n}} = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^i}$$

quindi

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\frac{\gamma}{\mu}}\right]} = \frac{1-\frac{\gamma}{\mu}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} =$$

Inoltre

$$P_i = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^i P_0 & 1 \leq i \leq K \\ 0 & i \geq K \end{cases}$$

Si noti che γ non rappresenta l'effettiva frequenza media degli arrivi al sistema, visto che tiene conto anche degli arrivi che non entrano nel sistema quando lo trovano nello stato E_K.
Ora ricaviamo

$$\lambda = \frac{1}{E(t_a)} = \mu\rho = \mu(1-P_0) =$$

sostituendo il valore trovato sopra per P_0

$$\lambda = \mu\left[1-\left(\frac{1-\frac{\gamma}{\mu}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}\right)\right] = \mu\left[\frac{\frac{\gamma}{\mu}-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}\right] = \left[\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}\right]\cdot\gamma = \varepsilon\cdot\gamma$$

dove

$$\varepsilon = \frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \quad < \quad 1$$

Quest'ultima si interpreta come la frazione dei potenziali clienti del sistema che può effettivamente essere servita.
La rimanente parte dei clienti, detta *fattore di perdita* = $(1-\varepsilon)$, va appunto persa.

Si osservi che

$$P_K = 1-\varepsilon$$

facilmente interpretabile visto che ci dice che la frazione dei clienti persi è uguale alla probabilità che il sistema sia nello stato K .
E' facile notare che mentre risulta sempre

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

nel caso in esame non è affatto richiesto che sia

$$\frac{\gamma}{\mu} < 1$$

Questo perché la condizione di stazionarietà si riduce in questo caso ad una somma di un numero finito di termini quindi risulta sempre soddisfatta.

Esiste una *proprietà di autoregolazione* di tale sistema che, escludendo un certo numero di clienti, porta la frequenza effettiva degli arrivi ad essere minore di quella di completamento dei servizi.
Date le P_i viste sopra, calcoliamo il valore atteso del numero dei clienti nel sistema come segue:

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} iP_i = \sum_{i=1}^{K} i\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{i} P_0 = \frac{\gamma}{\mu} P_0 \sum_{i=1}^{K} i\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{i-1} = \frac{\gamma}{\mu} P_0 \frac{d}{d\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} \sum_{i=0}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{i} =$$

Ricordando che

$$\sum_{i=0}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{i} - \sum_{i=K+1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{i} = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{\mu}} - \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\frac{\gamma}{\mu}}$$

e sostituendo il valore di P_0 trovato in precedenza avremo

$$N = \frac{\gamma}{\mu} P_0 \left[\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1-\frac{\gamma}{\mu}\right)^{2}} - (K+1)\frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K}}{1-\frac{\gamma}{\mu}} \right] =$$

$$N = \frac{\frac{\gamma}{\mu}}{1-\frac{\gamma}{\mu}} - \frac{(K+1)\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}$$

Sistemi M /M / S

Si consideri un sistema di file d'attesa con *arrivi poissoniani* ed *S serventi*, ciascuno dotato di una densità di probabilità esponenziale del tempo di servizio con parametro μ.
Se un servente è occupato al tempo t, la probabilità che il servizio termini nell'intervallo $(t+\Delta t)$ è

$$\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

Se all'istante t risultano occupati n serventi $(n \leq S)$, allora la probabilità di transizione

$$P_{n,n-1}(\Delta t) = n\mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$$

Il tempo di servizio di un'unità ha una distribuzione *esponenziale* con media $\left(\frac{1}{\mu}\right)$.
Questa distribuzione di tempo di servizio è la medesima, indipendentemente da quale degli *S serventi* presta servizio all'unità di arrivo.

μ_n : velocità media di servizio per tutto il sistema di code; altro non è che la velocità media alla quale le unità servite abbandonano il sistema.
Essa <u>dipende</u> dallo stato E_n del sistema.

La velocità media di servizio per ogni servente impegnato è pari a $\mu \Rightarrow$ la velocità complessiva di servizio sarà

$$\mu_n = n\mu \quad \text{per } n \leq s$$

Tuttavia, se $n > s$, cioè se tutti i *serventi* sono occupati, sarà

$$\mu_n = s\mu$$

Questo è un particolare *processo di nascita e morte* caratterizzato da avere:

$$\lambda_n=\lambda \qquad \text{per } n=0,1,2,\ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \leq n \leq s \\ & \text{per} \\ s\mu & n \geq s \end{cases}$$

Verificando la stazionarietà troviamo che risulta soddisfatta se e solo se $\lambda < s\mu$.
Prendendo per vera tale condizione avremo che sarà

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\prod_{n=0}^{i-1}\lambda_n}{\prod_{n=1}^{i}\mu_n}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i=s}^{\infty}\frac{1}{s!}\frac{1}{s^{i-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} =$$

risolvendo otteniamo (per ulteriori spiegazioni sulla risoluzione vedi Osservazioni a seguire)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^i}_{\text{serie geometrica}}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{s\mu}{s\mu-\lambda}}$$

Avremo inoltre

$$P_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \qquad 1 \le i \le s$$

per

$$P_i = \frac{1}{s!}\frac{1}{s^{i-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \qquad i \ge s$$

Andiamo ora a calcolarci il valore atteso della lunghezza della coda:

$$L = \sum_{i=s}^{\infty}(i-s)P_i = \sum_{k=0}^{\infty}kP_{s+k} = \sum_{k=0}^{\infty}k\frac{1}{s!}\frac{1}{s^k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+k}P_0 = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k =$$

$$\Uparrow$$
$$i=k+s$$

$$L = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\rho^k = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Ora usando le relazioni fondamentali si ottengono gli altri Valori Attesi:

$$W_q = \frac{L}{\lambda} \qquad W = \frac{L}{\lambda}+\frac{1}{\mu} \qquad N = \lambda\cdot W = L+\frac{\lambda}{\mu}$$

Si osservi che la probabilità che un cliente debba attendere è uguale alla probabilità che egli trovi nel sistema un numero di clienti maggiore o uguale al numero di serventi:

$$\Pr(t_q > 0) = \sum_{i=s}^{\infty} P_i = \sum_{i=s}^{\infty} \frac{1}{s!}\frac{1}{s^{i-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \frac{P_0}{1-\rho}$$

OSSERVAZIONE

Sviluppiamo il denominatore della P_0 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{n=0}^{i-1} \lambda_n}{\prod_{n=1}^{i} \mu_n}$

Di questo sviluppiamo solo il denominatore, visto che il numeratore è sempre uguale a λ^i

$$\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{i}\mu_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{s-1}\prod_{n=1}^{i}\mu_n}_{\text{A}} + \underbrace{\sum_{i=s}^{\infty}\prod_{n=1}^{i}\mu_n}_{\text{B}} =$$

Sviluppiamo separatamente i due addendi

A $\displaystyle\sum_{i=1}^{s-1}\prod_{n=1}^{i}\mu_n = \sum_{i=1}^{s-1} i!(\mu)^i$

B $(i \leq s)$ $\displaystyle\sum_{i=S}^{\infty}\left(\prod_{n=1}^{i} n\mu \cdot \prod_{i>S} S\mu\right) = \sum_{i=S}^{\infty}\left(S!\mu^S \cdot (S\mu)^{i-S}\right) = \sum_{i=S}^{\infty} S!S^{i-S}(\mu)^i$

B $(i = s)$ $\displaystyle\prod_{n=1}^{S} n\mu = S!\mu^S$

B $(i=s+1)$ $\displaystyle\prod_{n=1}^{S} n\mu \cdot S\mu = S!\mu^S(S\mu)$

B $(i= s+2)$ $\displaystyle\prod_{n=1}^{S} n\mu \cdot \prod_{k=1}^{2}(S\mu)^k = S!\mu^S(S\mu)^2$

B $(i= s+h)$ $\displaystyle\prod_{n=1}^{S} n\mu \cdot \prod_{k=1}^{h}(S\mu)^k = S!\mu^S(S\mu)^{i-S}$

Inoltre

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_n}{\prod_{j=1}^{n}\mu_n} P_0$$ dove si avrà

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad\qquad n \le s$$

per

$$P_n = \frac{1}{S!}\frac{1}{S^{n-S}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad\qquad n \ge s$$

Calcoliamo anche la

$$L = \sum_{i=S}^{\infty}(i-S)P_i \underset{\substack{\Uparrow \\ i=k+S}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} kP_{S+k} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{1}{S!}\frac{1}{S^k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{S+k} P_0 = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^k =$$

$$L = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \frac{\frac{\lambda}{S\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{S\mu}\right)^2} P_0$$