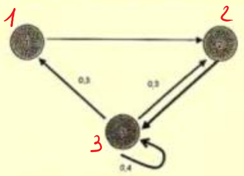
ESERCIZIO

Il sistema manifatturiero che si vuole esaminare è rappresentato in figura. Nel sistema sono presenti 4 pezzi; tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. Il tempo di servizio dei vari centri sono rispettivamente 3 minuti per il centro1, 2 minuti per 2, 50 pezzi/ora per 3.
Il centro 1 è l'unico dotato di tre serventi ed è il centro di riferimento.



$P(4,1,2)$

1_ Quanto tempo spende in attesa un cliente nel centro 3? W_{q3}
2_ Scrivere l'equazione di equilibrio dello stato (4,1,2)
3_ Quanto tempo mediamente un cliente spende in coda nell'intero sistema? W_q

$$\frac{1}{\mu_1} = 3' \rightarrow \mu_1 = \frac{1}{3}\ p/m$$

$$\frac{1}{\mu_2} = 2' \rightarrow \mu_2 = \frac{1}{2}\ p/m$$

$$\mu_3 = 50\ p/h \rightarrow 0{,}833\ p/m$$

$S_1 = 3$ SERVENTI

È ANCHE CENTRO DI RIFERIMENTO

Calcolo i V

$$V_1 = 1 \qquad V_2 = V_1 + 0{,}3\,V_3 \qquad V_3 = 0{,}4\,V_3 + V_2$$

$$\begin{cases} V_2 = 1 + 0{,}3\,V_3 \\ 0{,}6\,V_3 = V_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}3\,V_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = 1 \\ V_3 = 3{,}3 \\ 0{,}6\,(3{,}3) = V_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = 1 \\ V_3 = 3{,}3 \\ V_2 = 2 \end{cases}$$

Calcolo X_i

$$X_1 = \frac{V_1}{\mu_1} = \frac{1}{1/3} = 1 \cdot 3 = 3\ p/m$$

$$X_2 = \frac{V_2}{\mu_2} = \frac{2}{1/2} = 2 \cdot 2 = 4\ p/m$$

$$X_3 = \frac{V_3}{\mu_3} = \frac{3{,}3}{0{,}833} = 4\ p/m$$

Calcolo le f di Gordon

$$f_2(0) = 1 \quad f_2(1) = X_2^{n_1} = 4^1 = 4 \quad f_2(2) = 4^2 = 16 \quad f_2(3) = 4^3 = 64 \quad f_2(4) = 4^4 = 256$$

$$f_3(0) = 1 \quad f_3(1) = X_3^{n_1} = 4^1 = 4 \quad f_3(2) = 4^2 = 16 \quad f_3(3) = 4^3 = 64 \quad f_3(4) = 4^4 = 256$$

$$f_1(0) = 1 \quad f_1(1) = 3^1 = 3 \quad f_1(2) = \frac{3^2}{2!} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \quad f_1(3) = \frac{3^3}{3!} = \frac{27}{6} = 4{,}5 \quad f_1(4) = \frac{3^4}{3!\,3} = \frac{81}{18} = 4{,}5$$

Tabella per fattore di normalizzazione $G(M,N)$

G(M,N)	(1)	(1,2)	(1,2,3)
0	1	1	1
1	3	7	11
2	4,5	32,5	76,5
3	4,5	134,5	440,5
4	4,5	542,5	2304,5

$$G(2,2) = 4{,}5 \cdot 1 + 3 \cdot \overset{4}{f_2(1)} + 1 \cdot \overset{16}{f_2(2)} = 32{,}5$$

$$G(2,3) = 4{,}5 \cdot f_2(0) + f_1(2) \cdot f_2(1) + f_1(1) \cdot f_2(2) + f_1(0) \cdot f_2(3)$$

$$4{,}5 \cdot 1 + 4{,}5 \cdot 4 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 64 = 134{,}5$$

$$G(2,4) = 4{,}5 \cdot f_2(0) + 4{,}5 \cdot f_2(1) + 4{,}5 \cdot f_2(2) + 3 \cdot f_2(3) +$$

$$+ 1 \cdot f_2(4) = 4{,}5 \cdot 1 + 4{,}5 \cdot 4 + 4{,}5 \cdot 16 + 3 \cdot 64 + 256 = 542{,}5$$

$$G(3,2) = 32{,}5 \cdot f_3(0) + 7 \cdot f_3(1) + f_3(2) = 32{,}5 + 7 \cdot 4 + 16 = 76{,}5$$

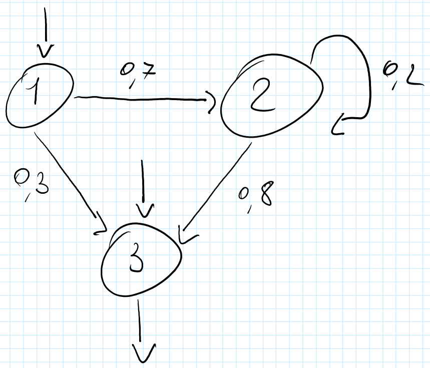
$$G(3,3) = 134{,}5 \cdot f_3(0) + 32{,}5 \cdot f_3(1) + 7 \cdot f_3(2) + f_3(3) = 134{,}5 + 32{,}5 \cdot 4 + 7 \cdot 16 + 64 = 440{,}5$$

$$G(3,4) = 542{,}5 \cdot f_3(0) + 134{,}5 \cdot f_3(1) + 32{,}5 \cdot f_3(2) + 7 \cdot f_3(3) + f_3(4) =$$

$$542{,}5 + 134{,}5 \cdot 4 + 32{,}5 \cdot 16 + 7 \cdot 64 + 256 = 542{,}5 + 538 + 520 + 448 + 256 = 2304{,}5$$

CALCOLO X_e

$$X_e = \frac{440,5}{2304,5} = 0,19$$



$\mu_1 = 20\ p/m$
$\mu_2 = 40\ p/m$
$\mu_3 = p/m \Leftrightarrow S_3 = 2$
$\lambda_1 = \gamma$
$\lambda_3 = 2\lambda_1 = 2\gamma$

$$X_e = \frac{X_T}{3}$$

$P(2,0,0) = ?$
$W_{q2} = ?$
Eq. DI EQUILIBRIO PER LO STATO $(1,1,3)$

CALCOLO I λ'

$\lambda'_1 = \gamma \rightarrow \lambda'_1 = \gamma \rightarrow \lambda'_1 = \gamma$

$\lambda'_2 = 0,7\lambda'_1 + 0,2\lambda'_2 \rightarrow \lambda'_2 = 0,7\gamma + 0,2\lambda'_2 \rightarrow 0,8\lambda'_2 = 0,7\gamma \rightarrow \lambda'_2 = 0,875\gamma$

$\lambda'_3 = 0,3\lambda'_1 + 0,8\lambda'_2 + 2\gamma \rightarrow \lambda'_3 = 0,3\gamma + 0,8(0,7\gamma + 0,2\lambda'_2) + 2\gamma \rightarrow \lambda'_3 = 0,3\lambda'_1 + 0,8(0,7\gamma + 0,175\gamma) + 2\gamma$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda'_1 &= \gamma\\ \lambda'_2 &= 0,875\gamma\\ \lambda'_3 &= 3\gamma\end{aligned}}$$

X_e = SOMMA λ ESTERNI $= \lambda_1 + \lambda_3 = 3\gamma$

$\lambda'_1 < S_i\mu_i = \gamma < 1 \cdot 20 \rightarrow \gamma < 20$
$\lambda'_2 < S_i\mu_i = \gamma < 1 \cdot 40 \rightarrow \gamma < 40$
$\lambda'_3 < S_i\mu_i = 3\gamma < 2 \cdot 10 \rightarrow \gamma < 6,6$

CALCOLO IL VISIT COUNT

$V_1 = \frac{\cancel{\gamma}}{3\cancel{\gamma}} = \frac{1}{3} \rightarrow V_1 = 0,3$

$V_2 = \frac{0,875\cancel{\gamma}}{3\cancel{\gamma}} = 0,3$

$V_3 = \frac{3\cancel{\gamma}}{3\cancel{\gamma}} = 1$

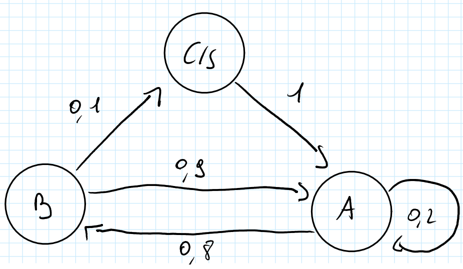
$$X_T = \min\left\{\frac{20}{0,3}; \frac{40}{0,3}; \frac{10 \cdot 2}{1}\right\} = 20\ p/m$$ STAZIONE 3

LA STAZIONE 3 È IL COLLO DI BOTTIGLIA CON $20\ p/m$

$X_e = \frac{X_T}{3} \rightarrow 3\gamma = \frac{20}{3} \rightarrow \gamma = \frac{20}{9} \rightarrow \gamma = 2,2\ p/m$

CALCOLO W_{q2}

$$W_{q2} = \frac{\rho_2}{\mu_2 - \lambda'_2} - \frac{\rho_2}{\mu_2} \longrightarrow \frac{0,3}{40 - 0,875} - \frac{0,3}{40} = 0,0003'$$



$N = 4$

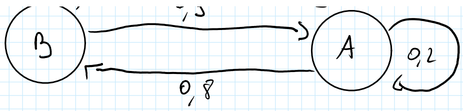
$S_{C/S} = S_A = 1$
$S_B = 3$

$\frac{1}{\mu_{C/S}} = 3h \rightarrow \mu_{C/S} = 0,3\ p/h$

$\frac{1}{\mu_A} = 4h \rightarrow \mu_A = 0,25\ p/h$

$\mu_B = 0,4\ 1/h$

DOMANDE



$\mu_B = 0{,}4 \ 1/h$

DOMANDE

X_R e X_T in minuti?

$P(0,0,4)$?

$L_B = $?

Calcolo V_S

$V_{c/s} = 1$

$V_A = V_{c/s} \cdot 1 + 0{,}9 V_B + 0{,}2 V_A \rightarrow 0{,}8 V_A = V_{c/s} + 0{,}9 V_B \rightarrow 0{,}8 V_A = 1 + 0{,}9(10) \rightarrow 0{,}8 V_A = 10 \rightarrow V_A = 12{,}5$

$V_B = 0{,}8 V_A \rightarrow V_B = 0{,}8 \left(\frac{1 + 0{,}9 V_B}{0{,}8}\right) \rightarrow V_B = 0{,}8 \left(1{,}25 + 1{,}125 V_B\right) \rightarrow V_B = 1 + 0{,}9 V_B \rightarrow 0{,}1 V_B = 1 \rightarrow V_B = 10$

Calcolo X_S

$X_{c/s} = \frac{V_{c/s}}{\mu_{c/s}} = \frac{1}{0{,}3} = 3{,}3 \ h \rightarrow \frac{3{,}3}{60} = 0{,}055'$

$X_A = \frac{V_A}{\mu_A} = \frac{12{,}5}{0{,}25} = 50 \ h \rightarrow \frac{50}{60} = 0{,}83'$

$X_B = \frac{V_B}{\mu_B} = \frac{10}{0{,}4} = 25 \ h \rightarrow \frac{25}{60} = 0{,}42'$

Calcolo $f_S(n_S)$

$f_{c/s}(0) = 1 \quad f_{c/s}(1) = 0{,}055^1 = 0{,}055 \quad f_{c/s}(2) = 0{,}055^2 = 0{,}003 \quad f_{c/s}(3) = 0{,}055^3 = 0{,}0002 \quad f_{c/s}(4) = 0{,}055^4 = 0{,}00001$

$f_A(0) = 1 \quad f_A(1) = 0{,}83^1 = 0{,}83 \quad f_A(2) = 0{,}83^2 = 0{,}69 \quad f_A(3) = 0{,}83^3 = 0{,}57 \quad f_A(4) = 0{,}83^4 = 0{,}48$

$f_B(0) = 1 \quad f_B(1) = 0{,}42^1 = 0{,}42 \quad f_B(2) = \frac{0{,}42^2}{2!} = 0{,}09 \quad f_B(3) = \frac{0{,}42^3}{3!} = 0{,}012 \quad f_B(4) = \frac{0{,}42^4}{3! \, 3^{4-3}} = 0{,}002$

Calcolo il fattore di normalizzazione $G(M,N)$

$G(M,N)$	A	A,B	A,B,C/S
0	1	1	1
1	0,83	1,25	1,305
2	0,69	1,13	1,203
3	0,57	0,96	1,03
4	0,48	0,792	0,85

$G(2,1) = f_A(0) \cdot f_B(1) + f_A(1) \cdot f_B(0) = 0{,}83 + 0{,}42 = 1{,}25$

$G(3,1) = f_A(0) \cdot f_B(0) \cdot f_{c/s}(1) + f_A(0) \cdot f_B(1) \cdot f_{c/s}(0) +$
$+ f_A(1) \cdot f_B(0) \cdot f_{c/s}(0) = 0{,}83 + 0{,}42 + 0{,}055 = 1{,}305$

$G(2,2) = 0{,}69 \cdot \underset{1}{f_B(0)} + f_A(1) \cdot f_B(1) + f_B(2) =$

$= 0{,}69 + 0{,}35 + 0{,}09 = 1{,}13$

$G(2,3) = 0{,}57 + 0{,}69 \cdot f_B(1) + 0{,}83 \cdot f_B(2) + f_B(3)$

$= 0{,}57 + 0{,}3 + 0{,}075 + 0{,}012 = 0{,}96$

$G(2,4) = 0{,}48 + 0{,}57 \cdot f_B(1) + 0{,}69 \cdot f_B(2) + 0{,}83 \cdot f_B(3) + f_B(4)$

$= 0{,}48 + 0{,}24 + 0{,}06 + 0{,}01 + 0{,}002 = 0{,}792$

$G(3,2) = 1{,}13 \cdot f_{c/s}(0) + 1{,}25 \cdot f_{c/s}(1) + f_{c/s}(2) = 1{,}13 + 0{,}07 + 0{,}003 = 1{,}203$

$G(3,3) = 0{,}96 \cdot f_{c/s}(0) + 1{,}13 \cdot f_{c/s}(1) + 1{,}25 \cdot f_{c/s}(2) + f_{c/s}(3) = 0{,}96 + 0{,}062 + 0{,}004 + 0{,}0002 = 1{,}03$

$G(3,2) = 1{,}13 \cdot f_{cs}(0) + 1{,}25 \cdot f_{cs}(1) + f_{cs}(2) = 1{,}13 + 0{,}07 + 0{,}003 = 1{,}203$

$G(3,3) = 0{,}96 \cdot f_{cs}(0) + 1{,}13 \cdot f_{cs}(1) + 1{,}25 \cdot f_{cs}(2) + f_{cs}(3) = 0{,}96 + 0{,}062 + 0{,}004 + 0{,}0002 = 1{,}03$

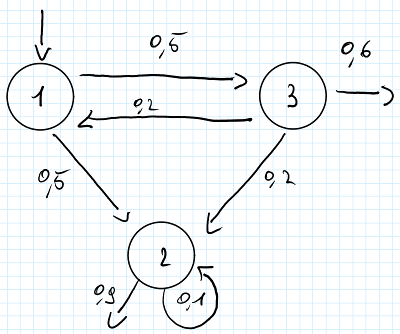
$G(3,4) = 0{,}792 + 0{,}96 \cdot f_{cs}(1) + 1{,}13 \cdot f_{cs}(2) + 1{,}25 \cdot f_{cs}(3) + f_{cs}(4) = 0{,}792 + 0{,}053 + 0{,}0034 + 0{,}00025 + 0{,}00001 = 0{,}85$

$G(3,4) = G(M,N) = 0{,}85$

Calcolo X_R

$$X_R = \frac{G(M,N-1)}{G(M,N)} = \frac{1{,}03}{0{,}85} = 1{,}21 \ p/m$$

$$X_T = \min\left\{\frac{s_i \cdot \mu_s}{V_s}\right\} \quad \begin{array}{ccc} cs & A & B \\ \left\{ \frac{0{,}3}{1} \right. & \frac{0{,}25}{12{,}5} & \left. \frac{3 \cdot 0{,}4}{10} \right\} \\ 0{,}3 & 0{,}02 & 0{,}12 \end{array}$$



$\lambda_1 = 10$

$\mu_1 = 10 \ p/m$

$\mu_2 = 20 \ p/m$

$\mu_3 = 25 \ p/m$

$S_2 = S_3 = 1$

$S_1 = 3$

DOMANDE

$X_R \uparrow \quad X_T \uparrow$

$P(4,2,1)$?

w ?

Calcolo λ'

$\lambda'_1 = \lambda_1 + 0{,}2\lambda'_3 \rightarrow \lambda'_1 = 10 + 0{,}2(5{,}5) = 11{,}1 \ p/m$

$\lambda'_2 = 0{,}5\lambda'_1 + 0{,}2\lambda'_3 + 0{,}1\lambda'_2 \rightarrow 0{,}9\lambda'_2 = 0{,}5\lambda'_1 + 0{,}2\lambda'_3 \rightarrow 0{,}9\lambda'_2 = 0{,}5(11{,}1) + 0{,}2(5{,}5) \rightarrow \lambda'_2 = \frac{6{,}66}{0{,}9} = 7{,}4 \ p/m$

$\lambda'_3 = 0{,}5\lambda'_1 \rightarrow \lambda'_3 = 0{,}5(\lambda_1 + 0{,}2\lambda'_3) \rightarrow \lambda'_3 = 0{,}5\lambda_1 + 0{,}1\lambda'_3 \rightarrow 0{,}9\lambda'_3 = 0{,}5(10) \rightarrow \lambda'_3 = 5{,}5 \ p/m$

Calcolo il visit count

$V_1 = \frac{\lambda'_1}{\lambda} = \frac{11{,}1}{10} = 1{,}11$

$V_2 = \frac{\lambda'_2}{\lambda} = \frac{7{,}4}{10} = 0{,}74$

$V_3 = \frac{\lambda'_3}{\lambda} = \frac{5{,}5}{10} = 0{,}55$

X_R = somma λ esterni = 10 p/m

$$X_T = \min\left\{\frac{s_s\,\mu_s}{V_s}\right\} = \left\{\frac{3 \cdot 10}{1{,}11} \ ; \ \frac{20}{0{,}74} \ ; \ \frac{25}{0{,}55}\right\}$$

27,03   27,03   45,45

46,405   45,44

Verifico condizione di stazionarietà

$X_R < X_T \qquad 10 < 27{,}03 \qquad$ OK

$X_R \uparrow \quad X_T \uparrow$

Per aumentare X_R aumento i λ dell'esterno sempre però rimanendo nelle condizione di stazionarietà.

$X_R < X_T - \varepsilon$ posso aumentare di questo voglio ma sempre mantenendo X_R minore di $27{,}03 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$

Per aumentare X_T porto i colli di bottiglia al prossimo collo di bottiglia aumentando μ

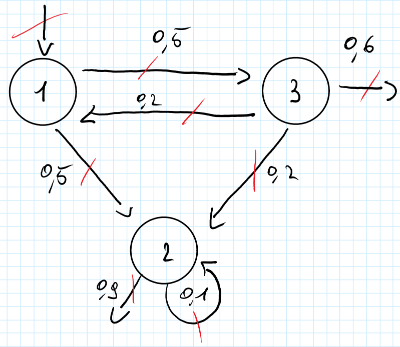
$X_R < X_T - \varepsilon$ posso aumentare di questo valore ma sempre mantenendo X_R minore di $27{,}03 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$

Per aumentare X_T porto i colli di bottiglia al prossimo collo di bottiglia aumentando μ

$$\frac{45{,}45 \cdot 1{,}11}{3} \qquad 45{,}45 = \frac{S_3\, \mu_1^*}{V_3} = \frac{45{,}45 \cdot V_1}{S_1} = \mu_1^* = 16{,}8$$

$$\mu_2^* = \frac{45{,}45 \cdot V_2}{1} = 45{,}45 \cdot 0{,}74 = 33{,}63$$

Eq. EQUILIBRIO $P(4,2,1)$



USCITE = ENTRATE

$$\text{USCITE} = \big(\lambda_1 + 3(0{,}5\,\mu_1) + 3(0{,}5\,\mu_1) + 0{,}2\,\mu_3 + 0{,}2\,\mu_3 + 0{,}6\,\mu_3 + 0{,}8\,\mu_2\big) \cdot P(4,2,1)$$

$$\text{ENTRATE} = \lambda_1 \cdot P(3,2,1) + 3(0{,}5\,\mu_1)\,P(5,2,0) + 3(0{,}5\,\mu_1)\,P(5,1,1) + 0{,}6\,\mu_3\,P(4,2,2) + 0{,}2\,\mu_3\,P(3,2,2) + 0{,}2\,\mu_3\,P(4,1,2) + 0{,}8\,\mu_2\,P(4,3,1) + 0{,}1\,\mu_2\,P(4,2,1)$$

CALCOLO IL TEMPO TOTALE SPESO NEL SISTEMA

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}104 = 0{,}234'$$

$$W_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2'} = \frac{1}{20 - 7{,}4} = \frac{1}{12{,}6} = 0{,}08'$$

$$W_3 = \frac{1}{\mu_3 - \lambda_3'} = \frac{1}{25 - 5{,}5} = \frac{1}{19{,}5} = 0{,}05'$$

$$L = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{11{,}1}{3 \cdot 10} = \frac{11{,}1}{30} = 0{,}37$$

$$W_1 = \frac{L_1}{\lambda_1'} + \frac{1}{\mu_1} = \frac{0{,}04}{11{,}1} + \frac{1}{10} = 0{,}004 + 0{,}1 = 0{,}104'$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \frac{S\mu}{S\mu - \lambda}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{6}(1{,}11)^3 \frac{30}{30-11{,}1}\right] + \left[1{,}11 + \frac{1}{6}(1{,}11)^3 \frac{30}{30-11{,}1}\right] + \left[\frac{1{,}23}{2} + \frac{1}{6}(1{,}11)^3 \frac{30}{30-11{,}1}\right]}$$

1,4 1,6

$$= \frac{1}{[1 + 0{,}38] + [1{,}11 + 0{,}38] + [0{,}62 + 0{,}38]} = \frac{1}{3{,}87} = 0{,}26$$

$$L_1 = \frac{1}{6}(1{,}11)^3\, 0{,}26\, \frac{0{,}37}{(1-0{,}37)^2} = 0{,}061 \cdot 0{,}93 = 0{,}04$$