A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2014

Esercizio 1

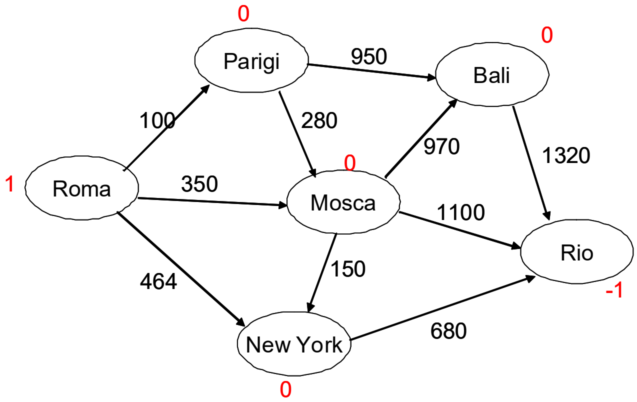
Un tifoso di calcio in partenza da Roma vuole raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale spendendo il meno possibile. Sono date le seguenti disponibilità di voli.

ID collegamento	Da	A	prezzo
1	Roma	Parigi	100
2	Roma	Mosca	350
3	Roma	New York	464
4	Parigi	Bali	950
5	Parigi	Mosca	280
6	Mosca	New York	150
7	Mosca	Bali	970
8	Mosca	Rio	1100
9	Bali	Rio	1320
10	New York	Rio	680

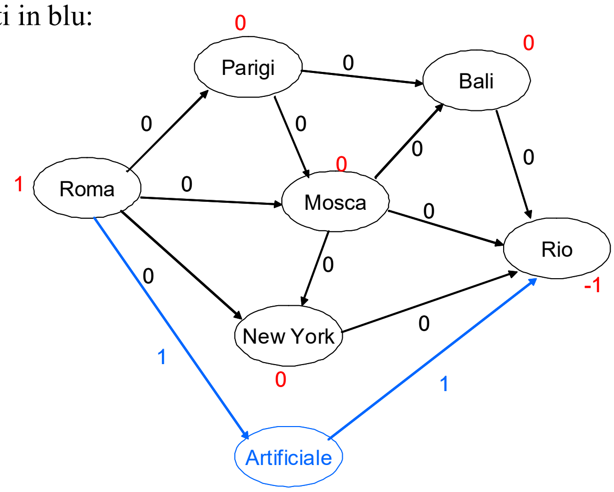
1. Formulare il problema come problema di flusso di costo minimo su una rete opportuna.
2. Trovare la soluzione ottima con l'algoritmo del simplesso su reti (fase 1 e fase 2). Si consiglia di scegliere con cura gli archi in base all'inizio della fase 1 (per es. i più economici)
3. A partire dalla precedente, trovare la nuova soluzione ottima se il costo del collegamento 5 diventa 190.

Soluzione

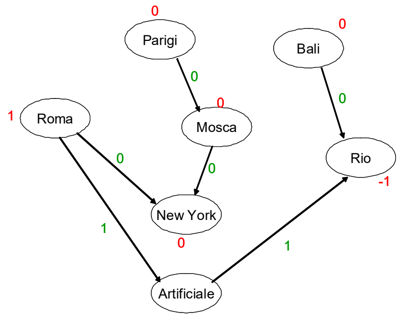
Questo è un problema di percorso minimo da Roma a Rio, che pertanto si può formulare come problema di flusso di costo minimo su una rete con nodi associati alle 6 città in tabella e archi associati ai 10 collegamenti in tabella, pesati con i rispettivi costi. Tutti i nodi della rete sono nodi di transito, ad eccezione della sorgente (Roma) e della destinazione (Rio) che hanno fornitura 1 e -1 rispettivamente. In figura la rete con le forniture dei nodi in rosso.



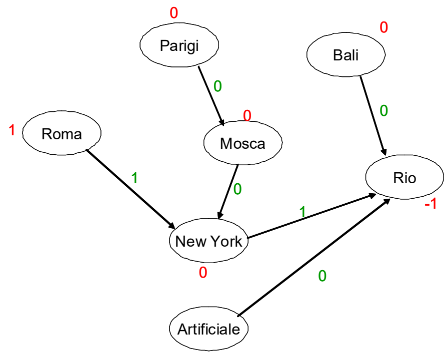
Per risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso su reti impostiamo il problema artificiale, in figura gli archi artificiali e i relativi costi in blu:



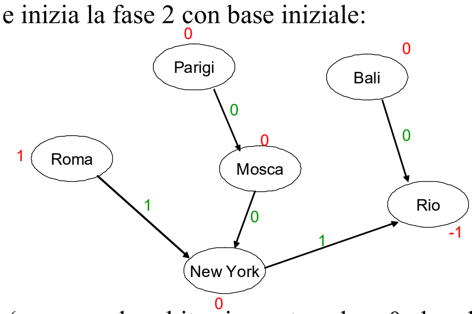
Cerchiamo una base iniziale, in base avremo i due archi artificiali più altri 4 archi della rete di partenza per formare un albero ricoprente. In figura è mostrata una possibile base iniziale, in verde i flussi degli archi in base.



Le variabili duali associate ai nodi (assegnando arbitrariamente valore 0 al nodo artificiale) sono:
Roma, New York, Mosca, Parigi: +1
Rio, Bali: -1
Verificando l'ammissibilità duale di questa soluzione sugli archi fuori base troviamo (ad esempio) un vincolo violato associato al collegamento 10 (N.Y., Rio), che quindi entra in base. Come arco uscente possiamo scegliere uno dei due archi artificiali, ad esempio (Roma, Artificiale). La nuova base (flussi in verde) è la seguente.

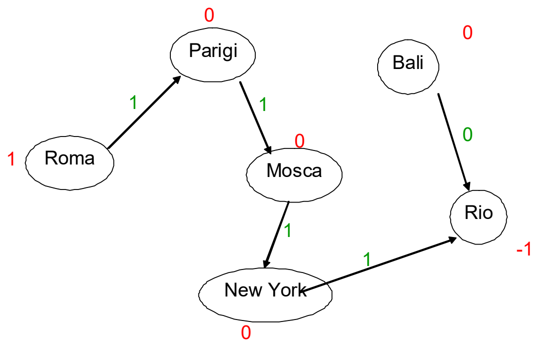


Essendo nullo il flusso su tutti gli archi artificiali abbiamo trovato una soluzione ammissibile per il problema di partenza. Quindi termina la fase 1 e inizia la fase 2 con base iniziale:



Le variabili duali associate ai nodi (assegnando arbitrariamente valore 0 al nodo N.Y.) sono:
Roma=464; New York=0; Mosca=150, Parigi=430; Rio=-680; Bali=640. Questa soluzione soddisfa tutti i vincoli duali per gli archi fuori base, ed è pertanto ammissibile duale. La SBA in figura è pertanto ottima per il problema originale. Il percorso ottimo sarà quindi **Roma→N.Y. →Rio**, di costo 1144.

Per rispondere alla seconda domanda modifichiamo in 190 il costo del collegamento Parigi→Mosca. Con questa modifica la SBA trovata (che resta ovviamente ammissibile) non verifica più le condizioni di ottimo in quanto è necessario ricalcolare le variabili duali associate ai nodi (perché è cambiato il costo di un arco in base). Sempre assegnando arbitrariamente valore 0 al nodo N.Y. si ottiene:
Roma=464; New York=0; Mosca=150, Parigi=**340**; Rio=-680; Bali=640. Verificando le condizioni di ottimo risulta violato il vincolo duale associato al collegamento Roma→Parigi (464-340≤190). Quest'arco entra quindi in base, esce Roma→N.Y. e si ottiene la nuova base:



Le variabili duali associate ai nodi (assegnando arbitrariamente valore 0 al nodo N.Y.) sono:
Roma=**440**; New York=0; Mosca=150, Parigi=340; Rio=-680; Bali=640. Questa soluzione soddisfa tutti i vincoli duali.
La SBA in figura è pertanto ottima per il problema originale, il percorso ottimo sarà quindi:
Roma→Parigi→Mosca→N.Y. →Rio, di costo 1120.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 7 nodi 1…7. Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, 7 è il nodo sorgente e 1 è il nodo pozzo.

Archi	1 , 2	2 , 5	3 , 2	3 , 6	3 , 7	4 , 1	5 , 4	5 , 6	6 , 4	6 , 1	7 , 3	7 , 6
Flussi	0	2	2	0	3	3	1	1	2	2	5	3
Capacità	3	10	7	3	5	8	2	5	4	6	9	6

1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
2. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi 7 e 1.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo se la capacità dell'arco (5, 4) è incrementata di 3 unità. Evidenziare il taglio ottimo trovato.

Soluzione

La soluzione data rispetta i vincoli del problema (bilanciamento dei flussi nei nodi di transito, flusso in ciascun arco compreso tra 0 e la capacità dell'arco), il flusso uscente dalla sorgente (entrante nel pozzo) è pari a -3+5+3=5. La ricerca di cammini aumentanti porta a trovare i cammini:

7→6→1 flusso aumentante 3, flusso totale sulla rete 8.
7→3→6→1 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 9.
7→3→6→4→1 flusso aumentante 2, flusso totale sulla rete 11.
7→3→2→5→4→1 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 12.
La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 7 porta a costruire l'albero orientato:
7←3→2→5→6 che individua il taglio $S = \{7,3,2,5,6\}$ $\overline{S} = \{4,1\}$
Gli archi del taglio diretto sono (5,4); (6,4); (4,1) di capacità 2+4+6=12, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.
Per rispondere alla terza domanda si osserva che l'arco di cui si incrementa la capacità è uno degli archi del taglio diretto minimo, che quindi aumenta a 15 la capacità del taglio $S = \{7,3,2,5,6\}$ $\overline{S} = \{4,1\}$. Il flusso 12 pertanto potrebbe non essere più massimo e si cerca, a partire da questo (che resta ammissibile) un nuovo cammino aumentante:

7←3→2→5→4→1 flusso aumentante 2, flusso totale sulla rete 14.
La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 7 porta a costruire l'albero orientato:

7←3→2→5→6
↘4

che individua il taglio $S = \{7,3,2,5,6,4\}$ $\overline{S} = \{1\}$

Gli archi del taglio diretto sono (6,1); (4,1) di capacità 6+8=14, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2014

Esercizio 1

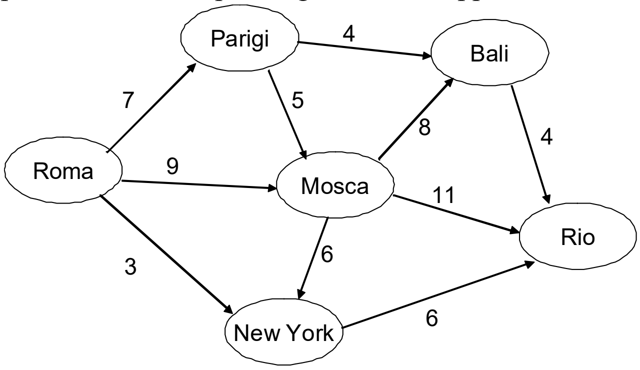
Molti tifosi di calcio in partenza da Roma vogliono raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale, tuttavia i posti disponibili sui voli sono quasi esauriti. Sono date le seguenti disponibilità di posti.

ID collegamento	Da	A	Disponibilità posti
1	Roma	Parigi	7
2	Roma	Mosca	9
3	Roma	New York	3
4	Parigi	Bali	4
5	Parigi	Mosca	5
6	Mosca	New York	6
7	Mosca	Bali	8
8	Mosca	Rio	11
9	Bali	Rio	4
10	New York	Rio	6

1. Formulare il problema di inviare quanti più tifosi possibile da Roma a Rio come un opportuno problema su reti e trovarne la soluzione ottima con un algoritmo appropriato appreso nel corso.
2. Indicare come varia la soluzione ottima se la disponibilità di posti sul collegamento 5 diventa 7.

Soluzione

Questo è un problema di massimo flusso da Roma a Rio, che pertanto si può formulare con la rete in figura, con sorgente Roma e pozzo Rio, dove i pesi sugli archi ne rappresentano le capacità.



Risolvendo il problema con l'algoritmo di Ford-Fulkerson si trovano i cammini aumentanti:

Roma→NY→Rio	flusso aumentante 3, flusso totale sulla rete 3.
Roma→Mosca→Rio	flusso aumentante 9, flusso totale sulla rete 12.
Roma→Parigi→Bali→Rio	flusso aumentante 4, flusso totale sulla rete 16.
Roma→Parigi→Mosca→Rio	flusso aumentante 2, flusso totale sulla rete 18.
Roma→Parigi→Mosca→NY→Rio	flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 19.

La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo Roma porta a costruire l'albero orientato:

Roma che individua il taglio $S =$ Roma $\overline{S} =$ Parigi, Mosca, Bali, NY, Rio.

Gli archi del taglio diretto sono (Roma,Parigi); (Roma,Mosca); (Roma,NY) di capacità 7+9+3=19, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

Per rispondere alla seconda domanda si osserva che l'arco di cui si incrementa la capacità non è uno degli archi del taglio diretto minimo, che quindi resta un taglio di capacità 19, il che limita il massimo flusso della rete. La soluzione precedente (che è ancora ammissibile) resta quindi ottima.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 8 nodi 1…8. Per ogni arco sono dati il costo di percorrenza unitario ed un flusso ammissibile iniziale.

1. Determinare la fornitura dei nodi.
2. A partire dal flusso iniziale dato, determinare un flusso ammissibile di costo minimo con l'algoritmo del simplesso su reti.

Archi	1, 3	1, 2	2, 1	1, 4	3, 7	3, 5	5, 3	3, 4	2, 5	4, 2
Flussi	3	0	2	4	1	0	0	0	0	0
Costi	1	6	12	2	-1	0	18	1	5	10
Archi	4, 5	4, 8	4, 6	6, 4	5, 6	6, 8	7, 6	7, 5	7, 8	8, 7
Flussi	6	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Costi	3	15	5	-1	5	6	12	6	18	1

Soluzione

La fornitura di un nodo è la differenza tra flusso uscente e flusso entrante nel nodo, per cui si hanno le seguenti forniture:

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8
Fornitura	5	2	-2	2	-5	0	-1	-1

Per risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso su reti si osserva preliminarmente che gli archi con flusso strettamente positivo devono essere tutti archi in base. Poiché questi formano un albero ricoprente della rete è perfettamente individuata la base iniziale del problema.
Alla prima iterazione entra in base (3,5) ed esce (1,4)
Alla seconda iterazione entra in base (2,5) ed esce (2,1)
Alla terza iterazione entra in base (4,6) ed esce (5,6). La soluzione così ottenuta è ottima.

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2014

Esercizio 1

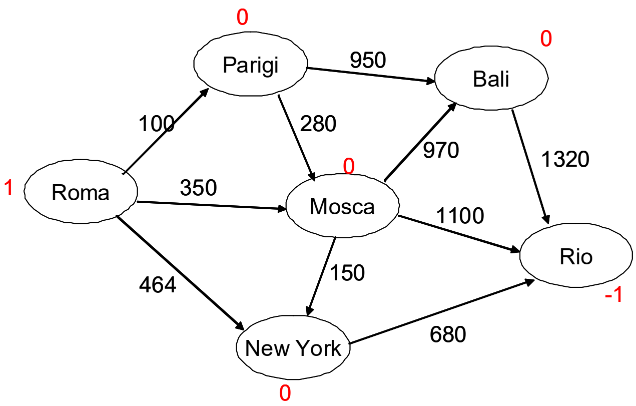
Un tifoso di calcio in partenza da Roma vuole raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale spendendo il meno possibile. Sono date le seguenti disponibilità di voli.

ID collegamento	Da	A	prezzo
1	Roma	Parigi	100
2	Roma	Mosca	350
3	Roma	New York	464
4	Parigi	Bali	950
5	Parigi	Mosca	280
6	Mosca	New York	150
7	Mosca	Bali	970
8	Mosca	Rio	1100
9	Bali	Rio	1320
10	New York	Rio	680

1. Formulare il problema come problema di programmazione lineare (non su reti).
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che il percorso Roma, New York, Rio è la soluzione ottima del problema.
3. In caso affermativo, utilizzando l'analisi di sensitività per la PL, verificare se la soluzione resta ottima quando il costo del collegamento 5 diventa 190.

Soluzione

Questo è un problema di percorso minimo da Roma a Rio, che pertanto si può formulare come problema di flusso di costo minimo su una rete con nodi associati alle 6 città in tabella e archi associati ai 10 collegamenti in tabella, pesati con i rispettivi costi. Tutti i nodi della rete sono nodi di transito, ad eccezione della sorgente (Roma) e della destinazione (Rio) che hanno fornitura 1 e -1 rispettivamente. In figura la rete con le forniture dei nodi in rosso.



Per formulare il problema come problema di PL basterà quindi scrivere la formulazione del problema di flusso di costo minimo associato:

$$\min \quad 100x_{RoP} + 350x_{RoM} + 464x_{RoN} + 950x_{PB} + 280x_{PM} + 150x_{MN} + 970x_{MB} + 1100x_{MRi} + 1320x_{BRi} + 680x_{NRi}$$

$s.v.$

$$\begin{array}{c} Roma \\ Parigi \\ Bali \\ Mosca \\ NY \\ Rio \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_{RoP} + x_{RoM} + x_{RoN} = 1 \\ -x_{RoP} + x_{PB} + x_{PM} = 0 \\ -x_{PB} - x_{MB} + x_{BRi} = 0 \\ -x_{RoM} - x_{PM} + x_{MB} + x_{MN} + x_{MRi} = 0 \\ -x_{RoN} - x_{MN} + x_{NRi} = 0 \\ -x_{BRi} - x_{MRi} - x_{NRi} = -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per rispondere alla seconda domanda è utile (ma non necessario) ricordare che questa formulazione ha un vincolo ridondante che può essere rimosso (uno qualsiasi, per esempio l'ultimo), ottenendo una formulazione di PL analoga alla precedente ma con un vincolo in meno:

$$\min \quad 100x_{RoP} + 350x_{RoM} + 464x_{RoN} + 950x_{PB} + 280x_{PM} + 150x_{MN} + 970x_{MB} + 1100x_{MRi} + 1320x_{BRi} + 680x_{NRi}$$

$s.v.$

$$\begin{array}{c} y_{Ro} \\ y_P \\ y_B \\ y_M \\ y_N \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_{RoP} + x_{RoM} + x_{RoN} = 1 \\ -x_{RoP} + x_{PB} + x_{PM} = 0 \\ -x_{PB} - x_{MB} + x_{BRi} = 0 \\ -x_{RoM} - x_{PM} + x_{MB} + x_{MN} + x_{MRi} = 0 \\ -x_{RoN} - x_{MN} + x_{NRi} = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

A questa si può associare il problema duale:

$\max \quad y_{Ro}$

$s.v.$

$$\begin{array}{c} x_{RoP} \\ x_{RoM} \\ x_{RoN} \\ x_{PB} \\ x_{PM} \\ x_{MN} \\ x_{MB} \\ x_{MRi} \\ x_{BRi} \\ x_{NRi} \end{array} \begin{cases} y_{Ro} - y_P \leq 100 \\ y_{Ro} - y_M \leq 350 \\ y_{Ro} - y_N \leq 464 \\ y_P - y_B \leq 950 \\ y_P - y_M \leq 280 \\ y_M - y_N \leq 150 \\ y_M - y_B \leq 970 \\ y_M \leq 1100 \\ y_B \leq 1320 \\ y_N \leq 680 \end{cases}$$

si vuole sapere se è ottima la soluzione: $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{RoP} \\ \bar{x}_{RoM} \\ \bar{x}_{RoN} \\ \bar{x}_{PB} \\ \bar{x}_{PM} \\ \bar{x}_{MN} \\ \bar{x}_{MB} \\ \bar{x}_{MRi} \\ \bar{x}_{BRi} \\ \bar{x}_{NRi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dalle condizioni di ortogonalità si ottiene:

$$
\begin{array}{r}
x_{RoP} \\ x_{RoM} \\ x_{RoN}>0 \\ x_{PB} \\ x_{PM} \\ x_{MN} \\ x_{MB} \\ x_{MRi} \\ x_{BRi} \\ x_{NRi}>0
\end{array}
\begin{cases}
y_{Ro}-y_P \le 100 \\
y_{Ro}-y_M \le 350 \\
y_{Ro}-y_N = 464 \\
y_P-y_B \le 950 \\
y_P-y_M \le 280 \\
y_M-y_N \le 150 \\
y_M-y_B \le 970 \\
y_M \le 1100 \\
y_B \le 1320 \\
y_N = 680
\end{cases}
\text{ che implica } y_{Ro}=464+680=1144:
\begin{cases}
1144-y_P \le 100 \\
1144-y_M \le 350 \\
1144-680 = 464 \\
y_P-y_B \le 950 \\
y_P-y_M \le 280 \\
y_M-680 \le 150 \\
y_M-y_B \le 970 \\
y_M \le 1100 \\
y_B \le 1320 \\
680=680
\end{cases}
$$

La soluzione $\bar{x}$ è ottima se e solo se questo sistema ammette una soluzione ammissibile. Allo scopo si può verificare facilmente che la soluzione $\bar{y}$ soddisfa tutti i vincoli, per cui $\bar{x}$ è ottima.

$$
\bar{y}=\begin{pmatrix} y_{Ro} \\ y_P \\ y_B \\ y_M \\ y_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1144 \\ 1110 \\ 1320 \\ 830 \\ 680 \end{pmatrix}
$$

Per rispondere alla terza domanda è sufficiente osservare che quando si modifica il costo di una variabile fuori base la soluzione resta ottima se il costo ridotto della variabile in questione (x_{PM}) resta non negativo. Il costo ridotto del collegamento Parigi-Mosca è: $\bar{c}_{PM} = c_{PM} - y^T A_{PM} = c_{PM} - (y_P - y_M) = 190 - (1110 - 830) = -90$. Poiché x_{PM} ha costo ridotto negativo la soluzione proposta non è più ottima. In effetti si può verificare che il nuovo cammino minimo è: Roma-Parigi-Mosca-New York-Rio.

Esercizio 2

State applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall ad un grafo con 5 nodi, A…E. Alla fine del passo 2 ottenete le matrici in figura (quella di sinistra indica i costi dei percorsi, quella di destra i predecessori).

passo 2	A	B	C	D	E
A	0	+∞	2	2	2
B	6	0	8	5	1
C	-1	+∞	0	1	1
D	1	-5	-1	0	-4
E	1	+∞	3	2	0

passo 2	A	B	C	D	E
A	A	A	A	A	A
B	B	B	A	B	B
C	C	C	C	C	A
D	B	D	D	D	B
E	E	E	A	E	E

1. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo, aggiornando entrambe le matrici ad ogni passo dell'esecuzione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.
2. Fissate gli elementi in posizione (A, D) = 3 e (E, D) = 4. Ripetete i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.
3. Se possibile, mostrate i cammini orientati minimi A → E e A → C per le matrici ottime ottenute ai punti 1 e 2.

Soluzione

Al passo 3 si ottiene:

passo 3	A	B	C	D	E
A	0	+∞	2	2	2
B	6	0	8	5	1
C	-1	+∞	0	1	1
D	**-2**	-5	-1	0	-4
E	1	+∞	3	2	0

passo 3	A	B	C	D	E
A	A	A	A	A	A
B	B	B	A	B	B
C	C	C	C	C	A
D	**C**	D	D	D	B
E	E	E	A	E	E

Al passo 4 si ottiene:

passo 4	A	B	C	D	E
A	0	**-3**	**1**	2	**-2**
B	**3**	0	**4**	5	1
C	-1	**-4**	0	1	**-3**
D	-2	-5	-1	0	-4
E	**0**	**-3**	**1**	2	**-2**

passo 4	A	B	C	D	E
A	A	**D**	**D**	A	**B**
B	**C**	B	**D**	B	B
C	C	**D**	C	C	**B**
D	C	D	D	D	B
E	**C**	**D**	**D**	E	**B**

L'algoritmo si arresta perché abbiamo trovato il ciclo EDBE di peso -2.

Per rispondere al punto 2 si riparte dalla tabella modificata.

Al passo 3 si ottiene:

passo 3	A	B	C	D	E
A	0	+∞	2	3	2
B	6	0	8	5	1
C	-1	+∞	0	1	1
D	**-2**	-5	-1	0	-4
E	1	+∞	3	4	0

passo 3	A	B	C	D	E
A	A	A	A	A	A
B	B	B	A	B	B
C	C	C	C	C	A
D	**C**	D	D	D	B
E	E	E	A	E	E

Al passo 4 si ottiene:

passo 4	A	B	C	D	E
A	0	**-2**	2	3	**-1**
B	**3**	0	**4**	5	1
C	-1	**-4**	0	1	**-3**
D	-2	-5	-1	0	-4
E	1	**-1**	3	4	0

passo 4	A	B	C	D	E
A	A	**D**	A	A	**B**
B	**C**	B	**D**	B	B
C	C	**D**	C	C	**B**
D	C	D	D	D	B
E	E	**D**	A	E	E

Al passo 5 si ottiene:

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	-2	2	3	-1
B	**2**	0	4	5	1
C	**-2**	-4	0	1	-3
D	**-3**	-5	-1	0	-4
E	1	-1	3	4	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	**D**	A	A	B
B	**E**	B	D	B	B
C	**E**	D	C	C	B
D	**E**	D	D	D	B
E	E	D	A	E	E

Si hanno i cammini minimi:

A →D→B → E

A → C

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2014

Esercizio 1

Molti tifosi di calcio in partenza da Roma vogliono raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale, tuttavia i posti disponibili sui voli sono quasi esauriti. Sono date le seguenti disponibilità di posti.

ID collegamento	Da	A	Disponibilità posti
1	Roma	Parigi	7
2	Roma	Mosca	9
3	Roma	New York	3
4	Parigi	Bali	4
5	Parigi	Mosca	5
6	Mosca	New York	6
7	Mosca	Bali	8
8	Mosca	Rio	11
9	Bali	Rio	4
10	New York	Rio	6

1. Formulare il problema di inviare quanti più tifosi possibile da Roma a Rio come un opportuno problema su reti e trovarne la soluzione ottima con un algoritmo appropriato appreso nel corso.
2. Indicare come varia la soluzione ottima se la disponibilità di posti sul collegamento 5 diventa 7.

Soluzione

Vedi compito A.

Esercizio 2

È dato il problema primale di PL in figura. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del primale o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 - 5x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 2 \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad x_4 \ \text{libera} \end{cases}$$

Soluzione

Problema in forma standard:

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 - 5x_4^+ + 5x_4^-$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_4^+ - 2x_4^- = 2 \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4^+ + 6x_4^- = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^- \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Problema artificiale:

$$\min \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + \phi_1 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_4^+ - 2x_4^- + \phi_2 = 2 \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4^+ + 6x_4^- \phi_3 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^- \geq 0 \end{cases}$$

Fase 1. Entra x_1 esce ϕ_1. Fine della fase 1 (z=0). Restano in base due variabili artificiali.
Passaggio dalla fase 1 alla fase 2. Esce ϕ_2 entra x_2; dopo aver aggiornato la matrice di riporto si cerca di far uscire ϕ_3 ma nessuna delle variabili x fuori base può essere utilizzata allo scopo, il che implica che il terzo vincolo è combinazione lineare dei primi due (in effetti si può verificare che $a_3^T = a_1^T - 3a_2^T$ e $b_3 = b_1 - 3b_2$). Cancellando il terzo vincolo esce di base ϕ_3 e si ha la base iniziale della fase 2, con B={1,2}.

Fase 2. Problema in forma standard

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 - 5x_4^+ + 5x_4^-$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_4^+ - 2x_4^- = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^- \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

elementi della matrice di riporto

$$A_B^{-1} = \begin{matrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{matrix} \ ; \ \bar{b} = \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \ ; \ -y^T = -5/4 \quad 7/4 \ ; \ -z = -4$$

Entra x_3 esce x_2, entra x_4^+ esce x_1, la base ottenuta è ottima, B^*={4⁺, 3}.

La soluzione ottima è pertanto: $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$

E

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2014

Esercizio 1

ArcWeb è una piccola azienda di Terni, con 6 dipendenti, specializzata nella produzione di siti web per studi di architettura e nelle prossime quattro settimane deve consegnare 14 siti di tipo A e 10 di tipo B. I siti di tipo A non possono essere lavorati dai dipendenti con la formazione attuale perché richiedono l'utilizzo del nuovo software di progettazione XXX. Pertanto un dipendente può lavorare un sito di tipo A solo dopo aver seguito un corso di formazione di una settimana e nella settimana di formazione non è produttivo. E' previsto un solo corso di formazione nella prima settimana. ArcWeb dovrà quindi decidere quanti dipendenti formare in questa settimana tenendo conto che: un sito di tipo A richiede 20 ore di lavoro, un sito di tipo B ne richiede 32, ciascun dipendente lavora 40 ore settimanali, i 10 siti di tipo B devono essere consegnati entro la fine della seconda settimana e i 14 siti di tipo A entro la fine della quarta.

1. Ipotizzando che sia possibile formare un numero frazionario di dipendenti, formulare come problema di PL il problema di completare i progetti nei tempi previsti formando il minimo numero di dipendenti nella prima settimana.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che preveda la formazione 3 dipendenti nella prima settimana, due dei quali lavoreranno ai progetti B nella seconda settimana e ai progetti A nella terza e quarta.

Soluzione

Si può formulare il problema introducendo due tipi di variabili:
n= numero di dipendenti in formazione nella settimana 1 (quindi $n \leq 6$)
x_{ij} =numero di ore lavorate ai siti di tipo *i=A,B* nella settimana *j*=1,2,3,4 (di queste variabili esistono solo $x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}, x_{B1}, x_{B2}$)
I vincoli devono includere la lavorazione di tutti i siti B entro le seconda settimana ($x_{B1} + x_{B2} = 320$)
e di tutti i siti A entro la quarta settimana e a partire dalla seconda ($x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} = 280$)
Inoltre si deve tenere conto della forza lavoro disponibile per le varie attività in ciascuna settimana:
La forza lavoro disponibile totale a settimana è 240 ore.
Nella prima settimana si può svolgere solo l'attività B e dalla forza lavoro si deve sottrarre quella indisponibile perché i dipendenti sono in formazione:

$x_{B1} \leq 240 - 40n$

Il lavoro di tipo A può essere svolto solo dai dipendenti formati:

$x_{A2} \leq 40n$

$x_{A3} \leq 40n$

$x_{A4} \leq 40n$

Nella settimana 2 è possibile svolgere entrambe le attività A e B, che devono essere complessivamente svolte dai 6 dipendenti (un dipendente formato può svolgere sia A che B)

$x_{A2} + x_{B2} \leq 240$

Quindi il problema diventa:

$$
\begin{aligned}
& \min n \\
& s.v. \\
& n \le 6 \\
& x_{B1} + x_{B2} = 320 \\
& x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} = 280 \\
& x_{A2} + x_{B2} \le 240 \\
& x_{A2} \le 40n \\
& x_{B1} + 40n \le 240 \\
& x_{A3} \le 40n \\
& x_{A4} \le 40n \\
& n, x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}, x_{B1}, x_{B2} \ge 0
\end{aligned}
$$

La seconda domanda richiede di dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima con le seguenti caratteristiche:

$$
\begin{aligned}
& n = 3 \\
& x_{B1} + x_{B2} = 320 \\
& x_{B1} \le 120 \\
& x_{B2} \le 80 + 120 \\
& x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} = 280 \\
& x_{A2} \le 40 \\
& x_{A3} \le 120 \\
& x_{A4} \le 120 \\
& n, x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}, x_{B1}, x_{B2} \ge 0
\end{aligned}
$$

il che implica:

$$
\begin{aligned}
& n = 3 \\
& x_{B1} = 120 \\
& x_{B2} = 200 \\
& x_{A2} = 40 \\
& x_{A3} = 120 \\
& x_{A4} = 120
\end{aligned}
$$

ovvero determina completamente una soluzione.

Applicando le condizioni di ortogonalità si dimostra che la soluzione data è effettivamente ottima.

Primale:

$$
\begin{aligned}
& \min n \\
& s.v. \\
& \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ \end{array}
\begin{cases}
n \le 6 \\
x_{B1} + x_{B2} = 320 \\
x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} = 280 \\
x_{A2} + x_{B2} \le 240 \\
x_{A2} - 40n \le 0 \\
x_{B1} + 40n \le 240 \\
x_{A3} - 40n \le 0 \\
x_{A4} - 40n \le 0 \\
x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}, x_{B1}, x_{B2} \ge 0
\end{cases}
\end{aligned}
\Rightarrow
$$

Duale:

$$
\begin{aligned}
& \max 6y_1 + 320y_2 + 280y_3 + 240y_4 + 240y_6 \\
& s.v. \\
& \begin{array}{l} n \\ x_{B1} \\ x_{B2} \\ x_{A2} \\ x_{A3} \\ x_{A4} \\ \end{array}
\begin{cases}
y_1 - 40y_5 + 40y_6 - 40y_7 - 40y_8 \le 1 \\
y_2 + y_6 \le 0 \\
y_2 + y_4 \le 0 \\
y_3 + y_4 + y_5 \le 0 \\
y_3 + y_7 \le 0 \\
y_3 + y_8 \le 0 \\
y_1, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8 \le 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Le condizioni di ortogonalità restituiscono 8 vincoli in quanto tutti i vincoli primali tranne il primo ed il quinto sono soddisfatti all'uguale dalle soluzione data (quindi $y_1 = 0$ e $y_5 = 0$) e tutte le variabili primali sono diverse da zero (quindi implicando che tutti i vincoli duali devono avere scarto nullo all'ottimo). Quindi la soluzione primale data è ottima se e solo se il seguente sistema ha soluzione:

$$\begin{cases} 40y_6 - 40y_7 - 40y_8 = 1 \\ y_2 + y_6 = 0 \\ y_2 + y_4 = 0 \\ y_3 + y_4 = 0 \\ y_3 + y_7 = 0 \\ y_3 + y_8 = 0 \\ y_4, y_6, y_7, y_8 \le 0 \\ y_1 = y_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40(-y_2) - 40(-y_2) - 40(-y_2) = 1 \\ y_6 = -y_2 \\ y_4 = -y_2 \\ y_3 = y_2 \\ y_7 = -y_2 \\ y_8 = -y_2 \\ y_4, y_6, y_7, y_8 \le 0 \\ y_1 = y_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_2 = \dfrac{1}{40} = y_3 \\ y_4 = y_6 = y_7 = y_8 = -\dfrac{1}{40} \\ y_1 = y_5 = 0 \end{array}$$

Poiché abbiamo trovato una soluzione ammissibile duale che soddisfa le condizioni di ortogonalità, la risposta alla seconda domanda dell'esercizio è affermativa.

Esercizio 2

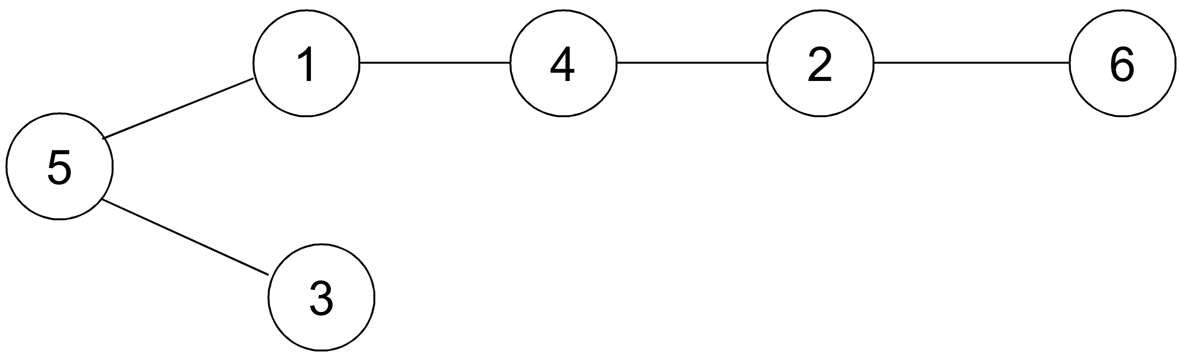
In tabella è riportata la matrice di incidenza vertici/lati di un grafo.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**l**
1	1	1	1							1		
2	1			1	1	1						1
3						1	1	1				
4		1		1					1		1	
5			1		1		1		1			
6								1		1	1	1
Costi	4	1	2	3	4	5	3	5	4	5	3	2

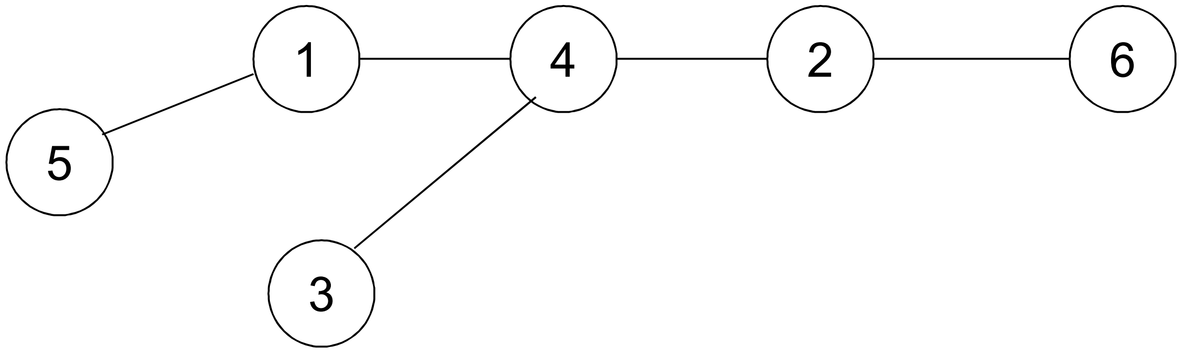
1. Trovare un albero ricoprente a costo minimo partendo dal vertice 5 tramite la versione efficiente dell'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero.
2. Partendo dal grafo in tabella, come varia la soluzione ottima se aggiungo il lato (4,3) di costo 1?
3. Partendo dal grafo in tabella con aggiunta del lato (4,3) di peso 1, esistono più alberi ricoprenti a costo minimo? Se sì, mostrarne almeno due.

Soluzione

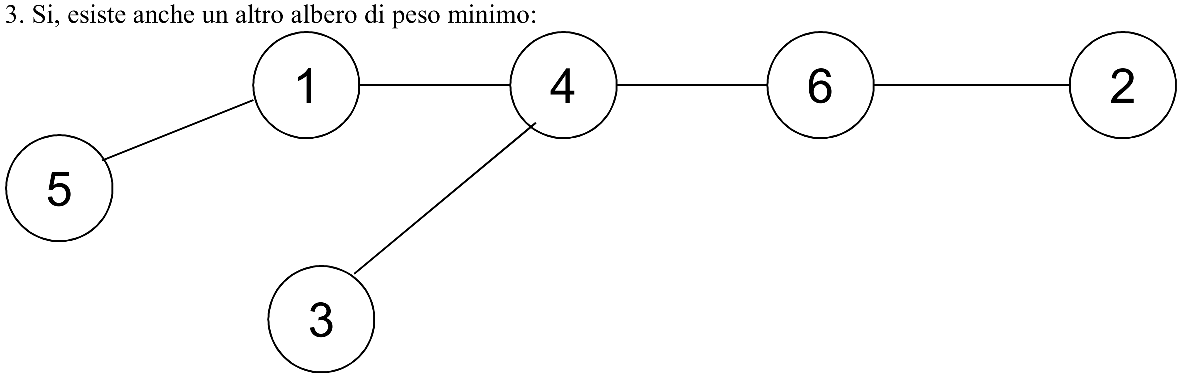
1. La soluzione ottima è l'albero in figura, ottenuto aggiungendo i nodi nella sequenza 5, 1, 4, 2, 6, 3.



2. Con il nuovo arco l'albero di peso minimo diventa:



3. Si, esiste anche un altro albero di peso minimo:



F

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2014

Esercizio 1

La Ponga Ltd è una multinazionale specializzata nella produzione di liquori derivati dalla canna da zucchero. L'ufficio legale ha 6 avvocati e segue le attività della Ponga nei diversi paesi in cui opera. Una nuova normativa sui rapporti sindacali richiede un aggiornamento dei 6 avvocati sul tema, il che può essere effettuato facendo seguire a ciascuno un corso di una settimana, durante la quale non potrà seguire le pratiche dell'ufficio. Nella prima e terza settimana si terranno due edizioni del corso, al costo di 1000 euro a formando nella prima settimana e 1200 nella terza. La Ponga dovrà quindi decidere quanti avvocati aggiornare nelle due edizioni per completare la formazione dei 6 avvocati entro la fine della terza settimana. Si tenga presente che oltre alle pratiche sindacali, che possono essere seguite solo dagli avvocati preventivamente aggiornati, l'ufficio deve seguire anche le pratiche contrattuali, che posso essere seguite senza alcun aggiornamento. Nelle prossime 3 settimane l'ufficio legale deve seguire pratiche sindacali per 120 ore di lavoro, mentre entro la fine della seconda settimana devono essere completate pratiche contrattuali per 280 ore di lavoro. Ciascun avvocato lavora 40 ore a settimana, quando non è impegnato nell'aggiornamento.

1. Ipotizzando che sia possibile formare un numero frazionario di avvocati nella prima e terza settimana, formulare come problema di PL il problema di completare il lavoro dell'ufficio nei tempi previsti aggiornando i 6 avvocati entro la terza settimana al costo di aggiornamento minimo.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che preveda l'aggiornamento di 3 avvocati nella prima settimana e 3 nella terza, lo svolgimento di tutte le pratiche sindacali nella terza settimana e lo svolgimento delle pratiche contrattuali nelle prime due.

Soluzione

Si può formulare il problema introducendo due tipi di variabili:
$n_i =$ numero di avvocati in aggiornamento nella settimana i=1,3. Quindi $n_1 + n_3 = 6$
$x_{hk} =$numero di ore dedicate a pratiche *h=s,c* (*s*=sindacali, *c*=contrattuali) nella settimana *k*=1,2,3 (di queste variabili esistono solo $x_{c1}, x_{c2}, x_{s2}, x_{s3}$)
I vincoli devono includere la lavorazione di tutte le pratiche *c* entro le seconda settimana ($x_{c1} + x_{c2} = 280$)
e tutte le pratiche *s* entro le terza settimana ($x_{s2} + x_{s3} = 120$)
Inoltre si deve tenere conto della forza lavoro disponibile per le varie attività in ciascuna settimana:
La forza lavoro disponibile totale a settimana è 240 ore.
Nella prima settimana si possono lavorare solo pratiche *c* e dalla forza lavoro si deve sottrarre quella indisponibile perché gli avvocati sono in aggiornamento:
$x_{c1} \le 240 - 40n_1$
Le pratiche sindacali essere lavorate solo da avvocati aggiornati:
$x_{s2} \le 40n_1$
$x_{s3} \le 40n_1$
Nella settimana 2 è possibile lavorare entrambe le pratiche *c* e *s*, che devono essere complessivamente svolte dai 6 avvocati (un avvocato aggiornato può lavorare entrambe le pratiche)
$x_{c2} + x_{s2} \le 240$
Nella settimana 3 si deve sottrarre la forza lavoro indisponibile perché gli avvocati sono in aggiornamento:
$x_{s3} \le 240 - 40n_3$ questo vincolo però si può omettere perché è implicato da $x_{s3} \le 40n_1$ e $n_1 + n_3 = 6$

Quindi il problema diventa:

$$\begin{aligned}
&min\, 1000n_1 + 1200n_3 \\
&s.v. \\
&n_1 + n_3 = 6 \\
&x_{c1} + x_{c2} = 280 \\
&x_{s2} + x_{s3} = 120 \\
&x_{c1} + 40n_1 \le 240 \\
&x_{s2} \le 40n_1 \\
&x_{s3} \le 40n_1 \\
&x_{c2} + x_{s2} \le 240 \\
&n_1, n_3, x_{c1}, x_{c2}, x_{s2}, x_{s3} \ge 0
\end{aligned}$$

La seconda domanda richiede di dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
&n_1 = n_3 = 3 \\
&x_{s2} = 0, \quad x_{s3} = 120 \\
&x_{c1} + x_{c2} = 280 \\
&x_{c1} \le 120 \\
&x_{c2} \le 240 \\
&x \ge 0
\end{aligned}$$

Per applicare le condizioni di ortogonalità ricaviamo il problema duale:

Primale:

$$\begin{aligned}
&min\, 1000n_1 + 1200n_3 \\
&s.v.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ \\ \end{array}
\begin{cases}
n_1 + n_3 = 6 \\
x_{c1} + x_{c2} = 280 \\
x_{s2} + x_{s3} = 120 \\
x_{c1} + 40n_1 \le 240 \\
x_{s2} - 40n_1 \le 0 \\
x_{s3} - 40n_1 \le 0 \\
x_{c2} + x_{s2} \le 240 \\
n_1, n_3, x_{c1}, x_{c2}, x_{s2}, x_{s3} \ge 0
\end{cases} \Rightarrow$$

Duale:

$$\begin{aligned}
&max\, 6y_1 + 280y_2 + 120y_3 + 240y_4 + 240y_7 \\
&s.v.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} n_1 \\ n_3 \\ x_{c1} \\ x_{c2} \\ x_{s2} \\ x_{s3} \\ \\ \end{array}
\begin{cases}
y_1 + 40y_4 - 40y_5 - 40y_6 \le 1000 \\
y_1 \le 1200 \\
y_2 + y_4 \le 0 \\
y_2 + y_7 \le 0 \\
y_3 + y_5 + y_7 \le 0 \\
y_3 + y_6 \le 0 \\
y_4, y_5, y_6, y_7 \le 0
\end{cases}$$

Dalle caratteristiche della soluzione supposta ottima segue che il quinto vincolo primale è certamente soddisfatto con la disuguaglianza stretta, quindi $y_5 = 0$. Inoltre $n_1, n_3, x_{s3} > 0$ e quindi:

$$\begin{aligned}
&y_1 + 40y_4 - 40y_5 - 40y_6 = 1000 \\
&y_1 = 1200 \\
&y_3 + y_6 = 0
\end{aligned}$$

Inoltre $\begin{matrix} x_{c1} > 0 \\ x_{c2} > 0 \end{matrix}$ e quindi $\begin{matrix} y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_7 = 0 \end{matrix}$ dalle quali segue $y_4 = y_7 = -y_2$

Però poi abbiamo le condizioni $\begin{array}{l} x_{c1}+x_{c2}=280 \\ x_{c1}\le 120 \\ x_{c2}\le 240 \\ x\ge 0 \end{array}$ che possono essere soddisfatte in più casi tra loro alternativi:

Caso 1: $x_{c1}=120, \quad x_{c2}=160<240$ che implica $x_{c2}+x_{s2}<240$ e quindi $y_7=0$.

Caso 2: $x_{c1}=40<120, \quad x_{c2}=240$ che implica $x_{c1}+120<240$ e quindi $y_4=0$.

Caso 3: $x_{c1}<120, \quad x_{c2}<240$ che implica $y_4=0$ e $y_7=0$.

Quindi in ogni caso almeno una delle due variabili y_4 o y_7 dovrà essere nulla all'ottimo. Però avendo visto in precedenza che all'ottimo $y_4=y_7$, si ha che dovranno essere entrambe nulle $y_4=y_7=0$, e quindi anche $y_2=0$.

Per cui abbiamo che esiste una soluzione con le caratteristiche richieste se e solo se il sistema seguente ammette soluzione ammissibile:

$$\begin{cases} y_1+40y_4-40y_5-40y_6=1000 \\ y_1=1200 \\ y_2+y_4=0 \\ y_2+y_7=0 \\ y_3+y_5+y_7\le 0 \\ y_3+y_6=0 \\ y_2=y_4=y_7=0 \\ y_5=0 \\ y_4,y_5,y_6,y_7\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1200-40y_6=1000 \Rightarrow y_6=5 \\ y_1=1200 \\ y_2=y_4=y_5=y_7=0 \\ y_3\le 0 \\ y_3+y_6=0 \\ y_6\le 0 \end{cases}$$

Il sistema è evidentemente incompatibile in quanto contiene i vincoli $\begin{cases} y_6=5 \\ y_6\le 0 \end{cases}$. Quindi non esiste una soluzione ottima con le caratteristiche richieste. In effetti l'ottimo del problema vale 6200 e si ottiene con la soluzione

$n_1=5, \quad n_3=1$

$x_{s2}=0, \quad x_{s3}=120$ che ha caratteristiche simili a quella proposta ma con costo inferiore.

$x_{c1}=40, \quad x_{c2}=240$

Esercizio 2

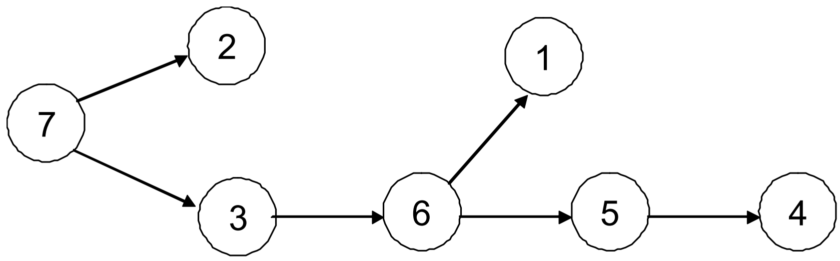
In tabella sono riportati gli archi di un digrafo pesato composto da 7 nodi 1…7. Per ogni arco sono date le distanze (*a, b*) tra il nodo testa *a* e il nodo coda *b*.

Archi	1 , 4	1 , 5	2 , 4	2 , 5	2 , 3	3 , 6	5 , 4	6 , 5	6 , 1	7 , 2	7 , 3	7 , 6
Distanze	3	2	4	1	1	2	1	3	2	6	2	7

1. Trovare l'albero dei cammini orientati di peso minimo dal nodo 7 verso tutti gli altri nodi utilizzando la versione efficiente dell'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i nodi in *S*.
2. Mostrare l'albero dei cammini orientati minimi, e calcolare il peso del percorso orientato minimo dal nodo 7 al nodo 4, e il peso del percorso orientato minimo dal nodo 7 al nodo 1.
3. Aggiungere alla tabella l'arco (6,2) di peso 3 e ripetere i punti 1 e 2 partendo dai dati in tabella.

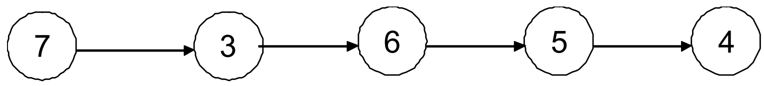
Soluzione

1. L'albero dei cammini minimi è dato in figura, ottenuto aggiungendo i nodi nell'ordine {7,3,6,[1,2],5,4}

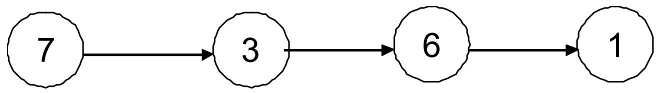


2. I due cammini minimi sono:

Peso 8



Peso 6



3. I risultati ottenuti aggiungendo un arco (6,2) di peso 3 sono invariati.