

# A-2<sup>a</sup> PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
Corso di Studi in Ingegneria Informatica  
**Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia**  
1 luglio 2016

Nome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 13 luglio ore 9:00 aula N14</b>
Cognome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 21 luglio ore 14:00 aula N14</b>
Matricola:	<input type="radio"/>	<b>Orale 8 luglio ore 14:00 (solo laureandi)</b>

## Esercizio 1

La Pharmatix è un'azienda di Anagni che produce due principi attivi, A e B, che consentono un profitto per grammo venduto di 20 e 30 euro rispettivamente. Per produrre 1 gr di principio attivo A si consumano 2 gr di materia prima M e si producono 2 gr di sottoprodotto P, mentre per produrre un grammo di principio attivo B si consumano 5 gr di P e 3 gr di M. In magazzino sono disponibili 4 kg di M e 10 kg di P.

Il sistema di controllo qualità richiede di analizzare 1 gr di A ogni 10 gr di A prodotti, e 2 gr di B ogni 10 gr di B prodotti. Si vogliono analizzare almeno 180 gr in totale dei due principi attivi.

1. Definire il modello di PL per determinare la produzione di massimo profitto, tenendo conto del fatto che il controllo qualità è distruttivo, per cui il prodotto analizzato viene distrutto e non può essere venduto.
2. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si produce esclusivamente il principio A, in magazzino resta del sottoprodotto P e viene consumata tutta la materia prima M.

## Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di una rete di flusso composta da 8 nodi  $s, 1, \dots, 6, t$ . Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare,  $s$  è il nodo sorgente e  $t$  è il nodo pozzo.

Rete	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p
s	1	1	-1	1										
1			1		-1									
2						1	-1					1	-1	
3				-1	1			-1	1	-1				
4		-1				-1	1	1	-1		1			
5	-1													1
6												-1		1
t										1	-1			-1
Capacità	4	5	2	4	1	4	3	2	1	3	6	6	3	8
Flusso	2	0	1	0	1	2	1	0	1	1	2	0	2	0

- a. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile o meno, spiegandone il motivo.
- b. Se il flusso iniziale è ammissibile, determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson a partire da quel flusso dato. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
- c. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi  $s$  e  $t$ .
- d. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto b, si determini il nuovo flusso massimo nei seguenti casi:
  - d.1. L'arco (4, 3) aumenta la sua capacità fino a 10 unità di flusso;
  - d.2. L'arco (3, 4) aumenta la sua capacità fino a 10 unità di flusso;
  - d.3. Per entrambi i casi d.1 e d.2 mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi  $s$  e  $t$ .

NB: Spiegare ogni passo dell'algoritmo.

## Domanda 3

Illustrare (1) il problema di flusso di costo minimo su una rete con  $n$  nodi e  $m$  archi; (2) la sua formulazione in forma standard  $\min\{c^T x : Ax = b; x \geq 0\}$ , spiegando le particolarità di  $A$  e  $b$ . Illustrare le definizioni di (3) ciclo e (4) albero ricoprente nel grafo sottostante la rete. Dimostrare: (5) che se  $m \geq n$  la matrice dei coefficienti  $A$  non può avere rango  $n$ ; (6) che se la rete è connessa gli archi di un albero ricoprente la rete sono associati a una base di  $A$ ; (7) che una base di  $A$  non può contenere gli archi di un ciclo del grafo sottostante la rete.

# A-ESAME

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
Corso di Studi in Ingegneria Informatica  
**Ricerca Operativa 1 – Primo appello**  
1 luglio 2016

Nome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 13 luglio ore 9:00 aula N14</b>
Cognome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 21 luglio ore 14:00 aula N14</b>
Matricola:	<input type="radio"/>	<b>Orale 8 luglio ore 14:00 (solo laureandi)</b>

## Esercizio 1

La Pharmatix è un'azienda di Anagni che produce due principi attivi, A e B, che consentono un profitto per grammo venduto di 20 e 30 euro rispettivamente. Per produrre 1 gr di principio attivo A si consumano 2 gr di materia prima M e si producono 2 gr di sottoprodotto P, mentre per produrre un grammo di principio attivo B si consumano 5 gr di P e 3 gr di M. In magazzino sono disponibili 4 kg di M e 10 kg di P.

Il sistema di controllo qualità richiede di analizzare 1 gr di A ogni 10 gr di A prodotti, e 2 gr di B ogni 10 gr di B prodotti. Si vogliono analizzare almeno 180 gr in totale dei due principi attivi.

1. Definire il modello di PL per determinare la produzione di massimo profitto, tenendo conto del fatto che il controllo qualità è distruttivo, per cui il prodotto analizzato viene distrutto e non può essere venduto.
2. Risolvere il problema con il metodo grafico, dopo aver proiettato le eventuali variabili in eccesso con il metodo di Fourier-Motzkin.
3. Ridurre il problema in forma standard e ricavarne tutte le SBA e tutti gli insiemi di indici di base associati. Per ogni eventuale SBA degenerare individuare tutti gli insiemi di indici di base corrispondenti.
4. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione ottenuta al passo 2.

## Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di una rete di flusso composta da 8 nodi  $s, 1, \dots, 6, t$ . Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare,  $s$  è il nodo sorgente e  $t$  è il nodo pozzo.

Rete	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p
s	1	1	-1	1										
1			1		-1									
2						1	-1					1	-1	
3				-1	1			-1	1	-1				
4		-1				-1	1	1	-1		1			
5	-1												1	
6												-1		1
t										1	-1			-1
Capacità	4	5	2	4	1	4	3	2	1	3	6	6	3	8
Flusso	2	0	1	0	1	2	1	0	1	1	2	0	2	0

- a. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile o meno, spiegandone il motivo.
- b. Se il flusso iniziale è ammissibile, determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson a partire da quel flusso dato. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
- c. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi  $s$  e  $t$ .
- d. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto b, si determini il nuovo flusso massimo nei seguenti casi:
  - d.1. L'arco (4, 3) aumenta la sua capacità fino a 10 unità di flusso;
  - d.2. L'arco (3, 4) aumenta la sua capacità fino a 10 unità di flusso;
  - d.3. Per entrambi i casi d.1 e d.2 mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi  $s$  e  $t$ .

NB: Spiegare ogni passo dell'algoritmo.

## Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) base di una matrice, (2) rango di una matrice e (3) soluzione base ammissibile di un problema di PL in forma standard. Dimostrare (4) le condizioni algebriche di ottimalità e (5) quelle di illimitatezza per un problema di PL in forma standard. Fornire un'interpretazione geometrica del cambio di base nell'algoritmo del simplesso nel caso di (6) pivot non degenerare e (7) pivot degenerare.

# B-2<sup>a</sup> PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
Corso di Studi in Ingegneria Informatica  
**Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia**  
1 luglio 2016

Nome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 13 luglio ore 9:00 aula N14</b>
Cognome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 21 luglio ore 14:00 aula N14</b>
Matricola:	<input type="radio"/>	<b>Orale 8 luglio ore 14:00 (solo laureandi)</b>

## Esercizio 1

La Phixer è un'azienda farmaceutica di Anagni che produce due principi attivi, A e B, che consentono un profitto per grammo venduto di 30 e 40 euro rispettivamente. Per produrre 1 gr di principio attivo A si consumano 2 gr di materia prima M e si producono 3 gr di sottoprodotto P, mentre per produrre un grammo di principio attivo B si consumano 3 gr di P e 3 gr di M. In magazzino sono disponibili 12 kg di M e 6 kg di P. Almeno il 40% della quantità prodotta complessivamente dalla Phixer deve riguardare il principio A.

1. Definire il modello di PL per determinare la produzione di massimo profitto, tenendo conto del fatto che il 10% della produzione di B è utilizzata per produrre campioni gratuiti di prova, e quindi non produce profitto.
2. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si produce il 60% di principio A e il 40% di B, inoltre in magazzino resta del sottoprodotto P ma viene consumata tutta la materia prima M.

## Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un digrafo composto da 7 nodi  $s, 1, \dots, 6$ . Per ogni arco è riportata una peso. In particolare,  $s$  è il nodo sorgente.

- a. Trovare il cammino orientato minimo dal nodo  $s$  verso tutti gli altri nodi utilizzando l'algoritmo di Dijkstra in versione efficiente.

Rete	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p
s	1	1												
1	-1		1	1										
2		-1			1	1								
3			-1				-1	1					1	
4				-1			1	-1	1	-1				1
5					-1				-1	1	-1	1	-1	
6						-1					1	-1		-1
Peso	3	6	1	10	5	3	1	1	1	1	1	2	3	2

- a.1. Indicare in quale ordine vengono aggiunti gli archi all'albero (oppure in quale ordine i flag dei nodi vengono fissati a 1).
  - a.2. Indicare l'albero dei cammini orientati minimi.
- b. Calcolare il cammino minimo nell'albero dei cammini orientati minimi dal nodo  $s$  al nodo 6, dal nodo  $s$  al nodo 5, dal nodo  $s$  al nodo 3. In tutti e tre i casi indicare il peso del cammino minimo.
- c. Come varia la soluzione ottima del problema nei seguenti tre casi:
- c.1. L'arco (1, 4) ha peso 1;
  - c.2. L'arco (3, 6) ha peso 1;
  - c.3. L'arco (s, 2) ha peso 1.

NB: Spiegare ogni passo dell'algoritmo.

## Domanda 3

Illustrare (1) il problema di massimo flusso e (2) la sua formulazione come problema di PL. Illustrare le definizioni di (3) flusso ammissibile  $st$  e (4) capacità di un taglio  $st$  ( $s$  = sorgente,  $t$  = pozzo). Dimostrare: (5) che un flusso ammissibile  $st$  non può superare la capacità di un taglio  $st$ ; (6) che l'algoritmo di Ford e Fulkerson trova un flusso  $st$  massimo e un taglio  $st$  di capacità minima; (7) la complessità dell'algoritmo di Ford e Fulkerson.

# B-ESAME

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
Corso di Studi in Ingegneria Informatica  
**Ricerca Operativa 1 – Primo appello**  
1 luglio 2016

Nome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 13 luglio ore 9:00 aula N14</b>
Cognome:	<input type="radio"/>	<b>Orale 21 luglio ore 14:00 aula N14</b>
Matricola:	<input type="radio"/>	<b>Orale 8 luglio ore 14:00 (solo laureandi)</b>

## Esercizio 1

La Phixer è un'azienda farmaceutica di Anagni che produce due principi attivi, A e B, che consentono un profitto per grammo venduto di 30 e 40 euro rispettivamente. Per produrre 1 gr di principio attivo A si consumano 2 gr di materia prima M e si producono 3 gr di sottoprodotto P, mentre per produrre un grammo di principio attivo B si consumano 3 gr di P e 3 gr di M. In magazzino sono disponibili 12 kg di M e 6 kg di P. Almeno il 40% della quantità prodotta complessivamente dalla Phixer deve riguardare il principio A.

1. Definire il modello di PL per determinare la produzione di massimo profitto, tenendo conto del fatto che il 10% della produzione di B è utilizzata per produrre campioni gratuiti di prova, e quindi non produce profitto.
2. Risolvere il problema con il metodo grafico, dopo aver proiettato le eventuali variabili in eccesso con il metodo di Fourier-Motzkin.
3. Ridurre il problema in forma standard e ricavarne tutte le SBA e tutti gli insiemi di indici di base associati. Per ogni eventuale SBA degenerare individuare tutti gli insiemi di indici di base corrispondenti.
4. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione ottenuta al passo 2.

## Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un digrafo composto da 7 nodi  $s, 1, \dots, 6$ . Per ogni arco è riportata un peso. In particolare,  $s$  è il nodo sorgente.

- a. Trovare il cammino orientato minimo dal nodo  $s$  verso tutti gli altri nodi utilizzando l'algoritmo di Dijkstra in versione efficiente.

Rete	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p
s	1	1												
1	-1		1	1										
2		-1			1	1								
3			-1				-1	1					1	
4				-1			1	-1	1	-1				1
5					-1				-1	1	-1	1	-1	
6						-1					1	-1		-1
Peso	3	6	1	10	5	3	1	1	1	1	1	2	3	2

- a.1. Indicare in quale ordine vengono aggiunti gli archi all'albero (oppure in quale ordine i flag dei nodi vengono fissati a 1).
- a.2. Indicare l'albero dei cammini orientati minimi.
- b. Calcolare il cammino minimo nell'albero dei cammini orientati minimi dal nodo  $s$  al nodo 6, dal nodo  $s$  al nodo 5, dal nodo  $s$  al nodo 3. In tutti e tre i casi indicare il peso del cammino minimo.
- c. Come varia la soluzione ottima del problema nei seguenti tre casi:
- c.1. L'arco (1, 4) ha peso 1;
  - c.2. L'arco (3, 6) ha peso 1;
  - c.3. L'arco ( $s$ , 2) ha peso 1.

NB: Spiegare ogni passo dell'algoritmo.

## Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) base di una matrice, (2) rango di una matrice, (3) soluzione di base ammissibile di un sistema in forma standard, (4) vertice di un poliedro, (5) direzione di un poliedro. Dimostrare che una soluzione ammissibile di un problema di PL in forma standard è un vertice del poliedro delle soluzioni ammissibili (6) se e (7) solo se è una soluzione di base ammissibile.

Nome:	<input type="radio"/>	Orale 13 luglio ore 9:00 aula N14
Cognome:	<input type="radio"/>	Orale 21 luglio ore 14:00 aula N14
Matricola:	<input type="radio"/>	Orale 8 luglio ore 14:00 (solo laureandi)

### Esercizio 1

In tabella è riportata la matrice di incidenza vertici/lati di un grafo composto da 8 vertici 1, ..., 8. Per ogni lato è riportato un peso.

Grafo	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p
1	1						1	1						
2						1	1				1	1		1
3								1	1				1	1
4		1	1											
5	1	1							1	1		1		
6					1	1							1	
7				1	1									
8			1	1						1	1			
Peso	2	2	1	5	5	4	4	2	3	2	3	4	4	3

a. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 7, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra in versione efficiente.

a.1: Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero (oppure in quale ordine i flag dei vertici vengono fissati a 1).

a.2: Indicare un albero ricoprente di peso minimo e il suo peso complessivo.

a.3: Indicare un ulteriore albero ricoprente di peso minimo e il suo peso complessivo.

b. Come varia la soluzione ottima del problema nei seguenti tre casi:

b.1: il lato (2, 5) ha peso 1;

b.2: il lato (2, 3) ha peso 10;

b.3: il lato (1, 5) ha peso 1.

NB: Spiegare ogni passo dell'algoritmo.

### Esercizio 2

Un commerciante di arance acquista i prodotti in Calabria e Sicilia, al costo di 5 e 4 euro rispettivamente, e li vende in Lombardia e Veneto. La disponibilità/domanda di arance (quintali) per regione e le distanze chilometriche tra regioni sono riportate in tabella. Il costo di trasporto di un quintale di arance è di 1 cent ogni 10 km percorsi.

1. Formulare il problema di soddisfare la domanda a costo minimo (acquisto + trasporto)

come problema di flusso di costo minimo su una rete opportuna;

2. Risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso su rete.

Regione	Lom.	Ven.	Disponibilità
Calabria	800	900	45
Sicilia	1000	1100	26
Domanda	50	18	

### Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) cammino e (2) percorso. Illustrare (3) il problema del percorso ottimo nelle diverse varianti, (4) il teorema di Floyd-Warshall, (5) l'algoritmo di Floyd-Warshall e (6) la sua complessità computazionale.

Nome:	<input type="radio"/>	Orale 13 luglio ore 9:00 aula N14
Cognome:	<input type="radio"/>	Orale 21 luglio ore 14:00 aula N14
Matricola:	<input type="radio"/>	Orale 8 luglio ore 14:00 (solo laureandi)

### Esercizio 1

La RhoSigma è un'azienda di Velletri che produce due principi attivi, A e B, che consentono un profitto per grammo venduto di 20 e 40 euro rispettivamente. Per produrre 1 gr di principio attivo A si consumano 2 gr di materia prima M e 6 gr di sottoprodotto P, mentre per produrre un grammo di principio attivo B si consumano 3 gr di M e 5 gr di P. In magazzino sono disponibili 6 kg di M e 12 kg di P.

Il sistema di controllo qualità richiede di analizzare 1 gr di A ogni 10 gr di A prodotti, e 2 gr di B ogni 10 gr di B prodotti. Si vogliono analizzare almeno 180 gr in totale dei due principi attivi.

1. Definire il modello di PL per determinare la produzione di massimo profitto, tenendo conto del fatto che il controllo qualità è distruttivo, per cui il prodotto analizzato viene distrutto e non può essere venduto.
2. Risolvere il problema con il metodo grafico, dopo aver proiettato le eventuali variabili in eccesso con il metodo di Fourier-Motzkin.
3. Ridurre il problema in forma standard e ricavarne tutte le SBA e tutti gli insiemi di indici di base associati. Per ogni eventuale SBA degenerare individuare tutti gli insiemi di indici di base corrispondenti.
4. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione ottenuta al passo 2.

### Esercizio 2

Dato un digrafo con 5 nodi, A, ..., E, immaginate che siano state eseguite le prime due iterazioni ( $k=A$  e  $k=B$ ) dell'algoritmo di Floyd e Warshall. Alla fine della seconda iterazione, si ottengono le seguenti due matrici (quella in alto indica i percorsi orientati minimi, quella in basso i predecessori):

1. Effettuate le rimanenti iterazioni dell'algoritmo di Floyd e Warshall, aggiornando entrambe le matrici ad ogni iterazione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo, mostrate un ciclo negativo e il suo peso.
2. Eseguite nuovamente il punto 1 assumendo che il valore della casella (D, E) nella matrice in alto (dei percorsi orientati minimi al termine della seconda iterazione) sia stavolta uguale a **-1** (tutti gli altri valori delle due matrici in alto restano invariati).
3. Nel caso in cui l'algoritmo termina (senza arrestarsi in presenza di cicli negativi), mostrate sia per il punto 1 che per il punto 2 i seguenti cammini orientati minimi e il loro peso:
  - 3.1 dal nodo D al nodo C,
  - 3.2 dal nodo C al nodo B,
  - 3.3 dal nodo D al nodo A.

II Iter.	A	B	C	D	E
A	0	3	5	6	inf
B	-2	0	2	3	inf
C	inf	inf	0	-2	inf
D	-2	1	3	0	-2
E	-2	1	3	4	0

II Iter.	A	B	C	D	E
A	A	A	B	B	E
B	B	B	B	B	E
C	A	B	C	C	E
D	D	D	B	D	D
E	E	A	B	B	E

NB: Spiegare ogni passo dell'algoritmo.

### Domanda 3

Illustrare (1) il problema di flusso di costo minimo su una rete con  $n$  nodi e  $m$  archi; (2) la sua formulazione in forma standard  $\min\{c^T x: Ax = b; x \geq 0\}$ , spiegando le particolarità di  $A$  e  $b$ . Illustrare le definizioni di (3) ciclo e (4) albero ricoprente nel grafo sottostante la rete. Dimostrare: (5) che se  $m \geq n$  la matrice dei coefficienti  $A$  non può avere rango  $n$ ; (6) che se la rete è connessa gli archi di un albero ricoprente la rete sono associati a una base di  $A$ ; (7) che una base di  $A$  non può contenere gli archi di un ciclo del grafo sottostante la rete.