Elementi di Teoria dei Grafi

Argomenti lezione:

- Problemi, definizioni e notazioni
- Forme di rappresentazione di grafi
- Alcune tipologie di grafi
- Formulazione di problemi su grafi

Problemi trattati

I **grafi** sono delle entità matematiche su cui si è sviluppato un corpo metodologico per la modellazione e risoluzione di problemi decisionali. Si tratta di **efficienti tecniche** di Ricerca Operativa per modellare e risolvere problemi applicativi e teorici.

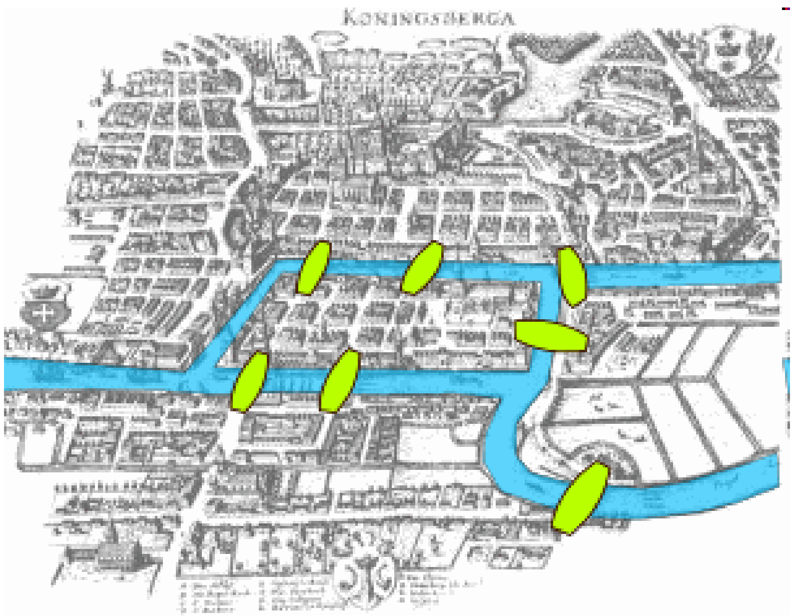
I problemi che affronteremo in questo corso sono i seguenti:

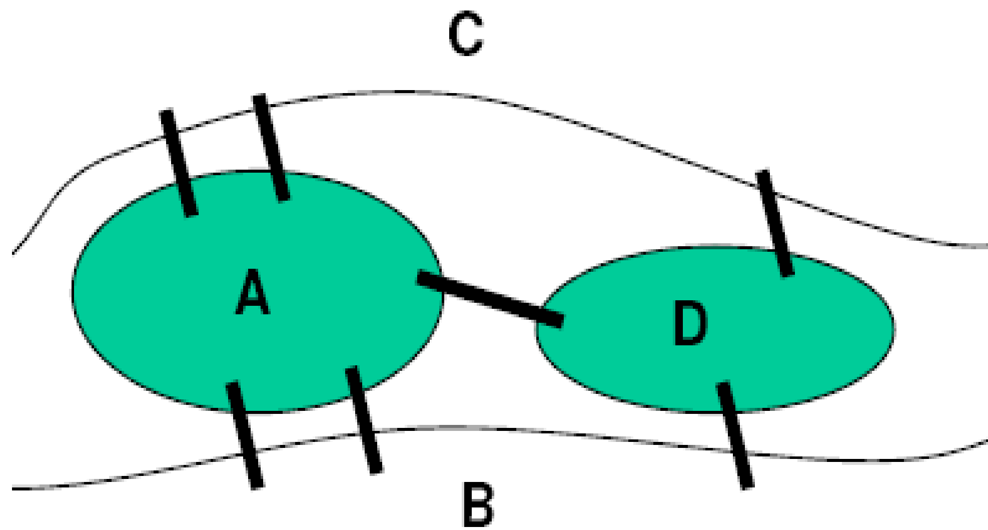
1. come <u>collegare a costo minimo</u> i vertici di un grafo non orientato
2. come trovare in un digrafo il <u>percorso più breve</u> o a minor costo
3. come <u>massimizzare il flusso</u> che scorre all'interno di una rete
4. come <u>trovare il flusso di costo minimo</u> che scorre nella rete

Problemi risolvibili in <u>tempo polinomiale</u>
<u>Obiettivo</u>: studio algoritmi efficienti

Cenni storici (1750 circa)

La Teoria dei Grafi è stata introdotta dal matematico Eulero che formulò tramite grafi il problema dei ponti di Könisberg (Prussia).

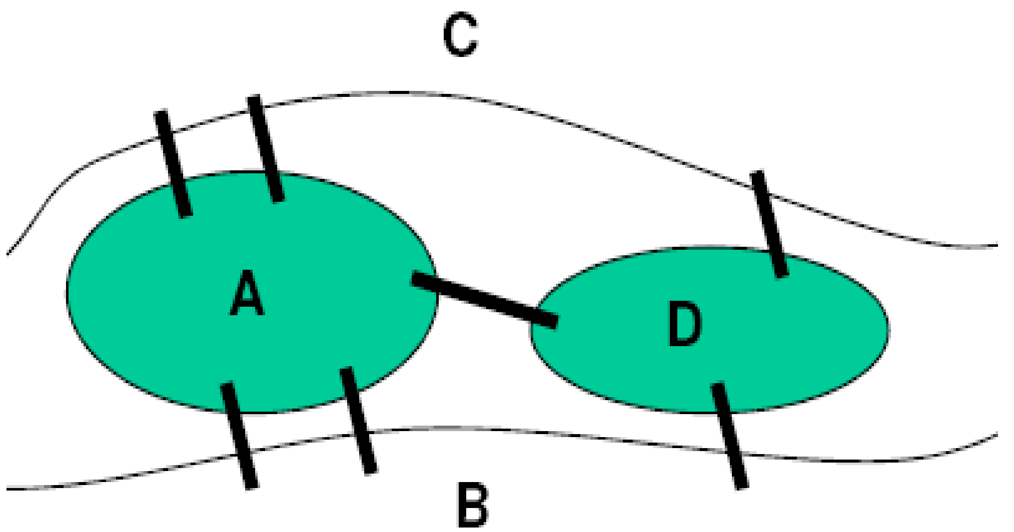


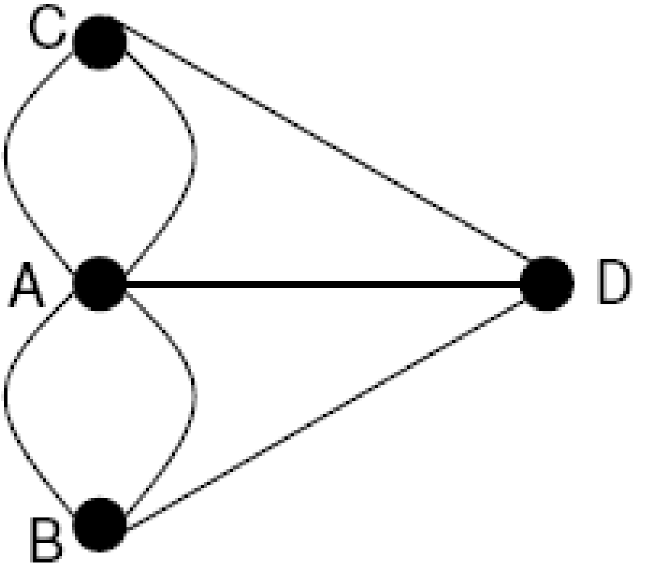


Domanda: Partendo da una qualsiasi area di terra è possibile tornare al punto di partenza attraversando tutti i ponti una ed una sola volta?

Problema dei ponti di Könisberg

<u>Modellazione</u>: Se si associano alle zone di terra dei pallini (*vertici*) e ai ponti dei tratti di linea (*spigoli* o *lati*) si ha il grafo:





Eulero si servì di questo grafo per stabilire che era **impossibile** trovare il percorso richiesto, con i ponti così distribuiti.
E’ invece possibile se il numero di lati incidente in ogni vertice è <u>pari</u>.

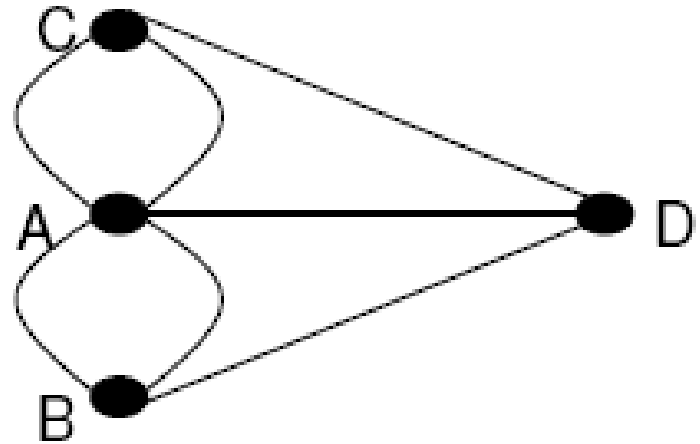
Grafi non orientati

Un *grafo non orientato* $G = (V, E)$

è formato da due insiemi:

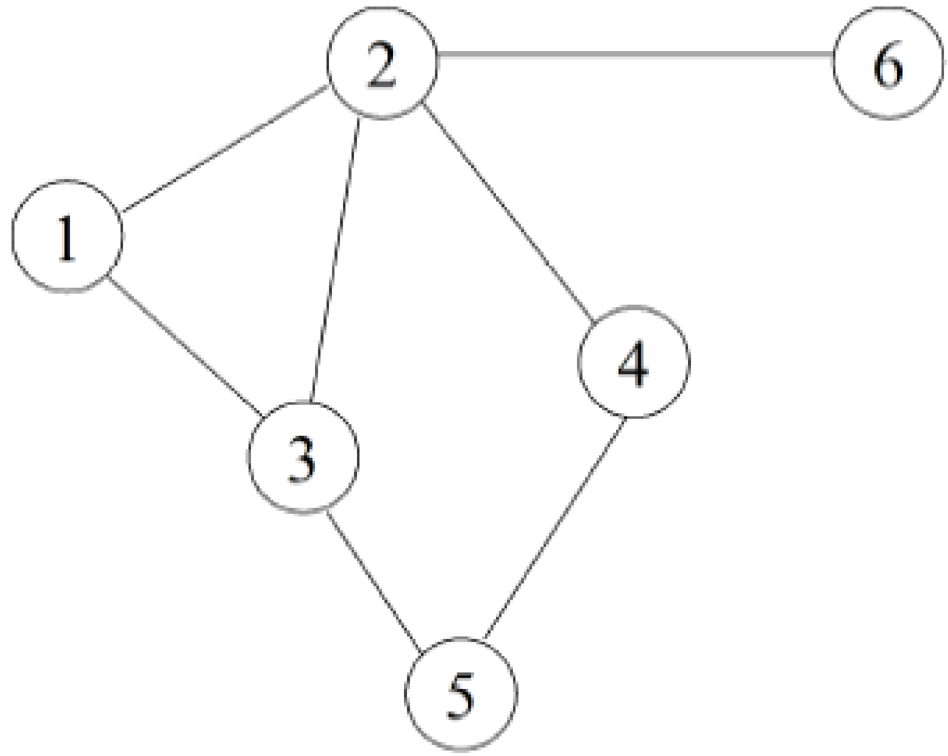
V sono i *vertici* (nodi)

E sono gli *lati* (spigoli)



- Un lato di un grafo (i, j) è una coppia non ordinata di vertici.
- Si dice che un lato (i, j) ha due *vertici terminali*: i e j.
- Un lato (i, j) è *incidente* sui vertici terminali e li *collega*.
- Due lati si dicono *adiacenti* se hanno un vertice in comune (e.g. lati (A, B) e (A, C)).
- Due vertici si dicono *adiacenti* se esiste un lato che li collega, ovvero un lato incidente a entrambi (e.g. vertici A e B).

Esempio di grafo non orientato



$G = (V, E)$

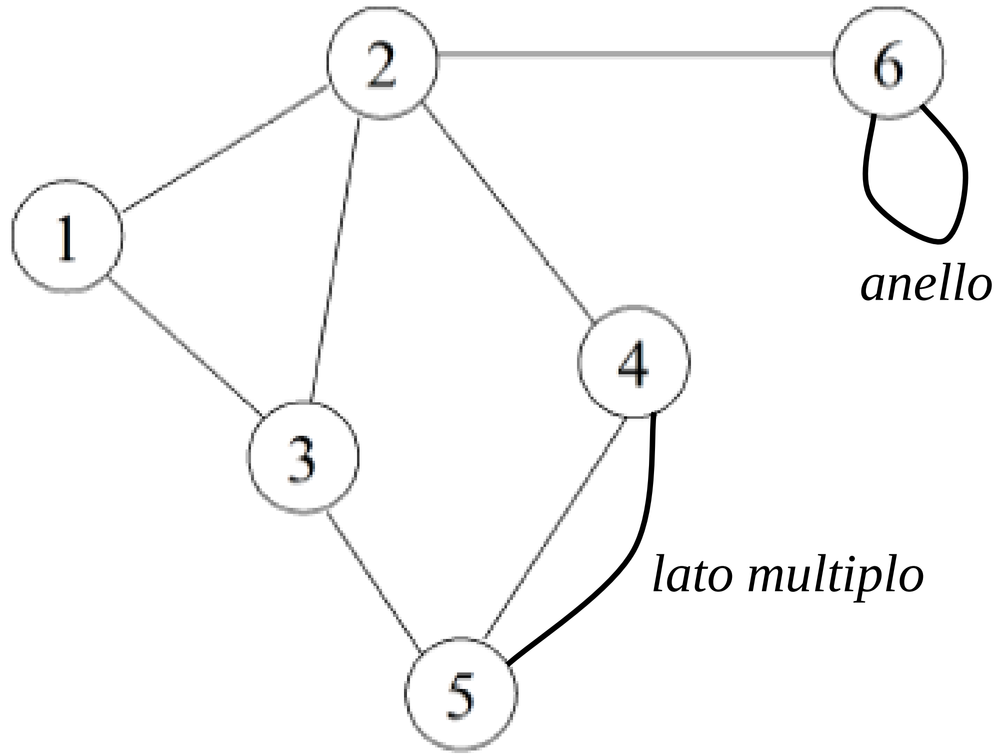
con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

e con $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (4, 5)\}$

Numero di vertici = $n = |V| = 6$

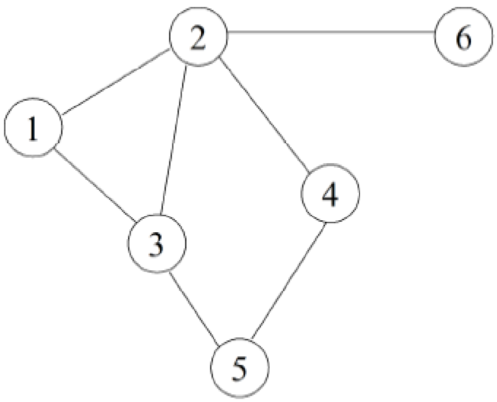
Numero di lati (spigoli) = $m = |E| = 7$

Esempio di multigrafo non orientato

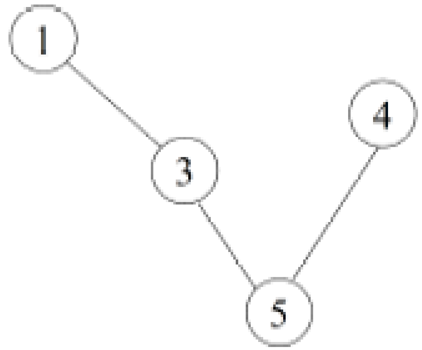


Un grafo contenente lati multipli o anelli è noto come multigrafo.

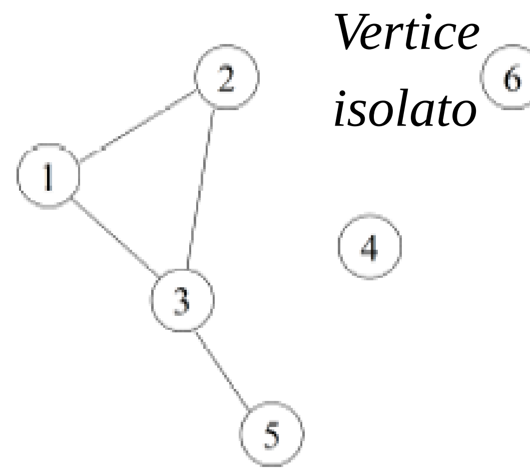
Esempi di sottografi e grafi parziali



Grafo G



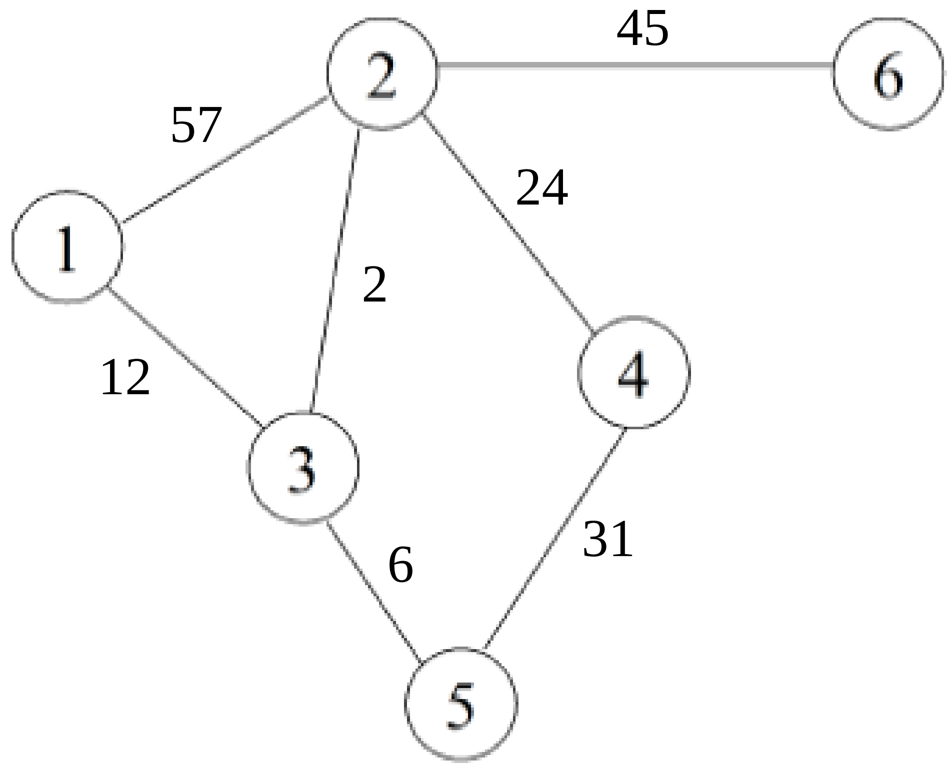
Sottografo indotto da G



Sottografo parziale di G

- Un grafo *G'* è un *sottografo* di G se il suo insieme di vertici e il suo insieme di lati sono contenuti in quelli del grafo di partenza.
- Un sottografo è un *sottografo indotto* se *E'* è un sottoinsieme di *E* e ciascuno degli lati in *E'* ha entrambi i vertici terminali in *V.*
- Un sottografo si dice *sottografo parziale* se ha esattamente tutti i vertici del grafo originario, ma non tutti i suoi lati.

Esempio di grafo pesato e non orientato



Un grafo pesato ha i lati/vertici con associati dei pesi, ad esempio costi, lunghezze, capacità o altro.

Per un grafo pesato sui lati il peso del generico lato (i, j) si scrive c_{ij} (e.g. il lato (1, 2) ha peso $c_{12} = 57$)

Grado di un vertice

Grado $d(i)$ di ogni vertice i = numero di lati incidenti

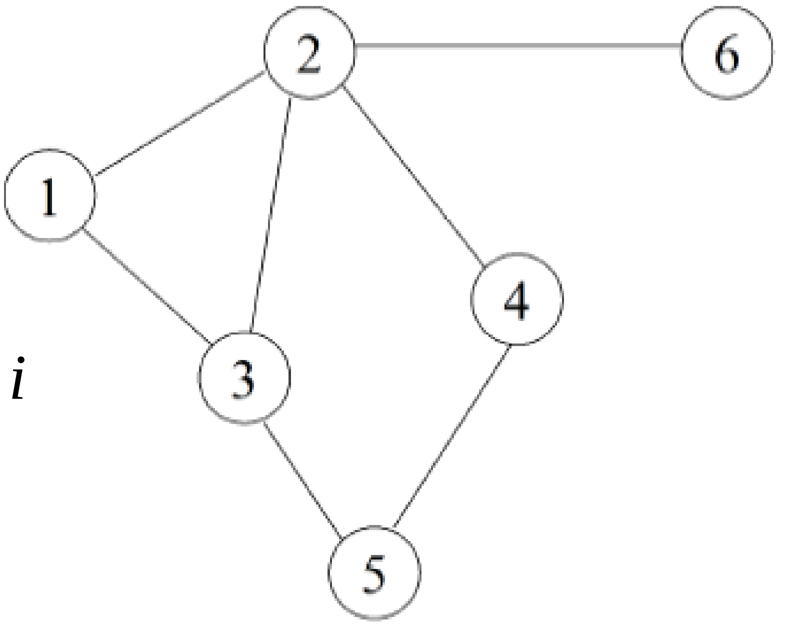
$d(1) = 2$, $d(2) = 4$, $d(3) = 3$,

$d(4) = 2$, $d(5) = 2$ e $d\,(6) = 1$

Stella $\delta(i)$ = lati incidenti nel vertice i

$\delta(2) = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6)\}$

$\Rightarrow d(i) = |\,\delta(i)\,|$



Vertice *pari* = grado pari (e.g. vertice 1)

Vertice *dispari* = grado dispari (e.g. vertice 3)

Vertice *foglia* = grado pari ad 1 (e.g. vertice 6)

In figura, la somma dei gradi di tutti i vertici è 14 ($2m$)

Il grafo ha un numero pari (2) di vertici dispari

Percorsi, Sentieri e Cammini

Percorso =

sequenza di vertici e lati adiacenti

Lunghezza del percorso =

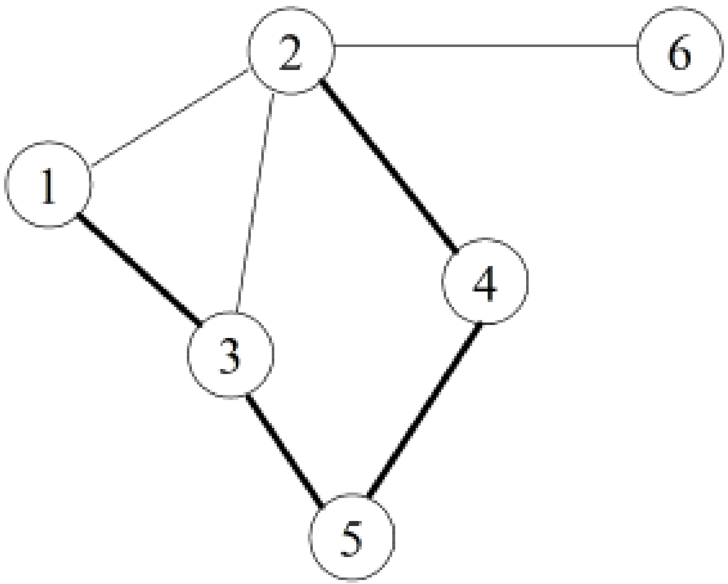
numero di lati attraversati dal percorso

Sentiero =

percorso privo di lati ripetuti

Cammino =

percorso privo di vertici ripetuti

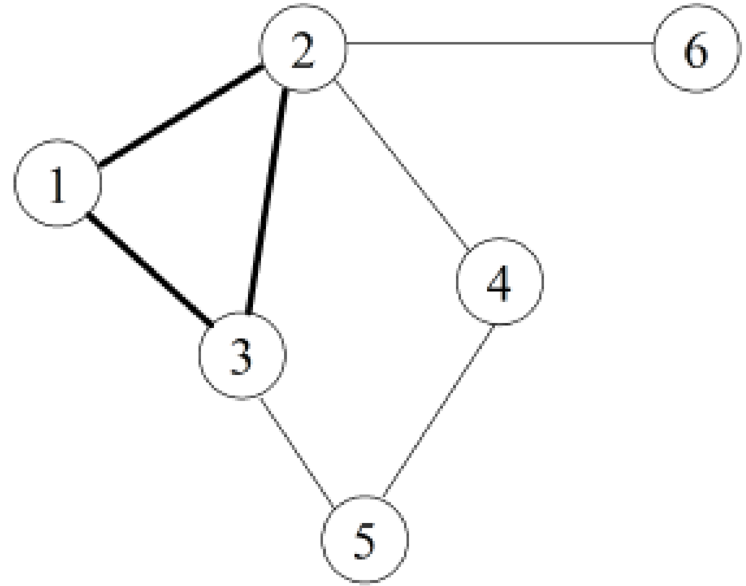


Il percorso in figura è sia un sentiero che un cammino

La sua lunghezza è pari a 4

1 3 5 4 2 3 1 è un percorso, ma non è un cammino o un sentiero

Cicli

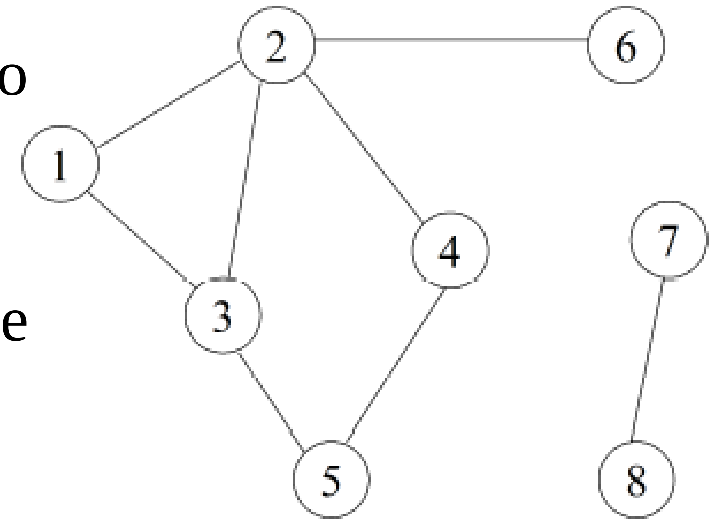


Un *ciclo* è un percorso i cui vertici iniziali e terminali coincidono.

Un grafo che non contiene cicli è detto *aciclico*.

Grafi connessi e disconnessi

- Due vertici *i* e *j* sono *connessi* se nel grafo esiste almeno un cammino tra *i* e *j*
- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è connessa, altrimenti si dice che il grafo è *disconnesso*
- Una *componente* di un grafo è un sottografo massimale connesso



Grafo disconnesso

- Un lato che se rimosso genera un grafo disconnesso si chiama *ponte*
- Un vertice che se rimosso genera un grafo disconnesso si chiama *cutvertex*

Componenti:

$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

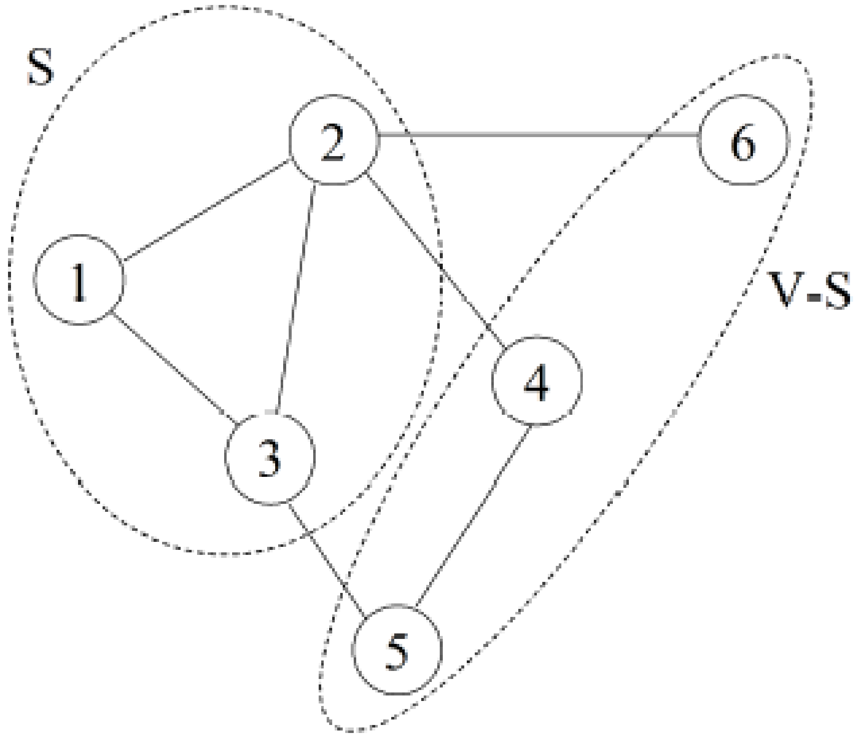
$V_2 = \{7, 8\}$

Vertici non connessi:

1 e 7, 4 e 8, …

Tagli

- *Taglio* in un grafo = partizione dell'insieme dei vertici in due sottoinsiemi S e $\underline{S} = V - S$ che non hanno vertici in comune
- Ogni taglio definisce un insieme di lati $[S, \underline{S}]$ con estremità in S ed $\underline{S}$
- Con s–t si definisce un taglio che ha il vertice s in S ed il vertice t in $\underline{S}$



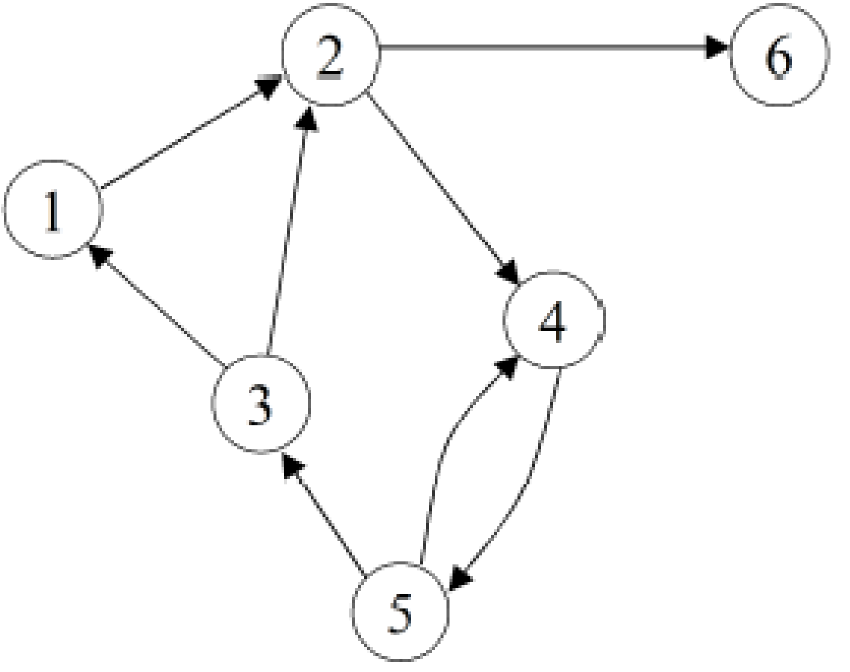
In figura si ha $S = \{1, 2, 3\}$ ed $\underline{S} = \{4, 5, 6\}$.

Nel taglio in figura, i lati $[S, \underline{S}]$ sono (2,6), (2,4) e (3,5).

Grafo orientato (digrafo): notazioni (1)

Grafo orientato = DIGRAFO =

G (N, A) con *N* nodi e *A* archi orientati



Per ogni arco del digrafo si ha:

l'arco *(i, j)* è diverso dall'arco *(j, i)*

Nodo coda di un arco *(i, j) = i*

Nodo testa di un arco *(i, j) = j*

Arco entrante nel nodo *j = (i, j)*

Arco uscente dal nodo *i = (i, j)*

Esempio: 5 è il nodo coda e 3 è il nodo testa dell'arco (5, 3)

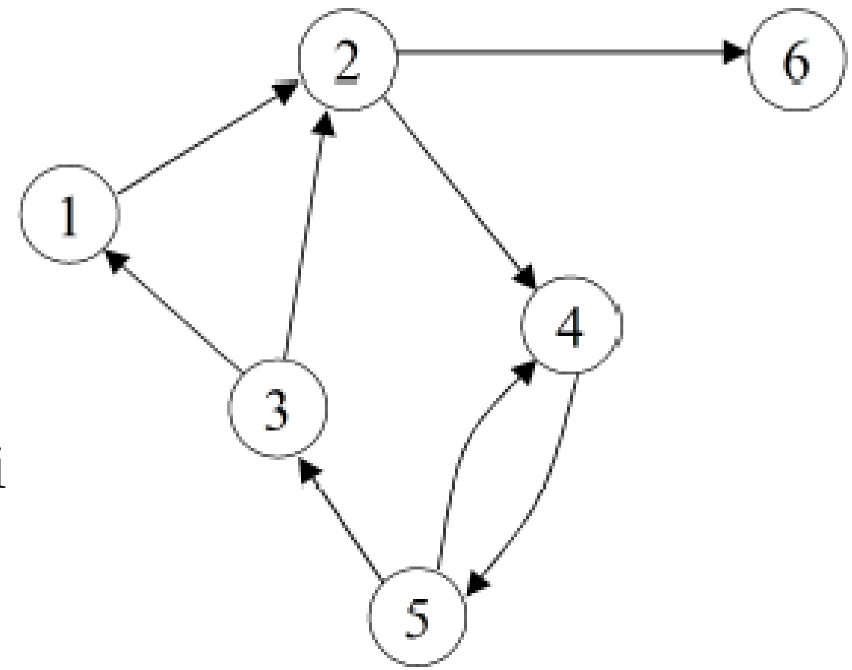
Esempio: (1, 2) e (3, 2) sono gli archi entranti nel nodo 2

Grafo orientato (digrafo): notazioni (2)

Grado esterno del nodo *i* =

d+(i) = numero degli archi uscenti

Esempio: *d*+(4) = 1, *d*+(3) = 2



Grado interno del nodo *i* =

d−(i) = numero degli archi entranti

Esempio: *d*−(4) = 2, *d*−(3) = 1

<u>Proprietà</u>: per ogni *i* in *V* vale *d(i)* = *d+(i)* + *d−(i)*

Esempio: *d*(1) = 2, *d*(2) = 4, *d*(6) = 1

RETE : digrafo per cui si associa un “peso” ad ogni arco e/o nodo

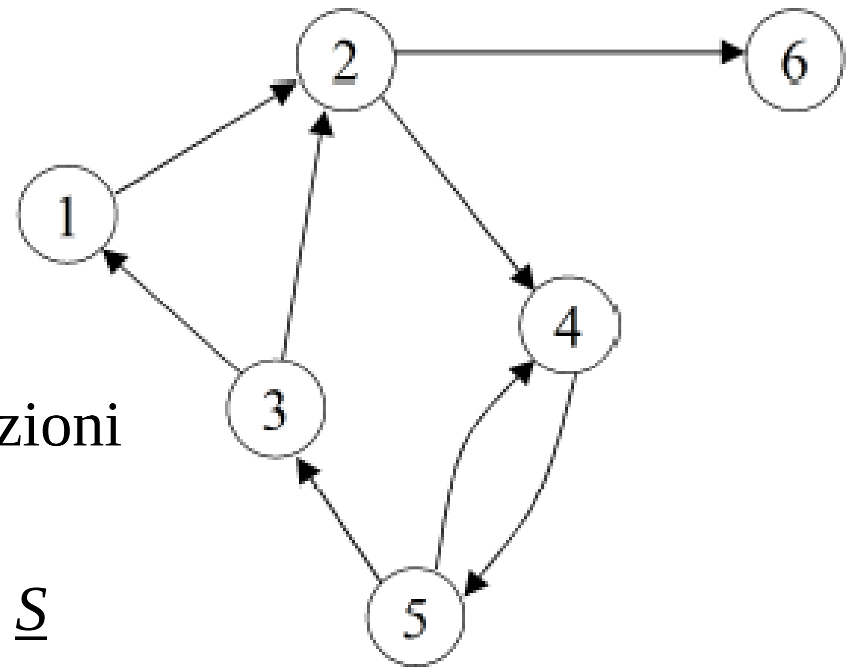
Cammino orientato

- *Cammino orientato:*

Cammino composto da tutti archi aventi la stessa direzione

- *Grafo fortemente connesso*:

per ogni coppia di nodi esiste un cammino orientato in entrambe le direzioni



- $[S, \underline{S}]^+$ sono tutti gli archi uscenti

dall'insieme S ed entranti nell'insieme $\underline{S}$

- $[S, \underline{S}]^-$ sono tutti gli archi entranti

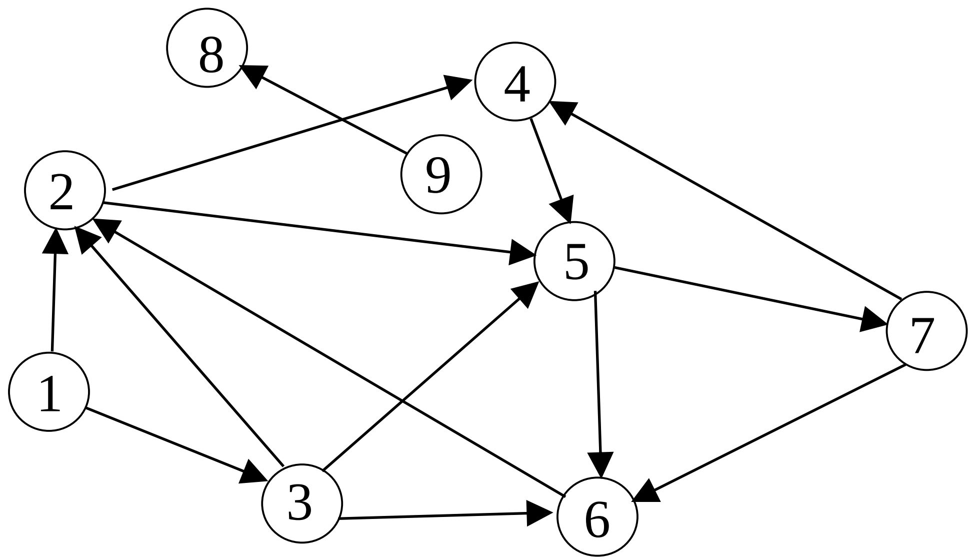
nell'insieme S (testa in S) ed uscenti dall'insieme $\underline{S}$ (coda in $\underline{S}$)

- $[S, \underline{S}]^+$ equivale a $\delta^+(S)$ = stella degli archi uscenti da S

Grafo in figura: <u>non</u> è un multigrafo e <u>non</u> è fortemente connesso

Grafo orientato: Esercizio

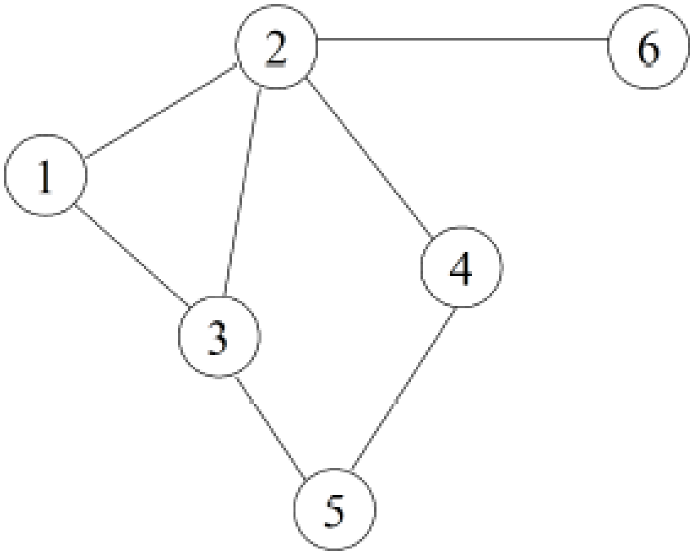
Calcolare le componenti connesse e fortemente connesse per il digrafo:



Le componenti <u>connesse</u> sono {1,2,3,4,5,6,7} e {8,9} dato che esiste un cammino non orientato tra ogni coppia di nodi in ciascuna componente mentre non esiste un cammino tra nodi di componenti diverse.

Le componenti <u>fortemente connesse</u> sono {1}, {3}, {2,4,5,6,7}, {8}, {9} dato che due nodi *i* e *j* sono fortemente connessi se esiste un cammino orientato da *i* a *j* ed esiste un cammino orientato da *j* a *i*.

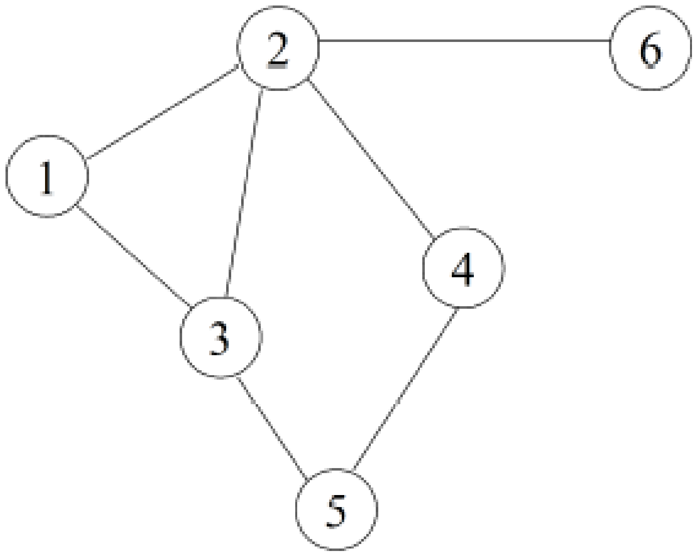
Matrice di incidenza vertice-lato



1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0

- La matrice di incidenza vertice-lato è una matrice di dimensioni $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$ che contiene **una riga per ogni vertice del grafo e una colonna per ogni lato**.
- La colonna per il lato (i, j) ha solo due valori non nulli per la riga i e la riga j
- <u>Esempio</u>: La prima colonna si riferisce al lato (1, 2) tra il vertice 1 e il vertice 2
- In generale è una struttura efficiente in quanto ha 2m elementi non nulli su mn elementi totali. Ma è considerevole lo spreco di memoria...

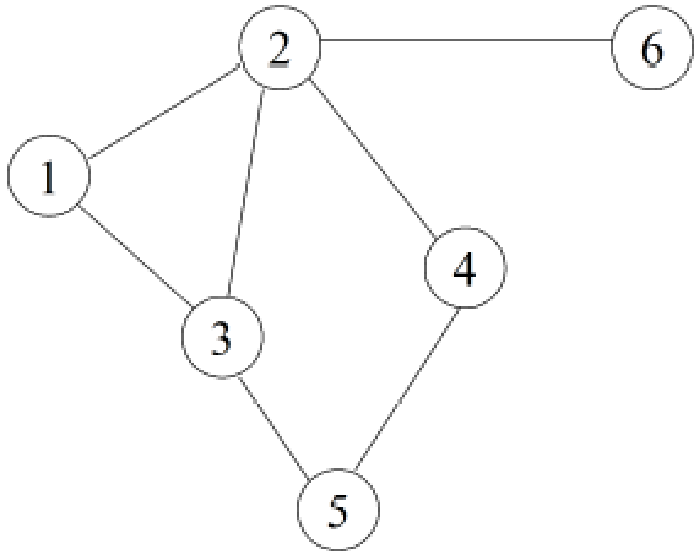
Matrice di adiacenza vertice-vertice



0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0

- La matrice di adiacenza vertice-vertice è composta da ***n* righe ed *n* colonne**
- Se un elemento vale 1 vuol dire che è presente un lato tra i vertici i e j
- Esempio: L'elemento non nullo dell'ultima riga si riferisce al lato (2, 6)
- La matrice di adiacenza contiene m elementi non nulli su n^2 elementi totali.
- Grafi sufficientemente densi: è una struttura dati efficiente
- Grafi non orientati: è una struttura **simmetrica**, per cui si dimezza la memoria

Liste di adiacenza



$$
\begin{array}{|c|l}
1 & \rightarrow 2 \rightarrow 3 \\
2 & \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \\
3 & \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \\
4 & \rightarrow 2 \rightarrow 5 \\
5 & \rightarrow 3 \rightarrow 4 \\
6 & \rightarrow 2
\end{array}
$$

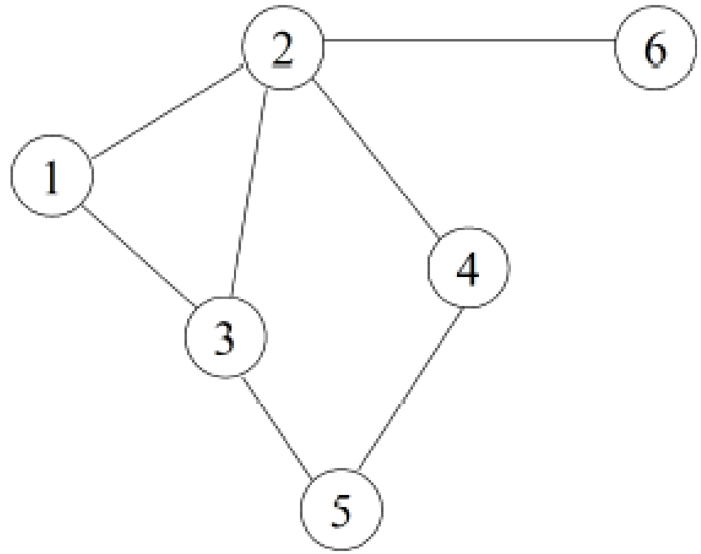
Lista di adiacenza = per ogni vertice contiene una lista di lati adiacenti. Ogni elemento contiene l’altra estremità del lato e i suoi eventuali valori associati (peso, costo, capacità).

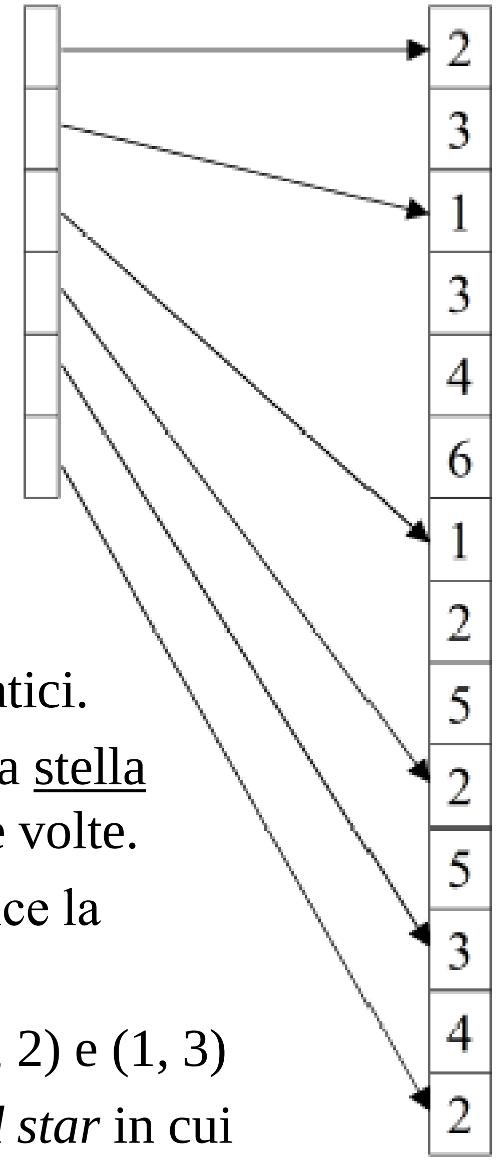
<u>Esempio</u>: La prima riga riguarda il vertice 1 e i lati (1, 2) e (1, 3)

Le liste di adiacenza sono implementate usando liste e puntatori, e sono strutture dati efficienti anche per grafi sparsi

1	$\to 2 \to 3$
2	$\to 1 \to 3 \to 4 \to 6$
3	$\to 1 \to 2 \to 5$
4	$\to 2 \to 5$
5	$\to 3 \to 4$
6	$\to 2$

Forward star





- Simile alle liste di adiacenza, ma memorizza in vettori statici.
- Per ogni vertice viene memorizzata in maniera contigua la <u>stella di lati incidenti</u> ad esso. Ogni lato viene memorizzato due volte.
- In un'altra struttura dati viene memorizzata per ogni vertice la posizione del primo elemento.
- <u>Esempio</u>: La freccia in alto descrive il vertice 1 e i lati (1, 2) e (1, 3)
- Per grafi orientati è possibile costruire anche la *backward star* in cui vengono memorizzate le stelle entranti e non quelle uscenti.

Rappresentazione di grafi

Strutture dati basate su liste e matrici per rappresentare i grafi:

Rappresentazione	Memoria	Vantaggi	Svantaggi
Matrice Incidenza	$O(n \times m)$	Proprietà teoriche	Scarsamente efficiente
Matrice Adiacenza	$O(n \times n)$	Facile implementazione	Non adatta a grafi sparsi
Liste di Adiacenza	$O(n + m)$	Efficiente	
Forward Star	$O(n + m)$	Efficiente	

- Nella colonna memoria viene riportata l'occupazione di memoria per rappresentare un grafo
- Nelle altre due colonne vengono accennati vantaggi e svantaggi

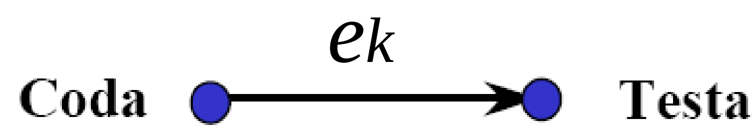
- Esistono altre forme di rappresentazione, come e.g. per un digrafo:

Lista di archi : elenca gli archi del digrafo e i loro pesi, memoria $O(m)$

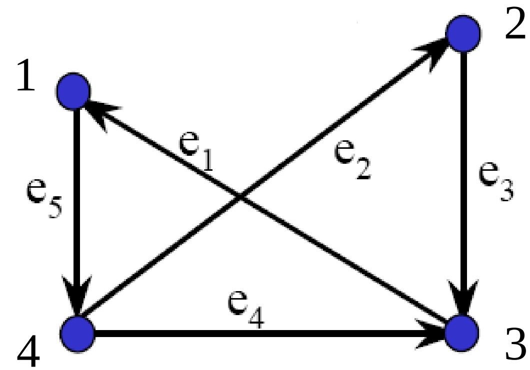
Matrice di incidenza di un digrafo

Nel caso di digrafo G (N, A), $H_G = [h_{ik}]$ con i = 1, ..., n e k = 1, ... m è la matrice di incidenza di G, dove $n = |N|$ e $m = |A|$, e tale che

$$h_{ik} = \begin{cases} -1 & \text{se il nodo } i \text{ è la testa dell'arco } e_k \\ 1 & \text{se il nodo } i \text{ è la coda dell'arco } e_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Esempio



$$H_G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

matrice di incidenza di un grafo orientato

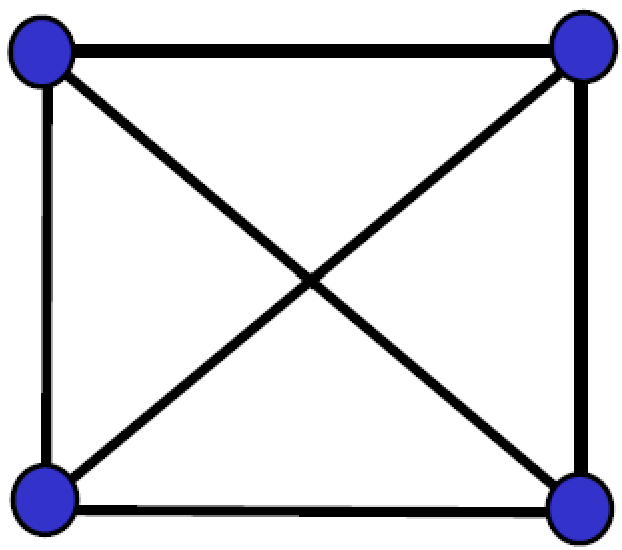
Grafo completo

Un grafo G (V, E) è detto un *grafo completo* (detto anche *clique*) se esiste un lato per ogni coppia di vertici

Un grafo completo ha $n\ (n - 1)\ /\ 2$ lati

Un grafo completo ha per ogni vertice i in V il grado $d(i) = n - 1$

<u>Esempio</u>: Il grafo ha 6 lati. Ogni vertice ha 3 lati adiacenti

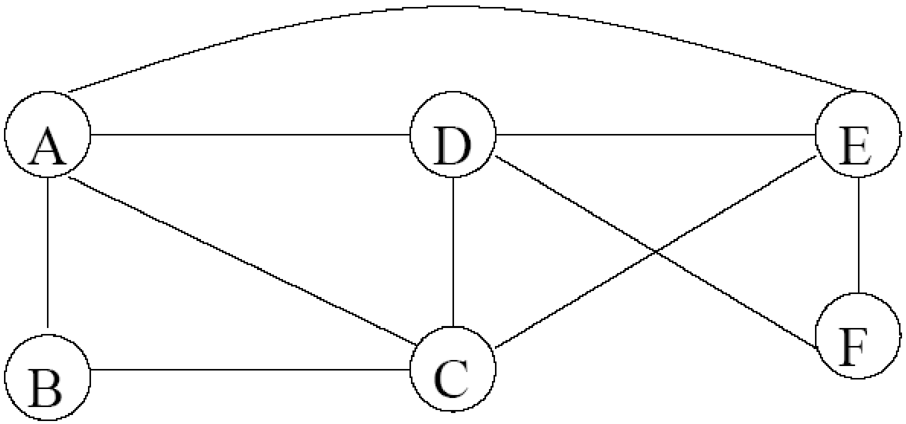


Grafo Euleriano

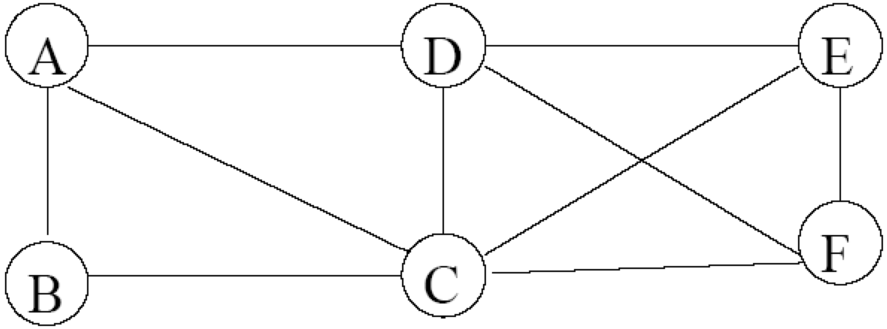
Un grafo connesso viene detto *euleriano* se è possibile percorrere in un ciclo tutti i suoi lati, visitando una sola volta ogni lato.

Un *ciclo euleriano* percorre esattamente una sola volta tutti i lati del grafo (problema dei ponti di Könisberg).

<u>Teorema di Eulero</u>: Un grafo è euleriano se e solamente se tutti i suoi vertici hanno grado pari.



Grafo Euleriano

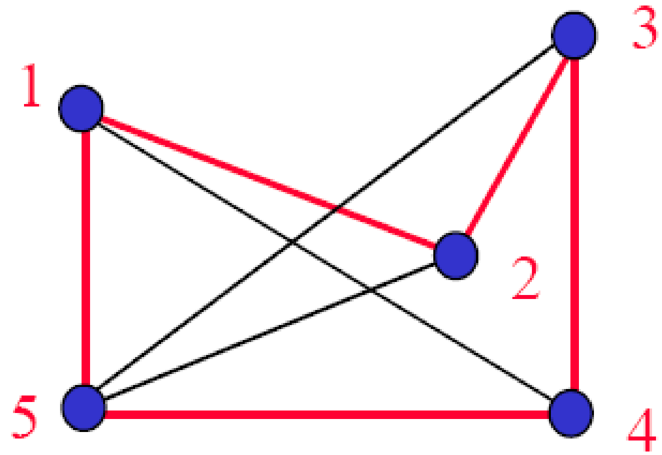


Grafo Non Euleriano

Circuito Hamiltoniano

- Un **percorso hamiltoniano** è un percorso che passa per tutti i nodi del grafo una sola volta (tour)
- Un **circuito hamiltoniano** è un percorso hamiltoniano chiuso

Esempio

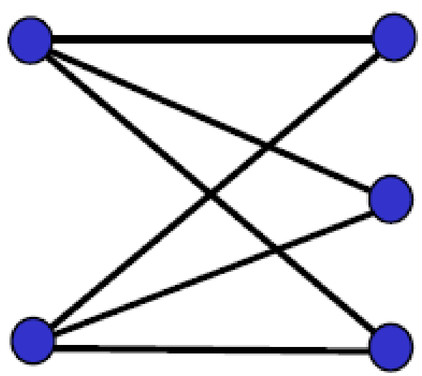


circuito hamiltoniano

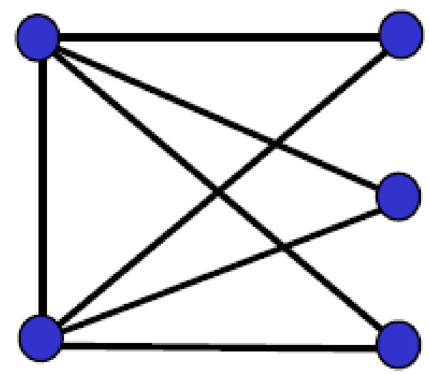
Grafo bipartito

- G è detto **grafo bipartito** se esiste una partizione di $V=V_1 \cup V_2$ tale che:
  - $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
  - $\forall e=(u,v) \in E$ se $u \in V_1$ allora $v \in V_2$ oppure se $u \in V_2$ allora $v \in V_1$

Esempio



grafo bipartito

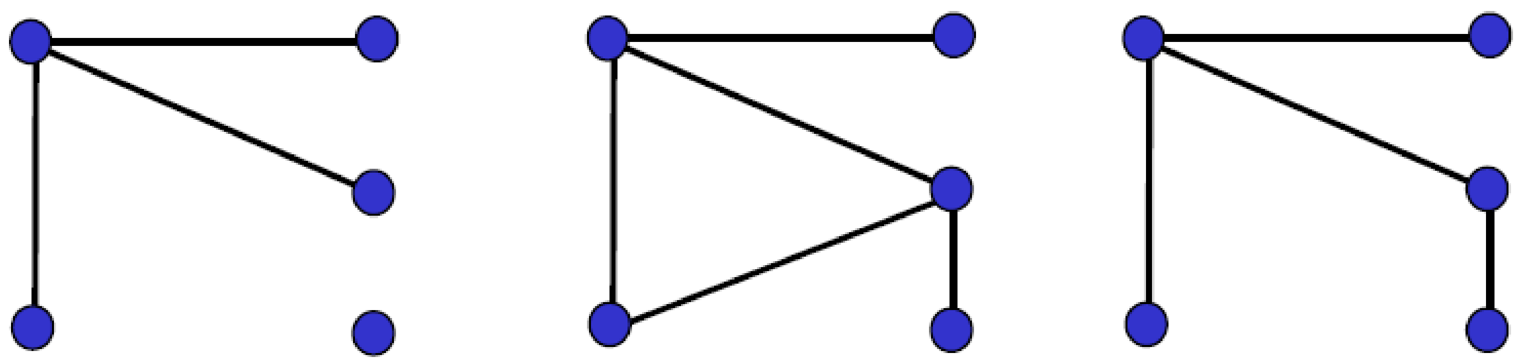


grafo non bipartito

Alberi e foreste

- Un grafo è **aciclico** se non contiene cicli (orientati o non)
- Un **albero** è un grafo connesso ed aciclico
- Ogni grafo aciclico è in generale l'unione di alberi e viene detto **foresta**

Esempio

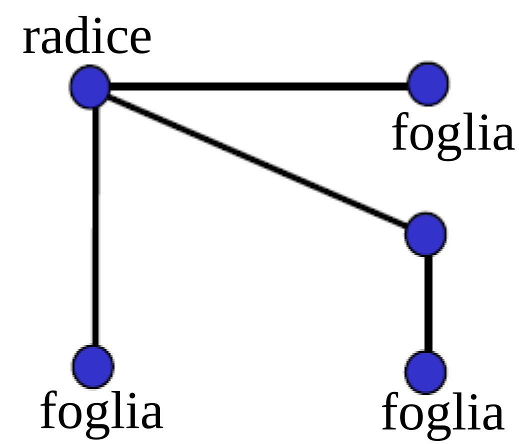


grafo aciclico (foresta) — grafo non aciclico — albero

Proprietà alberi

Dato un albero, valgono le seguenti proprietà:

- Un albero contiene esattamente $n - 1$ lati. Infatti se contenesse meno lati non potrebbe essere un grafo connesso, mentre se contenesse più di $n - 1$ lati allora esisterebbe almeno un ciclo.
- Un albero ha almeno due foglie (vertici di grado 1).
- Per ogni coppia di vertici di un albero esiste un solo percorso che li connette. Se ce ne fosse più di uno allora esisterebbe un ciclo nel grafo, mentre se per una coppia di vertici non ci fosse un cammino il grafo non sarebbe connesso.

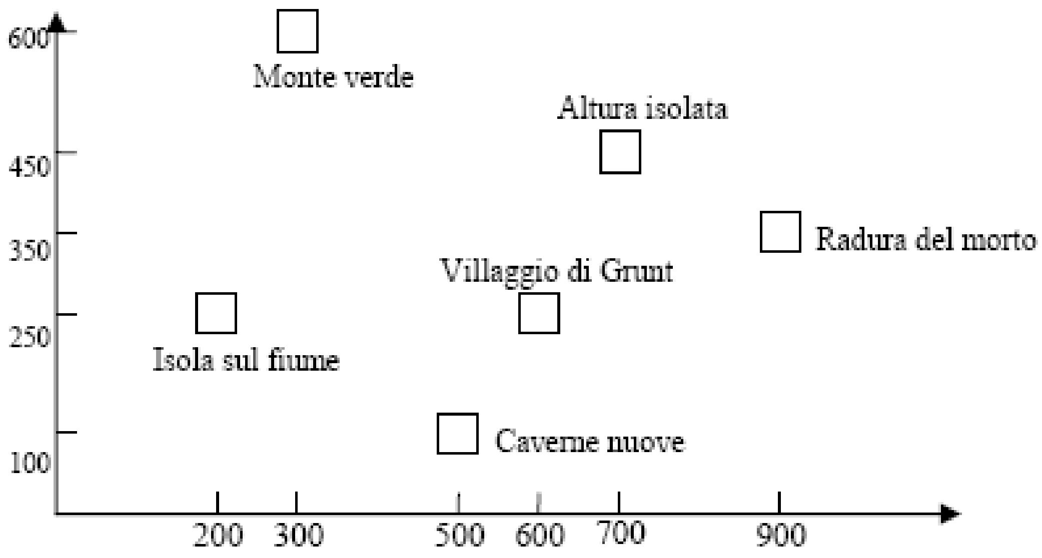


Elementi di Teoria dei Grafi

Esercizi di formulazione

Esercizi su alberi ricoprenti a costo minimo (1)

Grunt il cavernicolo deve progettare una rete di allarme per la sua tribù.
La rete consiste in una serie di postazioni di avvistamento, ognuna presidiata da un cavernicolo. Le postazioni sono in comunicazione tra di loro per mezzo di alcuni cavi fatti da capelli intrecciati da Snort e dalle altre donne della tribù.
In caso di avvistamento di una tigre dai denti a sciabola il cavernicolo di guardia dovrà dare degli strattoni ai cavi in maniera da avvisare le postazioni limitrofe collegate. In Figura è rappresentata la mappa della regione occupata dalla tribù.



Ciascuna postazione propaga ogni allarme verso tutte le postazioni limitrofe/collegate.

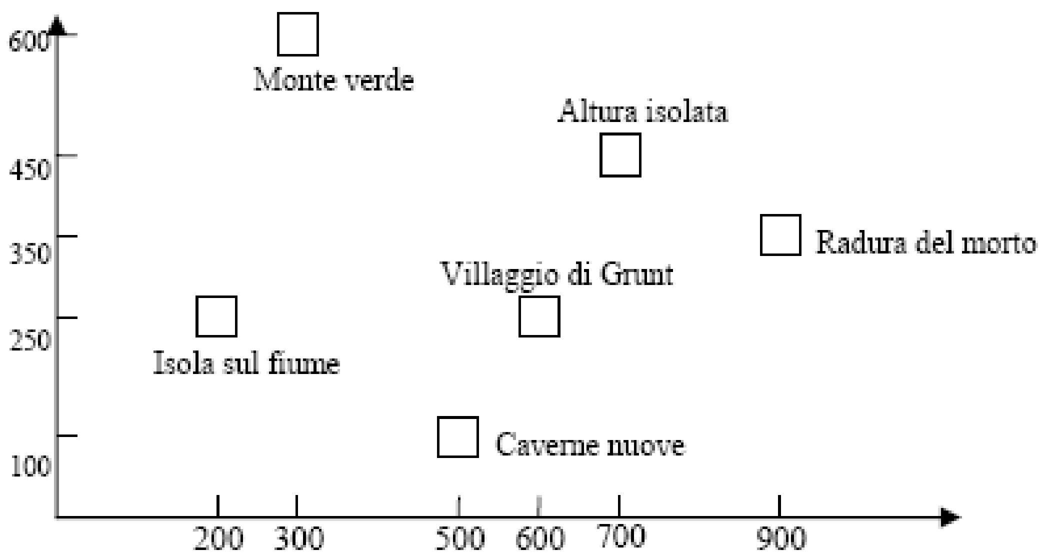
<u>Domanda</u>: Si formuli il problema di collegare le postazioni di avvistamento in maniera da minimizzare il lavoro di Snort.

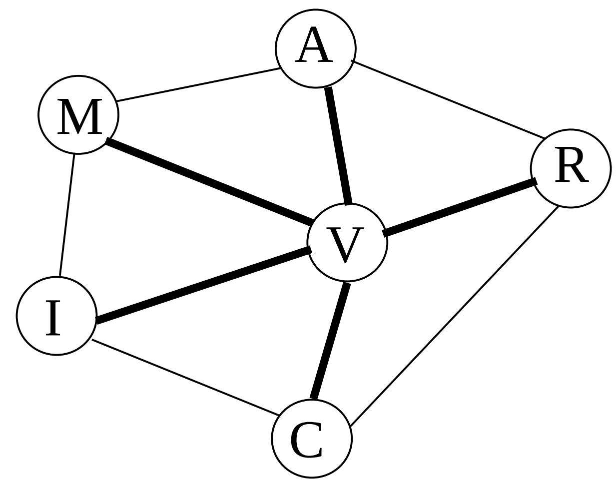
Esercizi su alberi ricoprenti a costo minimo (2)

Il problema è formulabile come un problema di albero ricoprente, in cui i vertici rappresentato le postazioni di avvistamento e i lati (archi non orientati) sono i possibili collegamenti tra le diverse postazioni.

Il peso associato al lato rappresenterà la lunghezza del cavo stesso.

Eliminando alcuni lati superflui il <u>grafo</u> è composto da 6 vertici (uno per ogni postazione V, I, C, M, R, A) e 10 lati pesati con la distanza tra le due postazioni.





un albero ricoprente

Esercizi su alberi ricoprenti a costo minimo (3)

Luigi l'elettricista deve rifare l'impianto elettrico di una stanza quadrata di 4 metri di lato e 3 metri di altezza. Nella stanza bisogna disporre (vedi Figura):

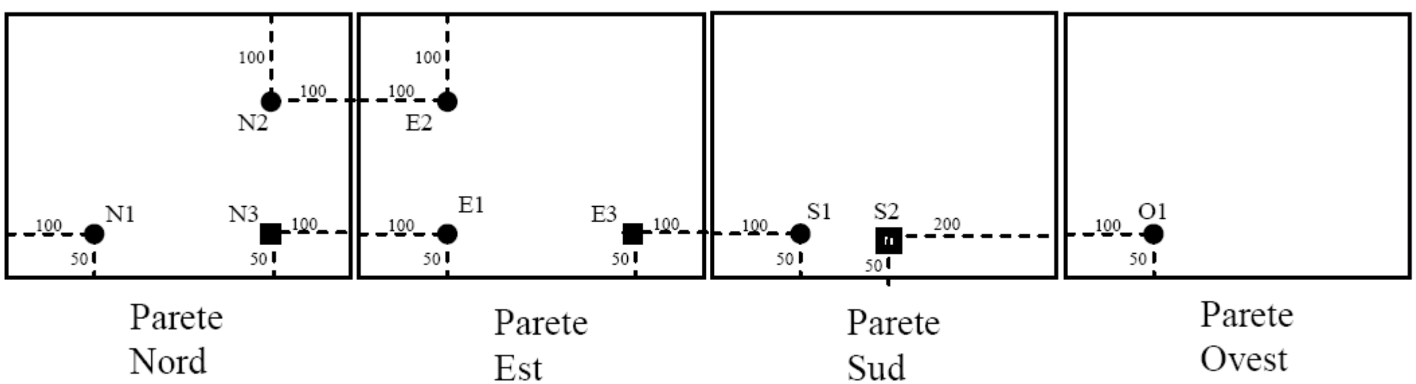
· 4 prese elettriche, tutte a 50 cm di altezza dal pavimento, e distanti 1 metro dalla parete a sinistra. Indichiamo queste prese come N1, E1, S1, O1.

· 1 presa elettrica sulla parete Nord, a 1 metro dal soffitto e distante 1 metro dalla parete Est. Indichiamo questa presa come N2.

· 1 presa elettrica sulla parete Est, a 1 metro dal soffitto e distante 1 metro dalla parete Nord. Indichiamo questa presa come E2.

· 2 scatole di derivazione una sulla parete Nord (50 cm dal pavimento, 1 metro dallo spigolo con la parete Est) e una sulla parete Est (50 cm dal pavimento, 1 metro dallo spigolo con la parete Sud). Indichiamo le scatole di derivazione N3 e E3.

· 1 punto di ingresso dell'impianto posizionato sulla parete Sud (a 50 cm dal pavimento ed a metà parete). Indichiamo con S2 il punto di ingresso dell'impianto.

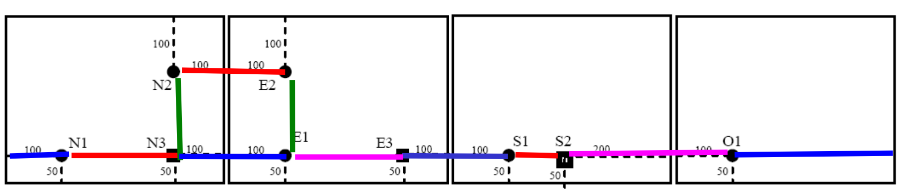


Esercizi su alberi ricoprenti a costo minimo (4)

Sapendo che una traccia non si può biforcare (ovvero sono ammesse biforcazioni solo nelle scatole di derivazione e nelle prese elettriche), e che le tracce possono andare solo in orizzontale o in verticale (non sono ammesse tracce diagonali, ma sono ammesse tracce che formano un angolo retto), si formuli utilizzando un grafo opportuno il problema di disegnare l'impianto elettrico per minimizzare la lunghezza delle tracce.

Il problema è formulabile come un problema di albero ricoprente, in cui i vertici rappresentato le prese elettriche, le scatole di derivazione e l'ingresso dell'impianto e i lati sono le tracce che devono essere passate a cui è associato un costo pari alla lunghezza della traccia. Eliminando alcuni lati superflui il grafo è composto da 9 vertici e 10 lati.

(N1,N3) : 200
(N1,O1) : 400
(N2,N3) : 150
(N2,E2) : 200
(N3,E1) : 200



(E1,E2) : 150
(E1,E3) : 200
(E3,S1) : 200
(S1,S2) : 100
(S2,O1) : 300

Esercizi su problemi di percorso minimo (1)

La produzione di ceramica può effettuarsi con una bicottura che prevede:
(1) preparazione grezzo crudo, (2) I cottura, (3) pittura terracotta, (4) II cottura.
La monocottura evita la fase di I cottura e prevede la pittura del grezzo crudo.
Un'azienda ceramica che produce vasi dispone di:

· 5 operai per la fase (1) pagati a ora che producono 1 vaso in 30 minuti al costo di 2 € (<u>1A</u>) oppure in 20 minuti al costo di 3 € (<u>1B</u>);

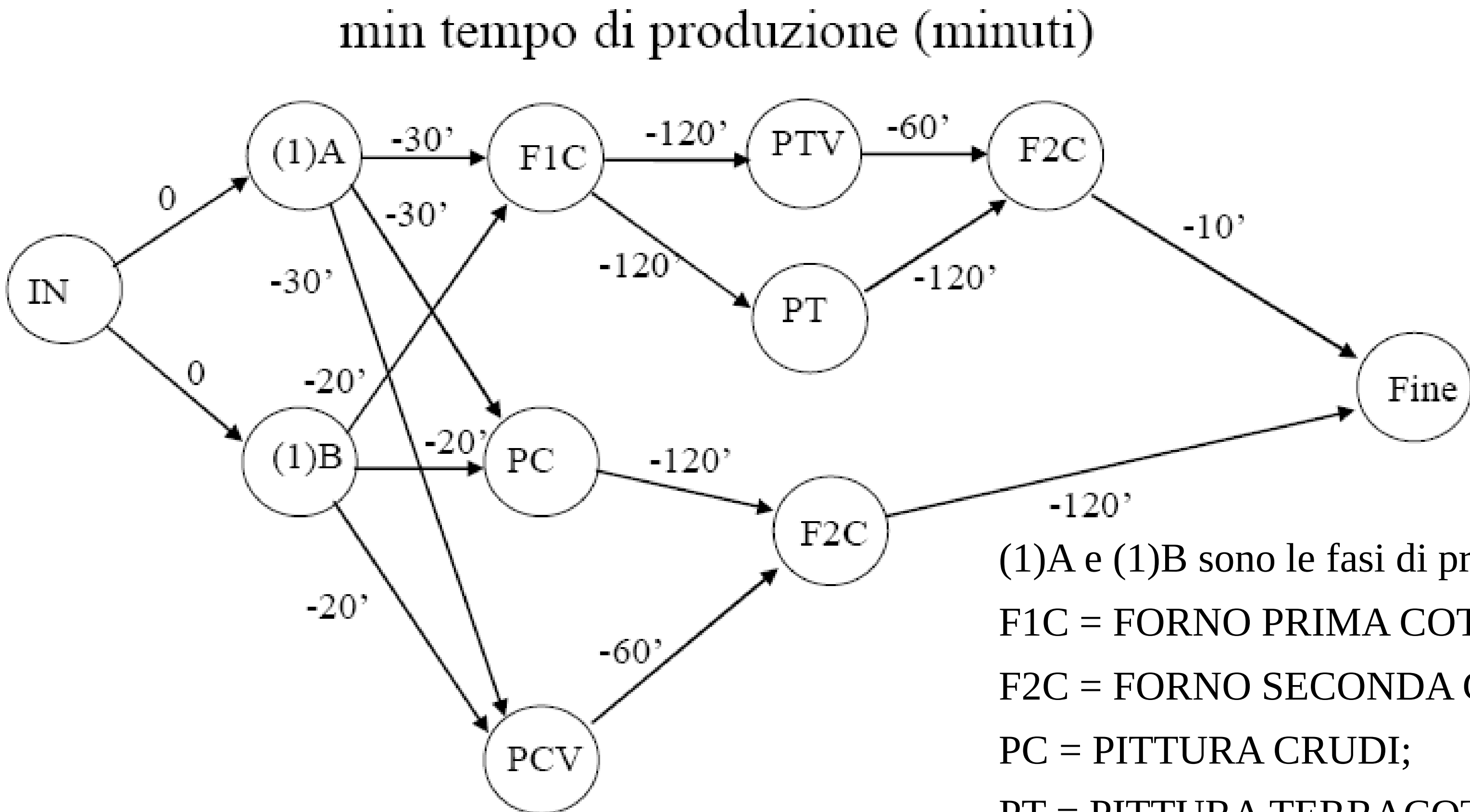
· un forno per I cottura (<u>F1C</u>) che cuoce un vaso crudo in 2 ore al costo di 0,9 €/vaso;

· un forno per II cottura (<u>F2C</u>) che cuoce vasi crudi in 2 ore al costo di 1,3 €/vaso e terrecotte in 10 minuti al costo di 0,3 €/vaso.

Per la pittura l'azienda si rivolge ad artisti esterni pagati a cottimo: nella modalità *standard* un pittore prende 6 €/vaso per la pittura dei vasi crudi (<u>PC</u>) e 5 €/vaso per la pittura di una terracotta (<u>PT</u>) e restituisce il vaso dipinto dopo 2 ore.
Nella modalità *veloce* (<u>PCV</u> e <u>PTV</u>) viene restituito il vaso dipinto dopo 1 ora con un aumento di costo del 20%. Si vuole determinare la modalità di produzione di **un vaso** a <u>costo minimo</u> e la modalità di produzione di un vaso nel <u>tempo minimo</u>.

Esercizi su problemi di percorso minimo (2)

Il problema di determinare la modalità di produzione di un vaso nel tempo minimo si può formulare come problema di percorso minimo sul digrafo che segue.



(1)A e (1)B sono le fasi di prima cottura

F1C = FORNO PRIMA COTTURA;

F2C = FORNO SECONDA COTTURA

PC = PITTURA CRUDI;

PT = PITTURA TERRACOTTA

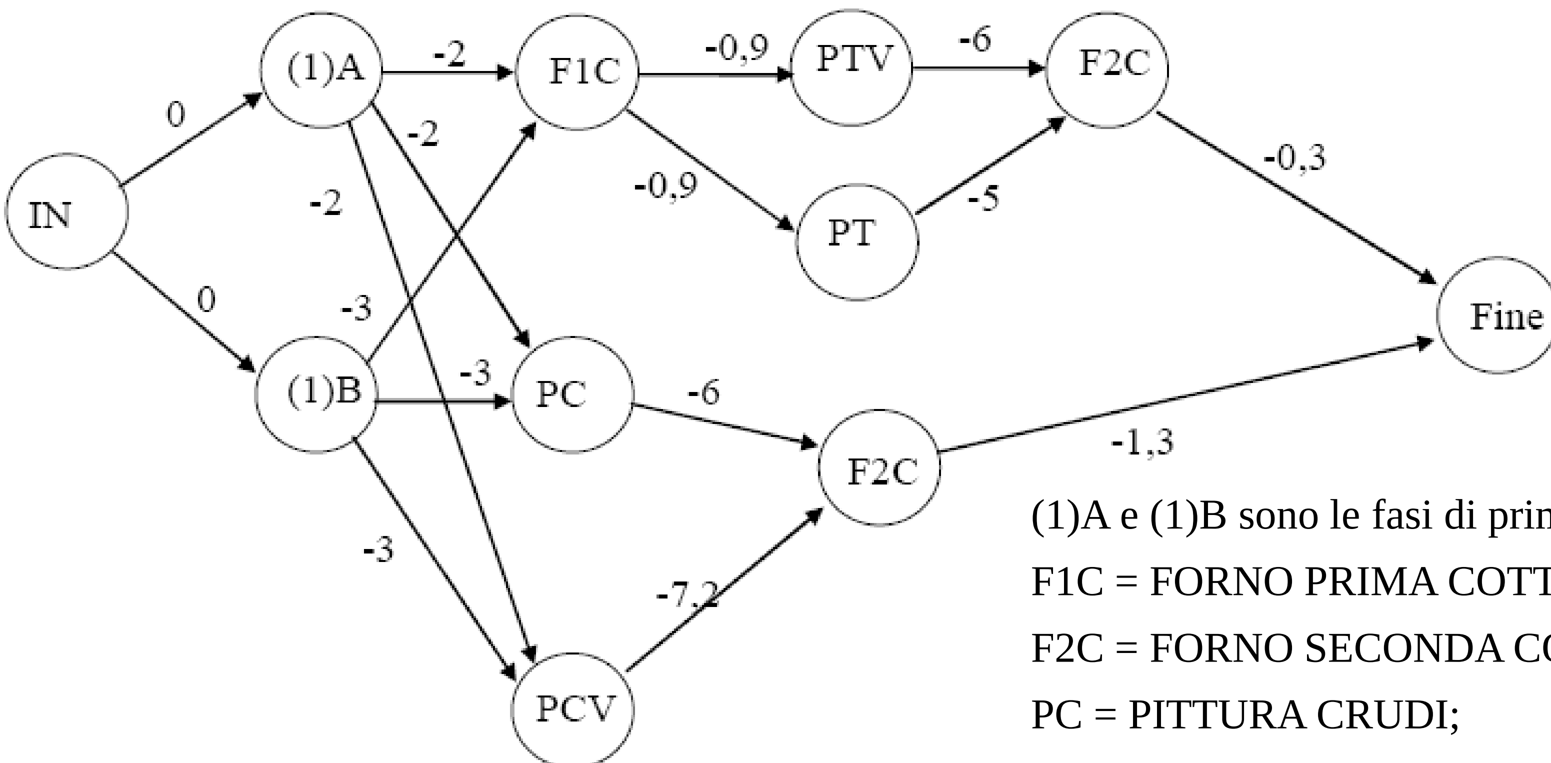
PCV = PITTURA CRUDI VELOCE

PTV = PITTURA TERRACOTTA VELOCE

Esercizi su problemi di percorso minimo (3)

Cambiando i pesi del digrafo si può poi risolvere anche il problema di determinare la modalità di produzione di un vaso a costo minimo:

min costo di produzione (euro)



(1)A e (1)B sono le fasi di prima cottura

F1C = FORNO PRIMA COTTURA;

F2C = FORNO SECONDA COTTURA

PC = PITTURA CRUDI;

PT = PITTURA TERRACOTTA

PCV = PITTURA CRUDI VELOCE

PTV = PITTURA TERRACOTTA VELOCE

Esercizi su problemi di massimo flusso (1)

Un impianto manifatturiero è composto da 4 macchine: pesatura, compressione, inscatolamento e stampa delle confezioni. Avete a disposizione 4 operai.

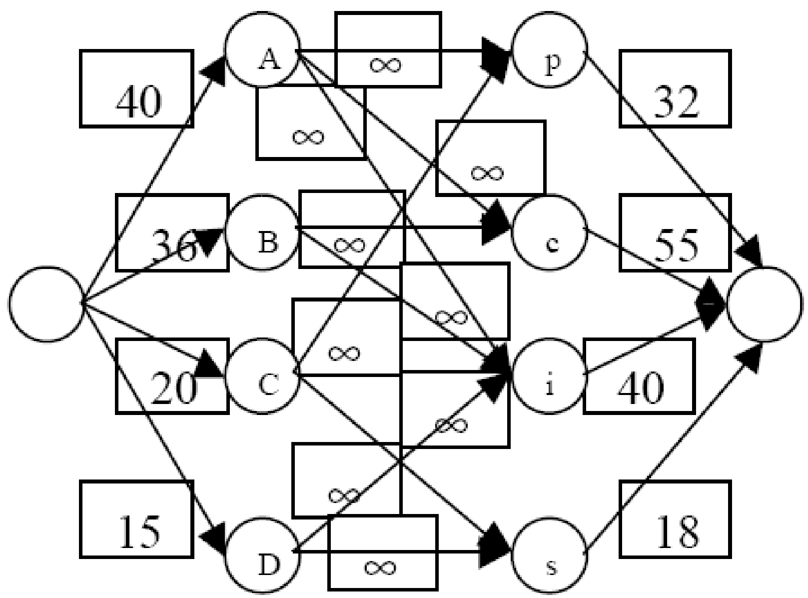
Dovete decidere quante ore ogni operaio deve dedicare ad ogni macchina in modo tale da massimizzare il numero di ore lavorate, rispettando i vincoli sulle compatibilità operaio/macchina, sul massimo numero di ore settimanali che ogni operaio può lavorare, e sul massimo numero di ore settimanali che ogni macchina può lavorare.

	Ore	Pesatura	Compressione	Inscatolamento	Stampa
Alberto	40	Si	Si	Si	No
Bernardo	36	No	Si	Si	No
Carlo	20	Si	No	No	Si
Daniele	15	No	No	Si	Si
Ore		32	55	40	18

<u>Domanda</u>: Formulare il problema di massimo flusso su un digrafo

Esercizi su problemi di massimo flusso (2)

Si introduce un nodo per ogni operaio e un nodo per ogni macchina, oltre ad un nodo sorgente ed un nodo pozzo. La capacità degli archi (sorgente, operaio) rappresenta quante ore di lavoro può lavorare un operaio nella settimana, mentre la capacità degli archi (macchina, pozzo) rappresenta il numero di ore che le varie macchine possono lavorare nella settimana. Infine sono aggiunti degli archi (operaio, macchina) per rappresentare l'accoppiamento tra l'operaio e la macchina. Questi archi avranno capacità infinita, in quanto non ci sono vincoli del tipo "massimo numero di ore di lavoro di un operaio su una macchina". Nel caso in cui un operaio non sia in grado di lavorare su una macchina allora l'arco corrispondente non sarà nel digrafo.



A Alberto

B Bernardo

C Carlo

D Daniele

p pesatura

c compressione

i inscatolamento

s stampa

Esercizi su problemi di massimo flusso (3)

La produzione del pane su scala industriale segue un processo in 5 fasi: (1) preparazione ingredienti, (2) impasto in gradienti, (3) prima cottura, (4) trattamento superficiale pane, (5) seconda cottura.

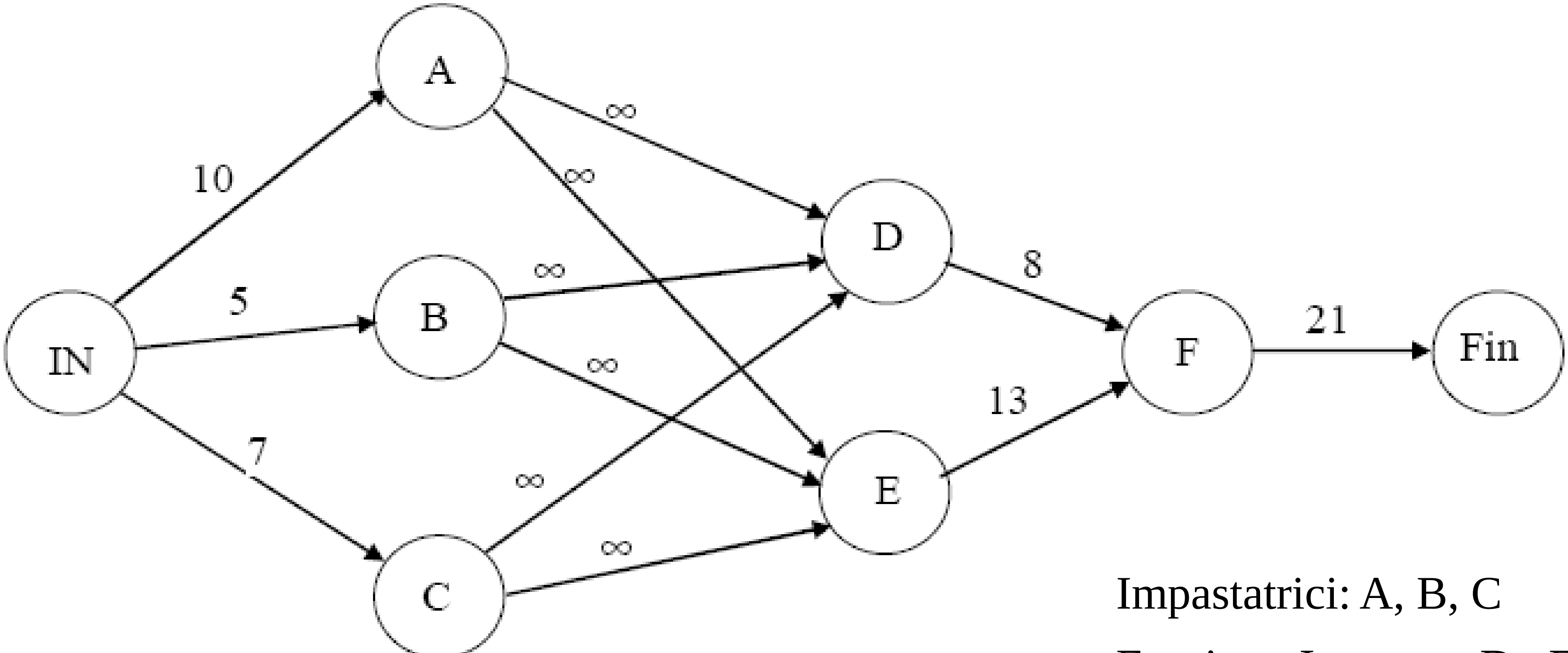
Un forno dispone di:

- 3 impastatrici A,B,C di capacità (in kg di farina per ora) 10, 5, 7 risp.;
- 2 forni D,E per I cottura di capacità (in kg di farina per ora) 8, 13 risp.;
- 1 forno F per II cottura di capacità (in kg di farina per ora) 21;
- Personale largamente sufficiente a seguire tutte le lavorazioni manuali.

<u>Domanda</u>: Si vuole determinare la produzione massima del forno (in kg di farina per ora)

Esercizi su problemi di massimo flusso (4)

Formulazione come problema di massimo flusso su un digrafo:



Impastatrici: A, B, C

Forni per I cottura: D , E

Forno per II cottura: F

Esercizi su problemi di massimo flusso (5)

La *ConGelo* produce surgelati e deve pianificare la produzione giornaliera per la 'prossima' settimana (composta da sette giorni lavorativi) nel suo stabilimento.

Ogni giorno lo stabilimento può produrre fino a 2000 chili di verdure surgelate.

La verdura fresca viene consegnata giornalmente allo stabilimento e deve essere lavorata in giornata per evitare deperimenti, mentre una volta surgelata la verdura può essere conservata nel magazzino frigorifero. Sapendo che:

· il magazzino frigorifero ha capacità di 40 quintali

· nel primo giorno il magazzino frigorifero non contiene verdura surgelata

· a fine settimana è possibile lasciare la verdura congelata all'interno del magazzino

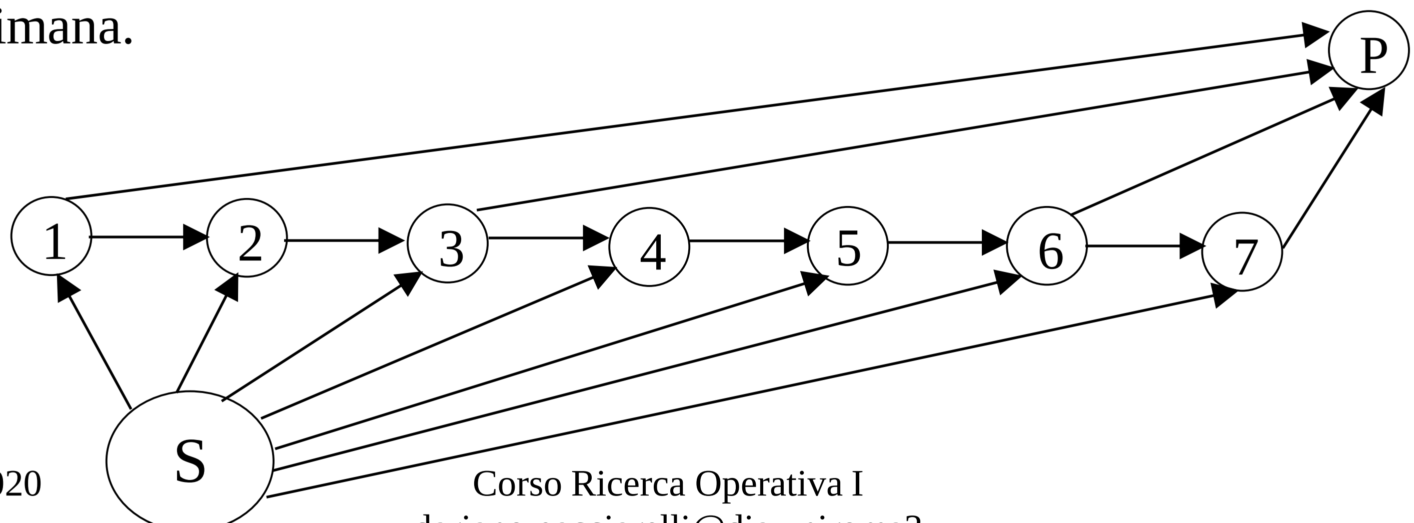
· le spedizioni sono programmate nei seguenti giorni (lunedì, mercoledì, sabato) e sono effettuate con un camion frigorifero con capacità massima di 3.5 tonnellate.

· gli approvvigionamenti giornalieri saranno di 2000, 1000, 1500, 2000, 2000, 1000, 1000 chili.

Si pianifichi la produzione di surgelati in maniera da utilizzare al meglio l'impianto della ConGelo. Formulare il problema su un digrafo (rete) opportuno.

Esercizi su problemi di massimo flusso (6)

Il problema si può formulare come un problema di massimo flusso su un digrafo composto da sette nodi (uno per ogni giorno) rappresentanti il quantitativo di verdura surgelata presente nel magazzino (M1…M7) più un nodo S ed un nodo P. Gli archi (S,M1)…(S,M7) sono la verdura fresca in ingresso allo stabilimento con capacità massima pari al massimo quantitativo di verdura fresca allo stabilimento. Gli archi (M1,M2)…(M6,M7) rappresentano il quantitativo di verdura congelata che rimane nel magazzino da un giorno al successivo, capacità max 4 tonnellate. Gli archi (M1,P),(M3,P),(M6,P) sono le spedizioni di verdura congelata con capacità max 3.5 tonnellate. L'arco (M7,P) è la verdura congelata nel magazzino a fine settimana.



Esercizi su problemi di flusso di costo minimo (1)

La produzione del pane su scala industriale segue un processo in cinque fasi:
(1) preparazione ingredienti, (2) impasto in gradienti, (3) prima cottura,
(4) trattamento superficiale pane, (5) seconda cottura.

Un forno dispone di:

· 3 impastatrici A,B,C di capacità (in quintali di farina al giorno) 10, 5, 7 risp. e di costo 11, 12, 10 rispettivamente (in € per quintale);

· 2 forni D,E per prima cottura di costo (in € per quintale) 8, 13 risp.;

· 1 forno F per seconda cottura di costo (in € per quintale) 21;

· Personale largamente sufficiente a seguire tutte le lavorazioni manuali.

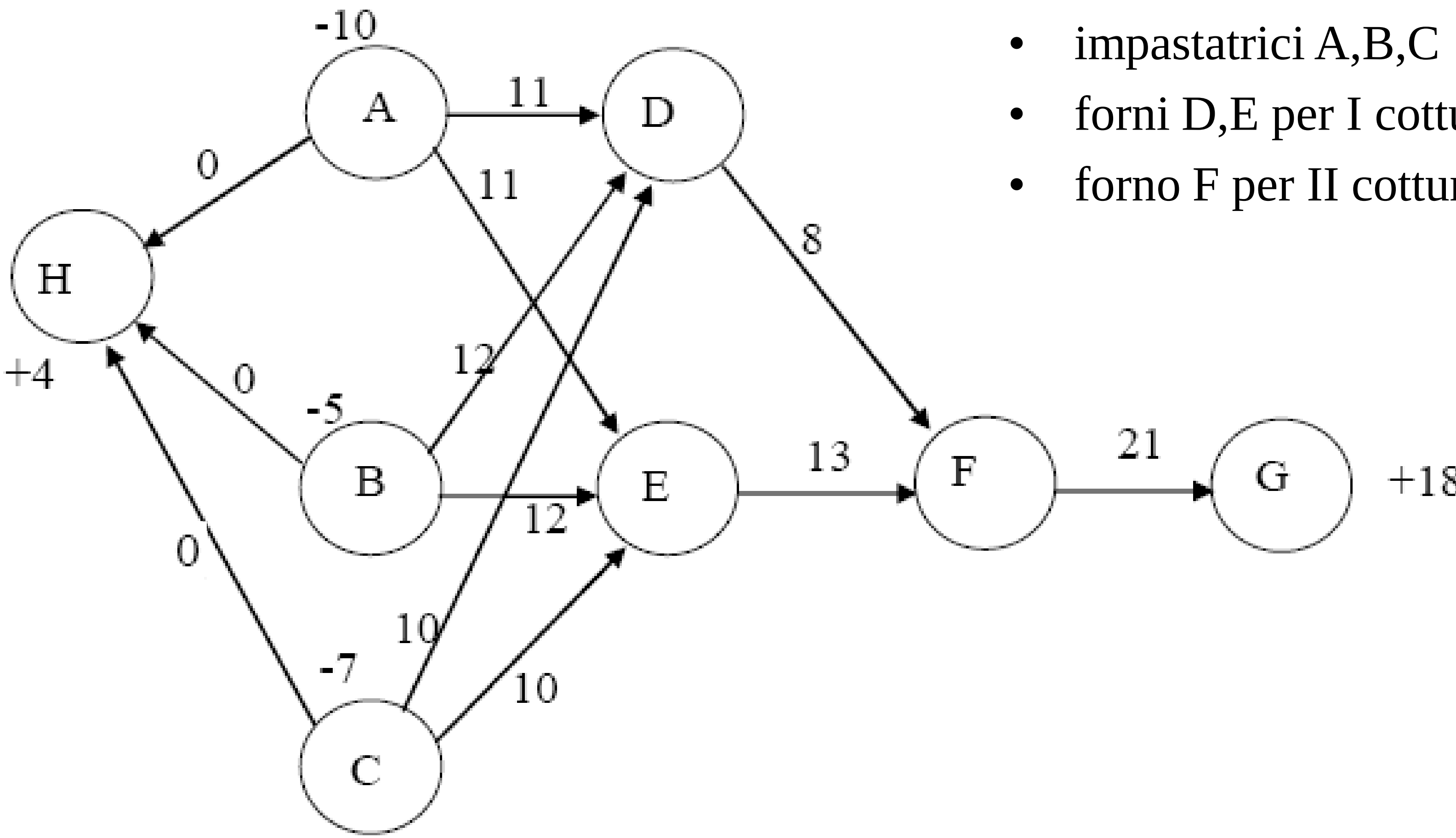
Gli ordinativi del giorno richiedono di produrre 18 quintali di pane.

Si vuole determinare la produzione di costo minimo del forno assumendo che il prodotto non perda peso nelle varie fasi di lavorazione e che la capacità dei forni sia infinita.

<u>Domanda</u>: Formulare il problema come un opportuno problema su un digrafo

Esercizi su problemi di flusso di costo minimo (2)

Il problema si può formulare come problema di flusso di costo minimo sul digrafo che segue (in cui G rappresenta gli ordini da soddisfare e H la capacità delle impastatrici inutilizzate) :



- impastatrici A,B,C
- forni D,E per I cottura
- forno F per II cottura

Esercizi su problemi di flusso di costo minimo (3)

La produzione di ceramica può effettuarsi con due processi.

La bicottura prevede: (1) preparazione di un grezzo crudo, (2) cottura 1, (3) pittura terracotta, (4) cottura 2.

La monocottura evita la fase di cottura 1 e prevede la pittura del grezzo crudo.

Un’azienda ceramica che produce vasi dispone di:

· 4 operai per la fase (1) pagati a ora, ciascun operaio produce 2 vasi crudi l’ora e lavora 7 ore/giorno per 5 giorni/settimana al costo di 10 €/ora, può lavorare ulteriori 2 ore/giorno di straordinario al costo di 14 €/ora;

· un forno per la cottura 1 che cuoce vasi crudi al costo di 0,2 €/vaso;

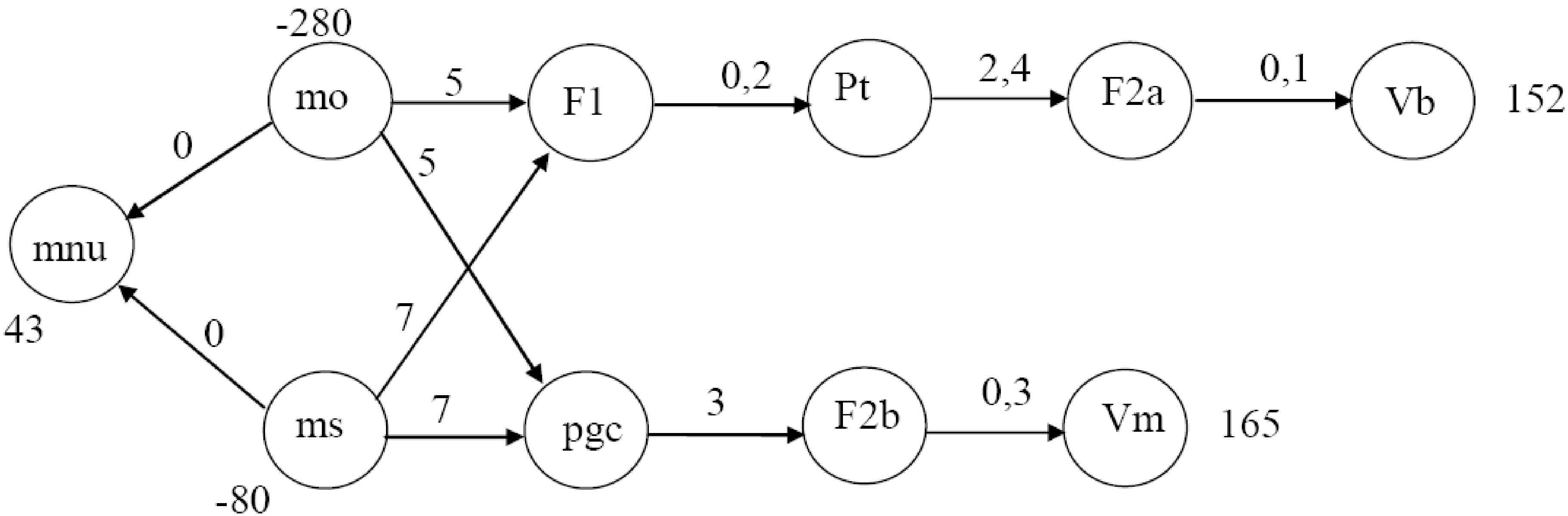
· un forno per la cottura 2 che cuoce vasi crudi al costo di 0,3 €/vaso e terrecotte al costo di 0,1 €/vaso;

Per la pittura l’azienda si rivolge ad artisti esterni pagati a cottimo: 3 €/vaso per la pittura dei vasi crudi e 2,4 €/vaso per la pittura di una terracotta. Tra una settimana dovranno essere pronti 152 vasi in monocottura e 165 vasi in bicottura.

Si vuole determinare la produzione di costo minimo e la formulazione via digrafi.

Esercizi su problemi di flusso di costo minimo (4)

Il problema si può formulare come problema di flusso di costo minimo sul digrafo:



mo: manodopera con lavoro ordinario (disponibilità 4*2*7*5=280)

ms: manodopera con lavoro straordinario (disponibilità 4*2*2*5=80)

F1: forno prima cottura; **pgc**: pittura grezzo crudo; **Pt**: pittura terracotta

F2a (**F2b**): forno seconda cottura per cottura terrecotte (grezzi crudi)

Vb: vasi bicottura (domanda 152); **Vm**: vasi monocottura (domanda 165)

mnu: manodopera non utilizzata (domanda pari a <u>disponibilità tot</u> 360 – <u>domanda tot</u> 317 =43)

Esercizi su grafi bipartiti (1)

La Commissione Edilizia del Dipartimento deve decidere come assegnare degli uffici vuoti (3 stanze singole, 2 doppie e 1 tripla) ai dottorandi afferenti a diversi gruppi di ricerca attivi nel Dipartimento.
Ad ogni gruppo di ricerca (Reti, Automatica, Basi di Dati e Ricerca Operativa) è chiesto di dare una valutazione da 1 a 10 ad ogni stanza.
Sapendo che i 4 gruppi di ricerca hanno espresso le seguenti valutazioni e che il numero di dottorandi da assegnare è 3 per Reti, 2 per Automatica, 3 per Basi di Dati ed 1 per Ricerca Operativa.

	Singola 1	Singola 2	Singola 3	Doppia 1	Doppia 2	Tripla 1
Reti (3)	5	3	5	2	5	1
Automatica (2)	7	6	1	1	3	2
Basi di Dati (3)	4	4	6	4	1	1
Ricerca Operativa (1)	1	8	7	1	1	2

<u>Domanda</u>: Formulare il problema di assegnare gli uffici ai vari gruppi di ricerca in maniera da massimizzare la soddisfazione complessiva.

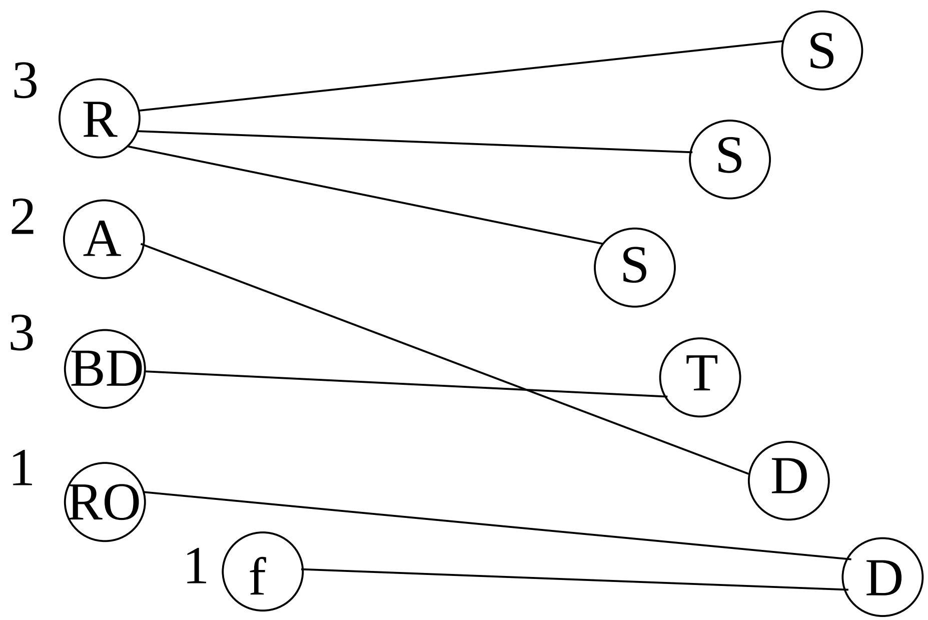
Esercizi su grafi bipartiti (2)

Il problema è formulabile come un problema di flusso a costo minimo su rete non capacitata. In particolare il grafo sarà un grafo bipartito.

I lati tra questi due insiemi saranno pesati con le valutazioni delle stanze da parte dei gruppi di ricerca.

Si osservi come il numero di dottorandi (9) sia inferiore al numero di posti disponibili (10) quindi sarà necessario introdurre un gruppo fittizio di lati nulli con un dottorando in maniera tale da bilanciare la domanda con l’offerta.

Esempio di soluzione:



Esercizi su grafi bipartiti (3)

Dovete pianificare la produzione su una macchina di uno stabilimento industriale. Sapendo che la macchina è in grado di produrre un pezzo l'ora, e che il turno lavorativo è composto da 6 ore, dovete decidere l'ordine di produzione di 6 pezzi. Ogni pezzo è caratterizzato da un'ora di rilascio che indica l'ora a partire dalla quale il pezzo è disponibile per essere lavorato, un'ora di consegna che indica entro che ora il pezzo può essere consegnato senza pagare una penale, e da un valore di penale che indica il costo da pagare per ogni ora di ritardo sulla consegna.

Pezzo	Rilascio	Consegna	Penale
A	1	2	10
B	1	3	3
C	2	3	5
D	2	4	7
E	3	5	2
F	4	5	8

Formulare il problema di minimizzare i costi di penale con un grafo opportuno

Esercizi su grafi bipartiti (4)

Per formulare il problema si può ricorrere ad un grafo bipartito in cui 6 vertici indicheranno i pezzi A, B, …, F, mentre altri sei vertici indicheranno le 6 ore a disposizione per lavorare i pezzi. Il peso dei lati sarà dato dal costo della penale che bisogna pagare per produrre il pezzo nell'ora. Il problema risultante sarà un problema di flusso a costo minimo, dove tutti i vertici "pezzo" generano una unità di flusso, e tutti i vertici "ora" assorbono una unità di flusso.

Il grafo sarà composto dai seguenti lati:

(A,1) : 0	(B,3) : 0	(C,6) : 15	(E,5) : 0
(A,2) : 0	(B,4) : 3	(D,2) : 0	(E,6) : 2
(A,3) : 10	(B,5) : 6	(D,3) : 0	(F,4) : 0
(A,4) : 20	(B,6) : 9	(D,4) : 0	(F,5) : 0
(A,5) : 30	(C,2) : 0	(D,5) : 7	(F,6) : 8
(A,6) : 40	(C,3) : 0	(D,6) : 14	
(B,1) : 0	(C,4) : 5	(E,3) : 0	
(B,2) : 0	(C,5) : 10	(E,4) : 0	

Esercizi su grafi bipartiti (5)

- Volete calcolare il massimo numero di studenti della facoltà di Ingegneria che possono partecipare al programma Erasmus.
- La facoltà di Ingegneria si divide in 4 Dipartimenti (Informatica, Elettronica, Meccanica, Civile), ogni dipartimento ha ricevuto un numero di domande diverso, 20 per Informatica, 16 per Elettronica, 15 per Meccanica, 10 per Civile.
- Sono disponibili varie convenzioni con diverse università straniere. In Spagna si possono mandare 30 studenti, in Germania 5 studenti, in Norvegia 5 studenti, 10 in Francia ed infine 5 studenti in Gran Bretagna.
- Le convenzioni attivate non permettono di mandare più di 10 studenti di un dipartimento nello stesso paese, inoltre gli studenti di Informatica non possono andare in Francia, gli studenti di Elettronica in Spagna, gli studenti di Meccanica in Norvegia, e gli studenti di Civile non possono andare in Germania.
- Si formuli il problema di massimizzare il numero di studenti Erasmus come un problema di <u>massimo flusso</u> su un digrafo (rete) opportuno.

Esercizi su grafi bipartiti (6)

- La rete di flusso sarà un grafo bipartito, in cui il primo insieme dei vertici sarà formato da 4 vertici che rappresentano i Dipartimenti (I,E,M,C), mentre il secondo insieme dei vertici sarà formato dalle 5 nazioni (S,G,N,F,GB). Oltre a questi vertici ci saranno i vertici sorgente (0) e pozzo (*).
- I lati che compongono la rete si possono dividere in tre insiemi:

1. Il primo insieme connette il vertice sorgente con i 4 vertici dei dipartimenti, e ogni lato in questo insieme avrà come capacità il numero di domande di quel dipartimento (capacità 20 per il lato (*,I), 16 per il lato (*,E) e così via).
2. Il secondo gruppo di lati che rappresenta le convenzioni attivate, connette i vertici dei dipartimenti con i vertici delle nazioni. I lati in questo gruppo avranno tutti capacità pari a 10. Si noti come alcuni lati non saranno presenti, per via dell'assenza di convenzione tra alcuni dipartimenti ed alcune nazioni, come ad esempio il lato (I,F) o (E,S).
3. Il terzo gruppo di lati connette i vertici delle nazioni con il vertice *. I lati in questo gruppo saranno capacitati con il massimo numero di studenti Erasmus che una nazione può assorbire (es. 30 per il lato (S,*)).

Altri esempi di applicazioni

- Problemi di movimentazione efficientemente di entità (macchine, treni, petrolio, energia, pacchetti, semilavorati) in una rete (composta da strade, ferrovie, tubature, linee, elettriche, internet)
- Problemi di project management
- Problemi di allineamento di sequenze di DNA
- Problemi di logistica e produzione industriale

Corsi in cui studieremo applicazioni della teoria dei grafi:

Automazione Industriale, Ottimizzazione della Logistica,

Gestione di Progetti, Elettrotecnica, Reti di Calcolatori, …