

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi con soluzione

1. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

(a) $y' - 2y = 1$

(b) $y' + y = e^x$

(c) $y' - 2y = x^2 + x$

(d) $3y' + y = 2e^{-x}$

(e) $y' + 3y = e^{ix}$

(f) $y' + 3y = \cos x$

(g) $y' + 2xy = x$

(h) $xy' + y = 3x^3 - 1 \quad (x > 0)$

(i) $y' + e^x y = 3e^x$

(j) $y' - (\tan x)y = e^{\sin x} \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$

(k) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

(l) $y' + (\cos x)y = \sin 2x$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy lineari del primo ordine:

(a)
$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = e^{-\sin x} \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y' - 2y = \frac{e^{3x}}{e^x + 1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} y' + y = \sin x + 3 \cos 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} y' + iy = x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} y' - y = e^{-ix} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(g)
$$\begin{cases} y' = (\cos x)y + \cos^3 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3. (a) Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $x^2 y' + 2xy = 1$ nell'intervallo $x > 0$ tende a zero per $x \rightarrow +\infty$.
(b) Calcolare la soluzione y che soddisfa $y(2) = 2y(1)$.

4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili specificando, ove possibile, l'intervallo massimale I delle soluzioni:

(a) $y' = x^2 y$

(b) $yy' = x$

(c) $y' = \frac{x+x^2}{y-y^2}$

(d) $y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x}$

(e) $y' = x^2 y^2 - 4x^2$

5. (a) Utilizzando il teorema di esistenza e unicità, dimostrare che il problema di Cauchy
- $$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{ha soluzione unica per ogni } x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$
- (b) Dimostrare che la soluzione è

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}.$$

(Si noti che per $y_0 = 0$ si ottiene la soluzione costante $y = 0$.)

- (c) Determinare l'intervallo massimale della soluzione in funzione del dato iniziale y_0 .

6. (a) Utilizzando il teorema di esistenza e unicità, dimostrare che il problema di Cauchy
- $$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{ha soluzione unica per ogni } y_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}.$$
- (b) Determinare la soluzione massimale.
- (c) Dimostrare che il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_0) = 0$ ha più di una soluzione, esibendo almeno 2 soluzioni distinte.

Gli esercizi 7 e 8 riguardano il metodo delle approssimazioni successive per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Ricordiamo che le approssimazioni successive per il problema (1) sono le funzioni $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ definite da

$$\phi_0(x) = y_0, \quad \phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y)$ (f continua e Lipschitziana in un rettangolo chiuso del tipo $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$) si dimostra che le $\phi_n(x)$ convergono per $n \rightarrow \infty$ ad una soluzione $\phi(x)$ del problema (1) per ogni x in un intorno di x_0 e che tale soluzione è unica.

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3y + 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

- (a) Calcolare le prime 4 approssimazioni successive $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$.
- (b) Calcolare la soluzione esatta.

(c) Confrontare i risultati ottenuti in a) e in b).

8. Per ognuno dei seguenti problemi di Cauchy calcolare le prime 4 approssimazioni successive $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$:

(a) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$

(b) $y' = 1 + xy, \quad y(0) = 1$

(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 0$

(d) $y' = y^2, \quad y(0) = 1$

(e) $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$

(f) $y' = 1 - 2xy, \quad y(0) = 0$.

9. Calcolare l'integrale generale (reale se i coefficienti sono reali) delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine:

(a) $y'' - 4y = 0$

(b) $3y'' + 2y' = 0$

(c) $y'' + 16y = 0$

(d) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

(e) $y'' - 4y' + 5y = 0$

(f) $y'' + 2iy' + y = 0$

(g) $y'' - 2iy' - y = 0$

(h) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0$.

10. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(b) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(c) $y'' + 10y = 0, \quad y(0) = \pi, \quad y'(0) = \pi^2$.

(d) $y'' + (4i + 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(e) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

11. Calcolare l'integrale generale (reale se i coefficienti sono reali) delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:

(a) $y''' + y = 0$

(b) $y''' - 8y = 0$

(c) $y^{(4)} - 16y = 0$

(d) $y^{(4)} + 16y = 0$

(e) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

(f) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

(g) $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$

(h) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

- (i) $y^{(4)} + y' = 0$
- (j) $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$
- (k) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$
- (l) $y^{(5)} + y = 0$
- (m) $y^{(6)} + y = 0$
- (n) $y^{(6)} - y = 0$
- (o) $y^{(8)} + 8y^{(6)} + 24y^{(4)} + 32y'' + 16y = 0$
- (p) $y^{(10)} = 0$
- (q) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$
- (r) $y^{(100)} + 100y = 0$
- (s) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$
- (t) $y''' - 3y' - 2y = 0$
- (u) $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0$
- (v) $y''' - 3iy'' - 3y' + iy = 0$
- (w) $y''' - iy'' + 4y' - 4iy = 0$
- (x) $y''' + iy'' - 2y' - 2iy = 0$
- (y) $y^{(4)} - iy = 0$
- (z) $y^{(4)} + 4iy''' - 6y'' - 4iy' + y = 0$

12. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $y''' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$
- (b) $y''' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$
- (c) $y^{(4)} + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$
- (d) $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$

13. Calcolare la funzione analitica

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

in termini di funzioni elementari. (Suggerimento: usando il teorema di derivazione per serie si dimostra che y soddisfa l'equazione differenziale $y''' - y = 0$, con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.)

14. Calcolare la funzione analitica

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots$$

in termini di funzioni elementari.

15. Dimostrare che se $k \in \mathbb{N}^+$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\alpha_j x}, \quad \text{dove} \quad \alpha_j = \sqrt[k]{1} = e^{i \frac{2\pi j}{k}} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1).$$

16. Utilizzando il metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee del secondo ordine:

(a) $y'' + 4y = \cos x$

(b) $y'' + 4y = \sin 2x$

(c) $y'' - 3y' + 2y = x^2$

(d) $4y'' - y = e^x$

(e) $6y'' + 5y' - 6y = x$

(f) $y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$

(g) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$

(h) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$

(i) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

(j) $y'' - y' - 2y = e^{-x} + x^2 + \cos x$

(k) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + \cos 3x$

(l) $y'' + y = x e^x \cos 2x$

(m) $y'' + 2iy' + y = x$

(n) $y'' - 2iy' - y = e^{ix} - 2e^{-ix}$

(o) $y'' + iy' + 2y = 2 \operatorname{ch} 2x + e^{-2x}$

17. Utilizzando il metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee:

(a) $y''' - y' = x$

(b) $y''' - 8y = e^{ix}$

(c) $y''' - 8y = \cos x$

(d) $y''' - 8y = \sin x$

(e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x}$

(f) $y''' = x^2 + e^{-x} \sin x$

(g) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = x e^x \sin x$

(h) $y^{(4)} + 16y = \cos x$

(i) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = e^x$

(j) $y^{(4)} - y = e^x$

(k) $y^{(4)} - y = e^{ix}$

(l) $y^{(4)} - y = \cos x$

(m) $y^{(4)} - y = \sin x$

- (n) $y^{(4)} - y = e^x \cos x$
(o) $y^{(4)} - y = x e^x \sin x$

18. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$
(b) $\begin{cases} y'' - y = x e^x \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$
(c) $\begin{cases} y''' + y'' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$
(d) $\begin{cases} y''' + y'' + y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$
(e) $\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

19. Utilizzando il metodo della risposta impulsiva risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
(b) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
(c) $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
(d) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
(e) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
(f) $\begin{cases} y'' + y = \tan x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
(g) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\sin x} \\ y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$
(h) $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$
(i) $\begin{cases} y'' - y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
(j) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{1+\cos x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

- (k) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
- (l) $\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x+1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$
- (m) $\begin{cases} y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^x}{e^x+1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$
- (n) $\begin{cases} y''' + 4y' = \frac{1}{\sin 2x} \\ y(\pi/4) = y'(\pi/4) = y''(\pi/4) = 0. \end{cases}$

20. Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \quad \text{per } x > 0.$$

- (a) Dimostrare che ci sono soluzioni della forma x^r con r costante.
- (b) Trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti per $x > 0$ dimostrando la loro indipendenza lineare.
- (c) Determinare le 2 soluzioni che soddisfano le condizioni iniziali $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ e $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.
21. (a) Dimostrare che ci sono soluzioni della forma x^r con r costante dell'equazione differenziale

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

- (b) Determinare 3 soluzioni linearmente indipendenti per $x > 0$ dimostrando la loro indipendenza lineare.
22. In ognuno dei seguenti casi viene data un'equazione differenziale, una funzione $y_1(x)$ e un intervallo. Verificare che y_1 soddisfa l'equazione nell'intervallo indicato, e trovare una seconda soluzione linearmente indipendente utilizzando il metodo di riduzione dell'ordine.

- (a) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$, $y_1(x) = x^3$ ($x > 0$).
- (b) $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y_1(x) = x$ ($x > 0$).
- (c) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$, $y_1(x) = e^{x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).
- (d) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$, $y_1(x) = e^x$ ($x > 0$).
- (e) $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y_1(x) = 1$ ($-1 < x < 1$).
- (f) $x^2y'' + y' - \frac{1}{x}y = 0$, $y_1(x) = x$ ($x > 0$).
- (g) $x^2y'' - \frac{1}{2}xy' - y = 0$, $y_1(x) = x^2$ ($x > 0$).
- (h) $x^2y'' + xy' - y = 0$, $y_1(x) = x$ ($x > 0$).
- (i) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $y_1(x) = x$ ($x > 0$).
- (j) $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0$, $y_1(x) = x^2$ ($x > 0$).
- (k) $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$, $y_1(x) = x^{1/2}$ ($x > 0$).
- (l) $y'' - \frac{1}{x \log x}y' + \frac{1}{x^2 \log x}y = 0$, $y_1(x) = x$ ($x > 1$).

- (m) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $y_1(x) = 1/x$ ($x > 0$).
 (n) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$ ($-1 < x < 1$).

23. Utilizzando il metodo della variazione delle costanti determinare una soluzione particolare delle seguenti equazioni differenziali lineari non omogenee.

- (a) $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}$ (si veda l'esercizio 22 (d)).
 (b) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 2x^3$ (si veda l'esercizio 22 (i)).
 (c) $y'' - \frac{2}{x^2}y = x$ (si veda l'esercizio 22 (j)).

24. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

- (a) $\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = x^2 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$ (si veda l'esercizio 22 (b)).
 (b) $\begin{cases} x^2y'' - 2y = 2x - 1 \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$ (si veda l'esercizio 22 (j)).
 (c) $\begin{cases} y'' - \frac{1}{x \log x}y' + \frac{1}{x^2 \log x}y = \log x \\ y(e) = 0, \quad y'(e) = 0 \end{cases}$ (esercizio 22 (l)).

25. (a) Determinare 2 soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0$$

nell'intervallo $x > 0$, cercandole nella forma $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$.

(b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = x^2.$$

SOLUZIONI

1. Si usa la formula per l'integrale generale dell'equazione lineare $y' = a(x)y + b(x)$ con $a, b \in C^0(I)$, cioè

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx, \quad (2)$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x)$ sull'intervallo I .

- (a) $y(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$ ($k \in \mathbb{R}$).
- (b) $y(x) = \frac{1}{2}e^x + ke^{-x}$ ($k \in \mathbb{R}$).
- (c) $y(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + ke^{2x}$ ($k \in \mathbb{R}$).
- (d) $y(x) = -e^{-x} + ke^{-x/3}$ ($k \in \mathbb{R}$).
- (e) $y(x) = \frac{3-i}{10}e^{ix} + ke^{-3x}$ ($k \in \mathbb{C}$).
- (f) $y(x) = \frac{1}{10}(3 \cos x + \sin x) + ke^{-3x}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Si noti che la funzione $y_1(x) = \frac{1}{10}(3 \cos x + \sin x)$, che è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, è precisamente la parte reale della soluzione particolare complessa $y_p(x) = \frac{3-i}{10}e^{ix}$ trovata nel punto precedente (con calcoli più semplici). Il motivo è che $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$. La parte immaginaria di y_p , cioè la funzione $y_2(x) = \frac{1}{10}(-\cos x + 3 \sin x)$, soddisfa invece l'equazione $y' + 3y = \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.

- (g) $y(x) = \frac{1}{2} + ke^{-x^2}$ ($k \in \mathbb{R}$).
- (h) $y(x) = \frac{3}{4}x^3 - 1 + \frac{k}{x}$ ($k \in \mathbb{R}$)
- (i) $y(x) = 3 + ke^{-e^x}$ ($k \in \mathbb{R}$)
- (j) $y(x) = \frac{1}{\cos x}(e^{\sin x} + k)$ ($k \in \mathbb{R}$)
- (k) $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + ke^{-x^2}$ ($k \in \mathbb{R}$)
- (l) $y(x) = 2(\sin x - 1) + ke^{-\sin x}$ ($k \in \mathbb{R}$)

2. Si calcola l'integrale generale tramite la formula (2), determinando poi la costante di integrazione k dalla condizione iniziale. Si può anche usare la formula

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt$$

che fornisce direttamente la soluzione del problema di Cauchy lineare con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Qui $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ è la primitiva di $a(x)$ che si annulla nel punto $x_0 \in I$.

- (a) $y(x) = x e^{-\sin x}$
- (b) $y(x) = e^{2x} \log\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$
- (c) $y(x) = x e^x - e^x \log(\operatorname{ch} x)$
- (d) $y(x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{5} \cos 2x + \frac{6}{5} \sin 2x - \frac{1}{10} e^{-x}$
- (e) $y(x) = 1 - ix + e^{-ix}$
- (f) $y(x) = \frac{-1+i}{2}(e^{-ix} - e^x)$
- (g) $y(x) = \sin^2 x + 2 \sin x + 1 - e^{\sin x}$

3. (a) L'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{k}{x^2}$ ($x > 0$, $k \in \mathbb{R}$), pertanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.
 (b) $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{6}{7x^2}$
4. Si usa la formula che fornisce implicitamente le soluzioni non costanti dell'equazione a variabili separabili $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$, cioè

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x) dx.$$

A queste vanno aggiunte le eventuali soluzioni costanti $y(x) = \bar{y}$, $\forall x$, dove \bar{y} sono gli zeri di $b(y)$.

- (a) $y(x) = ke^{x^3/3}$ ($k \in \mathbb{R}$). Per $k = 0$ si ottiene la soluzione costante $y = 0$. Si ha $I = \mathbb{R}$ per ogni valore di k .
- (b) $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + k}$ ($k \in \mathbb{R}$). Per ogni valore reale di k abbiamo 2 famiglie di soluzioni corrispondenti al segno $+$ e al segno $-$, cioè $y_+(x) = \sqrt{x^2 + k}$, $y_-(x) = -\sqrt{x^2 + k}$. Notiamo che l'intervallo massimale I delle soluzioni y_{\pm} dipende dal valore di k . Se $k > 0$ allora $I = \mathbb{R}$. Se $k = 0$ allora $I = \mathbb{R}^+$ oppure $I = \mathbb{R}^-$. (Nel punto $x = 0$ l'equazione in forma normale, $y'(x) = x/y(x)$, perde significato.) Infine se $k < 0$ si ha $I = (\sqrt{-k}, +\infty)$ oppure $I = (-\infty, -\sqrt{-k})$. (Nei punti $x = \pm\sqrt{-k}$ l'equazione in forma normale perde significato perchè $y(\pm\sqrt{-k}) = 0$ e y non è derivabile (tangente verticale).) Notiamo infine che la soluzione del problema di Cauchy $y' = x/y$, $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \neq 0$ esiste ed è unica. Questo è in accordo con il teorema di esistenza e unicità, essendo la funzione $b(y) = 1/y$ di classe C^1 nell'intorno di qualsiasi punto $y_0 \neq 0$. Ad esempio

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \sqrt{x^2 + 1}, I = \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = -\sqrt{x^2 + 1}, I = \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = -\sqrt{x^2 - 3}, I = (\sqrt{3}, +\infty),$$

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \sqrt{x^2 - 3}, I = (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- (c) $y(x)$ è definita implicitamente dall'equazione $3y^2 - 2y^3 = 3x^2 + 2x^3 + k$ ($k \in \mathbb{R}$).
- (d) $y(x) = \log(\log(e^x + 1) + k)$ ($k \in \mathbb{R}$). L'intervallo I sul quale y è soluzione dipende da k . Se $k \geq 0$ si ha $I = \mathbb{R}$. Se invece $k < 0$, $I = (\log(e^{-k} - 1), +\infty)$.
- (e) Vi sono le 2 soluzioni costanti $y(x) = 2$ e $y(x) = -2 \forall x$. Inoltre si ha

$$y(x) = 2 \frac{1 + ke^{4x^3/3}}{1 - ke^{4x^3/3}} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Per $k = 0$ si riottiene la soluzione costante $y = 2$, mentre la soluzione costante $y = -2$ non si ottiene per alcun valore reale di k (essa si ottiene invece prendendo il limite per $k \rightarrow \pm\infty$). L'intervallo I sul quale y è soluzione dipende da k e precisamente: se $k \leq 0$ allora $I = \mathbb{R}$; se $k > 0$ allora $I = (-\sqrt[3]{\frac{3}{4} \log k}, +\infty)$ oppure $I = (-\infty, -\sqrt[3]{\frac{3}{4} \log k})$.

5. (a) La funzione $b(y) = y^2$ è di classe C^1 su tutto \mathbb{R} .
- (b) La soluzione costante $y = 0$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy con $y_0 = 0$. Separando le variabili si ottiene $y(x) = -1/(x+k)$ ($k \in \mathbb{R}$). Imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \neq 0$ si trova $k = -x_0 - 1/y_0$, da cui la formula indicata. Tale formula ha significato anche per $y_0 = 0$, nel qual caso fornisce la soluzione costante $y = 0$.
- (c) L'intervallo I sul quale y è soluzione dipende dal dato iniziale y_0 . Infatti se $y_0 \neq 0$, deve essere $x \neq x_0 + 1/y_0$. Inoltre l'intervallo I deve contenere x_0 . Si trova:
- $y_0 = 0 \Rightarrow I = \mathbb{R}$;
 - $y_0 > 0 \Rightarrow I = (-\infty, x_0 + \frac{1}{y_0})$;
 - $y_0 < 0 \Rightarrow I = (x_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty)$.
6. (a) La funzione $b(y) = 2\sqrt{y}$ è di classe C^1 nell'intorno di qualsiasi punto $y_0 > 0$. Non è invece di classe C^1 in un intorno di $y_0 = 0$, e non è neanche Lipschitziana in tale intorno in quanto il rapporto incrementale $(\sqrt{y} - 0)/(y - 0) = 1/\sqrt{y}$ non è limitato in un intorno di zero. Quindi il teorema di esistenza e unicità si può applicare solo per $y_0 > 0$.
- (b) La soluzione costante $y = 0$ non soddisfa la condizione iniziale $y(x_0) = y_0 > 0$. Separando le variabili nell'equazione $y' = 2\sqrt{y}$ si trova $\sqrt{y} = x + k$, che per $x + k \geq 0$ fornisce la soluzione $y(x) = (x + k)^2$. Imponendo la condizione iniziale si trova $k = \sqrt{y_0} - x_0$, da cui la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = (x - x_0 + \sqrt{y_0})^2 \quad \text{definita su } I' = [x_0 - \sqrt{y_0}, +\infty).$$

In questo caso y è soluzione anche nel punto $x = x_0 - \sqrt{y_0}$ in quanto sia y' che $2\sqrt{y}$ si annullano in tale punto. È possibile allora estendere la soluzione oltre tale punto (prolungamento sinistro), ottenendo la seguente soluzione massimale definita su tutto \mathbb{R} :

$$y(x) = \begin{cases} (x - x_0 + \sqrt{y_0})^2 & \text{se } x \geq x_0 - \sqrt{y_0}, \\ 0 & \text{se } x < x_0 - \sqrt{y_0}. \end{cases}$$

La verifica è immediata.

- (c) Consideriamo ora il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_0) = 0$. Innanzitutto c'è la soluzione costante $y(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Un'altra soluzione si trova separando le variabili per $x \geq x_0$ e incollando la soluzione costante per $x < x_0$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & \text{se } x \geq x_0 \\ 0 & \text{se } x < x_0. \end{cases}$$

Entrambe queste 2 soluzioni sono definite su tutto \mathbb{R} . Traslando la soluzione \tilde{y} a destra di x_0 di una quantità arbitraria $c > 0$ si ottengono infinite soluzioni dello stesso problema di Cauchy. Tuttavia queste soluzioni coincidono con la soluzione costante in un intorno di x_0 .

7. (a) $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = 2 + 7x$, $\phi_2(x) = 2 + 7x + \frac{21}{2}x^2$, $\phi_3(x) = 2 + 7x + \frac{21}{2}x^2 + \frac{21}{2}x^3$.
- (b) $\phi(x) = \frac{1}{3}(7e^{3x} - 1)$.

- (c) Usando lo sviluppo in serie di e^{3x} si verifica che $\phi_n(x)$ coincide con il polinomio di McLaurin di ordine n di $\phi(x)$.
8. (a) $\phi_0(x) = 0$, $\phi_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $\phi_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$, $\phi_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{11 \cdot 189} + \frac{x^{15}}{15 \cdot 63^2}$.
- (b) $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $\phi_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}$, $\phi_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{48}$. Si paragoni con la soluzione esatta $\phi(x) = e^{x^2/2}(1 + \int_0^x e^{-t^2/2} dt)$ calcolando lo sviluppo di McLaurin al quinto ordine di $\phi(x)$.
- (c) $\phi_0(x) = 0 = \phi_1(x) = \phi_2(x) = \phi_3(x)$. Si paragoni con la soluzione esatta.
- (d) $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = 1 + x$, $\phi_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}$, $\phi_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}$. Si calcoli la soluzione esatta e il suo intervallo massimale e si confrontino i risultati.
- (e) $\phi_0(x) = 0$, $\phi_1(x) = x$, $\phi_2(x) = x + \frac{x^3}{3}$, $\phi_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}$. Si calcoli la soluzione esatta e il suo intervallo massimale e si confrontino i risultati.
- (f) $\phi_0(x) = 0$, $\phi_1(x) = x$, $\phi_2(x) = x - \frac{2x^3}{3}$, $\phi_3(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15}$. Si paragoni con la soluzione esatta $\phi(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.
9. (a) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
- (b) $y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x/3}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
- (c) $y(x) = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
- (d) $y(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 x e^{-x/2}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
- (e) $y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
- (f) Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + 2i\lambda + 1$ sono

$$\lambda = -i \pm \sqrt{-1 - 1} = -i \pm i\sqrt{2} = i(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Pertanto l'integrale generale (complesso) è $y(x) = c_1 e^{i(\sqrt{2}-1)x} + c_2 e^{i(\sqrt{2}+1)x}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Notiamo che se si esclude la soluzione banale $y(x) = 0 \forall x$ (ottenuta per $c_1 = c_2 = 0$), l'equazione non ha soluzioni reali comunque si prendano le costanti c_1, c_2 .

- (g) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda - 1 = (\lambda - i)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = i$ con molteplicità 2. Pertanto $y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 x e^{ix}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$). Non vi sono soluzioni reali a parte quella banale.
- (h) Le soluzioni di $p(\lambda) = \lambda^2 + (3i - 1)\lambda - 3i = 0$ sono determinate dalla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{(1 - 3i)^2 + 12i}) = \frac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{1 - 9 - 6i + 12i}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{1 - 9 + 6i}) = \frac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{(1 + 3i)^2}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 3i \pm (1 + 3i)) = 1, -3i. \end{aligned}$$

Senza utilizzare l'identità $1 - 9 + 6i = (1 + 3i)^2$, avremmo dovuto calcolare le radici quadrate del numero complesso $z = -8 + 6i$, ed il calcolo sarebbe stato molto più lungo. L'integrale generale è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3ix}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$). In questo caso vi sono soluzioni reali dell'equazione differenziale, e cioè le funzioni $y_r(x) = c_1 e^x$ con $c_1 \in \mathbb{R}$.

10. (a) $y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}$.

- (b) $y(x) = \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x}$.
- (c) $y(x) = \pi \cos \sqrt{10}x + \frac{\pi^2}{\sqrt{10}} \sin \sqrt{10}x$.
- (d) Notiamo che le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ e l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy implicano che $y(x) = 0 \forall x$. Non c'è dunque bisogno di calcolare l'integrale generale, che richiede il calcolo delle radici quadrate del numero complesso $z = 8i - 19$.
- (e) $y(x) = \frac{3i+9}{5}e^x + \frac{1-3i}{5}e^{-3ix}$ (si veda l'esercizio 9 (h)).

11. Ricordiamo che ogni radice $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di molteplicità m_1 contribuisce all'integrale generale complesso con le m_1 funzioni:

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}.$$

Se $p(\lambda)$ ha coefficienti reali e $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ (con $\beta_1 \neq 0$) è radice di molteplicità m_1 , allora anche $\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1$ è radice con la stessa molteplicità, e la coppia $\lambda_1, \overline{\lambda_1}$ contribuisce all'integrale generale reale con le $2m_1$ funzioni:

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \dots, x^{m_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \\ e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \dots, x^{m_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x. \end{aligned}$$

- (a) Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 + 1$ sono le 3 radici cubiche di -1 : $\lambda = \sqrt[3]{-1} = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) $= e^{i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{i5\pi/3} = -1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'integrale generale reale è $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ($c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$).
- (b) $p(\lambda) = \lambda^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda = \sqrt[3]{8} = 2e^{\frac{2k\pi i}{3}} = 2, 2e^{2\pi i/3}, 2e^{4\pi i/3} = 2, 2(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2, -1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_3 e^{-x} \sin \sqrt{3}x$ ($c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$).
- (c) $p(\lambda) = \lambda^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda = \sqrt[4]{16} = 2e^{\frac{2k\pi i}{4}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) $= 2, 2e^{i\pi/2}, 2e^{i\pi}, 2e^{3i\pi/2} = \pm 2, \pm 2i \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$ ($c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$).
- (d) $p(\lambda) = \lambda^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda = \sqrt[4]{-16} = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) $= 2e^{i\pi/4}, 2e^{3i\pi/4}, 2e^{5i\pi/4}, 2e^{7i\pi/4}$
 $= 2(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}), 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}, -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2} \Rightarrow$
 $y(x) = e^{\sqrt{2}x}(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x) + e^{-\sqrt{2}x}(c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x)$
 $(c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$. Ricordando che

$$\begin{cases} \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = \text{ch } x + \text{sh } x \\ e^{-x} = \text{ch } x - \text{sh } x \end{cases}$$

possiamo anche scrivere l'integrale generale nella forma

$$y(x) = \text{ch } \sqrt{2}x(a \cos \sqrt{2}x + b \sin \sqrt{2}x) + \text{sh } \sqrt{2}x(c \cos \sqrt{2}x + d \sin \sqrt{2}x)$$

($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

- (e) $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ entrambe con $m = 2$. Pertanto
 $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$ ($c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$).

Possiamo anche scrivere l'integrale generale come

$$y(x) = a \text{ch } x + b x \text{ch } x + c \text{sh } x + d x \text{sh } x \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

- (f) $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$ con $m = 2 \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}).$
- (g) $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18$. Si vede facilmente che $p(2) = 0$. Scomponendo con Ruffini si ottiene $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)^2$, da cui le radici $\lambda_1 = 2$ con $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ con $m_2 = 2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + (c_2 + c_3 x)e^{-3x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$
- (h) $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = (\lambda + 2)^3$ da cui $\lambda_1 = -2$ con $m_1 = 3 \Rightarrow$
 $y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-2x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$
- (i) $p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda = \lambda(\lambda^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \sqrt[3]{-1} = 0, -1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + e^{x/2}(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}).$
- (j) $y(x) = (c_1 + c_2 x) \cos \sqrt{5}x + (c_3 + c_4 x) \sin \sqrt{5}x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}).$
- (k) $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$. Si vede facilmente che $p(-1) = 0$. Scomponendo con Ruffini si ottiene $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 1)$, da cui
 $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$
- (l) $p(\lambda) = \lambda^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[5]{-1} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ da cui
 $\lambda = e^{i\pi/5}, e^{i3\pi/5}, e^{i\pi}, e^{i7\pi/5}, e^{i9\pi/5} = -1, \cos \frac{\pi}{5} \pm i \sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{3\pi}{5} \pm i \sin \frac{3\pi}{5} \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 e^{-x} + e^{\cos \frac{\pi}{5} x} (c_2 \cos(\sin \frac{\pi}{5} x) + c_3 \sin(\sin \frac{\pi}{5} x))$
 $+ e^{\cos \frac{3\pi}{5} x} (c_4 \cos(\sin \frac{3\pi}{5} x) + c_5 \sin(\sin \frac{3\pi}{5} x)) \quad (c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R}).$

È possibile scrivere esplicitamente i valori di seno e coseno di $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{5}$:

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \quad \sin \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

- (m) $p(\lambda) = \lambda^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[6]{-1} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \Rightarrow$
 $\lambda = e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i3\pi/2}, e^{i11\pi/6} = \pm i, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2} \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} (c_3 \cos \frac{x}{2} + c_4 \sin \frac{x}{2}) + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x} (c_5 \cos \frac{x}{2} + c_6 \sin \frac{x}{2})$
 $(c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R}).$
- (n) $p(\lambda) = \lambda^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[6]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \Rightarrow$
 $\lambda = 1, e^{i\pi/3}, e^{i2\pi/3}, e^\pi, e^{i4\pi/3}, e^{i5\pi/3} = \pm 1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} (c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) + e^{-\frac{1}{2}x} (c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$
 $(c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R}).$
- (o) $p(\lambda) = \lambda^8 + 8\lambda^6 + 24\lambda^4 + 32\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 2)^4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ con $m = 4 \Rightarrow$
 $y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) \cos \sqrt{2}x + (c_5 + c_6 x + c_7 x^2 + c_8 x^3) \sin \sqrt{2}x$
 $(c_1, \dots, c_8 \in \mathbb{R}).$
- (p) $p(\lambda) = \lambda^{10} \Rightarrow \lambda_1 = 0$ con $m_1 = 10 \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5 + c_7 x^6 + c_8 x^7 + c_9 x^8 + c_{10} x^9 \quad (c_1, \dots, c_{10} \in \mathbb{R}).$
- (q) $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) \Rightarrow$
 $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$
- (r) $p(\lambda) = \lambda^{100} + 100 = 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda = \sqrt[100]{-100} = \sqrt[100]{100} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{100}} \equiv \lambda_k \quad (k = 0, 1, \dots, 99).$

L'integrale generale complesso è $y(x) = \sum_{k=0}^{99} c_k e^{\lambda_k x}$ con $c_k \in \mathbb{C}$. Per scrivere l'integrale reale bisogna accoppiare a 2 a 2 le radici complesse coniugate. Essendo $e^{i\theta} = e^{i(2\pi-\theta)}$, si verifica facilmente che $\lambda_{99} = \overline{\lambda_0}$, $\lambda_{98} = \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_{50} = \overline{\lambda_{49}} \Rightarrow$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{49} e^{\sqrt[100]{100} \cos \frac{2k+1}{100} \pi x} [a_k \cos(\sqrt[100]{100} \sin \frac{2k+1}{100} \pi x) + b_k \sin(\sqrt[100]{100} \sin \frac{2k+1}{100} \pi x)]$$

con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

- (s) $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$.
- (t) $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$. Essendo $p(-1) = 0$ possiamo scomporre con Ruffini ottenendo
 $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) \Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{2x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.
- (u) $p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda + 1 = \lambda^4(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^4 - 1) \Rightarrow$
 $\lambda_1 = 1 \ (m_1 = 2), \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = i, \ \lambda_4 = -i \ (m_2 = m_3 = m_4 = 1) \Rightarrow$
 $y(x) = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x \quad (c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R})$.
- (v) $p(\lambda) = \lambda^3 - 3i\lambda^2 - 3\lambda + i = (\lambda - i)^3 \Rightarrow \lambda_1 = i \text{ con } m_1 = 3 \Rightarrow$
 $y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{ix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C})$
- (w) $p(\lambda) = \lambda^3 - i\lambda^2 + 4\lambda - 4i = \lambda^2(\lambda - i) + 4(\lambda - i) = (\lambda - i)(\lambda^2 + 4) \Rightarrow$
 $y(x) = c_1e^{ix} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C})$.
 Le soluzioni con $c_1 = 0, \ c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono reali.
- (x) $p(\lambda) = \lambda^3 + i\lambda^2 - 2\lambda - 2i = (\lambda + i)(\lambda^2 - 2) \Rightarrow$
 $y(x) = c_1e^{-ix} + c_2e^{\sqrt{2}x} + c_3e^{-\sqrt{2}x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C})$.
 Le soluzioni con $c_1 = 0, \ c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono reali.
- (y) $p(\lambda) = \lambda^4 - i = 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda = \sqrt[4]{i} = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)/4} \ (k = 0, 1, 2, 3) = e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i13\pi/8} \Rightarrow$
 $y(x) = c_1e^{i\pi/8} + c_2e^{i5\pi/8} + c_3e^{i9\pi/8} + c_4e^{i13\pi/8} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C})$.
 Non vi sono soluzioni reali oltre a quella banale.
- (z) $p(\lambda) = \lambda^4 + 4i\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4i\lambda + 1 = (\lambda + i)^4 \Rightarrow$
 $y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^{-ix} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C})$.
 Non vi sono soluzioni reali oltre a quella banale.

12. (a) Usando l'esercizio 11 (a) si ottiene

$$y(x) = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

(b) $y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x$.

(c) Usando l'esercizio 11 (d) otteniamo $y(x) = \cos \sqrt{2}x \operatorname{ch} \sqrt{2}x$.

(d) Usando l'esercizio 11 (u) si ottiene

$$y(x) = \frac{5}{8}e^x - \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \sin x.$$

13. Applicando il teorema di derivazione per serie alla funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

e alle sue derivate y', y'' , otteniamo:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$y'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = y(x).$$

Ponendo $x = 0$ vediamo che y soddisfa l'equazione differenziale $y''' - y = 0$ con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. Consideriamo l'equazione differenziale $y''' - y = 0$. Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 - 1$ sono le 3 radici cubiche dell'unità:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Per i calcoli è più comodo utilizzare l'integrale generale complesso, dato da

$$y(x) = c_0 e^{\alpha_0 x} + c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x},$$

dove $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 0 \\ c_0 + \alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

la cui soluzione è $c_0 = c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$, come si verifica subito. (Si noti che $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$, e che $\alpha_1^2 = \alpha_2$, $\alpha_2^2 = \alpha_1$.) Otteniamo infine

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{3} \left(e^x + e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})x} + e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})x} \right) \\ &= \frac{1}{3} e^x + \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x} \right) \\ &= \frac{1}{3} e^x + \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x. \end{aligned}$$

14. Procedendo come nell'esercizio precedente troviamo che la funzione $y(x)$ soddisfa l'equazione differenziale $y^{(4)} - y = 0$ con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^4 - 1$ ha le radici ± 1 , $\pm i$, e l'integrale generale complesso è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix}$. Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ c_1 - c_2 + ic_3 - ic_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 - c_2 - ic_3 + ic_4 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

la cui soluzione è $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{4}$, come si verifica subito. Otteniamo infine

$$y(x) = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x} + e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{2} \cos x.$$

15. Per $k = 1$ l'identità da dimostrare si riduce allo sviluppo in serie dell'esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$. Per $k = 2$ si riduce allo sviluppo in serie del coseno iperbolico $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/(2n)! = (e^x + e^{-x})/2 = \cosh x$. I casi $k = 3, 4$ sono stati trattati negli esercizi 13 e 14. Sia $k \in \mathbb{N}^+$, $k \geq 2$. Procedendo come nei 2 esercizi precedenti, si ottiene che la funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!} = 1 + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{3k}}{(3k)!} + \dots$$

soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(k)} - y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = \dots = y^{(k-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^k - 1$ sono le radici k -esime di 1:

$$\alpha_j = \sqrt[k]{1} = e^{i\frac{2\pi j}{k}} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1).$$

Notiamo che

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = e^{i\frac{2\pi}{k}}, \quad \alpha_2 = e^{i\frac{4\pi}{k}} = \alpha_1^2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = e^{i\frac{2(k-1)\pi}{k}} = \alpha_1^{k-1},$$

cioè tutte le radici sono generate dalle potenze della radice α_1 . L'integrale generale complesso è $y(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j e^{\alpha_j x}$. Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1} = 1 \\ c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_{k-1} \alpha_{k-1} = 0 \\ c_0 + c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + \dots + c_{k-1} \alpha_{k-1}^2 = 0 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 \alpha_1^{k-1} + c_2 \alpha_2^{k-1} + \dots + c_{k-1} \alpha_{k-1}^{k-1} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

la cui soluzione è $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = \frac{1}{k}$. Infatti la prima riga è chiaramente soddisfatta da questi valori. La seconda riga è soddisfatta da $c_j = \frac{1}{k} \forall j$ se e solo se vale l'identità

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} = 0.$$

Questa è vera in quanto da $\alpha_1^k = 1$ si ottiene

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} = 1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_1^{k-1} = \frac{1 - \alpha_1^k}{1 - \alpha_1} = 0,$$

dove abbiamo usato l'identità

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}$$

(somma della progressione geometrica) valida per ogni $x \neq 1$. Analogamente la p -esima riga del sistema precedente con $1 \leq p \leq k-1$ è soddisfatta da $c_j = \frac{1}{k} \forall j$ in quanto

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_1^p + \alpha_2^p + \dots + \alpha_{k-1}^p &= 1 + \alpha_1^p + (\alpha_1^2)^p + \dots + (\alpha_1^{k-1})^p \\ &= 1 + \alpha_1^p + (\alpha_1^p)^2 + \dots + (\alpha_1^p)^{k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} (\alpha_1^p)^n = \frac{1 - (\alpha_1^p)^k}{1 - \alpha_1^p} = 0 \end{aligned}$$

essendo $(\alpha_1^p)^k = (\alpha_1^k)^p = 1^p = 1$. Sostituendo i valori $c_j = \frac{1}{k} \forall j$ nell'integrale generale otteniamo infine che

$$y(x) = \frac{1}{k} (e^{\alpha_0 x} + e^{\alpha_1 x} + e^{\alpha_2 x} + \dots + e^{\alpha_{k-1} x}),$$

come dovevasi dimostrare.

16. Ricordiamo che il metodo di somiglianza, o dei coefficienti indeterminati, consente di determinare una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea, $Ly = f(x)$, nel caso in cui il *termine forzante* $f(x)$ è un polinomio, un esponenziale, un seno o un coseno, o un prodotto di termini di questo tipo. Si cerca una soluzione particolare che sia simile a $f(x)$, contenente dei coefficienti incogniti che si determinano sostituendo la soluzione ipotizzata nell'equazione differenziale. Il metodo funziona in quanto un termine forzante del tipo sopra descritto è a sua volta soluzione di un'opportuna equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti. Il risultato preciso è il seguente. Consideriamo innanzitutto il caso complesso, cioè un'equazione differenziale della forma

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = P(x) e^{\lambda_0 x}, \quad (6)$$

dove $a_1, \dots, a_n, \lambda_0 \in \mathbb{C}$, e $P(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado k . La (6) definisce l'*operatore differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n*

$$L = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_1 \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n.$$

Sia $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$ il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata $Ly = 0$. Allora la (6) ha una soluzione particolare della forma

$$y(x) = x^m Q(x) e^{\lambda_0 x}, \quad (7)$$

dove $Q(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado k e

$$m = \begin{cases} 0 & \text{se } p(\lambda_0) \neq 0 \\ \text{molteplicità di } \lambda_0 & \text{se } p(\lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Il polinomio $Q(x)$ è univocamente determinato sostituendo la (7) nella (6) e applicando il principio di identità dei polinomi. Notiamo che se $\lambda_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (cioè se $\beta \neq 0$), il polinomio $Q(x)$ ha coefficienti complessi anche se $P(x)$ e L hanno coefficienti reali. Il metodo di somiglianza reale si ottiene applicando questo risultato al caso in cui $P(x)$ e L hanno coefficienti reali e separando la parte reale e la parte immaginaria della soluzione complessa (7). Si usa il fatto che se $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ risolve $Ly = P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ (L a coefficienti reali, P polinomio reale), allora $y_1 = \operatorname{Re} y$ e $y_2 = \operatorname{Im} y$ risolvono rispettivamente $Ly_1 = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $Ly_2 = P(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$. Il risultato preciso è il seguente: se L ha coefficienti reali allora l'equazione $Ly = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $P(x)$ è un polinomio reale di grado k , ha una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \quad (8)$$

dove $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono due polinomi reali di grado $\leq k$ (ma almeno uno di essi ha grado k) e

$$m = \begin{cases} 0 & \text{se } p(\alpha + i\beta) \neq 0 \\ \text{molteplicità di } \alpha + i\beta & \text{se } p(\alpha + i\beta) = 0. \end{cases}$$

Notiamo che se $\beta = 0$ la formula (8) per una soluzione particolare di $Ly = P(x)e^{\alpha x}$ diventa identica alla formula (7) (essendo il polinomio $Q(x)$ reale per $\lambda_0 = \alpha \in \mathbb{R}$). Un risultato analogo alla (8) vale per l'equazione $Ly = P(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ ($\beta \neq 0$). Più precisamente si dimostra che se la (8) risolve $Ly = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, allora la funzione

$$\tilde{y}_p(x) = x^m e^{\alpha x} (-Q_2(x) \cos \beta x + Q_1(x) \sin \beta x)$$

risolve $Ly = P(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$. Osserviamo infine che per abbreviare i calcoli è spesso utile usare il formalismo complesso anche nel caso di coefficienti reali. Per esempio per risolvere $Ly = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ($Ly = e^{\alpha x} \sin \beta x$) è sufficiente risolvere $Ly = e^{(\alpha+i\beta)x}$ e poi prendere la parte reale (immaginaria) della soluzione complessa trovata.

- (a) Poichè $\cos x$ non è soluzione dell'omogenea, si cerca una soluzione particolare della forma $y_p(x) = a \cos x + b \sin x$, con a, b costanti da determinare. Si calcola $y_p'(x) = -a \sin x + b \cos x$, $y_p''(x) = -a \cos x - b \sin x$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $3a \cos x + 3b \sin x = \cos x$, da cui $a = 1/3$, $b = 0$, e $y_p(x) = \frac{1}{3} \cos x$.
- (b) In questo caso $\sin 2x$ è già soluzione dell'omogenea, quindi si cerca y_p nella forma $y_p(x) = x(a \cos 2x + b \sin 2x)$. Si trova $y_p(x) = -\frac{1}{4}x \cos 2x$. Mostriamo come si possono abbreviare i calcoli utilizzando il formalismo complesso. Essendo $\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$, invece di risolvere $y'' + 4y = \sin 2x$ risolviamo l'equazione complessa $y'' + 4y = e^{2ix}$ e poi prendiamo la parte immaginaria della soluzione particolare complessa trovata. Poichè e^{2ix} è già soluzione dell'omogenea, il metodo di somiglianza complesso dice di cercare una soluzione della forma $y(x) = Axe^{2ix}$ dove A è una costante complessa da determinare. Si calcola $y'(x) = (A + 2iAx)e^{2ix}$, $y''(x) = (4iA - 4Ax)e^{2ix}$. Sostituendo nell'equazione $y'' + 4y = e^{2ix}$ i termini proporzionali a x si semplificano e si trova $A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$. Dunque la soluzione particolare complessa è
- $$y(x) = -\frac{i}{4}xe^{2ix} = -\frac{i}{4}x(\cos 2x + i \sin 2x) = \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{4}ix \cos 2x \Rightarrow$$
- $$y_p(x) = \operatorname{Im} y(x) = -\frac{1}{4}x \cos 2x.$$
- (c) Il termine forzante è $x^2 = x^2 e^{0 \cdot x}$. Poichè $\lambda = 0$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, e poichè x^2 è un polinomio di secondo grado, si cerca y_p nella forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Si ottiene $y_p(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 7)$.
- (d) Poichè e^x non è soluzione dell'omogenea, si cerca $y_p(x) = ae^x$ e si trova $y_p(x) = \frac{1}{3}e^x$.
- (e) Si cerca $y_p(x) = ax + b$ e si trova $y_p(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$.
- (f) Si applica il principio di sovrapposizione, risolvendo separatamente l'equazione differenziale con i termini forzanti $3e^{2x}$ e $4e^{-x}$, e poi sommando le soluzioni particolari ottenute. Nel primo caso essendo e^{2x} già soluzione dell'omogenea, si cerca $y_p(x) = axe^{2x}$. Nel secondo caso si cerca $y_p(x) = be^{-x}$. Il risultato finale è $y_p(x) = \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{-x}$.
- (g) Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova $y_p(x) = \frac{3}{10}e^{-x} + \frac{2}{5}x^2 + \frac{16}{25}x + \frac{44}{125}$.
- (h) Siccome $e^{2x} \cos x$ è soluzione dell'omogenea, si cerca una soluzione particolare nella forma $y(x) = x e^{2x}(a \cos x + b \sin x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene, con calcoli un pò laboriosi, $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$, da cui la soluzione particolare $y_p(x) = \frac{1}{2}x \sin x e^{2x}$. Come nell'esercizio 16 (b), si può ottenere la soluzione più velocemente usando il formalismo complesso. Essendo $e^{2x} \cos x = \operatorname{Re}(e^{(2+i)x})$, invece di risolvere $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$ risolviamo l'equazione complessa

$$y'' - 4y' + 5y = e^{(2+i)x} \quad (9)$$

e poi prendiamo la parte reale della soluzione. Poichè $2 + i$ è radice di $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ con molteplicità 1, cerchiamo una soluzione particolare della (9) nella forma

$$y(x) = A x e^{(2+i)x}$$

dove $A \in \mathbb{C}$ è una costante complessa (polinomio complesso di grado zero) da determinare. Si ha

$$\begin{aligned}y'(x) &= A e^{(2+i)x} + A x(2+i)e^{(2+i)x}, \\y''(x) &= 2A(2+i)e^{(2+i)x} + A x(2+i)^2 e^{(2+i)x}.\end{aligned}$$

Sostituendo nella (9) otteniamo l'equazione

$$e^{(2+i)x} \{ A x [(2+i)^2 - 4(2+i) + 5] + 2A(2+i) - 4A \} = e^{(2+i)x}.$$

Il termine in parentesi quadra si annulla essendo uguale a $p(2+i) = 0$. Otteniamo $2Ai = 1$, da cui $A = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$, e

$$\begin{aligned}y(x) &= -\frac{i}{2} x e^{(2+i)x} = -\frac{i}{2} x e^{2x} (\cos x + i \sin x) \\&= x e^{2x} (\frac{1}{2} \sin x - \frac{i}{2} \cos x).\end{aligned}$$

La soluzione particolare reale richiesta è allora

$$y_p(x) = \operatorname{Re} y(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} \sin x.$$

Notiamo che la funzione $\operatorname{Im} y(x) = -\frac{1}{2} x e^{2x} \cos x$ risolve invece l'equazione $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$.

- (i) Si cerca $y_p(x) = a \cos x + b \sin x$ e si trova $y_p(x) = \frac{1}{74}(7 \cos x + 5 \sin x)$.
 - (j) Si risolve separatamente l'equazione non omogenea con i 3 termini forzanti e^{-x} , x^2 , $\cos x$. Nel primo caso si cerca $y_p(x) = a x e^{-x}$, essendo e^{-x} già soluzione dell'omogenea. Nel secondo caso si cerca $y_p(x) = a x^2 + b x + c$, e nel terzo $y_p(x) = a \cos x + b \sin x$. Il risultato finale è
$$y_p(x) = -\frac{1}{3} x e^{-x} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{4} - \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x.$$
 - (k) $y_p(x) = \frac{1}{162}(9x^2 - 6x + 1)e^{3x} + \frac{1}{6}x \sin 3x$.
 - (l) $y_p(x) = \frac{1}{50}[(11 - 5x)e^x \cos 2x + (-2 + 10x)e^x \sin 2x]$. Per abbreviare i calcoli conviene usare il formalismo complesso risolvendo $y'' + y = x e^{(1+2i)x}$ e poi prendendo la parte reale della soluzione.
 - (m) Procedendo come nel caso dei coefficienti reali, si cerca $y_p(x) = ax + b$ dove a, b sono 2 costanti possibilmente complesse da determinare. Si trova $y_p(x) = x - 2i$.
 - (n) Si risolve separatamente l'equazione con termine forzante e^{ix} e $-2e^{-ix}$. Nel primo caso, poichè $\lambda = i$ è radice del polinomio caratteristico di molteplicità 2 (si veda l'esercizio 9 (g)), si cerca y_p nella forma $y_p(x) = a x^2 e^{ix}$ con $a \in \mathbb{C}$. Nel secondo caso si cerca $y_p(x) = b e^{-ix}$ con $b \in \mathbb{C}$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-ix}$.
 - (o) Le radici del polinomio caratteristico sono $i, -2i$. Il termine forzante è una combinazione lineare di e^{2x} e e^{-2x} . Possiamo risolvere separatamente cercando $y_p(x) = a e^{2x}$ in un caso e $y_p(x) = b e^{-2x}$ nell'altro, con $a, b \in \mathbb{C}$. Il risultato è
$$y_p(x) = \frac{3-i}{20} e^{2x} + \frac{6+2i}{20} e^{-2x}.$$
17. (a) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1)$ e le radici sono $\lambda = 0, \pm 1$. Il termine forzante è $x = x \cdot e^{0 \cdot x}$. Poichè x è un polinomio di primo grado e $\lambda = 0$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 1, si cerca $y_p(x) = x(ax + b)$. Il risultato è $y_p(x) = -\frac{1}{2} x^2$.

- (b) Si ha $p(\lambda) = \lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)$ e le radici sono $\lambda = 2, -1 \pm i\sqrt{3}$. Il termine forzante è e^{ix} e $\lambda = i$ non è radice di $p(\lambda)$, pertanto si cerca $y_p(x) = ae^{ix}$ con $a \in \mathbb{C}$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{i-8}{65}e^{ix}$.
- (c) È sufficiente prendere la parte reale della soluzione complessa trovata nell'esercizio precedente. Essendo

$$\frac{i-8}{65}e^{ix} = \frac{i-8}{65}(\cos x + i \sin x) = \frac{1}{65}[-8 \cos x - \sin x + i(\cos x - 8 \sin x)]$$

otteniamo $y_p(x) = \frac{1}{65}(-8 \cos x - \sin x)$. Alternativamente si cerca y_p nella forma $a \cos x + b \sin x$ e si procede direttamente.

- (d) Prendendo la parte immaginaria della soluzione complessa trovata nell'esercizio 17 (b) si ottiene $y_p(x) = \frac{1}{65}(\cos x - 8 \sin x)$.
- (e) Si ha $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$ quindi $\lambda = -1$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 3. Il termine forzante x^2e^{-x} è il prodotto di un polinomio di secondo grado per e^{-x} . Dunque si cerca $y_p(x) = x^3(ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{60}x^5e^{-x}$.
- (f) $y_p(x) = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{4}e^{-x} \cos x + \frac{1}{4}e^{-x} \sin x$.
- (g) Si ha $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$. Si vede facilmente che $p(1) = 0$. Scomponendo con Ruffini si trova $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$, da cui le radici $\lambda = 1, 1 \pm i$. Il termine forzante $xe^x \sin x$ è il prodotto di un polinomio di primo grado per la funzione $e^x \sin x$, che è già soluzione dell'omogenea. In accordo con il metodo di somiglianza reale, vi è una soluzione particolare della forma $y_p(x) = xe^x[(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x]$. Per abbreviare i calcoli è preferibile utilizzare il formalismo complesso. Essendo $xe^x \sin x = \operatorname{Im} xe^{(1+i)x}$, si risolve l'equazione complessa

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^{(1+i)x}$$

e si prende la parte immaginaria della soluzione trovata. Il metodo di somiglianza complesso dice di cercare una soluzione particolare della forma

$$y(x) = x(Ax + B)e^{(1+i)x} = (Ax^2 + Bx)e^{(1+i)x},$$

con $A, B \in \mathbb{C}$. Calcolando y' , y'' e y''' e sostituendo nell'equazione complessa si ottiene con facili calcoli $A = -1/4$, $B = -3i/4$. La soluzione particolare complessa è

$$y(x)x(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}i)e^{(1+i)x} = xe^x \left[-\frac{1}{4}x \cos x + \frac{3}{4} \sin x + i \left(-\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4}x \sin x \right) \right].$$

La soluzione particolare reale è $y_p(x) = xe^x \left(-\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4}x \sin x \right)$.

- (h) $y_p(x) = \frac{1}{17} \cos x$. (Conviene risolvere $y^{(4)} + 16y = e^{ix}$.)
- (i) Si ha $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda - 1)^4$, quindi $\lambda = 1$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 4 e l'integrale generale dell'omogenea è $(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^x$. Poichè il termine forzante è proprio e^x , una soluzione particolare va cercata nella forma $y_p(x) = ax^4e^x$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{24}x^4e^x$.
- (j) Si ha $p(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)$ da cui le radici semplici $\lambda = \pm 1, \pm i$. Il termine forzante è e^x , quindi si cerca $y_p(x) = axe^x$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{4}xe^x$.
- (k) Si cerca $y_p(x) = axe^{ix}$ con $a \in \mathbb{C}$. Si trova $a = i/4 \Rightarrow y_p(x) = \frac{i}{4}xe^{ix}$.

- (l) Prendendo la parte reale della soluzione trovata nell'esercizio precedente si ottiene $y_p(x) = -\frac{1}{4}x \sin x$.
- (m) Prendendo la parte immaginaria della soluzione complessa trovata nell'esercizio 17 (k) si ottiene $y_p(x) = \frac{1}{4}x \cos x$.
- (n) Il termine forzante è $e^x \cos x = \operatorname{Re} e^{(1+i)x}$. Poichè $1+i$ non è radice di $p(\lambda)$, vi è una soluzione particolare della forma $y_p(x) = e^x(a \cos x + b \sin x)$. Per abbreviare i calcoli conviene usare il formalismo complesso e risolvere $y^{(4)} - y = e^{(1+i)x}$. Cercando una soluzione della forma $y(x) = ce^{(1+i)x}$ con $c \in \mathbb{C}$, si trova

$$c = \frac{1}{(1+i)^4 - 1} = -\frac{1}{5},$$

da cui la soluzione particolare complessa $y(x) = -\frac{1}{5}e^{(1+i)x}$. Prendendone la parte reale otteniamo $y_p(x) = -\frac{1}{5}e^x \cos x$.

- (o) Il metodo di somiglianza reale dice che vi è una soluzione particolare della forma $y_p(x) = e^x[(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x]$. Conviene però risolvere l'equazione complessa $y^{(4)} - y = xe^{(1+i)x}$ e poi prendere la parte immaginaria (essendo $xe^x \sin x = \operatorname{Im} xe^{(1+i)x}$). In accordo con il metodo di somiglianza complesso, cerchiamo una soluzione particolare complessa della forma $y(x) = (Ax + B)e^{(1+i)x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Sostituendo nell'equazione complessa si ottiene abbastanza facilmente che $A = -1/5$, $B = 8(1-i)/25$. La soluzione complessa è dunque $y(x) = [-\frac{1}{5}x + \frac{8}{25}(1-i)]e^{(1+i)x}$. Prendendone la parte immaginaria otteniamo

$$y_p(x) = e^x \left[-\frac{8}{25} \cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{8}{25} \right) \sin x \right].$$

18. Ricordiamo che l'integrale generale dell'equazione non omogenea $Ly = f(x)$ è dato da $y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$, dove y_{om} è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $Ly = 0$, e y_p è una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione non omogenea.

- (a) Determiniamo innanzitutto l'integrale generale. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$ e la soluzione generale dell'omogenea è $y_{om}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$. L'equazione non omogenea ha termine forzante $2e^{3x}$. Poichè e^{3x} è già soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = axe^{3x}$. Si ha

$$y_p'(x) = a(3x + 1)e^{3x}, \quad y_p''(x) = a(9x + 6)e^{3x}.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo

$$a[9x + 6 - 8(3x + 1) + 15x]e^{3x} = 2e^{3x},$$

da cui $a = -1$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x} - x e^{3x}.$$

Calcolando $y'(x)$ e imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 0 = y'(0)$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + 5c_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1/2 \\ c_2 = 1/2. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{5x} - x e^{3x}.$$

- (b) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, quindi l'equazione omogenea ha la soluzione generale $y_{om}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. L'equazione non omogenea ha termine forzante $x e^x$. Poichè x un polinomio di primo grado e poichè e^x è già soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = x(ax + b)e^x$. Si ha

$$y'_p(x) = [ax^2 + (2a + b)x + b]e^x, \quad y''_p(x) = [ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b]e^x.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$[ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx]e^x = x e^x,$$

da cui $4ax + 2a + 2b = x$, e quindi

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/4. \end{cases}$$

La soluzione particolare è $\frac{1}{4}x^2 e^x - \frac{1}{4}x e^x$, e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 e^x - \frac{1}{4}x e^x.$$

Le condizioni iniziali danno origine al sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/8 \\ c_2 = -1/8. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(x) = \frac{1}{8} [e^x - e^{-x} + 2x^2 e^x - 2x e^x].$$

- (c) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1)$, quindi c' è la radice doppia $\lambda = 0$ e la radice semplice $\lambda = -1$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_{om}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$. Il termine forzante è $1 = 1 \cdot e^{0 \cdot x}$, cioè il prodotto di un polinomio di grado zero per l'esponenziale $e^{0 \cdot x}$. Poichè $\lambda = 0$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 2, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = x^2 \cdot a$. Si ha $y'_p(x) = 2ax$, $y''_p(x) = 2a$, $y'''_p(x) = 0$. Sostituendo nella non omogenea otteniamo $a = 1/2$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_2 - c_3 = 0, \quad c_3 + 1 = 0,$$

la cui soluzione è $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = -1$. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 1 - x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$.

- (d) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1)$, le radici di $p(\lambda)$ sono $\lambda = 0$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, e la soluzione generale dell'omogenea è

$$y_{om}(x) = c_1 + c_2 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Una soluzione particolare della non omogenea deve avere la forma $y_p(x) = x \cdot a$. Si ha $y'_p(x) = a$, $y''_p(x) = 0 = y'''_p(x)$. Sostituendo nella non omogenea otteniamo $a = 1$, da cui $y_p(x) = x$ e l'integrale generale

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova, con facili calcoli, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, da cui la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = -1 + e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + x.$$

- (e) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$ e l'integrale generale dell'omogenea è $y_{om}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$. Il termine forzante è $1 = 1 \cdot e^{0 \cdot x}$. Poichè $\lambda = 0$ non è radice di $p(\lambda)$, la non omogenea ha una soluzione particolare della forma $y_p(x) = a$. Si ha $y_p' = y_p'' = y_p''' = 0$. Sostituendo nella non omogenea si ottiene $a = 1$ da cui $y_p(x) = 1$ e l'integrale generale

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + 1.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$c_1 + c_2 + 1 = 0, \quad -c_1 + c_3 = 0, \quad c_1 - c_2 = 0,$$

la cui soluzione è $c_1 = c_2 = c_3 = -1/2$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-x} + \cos x + \sin x).$$

19. Ricordiamo che la *risposta impulsiva* di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti (reali o complessi) di ordine n

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Il metodo della risposta impulsiva consente di determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $Ly = f(x)$ quando f è una funzione continua qualsiasi su un intervallo I . Indicando con $g(x)$ la risposta impulsiva, si ha che l'equazione $Ly = f(x)$ ha una soluzione particolare data dall'*integrale di convoluzione*

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x g(x-t)f(t) dt \quad (x_0, x \in I). \quad (10)$$

Più precisamente, si dimostra che y_p risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

La formula (10) fornisce dunque la soluzione particolare dell'equazione non omogenea $Ly = f(x)$ che soddisfa condizioni iniziali tutte nulle nel punto $x_0 \in I$ e con un termine forzante continuo arbitrario $f \in C^0(I)$. Notiamo che se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono costanti arbitrarie, la soluzione del problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(x_0) = \alpha_1, \quad y'(x_0) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n \end{cases}$$

è data da $y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$, dove y_{om} risolve il problema di Cauchy omogeneo con le stesse condizioni iniziali di y , cioè

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = \alpha_1, \quad y'(x_0) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n. \end{cases}$$

La risposta impulsiva $g(x)$ è completamente determinata dalle radici del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e dalle loro molteplicità. Per $n = 1$, $g(x)$ è la soluzione del problema $y' + ay = 0$, $y(0) = 1$, ed è data da $g(x) = e^{\lambda_1 x}$, dove $\lambda_1 = -a$ è l'unica radice di $p(\lambda) = \lambda + a$. Per $n = 2$, $g(x)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

ed è data dalle seguenti formule. Siano λ_1, λ_2 le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$. Allora

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ($\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4b \neq 0$)

$$g(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x});$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\Leftrightarrow \Delta = 0$)

$$g(x) = x e^{\lambda_1 x}.$$

Se a e b sono reali, $g(x)$ è reale e possiamo riscriverla come segue nel caso $\Delta \neq 0$: posto $\alpha = -a/2$ e

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{-\Delta}/2 & \text{se } \Delta < 0 \\ \sqrt{\Delta}/2 & \text{se } \Delta > 0 \end{cases} \quad \text{così che} \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} \alpha \pm i\beta & \text{se } \Delta < 0 \\ \alpha \pm \beta & \text{se } \Delta > 0 \end{cases}$$

si ha

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2i\beta} (e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \text{se } \Delta < 0 \\ \frac{1}{2\beta} (e^{(\alpha+\beta)x} - e^{(\alpha-\beta)x}) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sinh(\beta x) & \text{se } \Delta > 0. \end{cases}$$

Per n generico, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

(non necessariamente distinte, ognuna contata con la sua molteplicità), e indichiamo con $g_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ la risposta impulsiva dell'equazione $Ly = 0$. Vale allora la formula ricorsiva:

$$g_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(x) = e^{\lambda_n x} \int_0^x e^{-\lambda_n t} g_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}(t) dt, \quad (11)$$

che consente di calcolare $g_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ iterativamente. Per esempio per $n = 3$ otteniamo dalla (11) le seguenti formule per la risposta impulsiva $g = g_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$:

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ (radici tutte distinte)

$$g(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)};$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

$$g(x) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2} [e^{\lambda_3 x} - e^{\lambda_1 x} + (\lambda_1 - \lambda_3) x e^{\lambda_1 x}];$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$$g(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{\lambda_1 x}.$$

Notiamo che se i coefficienti dell'equazione differenziale $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$ sono tutti reali, allora $g(x)$ è reale. Infatti nel caso di radici tutte distinte se $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$, si calcola

$$g(x) = \frac{1}{(\lambda_1 - \alpha)^2 + \beta^2} \left[e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{\beta} (\alpha - \lambda_1) e^{\alpha x} \sin \beta x - e^{\alpha x} \cos \beta x \right].$$

In tutti gli altri casi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono reali se $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Per n generico si ottiene un'espressione semplice della risposta impulsiva $g = g_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ nel caso di radici tutte distinte o tutte uguali, cioè

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ (radici tutte distinte)

$$g(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x},$$

dove

$$c_k = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)} \quad (1 \leq k \leq n);$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{\lambda_1 x}.$$

Nel caso generale, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici *distinte* di $p(\lambda)$, di molteplicità m_1, \dots, m_k , con $m_1 + \dots + m_k = n$. Esistono allora dei polinomi G_1, \dots, G_k , di gradi rispettivamente $m_1 - 1, \dots, m_k - 1$, tali che

$$g(x) = G_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + G_k(x) e^{\lambda_k x}.$$

Un metodo per determinare i polinomi G_1, \dots, G_k è il seguente. Consideriamo la decomposizione di $1/p(\lambda)$ in fratti semplici su \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}} &= \frac{c_{11}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{c_{12}}{(\lambda - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{c_{1m_1}}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \dots \\ &+ \frac{c_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{c_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \dots + \frac{c_{km_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}. \end{aligned}$$

Si dimostra allora che

$$G_j(x) = c_{j1} + c_{j2}x + c_{j3}\frac{x^2}{2!} + \dots + c_{jm_j}\frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \quad (1 \leq j \leq k).$$

- (a) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, dunque $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e la risposta impulsiva è $g(x) = x e^x$. Il termine forzante $\frac{e^x}{x+2}$ è continuo per $x > -2$ e per $x < -2$. Poichè le condizioni iniziali sono poste nel punto $x_0 = 0$, possiamo lavorare nell'intervallo $I = (-2, +\infty)$. Dalla formula (10) otteniamo la seguente soluzione del problema proposto nell'intervallo I :

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (x-t) e^{x-t} \frac{e^t}{t+2} dt = e^x \int_0^x \frac{x-t}{t+2} dt \\ &= e^x \int_0^x \left(\frac{x+2}{t+2} - 1 \right) dt = e^x \left[(x+2) \log(t+2) - t \right]_0^x \\ &= e^x \left[(x+2) \log(x+2) - x - (x+2) \log 2 \right] \\ &= e^x (x+2) \log \left(\frac{x+2}{2} \right) - x e^x. \end{aligned}$$

Notiamo che l'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2}$ nell'intervallo I si può scrivere come

$$y_{gen}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^x (x+2) \log(x+2) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Infatti il termine $-x e^x - (x+2)e^x \log 2$ nella soluzione particolare trovata sopra può essere inglobato in $y_{om}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

- (b) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, dunque $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i$, e la risposta impulsiva è $g(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$. I dati iniziali sono posti nel punto $x_0 = 0$ e possiamo lavorare nell'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$, dove il termine forzante $\frac{1}{\cos x}$ è continuo. Dalla formula (10) otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \sin(x-t) \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \sin x \int_0^x dt - \cos x \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t} dt \\ &= x \sin x + \cos x \log(\cos x). \end{aligned}$$

- (c) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, dunque $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, e la risposta impulsiva è $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$. Il termine forzante $\frac{1}{\text{ch } x}$ è continuo su tutto \mathbb{R} . Dalla formula (10) si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \text{sh}(x-t) \frac{1}{\text{ch } t} dt \\ &= \int_0^x (\text{sh } x \text{ch } t - \text{ch } x \text{sh } t) \frac{1}{\text{ch } t} dt \\ &= \text{sh } x \int_0^x dt - \text{ch } x \int_0^x \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t} dt \\ &= x \text{sh } x + \text{ch } x \log(\text{ch } x). \end{aligned}$$

- (d) $y(x) = x e^{-x} \arctan x - \frac{1}{2} e^{-x} \log(1+x^2)$.

- (e) $y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right)$.

- (f) La risposta impulsiva è $g(x) = \sin x$, il termine forzante $\tan x$ è continuo nell'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Dalla formula (10) si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \sin(x-t) \tan t dt = \sin x \int_0^x \sin t dt - \cos x \int_0^x \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt \\ &= \sin x (1 - \cos x) - \cos x \int_0^x \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt \\ &= \sin x (1 - \cos x) + \cos x \int_0^x \cos t dt - \cos x \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \sin x - \cos x \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt. \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale facciamo il cambio di variabili

$$\tan \frac{t}{2} = s \quad \Rightarrow \quad \cos t = \frac{1-s^2}{1+s^2}, \quad dt = \frac{2}{1+s^2} ds \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\cos t} dt &= \int_0^{\tan x/2} \frac{2}{1-s^2} ds = - \int_0^{\tan x/2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) dt \\
&= - \left[\log \left| \frac{s-1}{s+1} \right| \right]_0^{\tan x/2} = - \log \left| \frac{\tan x/2 - 1}{\tan x/2 + 1} \right| \\
&= - \log \left| \frac{\sin x/2 - \cos x/2}{\sin x/2 + \cos x/2} \right| = - \log \left| \frac{\sin^2 x/2 - \cos^2 x/2}{(\sin x/2 + \cos x/2)^2} \right| \\
&= - \log \left| \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right|.
\end{aligned}$$

Notando che $\frac{\cos x}{1 + \sin x} > 0 \forall x \in I$, otteniamo infine

$$y(x) = \sin x + \cos x \log \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right).$$

- (g) $y(x) = \sin x \log(\sin x) - (x - \pi/2) \cos x$ nell'intervallo $I = (0, \pi)$.
(h) $y(x) = \operatorname{sh} x \log(\operatorname{sh} x / \operatorname{sh} 1) - (x - 1) \operatorname{ch} x$ nell'intervallo $I = (0, +\infty)$.
(i) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, e la risposta impulsiva è $g(x) = e^x - 1$. Il termine forzante $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ è continuo su \mathbb{R} . Dalla formula (10) si ha

$$y(x) = \int_0^x (e^{x-t} - 1) \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch} t} dt - \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt.$$

I due integrali si calcolano elementarmente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt &= 2 \int \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = 2 \int \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt \\
&= 2 \arctan(e^t) + C,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch} t} dt &= 2 \int \frac{1}{e^{2t} + 1} dt = 2 \int \frac{1 + e^{2t} - e^{2t}}{1 + e^{2t}} dt \\
&= 2t - \log(1 + e^{2t}) + C'.
\end{aligned}$$

Otteniamo infine

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^x \left[2t - \log(1 + e^{2t}) \right]_0^x - 2 \left[\arctan(e^t) \right]_0^x \\
&= e^x \left[2x - \log(1 + e^{2x}) \right] + e^x \log 2 - 2 \arctan(e^x) + \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

- (j) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$, la risposta impulsiva è $g(x) = e^x \sin x$. Il termine forzante $1 + \cos x$ è continuo su $I = (-\pi, \pi)$. Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = \int_0^x e^{x-t} \sin(x-t) \frac{e^t}{1 + \cos t} dt = e^x \sin x \int_0^x \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt - e^x \cos x \int_0^x \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt.$$

I due integrali si calcolano elementarmente:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt = [-\log(1 + \cos t)]_0^x = -\log\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt &= \int_0^x \frac{\cos t + 1 - 1}{1 + \cos t} dt = \int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{1 + \cos t} dt \\
&= x - \int_0^x \frac{1}{2 \cos^2 t/2} dt = x - \left[\tan \frac{t}{2} \right]_0^x = x - \tan \frac{x}{2} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$y(x) = e^x \sin x \left(x - \tan \frac{x}{2} \right) + e^x \cos x \log \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right).$$

- (k) $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2$. La risposta impulsiva è $g(x) = e^{2x} - e^x$. Il termine forzante $\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ è continuo su $I = \mathbb{R}$. Dalla (10) si ha

$$y(x) = e^{2x} \int_0^x \frac{1}{(e^t+1)^2} dt - e^x \int_0^x \frac{e^t}{(e^t+1)^2} dt.$$

I due integrali si calcolano facilmente (ponendo ad esempio $e^t = s$) e si ottiene:

$$y(x) = e^{2x} \left(x - \log(e^x + 1) + \frac{1}{e^x+1} + \log 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}e^x.$$

- (l) $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ con molteplicità 3. La risposta impulsiva è $g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$. Il termine forzante $\frac{e^x}{x+1}$ è continuo su $I = (-1, +\infty)$. Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 e^{x-t} \frac{e^t}{t+1} dt = \frac{1}{2}e^x \int_0^x \frac{x^2+t^2-2tx}{t+1} dt.$$

L'integrale si calcola facilmente e si ottiene

$$y(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^x \log(x+1) - \frac{1}{2}x e^x \left(\frac{3}{2}x + 1 \right).$$

- (m) $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1, 2$. La risposta impulsiva si calcola facilmente: $g(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$. Il termine forzante $\frac{e^x}{e^x+1}$ è continuo su \mathbb{R} . Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x \int_0^x \frac{1}{e^t+1} dt + \frac{1}{6}e^{-x} \int_0^x \frac{e^{2t}}{e^t+1} dt + \frac{1}{3}e^{2x} \int_0^x \frac{e^{-t}}{e^t+1} dt.$$

I 3 integrali si calcolano facilmente con la sostituzione $e^t = s$ e decomponendo in fratti semplici. Il risultato finale è

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \right) \log(e^x + 1) - \frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{3}x e^{2x} + \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{3} \right) e^x + \frac{\log 2 - 1}{6} e^{-x} + \frac{1 - \log 2}{6} e^{2x}.$$

- (n) $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \pm 2i$. La risposta impulsiva si calcola facilmente: $g(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)$. Il termine forzante $\frac{1}{\sin 2x}$ è continuo su $I = (0, \pi/2)$. Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^x \frac{1 - \cos 2(x-t)}{\sin 2t} dt = \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^x \frac{1}{\sin 2t} dt - \frac{1}{4} \cos 2x \int_{\pi/4}^x \frac{\cos 2t}{\sin 2t} dt - \frac{1}{4} \sin 2x \int_{\pi/4}^x dt.$$

Il secondo e il terzo integrale sono immediati. Il primo integrale si calcola scrivendo

$$\int \frac{1}{\sin 2t} dt = \int \frac{1}{2 \sin t \cos t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan t \cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \log(\tan t) + k.$$

Il risultato finale è

$$y(x) = \frac{1}{8} \log(\tan x) - \frac{1}{8} \cos 2x \log(\sin 2x) - \frac{1}{4}(x - \pi/4) \sin 2x.$$

20. (a) Posto $y(x) = x^r$ si ha $y'(x) = r x^{r-1}$, $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $r(r-1)x^{r-2} + \frac{1}{x} r x^{r-1} - \frac{1}{x^2} x^r = 0$, cioè $x^r[r(r-1) + r - 1] = 0$, da cui $r^2 - 1 = 0$ e infine $r = \pm 1$. Abbiamo dunque le 2 soluzioni $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 1/x$.

- (b) Per dimostrare che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti per $x > 0$ è sufficiente calcolare il loro Wronskiano e mostrare che è diverso da zero su \mathbb{R}^+ . Si ha

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} \neq 0 \quad \forall x > 0.$$

- (c) Poichè y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti, ogni soluzione dell'equazione differenziale si può scrivere come $y(x) = c_1 x + c_2/x$. Imponendo le condizioni iniziali si trova che

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1, y'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}),$$

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0, y'(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}).$$

21. (a) Procedendo come nell'esercizio precedente si trova che la funzione $y(x) = x^r$ risolve l'equazione differenziale $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ se e solo se vale $r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + 6r - 6 = 0$, cioè $(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0$, da cui $r = 1, 2, 3$. Abbiamo dunque le 3 soluzioni $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$.

- (b) Calcolando il Wronskiano di y_1, y_2, y_3 si ha

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0 \quad \forall x > 0.$$

Quindi y_1, y_2, y_3 sono linearmente indipendenti per $x > 0$.

22. Consideriamo un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine in forma normale $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, dove $a, b \in C^0(I)$, I intervallo. Supponiamo di averne trovato una soluzione y_1 con $y_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. Il metodo di riduzione dell'ordine consente allora di determinare una seconda soluzione indipendente da y_1 . Si cerca tale soluzione nella forma $y_2(x) = z(x)y_1(x)$, dove $z(x)$ è una funzione da determinare. Si trova che la funzione $v = z'$ soddisfa l'equazione lineare del primo ordine $v' = -(2\frac{y_1'}{y_1} + a)v$, da cui

$$v(x) = k \frac{e^{-A(x)}}{(y_1(x))^2},$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x)$ su I e $k \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Integrando nuovamente e moltiplicando per $y_1(x)$ otteniamo la seconda soluzione

$$y_2(x) = ky_1(x) \int \frac{e^{-A(x)}}{(y_1(x))^2} dx. \quad (12)$$

Calcolando il Wronskiano di y_1 e y_2 si trova facilmente che

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = ke^{-A(x)} \neq 0 \quad \forall k \neq 0.$$

Ricordando che se y è soluzione dell'equazione omogenea allora qualunque multiplo ky è ancora soluzione, concludiamo che qualunque valore di $k \neq 0$ nella (12), per esempio

$k = 1$, dà una soluzione y_2 indipendente da y_1 . Inoltre nella (12) possiamo omettere la costante arbitraria di integrazione proveniente dall'integrale indefinito in quanto ogni termine del tipo $k'y_1(x)$ è proporzionale alla prima soluzione. Per esempio fissando un punto $x_0 \in I$ e prendendo sempre le primitive che si annullano in x_0 , otteniamo la formula

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{x_0}^t a(s) ds}}{(y_1(t))^2} dt$$

che fornisce una soluzione dell'equazione che si annulla in x_0 .

- (a) La verifica che $y_1(x) = x^3$ risolve l'equazione è immediata. Riscrivendo l'equazione in forma normale si ha $y'' - \frac{7}{x}y' + \frac{15}{x^2}y = 0$. Confrontando con $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ vediamo che $a(x) = -\frac{7}{x}$ e dunque $A(x) = -7 \log x$. Sostituendo nella formula (12) otteniamo

$$y_2(x) = kx^3 \int \frac{e^{\frac{7 \log x}{(x^3)^2}}}{(x^3)^2} dx = kx^3 \int \frac{x^7}{x^6} dx = kx^3(\frac{1}{2}x^2 + c).$$

Omettendo la costante di integrazione c (che dà un multiplo di y_1) e prendendo ad esempio $k = 2$ (ricordiamo che k si può fissare arbitrariamente) otteniamo la seconda soluzione indipendente nella forma $y_2(x) = x^5$.

- (b) La verifica che $y_1(x) = x$ risolve l'equazione è immediata. Riscrivendo l'equazione in forma normale si ha $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$, da cui $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $A(x) = -\log x$. Sostituendo nella formula (12) con $k = 1$ e omettendo la costante di integrazione otteniamo

$$y_2(x) = x \int \frac{e^{\log x}}{x^2} dx = x \int \frac{1}{x} dx = x \log x.$$

- (c) La verifica che $y_1(x) = x$ risolve l'equazione $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ è facile. Si ha $a(x) = -4x \Rightarrow A(x) = -2x^2$. Sostituendo nella (12) con $k = 1$ e omettendo la costante di integrazione otteniamo

$$y_2(x) = e^{x^2} \int \frac{e^{2x^2}}{(e^{x^2})^2} dx = e^{x^2} \int dx = xe^{x^2}.$$

- (d) La verifica che $y_1(x) = e^x$ risolve l'equazione è immediata. Riscrivendo l'equazione in forma normale si ha $y'' - (1 + \frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = 0$. Dunque $a(x) = -1 - \frac{1}{x}$ e $A(x) = -x - \log x$. Sostituendo nella (12) e integrando per parti senza mettere la costante di integrazione otteniamo

$$\begin{aligned} y_2(x) &= ke^x \int \frac{e^{x+\log x}}{(e^x)^2} dx = ke^x \int \frac{x}{e^x} dx = ke^x \int xe^{-x} dx \\ &= ke^x \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right) = ke^x (-xe^{-x} - e^{-x}) = k(-x - 1). \end{aligned}$$

Prendendo ad esempio $k = -1$ si ha $y_2(x) = x + 1$.

- (e) La verifica che $y_1(x) = 1$ soddisfa l'equazione è immediata. L'equazione in forma normale è $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y = 0$. Dunque $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, da cui

$$A(x) = \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \log |x^2 - 1| = \log(1 - x^2) \quad (\text{per } -1 < x < 1).$$

Sostituendo nella (12) otteniamo

$$\begin{aligned} y_2(x) &= k \int e^{-\log(1-x^2)} dx = -k \int \frac{1}{x^2-1} dx = -\frac{k}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= -\frac{k}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\frac{k}{2} \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right). \end{aligned}$$

Prendendo ad esempio $k = -2$ otteniamo $y_2(x) = \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$.

- (f) La verifica che $y_1(x) = x$ risolve l'equazione è immediata. L'equazione in forma normale è $y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x^3}y = 0$. Dunque $a(x) = 1/x^2$ e $A(x) = -1/x$. Sostituendo nella (12) otteniamo

$$y_2(x) = kx \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = kx(-e^{1/x}).$$

Prendendo ad esempio $k = -1$ otteniamo $y_2(x) = xe^{1/x}$.

- (g) $y_2(x) = x^{-1/2}$.
- (h) $y_2(x) = 1/x$.
- (i) $y_2(x) = xe^x$.
- (j) $y_2(x) = 1/x$.
- (k) $y_2(x) = \sqrt{x} \log x$.
- (l) $y_2(x) = 1 + \log x$.
- (m) $y_2(x) = \sqrt{x}$.
- (n) $y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$.

23. Supponiamo di conoscere un sistema fondamentale di soluzioni y_1, y_2 dell'equazione lineare omogenea $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Il metodo della variazione delle costanti consente allora di determinare una soluzione particolare y_p dell'equazione non omogenea $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, dove a, b, f sono funzioni continue su un intervallo I . Si cerca y_p nella forma $y_p = z_1y_1 + z_2y_2$, dove z_1 e z_2 sono funzioni da determinare. Imponendo la condizione $z_1'y_1 + z_2'y_2 = 0$ e sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene $z_1'y_1' + z_2'y_2' = f(x)$. Quindi le 2 funzioni z_1, z_2 soddisfano il sistema lineare 2×2 (omettendo la dipendenza da x per semplicità)

$$\begin{cases} z_1'y_1 + z_2'y_2 = 0 \\ z_1'y_1' + z_2'y_2' = f. \end{cases}$$

Il determinante del sistema è precisamente il Wronskiano di y_1 e y_2

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

che è sempre diverso da zero su I . Dunque il sistema ha soluzione unica che si calcola ad esempio con la regola di Kramer:

$$z_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{y_2 f}{W(y_1, y_2)} \quad z_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 f}{W(y_1, y_2)}.$$

Integrando e sostituendo in $y_p = z_1 y_1 + z_2 y_2$ otteniamo

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx. \quad (13)$$

In questa formula si possono omettere le costanti arbitrarie di integrazione provenienti dagli integrali indefiniti in quanto tali costanti danno termini del tipo $k_1 y_1 + k_2 y_2$ che sono soluzione dell'omogenea. Alternativamente possiamo fissare un punto $x_0 \in I$ e integrare tra x_0 e x ottenendo

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt. \quad (14)$$

Si dimostra che questa funzione soddisfa l'equazione non omogenea con le condizioni iniziali $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. La formula (14) è analoga alla formula (10), alla quale essa si riduce nel caso dei coefficienti costanti. Per vedere questo con maggiore chiarezza, riscriviamo la (14) nella forma seguente

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x g(x, t) f(t) dt,$$

dove $g(x, t)$ è la funzione $g : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, t) = -y_1(x) \frac{y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} + y_2(x) \frac{y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

È evidente che $\forall t \in I$ fissato, la funzione $x \rightarrow g(x, t)$ soddisfa l'equazione omogenea essendo una combinazione lineare di y_1 e y_2 con coefficienti dipendenti da t . È facile dimostrare che questa funzione soddisfa le seguenti condizioni iniziali nel punto $x = t$: $g(t, t) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t, t) = 1$. Nel caso dei coefficienti costanti si ha che $g(x, t) = g(x - t)$, dove $g(x) = g(x, 0)$ è la risposta impulsiva.

(a) Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$xy'' - (1+x)y' + y = 0$ per $x > 0$ è dato da $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x + 1$ (si veda l'esercizio 22 (d)). Il Wronskiano di y_1, y_2 è

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x - (x+1)e^x = -xe^x.$$

Consideriamo ora l'equazione non omogenea in forma normale,

$y'' - (1 + \frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = xe^{2x}$. Applicando la formula (13) otteniamo

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -e^x \int \frac{x+1}{-xe^x} xe^{2x} dx + (x+1) \int \frac{e^x}{-xe^x} xe^{2x} dx \\ &= e^x \int (x+1)e^x dx - (x+1) \int e^{2x} dx \\ &= e^x \cdot xe^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}. \end{aligned}$$

Abbiamo ommesso qualsiasi costante di integrazione negli integrali indefiniti.

- (b) Un sistema fondamentale dell'omogenea è dato da $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$ (vedi esercizio 22 (i)). Il Wronskiano è

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & (x+1)e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x.$$

Applicando la formula (13) all'equazione scritta in forma normale,

$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 2x$, si ottiene

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -x \int \frac{xe^x}{x^2 e^x} 2x dx + xe^x \int \frac{x}{x^2 e^x} 2x dx \\ &= -2x \int dx + 2xe^x \int e^{-x} dx = -2x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Poichè $-2x$ è soluzione dell'omogenea, possiamo prendere più semplicemente

$$y_p(x) = -2x^2.$$

(c) $y_p(x) = \frac{1}{4}x^3.$

24. (a) Calcoliamo innanzitutto una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$. Nell'esercizio 22 (b) si è visto che un sistema fondamentale dell'omogenea associata è $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x \log x$. Il Wronskiano è

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x \log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = x.$$

Dalla (13) otteniamo

$$y_p(x) = -x \int \log x dx + x \log x \int dx = -x(x \log x - x) + x^2 \log x = x^2.$$

L'integrale generale della non omogenea è dunque $y(x) = c_1 x + c_2 x \log x + x^2$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c_1 + 1 = 1$, $c_1 + c_2 + 2 = 0$, da cui $c_1 = 0$ e $c_2 = -2$. La soluzione è $y(x) = -2x \log x + x^2$.

- (b) Una soluzione particolare è $y_p(x) = \frac{1}{2} - x$. Il risultato è $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - x$.

- (c) Una soluzione particolare è $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2(\log x - 1)$. Il risultato è

$$y(x) = -ex + \frac{e^2}{2}(1 + \log x) + \frac{1}{2}x^2(\log x - 1).$$

25. (a) Sostituendo $y(x) = z(x)/x^2$ nell'equazione differenziale si ottiene che la funzione z deve soddisfare l'equazione $z'' + z = 0$. Due soluzioni indipendenti di questa equazione sono $z_1(x) = \cos x$, $z_2(x) = \sin x$. Otteniamo dunque le 2 soluzioni $y_1(x) = \frac{\cos x}{x^2}$, $y_2(x) = \frac{\sin x}{x^2}$. Queste sono indipendenti in quanto

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{x^2} & \frac{\sin x}{x^2} \\ -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{2 \cos x}{x^3} & \frac{\cos x}{x^2} - \frac{2 \sin x}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^4} \neq 0 \quad \forall x > 0.$$

- (b) Scrivendo l'equazione non omogenea in forma normale, $y'' + \frac{4}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = 1$, e procedendo con la variazione delle costanti, otteniamo la soluzione particolare $y_p(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$.