

# Fondamenti di Automatica

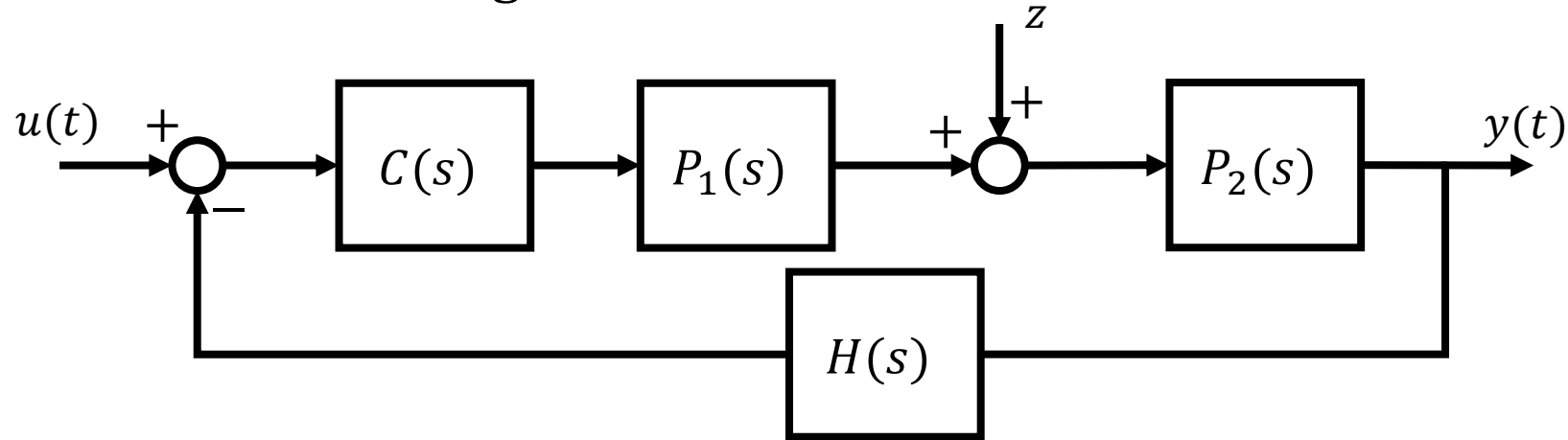
«Correzione Esonero 23/05/2019»  
Compito B

Dario Masucci

28/05/2019

## Traccia d'esame (Esercizio 1 - Compito B)

Dato il sistema di controllo in figura



In cui:  $C(s) = \frac{K_c}{s}$ ,  $P_1(s) = \frac{s+1}{s(s+8)}$ ,  $P_2(s) = 5$ ,  $H(s) = 0,2$

- Determinare:
1. Per quali valori di **Kc** il sistema risulta stabile a ciclo chiuso
  2. Il tipo di sistema di controllo
  3. Astatismo rispetto al disturbo costante **z**
  4. L'uscita permanente **y<sub>p</sub>(t)** con **u(t) = 5δ<sub>-3</sub>** e **z(t) = 0**
  5. L'uscita permanente **y<sub>z</sub>(t)** con **u(t) = 0** e **z(t) = 8δ<sub>-2</sub>(t)**

**Domanda 1** – Determinare per quali valori di **K<sub>c</sub>** il sistema risulta stabile a ciclo chiuso

**a** Si calcola la Funzione di Trasferimento a ciclo chiuso del sistema:

$$W(s) = \frac{C(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$$

$$W(s) = \frac{\frac{K_c}{s} \cdot \frac{s+1}{s(s+8)} \cdot 5}{1 + \frac{K_c}{s} \cdot \frac{s+1}{s(s+8)} \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{5K_c(s+1)}{s^2(s+8)}}{\frac{s^2(s+8) + K_c(s+1)}{s^2(s+8)}} = \frac{5K_c(s+1)}{s^2(s+8) + K_c(s+1)}$$

**b** Si considera l'equazione caratteristica  $Q(s)$  e si applica ad essa il criterio di Routh

$$\begin{aligned} Q(s) &= s^2(s+8) + K_c(s+1) = \\ &= s^3 + 8s^2 + K_cs + K_c \end{aligned}$$



3	1	$K_c$
2	8	$K_c$
1	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$
0	$b_{n-3}$	

Si calcolano i coefficienti della tabella di Routh

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{8 * K_c - 1 * K_c}{8} = \frac{7}{8} K_c$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} = \frac{8 * 0 - 1 * 0}{8} = 0 = a_{n-4}$$

$$b_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}} = \frac{\frac{7}{8} K_c * K_c - 8 * 0}{\frac{7}{8} K_c} = K_c = a_{n-3}$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K_c \\ 2 & 8 & K_c \\ 1 & 7K_c/8 & 0 \\ 0 & K_c & \end{array}$$

Ad ogni variazione di segno dei coefficienti nella prima colonna della tabella di Routh corrisponde ad un polo a parte reale positiva che renderebbe instabile il sistema.

Si determinano quindi i valori di  $K_c$  per cui i coefficienti della prima colonna siano positivi.

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K_c \\ 2 & 8 & K_c \\ 1 & 7K_c/8 & \\ 0 & K_c & \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{8}K_c > 0 \\ K_c > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_c > 0 \\ K_c > 0 \end{cases} \rightarrow \text{da cui } \mathbf{K_c > 0}$$

**Domanda 2** – Determinare il **tipo di sistema** di controllo

Per definire il tipo di sistema di controllo si considerano i poli nell'origine presenti nelle trasferenze sulla catena diretta. Si riscontrano un integratore in  $C(s)$  e un integratore in  $P_1(s)$ , quindi il sistema è di **tipo 2**.

**Domanda 3** – Determinare se il sistema è **astatico** rispetto al disturbo costante **z**

Si deve valutare se il sistema presenta almeno un polo nell'origine a monte del punto in cui interviene il disturbo costante.

Poiché si riscontra un integratore presente in  $C(s)$  (anche in  $P_1(s)$ ), il disturbo costante viene completamente **reiettato**. Il sistema risulta quindi **astatico** rispetto al disturbo costante.

**Domanda 4** – Determinare l'uscita permanente  $y_p(t)$  con  $u(t) = 5d_{-3}(t)$  e  $z(t) = 0$

Si considerano:

- L'indice relativo all'ingresso canonico a rampa del secondo ordine  $i = 2$
- L'indice relativo al tipo del sistema  $h = 2$

Poiché  $h = i = 2 > 0$  l'uscita permanente si calcola come  **$y_p(t) = u(t)K_d - e_r|u(t)|$**

In cui:  **$e_r = \frac{K_d^2}{K_G} = \text{costante}$**  con  $K_d = \frac{1}{H(s)} = 5$  e  $K_G = \lim_{s \rightarrow 0} s^h C(s)P_1(s)P_2(s)$

**Domanda 5** – Determinare l'uscita permanente  $y_z(t)$  con  $u(t) = 0$  e  $z(t) = 8d_{-2}(t)$

Per valutare l'effetto del disturbo  $z(t) = 8d_{-2}(t)$  sul sistema, e quindi per calcolare l'uscita permanente del disturbo  $y_z(t)$  si considerano:

- L'indice relativo al disturbo a rampa  $i = 1$
- L'indice relativo al numero di integratori a monte del disturbo  $h' = 2$

Poiché  $h' > i$  allora l'uscita permanente del disturbo è  **$y_z(t) = 0$**

Si può verificare sostituendo i valori nell'espressione dell'uscita

$$y_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_z(s) Z(s)$$

In cui:

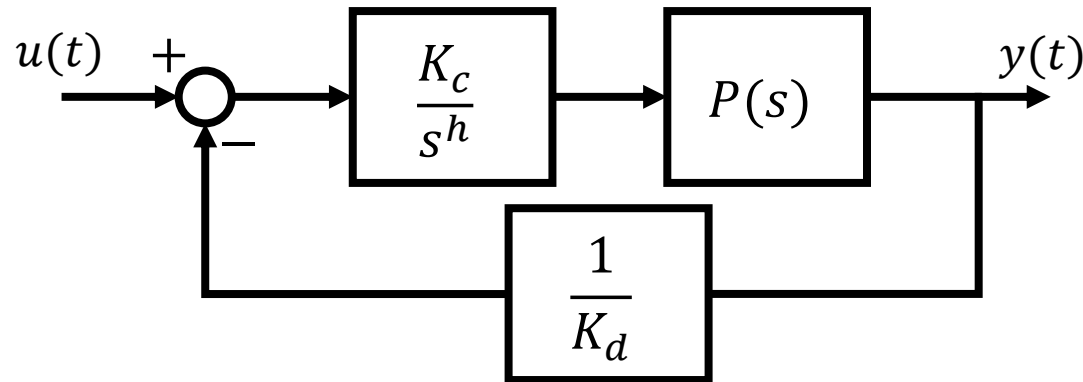
- $W_z(s)$  è la funzione di trasferimento a ciclo chiuso del disturbo  $\frac{P_2(s)}{1+C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$
- $Z(s)$  è la trasformata di Laplace del disturbo  $\frac{8}{s^2}$

## Traccia d'esame (Esercizio 2 - Compito B)

Sia dato un processo  $P(s)$  descrivibile mediante la funzione di trasferimento che segue

$$P(s) = \frac{8 \left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,6s}{20} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right) \left( \frac{s}{200} + 1 \right)}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura determinando  $h$  e  $K_c$ , e considerando  $K_d = 3$  in modo tale che l'errore per l'ingresso a rampa  $u(t) = 4\delta_{-2}(t)$  sia minore o uguale a 0,3



Scelto il valore minimo di  $K_c$  compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di **Bode** e di **Nyquist** della funzione a ciclo aperto  $F(s)$  e determinare su questi la **pulsazione di attraversamento** e i **margini di stabilità**.



1 Si riscrive la trasferenza del processo  $P(s)$

$$P(s) = \frac{8 \left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,6s}{20} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right) \left( \frac{s}{200} + 1 \right)}$$

2 E' richiesto da specifica che l'errore a regime per un ingresso a rampa sia minore o uguale ad un valore costante, in particolare  $e|u(t)| \leq 0,3$ .

Allora il sistema composto da  $C(s)$  e  $P(s)$  deve essere di **tipo 1** e quindi avere esattamente un polo nell'origine.

Poiché in  $P(s)$  non è presente alcun polo, allora deve necessariamente essere presente nel controllore, ossia in  $C(s)$ .

Possiamo scrivere  **$h = 1$**

3

Il guadagno  $K_c$  del controllore  $C(s)$  si ottiene dall'espressione dell'errore tenendo in considerazione che

$$e|u(t)| \leq 0,3 \quad \text{in cui} \quad |u(t)| = 4$$

Dalla tabella riguardante l'espressione dell'errore, definito in base al tipo di sistema e alla natura dell'ingresso, si ottiene

	0	1	2
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{k_d^2}{k_d + K_G}$	0	0
$t\delta_{-1}(t)$	$\infty$	$\frac{k_d^2}{K_G}$	0
$\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$	$\infty$	$\infty$	$\frac{k_d^2}{K_G}$

$$e = \frac{K_d^2}{K_G} \quad \text{in cui } K_d = 3 \text{ è un dato del problema}$$

e  $K_G$  è il guadagno statico del sistema

$$K_G \text{ si ottiene come } K_G = \lim_{s \rightarrow 0} s^h C(s)P(s) = K_c \cdot 8$$

$$\text{Quindi si può scrivere } e|u(t)| = \frac{9}{K_c \cdot 8} \cdot 4 \leq 0,3$$

$$\text{da cui } \mathbf{K_c \geq 15}$$

4

Si calcola la funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(s)$  del sistema come

$$F(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot P(s) \cdot \frac{1}{K_d} = \frac{15}{s} \cdot \frac{8 \left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,6s}{20} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right) \left( \frac{s}{200} + 1 \right)} \cdot \frac{1}{3}$$

$$F(s) = \frac{40 \left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,6s}{20} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{40} + 1 \right) \left( \frac{s}{200} + 1 \right)}$$

5

Si individuano i fattori che compongono la funzione di trasferimento  $F(s)$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{G_0} \rightarrow \text{termine costante } 40 & \mathbf{G_{1D}} \rightarrow \text{polo nell'origine } \frac{1}{s} \\
 \mathbf{G_{3N}} \rightarrow \text{zeri complessi } \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,6s}{20} + 1 & \mathbf{G_{2D}} \rightarrow \text{polo reale } \overbrace{\frac{1}{\frac{s}{5} + 1} \frac{1}{\frac{s}{40} + 1} \frac{1}{\frac{s}{200} + 1}}
 \end{array}$$

6

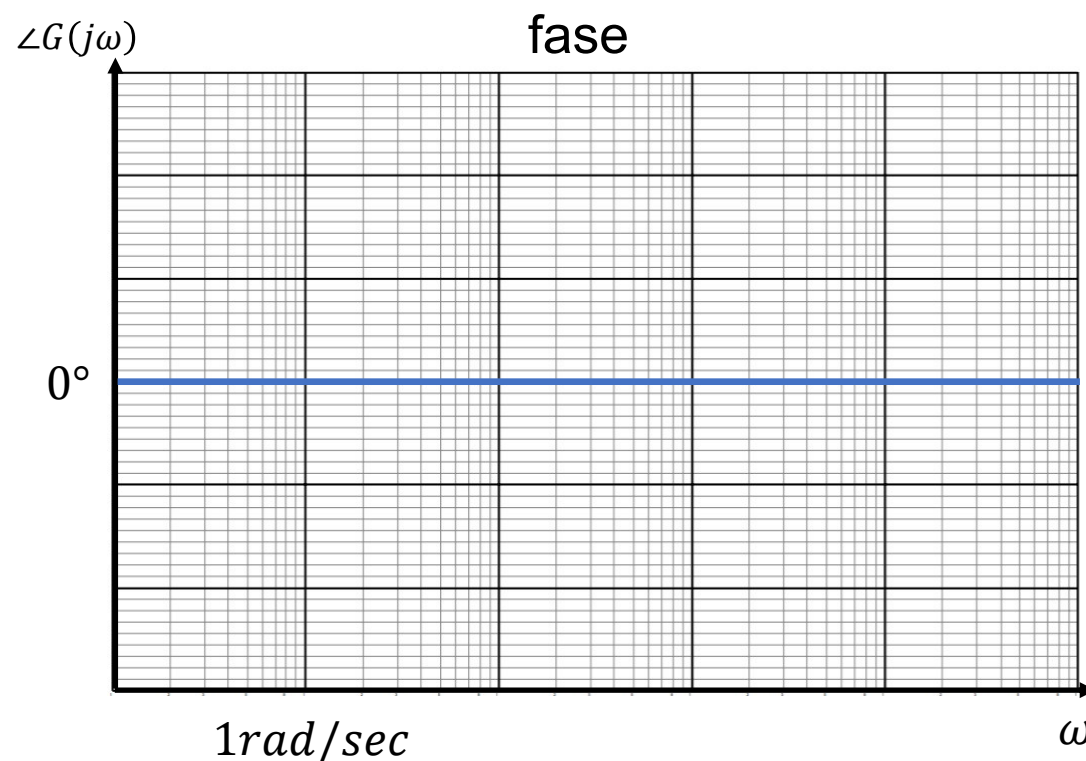
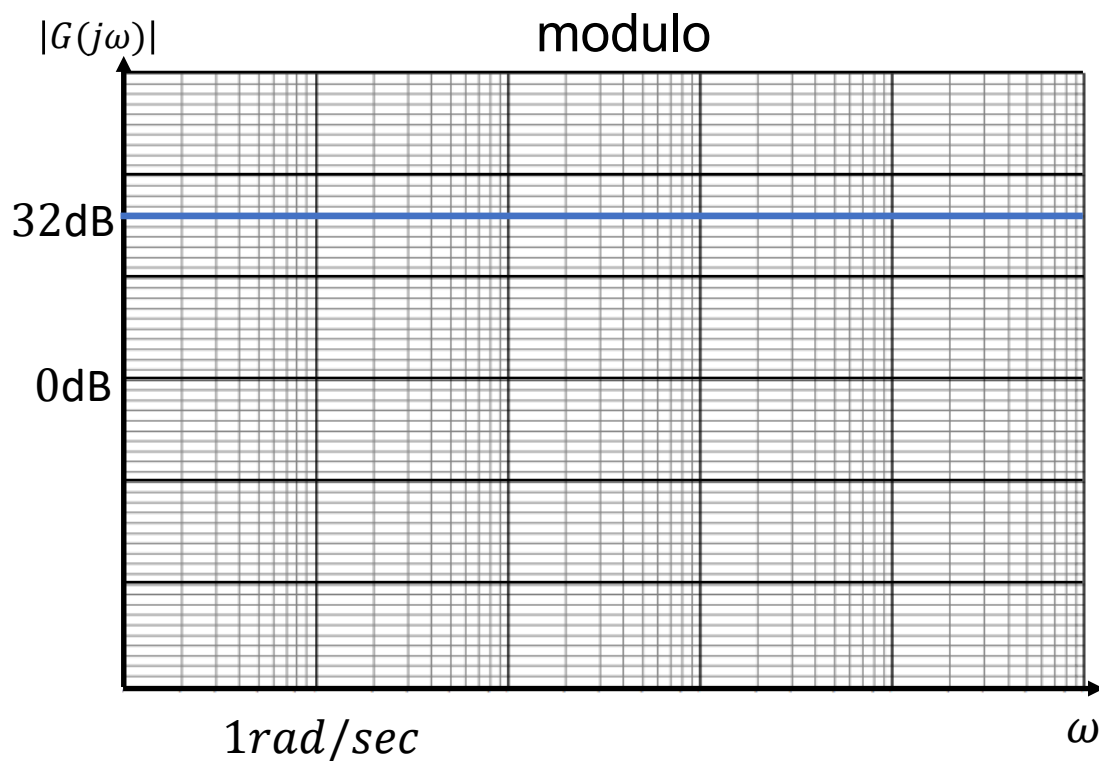
Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

a

$G_0 \rightarrow$  termine costante 40

Modulo  $\rightarrow 20 \log_{10} 40 \approx 32 \text{ dB}$

Fase  $\rightarrow 0^\circ$



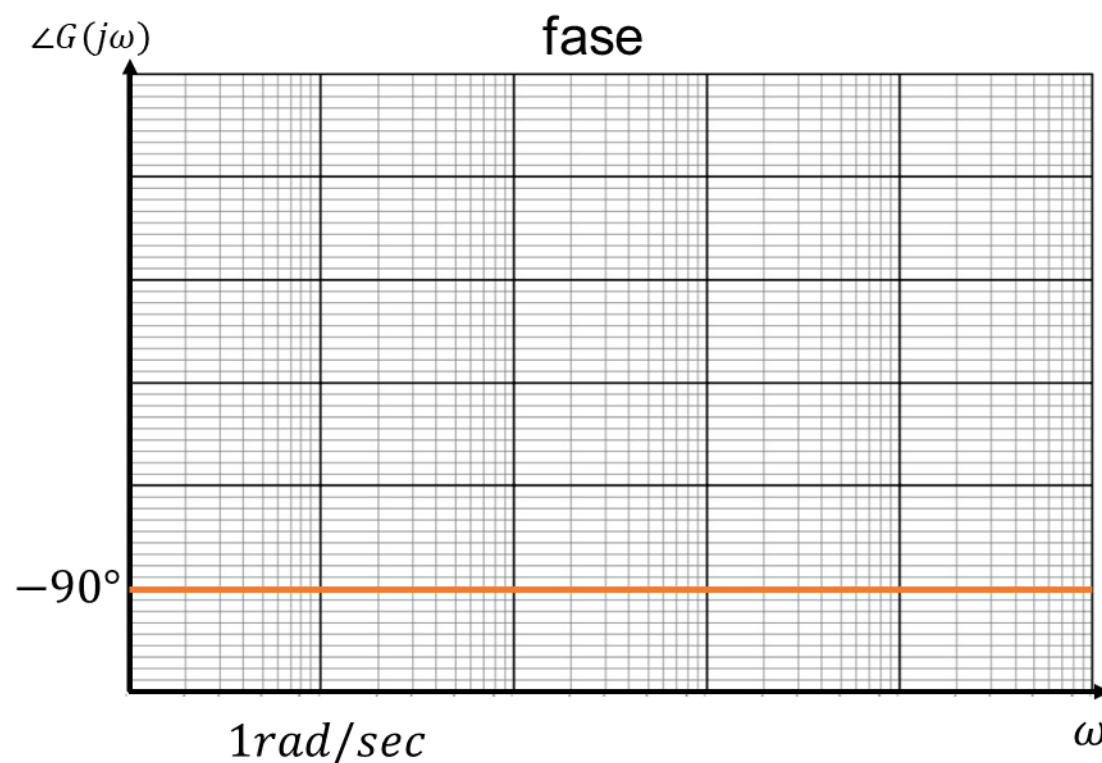
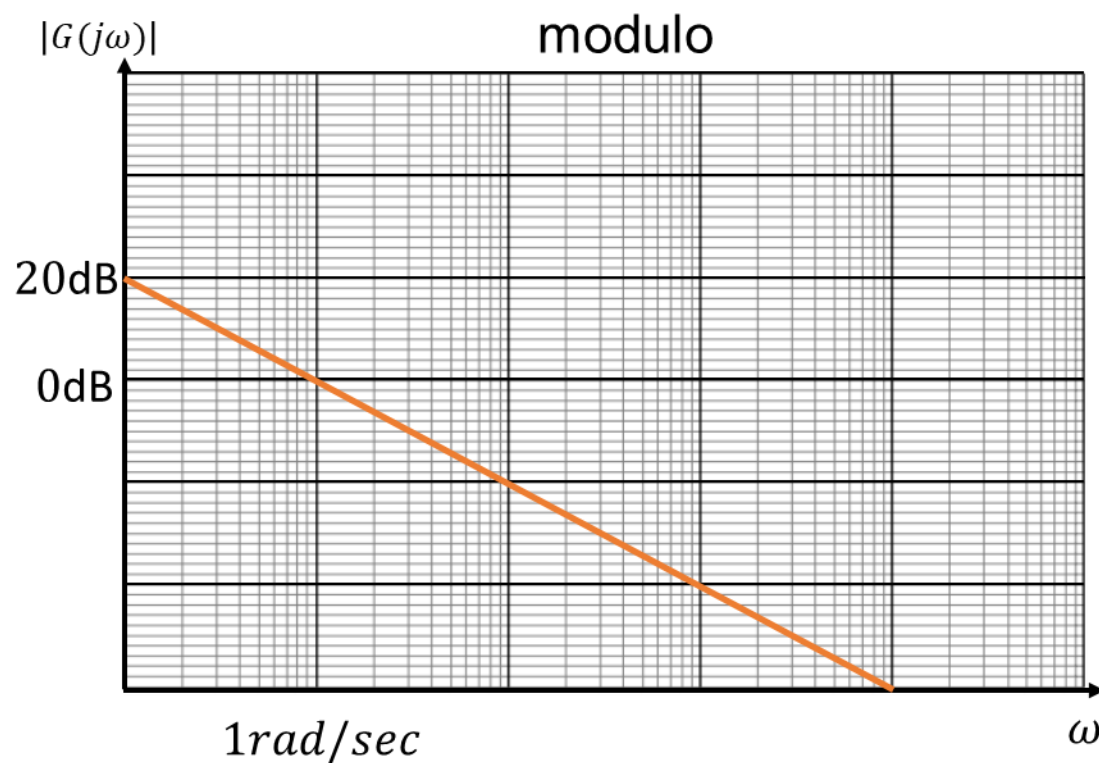
6

Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$\textcircled{b}$   $G_{1D} \rightarrow$  polo nell'origine  $\frac{1}{s}$

Modulo  $\rightarrow -20 \text{ dB/dec}$   
 $0 \text{ dB in } 1 \text{ rad/sec}$

Fase  $\rightarrow -90^\circ$

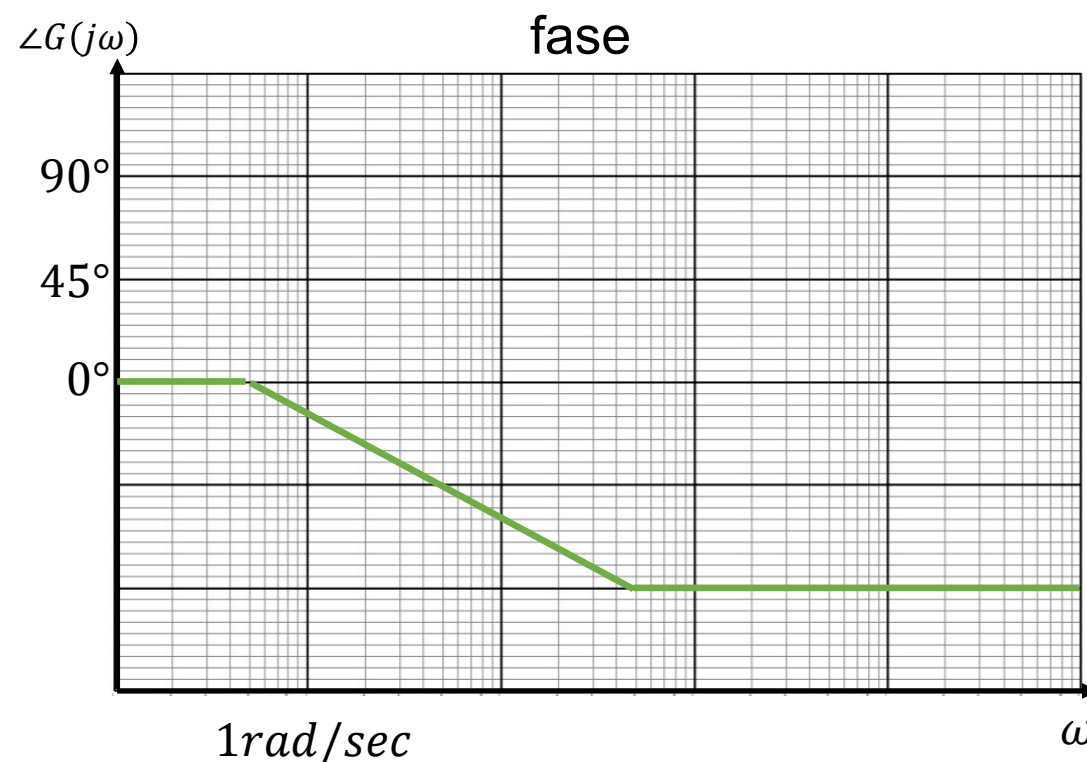
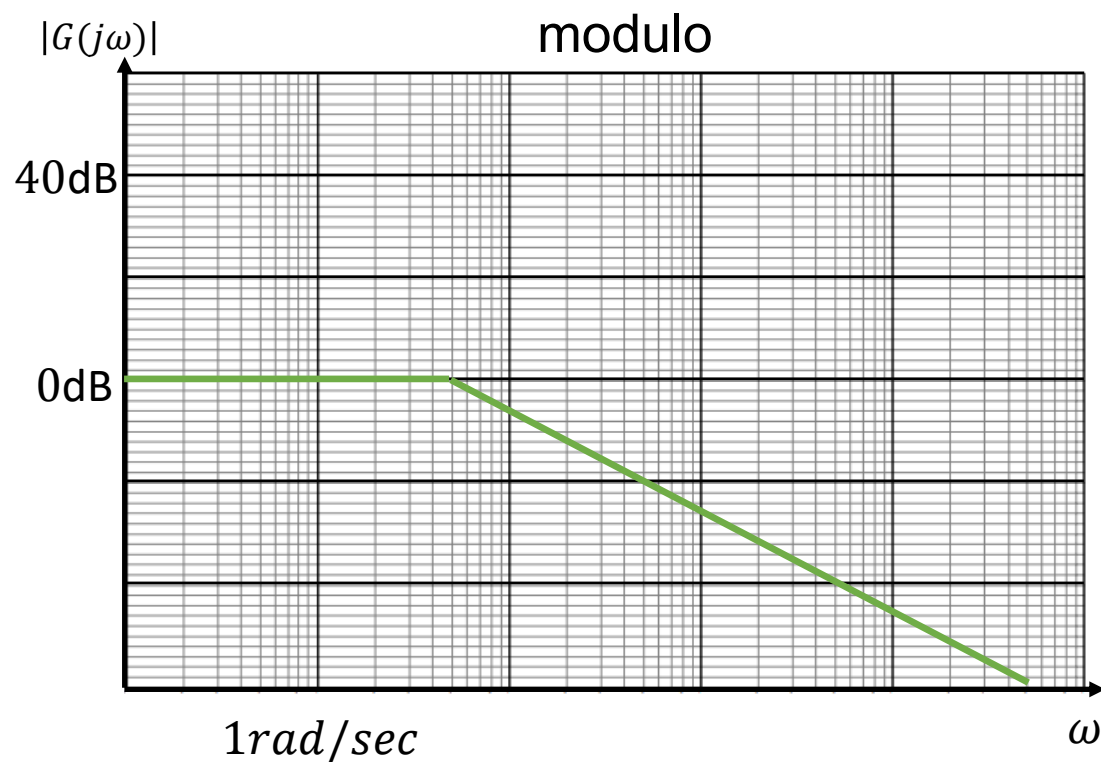


6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

c  $G_{2D} \rightarrow$  polo reale  $\frac{1}{\frac{s}{5} + 1}$

Modulo  $\rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 5 \\ -20 \text{ dB/dec per } \omega \geq 5 \end{cases}$

Fase  $\rightarrow \begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 0,5 \\ -45^\circ/\text{dec per } 0,5 \leq \omega \leq 50 \\ -90^\circ \text{ per } \omega > 50 \end{cases}$



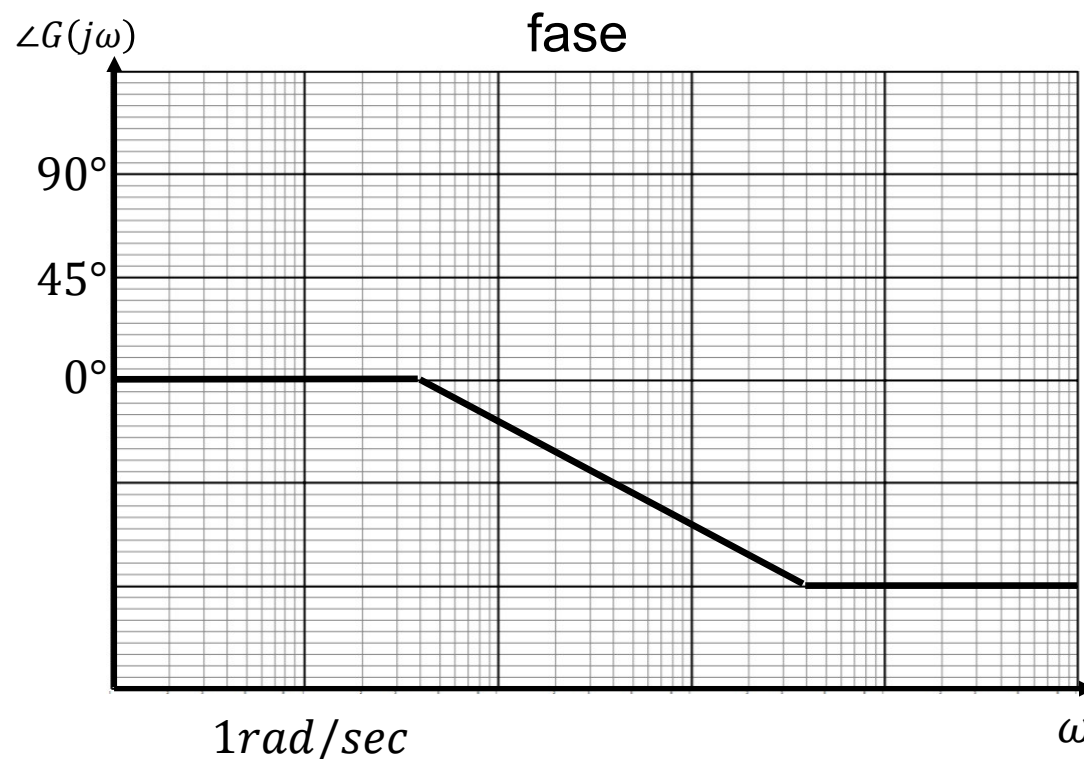
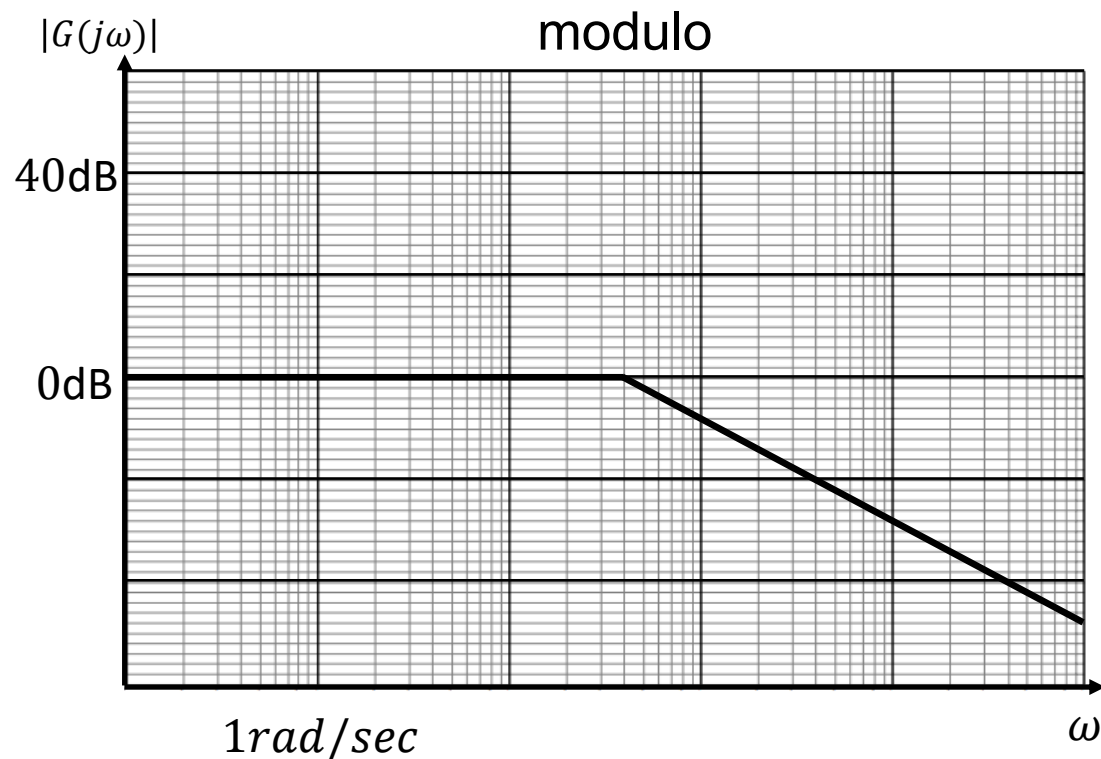
6

Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$d$   $G_{2D} \rightarrow$  polo reale  $\frac{1}{\frac{s}{40} + 1}$

Modulo  $\rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 40 \\ -20 \text{ dB/dec per } \omega \geq 40 \end{cases}$

Fase  $\rightarrow \begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 4 \\ -45^\circ/\text{dec per } 4 \leq \omega \leq 400 \\ -90^\circ \text{ per } \omega > 400 \end{cases}$



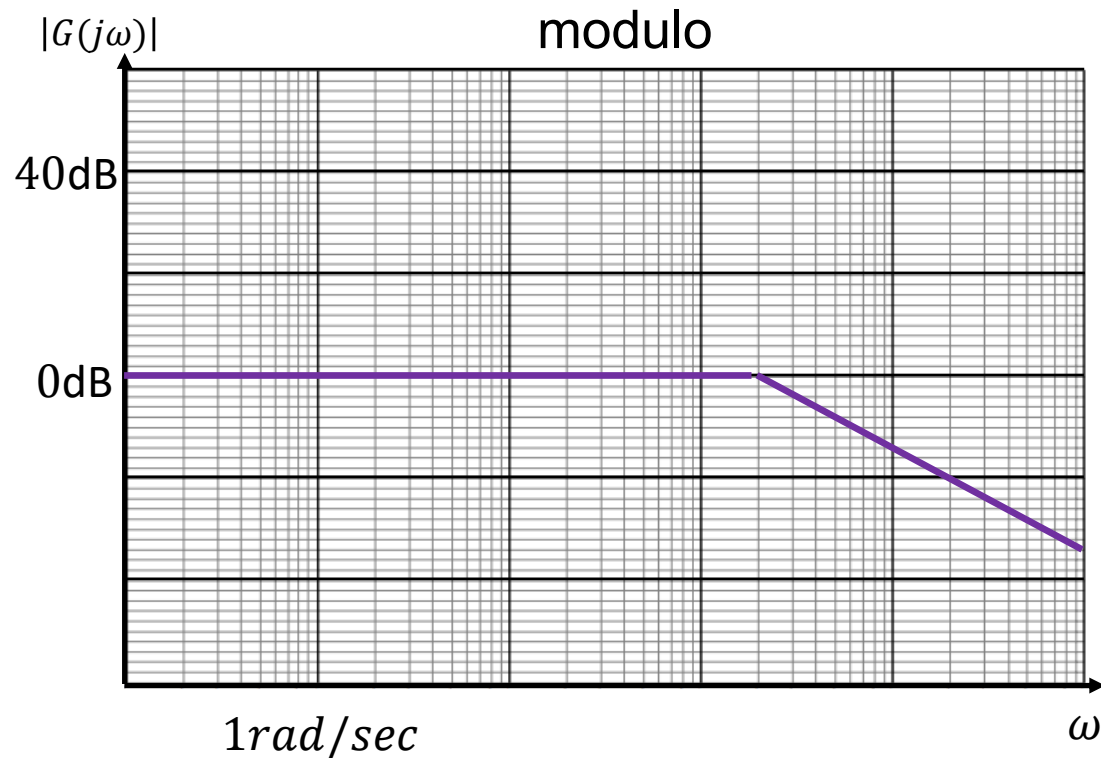


6

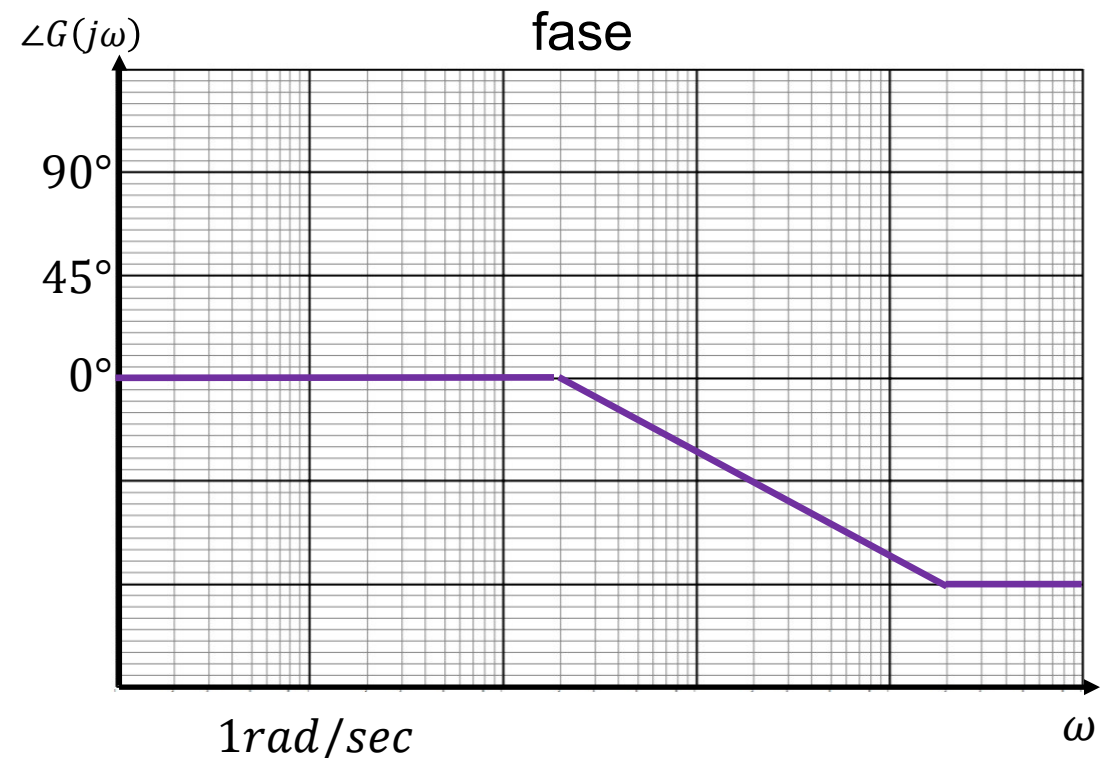
Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$e$   $G_{2D} \rightarrow$  polo reale  $\frac{1}{\frac{s}{200} + 1}$

Modulo  $\rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 200 \\ -20 \text{ dB/dec per } \omega \geq 200 \end{cases}$



Fase  $\rightarrow \begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 20 \\ -45^\circ/\text{dec per } 20 \leq \omega \leq 2000 \\ -90^\circ \text{ per } \omega > 2000 \end{cases}$





6

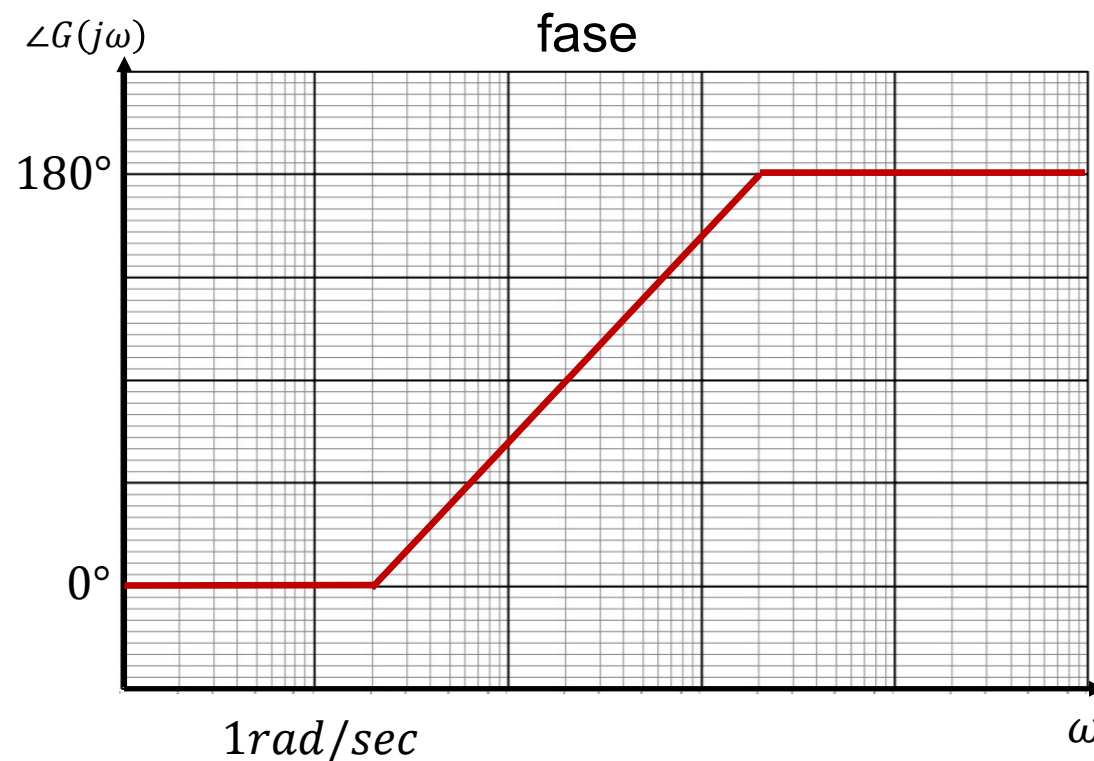
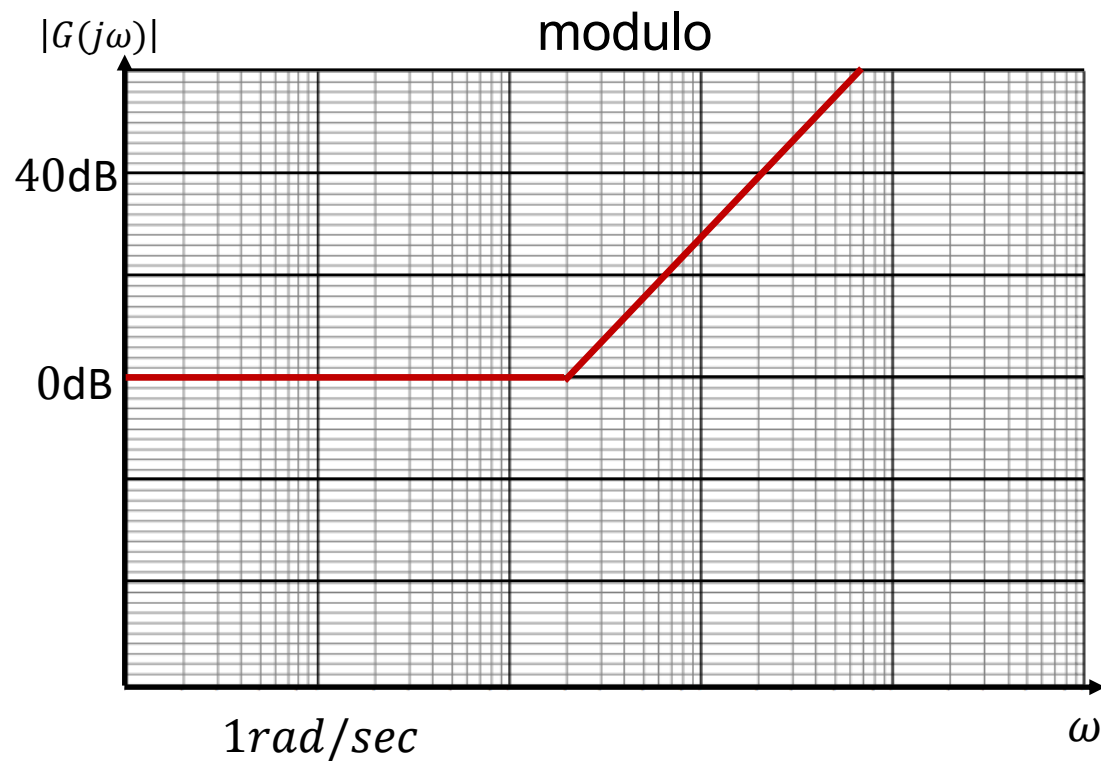
Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

f

$G_{3N} \rightarrow$  zeri complessi  $\frac{s^2}{20^2} + \frac{0,6s}{20} + 1$

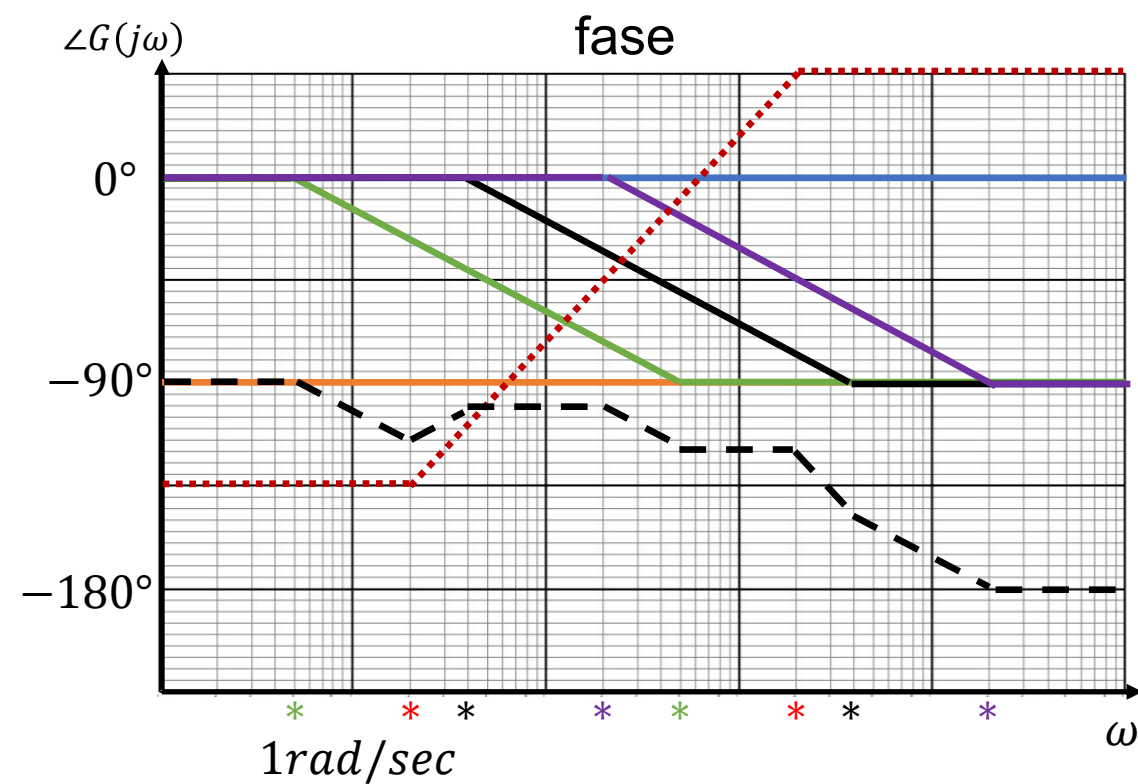
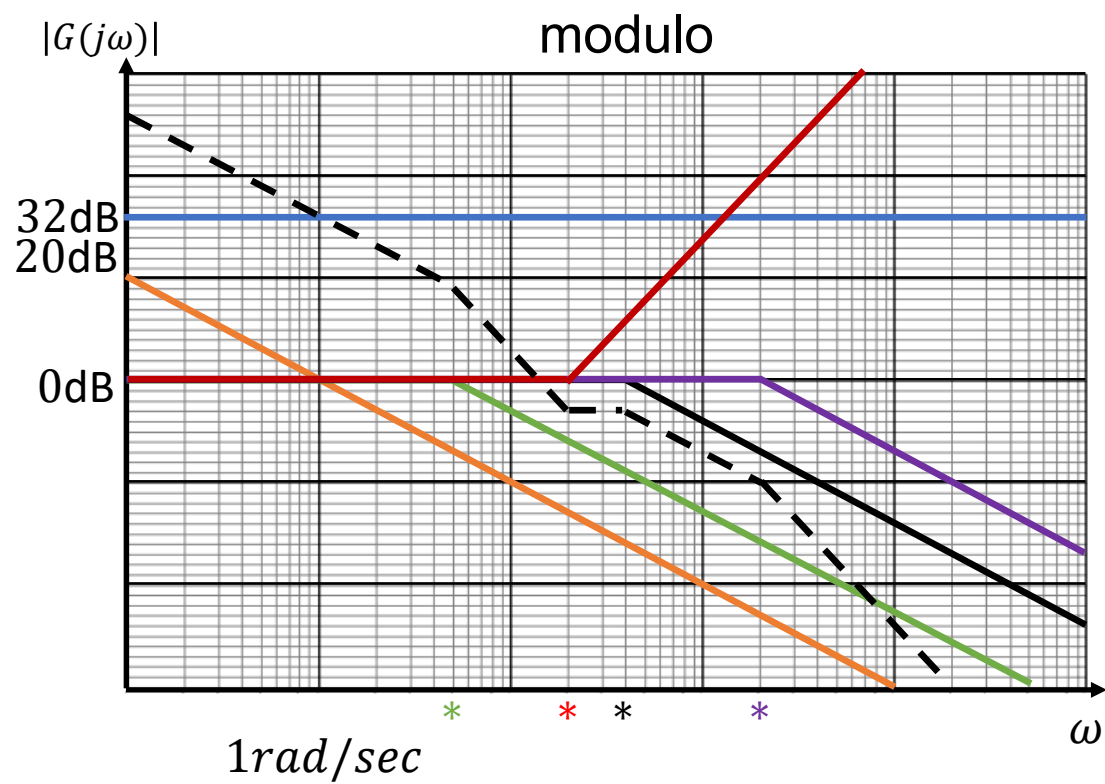
Modulo  $\rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 20 \\ +40 \text{ dB/dec per } \omega \geq 20 \end{cases}$

Fase  $\rightarrow \begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 2 \\ +90^\circ/\text{dec per } 2 \leq \omega \leq 200 \\ +180^\circ \text{ per } \omega > 200 \end{cases}$



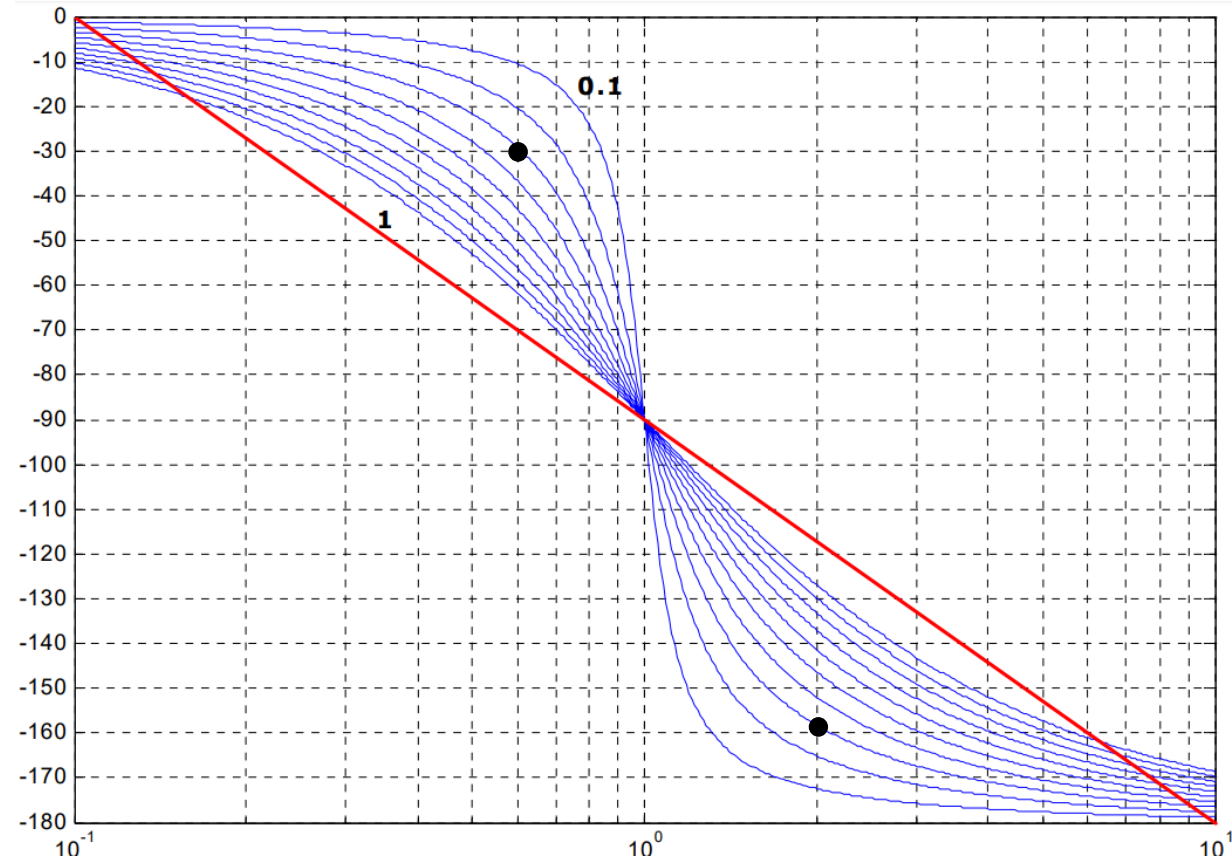
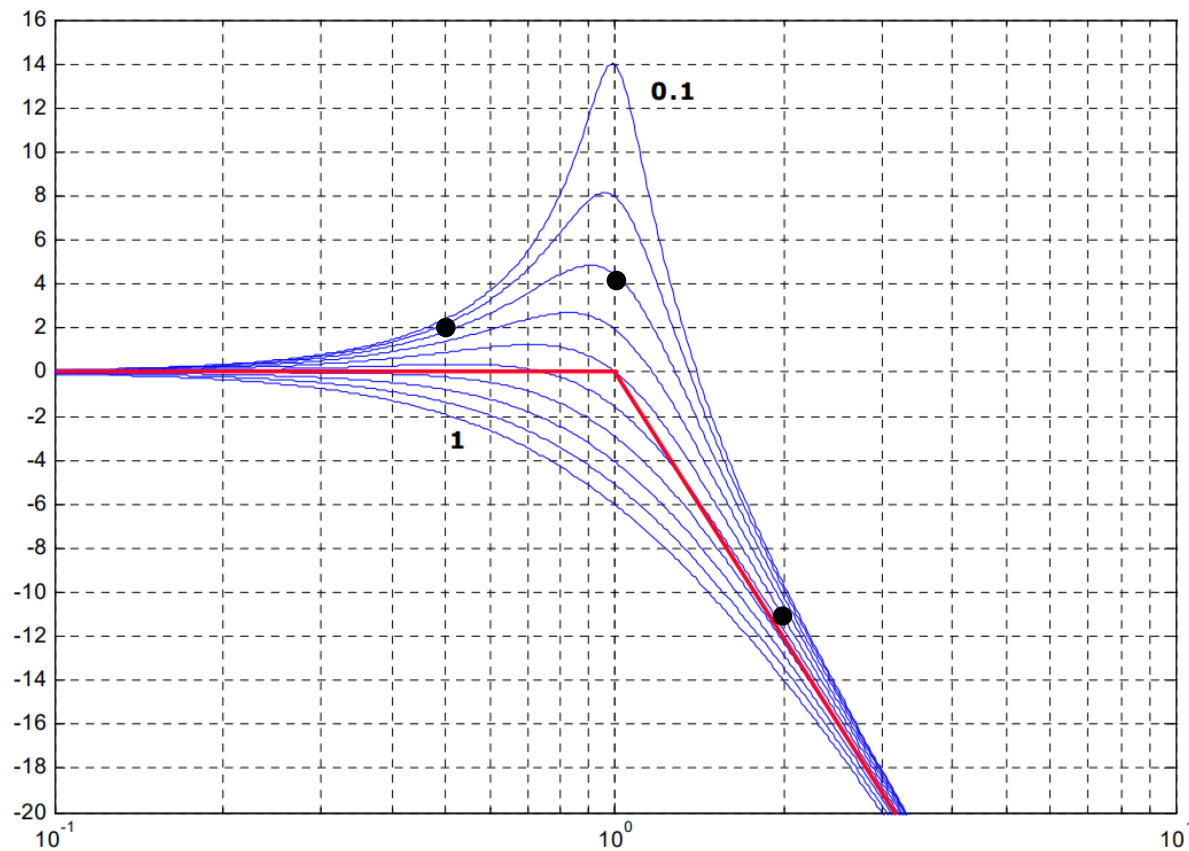
7

Si sommano i contributi di ogni termine per ottenere il tracciamento completo



8

Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio con  $\zeta = 0,3$



$$\omega = 10 \rightarrow -2dB$$

$$\omega = 20 \rightarrow -4dB$$

$$\omega = 40 \rightarrow -1dB$$

Calcolo delle posizioni su ascisse:

$$\leftarrow 0.5 : 1 = x_1 : 20 \Rightarrow x_1 = 0.5 * 20 = 10 \rightarrow$$

$$2 : 1 = x_2 : 20 \Rightarrow x_2 = 2 * 20 = 40$$

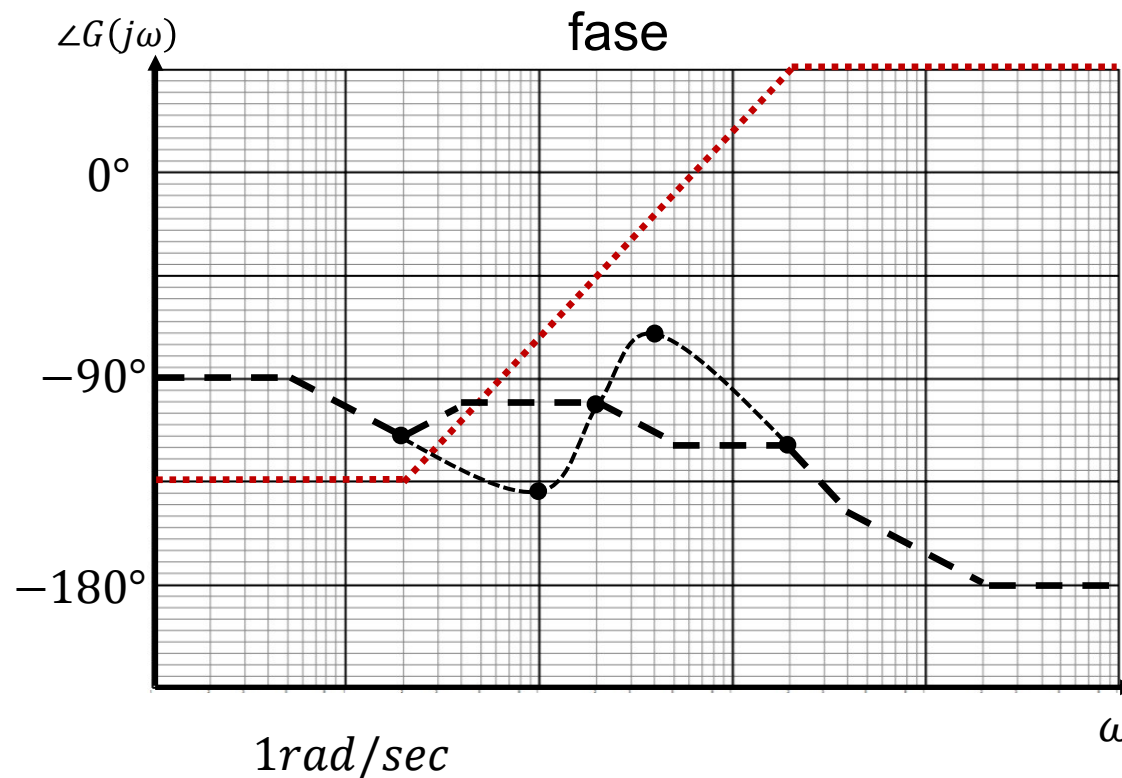
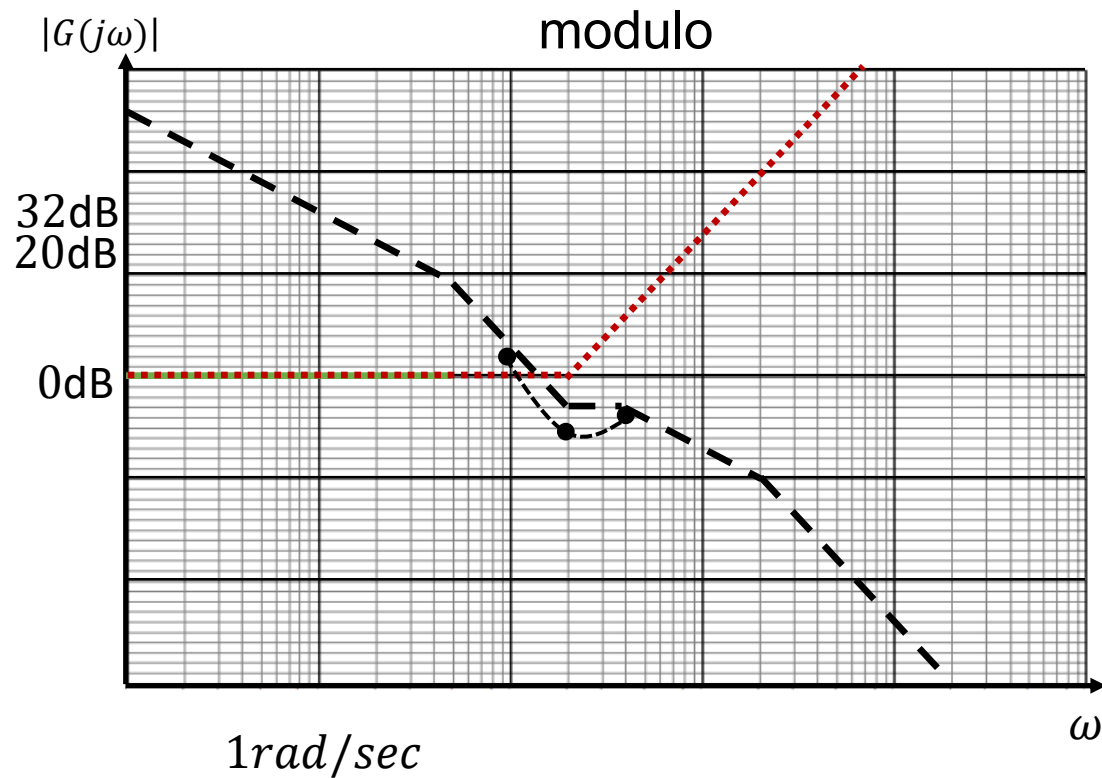
$$\omega = 10 \rightarrow -40^\circ$$

$$\omega = 20 \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega = 40 \rightarrow +40^\circ$$

8

Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio con  $\zeta = 0,3$



$$\omega = 10 \rightarrow -2dB$$

$$\omega = 20 \rightarrow -4dB$$

$$\omega = 40 \rightarrow -1dB$$

Calcolo delle posizioni su ascisse:

$$\leftarrow 0.5 : 1 = x_1 : 20 \Rightarrow x_1 = 0.5 * 20 = 10 \rightarrow$$

$$2 : 1 = x_2 : 20 \Rightarrow x_2 = 2 * 20 = 40$$

$$\omega = 10 \rightarrow -40^\circ$$

$$\omega = 20 \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega = 40 \rightarrow +40^\circ$$

9

Si traccia il diagramma di Nyquist osservando l'andamento delle fasi

Diagramma di Bode

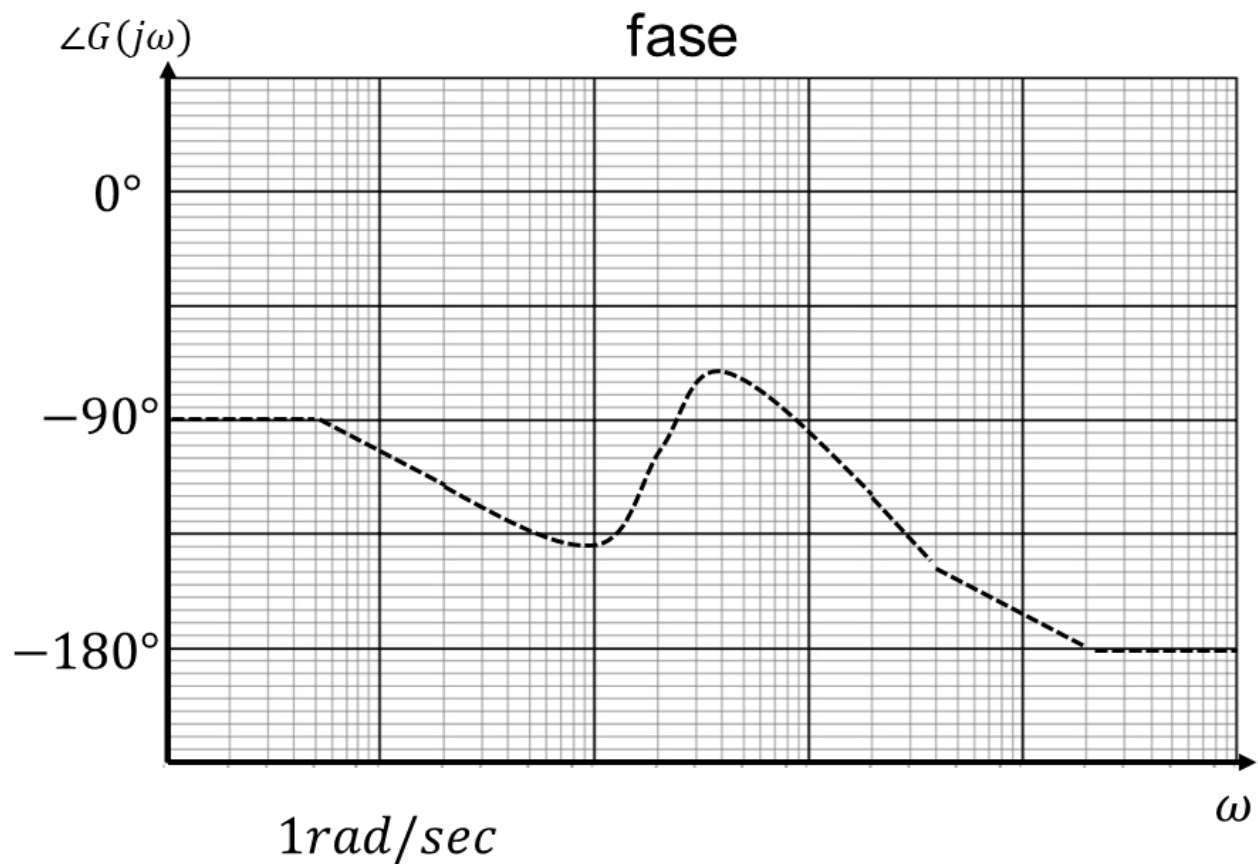
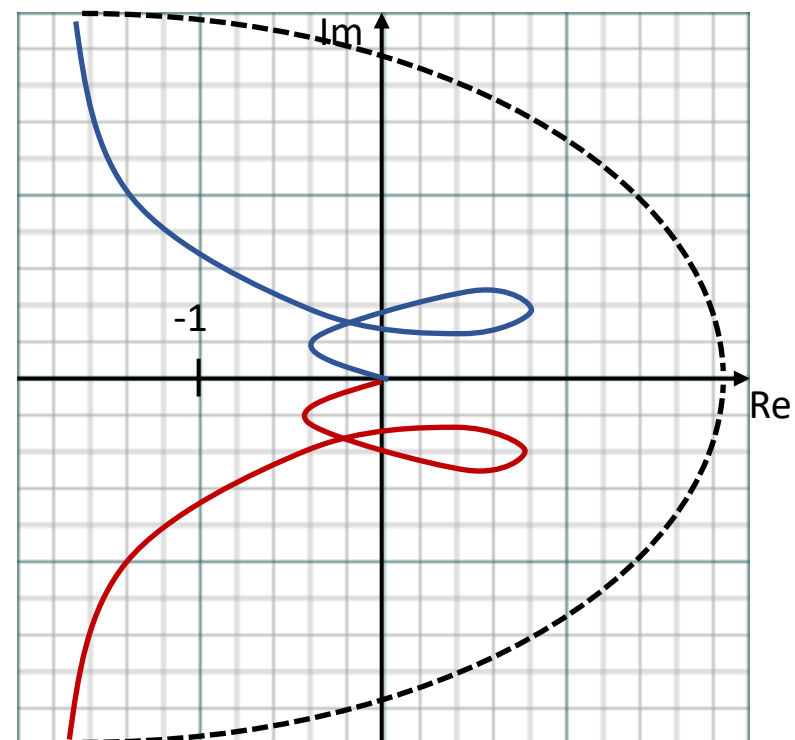
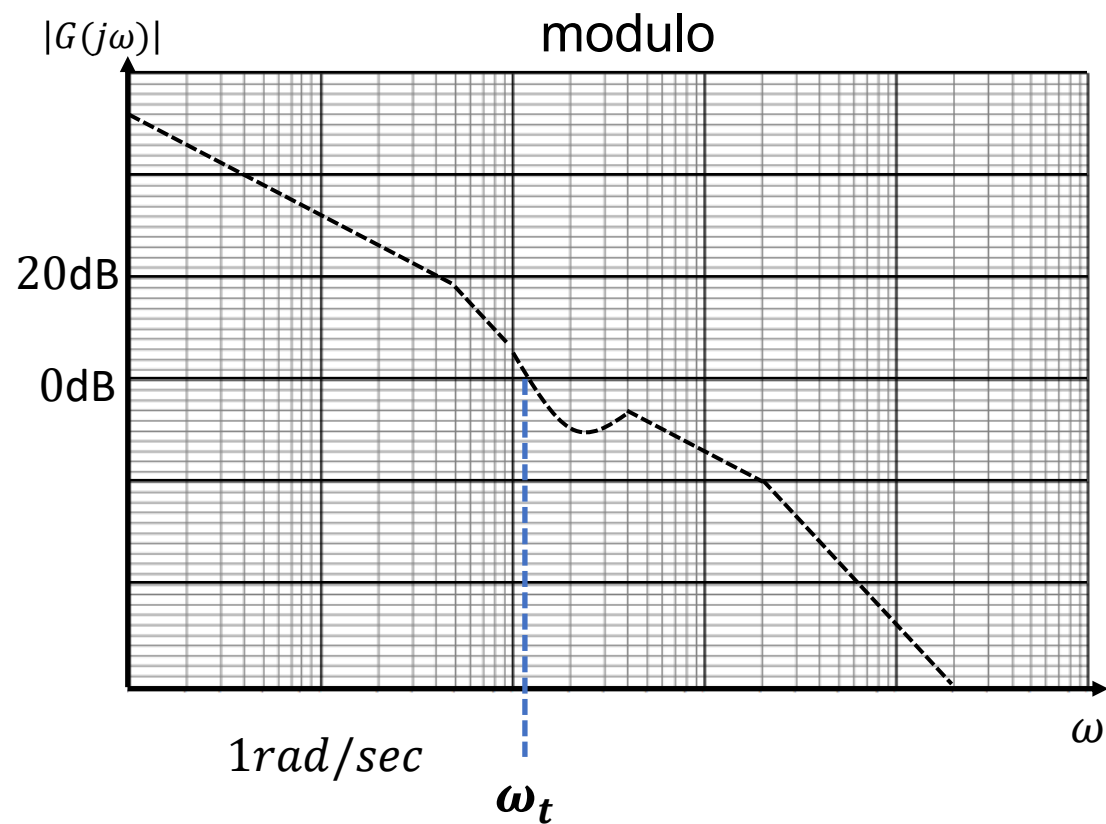


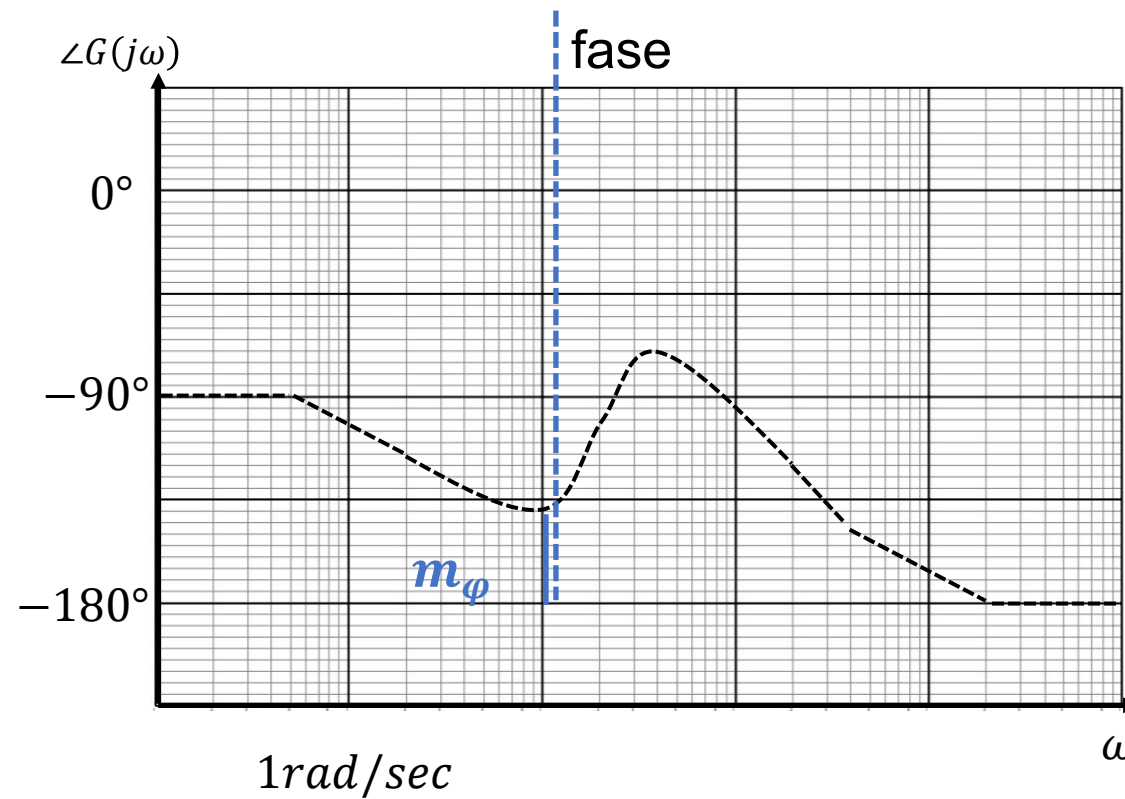
Diagramma di Nyquist



10 Si individuano:  $\omega_t$  e il  $m_\varphi$ ,  $\omega_{-\pi}$  e il  $m_g$



$$\omega_t \cong 12 \text{ rad/sec e } m_\varphi \approx 40^\circ$$



$$\omega_{-\pi} \text{ non è calcolabile quindi } m_g = \infty$$