Algoritmi e Strutture di Dati

Notazione asintotica

m.patrignani

Nota di copyright

- queste slides sono protette dalle leggi sul copyright
- il titolo ed il copyright relativi alle slides (inclusi, ma non limitatamente, immagini, foto, animazioni, video, audio, musica e testo) sono di proprietà degli autori indicati sulla prima pagina
- le slides possono essere riprodotte ed utilizzate liberamente, non a fini di lucro, da università e scuole pubbliche e da istituti pubblici di ricerca
- ogni altro uso o riproduzione è vietata, se non esplicitamente autorizzata per iscritto, a priori, da parte degli autori
- gli autori non si assumono nessuna responsabilità per il contenuto delle slides, che sono comunque soggette a cambiamento
- questa nota di copyright non deve essere mai rimossa e deve essere riportata anche in casi di uso parziale

Notazione Asintotica

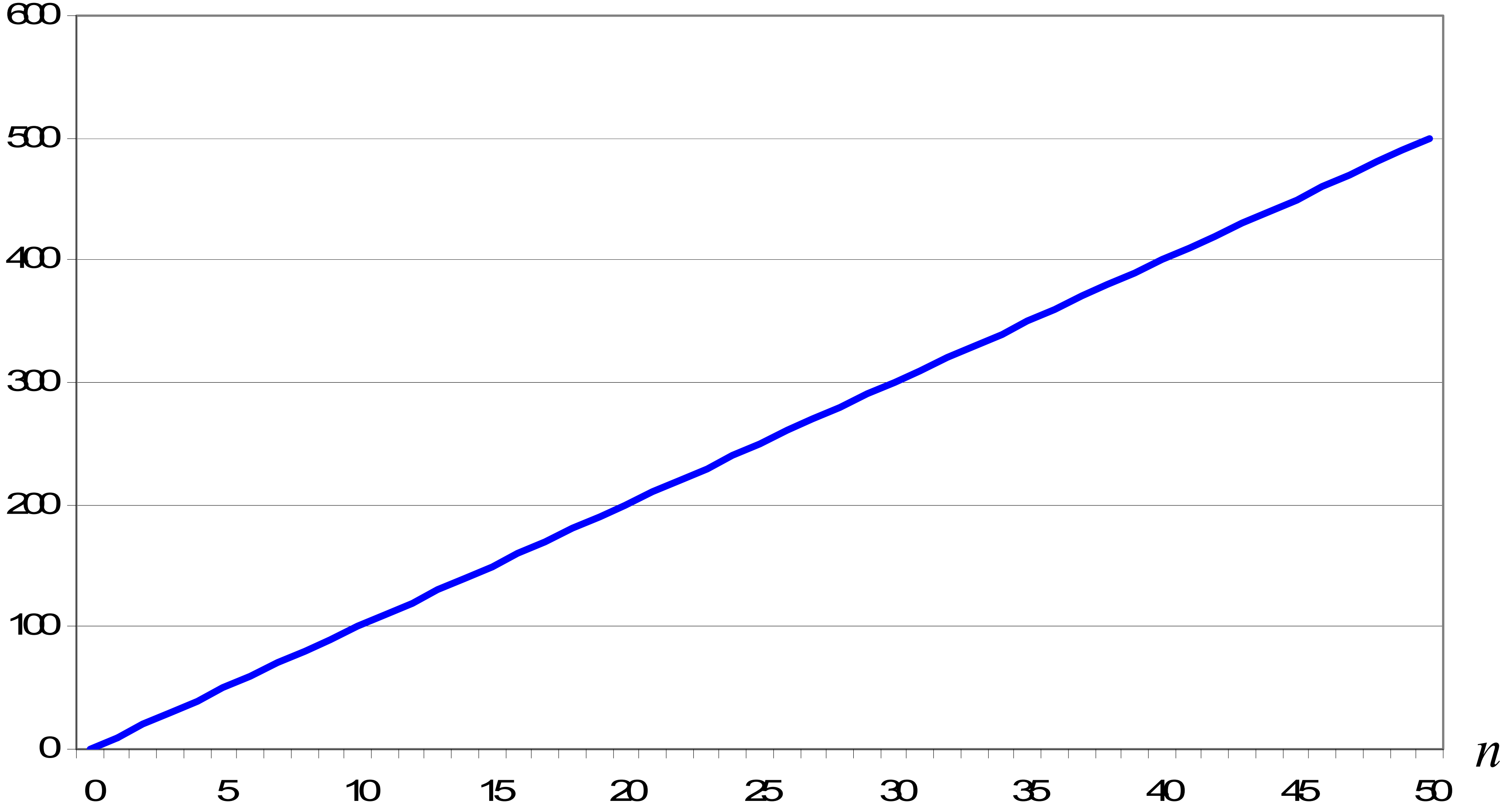
- Definizioni
- Proprietà delle notazioni asintotiche
- Uso esteso (o improprio) della notazione

Studio di funzioni

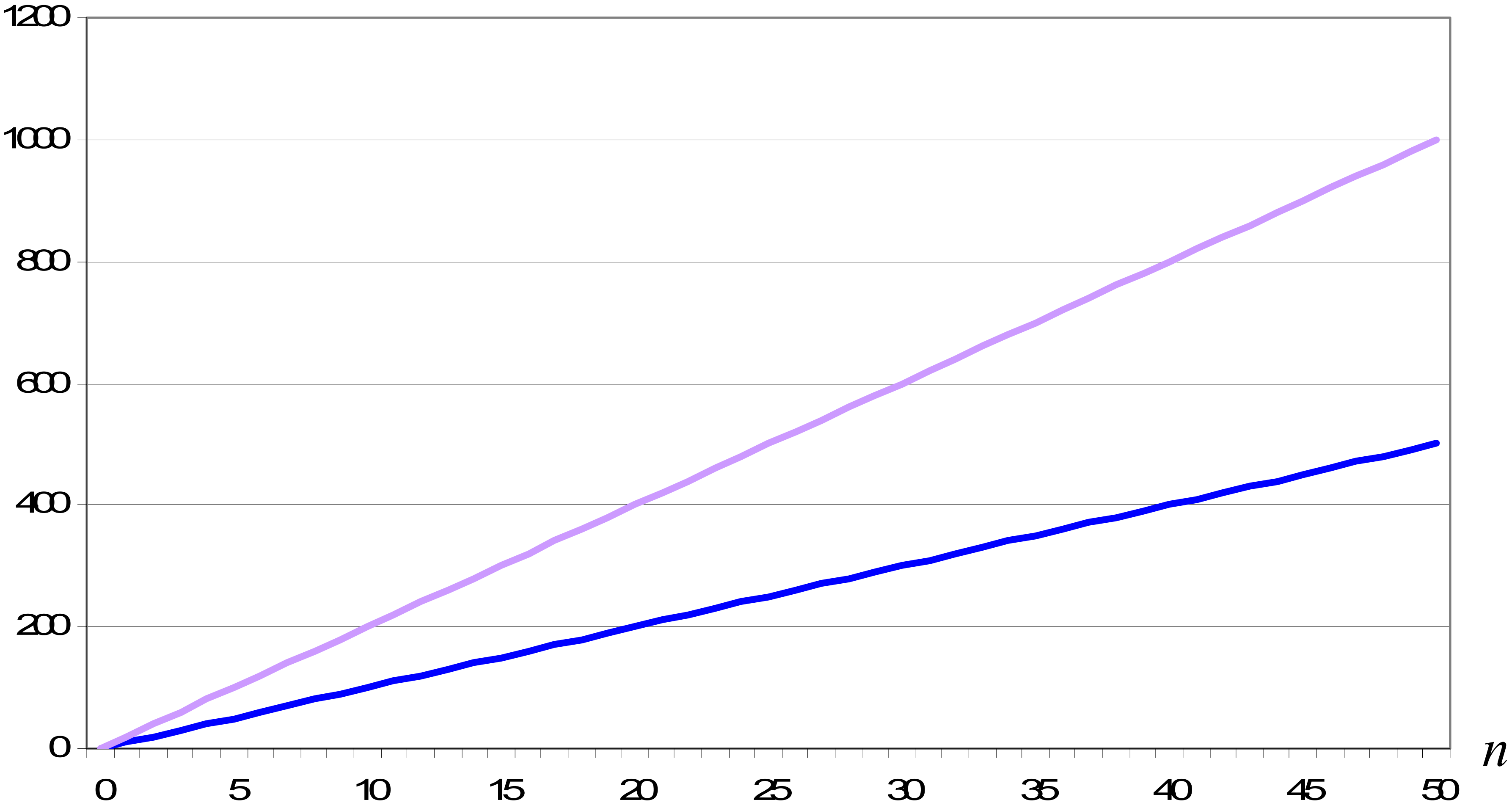
- Intersezioni con gli assi e segno
- Simmetrie e periodicità
- Continuità, discontinuità, derivazione
- Massimi, minimi e punti di flesso
- Comportamento agli estremi del dominio
  - asintoti orizzontali, verticali, obliqui
  - notazione asintotica

voi siete qui

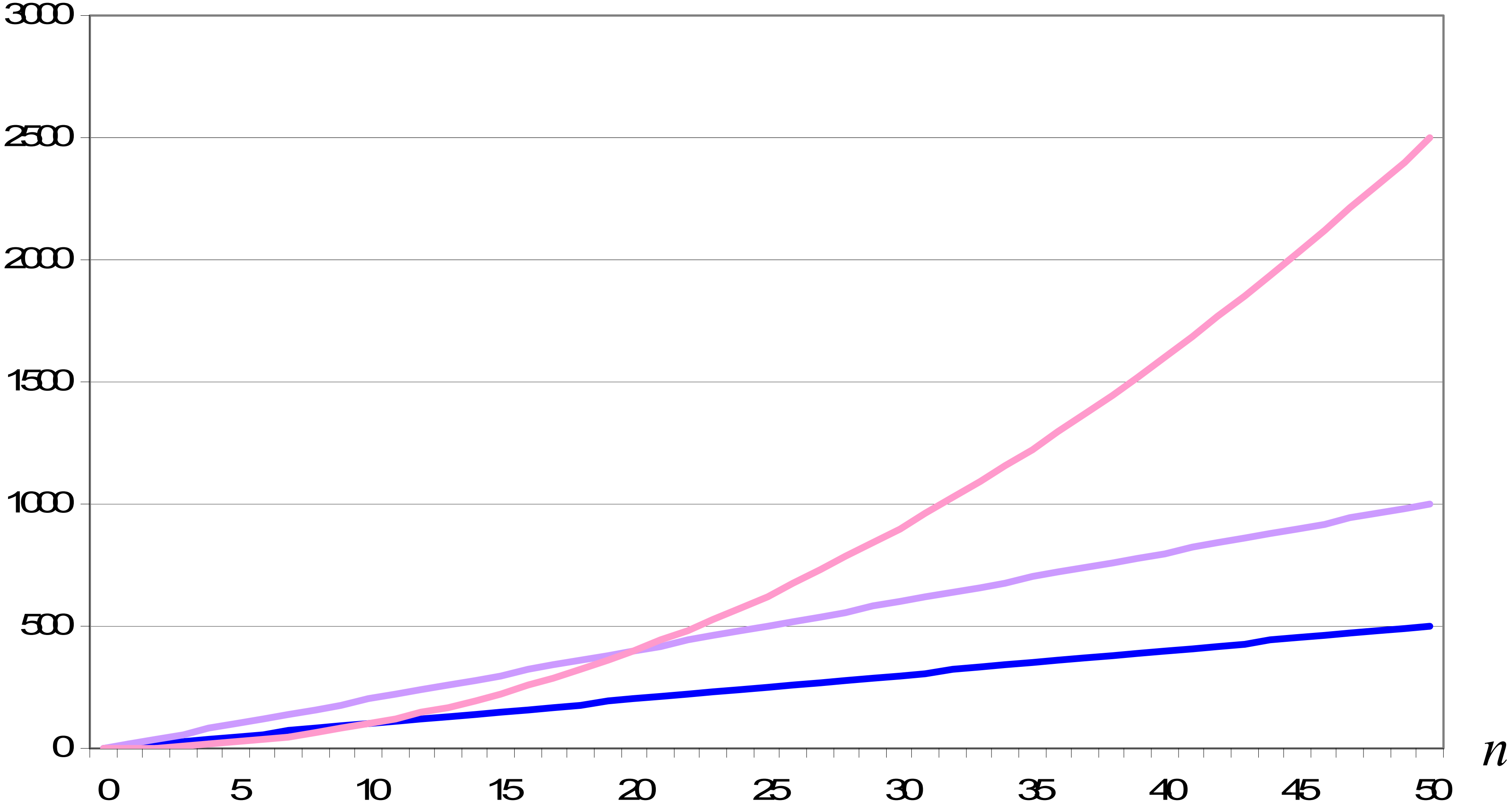
La funzione lineare 10n



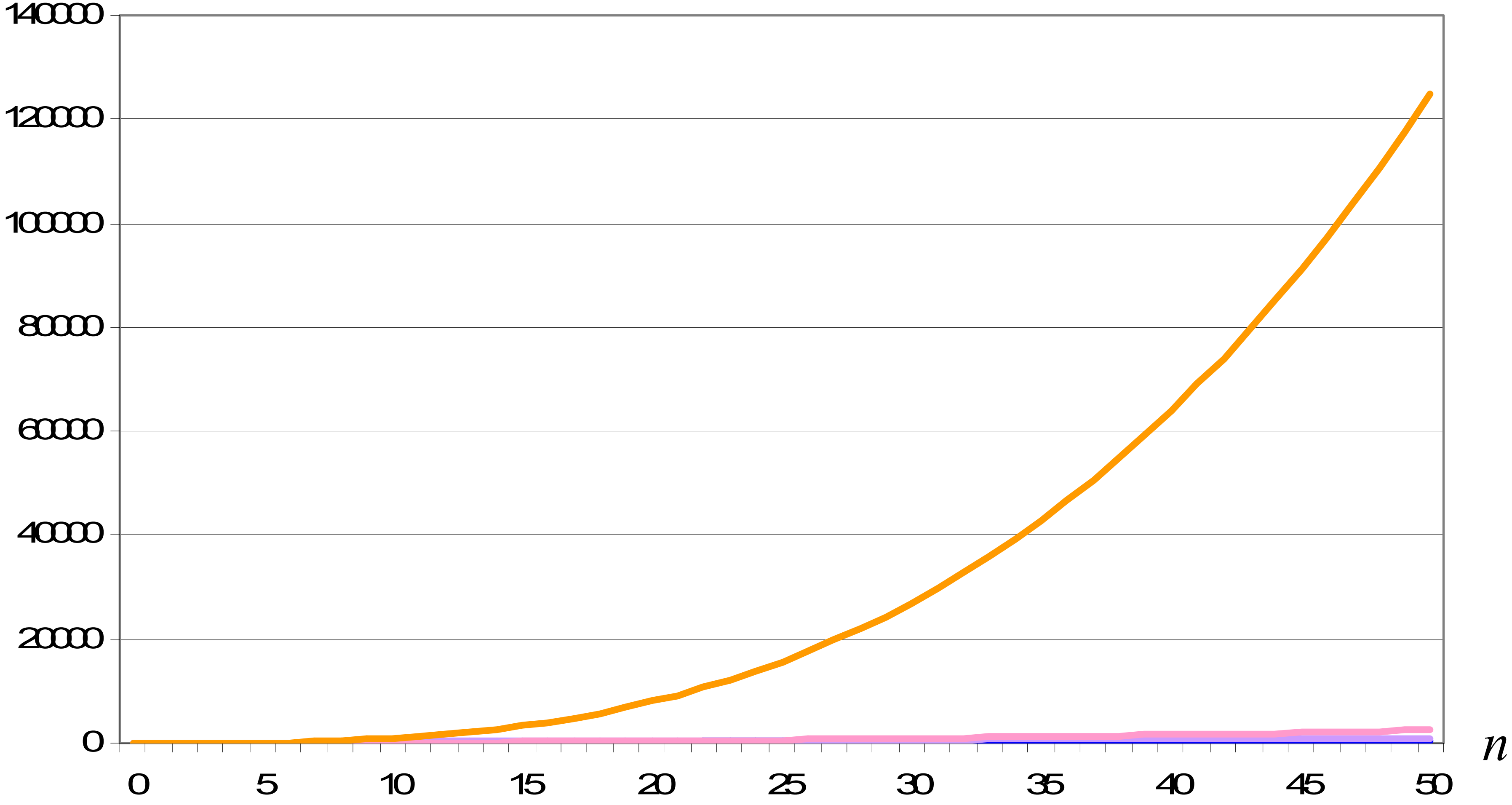
La funzione lineare 20n



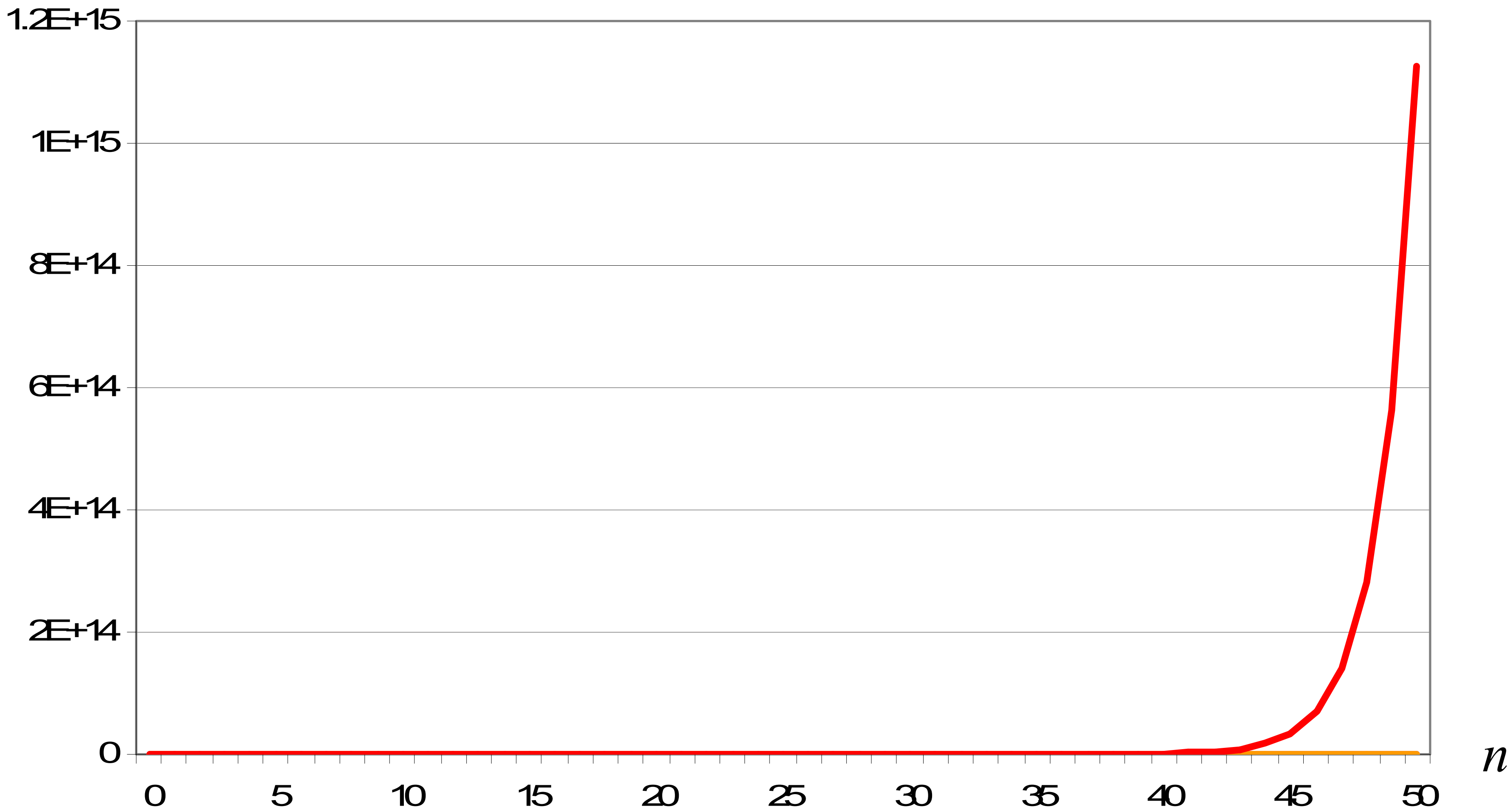
la funzione quadratica n^2



la funzione cubica n^3



La funzione esponenziale 2^n



Scopo delle notazioni asintotiche

- Si applicano alle funzioni $f(n)$ il cui dominio è l'insieme N dei naturali
  - possono essere facilmente estese ai reali
- Classificano le funzioni dal punto di vista del loro comportamento per grandi valori di n
- Forniscono un limite superiore e/o inferiore della funzione
  - la limitazione avviene per confronto con altre funzioni

Notazione O-grande

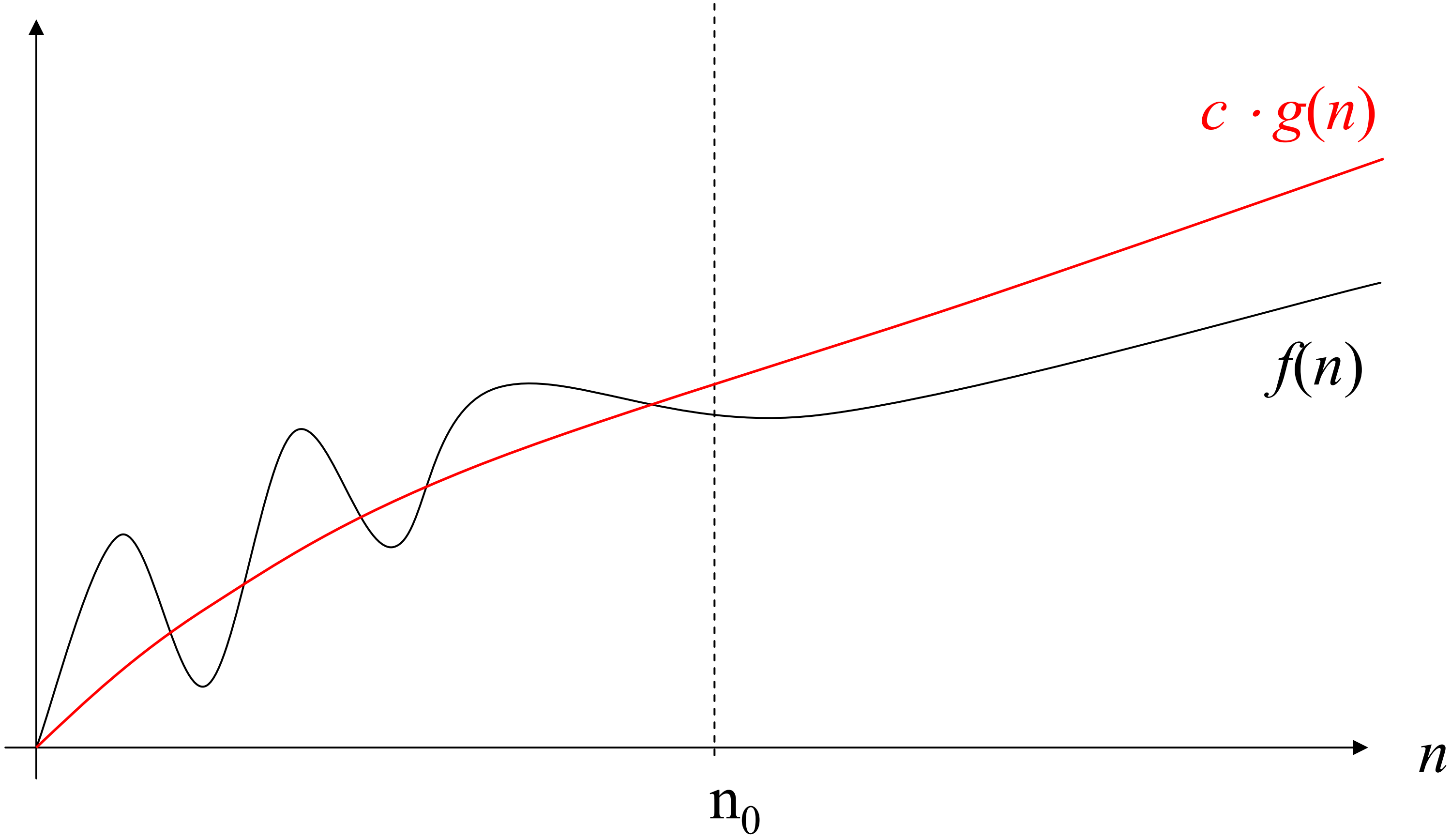
- Denotiamo $O(g(n))$ (“O grande di g di n”) l’insieme delle funzioni “*limitate superiormente da g(n)*”
- Definite come segue:

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \text{esistono due costanti positive } c \text{ ed } n_0 \text{ tali che per ogni } n \geq n_0 \text{ si verifica}$$
$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

- Oppure, più formalmente:

$$O(g(n)) = \{ f(n) : \exists c > 0, \exists n_0 > 0, \text{ tali che } \forall n \geq n_0 \; 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \}$$

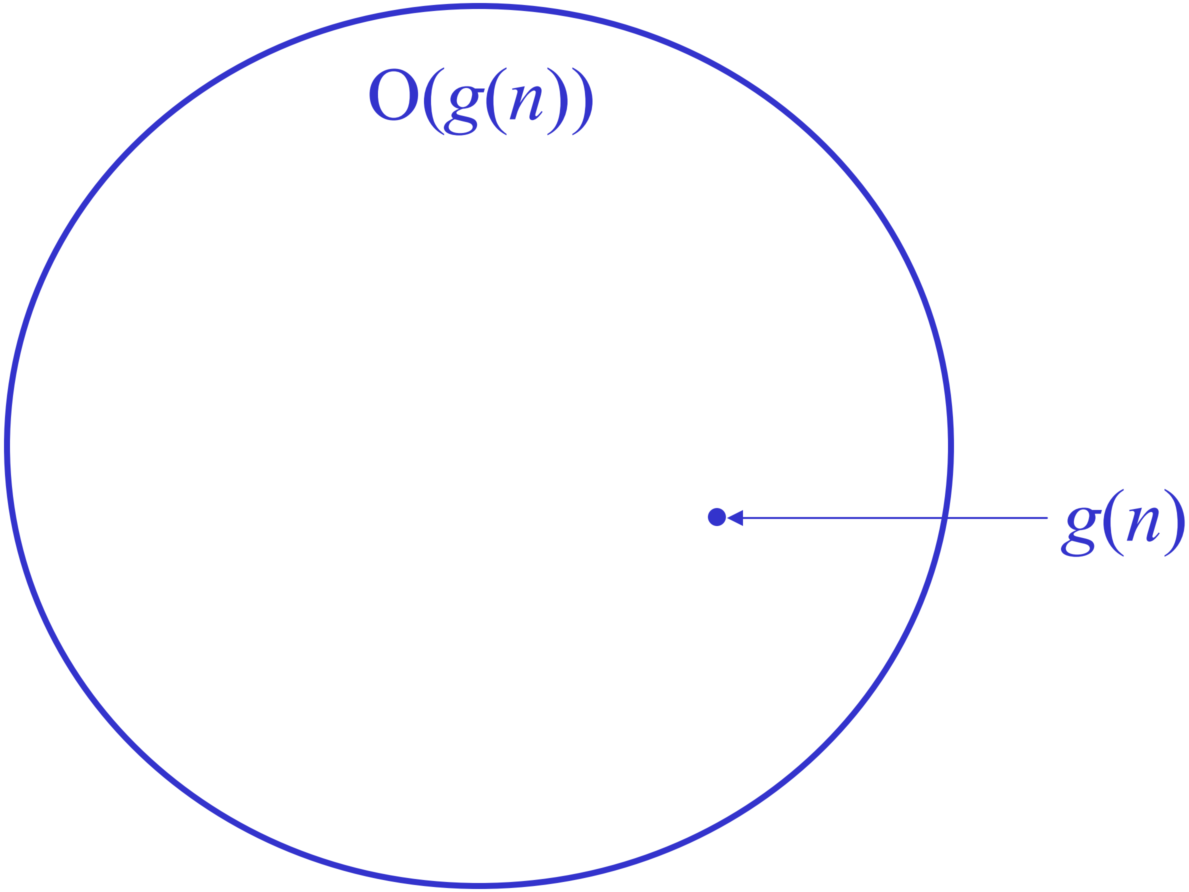
Notazione O-grande



Osservazioni sulla definizione di O(g(n))

- O(g(n)) = ∅ (l'insieme vuoto) se g(n) è una funzione asintoticamente negativa
  - conveniamo che g(n) non sia mai asintoticamente negativa
- Le costanti c ed n_0 dipendono dalla specifica f(n)
- Qual è il ruolo della costante c?
  - se la costante c non ci fosse
    - correttamente avremmo $2n \in O(n^2)$
    - ma avremmo anche $2n \notin O(n)$, oppure $n^2+1 \notin O(n^2)$
- Vale la proprietà riflessiva: $g(n) \in O(g(n))$

Funzioni limitate superiormente da $g(n)$



Esempio di funzione $\in O(n^2)$

- dimostriamo che $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$
  - dobbiamo trovare almeno una $c > 0$ ed una $n_0 > 0$ tali che

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c \cdot n^2$$

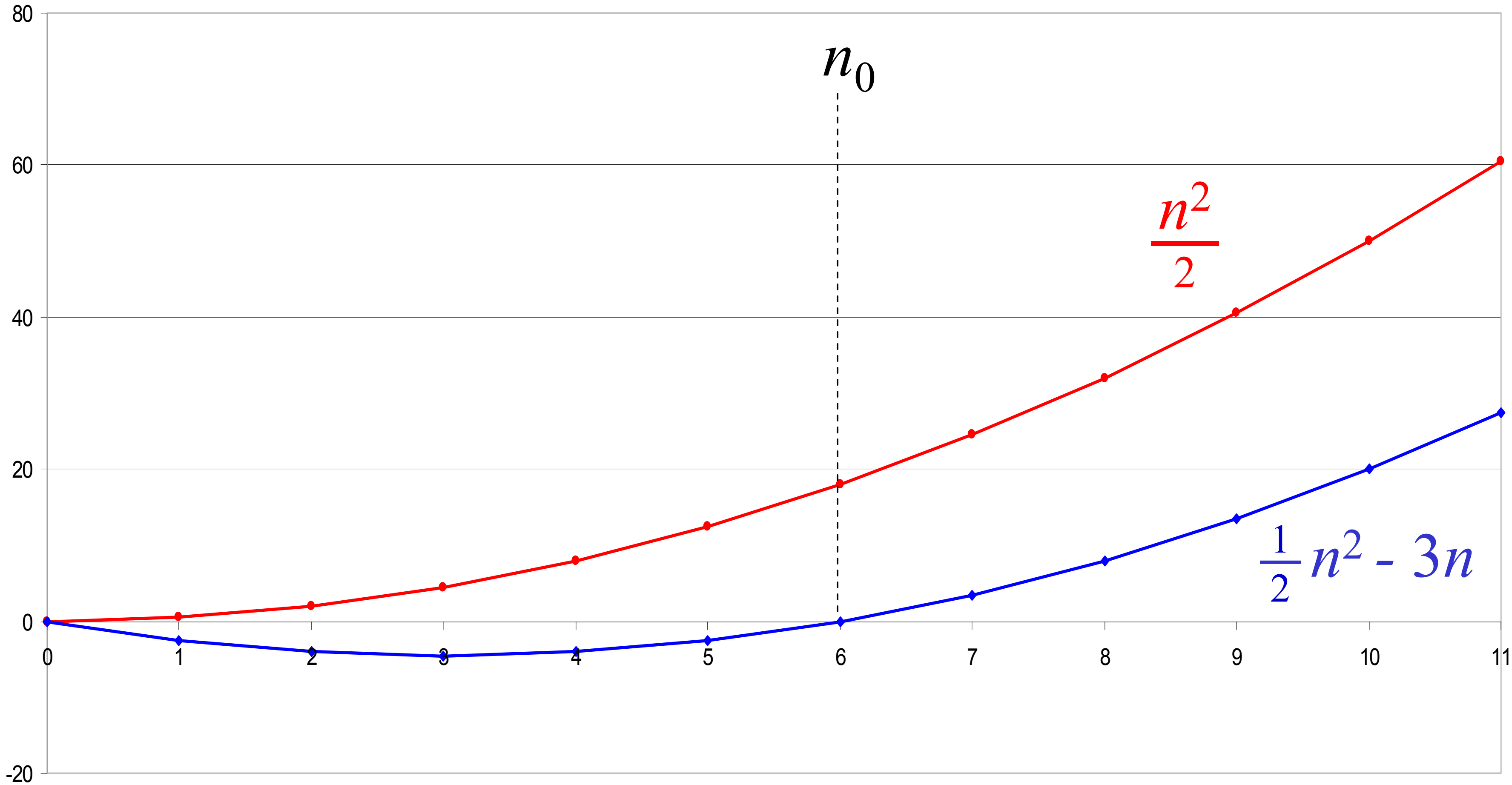
  - dividiamo per n^2 e otteniamo $0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c$
  - proviamo a fissare $c = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq \frac{1}{2}$ è soddisfatta per $n \geq 0$

$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$ è soddisfatta per $n \geq 6$

  - dunque $c = 0.5$ e $n_0 = 6$ dimostrano l'asserto

Esempio di funzione $\in O(n^2)$



Generalizzazione

- per c_1>0 e c_2>0 si ha $c_1 n^k - c_2 n^{k-1} \in O(n^k)$
  - dobbiamo trovare almeno una $c > 0$ ed una $n_0 > 0$ tali che

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$0 \leq c_1 n^k - c_2 n^{k-1} \leq c \cdot n^k$$

  - dividiamo per n^k e otteniamo: $0 \leq c_1 - \frac{c_2}{n} \leq c$
  - proviamo a fissare $c = c_1$

$$c_1 - \frac{c_2}{n} \leq c_1 \text{ è soddisfatta per } n \geq 0$$

$$0 \leq c_1 - \frac{c_2}{n} \text{ è soddisfatta per } n \geq \frac{c_2}{c_1}$$

  - dunque la coppia $c = c_1$ e $n_0 = c_2/c_1$ dimostrano l'asserto

Esercizio: $n^3 \notin O(n^2)$

- dimostriamo che $n^3 \notin O(n^2)$
  - dovremmo trovare c ed n_0 tali che
  $$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$
  $$0 \leq n^3 \leq c \cdot n^2$$
  - dividiamo per n^2
  $$0 \leq n \leq c$$
  - assurdo
    - quale che sia c esiste sempre un valore di n per cui $n > c$
- analogamente, è facile dimostrare che
$$n^{k+1} \notin O(n^k)$$

Esercizio: $n^2 \in O(n^3)$

- dimostriamo, viceversa che $n^2 \in O(n^3)$
  - dobbiamo trovare c ed n_0 tali che

$$\forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$0 \ \leq n^2 \leq c \cdot n^3$$

  - dividiamo per n^2

$$0 \leq 1 \leq c \cdot n$$

  - che è soddisfatta, per esempio, per $c = 1$ ed $n_0 = 1$
- analogamente, è facile dimostrare che

$$n^k \in O(n^{k+1})$$

Funzioni incommensurabili

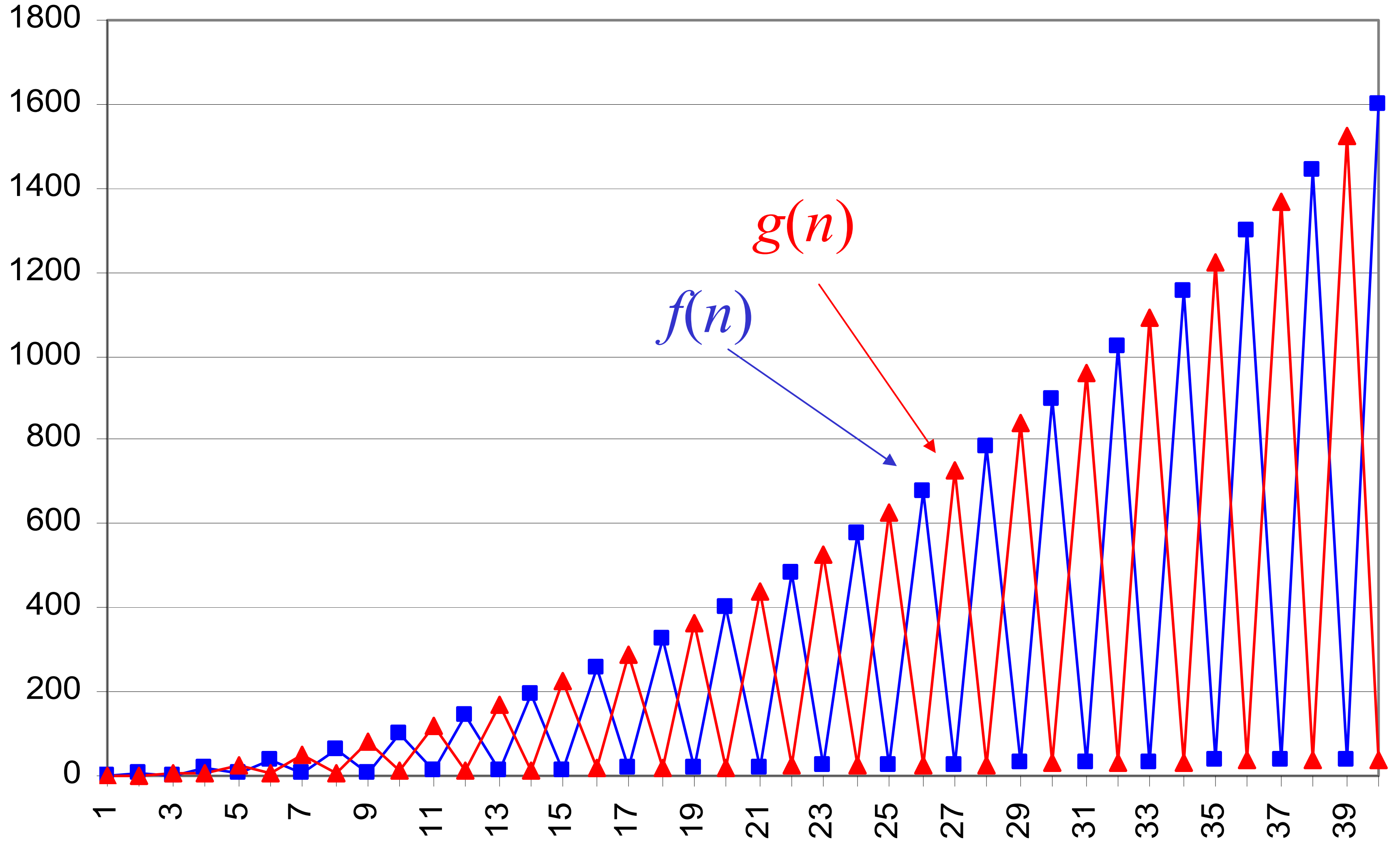
- è sempre vero che: $f(n) \in O(g(n))$
  oppure: $g(n) \in O(f(n))$?
- consideriamo le seguenti funzioni

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n^2 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

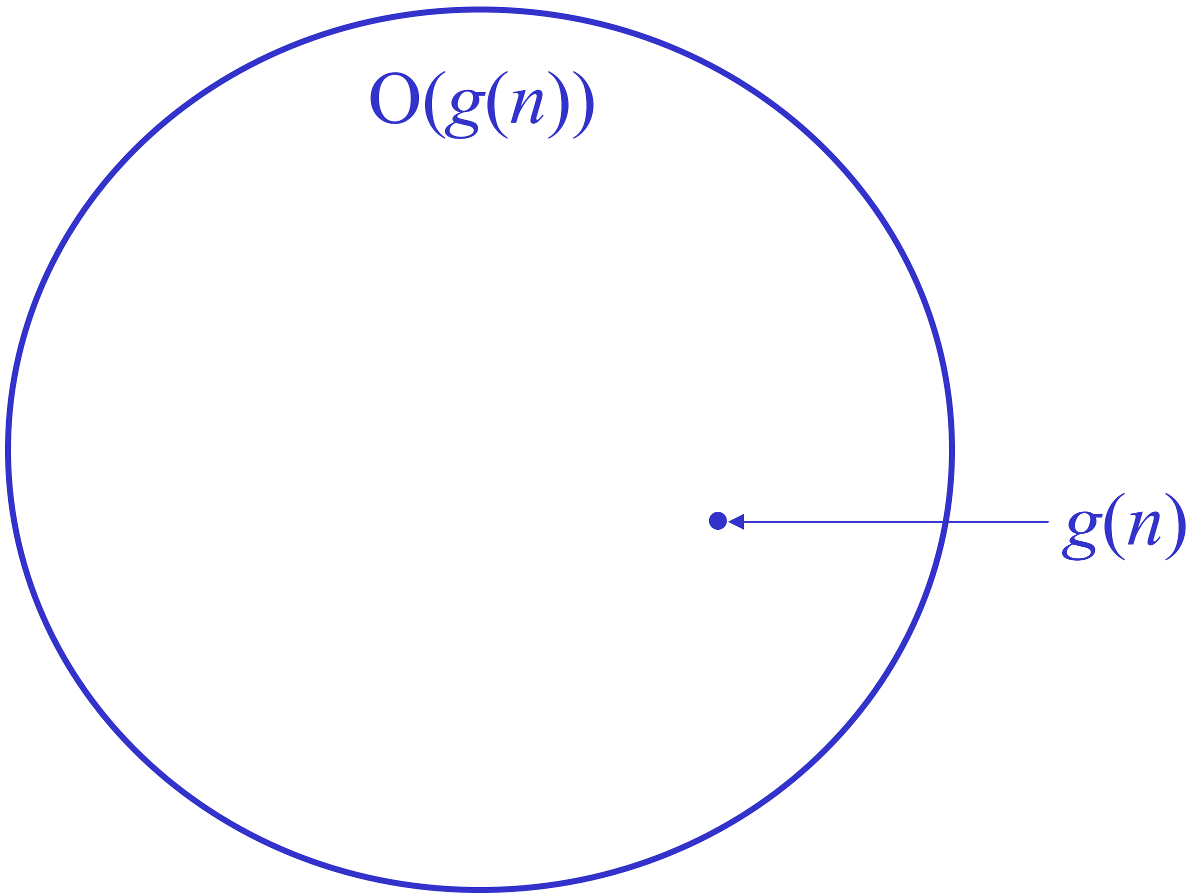
- poiché $n^2 \notin O(n)$
  - $f(n) \notin O(g(n))$ per via degli n pari
  - $g(n) \notin O(f(n))$ per via degli n dispari

Due funzioni incommensurabili



Esploriamo O(g(n))

- quali funzioni (oltre a $g(n)$) sono in $O(g(n))$?



Funzioni in O($g(n)$)

- dimostriamo che appartengono ad O($g(n)$) le seguenti funzioni $f(n)$:

proprietà transitiva

$$f(n) \in O(h(n)) \quad \text{per quanche} \quad h(n) \in O(g(n))$$

regola dei fattori costanti positivi

$$f(n) = d \cdot h(n) \quad \text{per qualche} \quad h(n) \in O(g(n)) \text{ e } d > 0$$

regola della somma

$$f(n) = h(n) + k(n) \quad \text{con} \quad h(n) \text{ e } k(n) \in O(g(n))$$

Proprietà transitiva

- dimostriamo che:

$$\left.\begin{array}{c} f(n) \in O(h(n)) \\ \wedge \\ h(n) \in O(g(n)) \end{array}\right\} \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

- per ipotesi

$$\exists c' > 0,\ \exists n'_0 > 0,\ \text{t.c. } \forall n \geq n'_0,\ 0 \leq f(n) \leq c' \cdot h(n)$$

$$\exists c'' > 0,\ \exists n''_0 > 0,\ \text{t.c. } \forall n \geq n''_0,\ 0 \leq h(n) \leq c'' \cdot g(n)$$

- componendo le due

$$0 \leq f(n) \leq c' \cdot c'' \cdot g(n)$$

- e dunque

$$\exists c''' > 0,\ \exists n'''_0 > 0,\ \text{t.c. } \forall n \geq n'''_0,\ 0 \leq f(n) \leq c''' \cdot g(n)$$

$$\text{con } c''' = c' \cdot c'' \text{ e con } \quad n'''_0 = \max(n'_0, n''_0)$$

Regola dei fattori costanti positivi

- se $d > 0$ è una costante

$$f(n) \in O(g(n)) \qquad \Leftrightarrow \qquad d \cdot f(n) \in O(g(n))$$

- infatti, per ipotesi si ha:

$$\exists c > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

- definisco

$$c' = c \cdot d \quad (c' > 0 \text{ dato che } d > 0)$$

- sostituendo $c = c'/d$ ottengo

$$\exists c' > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq c'/d \cdot g(n)$$

- finalmente moltiplicando per d

$$\exists c' > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n_0, 0 \leq d \cdot f(n) \leq c' \cdot g(n)$$

Regola della somma

- dimostriamo che:

$$\left.\begin{matrix} h(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \\ \wedge \\ k(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \end{matrix}\right\} \Rightarrow h(n) + k(n) \in \mathrm{O}(g(n))$$

- per ipotesi

$$\exists c' > 0,\ \exists n'_0 > 0,\ \text{t.c. } \forall n \geq n'_0,\ 0 \leq h(n) \leq c' \cdot g(n)$$

$$\exists c'' > 0,\ \exists n''_0 > 0,\ \text{t.c. } \forall n \geq n''_0,\ 0 \leq k(n) \leq c'' \cdot g(n)$$

- sommando le due disequazioni si ottiene

$$0 \leq h(n) + k(n) \leq c' \cdot g(n) + c'' \cdot g(n)$$

- da cui

$$\exists c''' > 0,\ \exists n'''_0 > 0,\ \text{t.c. } \forall n \geq n'''_0,\ 0 \leq h(n) + k(n) \leq c''' \cdot g(n)$$

$$\text{con } c''' = c' + c'' \quad \text{e con} \quad n'''_0 = \max(n'_0, n''_0)$$

Usi estesi (o impropri) della notazione

- abuso della notazione
  - spesso in luogo di $f(n) \in O(g(n))$ si trova
    $$f(n) = O(g(n))$$
  - questo corrisponde alla lettura "$f(n)$ è $O(g(n))$" piuttosto che "$f(n)$ appartiene a $O(g(n))$"
- operazioni con la notazione asintotica

$3n^3 + O(n)$ si intende: $3n^3$ sommata con una qualche funzione appartenente ad $O(n)$

Esercizio

- dimostriamo che

$$6n^4 - 3n^3 + 2n^2 + 5\text{n} + 6 \in \mathrm{O}(n^4)$$

fattori costanti positivi

$$\underbrace{\mathrm{O}(n^4) - \mathrm{O}(n^3)} + \mathrm{O}(n^2) + \underbrace{\mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(1)}$$

appartenenze note
proprietà transitiva

$$\underbrace{\mathrm{O}(n^4) \quad + \quad \mathrm{O}(n^2)} \quad + \quad \mathrm{O}(n)$$

regola della somma

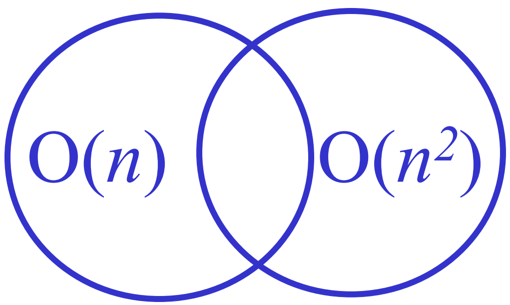
$$\underbrace{\mathrm{O}(n^4) \qquad + \qquad \mathrm{O}(n)}$$

regola della somma

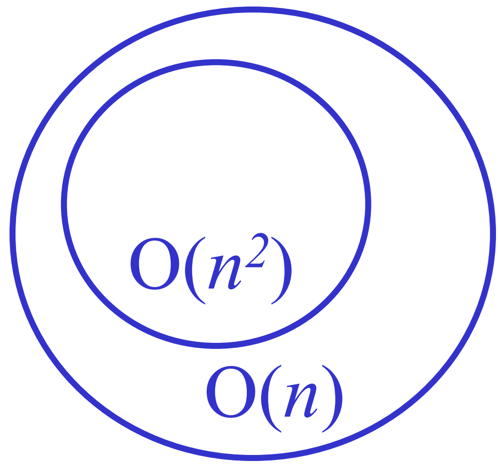
$$\mathrm{O}(n^4)$$

Esercizi sulla notazione O-grande

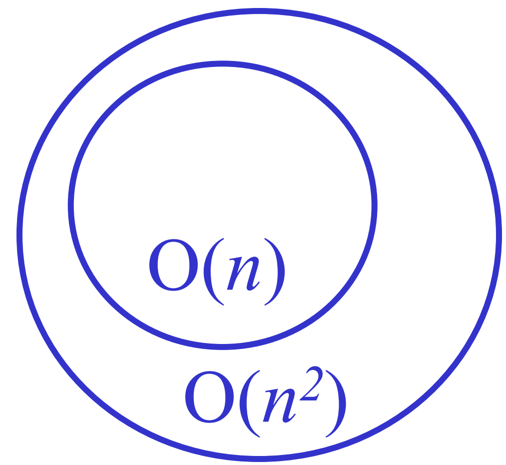
- Quali di questi rapporti di contenimento sono corretti?



Risposta 1



Risposta 2



Risposta 3

Notazione Ω

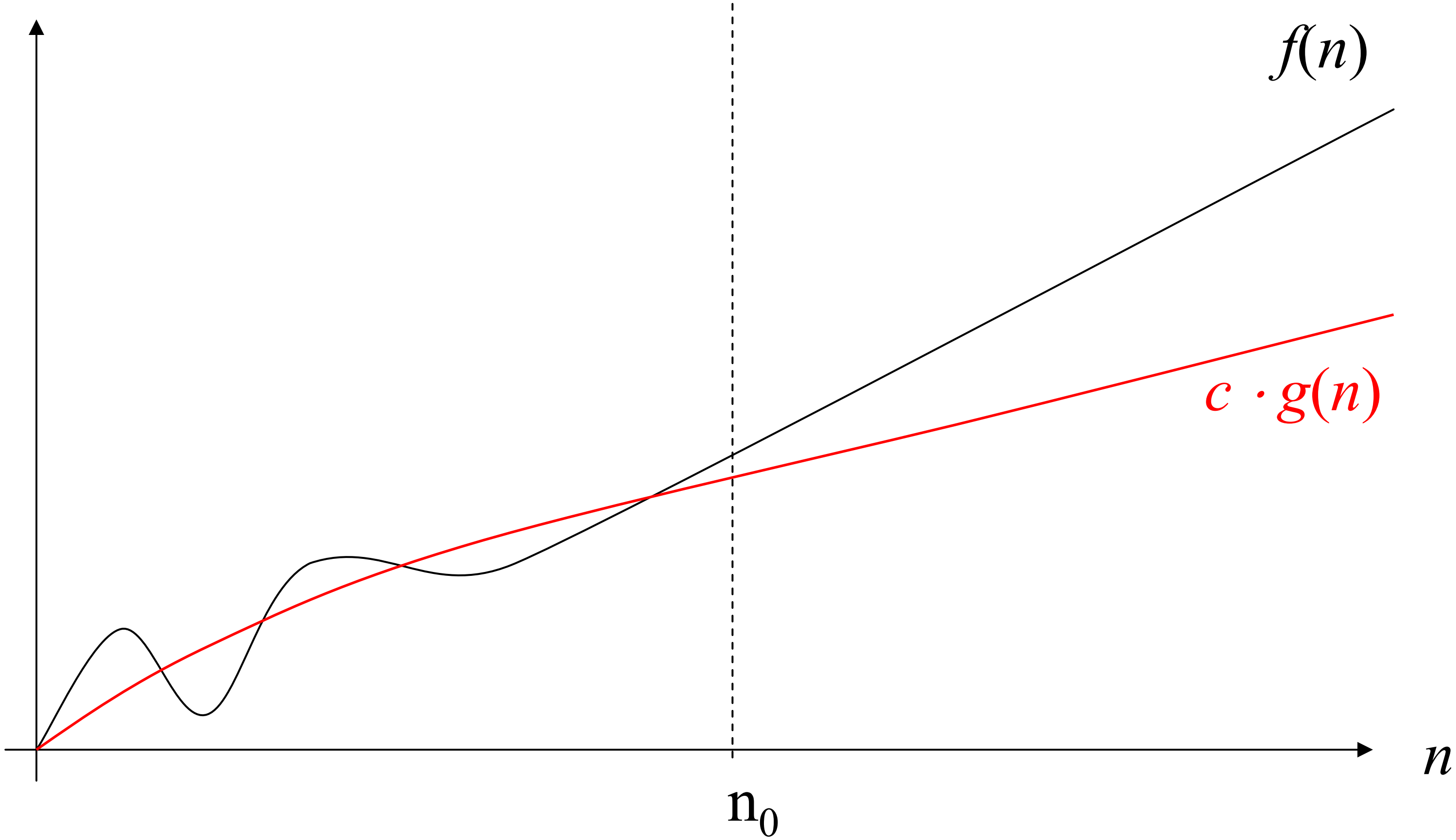
- Denotiamo $\Omega(g(n))$ ("Omega di g di n") l'insieme delle funzioni "*limitate inferiormente da g(n)*"
- Definite come segue:

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \text{esistono due costanti positive } c \text{ ed } n_0 \text{ tali che per ogni } n \geq n_0 \text{ si verifica}$$
$$0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$$

- Oppure, più formalmente:

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) : \exists c > 0, \exists n_0 > 0, \text{ tali che } \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \}$$

Notazione Ω



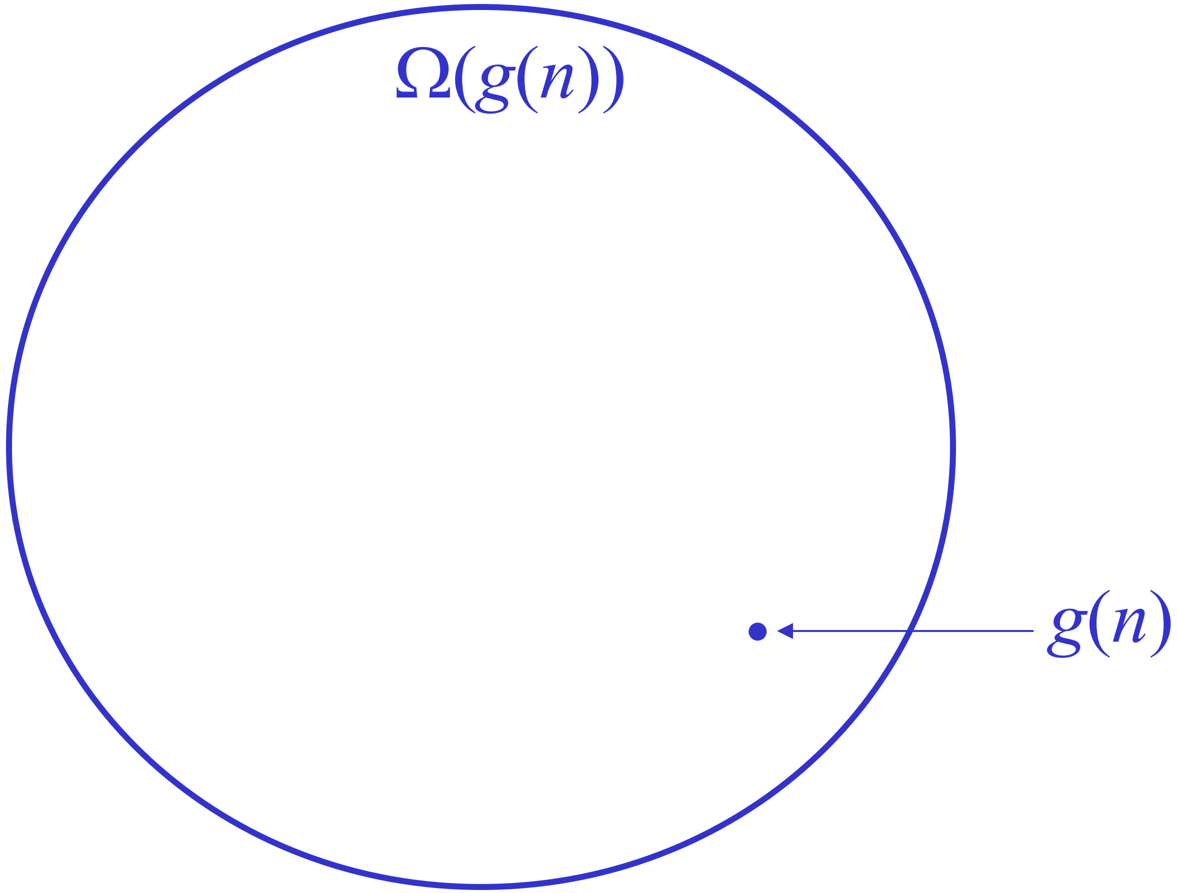
Osservazioni sulla definizione di $\Omega(g(n))$

- si può facilmente dimostrare che

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$$

- nel caso della notazione Ω occorre spesso ricorrere a valori minori di uno per la costante c
  - la costante c non è necessariamente un intero
- sarebbe stato analogo scrivere: $0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$
- anche per $\Omega(g(n))$ esistono funzioni incommensurabili
- vale la proprietà riflessiva: $g(n) \in \Omega(g(n))$

Funzioni limitate inferiormente da $g(n)$



Funzioni in $\Omega(g(n))$

- per $\Omega(g(n))$ valgono proprietà analoghe a quelle che abbiamo dimostrato per $O(g(n))$
- appartengono ad $\Omega(g(n))$ le seguenti funzioni:

proprietà transitiva

$$f(n) \in \Omega(h(n)) \quad \text{per qualche} \quad h(n) \in \Omega(g(n))$$

regola dei fattori costanti positivi

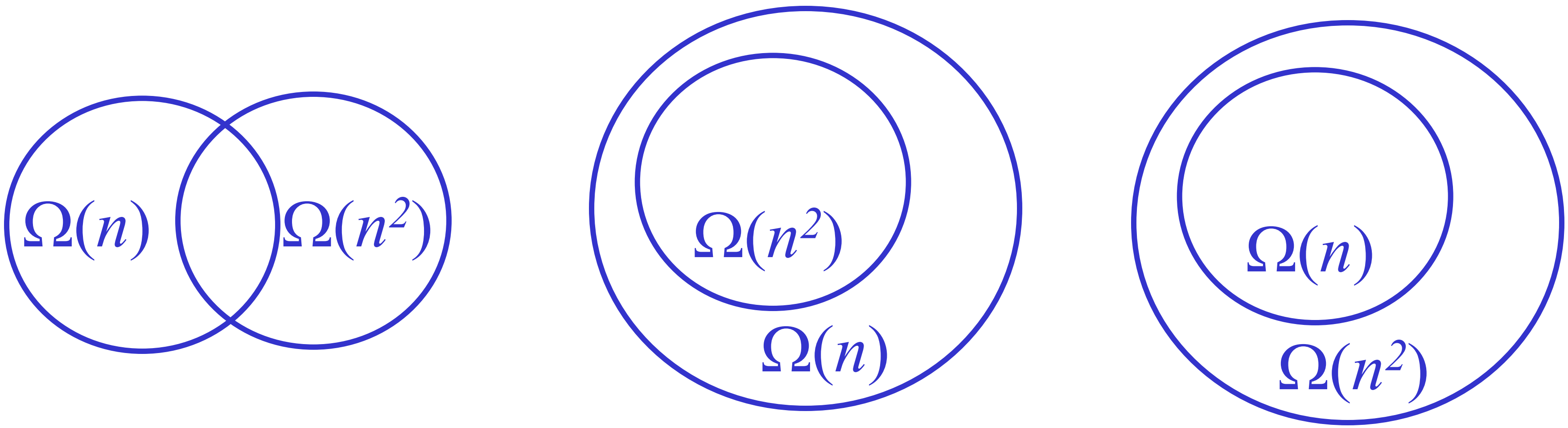
$$f(n) = d \cdot h(n) \quad \text{per qualche} \quad h(n) \in \Omega(g(n)) \text{ e } d > 0$$

regola della somma

$$f(n) = h(n) + k(n) \quad \text{con} \quad h(n) \text{ e } k(n) \in \Omega(g(n))$$

Esercizi sulla notazione Ω

- Quali di questi rapporti di contenimento sono corretti?



Risposta 1 Risposta 2 Risposta 3

Notazione Θ

- denotiamo $\Theta(g(n))$ ("Teta di g di n") l'insieme delle funzioni "*limitate inferiormente e superiormente da g(n)*"
- definite come segue:

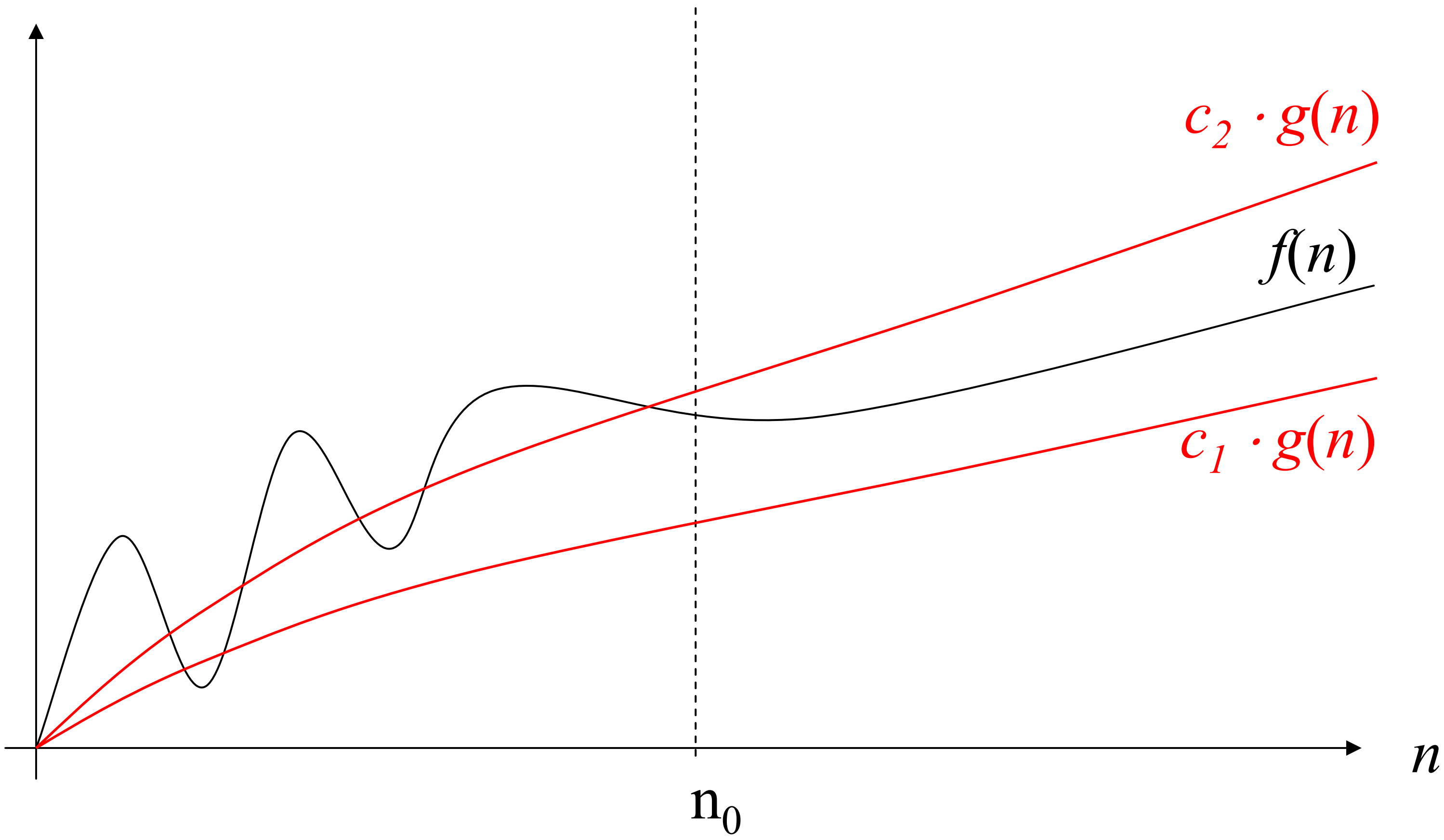
$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow$ esistono tre costanti positive c_1, c_2, ed n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$ si verifica

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

- oppure, più formalmente:

$$\Theta(g(n)) = \{ f(n) : \exists n_0 > 0, \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \text{ tali che } 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \; \forall n \geq n_0 \}$$

Notazione Θ



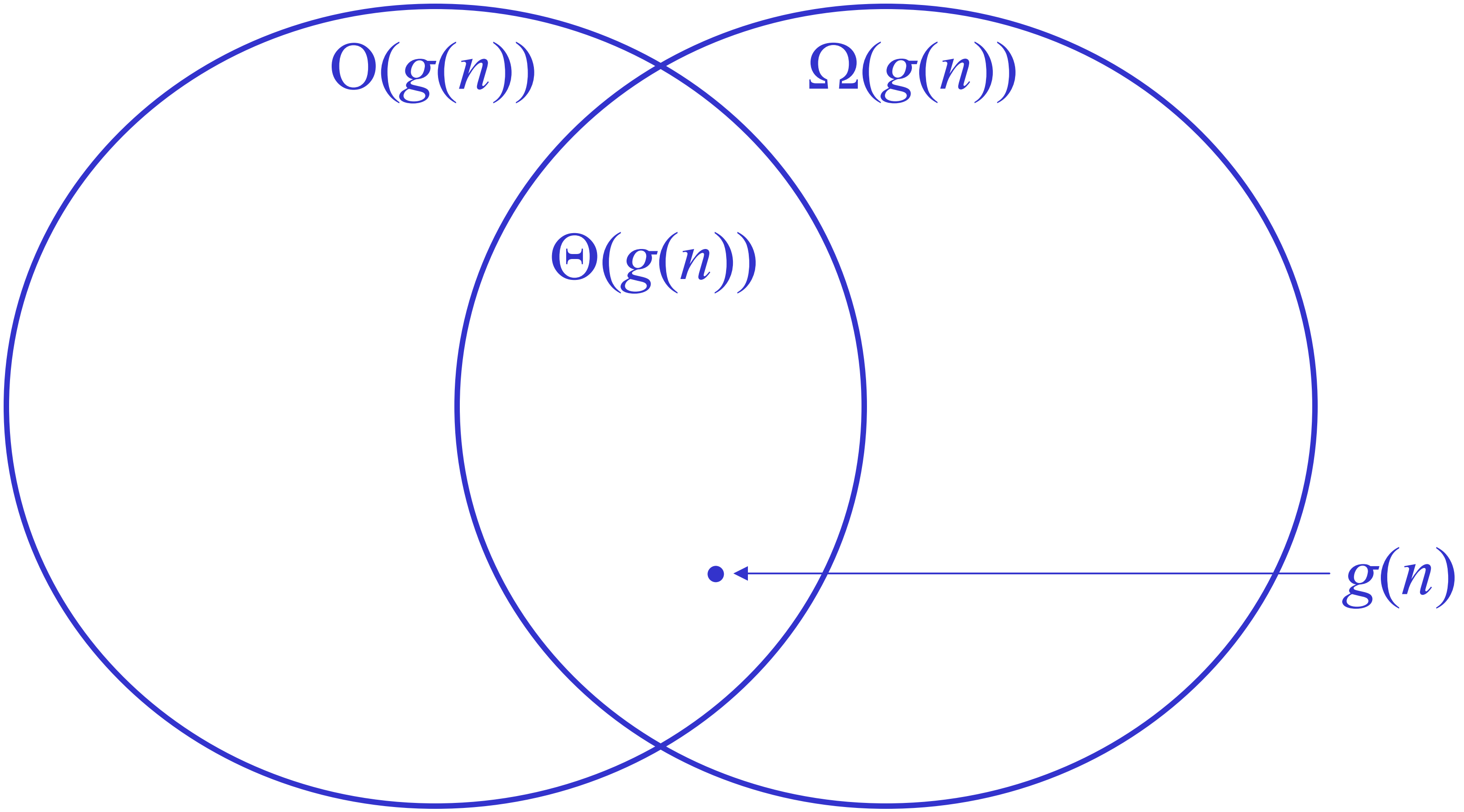
Osservazioni sulla definizione di $\Theta(g(n))$

- dalla definizione si ricava immediatamente che

$$f(n) \in \Theta\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) \in O\big(g(n)\big) \\ \wedge \\ f(n) \in \Omega\big(g(n)\big) \end{cases}$$

  - questa considerazione offre una definizione alternativa di $\Theta(g(n))$
- vale la proprietà riflessiva: $g(n) \in \Theta(g(n))$
- valgono tutte le proprietà che abbiamo dimostrato per O-grande e per Ω

Funzioni $\in \Theta(g(n))$



Proprietà simmetrica

- è immediato dimostrare che

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$$

- infatti

$$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \quad g(n) \in \Omega(f(n))$$
$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow \quad g(n) \in O(f(n))$$

- dunque

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$$

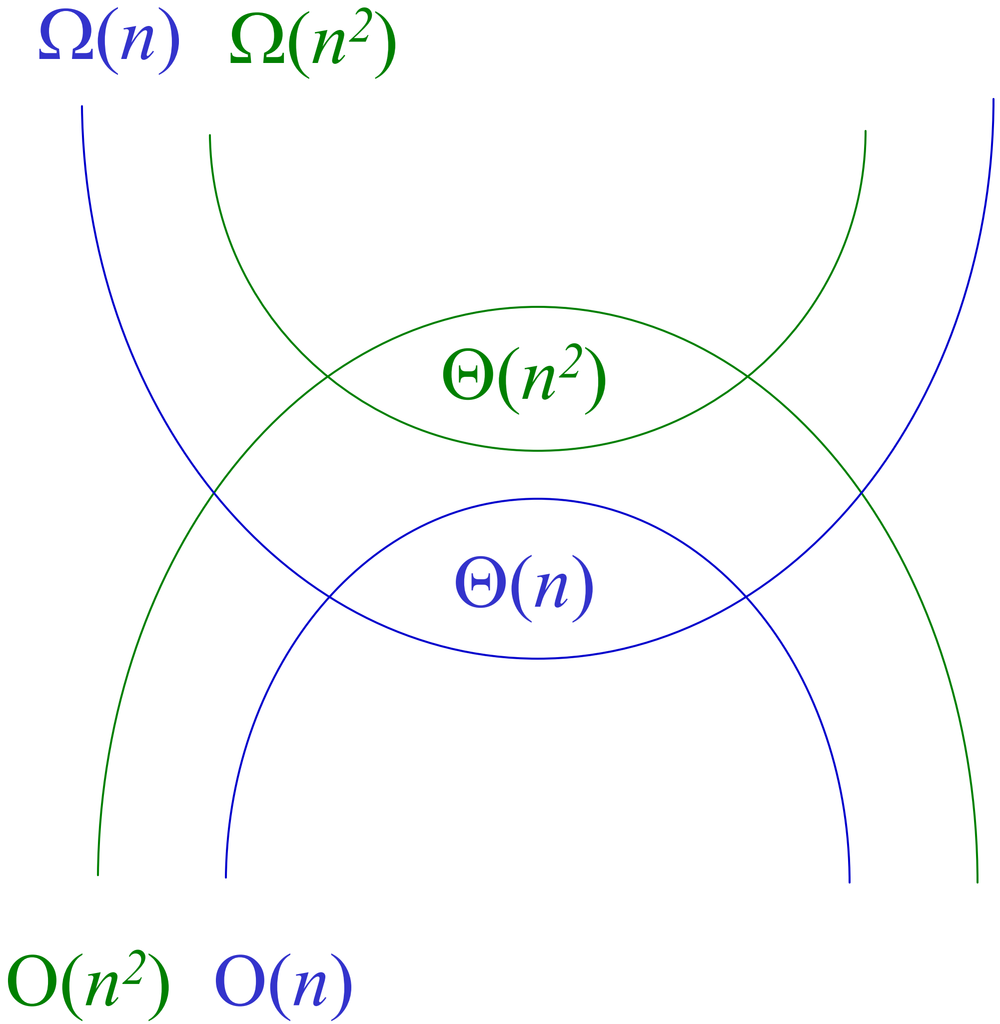
- in maniera analoga si dimostra che

$$g(n) \in \Theta(f(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$$

La relazione di equivalenza Θ

- poiché $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$, la relazione $f(n) \in \Theta(g(n))$ tra $f(n)$ e $g(n)$ gode della proprietà simmetrica
- dunque la notazione Θ definisce una relazione di equivalenza
  - valgono infatti le tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva
  - la notazione Θ consente di classificare tutte le funzioni in classi di equivalenza, che descrivono il loro comportamento al crescere di n

Rapporti tra classi



Gerarchia delle funzioni

…

$\Theta(2^n)$

…

$\Theta(n^3)$

$\Theta(n^2)$

$\Theta(n \log n)$

$\Theta(n)$

$\Theta(\log n)$

$\Theta(1)$

- le funzioni nella classe $\Theta(g(n))$
  - sono $O(f(n))$ per tutte le $f(n)$ appartenenti alle classi superiori a $\Theta(g(n))$
  - sono $\Omega(f(n))$ per tutte le $f(n)$ appartenenti alle classi inferiori a $\Theta(g(n))$

