A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile x_5 sul secondo vincolo (come in figura). La base iniziale è quindi $B = [A_3, A_5]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_2 ed esce A_1, quindi entra A_4 ed esce A_3. Al successivo pivot entra A_1 ed il problema risulta <u>inferiormente illimitato</u>.

$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

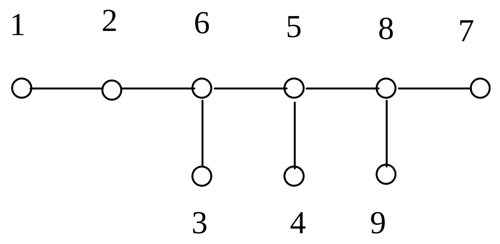
Scrivendo il duale (in figura) ed impostando le condizioni di ortogonalità, si ottiene la soluzione $u^T = \begin{pmatrix} 0 & -2/9 & 20/9 \end{pmatrix}$ che è ammissibile duale. La soluzione $x^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ data è quindi ottima.

$$\min \quad 2x_1 - x_2 \qquad\qquad \max \quad 5u_1 + 12u_2 + 3u_3$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 \leq 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4u_1 + u_2 + u_3 \leq 2 \\ 2u_1 - u_2 - u_3 \leq -1 \\ u_1 + 10u_2 + u_3 \leq 0 \\ u_1 \geq 0;\ u_2 \leq 0;\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo non orientato con 9 nodi **1**…9. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal nodo **1**, utilizzando l'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero ricoprente (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo).

Archi	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(3,6)	(4,5)	(4,7)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(6,8)	(6,9)	(7,8)	(8,9)
Costi	1	6	10	9	8	2	1	1	6	3	7	4	9	10	3	5



I nodi del grafo vengono fissati ad 1 nell'ordine 1,2,6,3,5,4,8,7,9.

Domanda 4

Discutere i problemi di programmazione lineare in forma standard, dimostrando in particolare che se esiste soluzione ottima, esiste un vertice ottimo.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile x_5 sul secondo vincolo (come in figura). La base iniziale è quindi $B = [A_3, A_5]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_3; al secondo entra A_2 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_3 ed esce A_1, quindi entra A_4 ed il problema risulta <u>inferiormente illimitato</u>.

.

$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Scrivendo il duale (in figura) ed impostando le condizioni di ortogonalità, si ottiene la soluzione $u^T = (0 \quad 2/7 \quad -3/7)$ che NON è ammissibile duale (viola la condizione $u_2 \leq 0$). La soluzione $x^T = (0 \quad 2 \quad 2)$ data quindi NON è ottima.

$$\min \quad 3x_1 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \quad 3u_1 + 10u_2 + 2u_3$$
$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 \leq 3 \\ -2u_1 + 3u_2 + 2u_3 \leq 0 \\ 4u_1 + 2u_2 - u_3 \leq 1 \\ u_1 \geq 0; u_2 \leq 0; u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 8 nodi, e sono dati i valori di capacità degli archi ed un flusso ammissibile. A partire dal flusso dato trovare il massimo flusso inviabile dal nodo **1** al nodo **8** con l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,7)	(4,3)	(4,6)	(5,6)	(6,8)	(7,6)	(7,8)
Capacità	10	8	4	6	7	5	3	2	10	4	1
Flussi	4	0	4	0	4	4	0	0	4	4	0

Il flusso iniziale entrante nel nodo 8 è pari a 4. Cercando dei cammini aumentanti si ottengono i cammini: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ (flusso aumentante: 1); $1 \rightarrow 3 \xrightarrow{INV} 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$ (flusso aumentante: 3); $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8$ (flusso aumentante: 2). La successiva ricerca si arresta dopo aver raggiunto I nodi 1,2,3,4,5,7. Il taglio di capacità minima è quindi dato dagli archi: (4,6); (5,6); (7,6); (7,8). Infatti la capacità degli archi tagliati è 10, pari al flusso trovato.

Domanda 4

Discutere il problema dell'albero ricoprente di peso minimo, dimostrando in particolare la correttezza degli algoritmi di Prim e di Kruskal.

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. A questo punto è possibile utilizzare come base iniziale la base $B=[A_1, A_4]$e procedere direttamente con la fase 2. Altrimenti, impostando il problema artificiale, è sufficiente introdurre una variabile (ad esempio x_5) sul primo vincolo, come in figura. La base iniziale è quindi $B=[A_5, A_4]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_2 ed esce A_1. Al successivo pivot entra A_3 ed esce A_4. Al successivo pivot entra A_1 ed il problema risulta <u>inferiormente illimitato</u>.

$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Scrivendo il duale (in figura) ed impostando le condizioni di ortogonalità, si ottiene la soluzione $u^T = (1/18 \quad -1/3 \quad 10/18)$ che è ammissibile duale. La soluzione $x^T = (1 \quad 1 \quad 1)$ data è quindi ottima.

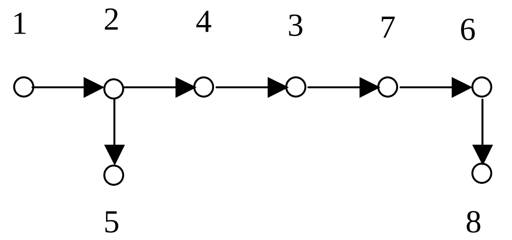
$$\min \quad x_1 - x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \quad 4u_1 + 4u_2 + 2u_3$$
$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 \leq 1 \\ -2u_1 + 3u_2 + 2u_3 \leq 0 \\ 4u_1 + 2u_2 - u_3 \leq -1 \\ u_1 \geq 0; u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo con 8 nodi **1**…**8**. Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo **1** a tutti gli altri nodi utilizzando l'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo. Evidenziare il cammino minimo dal nodo **1** al nodo **8**.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,7)	(4,3)	(4,6)	(5,6)	(6,8)	(7,6)	(7,8)
Costi	1	6	2	3	3	1	9	5	2	1	4



I nodi del grafo vengono fissati ad 1 nell'ordine 1,2,4,3,5,7,6,8.

Domanda 4

Discutere il problema dell'albero ricoprente di peso minimo, dimostrando in particolare che l'algoritmo di Prim-Dijkstra ha complessità $O(n^2)$.

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile x_5 sul primo vincolo (come in figura). La base iniziale è quindi $B = [A_5, A_4]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_2 ed esce A_1. Al successivo pivot entra A_3 ed esce A_4. La soluzione trovata $x^T = (0 \quad 4 \quad 9 \quad 0)$ risulta ottima.
.

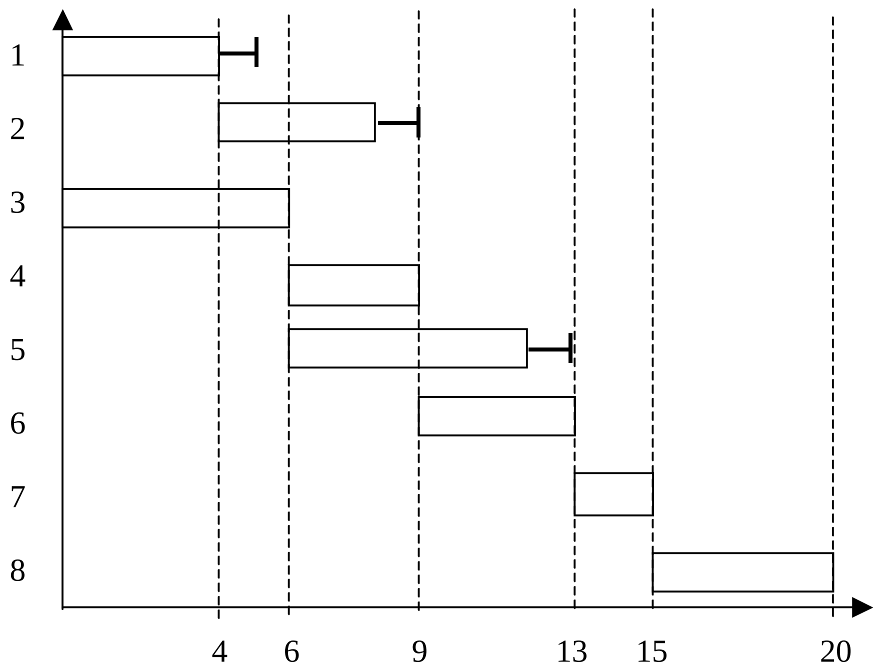
$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

In tabella sono riportate le 8 attività di un progetto, con durate e vincoli di precedenza tra attività. Rappresentare graficamente il progetto, calcolare il minimo tempo di completamento dello stesso e lo slittamento di tutte le attività. Infine, rappresentare il diagramma di Gantt del progetto evidenziando le attività critiche e gli slittamenti delle attività non critiche.

Attività	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
Durata	4	4	6	3	6	4	2	5
Predecessori	-	A_1	-	A_1	A_3	A_2	A_5	A_4
				A_3		A_4	A_6	A_7
Min inizio	0	4	0	6	6	9	13	15
slittamento	1	1	0	0	1	0	0	0

Min tempo di completamento: 20. Sono critiche le attività A_3, A_4,A_6,A_7,A_8. nel Gantt in figura sono indicati in grassetto gli slittamenti delle attività A_1, A_2 ed A_5.



Esercizio 3

State applicando l’algoritmo di Floyd e Warshall ad un grafo con 5 nodi. Alla fine del passo 3 ottenete le matrici in figura (quella di sinistra indica i cammini minimi, quella di destra i predecessori). Effettuate i passi 4 e 5 dell’algoritmo e mostrate i cammini minimi dal nodo 5 al nodo 4 e dal nodo 3 al nodo 1. In presenza di cicli negativi arrestate l’algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

0	∞	2	5	1
∞	0	1	4	∞
∞	∞	0	3	∞
1	∞	3	0	2
∞	2	4	7	0

1	1	1	3	1
2	2	2	3	2
3	3	3	3	3
4	4	1	4	1
5	5	2	3	5

PASSO 4

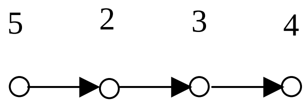
0	∞	2	5	1
5	0	1	4	**6**
4	∞	0	3	**5**
1	∞	3	0	2
8	2	4	7	0

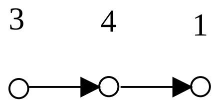
1	1	1	3	1
4	2	2	3	**1**
4	3	3	3	**1**
4	4	1	4	1
4	5	2	3	5

PASSO 5

0	**3**	2	5	1
5	0	1	4	6
4	**7**	0	3	5
1	**4**	3	0	2
8	2	4	7	0

1	**5**	1	3	1
4	2	2	3	1
4	**5**	3	3	1
4	**5**	1	4	1
4	5	2	3	5





Domanda 4

Illustrare la teoria della dualità, dimostrando in particolare che valgono le condizioni di ortogonalità.

E

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile x_5 sul primo vincolo (come in figura). La base iniziale è quindi $B = [A_5, A_4]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_2 ed esce A_1. Al successivo pivot entra A_3 ed esce A_4. La soluzione trovata $x^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ risulta ottima.

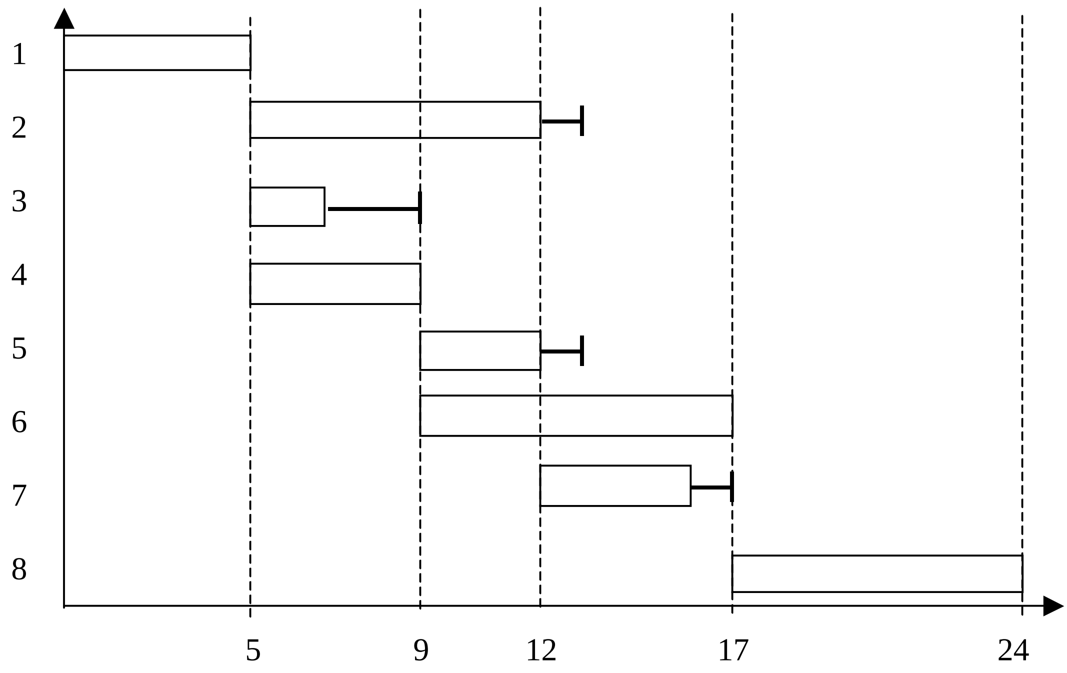
$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 16 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

In tabella sono riportate le 8 attività di un progetto, con durate e vincoli di precedenza tra attività. Rappresentare graficamente il progetto, calcolare il minimo tempo di completamento dello stesso e lo slittamento di tutte le attività. Infine, rappresentare il diagramma di Gantt del progetto evidenziando le attività critiche e gli slittamenti delle attività non critiche.

Attività	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
Durata	5	7	2	4	3	8	4	7
Predecessori	-	A_1	A_1	A_1	A_3	A_4	A_2	A_6
					A_4		A_5	A_7
Min inizio	0	5	5	5	9	9	12	17
slittamento	0	1	3	0	1	0	1	0

Min tempo di completamento: 24. Sono critiche le attività A_1, A_4, A_6, A_8. Nel Gantt in figura sono indicati in grassetto gli slittamenti delle attività A_2, A_3, A_5 ed A_7.



Esercizio 3

State applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall ad un grafo con 5 nodi. Alla fine del passo 3 ottenete le matrici in figura (quella di sinistra indica i cammini minimi, quella di destra i predecessori). Effettuate i passi 4 e 5 dell'algoritmo e mostrate i cammini minimi dal nodo 5 al nodo 4 e dal nodo 3 al nodo 1. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

0	∞	3	4	7
1	0	4	5	8
∞	∞	0	1	4
2	∞	5	0	-1
-1	-2	2	3	0

1	1	1	3	3
2	2	1	3	3
3	3	3	3	3
4	4	1	4	4
2	5	1	3	5

PASSO 4

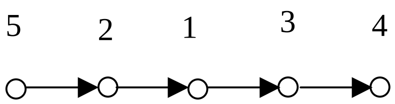
0	∞	3	4	**3**
1	0	4	5	**4**
3	∞	0	1	**0**
2	∞	5	0	-1
-1	-2	2	3	0

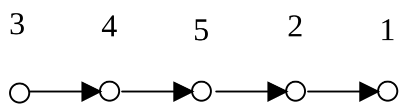
1	1	1	3	**4**
2	2	1	3	**4**
4	3	3	3	**4**
4	4	1	4	4
2	5	1	3	5

PASSO 5

0	**1**	3	4	3
1	0	4	5	4
-1	**-2**	0	1	0
-2	**-3**	**1**	0	-1
-1	-2	2	3	0

1	**5**	1	3	4
2	2	1	3	4
2	**5**	3	3	4
2	**5**	**1**	4	4
2	5	1	3	5





Domanda 4

Illustrare la teoria della dualità, dimostrando che i problemi di programmazione lineare godono della proprietà di dualità forte.

F

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile x_5 sul primo vincolo (come in figura). La base iniziale è quindi $B = [A_5, A_4]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_2 ed esce A_1. Al successivo pivot entra A_3 ed esce A_4. La soluzione trovata $x^T = (0 \quad 5 \quad 3 \quad 0)$ risulta ottima.

$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Scrivendo il duale (in figura) ed impostando le condizioni di ortogonalità, si ottiene la soluzione $u^T = (0 \quad -2/7 \quad 3/7)$ che NON è ammissibile duale (viola la condizione $u_3 \leq 0$). La soluzione $x^T = (1 \quad 1 \quad 1)$ data quindi NON è ottima.

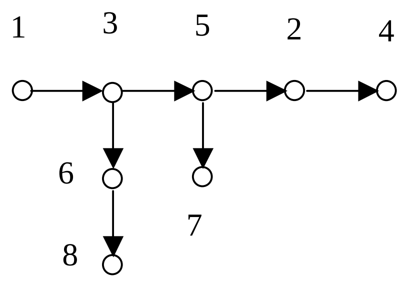
$$\min \quad x_1 - x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \quad 3u_1 + 4u_2 + 2u_3$$
$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 \leq 1 \\ -2u_1 + 3u_2 + 2u_3 \leq 0 \\ 4u_1 + 2u_2 - u_3 \leq -1 \\ u_1 \geq 0;\ u_3 \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo con 8 nodi **1**…**8**. Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo **1** a tutti gli altri nodi utilizzando l'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo. Evidenziare il cammino minimo dal nodo **1** al nodo **8**.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,2)	(5,7)	(6,8)	(7,6)	(7,8)
Costi	6	1	1	2	9	2	1	5	1	3	5



I nodi del grafo vengono fissati ad 1 nell'ordine 1,3,5,2,4,7,6,8.

Domanda 4

Illustrare i problemi di programmazione convessa, dimostrando in particolare che in questi problemi un punto di minimo locale è punto di minimo globale.

G

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile x_5 sul secondo vincolo (come in figura). La base iniziale è quindi $B = [A_3, A_5]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_4 ed esce A_3. La soluzione trovata $x^T = (3 \quad 0 \quad 0 \quad 2)$ risulta ottima.

$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Scrivendo il duale (in figura) ed impostando le condizioni di ortogonalità, si ottiene la coppia di equazioni: $\begin{matrix} 4u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ u_1 + 10u_2 + u_3 = 0 \end{matrix}$. Sottraendo la seconda eq. alla prima si ottiene l'eq. $3u_1 - 9u_2 = 2$, che non è compatibile con i vincoli $u_1 \leq 0; u_2 \geq 0$. Pertanto, la soluzione $x^T = (2 \quad 0 \quad 1)$ data NON è ottima.

$$\min \quad 2x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 \geq 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \quad 9u_1 + 12u_2 + 3u_3$$
$$\begin{cases} 4u_1 + u_2 + u_3 \leq 2 \\ 2u_1 - u_2 - u_3 \leq -1 \\ u_1 + 10u_2 + u_3 \leq 0 \\ u_1 \leq 0; u_2 \geq 0; u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 8 nodi, e sono dati i valori di capacità degli archi ed un flusso ammissibile. A partire dal flusso dato trovare il massimo flusso inviabile dal nodo **1** al nodo **8** con l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,2)	(5,7)	(6,8)	(7,6)	(7,8)
Capacità	1	18	3	6	8	2	4	5	7	3	10
Flussi	0	2	2	2	0	2	2	0	2	2	0

Il flusso iniziale entrante nel nodo 8 è pari a 2. Cercando dei cammini aumentanti si ottengono i cammini: $1 \to 3 \to 6 \to 8$ (flusso aumentante: 5); $1 \to 2 \xrightarrow{INV} 5 \to 7 \to 8$ (flusso aumentante: 1); $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 8$ (flusso aumentante: 4); $1 \to 3 \to 6 \xrightarrow{INV} 7 \to 8$ (flusso aumentante: 2). La successiva ricerca si arresta dopo aver raggiunto I nodi 1, 3, 6. Il taglio uscente di capacità minima è quindi dato dagli archi: (1,2); (3,5); (6,8). Infatti la capacità degli archi tagliati è 14, pari al flusso trovato.

Domanda 4

Discutere il problema del cammino minimo, dimostrando in particolare la correttezza dell'algoritmo di Floyd-Warshall.

H

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
31 gennaio 2003

SOLUZIONI

Esercizio 1

Portando il problema in forma standard si aggiungono le variabili x_3 e x_4. Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile x_5 sul secondo vincolo (come in figura). La base iniziale è quindi $B = [A_3, A_5]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_3; al secondo entra A_2 ed esce A_5. Fine della fase 1, inizia la fase 2. Al successivo pivot entra A_3 ed esce A_1, quindi entra A_4 ed il problema risulta <u>inferiormente illimitato</u>.

$$\min \quad x_5$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Scrivendo il duale (in figura) ed impostando le condizioni di ortogonalità, si ottiene la soluzione $u^T = (1/3 \quad 0 \quad 1/3)$ che è ammissibile duale. La soluzione $x^T = (0 \quad 2 \quad 2)$ data è quindi ottima.

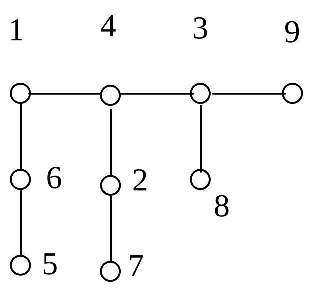
$$\min \quad 3x_1 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \quad 4u_1 + 11u_2 + 2u_3$$
$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 \leq 3 \\ -2u_1 + 3u_2 + 2u_3 \leq 0 \\ 4u_1 + 2u_2 - u_3 \leq 1 \\ u_1 \geq 0;\ u_2 \leq 0;\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo non orientato con 9 nodi **1**…9. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal nodo **1**, utilizzando l'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero ricoprente (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo).

Archi	(1,4)	(1,6)	(1,7)	(2,3)	(2,4)	(2,7)	(2,8)	(3,4)	(3,5)	(3,8)	(3,9)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(5,6)	(5,9)
Costi	1	4	7	9	3	4	8	6	9	1	4	10	5	6	7	8



I nodi del grafo vengono fissati ad 1 nell'ordine 1,4, 2, 6, 7, 3, 8, 9, 5.

Domanda 4

Discutere i problemi di flusso visti durante il corso, dimostrando in particolare il teorema di Ford e Fulkerson.