A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
17 giugno 2010

Nome:	O	**Ordinamento 270/04** – Laurea ing. Inf.
Cognome:	O	**Ordinamento 509/99** – Laurea ing. Inf.
Matricola:	O	**Altro** ________________________

Esercizio 1

La produzione del pane su scala industriale segue un processo in cinque fasi: (1) preparazione ingredienti, (2) impasto in gradienti, (3) prima cottura, (4) trattamento superficiale pane, (5) seconda cottura. Un forno dispone di:

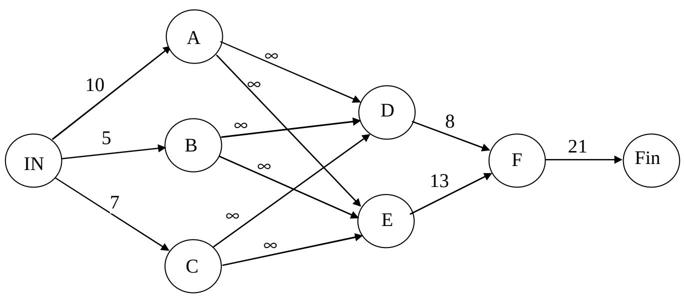
- 3 impastatrici A,B,C di capacità (in kg di farina per ora) 10, 5, 7 rispettivamente;
- 2 forni D,E per prima cottura di capacità (in kg di farina per ora) 8, 13 rispettivamente;
- 1 forno F per seconda cottura di capacità (in kg di farina per ora) 21;
- Personale largamente sufficiente a seguire tutte le lavorazioni manuali.

Si vuole determinare la produzione massima del forno (in kg di farina per ora).

1. Formulare il problema come un opportuno problema su grafi <u>descrivendo il problema, archi, nodi e pesi del grafo</u>
2. Risolvere il problema con un algoritmo specifico
3. Mostrare un certificato di ottimalità della soluzione.

Soluzione

Il problema si può formulare come problema di massimo flusso sul grafo che segue:



La ricerca di cammini aumentanti (a partire da un flusso iniziale nullo) produce:
cammino (IN) A D F (Fin) flusso aumentante 8
cammino (IN) A E F (Fin) flusso aumentante 2
cammino (IN) B E F (Fin) flusso aumentante 5
cammino (IN) C E F (Fin) flusso aumentante 6
non ci sono più cammini aumentanti, il flusso corrente 21 è massimo

per certificare l'ottimalità della soluzione basta osservare che il taglio S={IN, A, B, C, D, E } N-S ={ F, Fin} ha capacità 21 (ed è quindi il taglio minimo).

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 4 nodi ed è dato il costo di ciascun arco. Risolvere il problema del cammino minimo dal nodo “a” a tutti gli altri nodi con l’algoritmo di Floyd-Warshall. Discutere la correttezza dei risultati ottenuti. In caso positivo mostrare i cammini, in caso negativo mostrare un ciclo negativo.

Archi	(a,b)	(a,c)	(a,d)	(b,a)	(b,c)	(b,d)	(c,b)	(c,d)	(d,a)	(d,b)	(d,c)
Costi	3	-5	4	7	1	1	2	4	1	0	-3

Soluzione

Matrice cammini minimi iniziale:

0	3	-5	4
7	0	1	1
∞	2	0	4
1	0	-3	0

Matrice predecessori iniziale:

a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c
d	d	d	d

Matrice cammini passo

h=1:

0	3	-5	4
7	0	1	1
∞	2	0	4
1	0	-4	0

h=2

0	3	-5	4
7	0	1	1
9	2	0	3
1	0	-4	0

h=3

0	-3	-5	-2
7	0	1	1
9	2	0	3
1	-2	-4	**-1**

Matrice predecessori:

a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c
d	d	a	d

a	a	a	a
b	b	b	b
b	c	c	b
d	d	a	d

a	c	a	b
b	b	b	b
b	c	c	b
d	c	a	b

Al passo 3 viene evidenziato il ciclo negativo d->a->c->b->d di lunghezza **-1.**

Domanda 3

Definire il problema di Flusso di costo minimo, illustrare un algoritmo noto per risolverlo e dimostrare la struttura grafica di una base della matrice dei coefficienti del problema in forma standard.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
17 giugno 2010

Nome:	O	**Ordinamento 270/04** – Laurea ing. Inf.
Cognome:	O	**Ordinamento 509/99** – Laurea ing. Inf.
Matricola:	O	**Altro** ________________________

Esercizio 1

La produzione di ceramica può effettuarsi con due processi. La bicottura prevede: (1) preparazione di un grezzo crudo, (2) prima cottura, (3) pittura terracotta, (4) cottura finale. La monocottura evita la fase di prima cottura e prevede la pittura del grezzo crudo. Un'azienda ceramica che produce vasi dispone di:

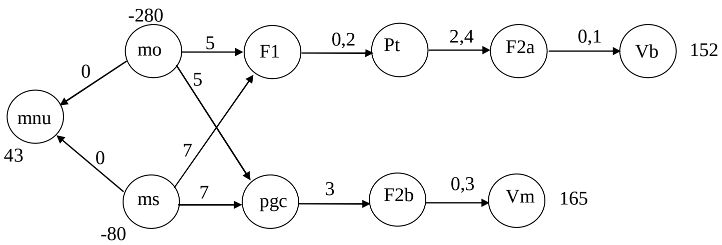
- 4 operai per la fase (1) pagati a ora, ciascun operaio produce 2 vasi crudi l'ora e lavora 7 ore/giorno per 5 giorni/settimana al costo di 10 €/ora, può lavorare ulteriori 2 ore/giorno di straordinario al costo di 14 €/ora;
- un forno per la prima cottura che cuoce vasi crudi al costo di 0,2 €/vaso;
- un forno per la cottura finale che cuoce vasi crudi al costo di 0,3 €/vaso e terrecotte al costo di 0,1 €/vaso;

Per la pittura l'azienda si rivolge ad artisti esterni pagati a cottimo: 3 €/vaso per la pittura dei vasi crudi e 2,4 €/vaso per la pittura di una terracotta. Tra una settimana dovranno essere pronti 152 vasi in monocottura e 165 vasi in bicottura.
Si vuole determinare la produzione di costo minimo.

1. Formulare il problema come un opportuno problema su grafi <u>descrivendo il problema, archi, nodi e pesi del grafo</u>
2. Risolvere il problema con il simplesso su reti (fase 1 e fase 2).
3. Mostrare un certificato di ottimalità della soluzione.

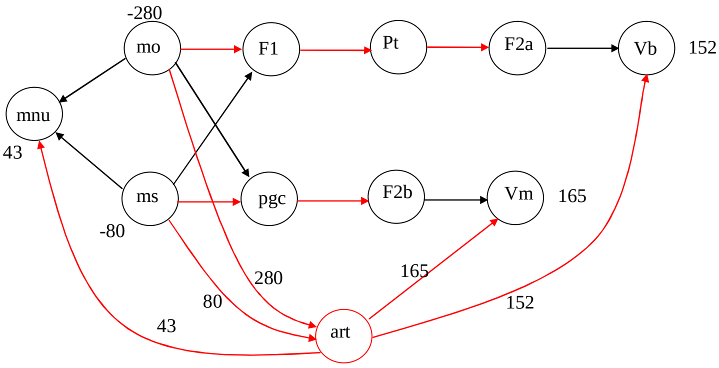
Soluzione

Il problema si può formulare come problema di flusso di costo minimo sul grafo che segue:

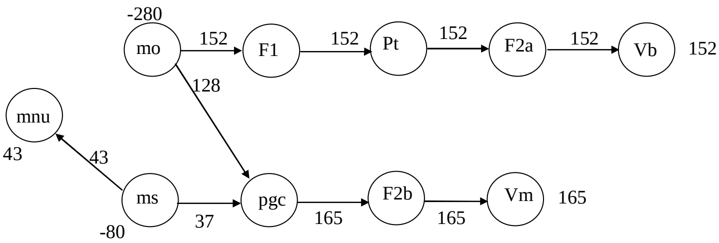


<u>Legenda nodi:</u>
mo: manodopera con lavoro ordinario (disponibilità 4*2*7*5=280)
ms: manodopera con lavoro straordinario (disponibilità 4*2*2*5=80)
F1: forno prima cottura
pgc: pittura grezzo crudo
Pt: pittura terracotta
F2a: forno seconda cottura per cottura terrecotte
F2b: forno seconda cottura per cottura grezzi crudi
Vb: vasi bicottura (domanda 152)
Vm: vasi monocottura (domanda 165)
mnu: manodopera non utilizzata (domanda pari a disponibilità tot 360 – domanda tot 317 =43)

La fase 1 prevede l'aggiunta di un nodo artificiale e di 5 archi artificiali:



Per completare la base iniziale scegliamo gli archi in rosso.
Entra (F2b, Vm) esce (ms,art) δ=80
Entra (F2a, Vb) esce (art,Vb) δ=152
Entra (ms,mnu) esce (art,mnu) δ=43
Entra (mo,pgc) esce (art,vm) δ=128
Fine fase 1, inizio fase 2: la base corrente è ottima:



Un certificato di ottimalità è fornito dalla soluzione duale corrente (che è ammissibile duale e soddisfa le condizioni di ortogonalità):
u_{mo}=0; u_{F1}=5; u_{Pt}=5,2; u_{F2a}=7,6; u_{Vb}=7,7; u_{pgc}=5; u_{ms}=-2; u_{mnu}=-2; u_{F2b}=8; u_{Vm}=8,3

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 6 nodi, e sono dati i valori di capacità degli archi ed un flusso iniziale. Si verifichi che il flusso dato sia ammissibile. Se il flusso dato risulta ammissibile, trovare il massimo flusso inviabile dal nodo **1** al nodo **6** con l'algoritmo di Ford e Fulkerson partendo dal flusso dato, se il flusso non è ammissibile partire dal grafo completamente scarico. Individuare il taglio di capacità minima nel grafo.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
Capacità	6	47	4	8	40	9	27	16	34
Flussi	6	14	0	6	14	0	20	0	20

Soluzione

La ricerca di cammini aumentanti (a partire da un flusso iniziale ammissibile di valore 20) produce:
cammino 1 3 6 flusso aumentante 9
cammino 1 3 4 6 flusso aumentante 16
cammino1 3 4 5 6 flusso aumentante 7
non ci sono più cammini aumentanti, il flusso corrente 52 è massimo

Il taglio di capacità minima è S={1, 2, 3, 4} N-S ={5, 6} di capacità 27+16+9=52.

Domanda 3

Definire il problema di cammino minimo, illustrare un algoritmo noto per risolverlo nel caso in cui siano presenti archi di peso negativo e dimostrare il teorema di Floyd-Warshall

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo Appello
17 giugno 2010

Nome:	○	**Ordinamento 270/04** – Laurea ing. Inf.
Cognome:	○	**Ordinamento 509/99** – Laurea ing. Inf.
Matricola:	○	**Altro** ________________________

Esercizio 1

La produzione del pane su scala industriale segue un processo in cinque fasi: (1) preparazione ingredienti, (2) impasto in gradienti, (3) prima cottura, (4) trattamento superficiale pane, (5) seconda cottura. Un forno dispone di:

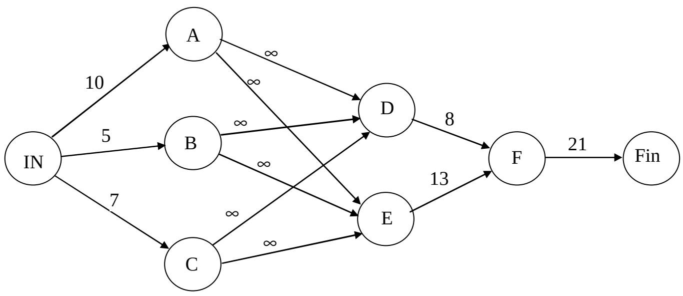
- 3 impastatrici A,B,C di capacità (in kg di farina per ora) 10, 5, 7 rispettivamente;
- 2 forni D,E per prima cottura di capacità (in kg di farina per ora) 8, 13 rispettivamente;
- 1 forno F per seconda cottura di capacità (in kg di farina per ora) 21;
- Personale largamente sufficiente a seguire tutte le lavorazioni manuali.

Si vuole determinare la produzione massima del forno (in kg di farina per ora).

4. Formulare il problema come un opportuno problema su grafi descrivendo il problema, archi, nodi e pesi del grafo
5. Risolvere il problema con un algoritmo specifico
6. Mostrare un certificato di ottimalità della soluzione.

Soluzione

Il problema si può formulare come problema di massimo flusso sul grafo che segue:



La ricerca di cammini aumentanti (a partire da un flusso iniziale nullo) produce:
cammino (IN) A D F (Fin) flusso aumentante 8
cammino (IN) A E F (Fin) flusso aumentante 2
cammino (IN) B E F (Fin) flusso aumentante 5
cammino (IN) C E F (Fin) flusso aumentante 6
non ci sono più cammini aumentanti, il flusso corrente 21 è massimo

per certificare l'ottimalità della soluzione basta osservare che il taglio S={IN, A, B, C, D, E } N-S ={ F, Fin} ha capacità 21 (ed è quindi il taglio minimo).

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Portare il problema in forma standard.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 4 \\ x_1 \qquad - 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 \quad \textit{libera} \\ x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Portiamo il problema in forma standard (cambiando segno all'ultimo vincolo per evitare termini noti negativi):

$$\min \quad -3x_1^+ + 3x_1^- - 2x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 \qquad + x_4 = 4 \\ -x_1^+ + x_1^- \qquad + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Fase 1: problema artificiale:

$$\min \quad y_1 + y_2 + y_3$$
$$\begin{cases} 2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 - x_3 + x_4 + y_1 = 5 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 \qquad + x_4 + y_2 = 4 \\ -x_1^+ + x_1^- \qquad + 2x_3 + x_4 + y_3 = 2 \\ x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Fase 2: la soluzione ottima è $x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Domanda 3

Illustrare le definizioni di vertice e direzione estrema. Enunciare il teorema di Minkowski-Weyl e utilizzarlo per dimostrare che se un problema di PL in forma standard ammette soluzione ottima, allora ammette soluzione ottima su un vertice.

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo Appello
17 giugno 2010

Nome:	○ **Ordinamento 270/04** – Laurea ing. Inf.
Cognome:	○ **Ordinamento 509/99** – Laurea ing. Inf.
Matricola:	○ **Altro** ________________________

Esercizio 1

La produzione di ceramica può effettuarsi con due processi. La bicottura prevede: (1) preparazione di un grezzo crudo, (2) cottura 1, (3) pittura terracotta, (4) cottura 2. La monocottura evita la fase di cottura 1 e prevede la pittura del grezzo crudo. Un'azienda ceramica che produce vasi dispone di:

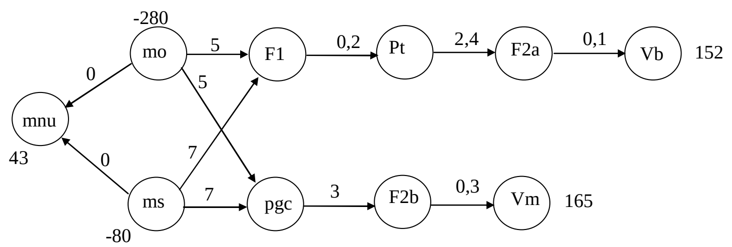
- 4 operai per la fase (1) pagati a ora, ciascun operaio produce 2 vasi crudi l'ora e lavora 7 ore/giorno per 5 giorni/settimana al costo di 10 €/ora, può lavorare ulteriori 2 ore/giorno di straordinario al costo di 14 €/ora;
- un forno per la cottura 1 che cuoce vasi crudi al costo di 0,2 €/vaso;
- un forno per la cottura 2 che cuoce vasi crudi al costo di 0,3 €/vaso e terrecotte al costo di 0,1 €/vaso;

Per la pittura l'azienda si rivolge ad artisti esterni pagati a cottimo: 3 €/vaso per la pittura dei vasi crudi e 2,4 €/vaso per la pittura di una terracotta. Tra una settimana dovranno essere pronti 152 vasi in monocottura e 165 vasi in bicottura.
Si vuole determinare la produzione di costo minimo.

1. Formulare il problema come un opportuno problema su grafi descrivendo il problema, archi, nodi e pesi del grafo
2. Risolvere il problema con il simplesso su reti (fase 1 e fase 2).
3. Mostrare un certificato di ottimalità della soluzione.

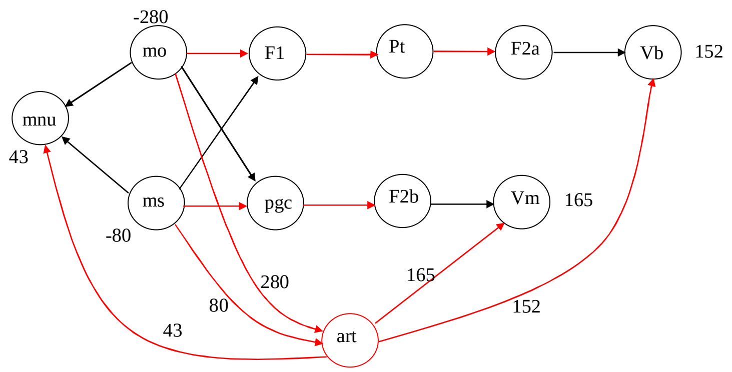
Soluzione

Il problema si può formulare come problema di flusso di costo minimo sul grafo che segue:

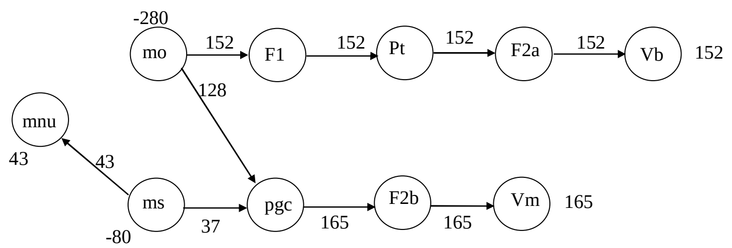


Legenda nodi:
mo: manodopera con lavoro ordinario (disponibilità 4*2*7*5=280)
ms: manodopera con lavoro straordinario (disponibilità 4*2*2*5=80)
F1: forno prima cottura
pgc: pittura grezzo crudo
Pt: pittura terracotta
F2a: forno seconda cottura per cottura terrecotte
F2b: forno seconda cottura per cottura grezzi crudi
Vb: vasi bicottura (domanda 152)
Vm: vasi monocottura (domanda 165)
mnu: manodopera non utilizzata (domanda pari a disponibilità tot 360 – domanda tot 317 =43)

La fase 1 prevede l'aggiunta di un nodo artificiale e di 5 archi artificiali:



Per completare la base iniziale scegliamo gli archi in rosso.
Entra (F2b, Vm) esce (ms,art) δ=80
Entra (F2a, Vb) esce (art,Vb) δ=152
Entra (ms,mnu) esce (art,mnu) δ=43
Entra (mo,pgc) esce (art,vm) δ=128
Fine fase 1, inizio fase 2: la base corrente è ottima:



Un certificato di ottimalità è fornito dalla soluzione duale corrente (che è ammissibile duale e soddisfa le condizioni di ortogonalità):
u_{mo}=0; u_{F1}=5; u_{Pt}=5,2; u_{F2a}=7,6; u_{Vb}=7,7; u_{pgc}=5; u_{ms}=-2; u_{mnu}=-2; u_{F2b}=8; u_{Vm}=8,3

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Costruire il problema duale.
2. Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che la soluzione ottima del primale è $x^{*T} = (0.5 \quad 0 \quad 2 \quad 1.5)$.
3. Determinare il minimo valore del termine noto del terzo vincolo del problema primale affinché la base associata alla soluzione ottima rimanga la stessa.

$$\min \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Problema duale

$$\max \quad 2u_1 + 4u_2 + 5u_3$$
$$\begin{cases} 4u_1 \leq 2 \\ u_1 + u_2 \leq 4 \\ 2u_2 + u_3 \leq 1 \\ 2u_3 \leq -1 \\ u_1 \geq 0; u_2 \; libera; u_3 \leq 0 \end{cases}$$

Cond. ort. $\begin{cases} u_1(4x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ u_2(x_2 + 2x_3 - 4) = 0 \\ u_3(x_3 + 2x_4 - 5) = 0 \\ x_1(4u_1 - 2) = 0 \\ x_2(u_1 + u_2 - 4) = 0 \\ x_3(2u_2 + u_3 - 1) = 0 \\ x_4(2u_3 + 1) = 0 \end{cases}$ sostituendo x^* $\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_2(0) = 0 \\ u_3(0) = 0 \\ 0{,}5(4u_1 - 2) = 0 \\ 0(u_1 + u_2 - 4) = 0 \\ 2(2u_2 + u_3 - 1) = 0 \\ 1{,}5(2u_3 + 1) = 0 \end{cases}$

Che porta a:

$\begin{cases} 4u_1 - 2 = 0 \\ 2u_2 + u_3 - 1 = 0 \\ 2u_3 + 1 = 0 \end{cases}$ cioè: $\begin{cases} u_1 = 0{,}5 \\ u_2 = 0{,}75 \\ u_3 = -0{,}5 \end{cases}$ che è ammissibile duale, e quindi ottima.

Per rispondere alla seconda domanda è sufficiente valutare qual è il minimo valore del terzo termine noto tale che $x_B = B^{-1}b$. Allo scopo è necessario ricostruire la base ottima B e la sua inversa. Chiaramente sono in base x_1, x_3 e x_4, quindi $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. L'inversa è $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$. Il vettore b avrà come terzo elemento l'incognita che vogliamo determinare: $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{pmatrix}$. Quindi y^* si ottiene risolvendo il problema: $\begin{matrix} \min & y \\ \{B^{-1}b \geq 0 \end{matrix}$ ovvero:

$\begin{matrix} \min & y \\ \{-1 + 0{,}5y \geq 0 \end{matrix}$ cioè $y^*=2$.

Domanda 3

Definire il problema di cammino minimo, illustrare un algoritmo noto per risolverlo nel caso in cui siano presenti archi di peso negativo e dimostrare il teorema di Floyd-Warshall.

E

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo Appello
17 giugno 2010

Nome:	○	**Ordinamento 270/04** – Laurea ing. Inf.
Cognome:	○	**Ordinamento 509/99** – Laurea ing. Inf.
Matricola:	○	**Altro** ________________________

Esercizio 1

La produzione del pane su scala industriale segue un processo in cinque fasi: (1) preparazione ingredienti, (2) impasto in gradienti, (3) prima cottura, (4) trattamento superficiale pane, (5) seconda cottura. Un forno dispone di:

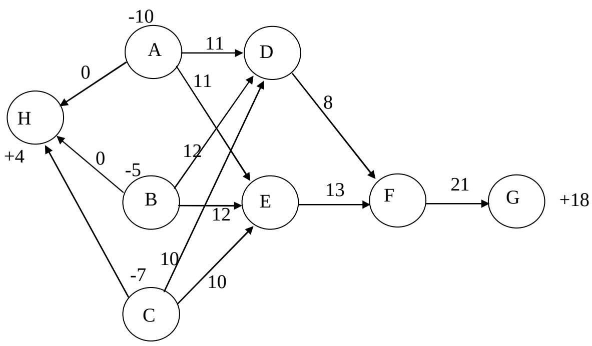
- 3 impastatrici A,B,C di capacità (in quintali di farina al giorno) 10, 5, 7 rispettivamente e di costo 11, 12, 10 rispettivamente (in € per quintale);
- 2 forni D,E per prima cottura di costo (in € per quintale) 8, 13 rispettivamente;
- 1 forno F per seconda cottura di costo (in € per quintale) 21;
- Personale largamente sufficiente a seguire tutte le lavorazioni manuali.

Gli ordinativi del giorno richiedono di produrre 18 quintali di pane. Si vuole determinare la produzione di costo minimo del forno assumendo che il prodotto non perda peso nelle varie fasi di lavorazione e che la capacità dei forni sia infinita.

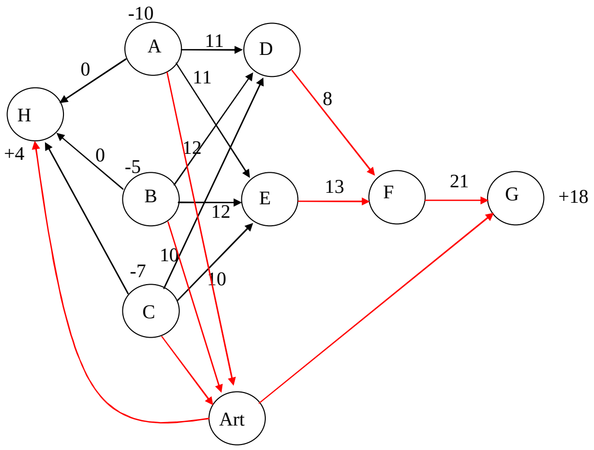
1. Formulare il problema come un opportuno problema su grafi descrivendo il problema, archi, nodi e pesi del grafo
2. Risolvere il problema con un algoritmo specifico
3. Mostrare un certificato di ottimalità della soluzione.

Soluzione

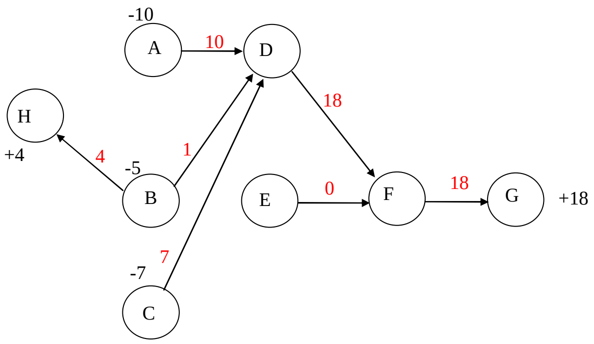
Il problema si può formulare come problema di flusso di costo minimo sul grafo che segue (in cui G rappresenta gli ordini da soddisfare e H la capacità delle impastatrici inutilizzata) :



La fase 1 prevede l'aggiunta di un nodo artificiale e di 5 archi artificiali:



Per completare la base iniziale scegliamo gli archi in rosso (D,F),(E,F) e (F,G).
Entra (B,H) esce (Art,H) δ=4
Entra (B,D) esce (B,Art) δ=1
Entra (A,D) esce (A,Art) δ=10
Entra (C,D) esce (C,Art) δ=7
Fine fase 1, inizio fase 2: la base corrente è ottima (in rosso i flussi ottimi):



Un certificato di ottimalità è fornito dalla soluzione duale corrente (che è ammissibile duale e soddisfa le condizioni di ortogonalità): u_H=0; u_B=0; u_D=12; u_A=1; u_C=2; u_F=20; u_E=7; u_G=42.

Esercizio 2

Dato il problema di PL (primale) in figura,

1. risolvere il problema primale con il metodo grafico ed impostare il problema duale;
2. se il primale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del primale ricavare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità. Se il primale non ammette una soluzione ottima, risolvere il problema duale con il metodo del simplesso.

$$\max \quad x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 + 5x_2 \ge 20 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Soluzione

Il primale ammette soluzione ottima risolvendo il sistema $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$ Si ha: $\begin{cases} x_2^* = 70/13 \\ x_1^* = 36/13 \end{cases}$

Il terzo vincolo non è soddisfatto all'uguaglianza, pertanto nel duale $u_3^* = 0$. Le due variabili x sono diverse da zero, pertanto nel duale i due primi vincoli devono essere soddisfatti con l'uguaglianza stretta: $\begin{cases} 5u_1 - u_2 - u_3 = 1 \\ 3u_1 + 2u_2 + 5u_3 = 2 \end{cases}$. Ne segue: $\begin{cases} u_1^* = 4/13 \\ u_2^* = 87/13 \\ u_3^* = 0 \end{cases}$ che è ammissibile duale (e quindi ottima).

F

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo Appello
17 giugno 2010

Nome:	O	**Ordinamento 270/04** – Laurea ing. Inf.
Cognome:	O	**Ordinamento 509/99** – Laurea ing. Inf.
Matricola:	O	**Altro** ________________________

Esercizio 1

La produzione di ceramica può effettuarsi con due processi. La bicottura prevede: (1) preparazione di un grezzo crudo, (2) prima cottura, (3) pittura terracotta, (4) cottura finale. La monocottura evita la fase di prima cottura e prevede la pittura del grezzo crudo. Un'azienda ceramica che produce vasi dispone di:

- 5 operai per la fase (1) pagati a ora che producono 1 vaso in 30 minuti al costo di 2 € oppure in 20 minuti al costo di 3 €;
- un forno per la prima cottura che cuoce un vaso crudo in 2 ore al costo di 0,9 €/vaso;
- un forno per la cottura finale che cuoce vasi crudi in 2 ore al costo di 1,3 €/vaso e terrecotte in 10 minuti al costo di 0,3 €/vaso;

Per la pittura l'azienda si rivolge ad artisti esterni pagati a cottimo: nella modalità standard un pittore prende 6 €/vaso per la pittura dei vasi crudi e 5 €/vaso per la pittura di una terracotta e restituisce il vaso dipinto dopo 2 ore. Nella modalità veloce viene restituito il vaso dipinto dopo 1 ora con un aumento di costo del 20%.

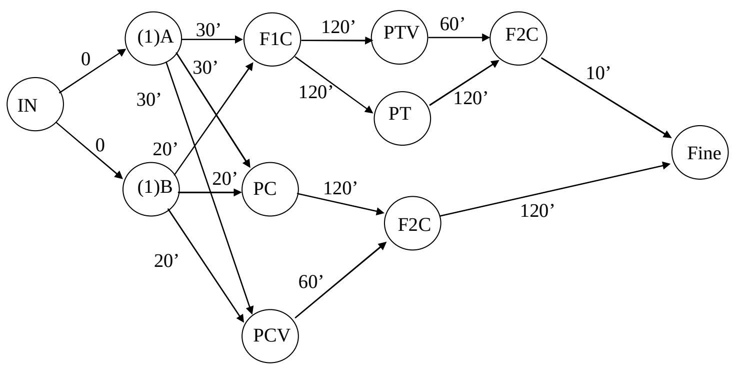
Si vuole determinare la modalità di produzione di un vaso a costo minimo e la modalità di produzione di un vaso nel tempo minimo.

1. Formulare i problemi come opportuni problemi su grafi descrivendo i problemi, archi, nodi e pesi dei grafi;
2. Risolvere i problemi con un algoritmo opportuno tra quelli studiati.
3. Mostrare la differenza di costo delle due soluzioni.

Soluzione

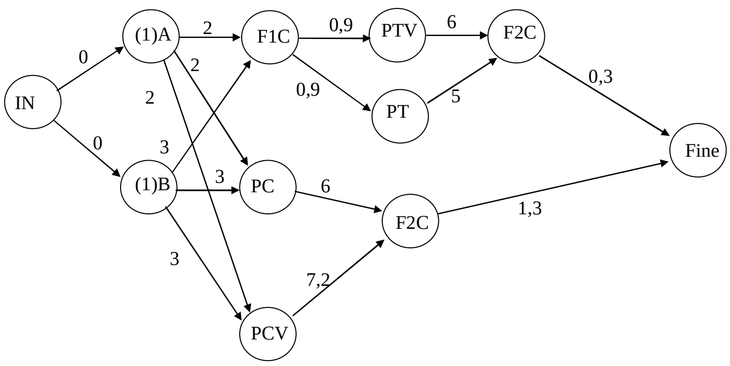
Il problema di determinare la modalità di produzione di un vaso nel tempo minimo si può formulare come problema di cammino minimo sul grafo che segue.

min tempo di produzione (minuti)



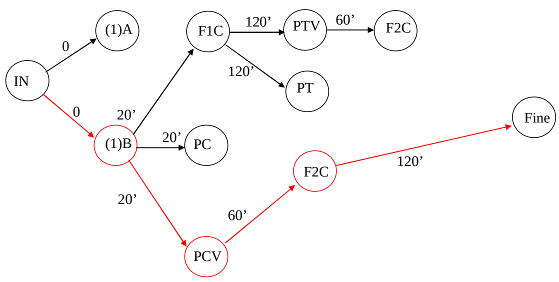
Cambiando i pesi si può poi risolvere anche il problema di determinare la modalità di produzione di un vaso a costo minimo:

min costo di produzione (euro)

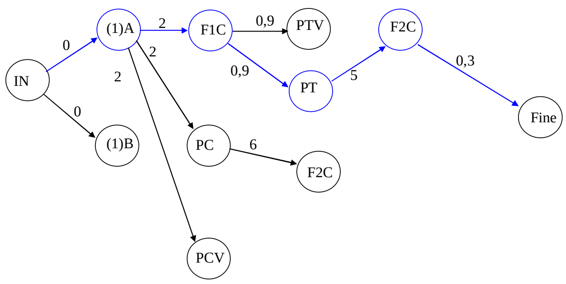


Risolvendo (per es) con l’algoritmo di Dijkstra si ottengono i seguenti alberi dei cammini minimi:

min tempo di produzione (minuti)



min costo di produzione (euro)



Il cammino a tempo minimo (rosso) richiede un tempo di 200’ ed un costo 11,5 euro. Il cammino a costo minimo (blu) richiede un costo di 8,2 euro. La differenza di costo tra e due soluzioni è quindi 3,3 euro.

Esercizio 2

Dato il problema di PL (primale) in figura,

1. risolvere il problema primale con il metodo grafico ed impostare il problema duale;
2. se il primale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del primale ricavare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità. Se il primale non ammette una soluzione ottima, risolvere il problema duale con il metodo del simplesso.

$$\max \quad x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Il primale è impossibile e il duale illimitato inferiormente.

Domanda 3

Definire il problema di Massimo Flusso, illustrare un algoritmo noto per risolverlo e dimostrare il teorema di Ford-Fulkerson.