

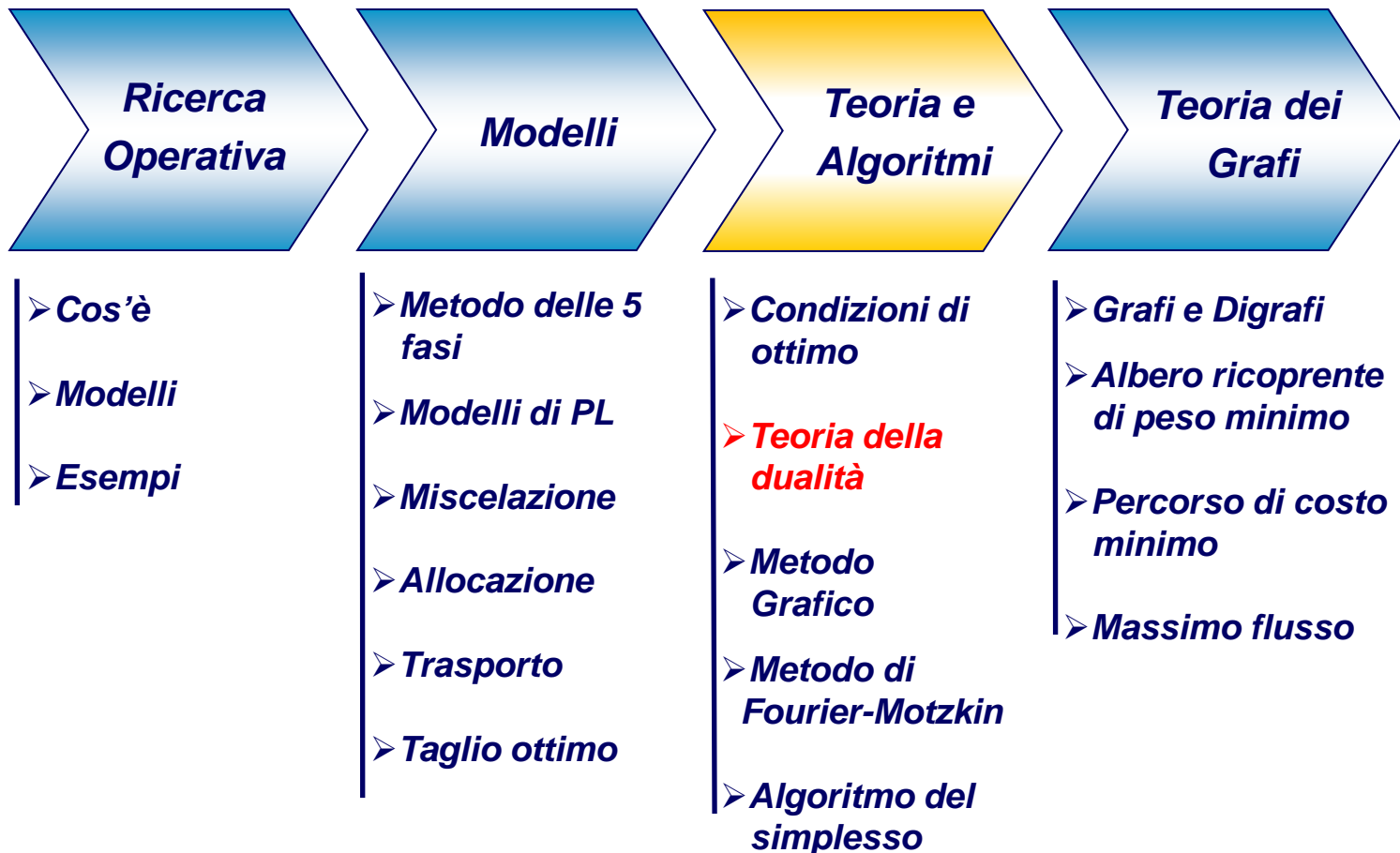


# Ricerca Operativa I

**Dario Pacciarelli**

Teoria della dualità

# Struttura del corso



## Esempio

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

stimare il valore dell'ottimo  $z^*$

Stima **Lower Bound**?

Poiché  $x \geq 0$  e  $5x_1 + x_2 \geq x_1 - x_2 \geq 3$  deve essere  $z^* \geq 3$

$$\begin{aligned} (x_1 + 2x_2 \geq 6) + \\ (x_1 - x_2 \geq 3) = \end{aligned} \Rightarrow 5x_1 + x_2 \geq 9 \Rightarrow z^* \geq 9$$

$$\begin{aligned} 2(x_1 + 2x_2 \geq 6) + \\ 3(x_1 - x_2 \geq 3) = \end{aligned} \Rightarrow 5x_1 + x_2 \geq 21 \Rightarrow z^* \geq 21 = \text{LB}$$

$$\text{LB} \leq z^* \leq \text{UB}$$

Lower Bound

Upper Bound

Stima **Upper Bound**: basta trovare una soluzione ammissibile:

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow z = 30 \Rightarrow z^* \leq 30$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow z = 21 \Rightarrow z^* \leq 21 = \text{UB}$$

## Problema duale

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2$$

$$y_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max_{y_1, y_2} 6y_1 + 3y_2$$

$$y_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 5 \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

stimare il valore dell'ottimo  $z^*$

Miglior **Lower Bound**? Trovare due moltiplicatori  $y_1, y_2$  tali che

$$5x_1 + x_2 \geq (y_1 + y_2)x_1 + (2y_1 - y_2)x_2 \geq 6y_1 + 3y_2$$

e che  $6y_1 + 3y_2$  sia massimo

$$\begin{aligned} 5x_1 &\geq (y_1 + y_2)x_1 \\ x_2 &\geq (2y_1 - y_2)x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 5 \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$y \geq 0$$

## Problema duale

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + 1x_2$$

$$y_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max 6y_1 + 3y_2$$

$$x_1 \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 5 \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dato il **problema primale**

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

È definito il **problema duale**

$$(D) \quad \begin{cases} \max b^T y \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

## Teorema debole della dualità

Dato il **problema primale**

$$(P) \quad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

È definito il **problema duale**

$$(D) \quad \begin{aligned} &\max b^T y \\ &\begin{cases} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\max y^T b \\ &\begin{cases} y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### Teorema debole della dualità

Data la coppia primale-duale (P)-(D), una soluzione  $x$  ammissibile primale e una soluzione  $y$  ammissibile duale, si ha:  $c^T x \geq y^T b$ .

Dimostrazione:

Moltiplicando i vincoli primali  $Ax \geq b$  per le variabili duali  $y \geq 0$  si ha:  $y^T Ax \geq y^T b$ . Moltiplicando i vincoli duali  $y^T A \leq c^T$  per le variabili primali  $x \geq 0$  si ha:  $y^T Ax \leq c^T x$ . Ne segue che  $c^T x \geq y^T Ax \geq y^T b$  da cui la tesi.

## Costruzione del duale - esempio

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4$$

$$y_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \leq 0; x_3 \leq 0; x_4 \text{ libera} \end{cases}$$

stimare il valore dell'ottimo  $z^*$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq y_1(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4) +$$

$$+ y_2(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) +$$

$$+ y_3(7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4) \geq 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$5x_1 \geq (y_1 + y_2 + 7y_3) x_1 \Rightarrow 5 \geq y_1 + y_2 + 7y_3$$

$$x_2 \geq (2y_1 + y_2 + 2y_3) x_2 \Rightarrow 1 \leq 2y_1 + y_2 + 2y_3$$

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$y_1 \begin{cases} y_1 + y_2 + 7y_3 \leq 5 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ 3y_1 - y_2 - 8y_3 = -2 \\ y_1 \geq 0; y_2 \leq 0; y_3 \text{ libera} \end{cases}$$

$$c^T x \geq y^T A x \geq y^T b$$

## Costruzione del duale - esempio

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4$$

$$y_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0; x_2 \leq 0; x_3 \leq 0; x_4 \text{ libera} \end{cases}$$

stimare il valore dell'ottimo  $z^*$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq y_1(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4) +$$

$$+ y_2(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) +$$

$$+ y_3(7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4) \geq 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$4x_3 \geq (-2y_1 + y_2 + y_3)x_3 \Rightarrow 4 \leq -2y_1 + y_2 + y_3$$

$$-2x_4 \geq (3y_1 - y_2 - 8y_3)x_4 \Rightarrow -2 = 3y_1 - y_2 - 8y_3$$

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$x_1 \begin{cases} y_1 + y_2 + 7y_3 \leq 5 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ 3y_1 - y_2 - 8y_3 = -2 \\ y_1 \geq 0; y_2 \leq 0; y_3 \text{ libera} \end{cases}$$

$$c^T x \geq y^T A x \geq y^T b$$



## Costruzione del duale - regole

Dato il problema di PL

È definito il problema duale

|                    |   |                    |                                 |
|--------------------|---|--------------------|---------------------------------|
| $\min c^T x$       | → | $\max y^T b$       | $c^T x \geq y^T A x \geq y^T b$ |
| $a_i^T x \geq b_i$ | → | $y_i \geq 0$       |                                 |
| $a_i^T x \leq b_i$ | → | $y_i \leq 0$       |                                 |
| $a_i^T x = b_i$    | → | $y_i$ libera       |                                 |
| $x_j \geq 0$       | → | $A_j^T y \leq c_j$ |                                 |
| $x_j \leq 0$       | → | $A_j^T y \geq c_j$ |                                 |
| $x_j$ libera       | → | $A_j^T y = c_j$    |                                 |
| $\max c^T x$       | → | $\min y^T b$       | $c^T x \leq y^T A x \leq y^T b$ |
| $a_i^T x \geq b_i$ | → | $y_i \leq 0$       |                                 |
| $a_i^T x \leq b_i$ | → | $y_i \geq 0$       |                                 |
| $a_i^T x = b_i$    | → | $y_i$ libera       |                                 |
| $x_j \geq 0$       | → | $A_j^T y \geq c_j$ |                                 |
| $x_j \leq 0$       | → | $A_j^T y \leq c_j$ |                                 |
| $x_j$ libera       | → | $A_j^T y = c_j$    |                                 |

## Costruzione del duale - esempi

Primale

$$\max 6x_1 - 2x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} y_1 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ y_2 & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 7 \\ y_3 & x_1 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0; x_2 \text{ libera}; x_3 \leq 0; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Duale

$$\min 10y_1 + 7y_2 + 3y_3$$

$$\begin{cases} x_1 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 6 \\ x_2 & y_1 - y_2 = 0 \\ x_3 & y_1 + y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ x_4 & 2y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1 \leq 0; y_2 \leq 0; y_3 \text{ libera} \end{cases}$$

$$\min x_2 + 2x_3 - x_4 \longrightarrow \max 9y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} y_1 & x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ y_2 & x_1 + 2x_3 - x_4 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0; x_2 \text{ libera}; x_3 \leq 0; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & y_1 + y_2 \leq 0 \\ x_2 & y_1 = 1 \\ x_3 & y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ x_4 & -y_2 \leq -1 \\ & y_1 \text{ libera}; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

## Teorema debole della dualità

### Teorema debole della dualità

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una soluzione  $\bar{x}$  ammissibile primale e una soluzione  $\bar{y}$  ammissibile duale, si ha:  $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$ .

Dimostrazione (primale in F.S.)

Moltiplicando i vincoli primali  $A\bar{x} = b$  per le variabili duali  $\bar{y}$  libere si ha:  $\bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$ . Moltiplicando i vincoli duali  $\bar{y}^T A \leq c^T$  per le variabili primali  $\bar{x} \geq 0$  si ha:  $\bar{y}^T A\bar{x} \leq c^T \bar{x}$ . Ne segue che  $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$  da cui la tesi.

### Corollario 1

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , se il primale è illimitato inferiormente, il duale è inammissibile; se il duale è illimitato superiormente, il primale è inammissibile.

Dimostrazione: basta osservare che se il duale [risp. il primale] non fosse inammissibile il primale [risp. il duale] non potrebbe essere illimitato.

## Teorema debole della dualità

### Teorema debole della dualità

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una soluzione  $x$  ammissibile primale e una soluzione  $y$  ammissibile duale, si ha:  $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$ .

### Corollario 2

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , se  $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$  allora  $\bar{x}$  è ottima primale e  $\bar{y}$  è ottima duale.

Dimostrazione:

1. Per ogni  $y$  ammissibile duale deve essere  $c^T \bar{x} \geq y^T b$  e quindi  $\bar{y}^T b \geq y^T b$  ovvero  $\bar{y}$  è punto di massimo per il duale.
2. Per ogni  $x$  ammissibile primale deve essere  $c^T x \geq \bar{y}^T b$  e quindi  $c^T x \geq c^T \bar{x}$  ovvero  $\bar{x}$  è punto di minimo per il primale.



## Teorema debole della dualità

### Teorema debole della dualità

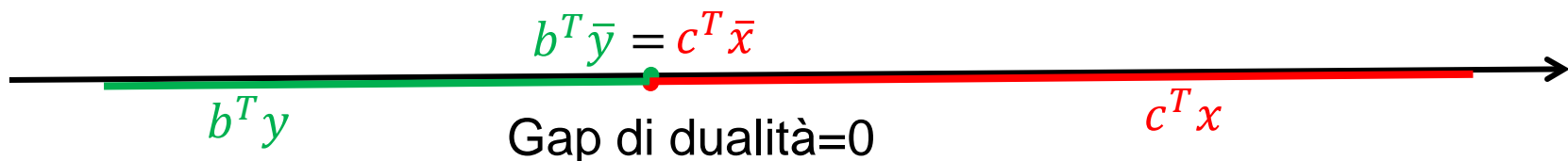
Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una soluzione  $x$  ammissibile primale e una soluzione  $y$  ammissibile duale, si ha:  $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$ .

### Corollario 2

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , se  $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$  allora  $\bar{x}$  è ottima primale e  $\bar{y}$  è ottima duale.

Dimostrazione:

1. Per ogni  $y$  ammissibile duale deve essere  $c^T \bar{x} \geq y^T b$  e quindi  $\bar{y}^T b \geq y^T b$  ovvero  $\bar{y}$  è punto di massimo per il duale.
2. Per ogni  $x$  ammissibile primale deve essere  $c^T x \geq \bar{y}^T b$  e quindi  $c^T x \geq c^T \bar{x}$  ovvero  $\bar{x}$  è punto di minimo per il primale.



## Teorema **forte** della dualità

### Teorema forte della dualità

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una soluzione  $\bar{x}$  ammissibile primale è ottima se e solo se esiste una soluzione  $\bar{y}$  ammissibile (e ottima) duale tale che:  $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$ .

Dimostrazione (**solo per primale in F.S.**)

C.S. seguono dal corollario 2, quindi dimostriamo solo le C.N. Quindi per ipotesi  $\bar{x}$  è ottima primale. Poiché il primale è in F.S. e ammette soluzione ottima, deve esistere una SBA ottima e una base  $B$  che soddisfa le condizioni algebriche di ottimo:  $\bar{c}_N^T \geq 0$ .

Quindi sappiamo che:

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (D) \quad \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \text{ libere} \end{cases}$$

$$x_B = A_B^{-1} b \geq 0; x_N = 0; \bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0; c^T \bar{x} = c_B^T A_B^{-1} b.$$

Dimostriamo che  $\bar{y}^T = c_B^T A_B^{-1}$  è una soluzione ammissibile del duale.

## Teorema **forte** della dualità

### Teorema forte della dualità

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una soluzione  $\bar{x}$  ammissibile primale è ottima se e solo se esiste una soluzione  $\bar{y}$  ammissibile (e ottima) duale tale che:  $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$ .

### Dimostrazione (**segue**)

Suddividiamo i vincoli duali  $y^T A \leq c^T$  in due gruppi:

$$\begin{cases} y^T A_B \leq c_B^T \\ y^T A_N \leq c_N^T \end{cases}$$

E sostituiamo  $\bar{y}^T = c_B^T A_B^{-1}$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} c_B^T A_B^{-1} A_B \leq c_B^T \\ c_B^T A_B^{-1} A_N \leq c_N^T \end{cases}$$

Il primo gruppo di vincoli è soddisfatto all'uguale, il secondo è soddisfatto perché  $B$  che soddisfa le condizioni algebriche di ottimo:  $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$ .

Quindi  $\bar{y}^T$  è ammissibile duale e di costo  $c_B^T A_B^{-1} b = c^T \bar{x}$ .

## Teorema **forte** della dualità

### Interpretazione del simplesso rivisto in chiave duale

In un problema primale in F.S., se la base  $B$  soddisfa le condizioni algebriche di ottimo, la matrice CARRY contiene sia la soluzione ottima primale  $x_B = \bar{b}$ ;  $x_N = 0$  che la soluzione ottima duale  $y^T = c_B^T A_B^{-1}$ .

Durante le varie iterazioni,  $\bar{b}$  rappresenta una soluzione ammissibile primale che diventa ottima solo nell'ultima iterazione,  $y$  rappresenta una soluzione duale che soddisfa la dualità forte e che diventa ammissibile solo nell'ultima iterazione (se esiste un costo ridotto fuori base negativo,  $y$  viola il corrispondente vincolo duale e quindi non è ammissibile duale).

Appena  $y$  diventa ammissibile duale,  $\bar{b}$  diventa ottima primale e  $\bar{z}$  rappresenta l'ottimo di entrambi i problemi.



## Esercizio 4

Primale

$$\begin{aligned} &\min x_1 + 2x_2 \\ &y_1 \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \end{cases} \\ &y_2 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z^* = 2$$

$B = \{x_1, x_2\}$

$$\bar{c}_3 = 0 + [-5 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = 0 + [-5 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \geq 0$$

Trovata soluzione ottima!

Duale

$$\begin{aligned} &\max 2y_1 + 4y_2 \\ &x_1 \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 1 \end{cases} \\ &x_2 \begin{cases} -y_2 \leq 2 \end{cases} \\ &x_3 \begin{cases} -y_1 \leq 0 \end{cases} \\ &x_4 \begin{cases} y_2 \leq 0 \\ y \text{ libere} \end{cases} \end{aligned}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

soluzione ottima duale

## Relazioni primale-duale

|                                     | <b>(P) con<br/>soluzione ottima</b> | <b>(P)<br/>illimitato</b> | <b>(P)<br/>inammissibile</b> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| <b>(D) con<br/>soluzione ottima</b> | SI<br>$c^T x^* = b^T y^*$           | NO                        | NO                           |
| <b>(D)<br/>illimitato</b>           | NO                                  | NO                        | SI                           |
| <b>(D)<br/>inammissibile</b>        | NO                                  | SI                        | SI                           |

## Esempio primale-duale inammissibili

Primale

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \leq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Duale

$$\begin{array}{ll} \max & y_1 - y_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 \text{ libera}; y_2 \text{ libera} \end{array} \right. \end{array}$$

## Esercizio di formulazione

**Problema:** Una signora esce di casa con  $x$  euro nella borsa. Ogni volta che incontra un mendicante gli consegna metà del denaro che ha in borsa più una certa somma  $z$  non inferiore ad un euro. Se dopo il terzo mendicante la signora resta con non meno di 2 euro nella borsa, quanto aveva al minimo nella borsa quando è uscita di casa? Formulare come problema di PL.

### Formulazione:

La signora esce di casa con  $x$  euro nella borsa.

Consegna  $\frac{x}{2} + z$  al primo mendicante, rimanendo con  $y = \frac{x}{2} - z$  euro.

Consegna  $\frac{y}{2} + z$  al secondo mendicante, rimanendo con  $w = \frac{y}{2} - z$  euro.

Consegna  $\frac{w}{2} + z$  al terzo mendicante, rimanendo con  $\frac{w}{2} - z \geq 2$  euro.

$$z \geq 1$$

$$\min x$$

## Esercizio di formulazione

**Problema:** Una signora esce di casa con  $x$  euro nella borsa. Ogni volta che incontra un mendicante gli consegna metà del denaro che ha in borsa più una certa somma  $z$  non inferiore ad un euro. Se dopo il terzo mendicante la signora resta con non meno di 2 euro nella borsa, quanto aveva al minimo nella borsa quando è uscita di casa? Formulare come problema di PL.

**Formulazione:**

$$\begin{cases} \min x \\ y = \frac{x}{2} - z \\ w = \frac{y}{2} - z \\ \frac{w}{2} - z \geq 2 \\ z \geq 1 \\ x, y, w, z \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{y}{2} - z = \frac{\frac{x}{2} - z}{2} - z = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}z \\ \min x \\ \begin{cases} \frac{\frac{x}{4} - \frac{3}{2}z}{2} - z \geq 2 \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{7}{4}z \geq 2 \\ z \geq 1 \\ x, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Esercizio di formulazione

**Problema.** Un allevatore dispone di un terreno e di un capitale di 60.000€ che vuole investire nel modo più redditizio. Dopo essersi informato sulle specie animali più adatte al terreno deve decidere fra diverse possibilità:

Allevare capre: una capra costa 1000 €, comprensivi dei costi di mantenimento. Una capra produce una quantità di latte al giorno che può essere venduta a 3 €. Ogni capra richiede circa 20 minuti di lavoro al giorno.

Allevare pecore: una pecora costa 1500 €, omnicomprendivi. Una pecora produce 10 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.

Allevare bufale: una bufala costa circa 6000 €, produce 20 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.

Allevare mucche: una mucca costa 20.000 €, produce 50 € di latte al giorno e richiede 1 ora di lavoro al giorno.

L'allevatore può dedicare ai suoi animali 8 ore di lavoro al giorno. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare la rendita giornaliera dell'allevamento, tenendo conto dei vincoli sul capitale da investire e sulla forza lavoro disponibile.

**Formulazione.** È un problema di **allocazione di risorse** con 4 prodotti e due risorse: capitale e ore di lavoro al giorno. Quindi la formulazione avrà 4 variabili:  $x_i$  = numero di animali di tipo  $i = c, p, b, m$  acquistati e due vincoli: **euro investiti**  $\leq 60000$  ; **ore di lavoro**  $\leq 8$ .

Funzione obiettivo:  $\max 3x_c + 10x_p + 20x_b + 50x_m$

## Esercizio di formulazione

**Problema.** Un allevatore dispone di un terreno e di un capitale di 60.000€ che vuole investire nel modo più redditizio. Dopo essersi informato sulle specie animali più adatte al terreno deve decidere fra diverse possibilità:

Allevare capre: una capra costa 1000 €, comprensivi dei costi di mantenimento. Una capra produce una quantità di latte al giorno che può essere venduta a 3 €. Ogni capra richiede circa 20 minuti di lavoro al giorno.

Allevare pecore: una pecora costa 1500 €, omnicomprendivi. Una pecora produce 10 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.

Allevare bufale: una bufala costa circa 6000 €, produce 20 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.

Allevare mucche: una mucca costa 20.000 €, produce 50 € di latte al giorno e richiede 1 ora di lavoro al giorno.

L'allevatore può dedicare ai suoi animali 8 ore di lavoro al giorno. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare la rendita giornaliera dell'allevamento, tenendo conto dei vincoli sul capitale da investire e sulla forza lavoro disponibile.

**Formulazione**

$$\begin{aligned} & \max 3x_c + 10x_p + 20x_b + 50x_m \\ & \left\{ \begin{array}{l} 1000x_c + 1500x_p + 6000x_b + 20000x_m \leq 60000 \\ \frac{1}{3}x_c + \frac{1}{2}x_p + \frac{1}{2}x_b + x_m \leq 8 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

## Condizioni di ortogonalità

Dalla dimostrazione del **Teorema debole della dualità**:

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una soluzione  $\bar{x}$  ammissibile primale e una soluzione  $\bar{y}$  ammissibile duale, si ha:  $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T A \bar{x} \geq \bar{y}^T b$ .

Dal **Teorema forte della dualità**:

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , per una coppia di soluzioni  $x^*$  ottima primale e  $y^*$  ottima duale, si ha:  $c^T x^* = y^{*T} b$ .

Quindi: per una coppia di soluzioni  $x^*$  ottima primale e  $y^*$  ottima duale, si ha:  $c^T x^* = y^{*T} A x^* = y^{*T} b$ , ovvero:

Vettore degli **scarti duali**  $\geq 0$

$$\begin{cases} (c^T - y^{*T} A) x^* = 0 \\ y^{*T} (A x^* - b) = 0 \end{cases}$$

Vettore degli **scarti primali**  $\geq 0$

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (D) \quad \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$



## Condizioni di **ortogonalità**

### **Teorema delle condizioni di ortogonalità:**

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una coppia di soluzioni  $x^*$  ammissibile primale e  $y^*$  ammissibile duale è ottima se e solo se il vettore degli scarti duali è **ortogonale** al vettore delle variabili primali e il vettore degli scarti primali è ortogonale al vettore delle variabili duali:

$$\begin{cases} (c^T - y^{*T} A) x^* = 0 \\ y^{*T} (A x^* - b) = 0 \end{cases}$$

### **Corollario:**

Data la coppia  $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$ , una coppia di soluzioni  $x^*$  **ammissibile** primale e  $y^*$  **ammissibile** duale è ottima se e solo se lo scarto di ogni vincolo è **complementare** alla variabile duale associata

$$\begin{cases} (c_j - y^{*T} A_j) x_j^* = 0 & j = 1, \dots, n \\ y_i^* (a_i^T x^* - b_i) = 0 & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

## Esercizio 5

Primale

$$\begin{aligned} &\min x_1 + 2x_2 \\ &y_1 \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È ottima? **NO**

Duale

$$\begin{aligned} &\max y_1 + 4y_2 \\ &x_1 \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq 2 \\ -y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y \text{ libere} \end{cases} \end{aligned}$$

**NON amm.**

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} (1 - y_1 - 2y_2)x_1 = 0 \\ (2 + y_2)x_2 = 0 \\ (y_1)x_3 = 0 \\ (-y_2)x_4 = 0 \\ (x_1 - x_3 - 1)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 + x_4 - 4)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - y_1 - 2y_2)\mathbf{2} = 0 \\ (2 + y_2)\mathbf{0} = 0 \\ (y_1)\mathbf{1} = 0 \\ (-y_2)\mathbf{0} = 0 \\ (\mathbf{2} - \mathbf{1} - 1)y_1 = 0 \\ (\mathbf{4} - \mathbf{0} + \mathbf{0} - 4)y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

## Esercizio 5

Primale

$$\begin{aligned} &\min x_1 + 2x_2 \\ &y_1 \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Duale

$$\begin{aligned} &\max y_1 + 4y_2 \\ &\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq 2 \\ -y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y \text{ libere} \end{cases} \end{aligned}$$

È ottima? **SI**

Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} (1 - y_1 - 2y_2)x_1 = 0 \\ (2 + y_2)x_2 = 0 \\ (y_1)x_3 = 0 \\ (-y_2)x_4 = 0 \\ (x_1 - x_3 - 1)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 + x_4 - 4)y_2 = 0 \end{cases}$$

Esiste sol. amm. con  $x_4 = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \mathbf{1} - \mathbf{0})x_1 = 0 \\ (2 + \mathbf{0})x_2 = 0 \\ (\mathbf{1})x_3 = 0 \\ (-\mathbf{0})x_4 = 0 \\ (x_1 - x_3 - 1)\mathbf{1} = 0 \\ (2x_1 - x_2 + x_4 - 4)\mathbf{0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ? \end{pmatrix}$$

## Esercizio 6

**Problema.** Una fabbrica di cinghie di trasmissione per autoveicoli realizza tre modelli di cinghia: A (lunghezza 60 cm, profitto dalla vendita 7 €), B (70 cm, profitto 10 €) e C (110 cm, profitto 16 €). Per realizzare un cm di cinghia si consumano 10 gr di gomma speciale ad alta resistenza. Inoltre, sono necessari 5 minuti di lavoro di un operaio per realizzare una cinghia di modello A, 8 minuti per il modello B e 12 minuti per il modello C. L'azienda dispone di due operai che lavorano, ciascuno, 8 ore al giorno.

1. Sapendo che in magazzino sono disponibili solo 90 kg di gomma speciale ad alta resistenza, formulare come problema di PL il problema di pianificare la produzione giornaliera di massimo profitto.
2. Una soluzione ammissibile consiste nel produrre solo 80 cinghie di tipo C. Dimostrare o confutare l'ottimalità di questa soluzione facendo uso delle condizioni di ortogonalità.

**Formulazione.** Si richiede di decidere *quanto* produrre, mentre il *come* è dato.  $\Rightarrow$  provo a formularlo come problema di **allocazione di risorse**.

Variabili:  $x_i$  = numero di cinghie prodotte  $i = A, B, C$ . Vincoli: risorse consumate (gomma, manodopera).

$$\begin{array}{l} \text{gomma} \\ \text{minuti} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \max 7x_A + 10x_B + 16x_C \\ 600x_A + 700x_B + 1100x_C \leq 90000 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

## Esercizio 6

### Problema.

2. Una soluzione ammissibile consiste nel produrre **solo 80 cinghie di tipo C**. Dimostrare o confutare l'ottimalità di questa soluzione facendo uso delle condizioni di ortogonalità.

$$\begin{array}{ll}
 \max & 7x_A + 10x_B + 16x_C \\
 y_1 = 0 & \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{cases} < \\
 y_2 ? & =
 \end{array}
 \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow = \begin{array}{ll}
 \min & 900y_1 + 960y_2 \\
 & \begin{cases} 6y_1 + 5y_2 \geq 7 \\ 7y_1 + 8y_2 \geq 10 \\ 11y_1 + 12y_2 \geq 16 \\ y \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

È ottima? **NO**

### Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} (6y_1 + 5y_2 - 7)x_A = 0 \\ (7y_1 + 8y_2 - 10)x_B = 0 \\ (11y_1 + 12y_2 - 16)x_C = 0 \\ (6x_A + 7x_B + 11x_C - 900)y_1 = 0 \\ (5x_A + 8x_B + 12x_C - 960)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \begin{cases} 11y_1 + 12y_2 = 16 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = \frac{4}{3} \\
 \longrightarrow \begin{cases} 11y_1 + 12y_2 = 16 \\ y_1 = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix} \uparrow \text{NON amm.}$$

## Esercizio 6

### Problema.

2. Una soluzione ammissibile consiste nel produrre **solo 80 cinghie di tipo C**. Dimostrare o confutare l'ottimalità di questa soluzione facendo uso delle condizioni di ortogonalità.

$$\begin{aligned}
 & \max 7x_A + 10x_B + 16x_C \\
 = & \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ok} \\
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \min 900y_1 + 960y_2 \\
 = & \begin{cases} 6y_1 + 5y_2 \geq 7 \\ 7y_1 + 8y_2 \geq 10 \\ 11y_1 + 12y_2 \geq 16 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ok}
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \neq 0 \\ ? \\ \neq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6y_1 + 5y_2 \geq 7 \\ 7y_1 + 8y_2 \geq 10 \\ 11y_1 + 12y_2 \geq 16 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\exists$  sol. ottima così? **Sì**

**Condizioni di ortogonalità**

$$\begin{cases} (6y_1 + 5y_2 - 7)x_A = 0 \\ (7y_1 + 8y_2 - 10)x_B = 0 \\ (11y_1 + 12y_2 - 16)x_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6y_1 + 5y_2 = 7 \\ 11y_1 + 12y_2 = 16 \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} 4/17 \\ 19/17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (6x_A + 7x_B + 11x_C - 900)y_1 = 0 \\ (5x_A + 8x_B + 12x_C - 960)y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x_A + 11x_C = 900 \\ 5x_A + 12x_C = 960 \end{cases}$$

$$x_B = 0$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 240/17 \\ 0 \\ 1260/17 \end{pmatrix}$$

## Esercizio 7

**Problema.** ArcWeb è una piccola azienda di Terni specializzata nella produzione di siti web per studi di architettura e nei prossimi giorni deve consegnare 12 siti. La produzione avviene semplicemente personalizzando un sito standard per soddisfare le esigenze di ciascun cliente.

Per produrre un sito web è necessario eseguire tre attività, le prime due delle quali possono essere svolte in parallelo: (A) elaborazione dei testi, (B) elaborazione e disposizione delle immagini. Completate A e B segue la terza attività (C) di test. Per le attività A e B ArcWeb dispone di tre grafici (Davide, Emilia e Federico) che possono lavorare indifferentemente sulle attività A o B ma con diversa efficienza. **Davide può eseguire A alla velocità di 3 siti al giorno oppure B a 2 s/g, Emilia può eseguire A alla velocità di 5 s/g oppure B a 2 s/g, Federico può eseguire A alla velocità di 1 s/g oppure B a 4 s/g.**

L'attività (C) di test viene effettuata da un tecnico specializzato esterno alla velocità di 3 s/g, che tuttavia lavora a pacchetti di 12 siti per volta, per cui inizia a lavorare solo dopo che ArcWeb ha completato le attività A e B relative ai 12 siti.

Formulare (senza risolverlo) il problema di PL di determinare il **minimo numero di giorni necessari per arrivare al termine delle attività A, B e C** per tutti i siti.

## Esercizio 7

**Formulazione.** Il problema è sostanzialmente un problema di assegnazione di compiti (12 attività  $A$  e 12  $B$ , una per sito) a grafici ( $D, E, F$ ), quindi è utile introdurre 6 variabili  $x_{ij}$ ,  $i = A, B$  e  $j = D, E, F$ , ciascuna delle quali esprime (ad esempio) il numero di siti lavorati da  $j$  per l'attività  $i$ , che dovranno essere complessivamente 12 per attività. Una ulteriore variabile  $t$  può essere associata al giorno di termine delle attività  $A$  e  $B$ , pari al massimo tra il termine di  $D, E, F$ , quando può iniziare  $C$  che richiede complessivamente 4 giorni. Con queste scelte la formulazione è quindi:

$$\begin{cases} \min t + 4 \\ x_{AD} + x_{AE} + x_{AF} = 12 \\ x_{BD} + x_{BE} + x_{BF} = 12 \\ \frac{1}{3}x_{AD} + \frac{1}{2}x_{BD} \leq t \\ \frac{1}{5}x_{AE} + \frac{1}{2}x_{BE} \leq t \\ x_{AF} + \frac{1}{4}x_{BF} \leq t \\ x, t \geq 0 \end{cases}$$



## Analisi di sensitività

**Scopo:** studiare entro quali margini di variazioni dei parametri del problema la base ottima trovata rimane tale.

**Base ottima:**  $B$ , quindi

$B$  è ammissibile:  $x_B^* = A_B^{-1}b \geq 0$ ;  $x_N^* = 0$ ;

$B$  è ottima  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$ ;  $z^* = c_B^T A_B^{-1} b$ .

**Variazione dei termini noti:** il vettore  $b$  diventa  $\tilde{b} = b + \delta$ . Come cambia l'ammissibilità e/o ottimalità della base  $B$ ?

$B$  rimane ammissibile solo se  $A_B^{-1}\tilde{b} \geq 0 \Rightarrow A_B^{-1}(b + \delta) \geq 0 \Rightarrow A_B^{-1}\delta \geq -\bar{b}$ .

$B$  rimane ottima (se ammissibile) in quanto  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$  non dipende da  $b$ .

La SBA cambia e diventa  $x_B^* = A_B^{-1}(b + \delta) = \bar{b} + A_B^{-1}\delta$

La funzione obiettivo cambia e diventa  $c_B^T A_B^{-1}(b + \delta) = z^* + c_B^T A_B^{-1}\delta$ .

Ricordando che  $y^T = c_B^T A_B^{-1}$  è la soluzione ottima duale, il nuovo ottimo offre una nuova interpretazione delle variabili duali all'ottimo, come **prezzi ombra** o **valori marginali** delle risorse. Infatti, in un problema di allocazione di risorse,  $y_i$  indica la variazione dell'ottimo associata a un incremento unitario di  $b_i$ , quindi è il prezzo massimo che conviene pagare per aumentare di 1 la risorsa  $i$ -esima.

## Analisi di sensitività - Esempio

**Esercizio 6:**  $\max 7x_A + 10x_B + 16x_C$

$$\begin{array}{l} \text{gomma} \\ \text{minuti} \end{array} \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 240/17 \\ 0 \\ 1260/17 \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 4/17 \\ 19/17 \end{pmatrix}$$

**Problema:** Quanto possiamo guadagnare da 10 minuti di straordinario di un operaio?

**Soluzione:** Ci chiediamo quanto convenga una perturbazione di 10 minuti del secondo termine noto.

$$\begin{array}{l} \max 7x_A + 10x_B + 16x_C \\ \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 + 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 6x_A + 11x_C = 900 \\ 5x_A + 12x_C = 970 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}^* = \begin{pmatrix} 130/17 \\ 0 \\ 1320/17 \end{pmatrix} \geq 0$$

La base è ancora ammissibile, e quindi ottima.

L'ottimo è aumentato di  $10y_2^* = 10 \frac{19}{17} = \frac{190}{17}$

**Nota:** non disponiamo della matrice  $A_B^{-1}$  per cui risolviamo direttamente il sistema

$$A_B x_B = b + \delta$$

## Analisi di sensitività - Esempio

**Esercizio 6:**  $\max 7x_A + 10x_B + 16x_C$

$$\begin{array}{l} \text{gomma} \\ \text{minuti} \end{array} \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 240/17 \\ 0 \\ 1260/17 \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 4/17 \\ 19/17 \end{pmatrix}$$

**Problema:** Quanto possiamo guadagnare da **un'ora** di straordinario di un operaio?

**Soluzione:** Ci chiediamo quanto convenga una perturbazione di **60 minuti** del secondo termine noto.

$$\begin{array}{l} \max 7x_A + 10x_B + 16x_C \\ \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 + 60 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 6x_A + 11x_C = 900 \\ 5x_A + 12x_C = 1020 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}^* = \begin{pmatrix} -420/17 \\ 0 \\ 1620/17 \end{pmatrix}$$

La base non è più **ammissibile**, e quindi non può essere ottima. le formule viste non valgono più.

## Esercizio 8

Una fabbrica di cinghie di trasmissione per autoveicoli realizza tre modelli di cinghia: A (lunghezza 60 cm), B (70 cm) e C (110 cm). Per realizzare le cinghie si utilizzano due macchine M e P. La macchina M è in grado di produrre contemporaneamente in un'ora di lavoro 45 cinghie così suddivise: 10 cinghie A, 20 B e 15 C. La macchina P è in grado di produrre contemporaneamente in un'ora di lavoro 37 cinghie così suddivise: 7 cinghie A, 10 B e 20 C. Il costo di un'ora di lavoro di M è di 120 €, mentre un'ora di lavoro di P costa 100 €. L'impianto che ospita le due macchine deve produrre almeno 300 cinghie A, 600 B e 500 C al giorno.

1. Formulare come problema di PL il problema di realizzare le cinghie richieste a costo minimo.

**Formulazione.** Si richiede di decidere *come* produrre, mentre il *quanto* è dato.  $\Rightarrow$  provo a formularlo come problema di **miscelazione**.

Variabili:  $x_i$  = numero ore di lavoro della macchina  $i = M, P$ . Vincoli: quantità da produrre (A,B,C).

$$\begin{array}{ll} \min & 120x_M + 100x_P \\ A & \left\{ \begin{array}{l} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 \end{array} \right. \\ B & \\ C & \\ & x \geq 0 \end{array}$$

## Esercizio 8

2. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si producono più di 300 cinghie A e che  $x_M$  e  $x_P$  sono entrambe diverse da zero.

$$\begin{aligned} & \min 120x_M + 100x_P \\ & A \begin{cases} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max 300y_A + 600y_B + 500y_C \\ & M \begin{cases} 10y_A + 20y_B + 15y_C \leq 120 \\ 7y_A + 10y_B + 20y_C \leq 100 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} y_A = 0 \\ (20x_M + 10x_P - 600)y_B = 0? \\ (15x_M + 20x_P - 500)y_C = 0? \\ 10y_A + 20y_B + 15y_C = 120 \\ 7y_A + 10y_B + 20y_C = 100 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 18/5 \\ 16/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x_M + 10x_P = 600 \\ 15x_M + 20x_P = 500 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 28 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$x, y$  ammissibili, quindi entrambe ottime

## Esercizio 8

3. La fabbrica riceve un ordine urgente di **50** cinghie di tipo C, al prezzo di 10 euro al pezzo. Convienne accettare l'ordine?

$$\begin{array}{l} \min 120x_M + 100x_P \\ A \left\{ \begin{array}{l} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 + \mathbf{50} \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 18/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}$$

A seguito della perturbazione, l'ottimo cambia di  $c_B^T A_B^{-1} \delta$ ,

dove  $c_B^T A_B^{-1} = y^{*T}$  e  $\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{50} \end{pmatrix}$ .

Quindi l'extra costo di produzione è  $50 \frac{16}{5} = 160$  euro.

Poiché l'azienda incassa 500 euro dall'ordine ricevuto, realizza un extra profitto di  $500 - 160 = 340$  euro. Potenzialmente l'offerta è conveniente, si deve però verificare se la base è ancora ammissibile.

## Esercizio 8

3. La fabbrica riceve un ordine urgente di **50** cinghie di tipo C, al prezzo di 10 euro al pezzo. Convieni accettare l'ordine?

$$\begin{array}{l} \min 120x_M + 100x_P \\ A \left\{ \begin{array}{l} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 + 50 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 18/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}$$

In base sono presenti  $x_M, x_P$  e la variabile di scarto del primo vincolo. Per trovare  $x_M, x_P$  è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 20x_M + 10x_P = 600 \\ 15x_M + 20x_P = 550 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 26 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Poiché  $x$  è ancora ammissibile, conviene accettare il nuovo ordine.

## Analisi di sensitività

**Scopo:** studiare entro quali margini di variazioni dei parametri del problema la base ottima trovata rimane tale.

**Base ottima:**  $B$ , quindi

$B$  è ammissibile:  $x_B^* = A_B^{-1}b \geq 0$ ;  $x_N^* = 0$ ;

$B$  è ottima  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$ ;  $z^* = c_B^T A_B^{-1} b$ .

**Variazione di un costo fuori base:**  $c_j, j \in N$  diventa  $\tilde{c}_j = c_j + \delta$ . Come cambia l'ammissibilità e/o ottimalità della base  $B$ ?

$B$  rimane sicuramente ammissibile in quanto l'ammissibilità non dipende da  $c_j$ .

La SBA e il valore della funzione obiettivo  $c_B^T A_B^{-1} b$  rimangono uguali.

$B$  rimane ottima solo se il nuovo  $\bar{\bar{c}}_j = \tilde{c}_j - c_B^T A_B^{-1} A_j \geq 0$  ovvero se  $\delta + \bar{c}_j \geq 0$ , cioè se la perturbazione  $\delta$  è più piccola in valore assoluto del vecchio costo ridotto  $\bar{c}_j$  (prima della perturbazione).

Quindi il costo ridotto di una variabile fuori base ci dice quanto la soluzione è robusta a riduzioni di costo di quella variabile.



## Esercizio 9

Un agricoltore biologico deve concimare il proprio terreno con almeno 60 gr di Azoto (N) e 120 gr di Fosforo (P) per  $m^2$ . Allo scopo utilizza composti naturali ricchi di queste sostanze, quali guano (N 10%, P 20%, costo 20€/kg), farina di ossa (N 0% P 18%, costo 8€/kg), pennone (N 10% P 4%, costo 5€/kg) e cenere di legna (N 1%, P 10%, costo 2€/kg).

1. Formulare come PL il problema di concimare il terreno al costo minimo;
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si utilizzano solo pennone e cenere di legna.
3. Vi propongono la farina di ossa scontata del 50%. Conviene acquistarla?

**1. Formulazione.** Si richiede di decidere *come* produrre, mentre il *quanto* è dato.  $\Rightarrow$  provo a formularlo come problema di **miscelezione**.

Variabili:  $x_i$  = Kg ingr.  $i = G, F, P, C$ .  
Vincoli: contenuto N, P nella miscela.

$$\begin{array}{ll} \min & 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C \\ N & \left\{ \begin{array}{l} 100x_G + 100x_P + 10x_C \geq 60 \\ 200x_G + 180x_F + 40x_P + 100x_C \geq 120 \end{array} \right. \\ P & \\ & x \geq 0 \end{array}$$

## Esercizio 9

- Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si utilizzano solo pennone e cenere di legna.
- Vi propongono la farina di ossa scontata del 50%. Conviene acquistarla?

$$\begin{aligned}
 & \min 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C \\
 N & \begin{cases} 10x_G + 10x_P + 1x_C \geq 6 \\ 20x_G + 18x_F + 4x_P + 10x_C \geq 12 \\ x \geq 0 \end{cases} \\
 P & \begin{cases} 10y_N + 20y_P \leq 20 \\ 18y_P \leq 8 \\ 10y_N + 4y_P \leq 5 \\ 1y_N + 10y_P \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} 10x_P + 1x_C = 6 \\ 4x_P + 10x_C = 12 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ammissibile primale,  
quindi  $x, y$  ottime

$$\begin{cases} 10y_N + 4y_P = 5 \\ 1y_N + 10y_P = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 7/16 \\ 5/32 \end{pmatrix} \text{ è ammissibile duale,}$$

## Esercizio 9

3. Vi propongono la farina di ossa scontata del 50%. Convieni acquistarla?

$$\begin{array}{l} \min 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C \\ N \left\{ \begin{array}{l} 10x_G + 10x_P + 1x_C \geq 6 \\ 20x_G + 18x_F + 4x_P + 10x_C \geq 12 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad y = \begin{pmatrix} 7/16 \\ 5/32 \end{pmatrix}$$

### Analisi di sensitività

Si chiede se una perturbazione  $\delta = -4$  sul costo di  $x_F$  lascia la base ottima o meno. Per rispondere è necessario calcolare il costo ridotto di  $x_F$

$$\bar{c}_F = c_F - y^T A_F = 8 - (7/16 \quad 5/32) \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = 83/16 = 5,1875$$

Poiché il costo ridotto è maggiore di 4, cioè  $\delta + \bar{c}_F \geq 0$ , la base resta ottima, quindi non conviene acquistare la farina di ossa al prezzo scontato.

## Interpretazione economica del duale

La teoria della dualità si presta bene per modellare rapporti economici cliente-fornitore, ovvero se il problema primale è il problema del cliente che desidera pianificare gli acquisti per minimizzare il costo dei propri acquisti, il duale può essere interpretato come il problema del fornitore che desidera ottenere il massimo ricavo dalle vendite.

### ESEMPIO

Si consideri il problema dell'esercizio 9 e si assuma che un nuovo produttore di concimi biologici voglia entrare nel mercato con due nuovi concimi bio: Azoto puro e Fosforo puro. Con una strategia molto aggressiva vuole convincere l'agricoltore ad acquistare i suoi concimi e al contempo vuole massimizzare il ricavo delle vendite.

Quale problema deve risolvere?

## Interpretazione economica del duale

**ESEMPIO** Quale problema deve risolvere?

Variabili:  $y_N$  = prezzo di vendita di 1 gr di Azoto, in euro

$y_P$  = prezzo di vendita di 1 gr di Fosforo, in euro

Vincoli:

Il produttore deve dimostrare all'agricoltore che nessuno dei composti naturali in commercio è conveniente rispetto ai suoi prodotti, ovvero che acquistando lo stesso contenuto di azoto e fosforo di ciascun composto in commercio non si spende più che acquistando il composto della concorrenza.

guano (N 10%, P 20%, costo 20€/kg), farina di ossa (N 0% P 18%, costo 8€/kg), pennone (N 10% P 4%, costo 5€/kg) e cenere di legna (N 1%, P 10%, costo 2€/kg).

Guano:  $100 y_N + 200 y_P \leq 20$

Farina:  $180 y_P \leq 8$

Pennone:  $100 y_N + 40 y_P \leq 5$

Cenere:  $10 y_N + 100 y_P \leq 2$

$y \geq 0$

Funzione obiettivo: massimizzazione del ricavo (concimare il proprio terreno con almeno 60 gr di Azoto (N) e 120 gr di Fosforo (P) per  $m^2$ )

$\max 60y_N + 120y_P$

## Interpretazione economica del duale

Problema del produttore

$$\begin{array}{l} \max \quad 60y_N + 120y_P \\ G \quad \left\{ \begin{array}{l} 100y_N + 200y_P \leq 20 \\ 180y_P \leq 8 \\ 100y_N + 40y_P \leq 5 \\ 10y_N + 100y_P \leq 2 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \\ F \\ P \\ C \end{array}$$

Problema dell'agricoltore

$$\begin{array}{l} \min \quad 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C \\ N \quad \left\{ \begin{array}{l} 100x_G + 100x_P + 10x_C \geq 60 \\ 200x_G + 180x_F + 40x_P + 100x_C \geq 120 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \\ P \end{array}$$