

Elementi di Teoria dei Grafi

Argomenti lezione:

- Esercizio 1 Ford-Fulkerson
- Esercizio 2 Floyd-Warshall
- Esercizio 3 Dijkstra (Percorso Minimo)
- Esercizio 4 Prim-Dijkstra

Testo Esercizio 1 Ford-Fulkerson

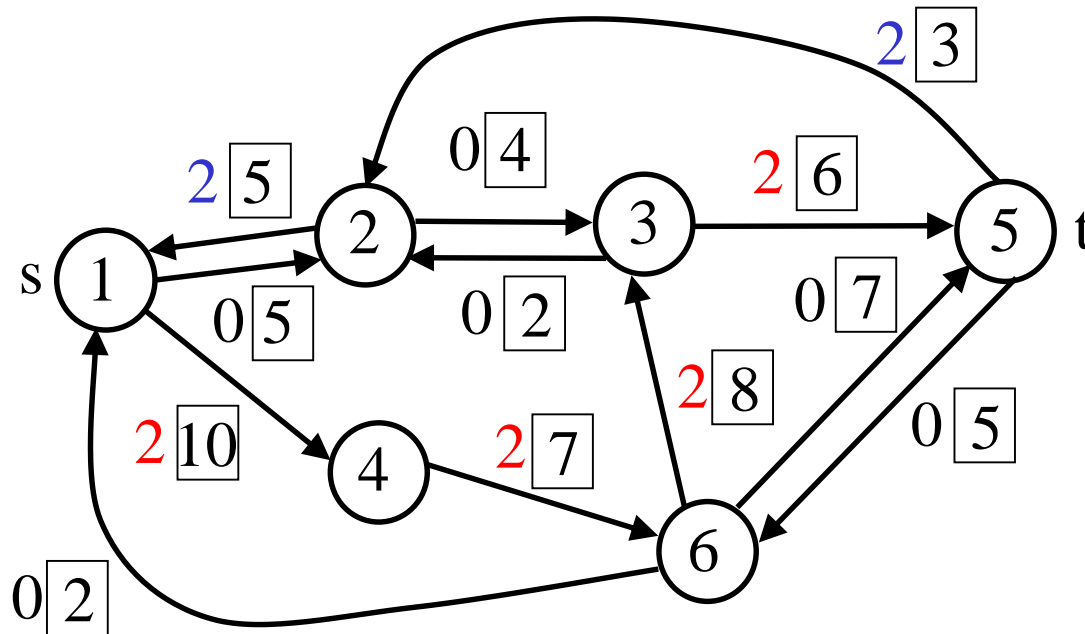
In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 6 nodi 1...6. Per ogni arco sono dati il valore della sua capacità massima e un flusso iniziale.

1. Partendo dalla distribuzione di flusso in tabella, si determini una soluzione ottima al problema di massimo flusso dal nodo 1 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Evidenziare la soluzione ottima trovata.
2. Individuare un taglio di capacità minima tra i nodi 1 e 5. Evidenziare il taglio ottimo trovato.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo nei tre casi seguenti:
 - a. la capacità dell'arco (3,2) è ridotta a zero
 - b. la capacità dell'arco (2,3) è incrementata di 10 unità
 - c. la capacità dell'arco (6,1) è ridotta a zero

Archi	1, 2	2, 1	1, 4	6, 1	2, 3	3, 2	5, 2	3, 5	6, 3	4, 6	5, 6	6,5
Flussi	0	2	2	0	0	0	2	2	2	2	0	0
Capacità	5	5	10	2	4	2	3	6	8	7	5	7

Soluzione Esercizio 1 Ford-Fulkerson (1)

Archi	1, 2	2, 1	1, 4	6, 1	2, 3	3, 2	5, 2	3, 5	6, 3	4, 6	5, 6	6,5
Flussi	0	2	2	0	0	0	2	2	2	2	0	0
Capacità	5	5	10	2	4	2	3	6	8	7	5	7



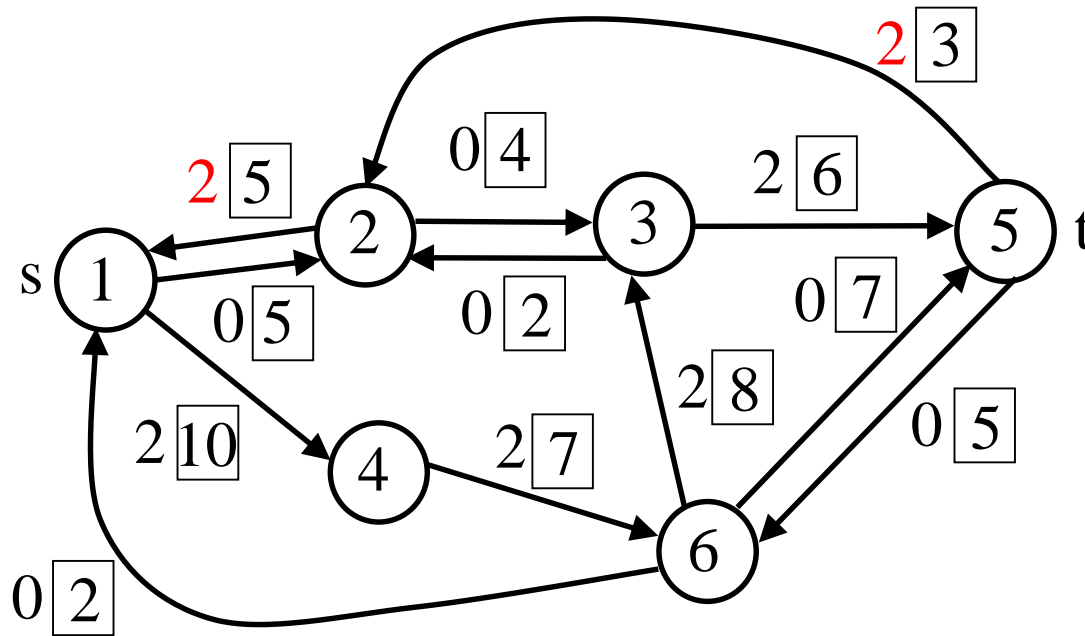
Il flusso iniziale
da s a t è pari a 0

1-4-6-3-5 $\delta = 2$ $v = 2$

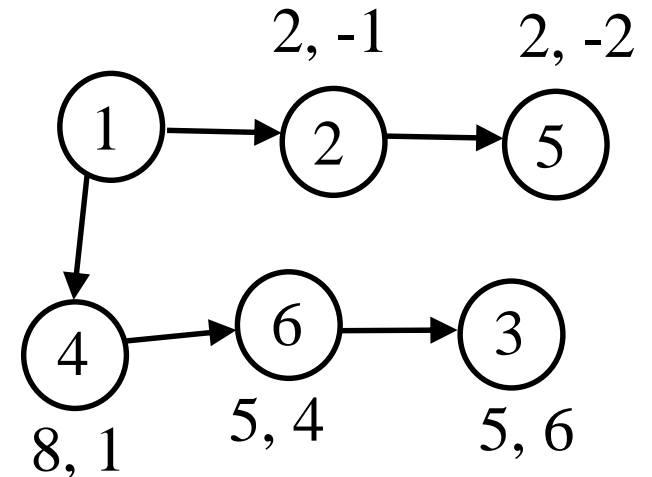
5-2-1 $\delta = 2$ $v = 0$

Soluzione Esercizio 1 Ford-Fulkerson (2)

1. Partendo dalla soluzione data in tabella, si determini una soluzione ottima al problema di massimo flusso dal nodo 1 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Evidenziare la soluzione ottima trovata.

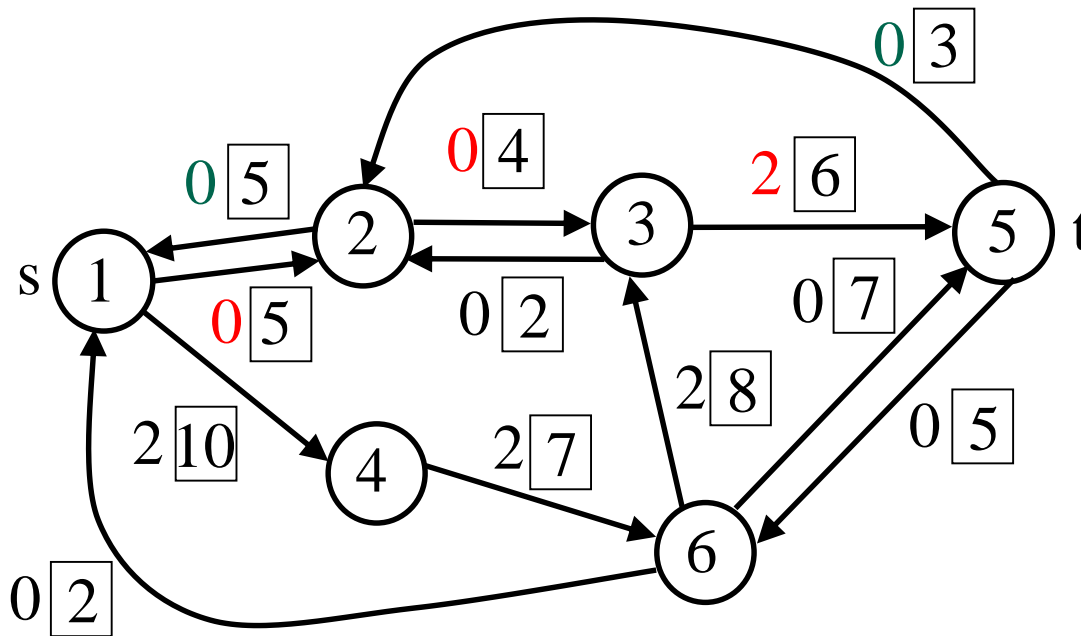


1-2-5 $\delta = 2$ $v = 2$

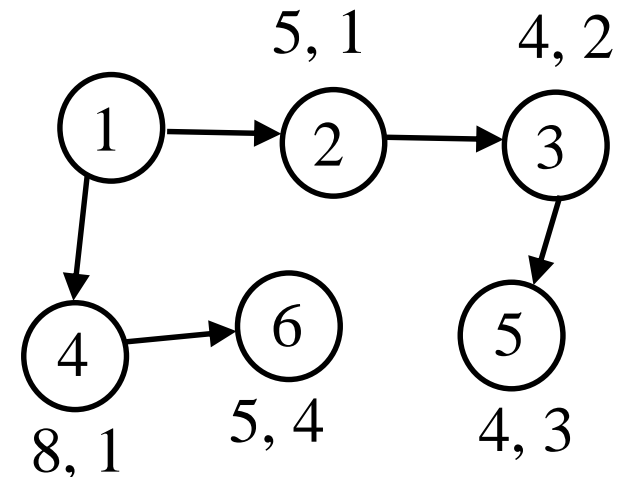


Soluzione Esercizio 1 Ford-Fulkerson (3)

1. Partendo dalla soluzione data in tabella, si determini una soluzione ottima al problema di massimo flusso dal nodo 1 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Evidenziare la soluzione ottima trovata.

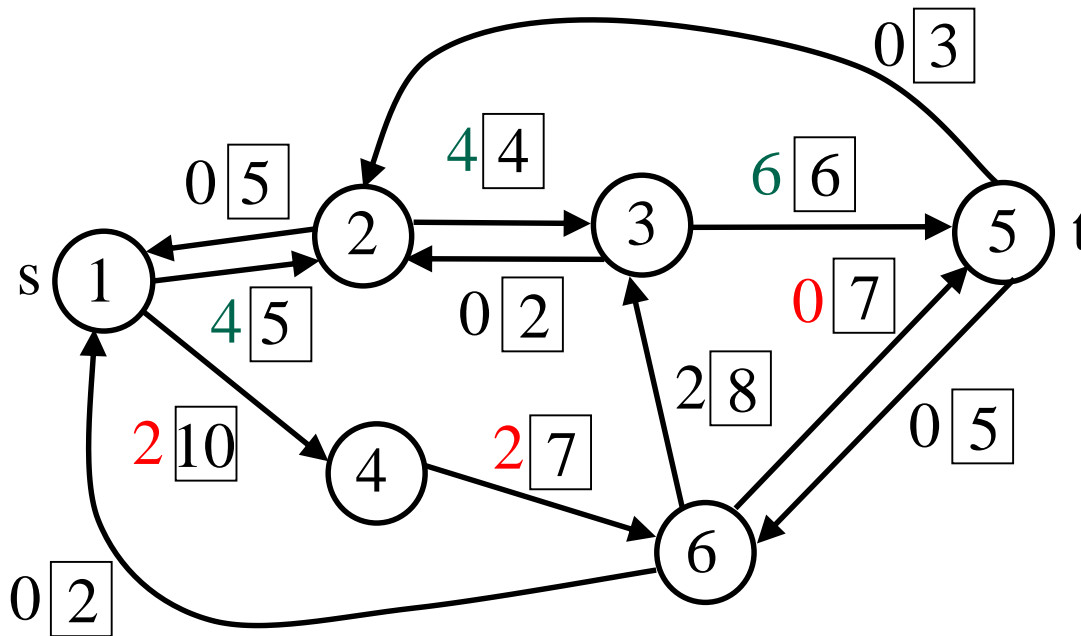


1-2-3-5 $\delta = 4$ $v = 6$

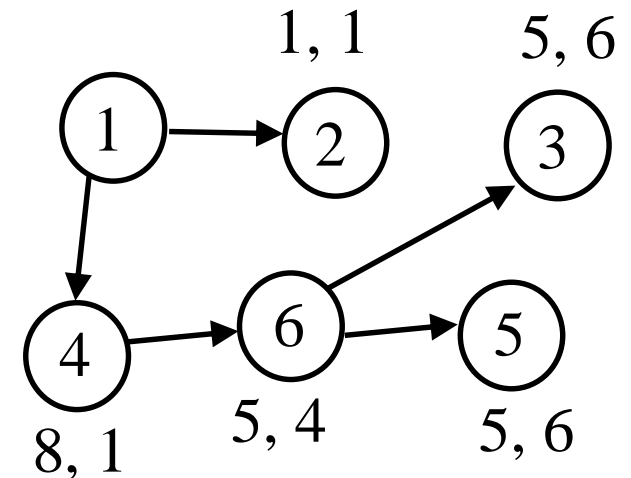


Soluzione Esercizio 1 Ford-Fulkerson (4)

1. Partendo dalla soluzione data in tabella, si determini una soluzione ottima al problema di massimo flusso dal nodo 1 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Evidenziare la soluzione ottima trovata.

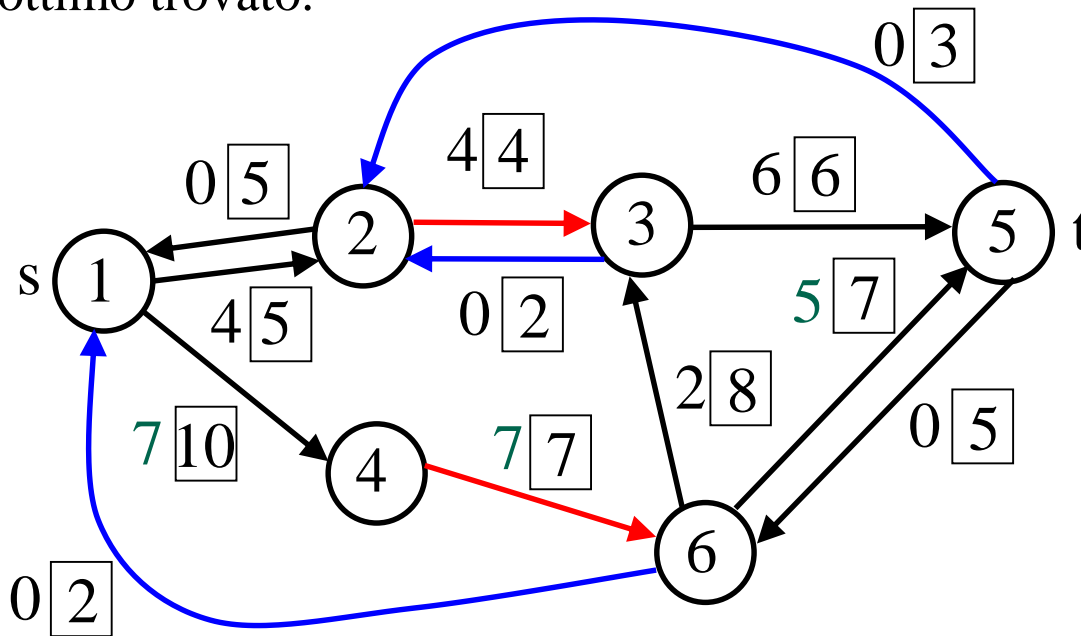


1-4-6-5 $\delta = 5$ $v = 11$



Soluzione Esercizio 1 Ford-Fulkerson (5)

1. Partendo dalla soluzione data in tabella, si determini una soluzione ottima al problema di massimo flusso dal nodo 1 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Evidenziare la soluzione ottima trovata.
2. Individuare un taglio di capacità minima tra i nodi 1 e 5. Evidenziare il taglio ottimo trovato.

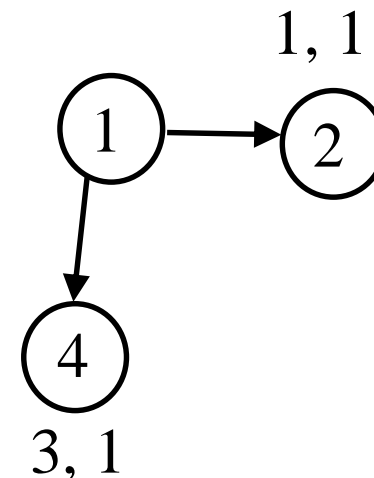


$$v = 11$$

$$S = 1, 2, 4$$

$$T = S/N = 3, 6, 5$$

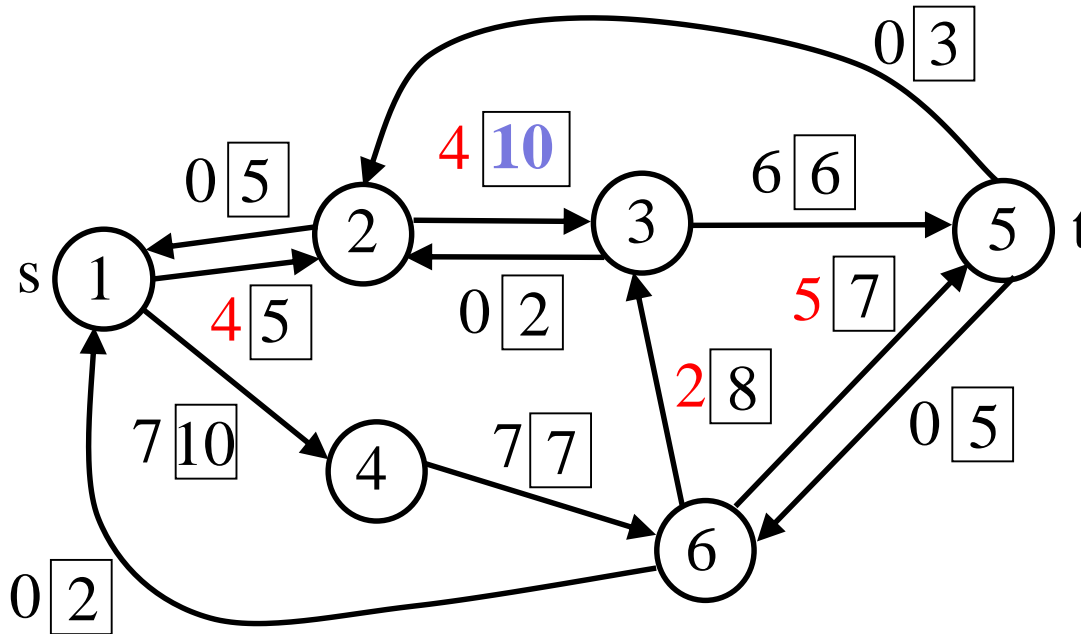
$$\text{Taglio} = 4 + 7$$



Soluzione Esercizio 1 Ford-Fulkerson (6)

3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo nei tre casi seguenti:

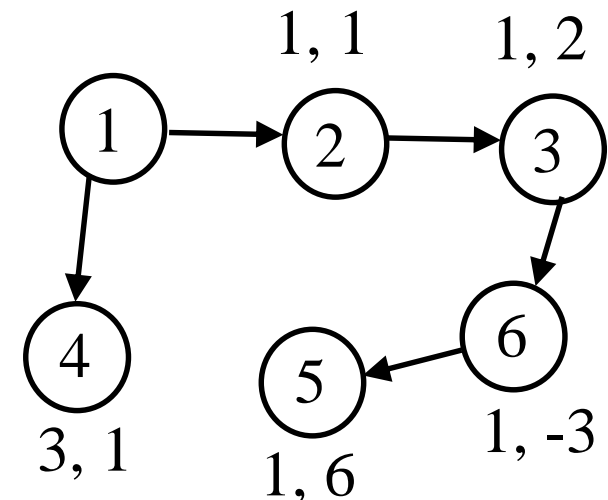
- la capacità dell'arco (3,2) è ridotta a zero
- la capacità dell'arco (2,3) è incrementata di 10 unità
- la capacità dell'arco (6,1) è ridotta a zero



3a. Soluzione invariata

3b. Nuovo cammino:

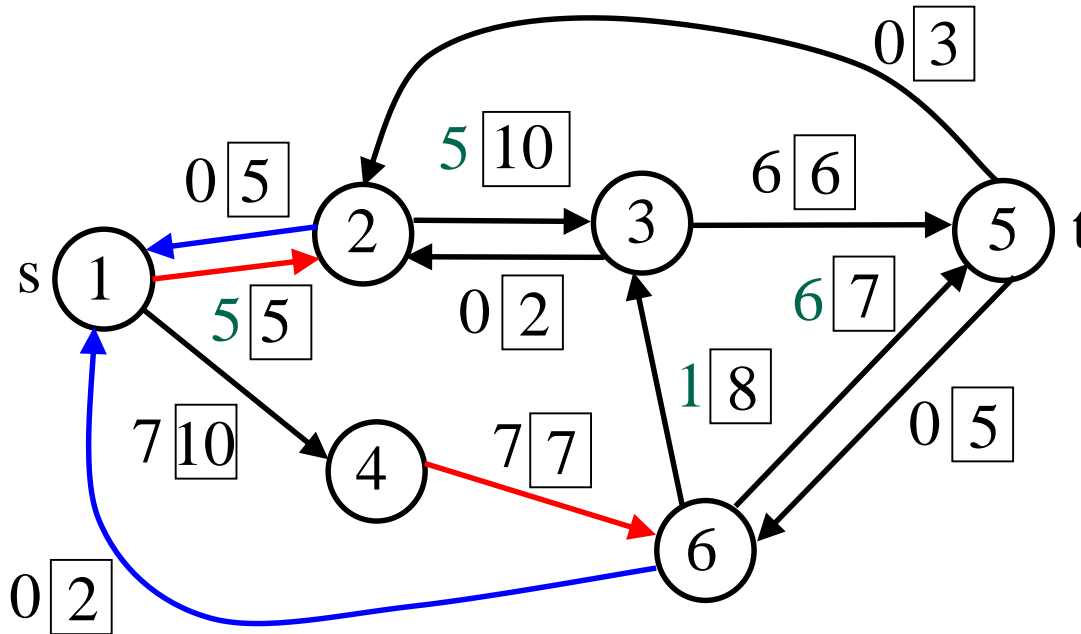
1-2-3-6-5 $\delta = 1$ $v = 12$



Soluzione Esercizio 1 Ford-Fulkerson (7)

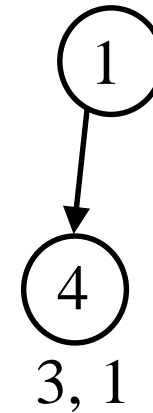
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo nei tre casi seguenti:

- a. la capacità dell'arco (3,2) è ridotta a zero
- b. la capacità dell'arco (2,3) è incrementata di 10 unità
- c. la capacità dell'arco (6,1) è ridotta a zero



3a. Soluzione invariata.

3b. $v = 12$ Taglio = 12.



$S=1,4$

$T=2,3,5,6$

Taglio = 5+7

3c. Soluzione invariata.

Testo Esercizio 2 Floyd-Warshall

State applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall ad un digrafo con 5 nodi, A...E. Alla fine del passo 2 ottenete le matrici in figura (quella di sinistra indica i percorsi orientati minimi, quella di destra i predecessori).

1. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo, aggiornando entrambe le matrici ad ogni passo dell'esecuzione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.
2. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo E al nodo B.
3. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo A al nodo E.
4. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo E al nodo C.
5. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo se l'elemento in posizione (C, B) = -11. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

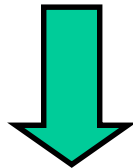
passo 2	A	B	C	D	E
A	0	20	15	inf	14
B	inf	0	10	inf	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	inf	12	0	2
E	inf	inf	inf	7	0

passo 2	A	B	C	D	E
A	A	A	A	D	A
B	A	B	B	D	B
C	A	C	C	C	B
D	A	B	D	D	D
E	A	B	C	E	E

Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (1)

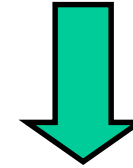
1. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo, aggiornando entrambe le matrici ad ogni passo dell'esecuzione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

passo 2	A	B	C	D	E
A	0	20	15	inf	14
B	inf	0	10	inf	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	inf	12	0	2
E	inf	inf	inf	7	0



passo 3	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	inf	inf	7	0

passo 2	A	B	C	D	E
A	A	A	A	D	A
B	A	B	B	D	B
C	A	C	C	C	B
D	A	B	D	D	D
E	A	B	C	E	E

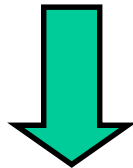


passo 3	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	B	C	E	E

Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (2)

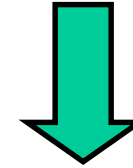
1. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo, aggiornando entrambe le matrici ad ogni passo dell'esecuzione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

passo 3	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	inf	inf	7	0



passo 4	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 3	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	B	C	E	E

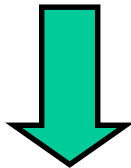


passo 4	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (3)

1. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo, aggiornando entrambe le matrici ad ogni passo dell'esecuzione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

passo 4	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0



passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 4	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E



passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

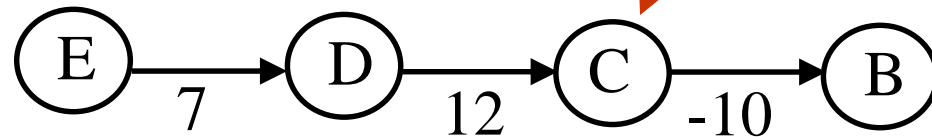
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (4)

2. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo E al nodo B.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

2. Cammino da E a B:



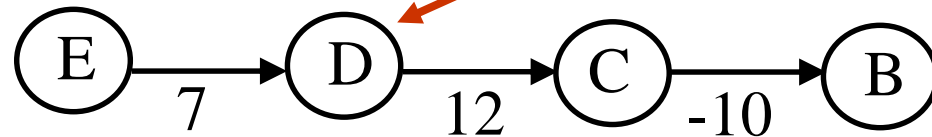
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (5)

2. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo E al nodo B.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

2. Cammino da E a B:



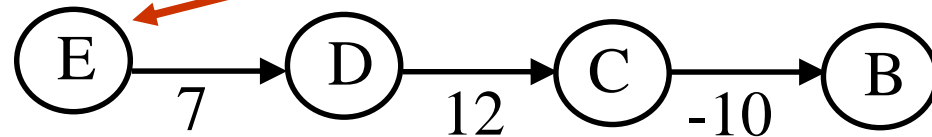
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (6)

2. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo E al nodo B.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

2. Cammino da E a B:



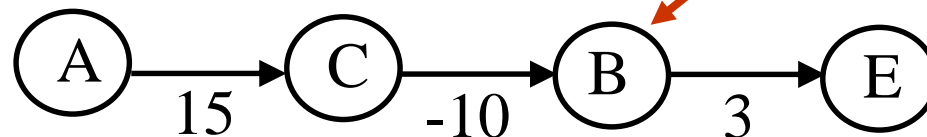
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (7)

3. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo A al nodo E.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

3. Cammino da A a E:



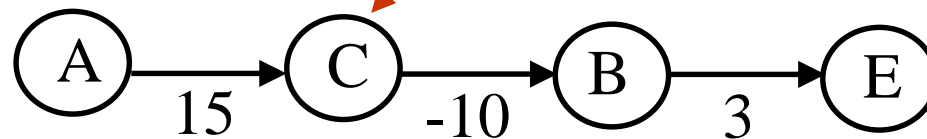
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (8)

3. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo A al nodo E.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

3. Cammino da A a E:



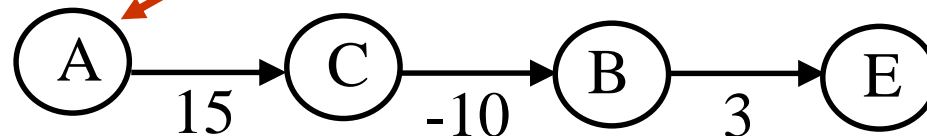
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (9)

3. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo A al nodo E.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

3. Cammino da A a E:



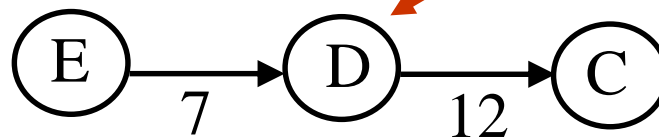
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (10)

4. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo E al nodo C.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

4. Cammino da E a C:



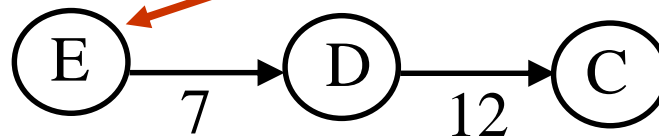
Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (11)

4. Se l'algoritmo termina, mostrate il cammino orientato minimo dal nodo E al nodo C.

passo 5	A	B	C	D	E
A	0	5	15	8	8
B	inf	0	10	3	3
C	inf	-10	0	-7	-7
D	inf	2	12	0	2
E	inf	9	19	7	0

passo 5	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	B	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	C	D	E	E

4. Cammino da E a C:



Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (12)

- 5. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo se l'elemento in posizione (C, B) = -11. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

passo 3	A	B	C	D	E
A	0	4	15	8	8
B	inf	-1	10	3	3
C	inf	-11	0	-7	-7
D	inf	1	12	0	2
E	inf	inf	inf	7	0

passo 3	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	C	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	B	C	E	E

5. ripetendo il passo 3 dell'algoritmo con (C,B)=-11 ci si arresta subito perché si individua il ciclo negativo B – C – B di peso -1.

passo 3	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	C	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	B	C	E	E

Soluzione Esercizio 2 Floyd-Warshall (13)

- 5. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo se l'elemento in posizione (C, B) = -11. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.

passo 3	A	B	C	D	E
A	0	4	15	8	8
B	inf	-1	10	3	3
C	inf	-11	0	-7	-7
D	inf	1	12	0	2
E	inf	inf	inf	7	0

passo 3	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	C	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	B	C	E	E

5. ripetendo il passo 3 dell'algoritmo con (C,B) = -11 ci si arresta subito perché si individua il ciclo negativo B – C – B di peso -1.

passo 3	A	B	C	D	E
A	A	C	A	C	B
B	A	C	B	C	B
C	A	C	C	C	B
D	A	C	D	D	D
E	A	B	C	E	E

Testo Esercizio 3 Dijkstra (Percorso Minimo)

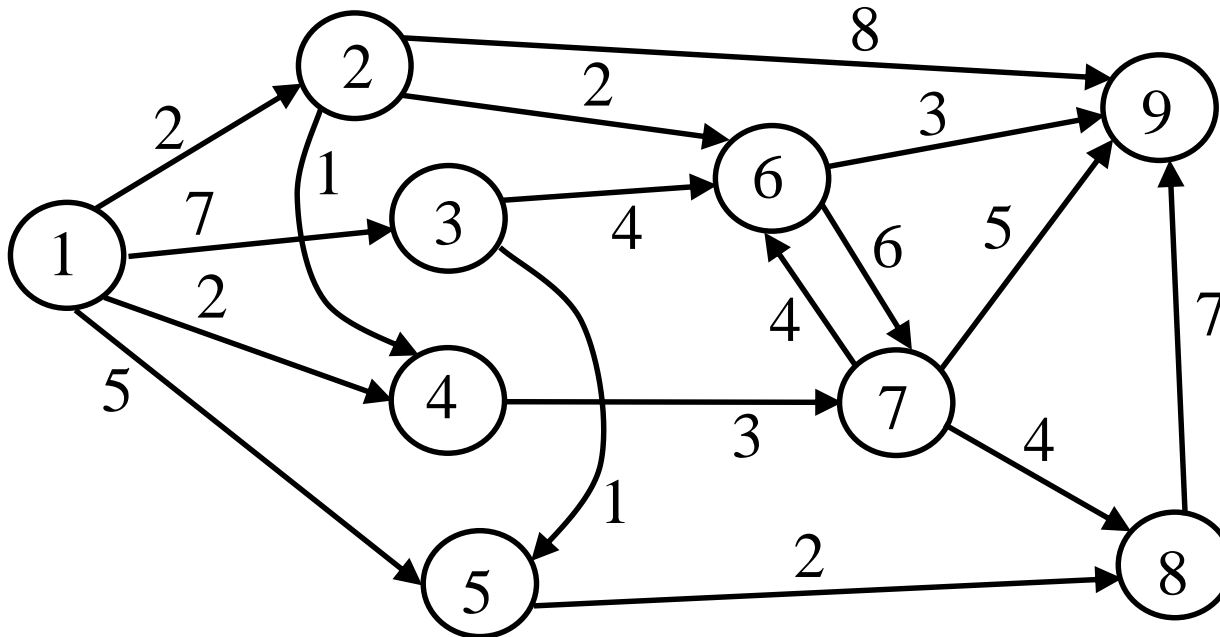
In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un digrafo.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r	s
1	1	1	1	1													
2	-1				1	1	1										
3		-1						1	1								
4			-1				-1			1							
5				-1					-1		1						
6						-1		-1				1	1	-1			
7										-1			-1	1	1	1	
8											-1					-1	1
9					-1							-1			-1		-1
Pesi	2	7	2	5	8	2	1	4	1	3	2	3	6	4	5	4	7

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, utilizzando l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine i flag dei nodi vengono fissati a 1).
2. Ci sono più alberi dei cammini orientati minimi ottimi? Se sì, quali?
3. Calcolare il percorso minimo nell'albero dal nodo 1 al nodo 7, e il suo peso.
4. Come varia la soluzione ottima se l'arco (7, 9) ha peso 10 ?
5. Come varia la soluzione ottima se l'arco (7, 9) ha peso 1 ?

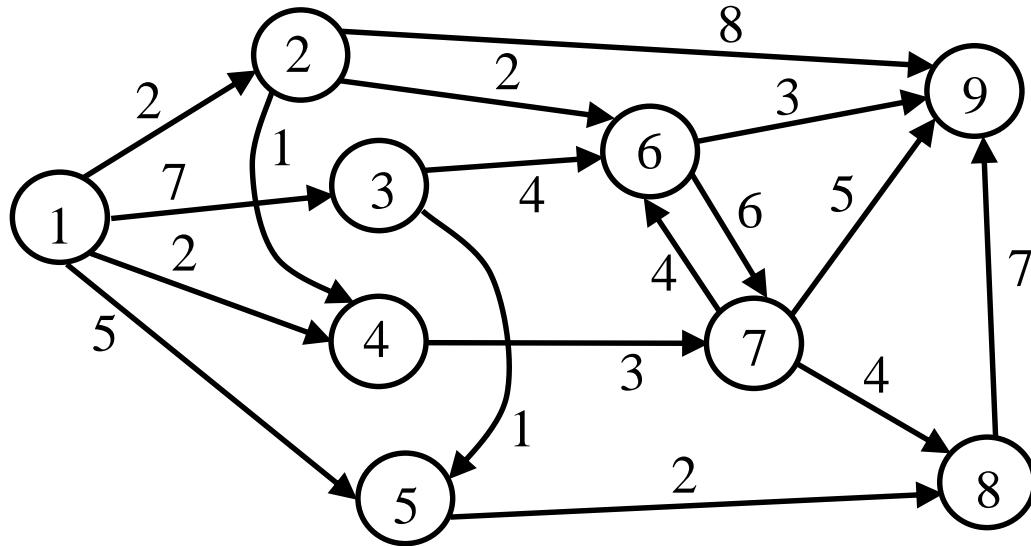
Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (1)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r	s
1	1	1	1	1													
2	-1				1	1	1										
3		-1						1	1								
4			-1				-1			1							
5				-1					-1		1						
6						-1		-1				1	1	-1			
7										-1			-1	1	1	1	
8											-1					-1	1
9					-1							-1			-1		-1
Pesi	2	7	2	5	8	2	1	4	1	3	2	3	6	4	5	4	7



Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (2)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).



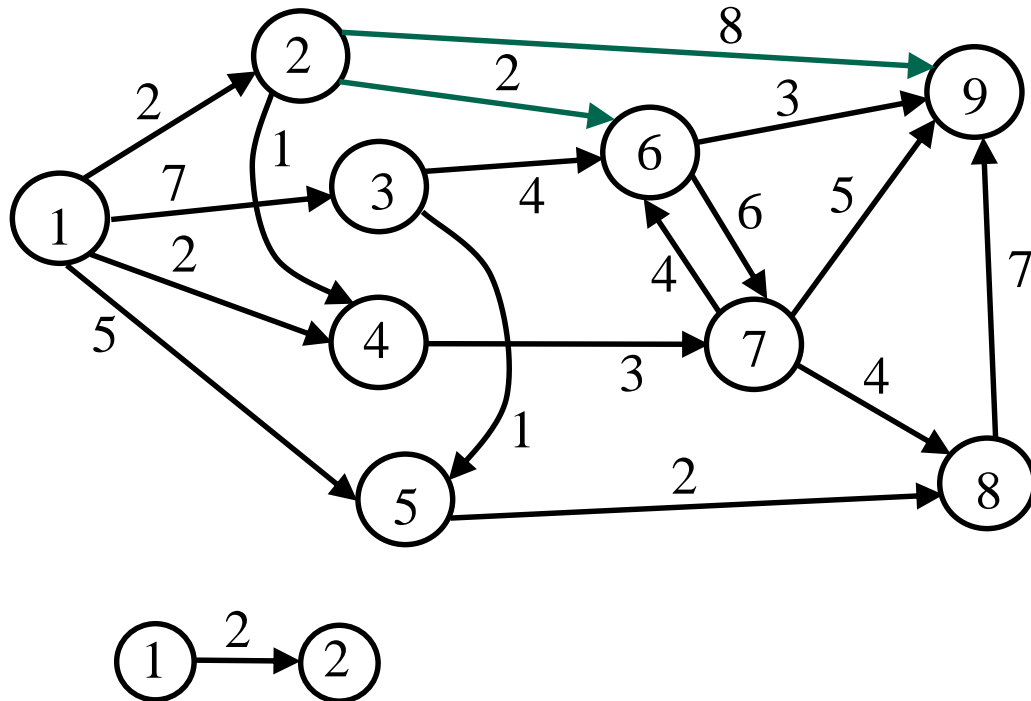
①

nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	0	2	1
3	0	7	1
4	0	2	1
5	0	5	1
6	0	inf	1
7	0	inf	1
8	0	inf	1
9	0	inf	1

$$S = \{1\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (3)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).

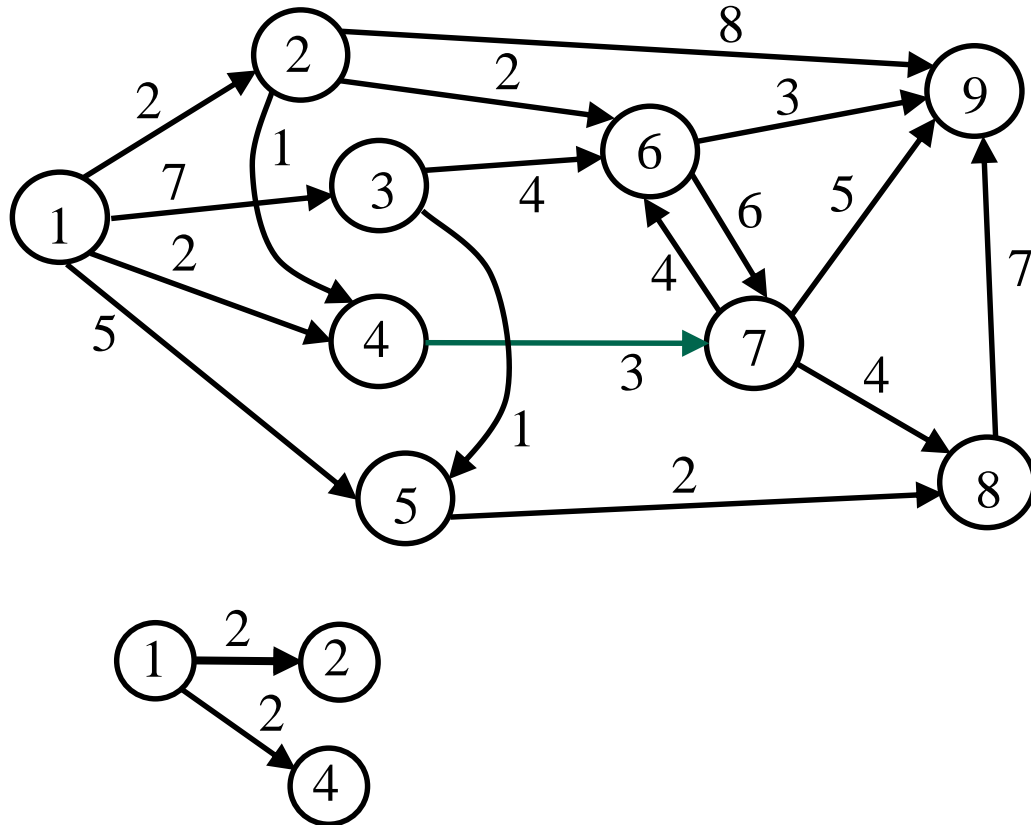


nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	0	2	1
5	0	5	1
6	0	4 _{inf}	2
7	0	inf	1
8	0	inf	1
9	0	10 _{inf}	2

$$S = \{1, 2\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (4)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).

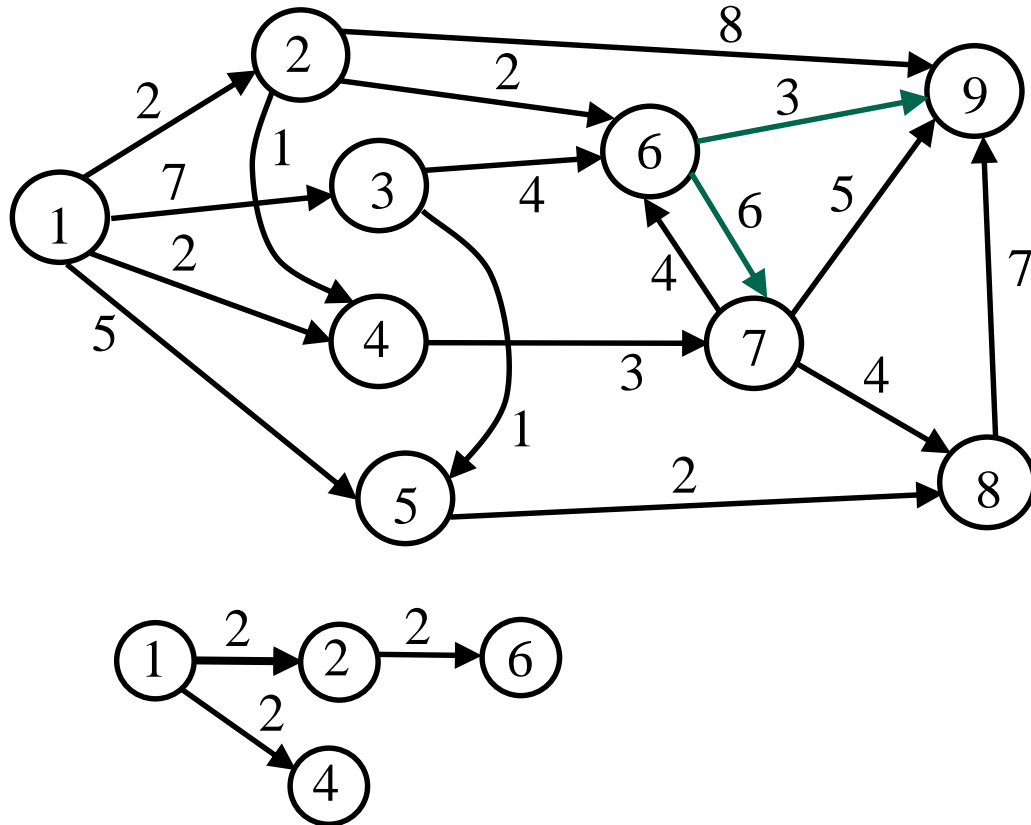


nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	1	2	1
5	0	5	1
6	0	4	2
7	0	5 _{inf}	4
8	0	inf	1
9	0	10	2

$$S = \{1, 2, 4\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (5)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).

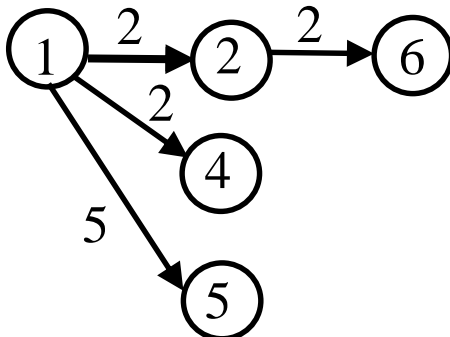
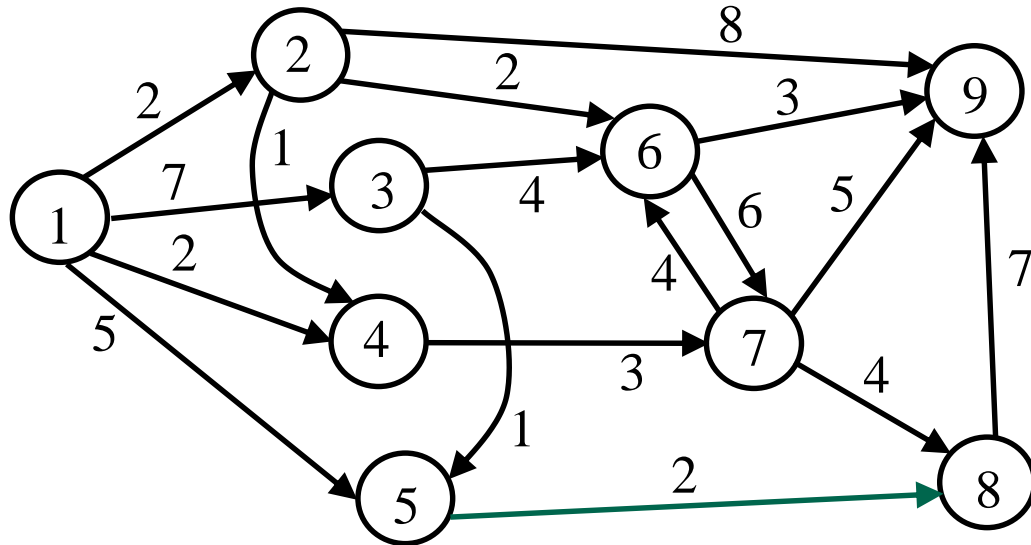


nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	1	2	1
5	0	5	1
6	1	4	2
7	0	5	4
8	0	inf	1
9	0	7 ₁₀	6

$$S = \{1, 2, 4, 6\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (6)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).

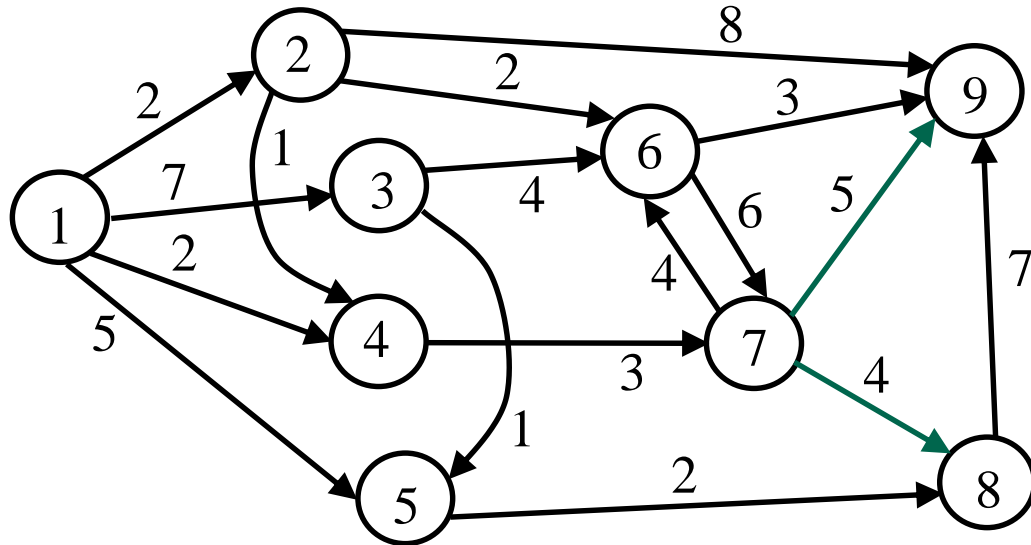


nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	0	5	4
8	0	7 _{inf}	5
9	0	7	6

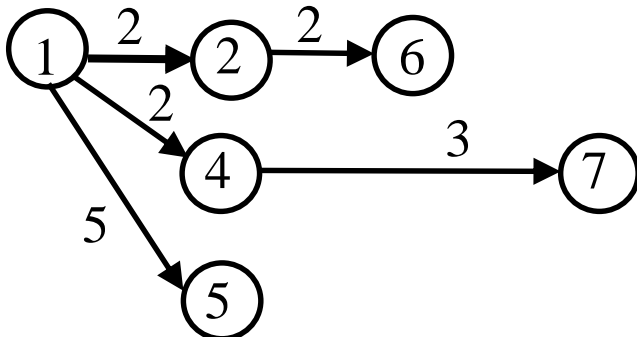
$$S = \{1, 2, 4, 6, 5\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (7)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).



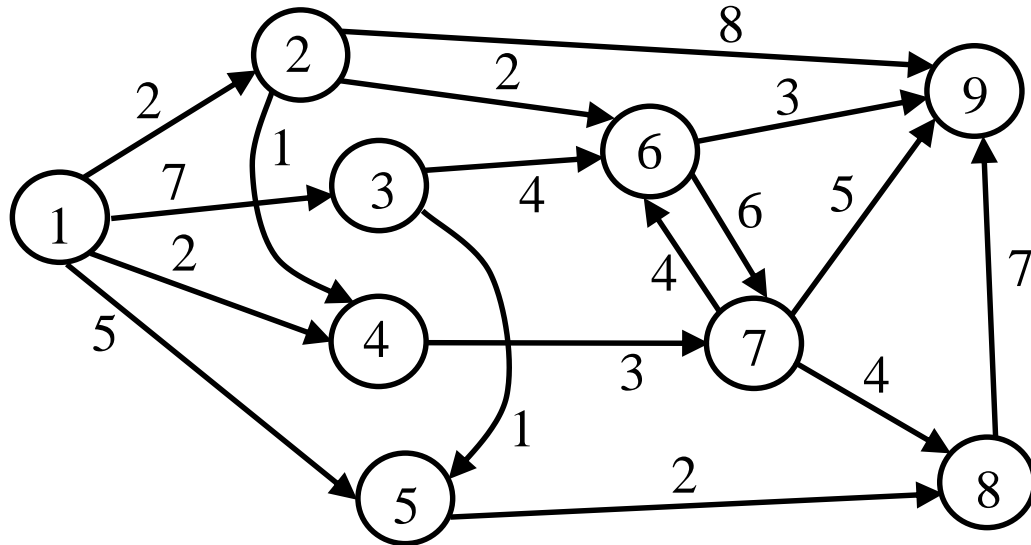
nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	0	7	5
9	0	7	6



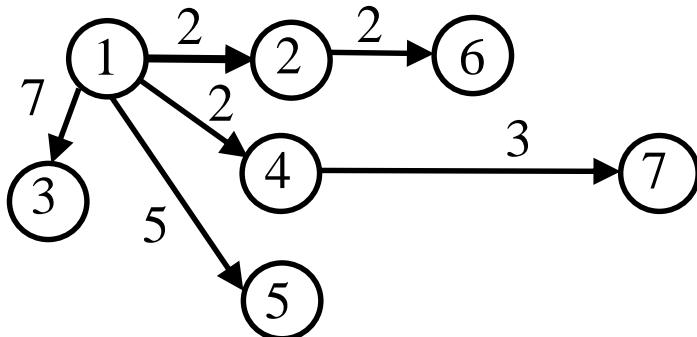
$$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (8)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).



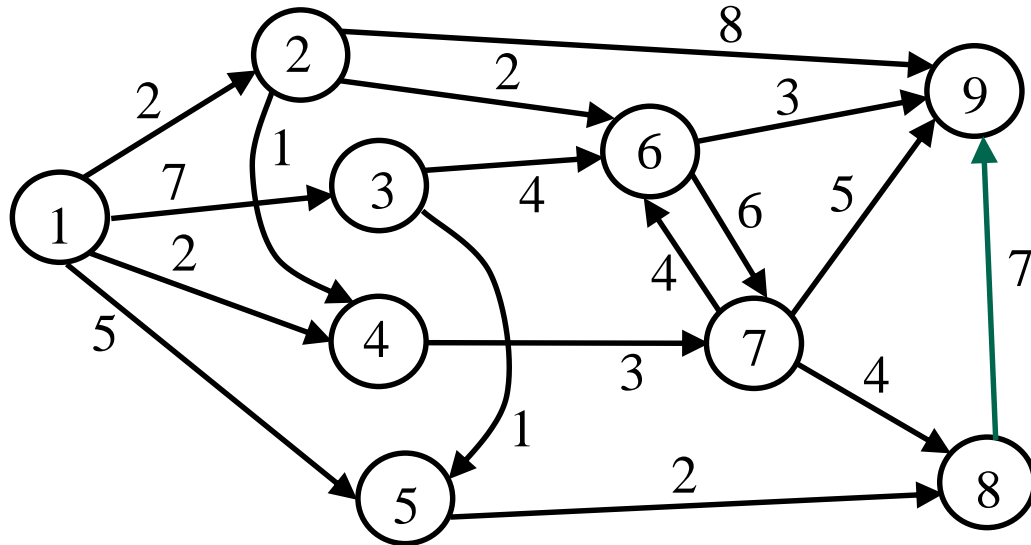
nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	0	7	5
9	0	7	6



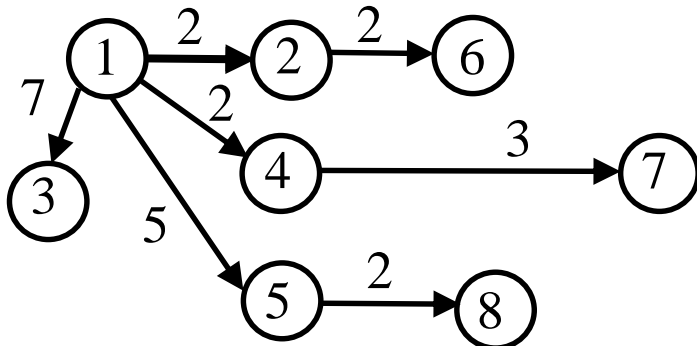
$$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7, 3\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (9)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).



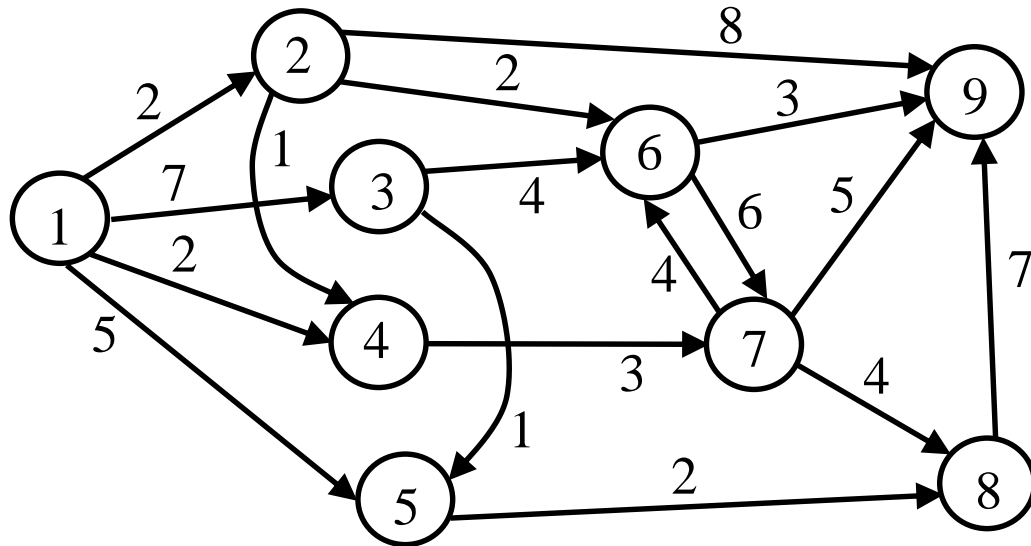
nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	1	7	5
9	0	7	6



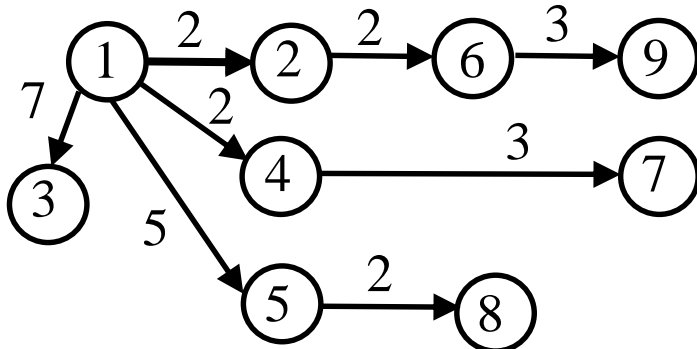
$$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7, 3, 8\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (10)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).



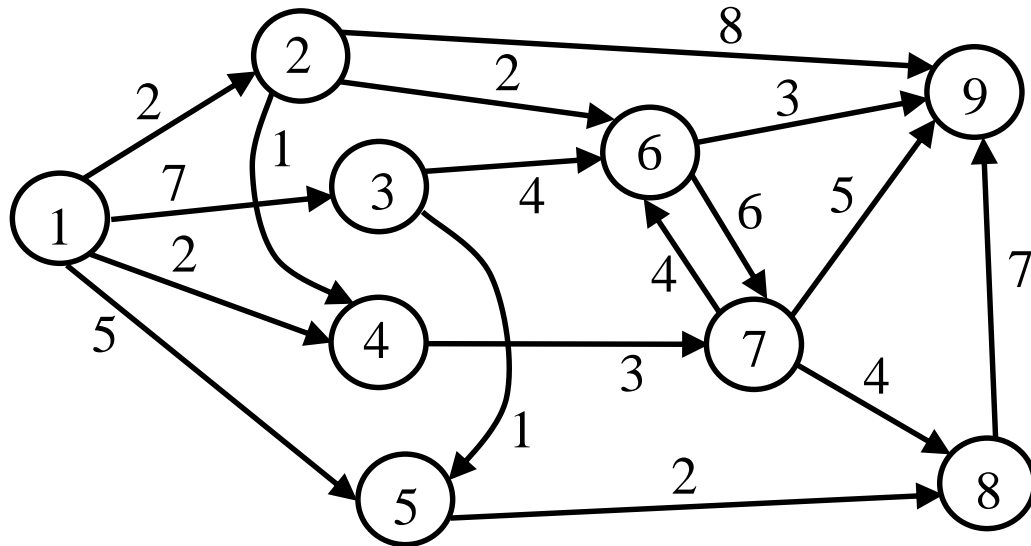
nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	1	7	5
9	1	7	6



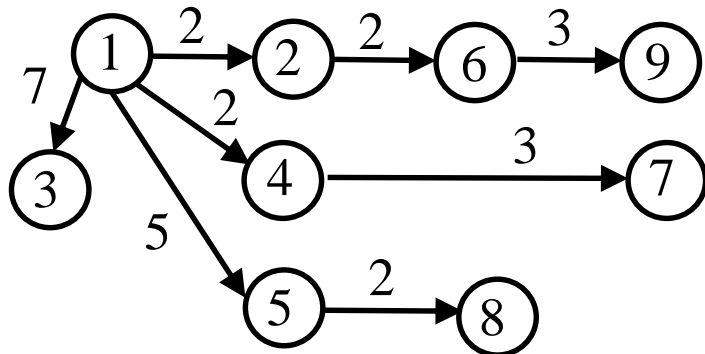
$$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7, 3, 8, 9\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (11)

1. Trovare l'albero dei cammini orientati minimi, a partire dal nodo 1, tramite l'algoritmo di Dijkstra (versione efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi).



nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	1	7	5
9	1	7	6



$S = \{1, [2,4], 6, [5,7], [3,8,9]\}$

Archi aggiunti nell'ordine:

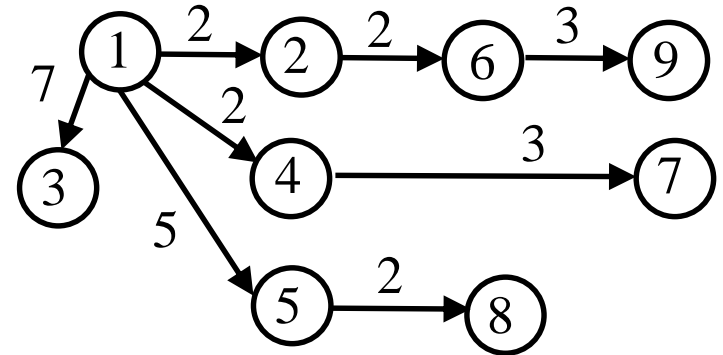
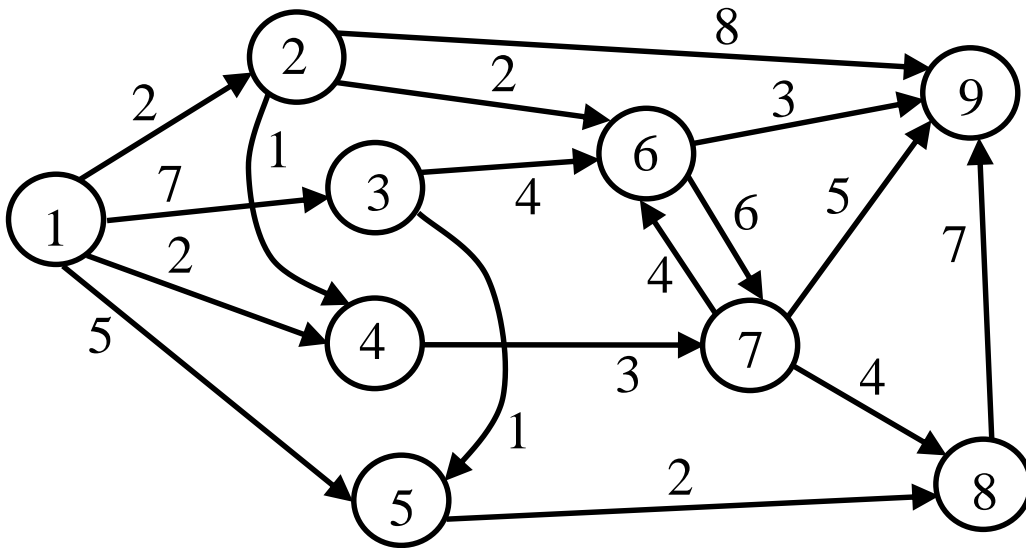
(1,2)(1,4)(2,6)(1,5)(4,7)(1,3)(5,8)(6,9)

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (12)

2. Ci sono più alberi dei cammini orientati minimi ottimi? Se sì, quali?

Risposta: L'albero dei cammini orientati minimi è unico.

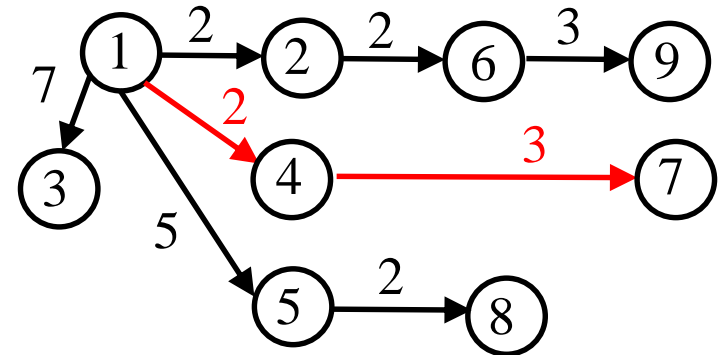
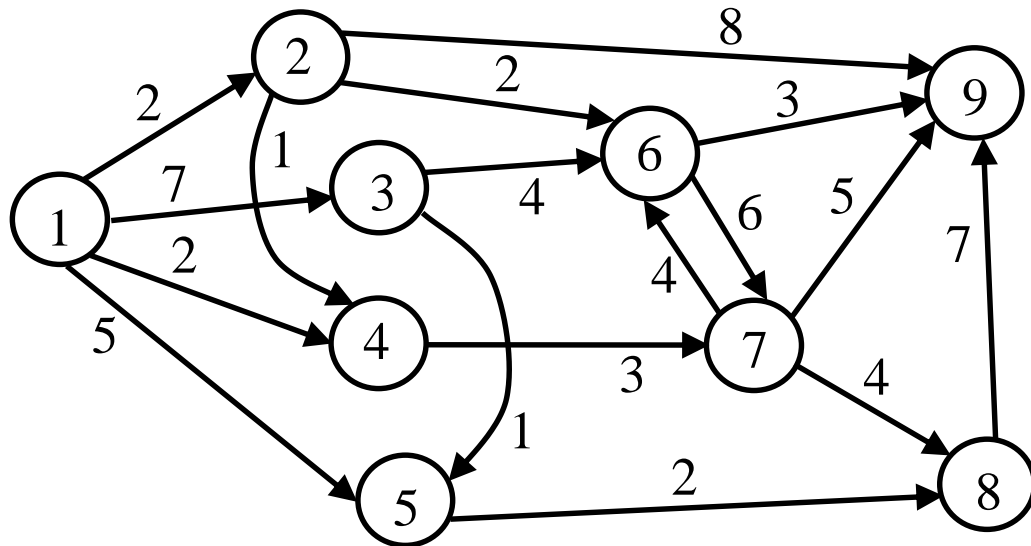
$$S = \{1, [2, 4], 6, [5, 7], [3, 8, 9]\}$$



Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (13)

3. Mostrate il percorso minimo nell'albero dal nodo 1 al nodo 7, e il suo peso.

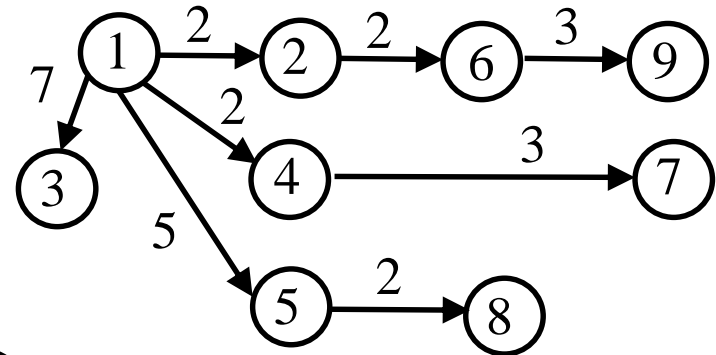
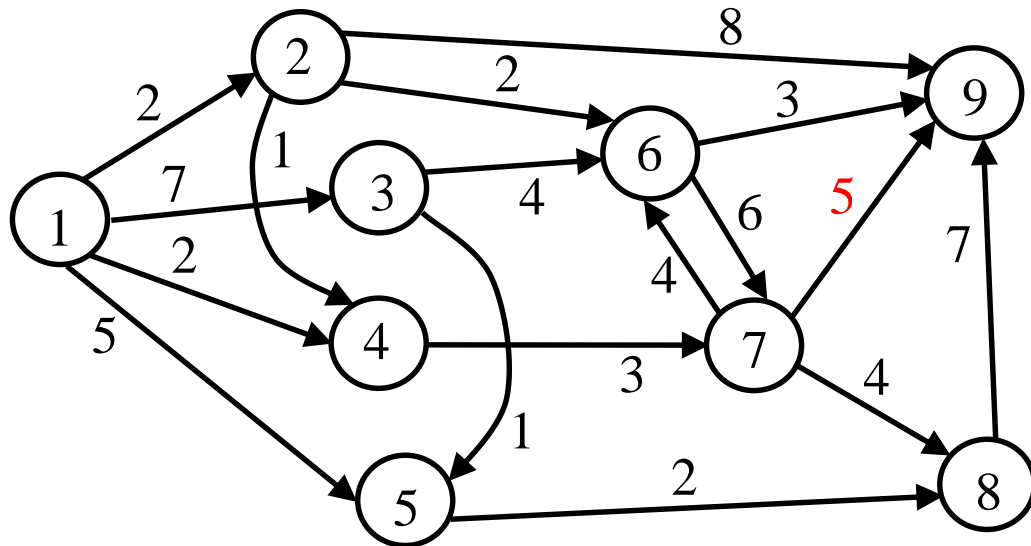
Risposta: 1-4-7 con peso 5.



Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (14)

4. Come varia la soluzione ottima se l'arco (7, 9) ha peso 10?

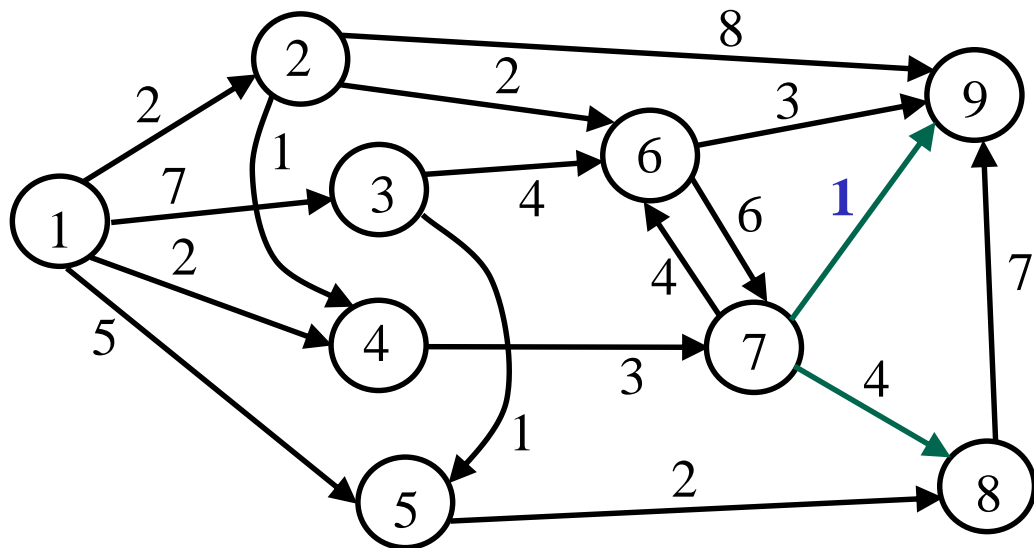
Risposta: Soluzione invariata perché l'arco è aumentato di peso e non fa parte del sottoinsieme di archi dell'albero dei cammini minimi.



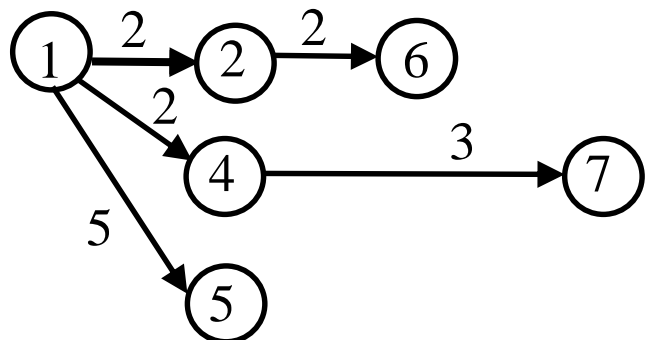
Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (15)

5. Come varia la soluzione ottima se l'arco (7, 9) ha peso 1?

Risposta: $\text{pred}(9)=7$, il percorso da 1 a 9 pesa 6. $S = \{1, [2,4], 6, [5,7], 9, [3,8]\}$



nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	0	7	5
9	0	6 ₇	7

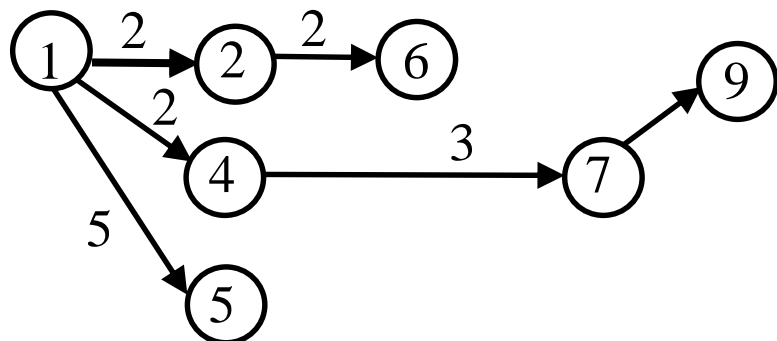
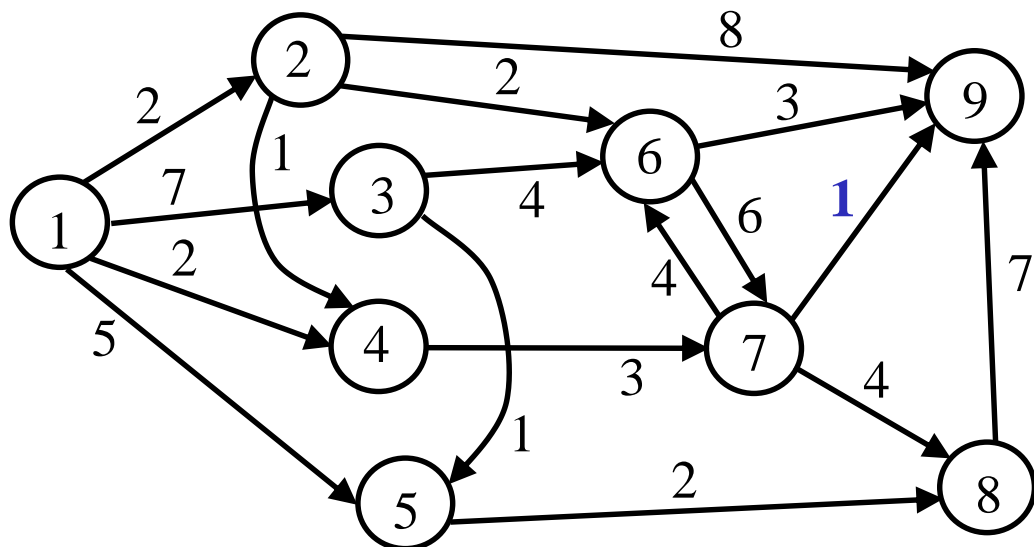


$$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7\}$$

Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (16)

5. Come varia la soluzione ottima se l'arco (7, 9) ha peso 1?

Risposta: $\text{pred}(9)=7$, il percorso da 1 a 9 pesa 6. $S = \{1, [2,4], 6, [5,7], 9, [3,8]\}$



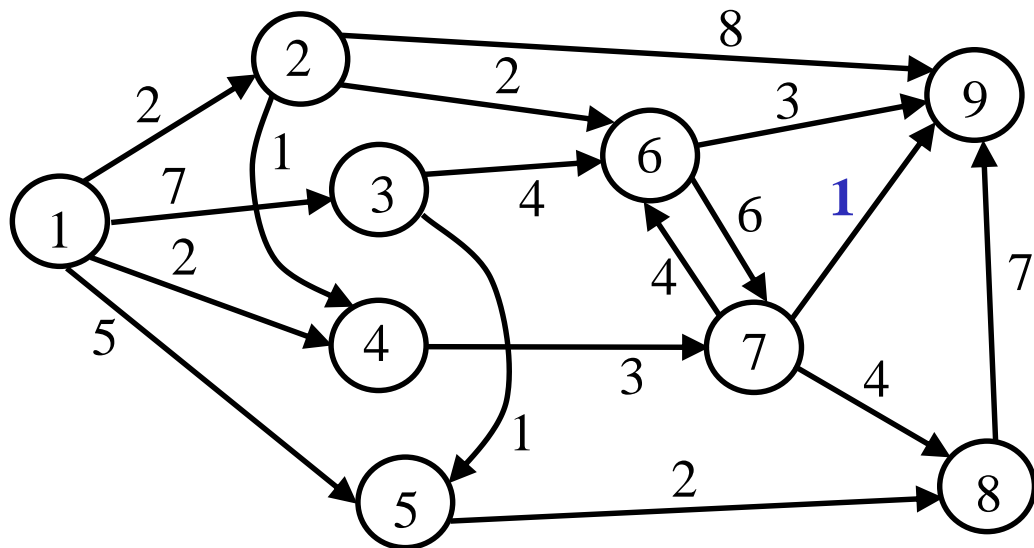
nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	0	7	5
9	1	6	7

$$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7, 9\}$$

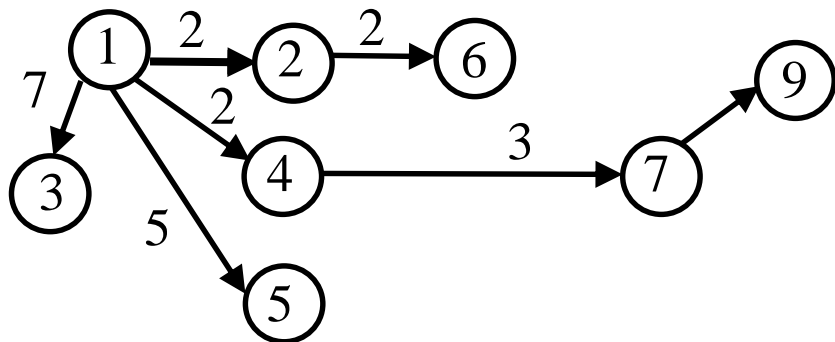
Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (17)

5. Come varia la soluzione ottima se l'arco (7, 9) ha peso 1?

Risposta: $\text{pred}(9)=7$, il percorso da 1 a 9 pesa 6. $S = \{1, [2,4], 6, [5,7], 9, [3,8]\}$



nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	0	7	5
9	1	6	7

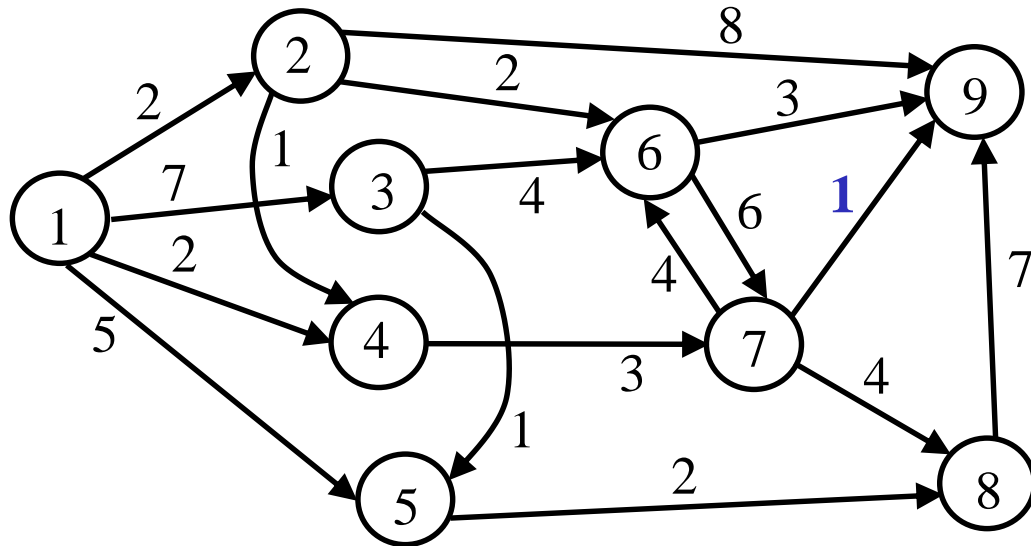


$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7, 9, 3\}$

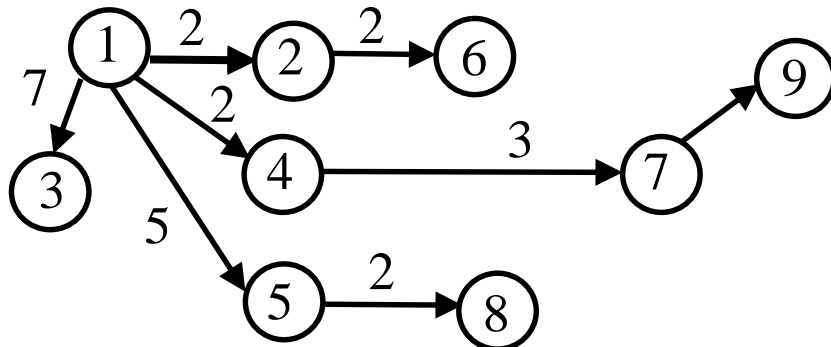
Soluzione Esercizio 3 Dijkstra (P. M.) (18)

5. Come varia la soluzione ottima se l'arco (7, 9) ha peso 1?

Risposta: $\text{pred}(9)=7$, il percorso da 1 a 9 pesa 6. $S = \{1, [2,4], 6, [5,7], 9, [3,8]\}$



nodo	V	D	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	7	1
4	1	2	1
5	1	5	1
6	1	4	2
7	1	5	4
8	1	7	5
9	1	6	7



$S = \{1, 2, 4, 6, 5, 7, 9, 3, 8\}$

Testo Esercizio 4 Prim-Dijkstra

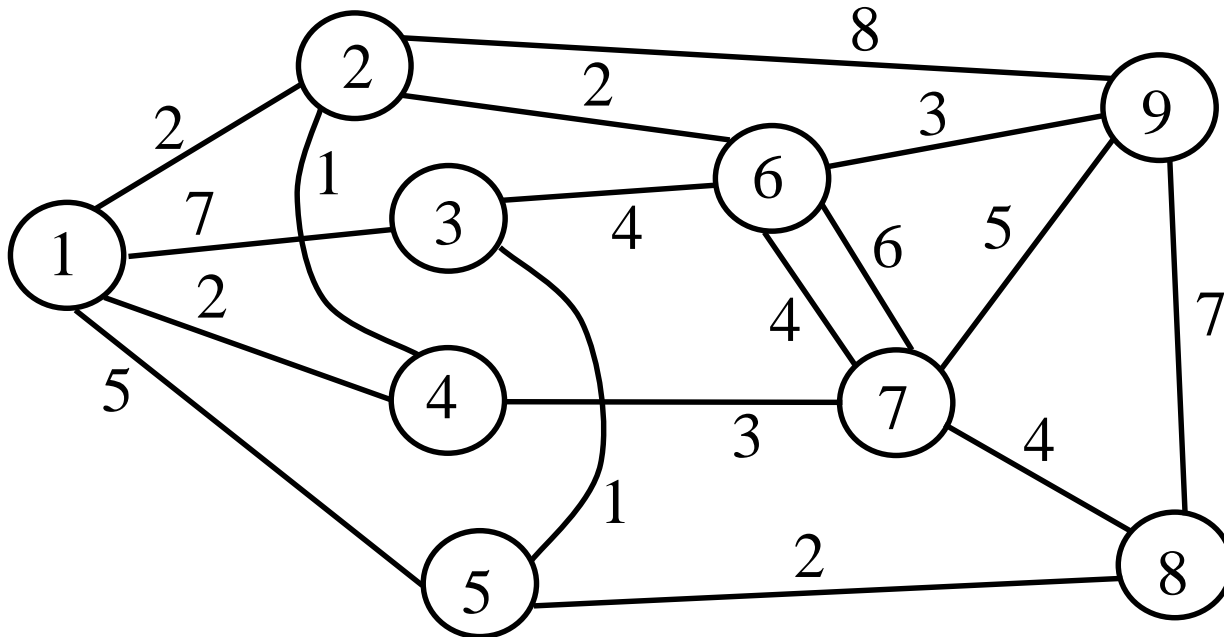
In tabella è riportata la matrice di incidenza vertici/lati di un grafo (non orientato).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r	s
1	1	1	1	1													
2	1				1	1	1										
3		1						1	1								
4			1				1			1							
5				1					1		1						
6						1		1				1	1	1			
7										1			1	1	1	1	
8											1					1	1
9					1							1			1		1
Pesi	2	7	2	5	8	2	1	4	1	3	2	3	6	4	5	4	7

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice **1**, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero (in quale ordine vengono fissati a 1 i flag dei vertici).
2. Come varia il valore della soluzione ottima se si parte dal vertice 6?
3. Partendo dal vertice 1, esistono più alberi ricoprenti ottimi? Se sì, mostrarne almeno un altro.
4. Partendo dal vertice 1, come varia la soluzione ottima togliendo dal grafo i due lati (6, 7)?
5. Partendo dal vertice 1, come varia la soluzione ottima se il lato (3, 6) ha peso 2?

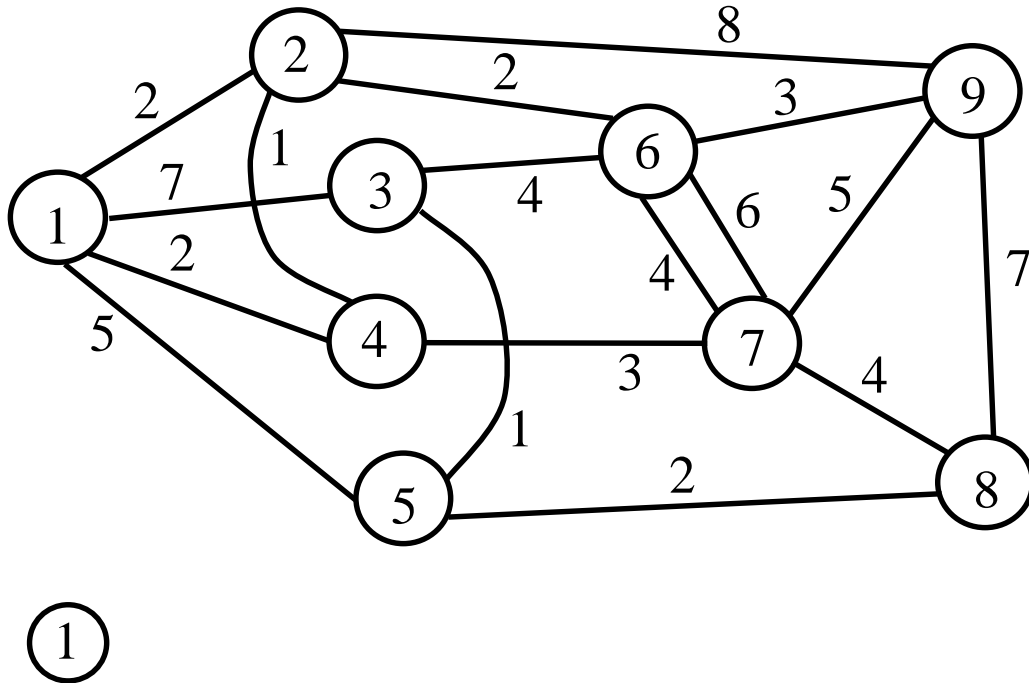
Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (1)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r	s
1	1	1	1	1													
2	1				1	1	1										
3		1						1	1								
4			1				1			1							
5				1					1		1						
6						1		1				1	1	1			
7										1			1	1	1	1	
8											1					1	1
9					1							1			1		1
Pesi	2	7	2	5	8	2	1	4	1	3	2	3	6	4	5	4	7



Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (2)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

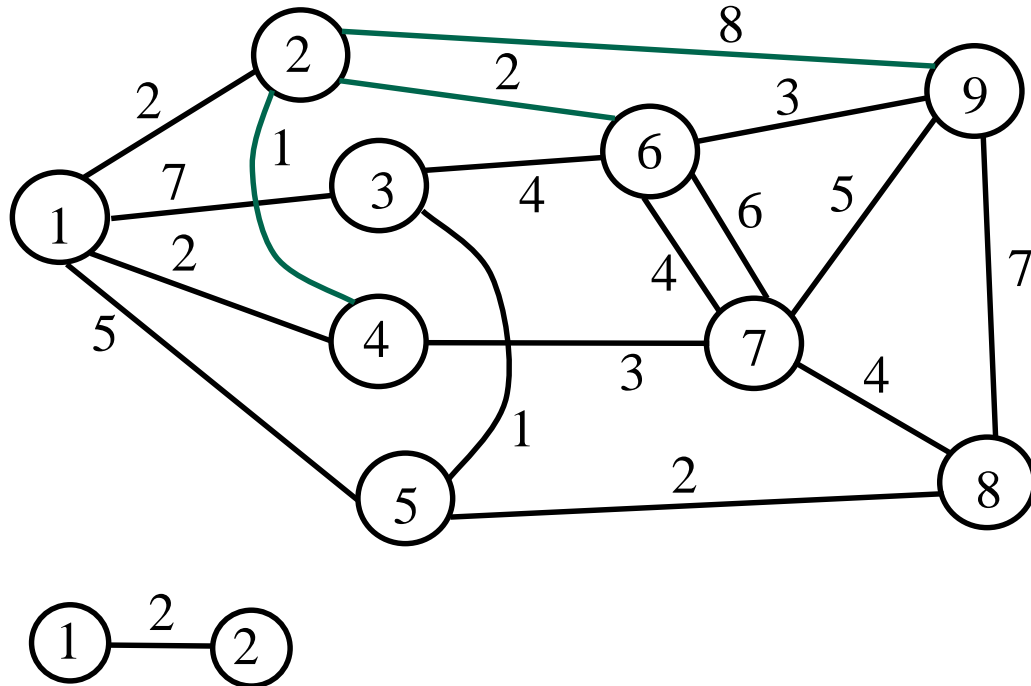


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	0	2	1
3	0	7	1
4	0	2	1
5	0	5	1
6	0	inf	1
7	0	inf	1
8	0	inf	1
9	0	inf	1

$$S = \{1\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (3)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

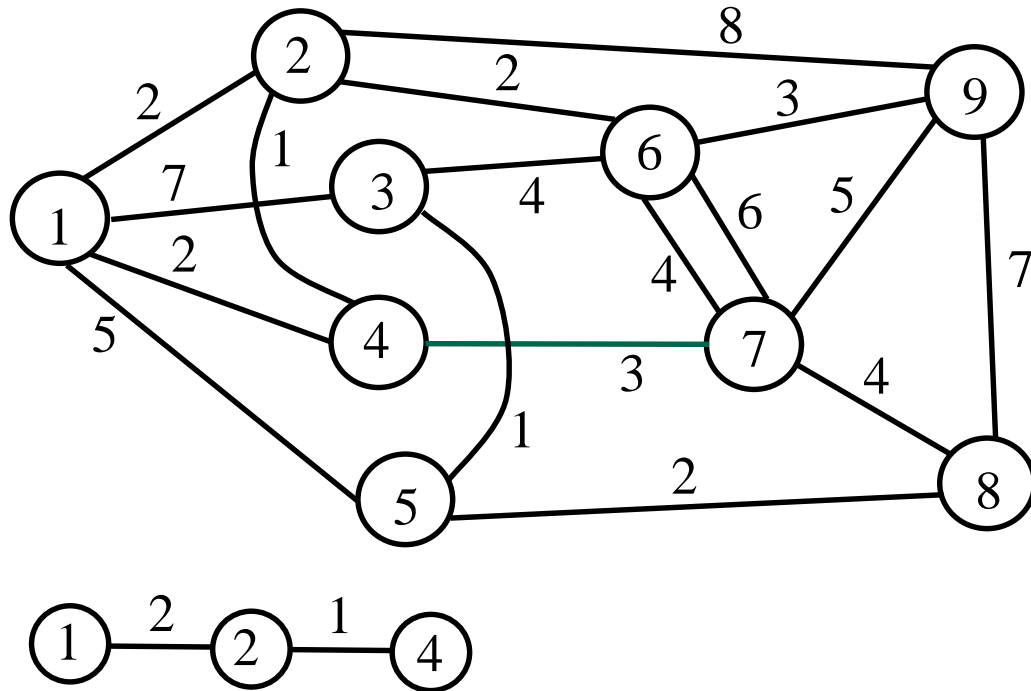


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	0	1 ₂	2
5	0	5	1
6	0	2 _{inf}	2
7	0	inf	1
8	0	inf	1
9	0	8 _{inf}	2

$$S = \{1, 2\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (4)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

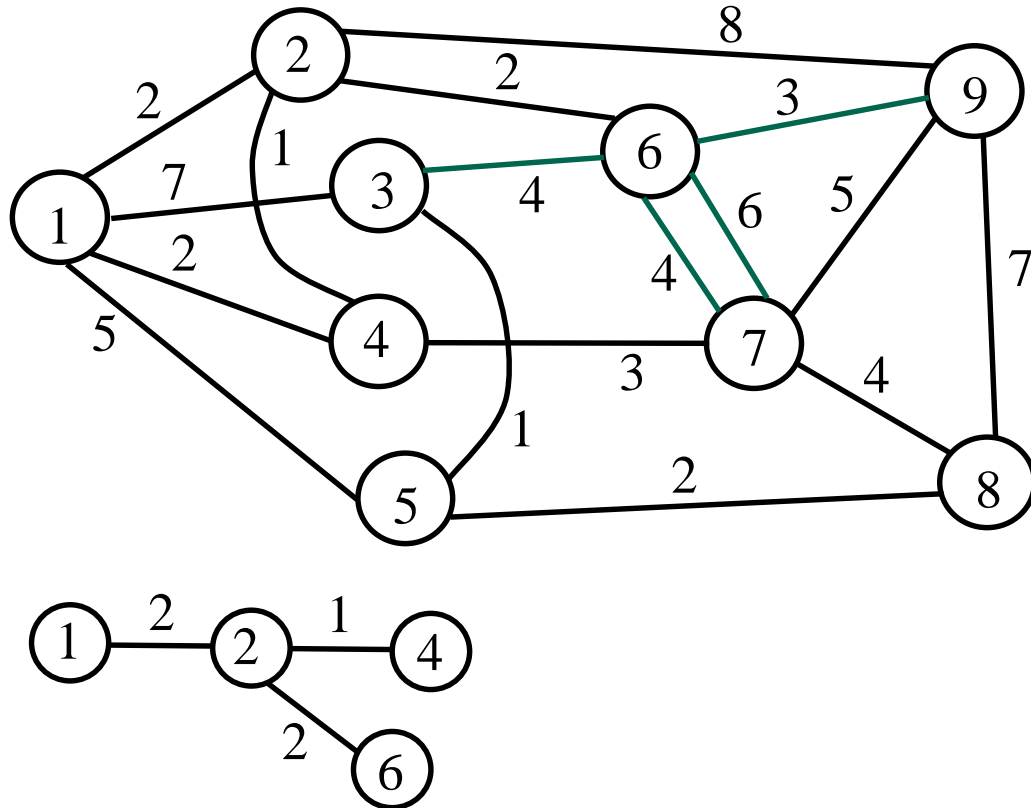


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	7	1
4	1	1	2
5	0	5	1
6	0	2	2
7	0	3 _{inf}	4
8	0	inf	1
9	0	8	2

$$S = \{1, 2, 4\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (5)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

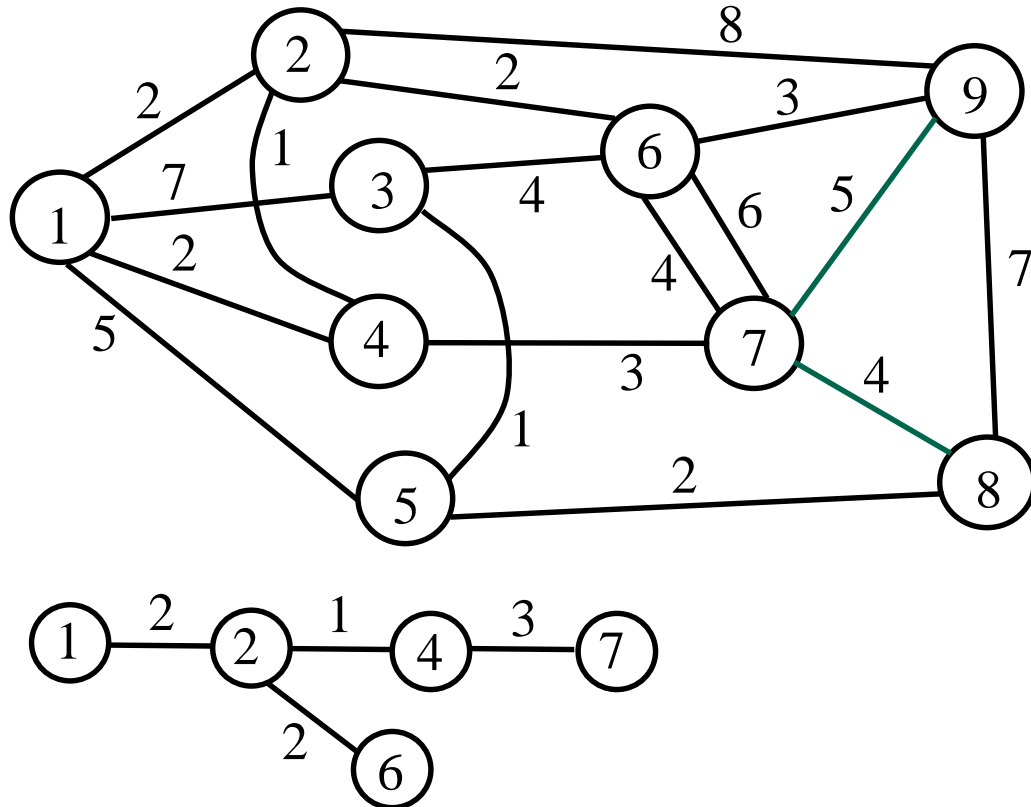


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	4 ₇	6
4	1	1	2
5	0	5	1
6	1	2	2
7	0	3	4
8	0	inf	1
9	0	3 ₈	6

$$S = \{1, 2, 4, 6\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (6)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

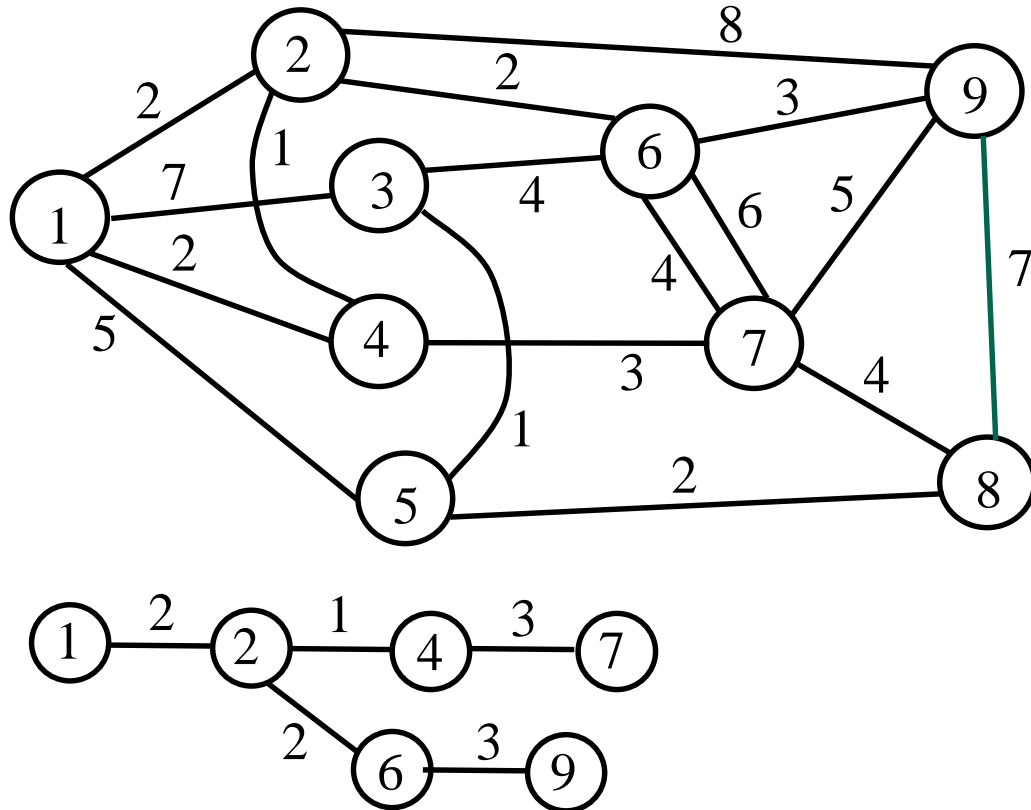


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	4	6
4	1	1	2
5	0	5	1
6	1	2	2
7	1	3	4
8	0	4 _{inf}	7
9	0	3	6

$$S = \{1, 2, 4, 6, 7\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (7)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

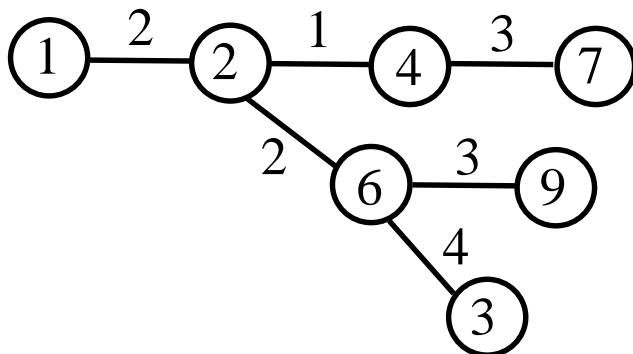
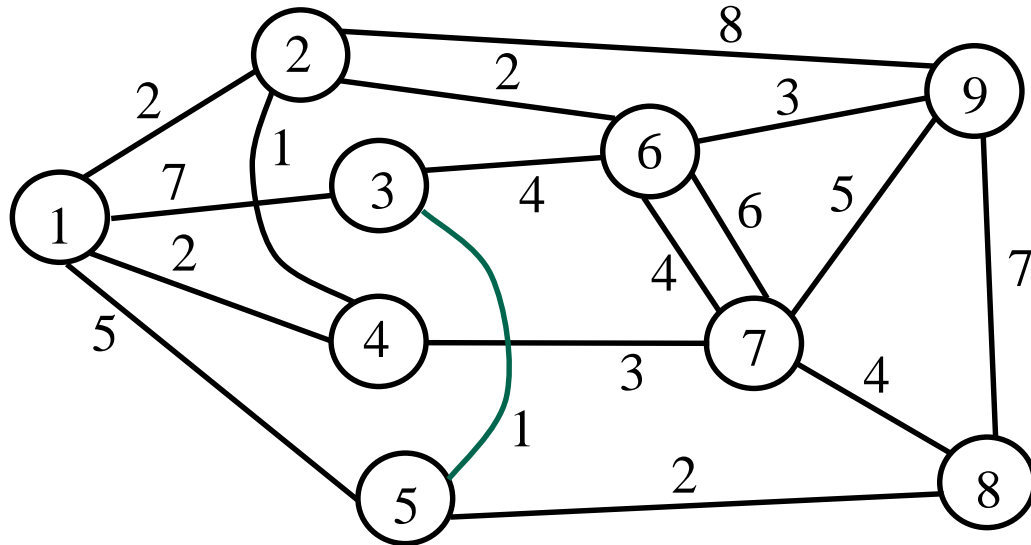


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	0	4	6
4	1	1	2
5	0	5	1
6	1	2	2
7	1	3	4
8	0	4	7
9	1	3	6

$$S = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (8)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

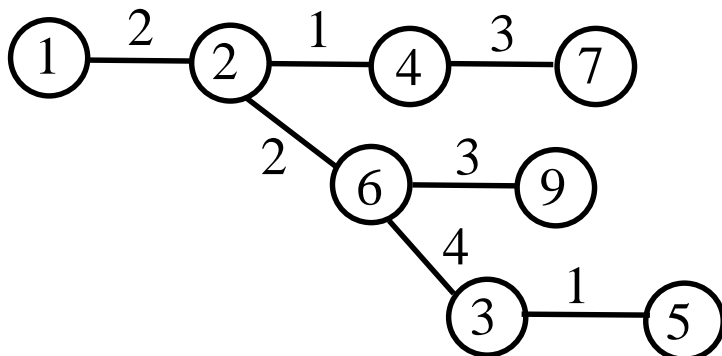
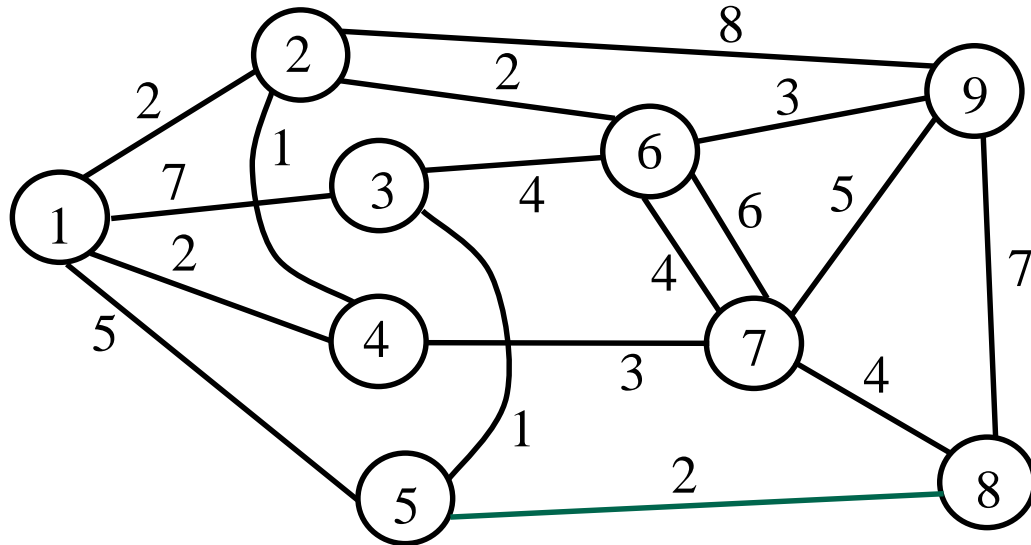


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	4	6
4	1	1	2
5	0	1	5
6	1	2	2
7	1	3	4
8	0	4	7
9	1	3	6

$$S = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 3\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (9)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

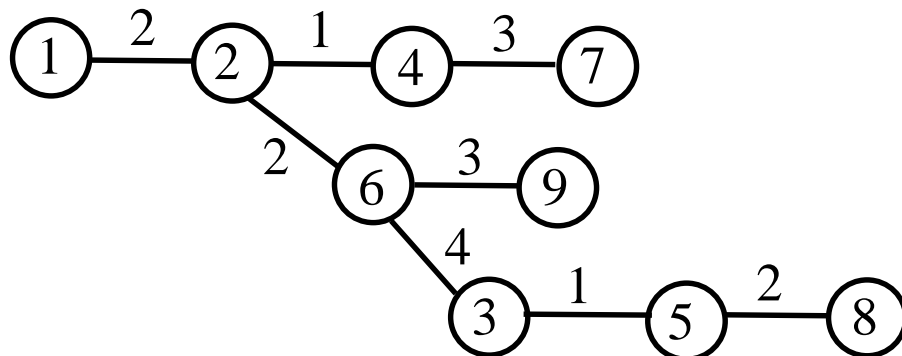
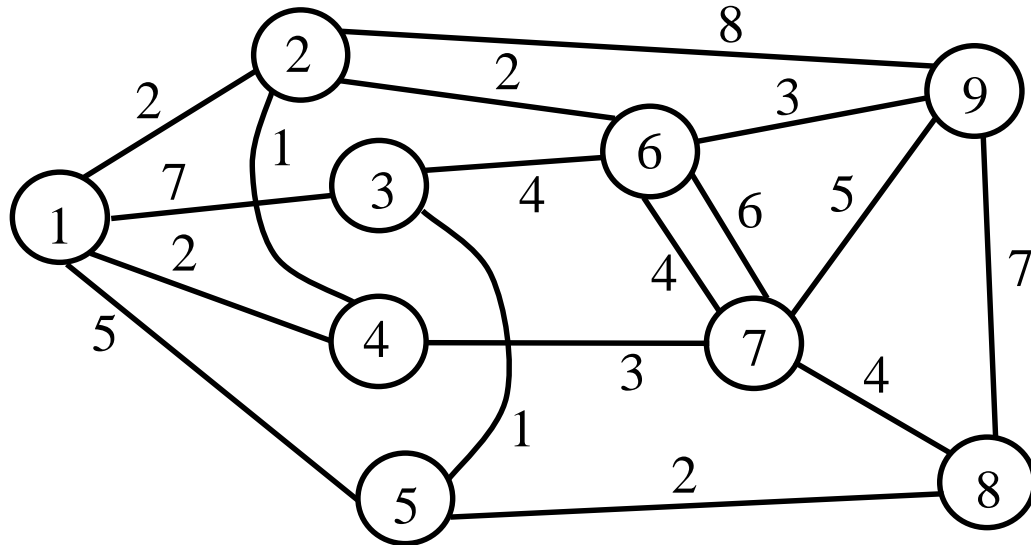


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	4	6
4	1	1	2
5	1	1	3
6	1	2	2
7	1	3	4
8	0	2	5
9	1	3	6

$$S = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 3, 5\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (10)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).

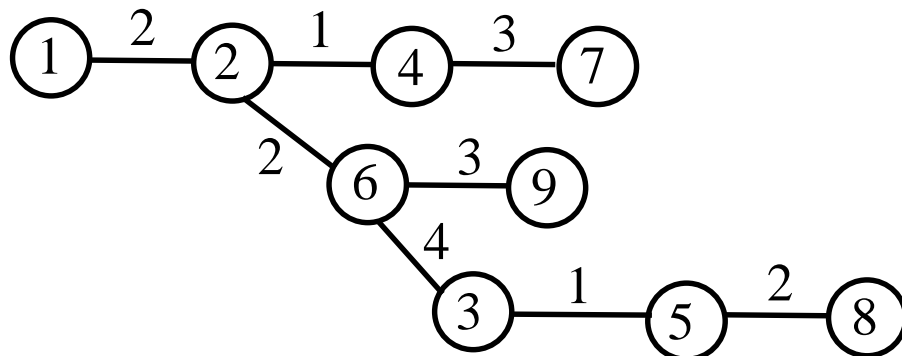
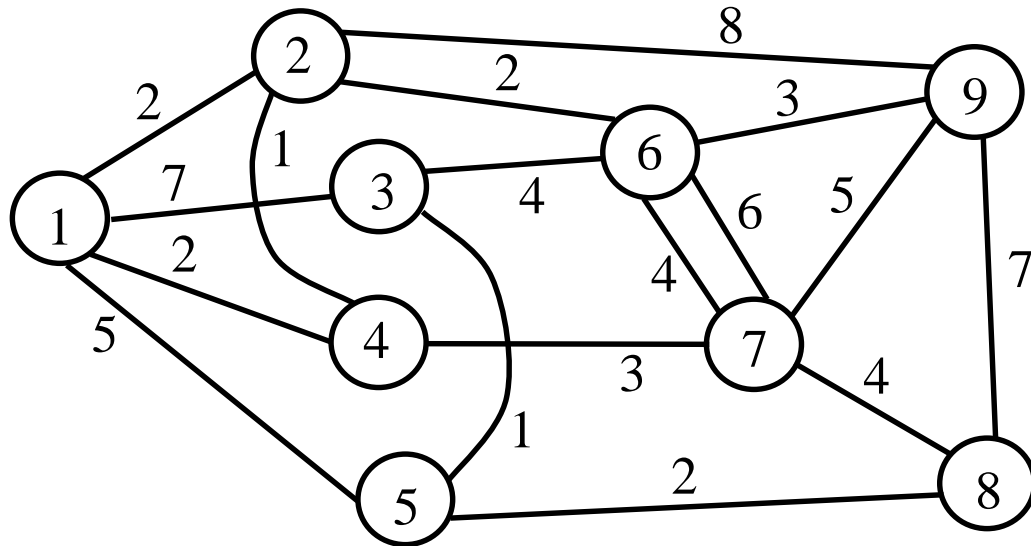


vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	4	6
4	1	1	2
5	1	1	3
6	1	2	2
7	1	3	4
8	1	2	5
9	1	3	6

$$S = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 3, 5, 8\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (11)

1. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal vertice 1, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (vers. efficiente). Indicare in quale ordine vengono aggiunti lati all'albero (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei vertici).



vertice	V	C	pred
1	1	0	null
2	1	2	1
3	1	4	6
4	1	1	2
5	1	1	3
6	1	2	2
7	1	3	4
8	1	2	5
9	1	3	6

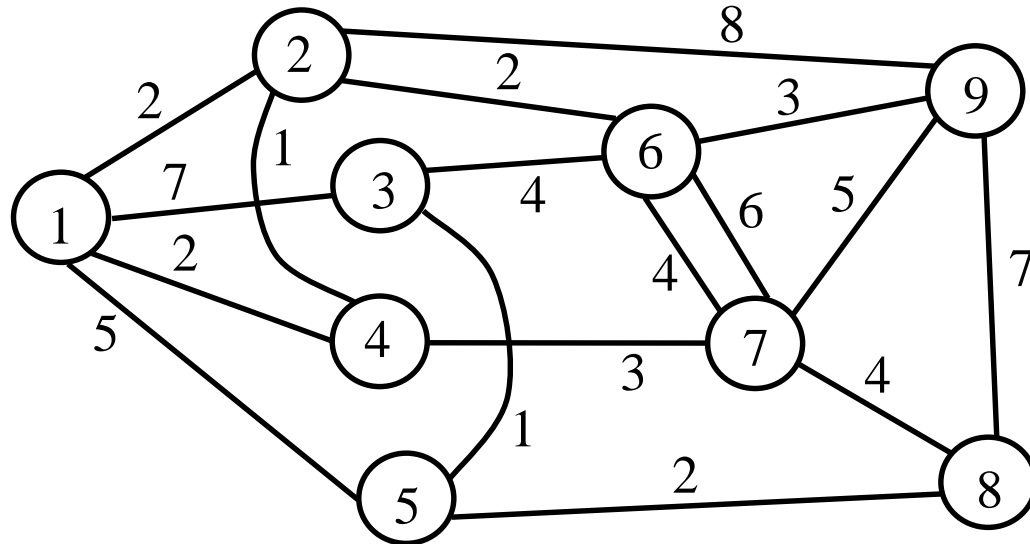
$S = \{1, [2,4], 6, 7, 9, 3, 5, 8\}$

Peso albero = 18

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (12)

2. Come varia il valore della soluzione ottima se si parte dal vertice 6?

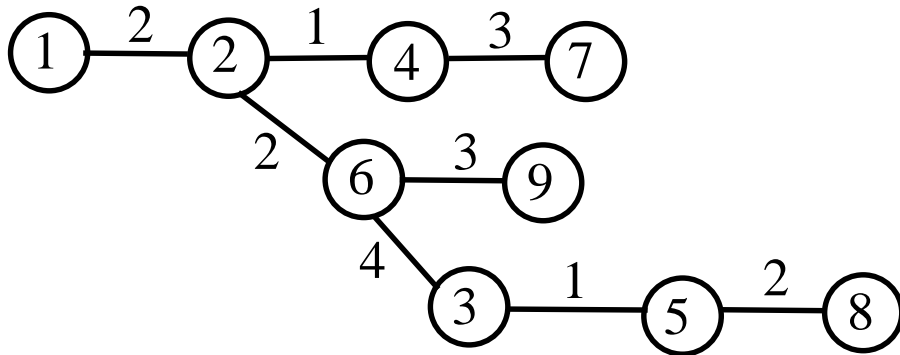
Risposta. Il peso del nuovo albero ricoprente sarà lo stesso del precedente albero.



Peso albero = 18

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (13)

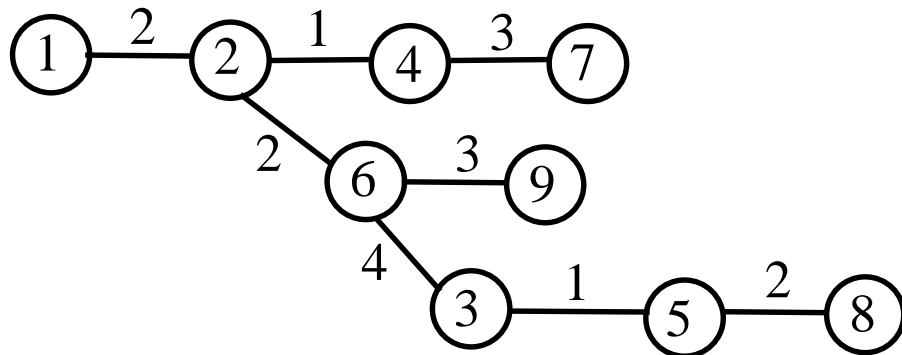
3. Partendo dal vertice 1, esistono più alberi ricoprenti ottimi? Se sì, mostrarne almeno un altro.



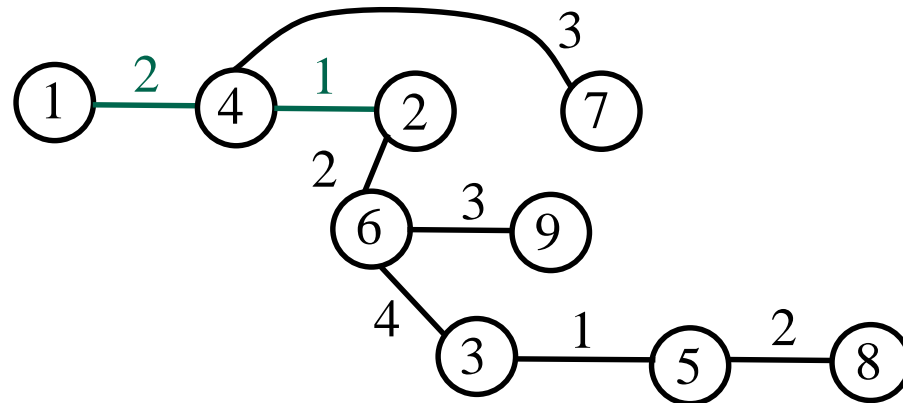
$$S = \{1, [2, 4], 6, 7, 9, 3, 5, 8\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (14)

3. Partendo dal vertice 1, esistono più alberi ricoprenti ottimi? Se sì, mostrarne almeno un altro.



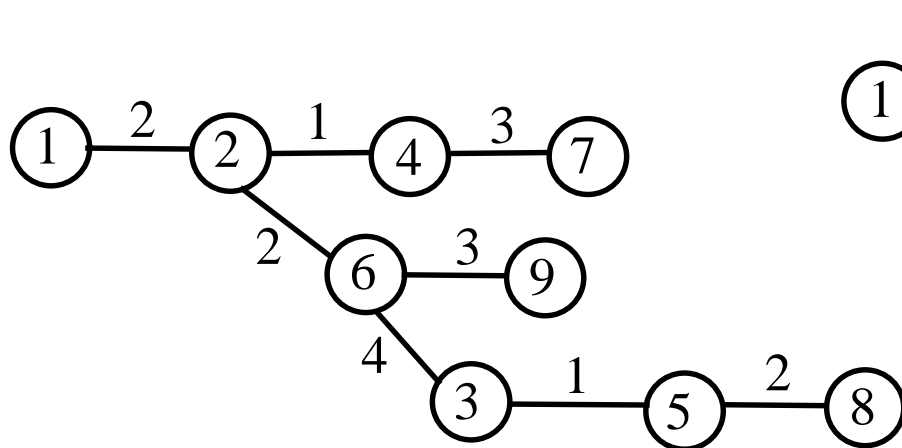
$S = \{1, [2, 4], 6, 7, 9, 3, 5, 8\}$



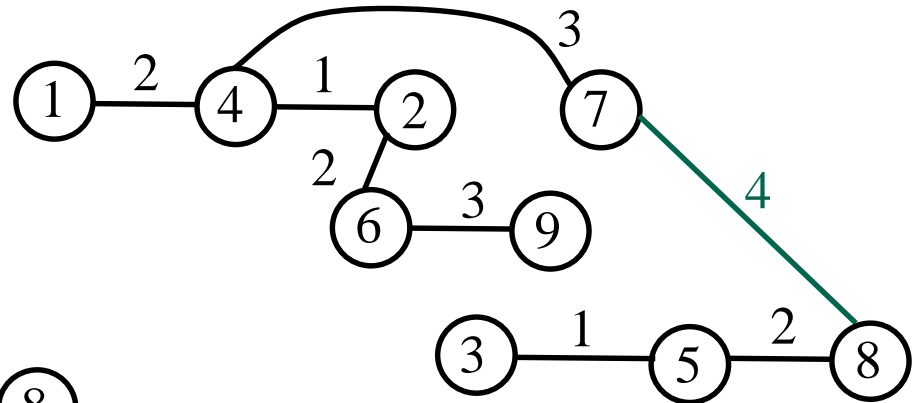
$S' = \{1, [4, 2], 6, 7, 9, 3, 5, 8\}$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (15)

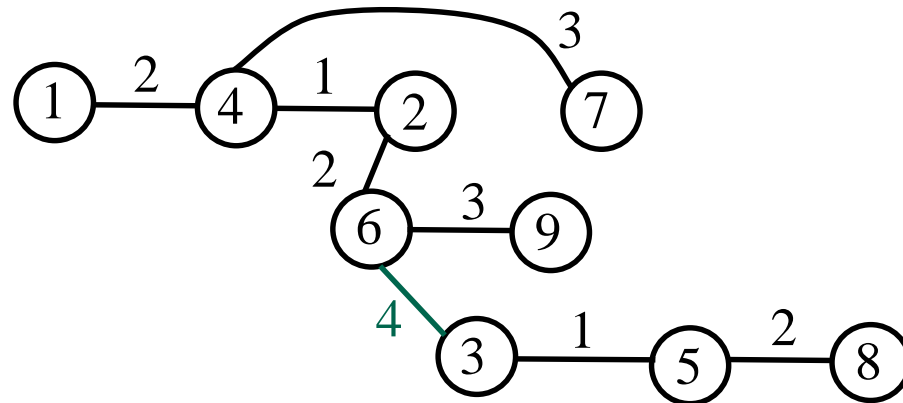
3. Partendo dal vertice 1, esistono più alberi ricoprenti ottimi? Se sì, mostrarne almeno un altro.



$$S = \{1, [2, 4], 6, 7, 9, 3, 5, 8\}$$



$$S'' = \{1, [4, 2], 6, 7, 9, 8, 5, 3\}$$

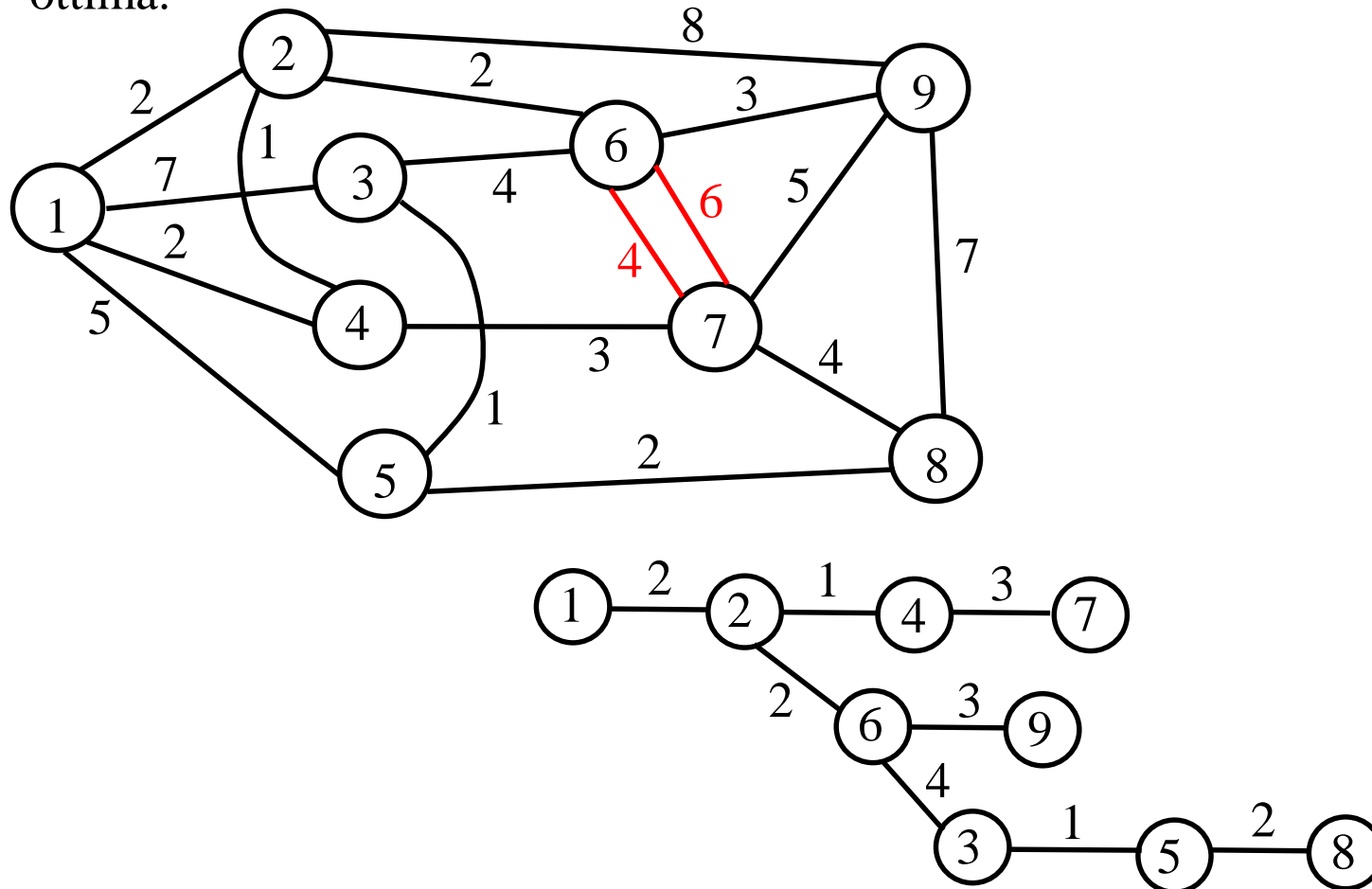


$$S'' = \{1, [4, 2], 6, 7, 9, 3, 5, 8\}$$

Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (16)

4. Partendo dal vertice 1, come varia la soluzione ottima togliendo dal grafo i due lati (6, 7)?

Risposta. Soluzione invariata perché nessuno dei due lati appartiene alla soluzione ottima.



Soluzione Esercizio 4 Prim-Dijkstra (17)

5. Partendo dal vertice 1, come varia la soluzione ottima se il lato (3, 6) ha peso 2?

Risposta. L'albero ricoprente ottimo ha peso 16 invece di 18.

