

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: Diploma ☐ Laurea ☐**Esercizio 1**

E' dato il seguente problema di knapsack intero e una tabella (incompleta) per risolvere il problema con un algoritmo di programmazione dinamica. Completare la tabella e determinare la soluzione ottima.

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
min	$-12x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4$	1	0	0	0	0	0	0	-12	-12	-12	-12
	$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 13 \\ x_i \geq 0 \quad \text{int.} \end{cases}$	2	0	0	-2	-2	-2	-4	-12	-12		...
		3	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-12	-13	
		4	0	-1	-2	-3	-4	-7	-8			

Esercizio 2

Risolvendo il rilassamento lineare di un problema di PLI trovate la soluzione frazionaria $x_{RL}^T = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \right)$.

Formulare e risolvere il problema di trovare un cover violato per il vincolo $7x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 18$.

Esercizio 3

Si consideri un problema di Cutting Stock in cui un modulo di 600 cm deve essere tagliato in elementi di 4 lunghezze diverse: gli elementi di tipo A sono lunghi 110 cm, gli elementi di tipo B sono lunghi 80 cm, gli elementi di tipo C sono lunghi 70 cm e gli elementi di tipo D sono lunghi 100 cm. Durante la soluzione del problema alla base corrente è associata la matrice inversa in figura.

Si vuole sapere se la base corrente è ottima. Se non lo è generare una colonna entrante di costo ridotto negativo.

Risolvere il problema di generazione della colonna entrante con un algoritmo di branch and bound (non di programmazione dinamica)

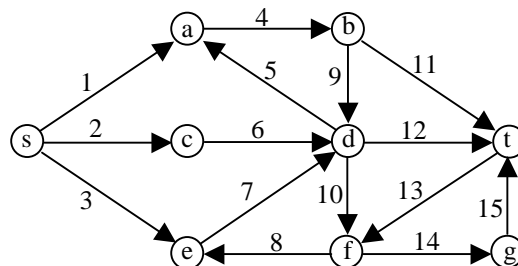
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

In figura è data una rete di flusso i cui archi sono numerati da 1 a 15. In tabella sono riportate, per ogni arco, due quantità: la capacità e un valore di flusso ammissibile.

- Utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson, trovare il massimo flusso st, a partire dal flusso iniziale dato.
- Evidenziare il taglio di capacità minima sul grafo ed elencare gli archi del taglio uscente e del taglio entrante.

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
capacità	10	15	18	12	6	4	5	11	4	2	5	18	11	3	6
flusso	1	4	5	5	4	4	5	0	0	0	5	5	0	0	0



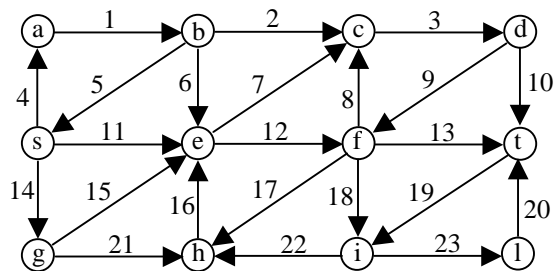
A

Esercizio 5

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 23. In tabella sono riportati i pesi degli archi. Utilizzando l'algoritmo di Dijkstra, trovare il cammino di peso minimo dal nodo s al nodo t .

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
peso	10	2	5	4	3	1	1	1	2	7	16	9

arco	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
peso	4	7	6	1	2	3	1	1	10	1	2

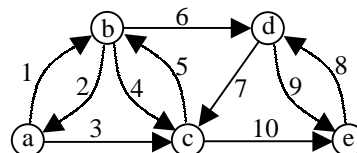


Esercizio 6

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 10. In tabella sono riportati i pesi degli archi.

- Utilizzando l'algoritmo di Floyd e Warshall, trovare, per ogni coppia di nodi (i, j) , il peso del cammino minimo da i a j sul sottografo indotto dall'insieme $\{i, j\} \cup \{b, d\}$.
- Si mostri il cammino così ottenuto dal nodo a al nodo e .

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
peso	6	-3	1	4	-2	4	2	1	3	2



Esercizio 7

Consideriamo il progetto costituito dalle attività A, B, C, D, E.

Tra queste attività sono presenti dei vincoli di precedenza descritti nella seguente tabella:

Attività	Predecessore
A	-
B	-
C	A
D	A
E	B, C

Dopo uno studio preliminare è stata ottenuta una prima pianificazione che prevede il completamento del progetto in 50 giorni.

Indicando con a la limitazione inferiore per la durata d di un'attività e con h il suo costo giornaliero, la

pianificazione presenta le caratteristiche riportate in tabella:

Attività	a (giorni)	d (giorni)	h (MLN)
A	10	20	30
B	30	30	10
C	10	10	20
D	30	30	10
E	10	20	30

- individuare le attività critiche ed i cammini critici,
- se possibile, ridurre il tempo di completamento del progetto,
- indicare il costo dell'operazione al punto b) e stabilire se è possibile ridurre tale costo senza cambiare il valore del tempo di completamento del progetto.

Domanda 8

Si discuta la teoria della complessità, con particolare riferimento al concetto di riduzione polinomiale tra problemi, alla classe NP e ai problemi NP-completi.

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: Diploma ☐ Laurea ☐**Esercizio 1**

E' dato il seguente problema di knapsack intero e una tabella (incompleta) per risolvere il problema con un algoritmo di programmazione dinamica. Completare la tabella e determinare la soluzione ottima.

$$\begin{array}{ll} \min & -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 13 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_3 \leq 2 \\ 0 \leq x_4 \leq 2 \end{cases} \end{array}$$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$7x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 13$	0	0	0	0	0	0	0	-5	-5	-5	-5
2	$0 \leq x_1 \leq 1$	0	0	0	-3	-3	-3	-6	-6	-6	-9	...
3	$0 \leq x_2 \leq 3$	0	-2	-4	-4	-4	-7	-7	-7			
4	$0 \leq x_3 \leq 2$	0	-2	-4	-4	-4	-7	-7	-9			

Esercizio 2

Risolvendo il rilassamento lineare di un problema di PLI trovate, in corrispondenza della base $B = [A_7 \ A_4 \ A_1]$ e della matrice fuori base $F = [A_2 \ A_3 \ A_5 \ A_6]$, la matrice carry in figura. Fornire un taglio di Gomory che separi la soluzione di base corrente.

Matrice carry:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 11/2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{array}$$

matrice fuori base: $F = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Esercizio 3

Si consideri un problema di Cutting Stock in cui un modulo di 600 cm deve essere tagliato in elementi di 4 lunghezze diverse: gli elementi di tipo A sono lunghi 110 cm, gli elementi di tipo B sono lunghi 80 cm, gli elementi di tipo C sono lunghi 70 cm e gli elementi di tipo D sono lunghi 100 cm. Durante la soluzione del problema alla base corrente è associata la matrice inversa in figura.

Si vuole sapere se la base corrente è ottima. Se non lo è generare una colonna entrante di costo ridotto negativo.

Risolvere il problema di generazione della colonna entrante con un algoritmo di branch and bound (non di programmazione dinamica)

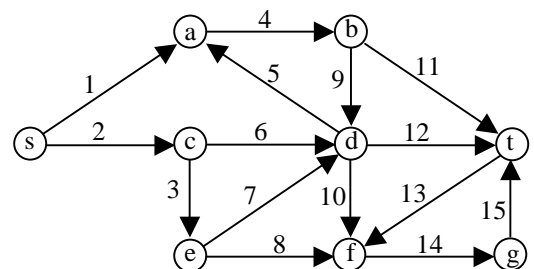
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & 0 & 0 & -1/5 \\ -4/25 & 1/5 & 0 & 1/25 \\ 23/200 & -1/20 & 1/8 & -3/50 \\ -3/5 & 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

In figura è data una rete di flusso i cui archi sono numerati da 1 a 15. In tabella sono riportate, per ogni arco, due quantità: la capacità e un valore di flusso ammissibile.

- Utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson, trovare il massimo flusso st, a partire dal flusso iniziale dato.
- Evidenziare il taglio di capacità minima sul grafo ed elencare gli archi del taglio uscente e del taglio entrante.

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
capacità	9	40	18	7	9	6	6	11	10	9	8	1	13	10	22
flusso	7	10	4	7	0	6	0	4	1	6	6	1	0	10	10



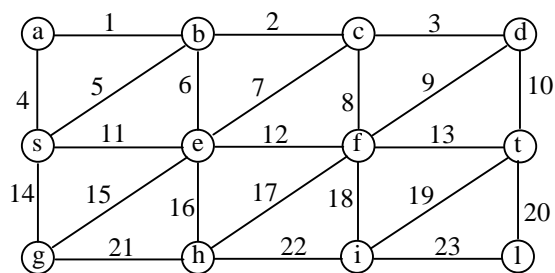
B

Esercizio 5

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 23. In tabella sono riportati i pesi degli archi. Utilizzando l'algoritmo di Prim-Dijkstra, trovare l'albero ricoprente di peso minimo del grafo.

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
peso	7	5	9	2	4	3	3	4	2	5	6	2

arco	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
peso	12	1	4	1	6	1	1	4	2	3	7

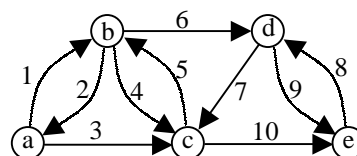


Esercizio 6

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 10. In tabella sono riportati i pesi degli archi.

- Utilizzando l'algoritmo di Floyd e Warshall, trovare, per ogni coppia di nodi (i, j) , il peso del cammino minimo da i a j sul sottografo indotto dall'insieme $\{i, j\} \cup \{a, d\}$.
- Si mostri il cammino così ottenuto dal nodo b al nodo e .

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
peso	10	7	-4	1	2	6	2	4	-3	1



Esercizio 7

In occasione del Giubileo, la casa editrice Punto&Virgola ha avuto la commessa per produrre le guide turistiche di Roma. Le guide devono essere prodotte in 9 lingue diverse oltre all'italiano. La casa editrice vi incarica di selezionare il personale per le traduzioni (dall'italiano) in modo che siano minimizzati i costi. Dopo una selezione preliminare, l'insieme dei professionisti a cui è possibile affidare il lavoro è composto da 6 elementi $(P1, \dots, P6)$.

Ciascuno dei candidati è in grado di tradurre in più lingue e richiede un compenso come riportato in tabella.

- Formulare un problema di set covering per la scelta dei professionisti.
- Se possibile, ridurre il problema fornendo le opportune giustificazioni.
- Indicare una soluzione ammissibile del problema.

<i>Professionisti</i>						
Lingue	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Spagnolo	1	0	1	1	0	0
Francese	1	1	0	0	1	0
Greco	0	0	0	0	1	0
Inglese	1	0	0	1	0	0
Cinese	0	0	1	0	0	0
Portoghese	0	1	1	0	0	0
Polacco	0	0	0	1	0	1
Tedesco	1	1	0	0	0	1
Russo	0	0	0	1	0	1
Costi	6000	2650	550	480	250	750
			0	0	0	0

Domanda 8

Si discutano le strategie di esplorazione dell'albero di enumerazione nei metodi di branch and bound/branch and cut..

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: Diploma ☐ Laurea ☐**Esercizio 1**

E' dato il seguente problema di knapsack intero e una tabella (incompleta) per risolvere il problema con un algoritmo di programmazione dinamica. Completare la tabella e determinare la soluzione ottima.

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
min	$-x_1-10x_2-2x_3-3x_4$	1	0	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-4	-4	-5	
	$\begin{cases} 2x_1+9x_2+3x_3+5x_4 \leq 15 \\ x_i \geq 0 \quad \text{int.} \end{cases}$	2	0	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-4	-10	-10	...
		3	0	0	-1	-2	-2	-3	-4	-4	-5	-10		
		4	0	0	-1	-2	-2	-3	-4	-4	-5			

Esercizio 2

Risolvendo il rilassamento lineare di un problema di PLI trovate la soluzione frazionaria $x_{RL}^T = \left(\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \right)$.

Formulare e risolvere il problema di trovare un cover violato per il vincolo $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 2x_5 \leq 13$.

Esercizio 3

Si consideri un problema di Cutting Stock in cui un modulo di 600 cm deve essere tagliato in elementi di 4 lunghezze diverse: gli elementi di tipo A sono lunghi 110 cm, gli elementi di tipo B sono lunghi 80 cm, gli elementi di tipo C sono lunghi 70 cm e gli elementi di tipo D sono lunghi 100 cm. Durante la soluzione del problema alla base corrente è associata la matrice inversa in figura.

Si vuole sapere se la base corrente è ottima. Se non lo è generare una colonna entrante di costo ridotto negativo.

Risolvere il problema di generazione della colonna entrante con un algoritmo di branch and bound (non di programmazione dinamica)

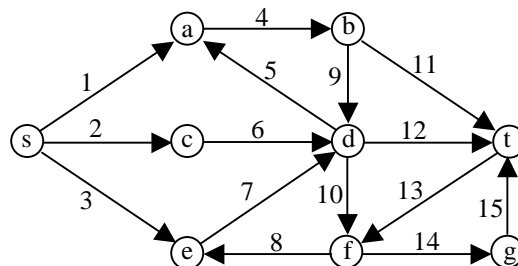
$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/15 & -2/15 & 1/15 \\ 0 & 1/3 & -1/12 & 1/24 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

In figura è data una rete di flusso i cui archi sono numerati da 1 a 15. In tabella sono riportate, per ogni arco, due quantità: la capacità e un valore di flusso ammissibile.

- Utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson, trovare il massimo flusso st, a partire dal flusso iniziale dato.
- Evidenziare il taglio di capacità minima sul grafo ed elencare gli archi del taglio uscente e del taglio entrante.

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
capacità	10	6	9	15	18	5	17	8	6	4	4	18	6	6	6
flusso	0	0	6	4	4	0	6	0	0	2	4	0	0	2	2



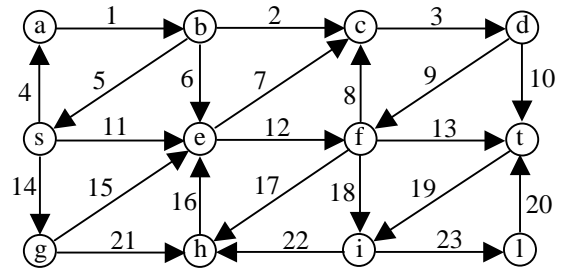
C

Esercizio 5

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 23. In tabella sono riportati i pesi degli archi. Utilizzando l'algoritmo di Dijkstra, trovare il cammino di peso minimo dal nodo s al nodo t .

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
peso	1	2	1	1	5	1	3	6	2	14	7	9

arco	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
peso	3	4	1	2	2	2	5	3	3	1	1

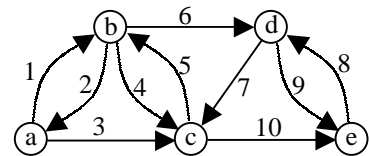


Esercizio 6

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 10. In tabella sono riportati i pesi degli archi.

- Utilizzando l'algoritmo di Floyd e Warshall, trovare, per ogni coppia di nodi (i,j) , il peso del cammino minimo da i a j sul sottografo indotto dall'insieme $\{i,j\} \cup \{c,d\}$.
- Si mostri il cammino così ottenuto dal nodo a al nodo e .

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
peso	2	2	3	1	2	-4	3	2	1	-2



Esercizio 7

Occorre pianificare un progetto il cui completamento richiede l'esecuzione di 10 attività con i vincoli di precedenza riportati in tabella insieme alle durate.

- rappresentare il progetto con un grafo orientato,
- determinare in tempo di completamento minimo per il progetto,
- determinare con la tecnica CPM un cammino critico per il progetto.

Attività	Predecessori	Durata
A	-	5
B	A	7
C	A	3
D	B	4
E	B	5
F	C	6
G	D	2
H	E,F	8
I	A	11
L	G,H	3

Domanda 8

Si dimostri che l'algoritmo di Floyd-Warshall produce la soluzione ottima per il problema di determinare la matrice dei cammini minimi in un grafo privo di cicli negativi

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: Diploma ☐ Laurea ☐**Esercizio 1**

E' dato il seguente problema di knapsack intero e una tabella (incompleta) per risolvere il problema con un algoritmo di programmazione dinamica. Completare la tabella e determinare la soluzione ottima.

$$\min -x_1 - 10x_2 - 3x_3 - 3x_4$$

$$2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

$$0 \leq x_4 \leq 1$$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-3	-3	-3
2		0	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-3	-10	...
3		0	0	-1	-1	-2	-3	-3	-4	-4	-10	
4		0	0	-1	-3	-3	-4	-4	-5	-6		

Esercizio 2

Risolvendo il rilassamento lineare di un problema di PLI trovate, in corrispondenza della base $B = [A_2 \ A_6 \ A_4]$ e della matrice fuori base $F = [A_1 \ A_3 \ A_5 \ A_7]$, la matrice carry in figura. Fornire un taglio di Gomory che separi la soluzione di base corrente.

Matrice carry:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -7 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 1/2 & 17/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5/3 & 0 & 7/3 & 3 \end{array}$$

matrice fuori base: $F = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 3

Si consideri un problema di Cutting Stock in cui un modulo di 600 cm deve essere tagliato in elementi di 4 lunghezze diverse: gli elementi di tipo A sono lunghi 110 cm, gli elementi di tipo B sono lunghi 80 cm, gli elementi di tipo C sono lunghi 70 cm e gli elementi di tipo D sono lunghi 100 cm. Durante la soluzione del problema alla base corrente è associata la matrice inversa in figura.

Si vuole sapere se la base corrente è ottima. Se non lo è generare una colonna entrante di costo ridotto negativo.

Risolvere il problema di generazione della colonna entrante con un algoritmo di branch and bound (non di programmazione dinamica)

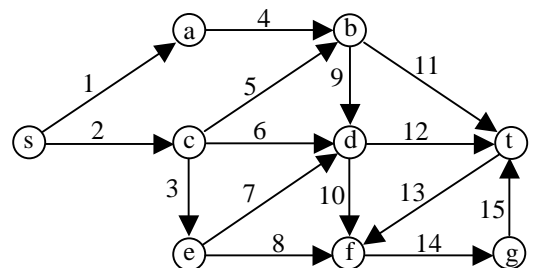
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ -13/32 & -1/8 & 1/8 & 5/16 \\ 1/16 & 1/4 & 0 & -1/8 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

In figura è data una rete di flusso i cui archi sono numerati da 1 a 15. In tabella sono riportate, per ogni arco, due quantità: la capacità e un valore di flusso ammissibile.

- Utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson, trovare il massimo flusso st, a partire dal flusso iniziale dato.
- Evidenziare il taglio di capacità minima sul grafo ed elencare gli archi del taglio uscente e del taglio entrante.

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
capacità	8	31	2	3	4	40	4	3	7	3	6	10	8	9	20
flusso	3	11	2	3	4	5	2	0	3	0	4	10	0	0	0



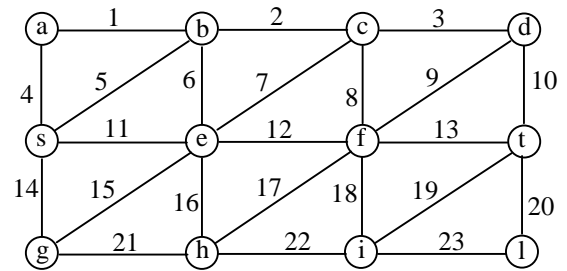
D

Esercizio 5

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 23. In tabella sono riportati i pesi degli archi. Utilizzando l'algoritmo di Prim-Dijkstra, trovare l'albero ricoprente di peso minimo del grafo.

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
peso	3	12	4	6	1	3	2	1	1	12	4	7

arco	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
peso	8	1	1	1	11	2	1	14	1	2	1

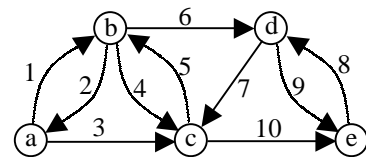


Esercizio 6

In figura è dato un grafo orientato i cui archi sono numerati da 1 a 10. In tabella sono riportati i pesi degli archi.

- Utilizzando l'algoritmo di Floyd e Warshall, trovare, per ogni coppia di nodi (i,j) , il peso del cammino minimo da i a j sul sottografo indotto dall'insieme $\{i,j\} \cup \{a,c\}$.
- Si mostri il cammino così ottenuto dal nodo b al nodo e .

arco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
peso	1	2	2	4	2	-4	5	2	3	-1



Esercizio 7

La società di vigilanza Bassotti ha avuto l'incarico di tenere sotto controllo, tramite pattugliamento, un importante quartiere della città durante le ore notturne. Il contratto prevede il passaggio di almeno una pattuglia in ogni crocevia (si hanno in tutto 9 crocevia). La società vi incarica di selezionare i percorsi delle pattuglie in modo che siano minimizzati i costi.

Dopo uno studio preliminare, l'insieme dei percorsi tecnicamente realizzabili e compatibili con il contratto è composto da P1, P2, P3, P4, P5 e P6.

Ciascun percorso "passa" su più incroci e comporta un costo come riportato nella tabella seguente, dove 1 indica il passaggio sull'incrocio.

<i>Percorsi</i>						
Incroci	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P.zza Marconi	1	0	0	1	0	1
P.zza Zama	1	1	0	0	1	0
La Marina	0	0	0	0	1	0
P.zza Mazzini	1	0	0	1	0	0
P.zza Garibaldi	0	0	0	0	0	1
P.zza Dante	0	1	0	0	0	1
L.go Saraceni	0	0	1	1	0	0
Stella Maris	1	1	1	0	0	0
La Rotonda	0	0	1	1	0	0
Costi	283	412	750	453	250	523

- Formulare un problema di set covering per la scelta dei percorsi.
- Se possibile, ridurre il problema fornendo le opportune giustificazioni.
- Indicare una soluzione ammissibile del problema.

Domanda 8

Si illustri la tecnica dei piani di taglio per la soluzione di problemi di PLI, con particolare riferimento ai tagli di Chvatal, di Gomory e di tipo cover..