M. CARAMIA, S. GIORDANI, F. GUERRIERO, R. MUSMANNO, D. PACCIARELLI
RICERCA OPERATIVA
Isedi

Esercizi proposti nel Cap. 7 - Soluzioni

Esercizio 7.1

$$\text{maz } 6y_1 + 2y_2 + 3y_3$$
$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \geq -3 \\ 4y_1 - y_2 - 2y_3 = 2 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq -1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 7.2

Una stima per eccesso di z^*si può ottenere da una qualsiasi soluzione ammissibile del problema dato. Per esempio la soluzione:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sostituita nella funzione obiettivo fornisce la stima $z(\bar{x}) = 3 \geq z^*$.

Una stima per difetto di z^*si può ottenere da una qualsiasi soluzione ammissibile duale. Il duale del problema dato è il seguente:

$$\text{maz } w(y) = y_1 + 3y_2 + 2y_3$$
$$\begin{cases} y_1 - y_3 \leq 0 \\ -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq 3 \\ 4y_1 - y_2 - 2y_3 \leq 1 \\ y_1, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Una sua soluzione ammissibile è:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che, sostituita nella funzione obiettivo, fornisce la stima per difetto $w(\bar{y}) = 3 \leq z^*$.

Esercizio 7.3

Questo esercizio evidenzia un caso limite di interesse. Infatti il duale di (P) è il seguente:

$$\text{maz } w(y) = y_1 + 3y_2 + 2y_3$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 3 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \leq -1 \\ 3y_1 - 2y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Sarebbe tuttavia sbagliato rispondere alla domanda affermando che poiché la funzione obiettivo è somma di quantità non negative deve essere necessariamente $w^* \geq 0$ e quindi, per il teorema 7.1, $z^* \geq w^* \geq 0$. In effetti il Teorema 7.1 afferma solo che l'esistenza di una soluzione ammissibile duale $\bar{y}$ implica la disequazione $z^* \geq w(\bar{y})$. Nel caso specifico invece il duale risulta inammissibile e pertanto non si può utilizzare il teorema 7.1. In effetti si può verificare che la soluzione:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

è ammissibile per (P) e ha costo 0, il che implica $z^* \leq 0$. In effetti si può dimostrare che il primale è illimitato inferiormente e quindi $z^* = -\infty$.

Esercizio 7.4

- Il problema primale risulta inammissibile. Il duale è:

$$\min\ w(y) = 3y_1 + 3y_2 - 5y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Per poterlo risolvere per via grafica è necessario preliminarmente ridurre il problema a due variabili, per esempio utilizzando l'algoritmo di Fourier-Motzkin (vedi cap. 9.3). Il problema diventa:

$$\min\ w$$
$$\begin{cases} w = 3y_1 + 3y_2 - 5y_3 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Proiettando y_2, y_3 e risolvendo per via grafica il problema risultante nelle variabili y_1, w si ottiene un problema illimitato inferiormente.
I risultati ottenuti sono coerenti con il teorema di dualità forte (vedi Teorema 7.5).

Esercizio 7.5

- Problema duale:

$$\min\ y_1 + 3y_2 + 4y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 0 \\ y_2 + y_3 \geq 1 \\ -y_1 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 = -1 \\ y_1 \leq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- condizioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 2y_2) = 0 \\ x_2(y_2 + y_3 - 1) = 0 \\ x_3(-y_1 + y_3 - 2) = 0 \\ x_4(-y_1 + y_2 - 2y_3 + 1) = 0 \\ y_1(x_1 - x_3 - x_4 - 1) = 0 \\ y_2(2x_1 + x_2 + x_4 - 3) = 0 \\ y_3(x_2 + x_3 - 2x_4 - 4) = 0 \end{cases}$$

- per verificare se la soluzione $\bar{x} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad -1]^T$ è ottima per (P) è necessario sostituire $\bar{x}$ nel sistema precedente e dimostrare che il sistema ammette almeno una soluzione y ammissibile anche per il duale. Sostituendo $\bar{x}$ si ha:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2(y_2 + y_3 - 1) = 0 \\ 0(-y_1 + y_3 - 2) = 0 \qquad \textit{sempre vero} \\ -1(-y_1 + y_2 - 2y_3 + 1) = 0 \\ y_1(1 + 1 - 1) = 0 \\ y_2(2 + 2 - 1 - 3) = 0 \qquad \textit{sempre vero} \\ y_3(2 + 2 - 4) = 0 \qquad \textit{sempre vero} \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene l'unica soluzione: $y_1 = y_2 = 0$; $\quad y_3 = 1$ che non soddisfa il quarto vincolo duale. Pertanto non può esistere una soluzione ammissibile duale che soddisfi le condizioni di ortogonalità. Ne segue che $\bar{x}$ non è soluzione ottima per (P).

Esercizio 7.6

- Problema duale:

$$\max \; y_1 + 2y_2 + 5y_3$$
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ 2y_1 - 2y_2 - 2y_3 \geq -1 \\ -y_1 - 2y_3 \leq 2 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \;\; \textit{libera} \\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- condizioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} y_1(2x_1 + 2x_2 - x_3 - 1) = 0 \\ y_2(-x_1 - 2x_2 - 2) = 0 \\ y_3(x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5) = 0 \\ x_1(2y_1 - y_2 + y_3 - 2) = 0 \\ x_2(2y_1 - 2y_2 - 2y_3 + 1) = 0 \\ x_3(-y_1 - 2y_3 - 2) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $x^* = \left[3 \quad -5/2 \quad 0\right]^T$ si ha:

$$\begin{cases} y_1(6 - 5 - 1) = 0 \quad \textit{sempre vero} \\ y_2(-3 + 5 - 2) = 0 \quad \textit{sempre vero} \\ y_3(3 + 5 - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 0 \\ 3(2y_1 - y_2 + y_3 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y_1 - y_2 + y_3 = 2 \\ -5/2\,(2y_1 - 2y_2 - 2y_3 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y_1 - 2y_2 - 2y_3 = -1 \\ 0(-y_1 - 2y_3 - 2) = 0 \quad \textit{sempre vero} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = 2 \\ 2y_1 - 2y_2 = -1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Si ha la soluzione ottima duale: $y_1 = 5/2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$.

Esercizio 7.7

- Sostituendo $\bar{x}$ nei vincoli del problema si evince immediatamente che la soluzione non è ammissibile. Infatti essa non soddisfa l'ultimo vincolo ($x_1 \leq 0$).
- Per rispondere al secondo punto è necessario impostare il duale di (P) e le condizioni di ortogonalità:

Duale:

$$\min\ w(y) = 4y_1 + 6y_2 - 2y_3$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_3 \leq 3 \\ -y_2 + y_3 \geq 0 \\ -y_1 - y_2 - y_3 \geq -1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ -y_3 \geq -1 \end{cases}$$

Condizioni di ortogonalità (si omettono le prime tre condizioni in quanto gli scarti primali sono sempre nulli):

$$\begin{cases} x_1(2y_1 + 3y_3 - 3) = 0 \\ x_2(-y_2 + y_3) = 0 \\ x_3(-y_1 - y_2 - y_3 + 1) = 0 \\ x_4(y_1 + 2y_2 + y_3 - 1) = 0 \\ x_5(-y_3 + 1) = 0 \end{cases}$$

Dal Teorema 7.6, una soluzione ottima con $x_1 \neq 0$ e $x_4 \neq 0$ deve soddisfare le condizioni:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_3 - 3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui:} \begin{cases} y_1 = \frac{3}{2}(1 - y_3) \\ y_2 = \frac{1}{4}(-1 + y_3) \end{cases}$$

Inoltre y deve essere ammissibile duale. Sostituendo le due condizioni nei vincoli del duale si ottiene:

$$\begin{cases} (3 - 3y_3) + 3y_3 \leq 3 \\ -\frac{1}{4}(-1 + y_3) + y_3 \geq 0 \\ -\frac{3}{2}(1 - y_3) - \frac{1}{4}(-1 + y_3) - y_3 \geq -1 \\ \frac{3}{2}(1 - y_3) + \frac{1}{2}(-1 + y_3) + y_3 \geq 1 \\ y_3 \leq 1 \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} 3 \geq 3 & \mathit{sempre\ vero} \\ 1 + 3y_3 \geq 0 & \Rightarrow \quad y_3 \geq -{}^{1}/_{3} \\ y_3 \geq 1 & \\ 0 \geq 0 & \mathit{sempre\ vero} \\ y_3 \leq 1 & \end{cases}$$

Che ammette l'unica soluzione $y_3 = 1$, da cui si ottiene

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3}{2}(1 - 1) = 0 \\ y_2 = \frac{1}{4}(-1 + 1) = 0 \end{cases}$$

Pertanto, $y = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ è una soluzione ottima duale se e solo se esiste una corrispondente soluzione ammissibile primale che soddisfa le condizioni di ortogonalità (e che quindi è ottima primale). Sostituendo la *y* trovata nelle condizioni di ortogonalità si ottiene:

$$\begin{cases} x_1(+3 - 3) = 0 \\ x_2(1) = 0 \\ x_3(-1 + 1) = 0 \\ x_4(1 - 1) = 0 \\ x_5(-1 + 1) = 0 \end{cases}$$

Si ottiene solo la condizione $x_2 = 0$ che, sostituita nei vincoli primali, fornisce il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \end{cases}$$

Una qualsiasi soluzione ammissibile per questo sistema sarebbe ottima primale. Risolvendo il sistema con l'algoritmo di Fourier-Motzkin si ottiene:

1) proiezione di $x_5 = -x_3 + x_4 + 2$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_3 + x_4 + 2 \geq 0 \\ x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \end{cases}$$

2) proiezione di $x_4 = 4 - 2x_1 + x_3$:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 + 2(4 - 2x_1 + x_3) = 6 \\ -x_3 + 4 - 2x_1 + x_3 + 2 \geq 0 \\ 4 - 2x_1 + x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = -2 \\ +6 - 2x_1 \geq 0 \\ 4 - 2x_1 + x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \end{cases}$$

3) proiezione di $x_1 = x_3 + 2$:

$$\begin{cases} +6 - 2(x_3 + 2) \geq 0 \\ 4 - 2(x_3 + 2) + x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 + 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 \leq 1 \\ x_3 \leq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq -2 \end{cases}$$

Gli ultimi due vincoli sono chiaramente incompatibili, pertanto non esiste una soluzione ammissibile x che soddisfi le condizioni di ortogonalità. Ne segue che <u>non può esistere</u> una soluzione ottima del primale con le caratteristiche desiderate.