

Appunti di Sistemi di Controllo Digitale¹

prof. Giovanni Ulivi e prof. Stefano Panzieri

Dipartimento di Informatica e Automazione
Università degli Studi "Roma TRE"



8 marzo 2006

¹Rev. 2.0

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Campionamento	4
1.3	Esempi	5
1.4	Spettro di un segnale campionato	6
1.5	Ricostruzione - Tenuta	8
1.6	La trasformata Z	10
1.7	Z -trasformate di alcuni segnali canonici	11
1.8	Proprietà della trasformata Z	12
1.9	Antitrasformazione	13
1.10	Relazioni tra piani s e z	14
1.11	Somma di convoluzione e funzione di trasferimento	15
1.12	Equazioni alle differenze	16
1.13	Stabilità - Modi	17
1.14	Poli reali	17
1.15	Caratteristiche delle funzioni di trasferimento in z	19
1.16	Introduzione alla sintesi	21
1.17	Discretizzazione di sistemi continui	22
1.18	Un regolatore PID discreto	23
1.19	Sistemi a tempo di assestamento finito	25
1.20	Un cenno sull'identificazione parametrica	26

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione

I primi impieghi dei calcolatori nel campo dei controlli automatici risalgono alla fine degli anni '50. Allora erano disponibili macchine estremamente costose, ingombranti, delicate e di modesta affidabilità. Tutto ciò ne limitò l'impiego a pochi impianti di notevoli dimensioni in cui svolgevano compiti di supervisione e non vitali: acquisizione di dati, statistiche sul funzionamento dell'impianto, imposizione dei valori di riferimento per i regolatori, ovviamente tutti analogici, secondo sequenze temporali prefissate.

Tutte queste funzioni erano accentrate in un unico elaboratore non solo perché era impensabile utilizzarne diversi per ragioni di costo, ma anche per permettere la presenza di un sistema analogico o di un secondo calcolatore da attivare qualora il principale fosse andato in avaria (eventualità tutt'altro che rara).

Altre ragioni ostacolavano il loro impiego, in modo particolare nella chiusura degli anelli di controllo. Tra queste va annoverata la distanza tra il calcolatore e i sensori e gli attuatori che imponeva la realizzazione di linee per la trasmissione dei segnali (analogici) con ulteriore detrimento dell'affidabilità.

La situazione iniziò a cambiare drasticamente nei primi anni '70, con i miglioramenti nelle tecnologie di progettazione e costruzione dei circuiti integrati a larga scala (VLSI). Essi permisero la realizzazione di circuiti di memoria a stato solido e dei microprocessori, oltre che di circuiti per lo svolgimento delle funzioni di interfaccia. Tali componenti consentirono la realizzazione di piccoli calcolatori (microcalcolatori) di dimensioni molto limitate, in grado di resistere a condizioni ambientali anche molto severe e soprattutto a costi molto contenuti.

Il continuo, regolare e quindi prevedibile miglioramento di tutte le caratteristiche di tali componenti ha poi indotto forti aspettative negli studiosi e nei progettisti di sistemi di controllo, i quali hanno perciò previsto l'impiego di nuovi componenti ancora prima che questi venissero commercializzati o anche progettati, stimolandone così a loro volta la realizzazione.

Attualmente la situazione è tale che è spesso possibile dedicare un microcalcolatore ad ogni anello di controllo, e generalmente ciò è preferibile per molteplici ragioni all'impiego di regolatori analogici.

Un controllore a microcalcolatore eredita diverse caratteristiche peculiari dal dispositivo principale che lo costituisce. Esso è programmabile, può facilmente eseguire operazioni matematiche anche complesse e inoltre può comunicare con dispositivi consimili o con calcolatori remoti con grande facilità.

La programmabilità permette di utilizzare la strategia di controllo più opportuna per ogni tipo di processo, senza che ciò richieda modifiche fisiche (hardware) al dispositivo con cui essa è realizzata. Inoltre durante la

vita dell'impianto è sempre possibile modificare tale strategia per adeguarla a nuove esigenze od anche solo per sfruttare una miglior conoscenza del suo comportamento.

Se si pensa che anche la semplice moltiplicazione risulta essere di complessa realizzazione con tecniche analogiche, si comprende che la possibilità di effettuare qualunque tipo di operazione, comprese quelle trascendenti e con la precisione desiderata invita ad impiegare (e a studiare) nuove metodologie di controllo. Un'ulteriore applicazione di tali capacità è legata all'impiego di sensori con caratteristiche non lineari (ad es. quadratiche) che possono essere facilmente linearizzate memorizzando la caratteristica inversa nella memoria del microcalcolatore.

Ultima ma non meno importante caratteristica di questo tipo di dispositivi è la relativa facilità che hanno di comunicare fra loro e con altri calcolatori con estrema affidabilità. Ciò può essere sfruttato non solo per l'imposizione dei valori di riferimento o l'acquisizione di dati lungo linee assai meno critiche di quelle necessarie per segnali analogici, ma anche per la trasmissione, sulle stesse linee, di messaggi riguardanti lo stato del processo, eventuali sue avarie ed inoltre per variare dinamicamente gli stessi parametri dei controllori in base alle condizioni di funzionamento dell'intero impianto. Anche ciò schiude nuove possibilità per la applicazione di strategie di controllo avanzato.

Scopo di queste brevi note e' stato solo quello di dare una panoramica sull'impatto che ha avuto l'uso dei microcalcolatori anche nel settore dei controlli automatici e dell'automazione.

La presente trattazione è dedicata ai concetti fondamentali che hanno permesso tale uso. Alcuni di essi verranno qui introdotti con un breve esempio.

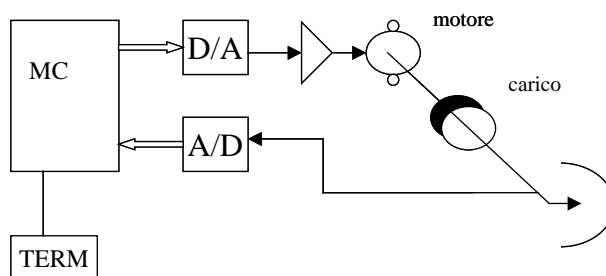


Figura 1.1: Semplice asservimento di posizione

Si consideri il sistema di fig. 1.1. Esso è un semplice azionamento costituito da un motore, che supporremo in continua e alimentato da un appropriato amplificatore di potenza, che pone in rotazione un carico meccanico cui è calettato l'albero di un potenziometro. Tali dispositivi generano e accettano segnali analogici. Per poterli collegare al microcalcolatore che genera e accetta segnali di tipo numerico sono necessari un convertitore analogico/digitale che codifichi la tensione fornita dal potenziometro in un segnale digitale (cioè un numero) e viceversa un convertitore digitale/analogico che trasformi il numero generato dal calcolatore, sulla base della legge di controllo programmata, in una tensione che piloti l'amplificatore di potenza. Si può inoltre supporre che il valore di riferimento venga impostato dal terminale.

Il nome dato ai due convertitori enfatizza l'operazione di codifica dei dati. In realtà essi svolgono rispettivamente anche le conversioni da tempo continuo a discreto (campionamento) e viceversa (ricostruzione). La prima operazione consiste nel prelevare i valori (campioni) del segnale continuo ad istanti ben determinati (istanti di campionamento); la seconda nel costruire a partire dai valori forniti dal microcalcolatore agli stessi istanti un

segnale continuo, secondo una certa legge di interpolazione. Tali operazioni sono quelle che hanno maggior rilevanza per lo studio del comportamento del sistema di controllo.

I convertitori vengono attivati periodicamente dal microcalcolatore ed è intuitivo che tanto più velocemente lo sono tanto meglio il sistema di controllo digitale approssimerà uno analogico. D'altra parte non è sempre conveniente 'approssimare' il comportamento di un sistema analogico, visto che quelli digitali hanno anch'essi delle proprie caratteristiche alquanto interessanti. Esistono infatti due diverse vie per procedere alla sintesi di sistemi di controllo digitali, la prima che si basa sull'approssimazione dei dispositivi a tempo continuo, la seconda che prevede l'utilizzazione anche delle peculiarità di quelli a tempo discreto.

La realizzazione (spesso detta implementazione) di un algoritmo di controllo su un calcolatore pone numerosi altri problemi progettuali. Tra questi si citano quelli connessi alla scelta della frequenza di ciclo (frequenza di campionamento) dell'algoritmo e della complessità dell'algoritmo stesso, alla quantizzazione delle grandezze analogiche dovuta alla conversione in grandezze digitali e al limitato numero di cifre significative dei numeri impiegati nel calcolo della grandezza di controllo.

1.2 Campionamento

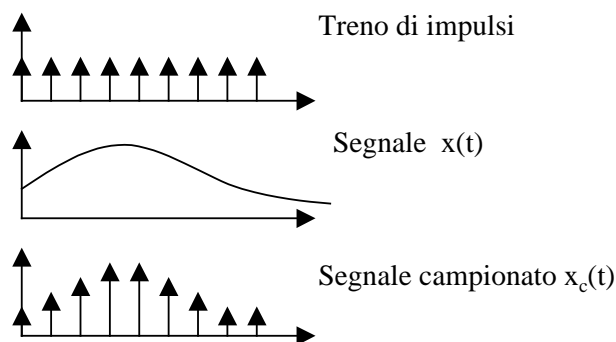


Figura 1.2: Campionamento

Con riferimento alla fig. 1.1 esaminiamo ora più in dettaglio il convertitore A/D. Si tratta di un circuito elettronico in grado di operare ad intervalli di durata costante pari a T_c (intervalli di campionamento) una conversione della grandezza analogica presente al suo ingresso $x(t)$, normalmente tensione o corrente, in una rappresentazione binaria con un numero di bit dipendente dalla precisione del convertitore stesso, spesso 8, 10 o 12 bit. La sequenza di numeri $\{x(t_i)\}$ che si ottiene, con

$$t_i = i * T_c \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

è in questo modo direttamente manipolabile dal microelaboratore. Tuttavia, per poter considerare un segnale di questa natura e continuare ad utilizzare gli strumenti matematici che sono tipici delle funzioni del tempo, si preferisce passare ad una rappresentazione del segnale campionato che conservi da un lato tutta l'informazione propria della sequenza $\{x(t_i)\}$, e dall'altro sia facilmente manipolabile sia come funzione del tempo che come trasformata di Laplace. Si introduce allora un segnale denominato treno di impulsi di Dirac composto da una sequenza di impulsi elementari posizionati in $i * T_c$, distanti quindi tra di loro un tempo T_c , e si definisce segnale

campionato $x_c(t)$ il prodotto del segnale originario $x(t)$ per il suddetto treno di impulsi:

$$x_c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) \delta(t - t_i). \quad (1.2)$$

Si veda la fig. 1.2 dove si è supposto di iniziare il campionamento all'istante $t = 0$.

1.3 Esempi

Si consideri un segnale di andamento esponenziale:

$$x(t) = e^{-3t} \quad (1.3)$$

e si supponga di campionarlo con un periodo di campionamento di 10msec. Si otterrà allora la sequenza di campioni:

$$e^0, e^{-0.03}, e^{-0.06}, \dots, e^{-0.03i}. \quad (1.4)$$

e quindi il segnale campionato sarà:

$$x_c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-0.03i} * \delta(t - 0.01i). \quad (1.5)$$

La stessa sequenza e lo stesso segnale campionato si sarebbero ottenuti, ad esempio, da un segnale continuo avente costante di tempo 1 sec campionato con periodo 30 msec.

Si consideri ora una senoide:

$$x(t) = \sin(500\pi t) \quad (1.6)$$

e un periodo di campionamento di 1msec. Il segnale campionato sarà:

$$x_c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}i\right) * \delta(t - 0.001i) \quad (1.7)$$

E' interessante considerare un altro segnale sinusoidale, con lo stesso periodo di campionamento:

$$x(t) = \sin(2500\pi * t) \quad (1.8)$$

$$x_c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sin(2.5\pi * i) * \delta(t - 0.001i) = \sin\left(\frac{\pi}{2}i\right) * \delta(t - 0.001i) \quad (1.9)$$

cioè lo stesso segnale campionato del caso precedente.

Questo tipo di fenomeno (che va sotto il nome di aliasing) è tipico dei segnali campionati. Di esso verrà in seguito data spiegazione. Nell'esperienza quotidiana, il fenomeno non è raro ed è in genere legato all'illuminazione di oggetti rotanti con luci pulsanti periodicamente, ad esempio l'impiego di uno stroboscopio nella messa a punto di motori a scoppio permette di vedere fermo il volano in quanto i lampi sono esattamente sincronizzati con la rotazione del motore mentre le pale di un ventilatore sembrano ruotare lentamente quando illuminate da una luce al neon che ha una frequenza prossima a quella di rotazione.

1.4 Spettro di un segnale campionato

L'operazione di campionamento permette di derivare da un segnale continuo un nuovo segnale considerando il primo solo in istanti discreti. E' intuitivo che tale operazione possa ridurre il contenuto informativo del segnale originario, cioè renda impossibile ricostruire esattamente il primo segnale a partire dal secondo. Esistono però certe condizioni sotto le quali è possibile eseguire l'operazione inversa testè descritta.

Tali condizioni sono state studiate da Nyquist e da Shannon il quale le sintetizzò in un importante teorema (detto del campionamento)¹. Operiamo innanzitutto una preliminare analisi di alcune caratteristiche dello spettro del segnale $x_c(t)$.

Si consideri la sua trasformata di Laplace. Ricordando che:

$$L[\delta(t - t_i)] = e^{-t_i s} \quad (1.10)$$

si ha immediatamente:

$$L[x_c(t)] = X_c(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) * e^{-t_i s} \quad (1.11)$$

Se ora si ricorda che:

$$e^{-t_i s} = e^{-t_i a} * [\cos(-t_i \omega) + j \sin(-t_i \omega)] \quad (1.12)$$

con $a = \operatorname{Re}[s]$ e $\omega = \operatorname{Im}[s]$, si comprende che la (1.11) è periodica rispetto a ω con periodo $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$. Pertanto è possibile suddividere il piano complesso in fasce orizzontali come mostrato in fig. 1.3. La conoscenza della $X_c(s)$ in una delle fasce (ad es. quella da $-\frac{\omega_c}{2}$ a $\frac{\omega_c}{2}$) ne comporta la conoscenza nell'intero piano.

Quando l'ascissa di convergenza dalla trasformata (1.11) è negativa è possibile ottenere la trasformata di Fourier effettuando nella stessa la sostituzione $s = j\omega$. In tal caso anche la trasformata di Fourier del segnale (cioè il suo spettro di ampiezza) risulta periodica, come indicato in fig. 1.4 per il modulo di un segnale limitato in banda. I lobi sono *tutti uguali tra di loro* e quindi basta conoscerne uno per conoscere l'intero spettro.

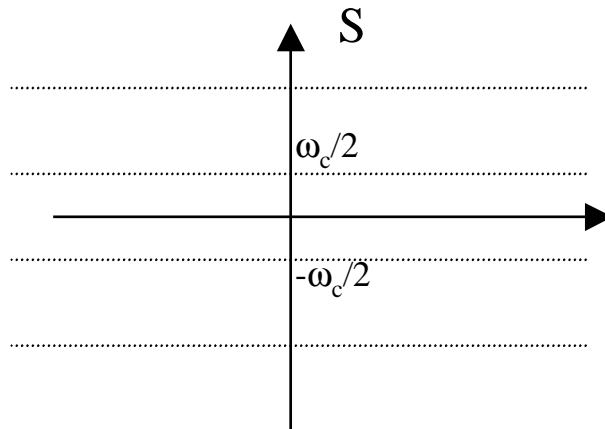


Figura 1.3: Fasce sul piano S

E' ora possibile enunciare il teorema del campionamento il quale afferma che tale spettro può essere espresso come:

$$X_c(j\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_c) \quad (1.13)$$

¹vedi corso di Teoria dei Segnali

essendo $X(\omega)$ lo spettro del segnale analogico originario. Perciò, non solo lo spettro risulta periodico ma per di più, in ogni intervallo, risulta uguale allo spettro del segnale di partenza. Una dimostrazione di questo teorema può essere data considerando che il segnale campionato $x_c(t)$ è il prodotto di $x(t)$ per il treno di impulsi di Dirac

$$x_c(t) = x(t)\delta_T = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \quad (1.14)$$

e che questo, in considerazione del fatto che risulta essere un segnale periodico di periodo T_c può essere sviluppato in serie di Fourier come

$$\delta_T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_c t} \quad (1.15)$$

con

$$c_k = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \delta_T(t) e^{-jk\omega_c t} dt = \frac{1}{T_c} \quad (1.16)$$

dove $\omega_c = 2\pi/T_c$, da cui

$$x_c(t) = x(t) \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_c t} = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_c t}. \quad (1.17)$$

Passando alla trasformata di Laplace ed utilizzando la proprietà di traslazione complessa si ottiene

$$X_c(s) = L[x_c(t)] = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L[x(t) e^{jk\omega_c t}] = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\omega_c) \quad (1.18)$$

che diventa la (1.13) se valutata per $s = j\omega$.

Nel caso di fig. 1.4 ognuno dei lobi è quindi proporzionale allo spettro opportunamente traslato del segnale $x(t)$, in quanto esso si estende fino a un valore $\omega_{max} < \frac{\omega_c}{2}$. Quando ciò non avviene, si ha invece la situazione di fig. 1.5 in cui i vari lobi si sovrappongono distortendosi a vicenda. In questo caso non è più possibile l'esatta ricostruzione del segnale di partenza, ma solo una approssimata, con errori che dipendono dalla forma dello spettro originario, del valore della frequenza di campionamento, e quindi da T_c .

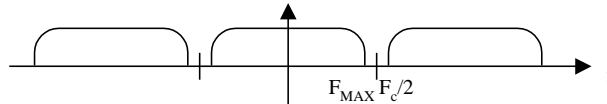


Figura 1.4: Spettro di un segnale campionato F_{MAX} minore di $F_c/2$

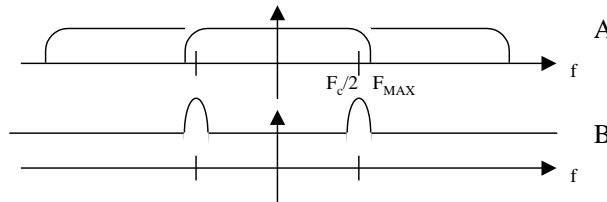


Figura 1.5: Spettro di un segnale campionato. F_{MAX} maggiore di $F_c/2$. A- sovrapposizione spettri; B- spettro risultante

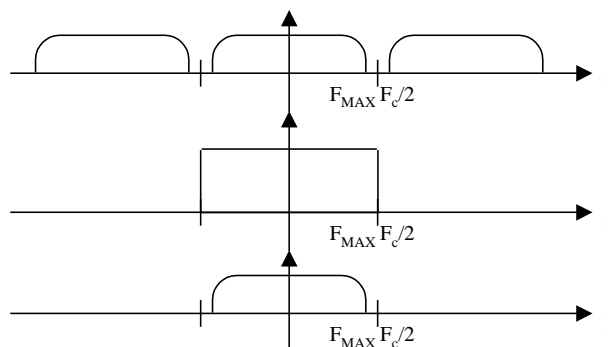


Figura 1.6: Ricostruzione mediante un filtro ideale

Notiamo che nel tempo è possibile calcolare la risposta impulsiva del filtro ideale utilizzato per la ricostruzione del segnale. Questa è data dalla

$$g(t) = \frac{\sin(\omega_c t/2)}{\omega_c t/2} \quad (1.19)$$

che ha l'andamento della fig. 1.7

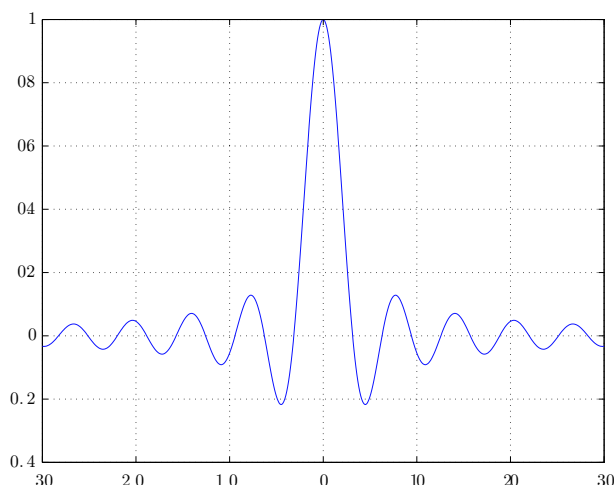


Figura 1.7: Ricostruttore di Shannon

che risulta essere non causale visto che rimane diversa da zero anche per tempi negativi. Vedremo, nel paragrafo successivo, come al posto di questo ricostruttore sarà possibile utilizzarne uno approssimato ma impiegabile nella realtà.

1.5 Ricostruzione - Tenuta

Nel precedente paragrafo sono state esposte le condizioni secondo cui è possibile campionare un segnale senza alterarne il contenuto informativo; si affronterà ora il problema della sua ricostruzione a partire dal segnale campionato.

Si consideri ancora il segnale che si ottiene campionando un generico $x(t)$ limitato in banda, il cui spettro è riportato in fig. 1.6. E' chiaro che disponendo di un filtro ideale, cioè di un circuito il cui modulo della

risposta armonica sia quello riportato immediatamente sotto in fig. 1.6 e la cui fase sia linearmente variabile con la frequenza, sarebbe possibile estrarre solo il lobo principale dell'intero spettro, che per il teorema del campionamento è uguale (a parte la costante T_c) a quello del segnale di partenza. L'uguaglianza degli spettri (in modulo e fase) assicura anche l'uguaglianza dell'andamento temporale dei due segnali.

E' chiaro che un simile circuito non esiste, come d'altra parte non esistono i segnali rigorosamente limitati in banda: infatti l'antitrasformata di una funzione *rect* è la funzione *sync* che si estende da $-\infty$ a $+\infty$ e come risposta impulsiva sarebbe non causale in quanto diversa da zero anche per tempi negativi. Si noti che la *sync* è comunque approssimabile prelevandone un segmento (simmetrico rispetto all'origine) ed accettando un ritardo pari alla metà della lunghezza del segmento stesso. Detto ritardo, però, indurrebbe problemi di stabilità in un sistema di controllo a controreazione, pur essendo invece accettabile in molte applicazioni, ad esempio, di TLC.

Molto più limitativa da un punto di vista costruttivo è l'ipotesi di realizzare la $x_c(t)$ e di applicarla ad un dispositivo reale, essendo questa costituita da una successione di impulsi ideali. E' quindi indispensabile utilizzare un'approssimazione della $x_c(t)$ che sia espressa come sequenza di segnali impulsivi fisicamente realizzabili di ampiezza opportuna. La scelta più semplice e anche quella più spesso utilizzata è di utilizzare segnali rettangolari di ampiezza $x(t_i)$:

$$x_h(t) = x(t_i) \quad t = [t_i, t_i + T_c] \quad (1.20)$$

Scegliendo opportunamente la frequenza di campionamento (spesso anche qualche decina di volte di quella teorica dettata dal relativo teorema) e' possibile ridurre le distorsioni dello spettro (e quindi del segnale ricostruito) a valori più che accettabili per le applicazioni.

Il circuito che realizza tale tipo di conversione tempo discreto - tempo continuo è detto circuito di tenuta di ordine zero ('zero order hold' in inglese). Il comportamento di questo circuito è schematizzato in fig. 1.8. Esso riceve (idealmente) al suo ingresso il segnale campionato

$$x_c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_c) \delta(t - iT_c) \quad (1.21)$$

e fornisce all'uscita una gradinata che approssima il segnale analogico $x(t)$, riportato tratteggiato nelle figure. Osservando la fig. 1.8B si intuisce che l'operazione effettuata introduce un ritardo del segnale ricostruito rispetto a quello analogico. Questa osservazione può essere confermata determinando la funzione di trasferimento dell'organo di tenuta.

A tal fine si consideri che il segnale di uscita può essere considerato scomposto in una sequenza di rettangoli ognuno dei quali ottenuto come somma di due gradini fig. 1.8. Quindi l'uscita vale

$$x_h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_c) [\delta_{-1}(t - iT_c) - \delta_{-1}(t - (i+1)T_c)] \quad (1.22)$$

la cui trasformata di Laplace e':

$$X_h(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_c) \frac{e^{-siT_c} - e^{-s(i+1)T_c}}{s} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_c) e^{-siT_c} * \frac{1 - e^{-sT_c}}{s}. \quad (1.23)$$

E' facile riconoscere che il termine a sinistra del segno di prodotto è la trasformata di Laplace del segnale $x_c(t)$ e quindi la funzione di trasferimento del circuito di tenuta vale:

$$T(s) = \frac{1 - e^{-sT_c}}{s} \quad (1.24)$$

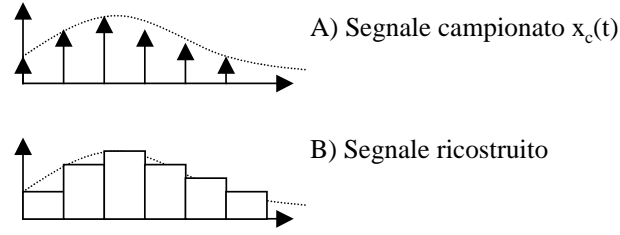


Figura 1.8: Organo di tenuta

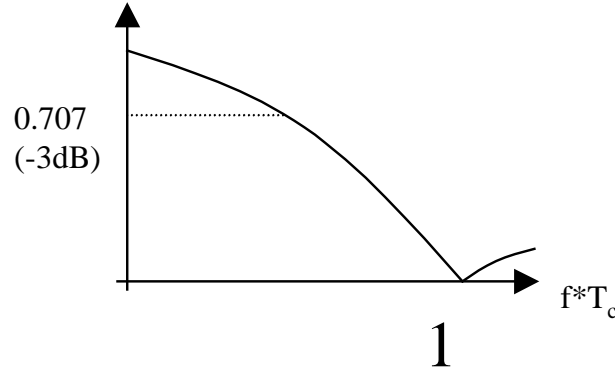


Figura 1.9: Risposta armonica dell'organo di tenuta

Da questa si può risalire alla risposta in frequenza con la sostituzione $s = j\omega$.

Per basse frequenze è però possibile trovare una approssimazione molto più semplice sviluppando in serie di Mac Laurin il termine e^{sT_c} , che tralasciando i termini dello sviluppo superiori al primo dà

$$e^{sT_c} = 1 + sT_c \quad (1.25)$$

e quindi

$$\frac{T_c}{1 + sT_c} \quad (1.26)$$

che contiene un polo semplice e che giustifica, tra l'altro, il ritardo "intuito" osservando la fig. 1.8 b. Tale circuito risulta avere alle basse frequenze guadagno pari a T_c , fattore presente nella (13).

1.6 La trasformata Z

I concetti espressi nei paragrafi precedenti, insieme a quelli propri dei sistemi continui, permettono di analizzare il comportamento di un sistema di controllo come quello descritto nell'introduzione. Sono infatti ora noti gli effetti del campionamento sui segnali ed è possibile scegliere una frequenza di campionamento opportuna sulla base dei loro spettri previsti. E' stato inoltre presentato il modo di ricostruire il segnale, mediante un organo di tenuta e la funzione di trasferimento di questo circuito.

Tuttavia, poichè le azioni di controllo sono effettuate solo in istanti discreti e negli intervalli fra di essi è noto a priori l'andamento della variabile di ingresso dei processi controllati, è opportuno ricercare per essi modelli matematici più semplici di quelli adatti per il tempo continuo e più adatti alla particolare natura dei segnali

in gioco. Tali modelli possono essere ricavati tramite la Z-trasformata, in modo del tutto analogo a quanto già noto nel dominio della variabile di Laplace.

Questa trasformazione, specifica per segnali e sistemi campionati, presenta forti analogie con quella di Laplace, da cui si può far discendere con una sostituzione di variabile. Si consideri infatti il generico segnale campionato:

$$x_c(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) \delta(t - t_i) \quad (1.27)$$

con trasformata di Laplace:

$$X_c(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) e^{-st_i} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_c) e^{-siT_c} \quad (1.28)$$

la sostituzione $z = e^{sT_c}$ fornisce immediatamente la sua Z-trasformata:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_c) * z^{-i} \quad (1.29)$$

La relazione tra la sequenza $\{x(iT_c)\}$ e la funzione $X(z)$ si suole indicare in forma sintetica come:

$$X(z) = Z[\{x(iT_c)\}] \quad (1.30)$$

o anche, semplificando la notazione:

$$X(z) = Z[x(i)]. \quad (1.31)$$

1.7 Z-trasformate di alcuni segnali canonici

a) Il gradino: $x(t) = \delta_{-1}(t)$.

I campioni di un segnale a gradino per $t > 0$ sono:

$$x(iT_c) = 1 \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

quindi applicando la (1.29) si ha:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} \quad (1.33)$$

che come noto converge a :

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (1.34)$$

se $|z| > 1$.

b) L'esponenziale: $x(t) = e^{-at}$.

I campioni di un segnale esponenziale per $t > 0$ sono:

$$x(iT_c) = e^{-a*iT_c} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.35)$$

quindi applicando la (1.29) si ha:

$$X(z) = 1 + (ze^{aT_c})^{-1} + (ze^{aT_c})^{-2} + \dots \quad (1.36)$$

che come noto converge a:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT_c}} = \frac{z}{z - b} \quad (1.37)$$

con $b = e^{-aT_c}$, se $|z| > b$.

c) La sinusoide: $x(t) = \sin(\omega t)$.

Come noto, una funzione circolare può essere espressa come somma di esponenziali complessi:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (1.38)$$

quindi la sua z-trasformata può essere ottenuta sfruttando il precedente risultato, ponendo sia $a = j\omega$ che $a = -j\omega$:

$$X(z) = \frac{1}{2j} * \left[\frac{z}{z - e^{j\omega T_c}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T_c}} \right] = \frac{z * \sin(\omega T_c)}{z^2 - 2z * \cos(\omega T_c) + 1} = \frac{bz}{z^2 - 2cz + 1} \quad (1.39)$$

con ovvio significato delle costanti b e c .

1.8 Proprietà della trasformata Z

La trasformata Z gode di diverse proprietà, anch'esse abbastanza simili a quelle della trasformata di Laplace. Di seguito si elencheranno le più significative, riportando solo le dimostrazioni più interessanti.

a) Linearità.

La trasformata Z è un operatore lineare, cioè :

$$Z[m * x(iT_c)] = m * Z[x(iT_c)] = m * X(z) \quad (1.40)$$

$$Z[m * x(iT_c) + n * y(iT_c)] = m * X(z) + n * Y(z) \quad (1.41)$$

b) Ritardo.

Data la sequenza di campioni $x(iT_c)$, derivante dal segnale $x(t)$, si può considerare una sequenza $r(iT_c)$, ritardata di un periodo di campionamento, tale cioè che all' i -mo istante assuma il valore che la $x(iT_c)$ aveva all' $(i-1)$ -mo:

$$r(iT_c) = x((i-1)T_c) \quad (1.42)$$

Dalla (1.29) si ha infatti:

$$R(z) = r(iT_c) * z^{-i} = x(-T_c)z^0 + r(iT_c)z^{-i} \quad (1.43)$$

posto $l = i - 1$ e ricordando che $x(-T_c)$ si ipotizza nullo, si ha:

$$R(z) = r((l-1)T_c) * z^{-l} * z^{-1} = z^{-1} * X(z) \quad (1.44)$$

c) Anticipo.

Analogamente a quanto prima descritto si può considerare una sequenza anticipata, per la quale si ha:

$$a(iT_c) = x((i+1)T_c)A(z) = z * X(z) - z * x(0) \quad (1.45)$$

d) Valore iniziale.

Il valore iniziale della sequenza di campioni vale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (1.46)$$

Deriva immediatamente dalla (1.29) espandendo la sommatoria:

$$X(z) = x(0) + x(T_c) * z^{-1} + x(2 * T_c) * z^{-2} \dots \quad (1.47)$$

e) Valore finale.

Analogamente si ha:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(iT_c) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) * X(z). \quad (1.48)$$

1.9 Antitrasformazione

Si è visto nel paragrafo 1.7 come passare da un segnale campionato (o meglio dalla successione dei suoi campioni) alla sua trasformata Z . Si affronterà ora il problema inverso, precisando subito che mentre il passaggio dalla trasformata Z alla successione di valori $x(iT_c)$ è univoco, non altrettanto lo è quello dalla successione al segnale $x(t)$ (vedi teorema del campionamento).

Esistono diversi modi per ricavare la successione $x(iT_c)$ di cui $X(z)$ è la trasformata. Il primo deriva direttamente dalla teoria dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione di variabile complessa. Infatti la (1.29) può essere anche interpretata come lo sviluppo in serie di potenze della variabile z della funzione $X(z)$. Si può pertanto scrivere:

$$x(iT_c) = \int_{\Gamma} X(z) z^{i-1} dz \quad (1.49)$$

essendo l'integrale effettuato su una linea chiusa Γ che racchiude i poli di $X(z)$ e circonda l'origine [GH1].

Molto più immediati da utilizzare sono altri metodi che si basano sulla considerazione che nei problemi reali la $X(z)$ è espressa come rapporto di polinomi.

Un primo metodo si basa sull'espansione in frazioni parziali con le stesse tecniche impiegate per la trasformata di Laplace, così da scomporre la trasformata Z in espressioni semplici di cui siano già note le antitrasformate. Un diverso metodo si presta ad essere facilmente realizzato su calcolatore e si basa sulla seguente identità, dove si è semplificata la notazione relativa al generico termine $x(iT_c)$:

$$x_0 + x_1 z^{-1} + \dots = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} \quad (1.50)$$

moltiplicando il primo termine per il denominatore del secondo e confrontando col numeratore, si ottiene:

$$x_0 * D(z) + x_1 z^{-1} * D(z) + \dots = N(z) \quad (1.51)$$

con

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 x_0 \\ b_1 &= a_0 x_1 + a_1 x_0 \\ b_2 &= a_0 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.52)$$

che è un sistema di equazioni triangolare, che può essere risolto con grande facilità. Si noti che la somma dei pedici degli addendi in ogni riga è costante.

Tale metodo, a differenza del precedente, non fornisce la sequenza $x(iT_c)$ in forma analitica e richiede il calcolo di tutti i campioni intermedi.

1.10 Relazioni tra piani s e z

Le z -trasformate trovate nel precedente paragrafo convergono nei punti del piano esterni ad un cerchio, centrato nell'origine e che racchiude i poli delle trasformate stesse. Questo è un risultato generale, del tutto analogo a quello per cui la trasformata di Laplace esiste per valori di s aventi ascissa maggiore di quella della retta parallela all'asse immaginario che lascia alla propria sinistra i poli della trasformata stessa.

La relazione tra piano s e piano z può essere ulteriormente analizzata considerando la trasformazione tra i punti dei due piani definita dalla $z = e^{sT_c}$. In particolare, poichè

$$e^{(s+jn\omega_c)T_c} = e^{sT_c} * e^{jn\omega_c T_c} = e^{sT_c} * e^{j2\pi n} = e^{sT_c} \quad (1.53)$$

essendo $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$, tutti i punti $s + jn\omega_c$ vengono proiettati nel medesimo punto $e^{(sT_c)}$ del piano z . Ciò in perfetta analogia con quanto detto a proposito degli spettri dei segnali campionati.

La fig. 1.10 mostra la proiezione descritta e la particolarizza per la semifascia principale sinistra del piano s . Essa ha per lati il segmento a e le semirette b e c che si incontrano nel punto all'infinito d .

Lungo il lato a si ha

$$\operatorname{Re}[s] = 0, \quad \operatorname{Im}[s] = \omega = \frac{-\omega_c}{2} \dots \frac{\omega_c}{2} \quad (1.54)$$

quindi

$$\operatorname{mod}(z) = 1 \quad \operatorname{arg}(z) = -\pi \dots \pi. \quad (1.55)$$

Esso quindi si trasforma nella circonferenza di raggio unitario, centrata nell'origine.

Lungo il lato b si ha:

$$z = e^{(a + j\frac{\omega_c}{2})T_c} = e^{aT_c} * e^{j\pi} = -e^{aT_c} \quad (1.56)$$

avendo posto $a = \operatorname{Re}[s]$.

Esso si trasforma quindi nel segmento b' nel piano z , indicato in fig. 1.10.

Analogamente per il lato c , mentre il punto all'infinito si trasforma nell'origine del piano z . D'altra parte per quanto detto in precedenza, anche le altre semifasce sinistre del piano s vengono proiettate nel cerchio unitario e quindi si può affermare che l'intero semipiano sinistro del piano s viene proiettato all'interno del cerchio, mentre l'asse immaginario diviene la circonferenza di raggio unitario.

In conseguenza di quanto detto si può dedurre che la z -trasformata della sequenza di campioni di un segnale (modo) convergente ha poli all'interno del cerchio suddetto, di uno costante o stazionario sulla circonferenza, di uno divergente all'esterno di questa.

Si noti che le posizioni dei poli indicate in figura sono indicative, dipendendo esse dal valore di T_c .

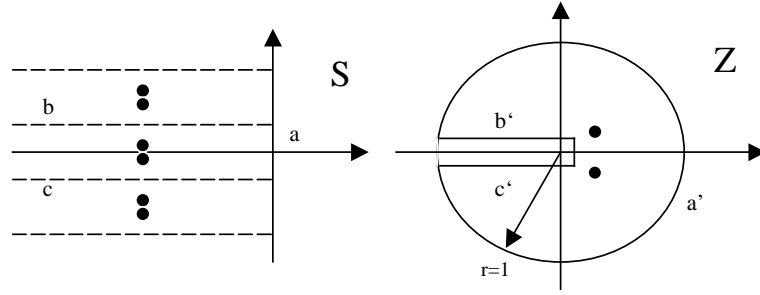


Figura 1.10: Corrispondenza tra i piani s e z

1.11 Somma di convoluzione e funzione di trasferimento

Consideriamo la risposta di un sistema lineare, avente risposta impulsiva $g(t)$, ad un ingresso $u_c(t)$ del tipo (1.2). Essa sarà costituita da una successione di risposte impulsive, distanziate di T_c secondi e di ampiezza proporzionale al valore dell'ingresso:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u(iT_c) * g(t - iT_c). \quad (1.57)$$

Se anche l'uscita è campionata in modo sincrono con l'ingresso si ha:

$$y(kT_c) = \sum_{i=0}^{\infty} u(iT_c) * g[(k - i)T_c] \quad (1.58)$$

dove l'indice k è relativo ai campioni dell'uscita.

La (1.58) prende il nome di somma di convoluzione.

L'uscita campionata $y(kT_c)$ può a sua volta essere considerata un segnale campionato del tipo (1.2), la cui trasformata di Laplace vale quindi:

$$Y_c(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_c) * e^{-ksT_c} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u(iT_c) g[(k - i)T_c] * e^{-ksT_c}. \quad (1.59)$$

Posto $l = k - i$ e quindi sostituendo $k = l + i$, si ha:

$$Y_c(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u(iT_c) g(lT_c) * e^{-lsT_c} * e^{-isT_c} = \sum_{l=0}^{\infty} g(lT_c) * e^{-lsT_c} * \sum_{i=0}^{\infty} u(iT_c) * e^{-isT_c} \quad (1.60)$$

tenendo conto che $g(lT_c) = 0$ per $l < 0$.

Si ottiene pertanto

$$Y(z) = G(z) * U(z) \quad (1.61)$$

avendo posto

$$G(z) = \sum_{l=0}^{\infty} g(lT_c) * e^{-lsT_c}. \quad (1.62)$$

La funzione $G(z)$ prende il nome di funzione di trasferimento in z del sistema e gioca esattamente lo stesso ruolo della $G(s)$ nel campo dei sistemi continui. Essa ha la forma:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} \quad (1.63)$$

ovvero, moltiplicando numeratore e denominatore per z^m :

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m} \quad (1.64)$$

I poli della $G(z)$ si ottengono uguagliando il denominatore a zero e hanno un ruolo essenziale nello studio della stabilità del sistema. Essi sono in numero pari a quello del sistema continuo originario. Il loro numero definisce l'ordine del sistema.

La $G(z)$ di un sistema a tempo continuo si può ottenere (fissato T_c) trasformando la sua risposta impulsiva campionata $g(iT_c)$ o l'espansione in frazioni parziali della sua funzione di trasferimento $G(s)$ con i metodi visti nel paragrafo 1.7, ovvero ancora con l'ausilio di tavole di trasformate di cui una è riportata in appendice.

Le due forme (61) e (62) sono algebricamente equivalenti ma, mentre la prima è realizzabile in termini di operazioni di ritardo, fisicamente realizzabili, la seconda richiede operazioni di anticipo.

La trasformazione espressa dalla (1.62), conserva la risposta impulsiva del sistema originale. Ciò significa che il sistema discreto descritto dalla $G(z)$ ha una risposta impulsiva $g(iT_c)$ uguale (negli istanti di campionamento) a quella del sistema continuo descritto dalla $G(s)$. Altre sue caratteristiche però variano, tra queste anche la risposta in frequenza. Sull'argomento si tornerà nei successivi paragrafi.

1.12 Equazioni alle differenze

E' ora possibile dimostrare che un sistema discreto ammette come rappresentazione nel dominio del tempo un'equazione alle differenze, del tipo:

$$a_0 y(i) + a_1 y(i-1) + \dots + a_m y(i-m) = b_0 u(i) + b_1 u(i-1) + \dots + b_m u(i-m). \quad (1.65)$$

Infatti tale tipo di equazione si può anch'essa riportare alla forma (61), applicando più volte la proprietà del ritardo in Z , espressa dalla (42).

Ricordando che i termini con indici negativi sono nulli e considerando $i = 1, 2, \dots$, allora $y(i)$ può essere vista come una sequenza di valori, $y(i-1)$ come la stessa ritardata di un passo, e^{T_c} . Per ognuna di tali sequenze si può considerare la trasformata Z e applicando la (1.29), si ottiene così:

$$Y(z) * [a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}] = U(z) * [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}] \quad (1.66)$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} * U(z) \quad (1.67)$$

identica alla (1.64).

La rappresentazione mediante equazioni alle differenze è notevolmente utile in quanto è immediatamente ricavabile dalla $G(z)$ e permette di calcolare velocemente i campioni dell'uscita di un sistema discreto, nota la sua $G(z)$, i campioni dell'ingresso e le condizioni iniziali²:

²il modo più semplice, per scopi didattici, di calcolare e visualizzare l'evoluzione dell'uscita è quello di ricorrere ad uno spreadsheet

$$y(i) = -a_1 y(i-1) - \dots - a_m y(i-m) + b_0 u(i) + \dots + b_m u(i-m). \quad (1.68)$$

dove i coefficienti a e b sono stati normalizzati ad a_0 .

Poter rappresentare un sistema dinamico con equazioni alle differenze invece che con equazioni differenziali, come nel caso dei sistemi a tempo continuo, è indice di una maggiore semplicità di trattazione e della possibilità di trovare metodi di analisi e sintesi diversi da quelli usuali.

1.13 Stabilità - Modi

Come visto nel paragrafo 1.10, la trasformata Z stabilisce una corrispondenza tra i punti del piano s e quelli del piano z ed inoltre il semipiano di ascissa negativa del primo si trasforma nel cerchio di raggio unitario e centro nell'origine. Ciò permette di affermare che la trasformata z relativa alla funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile ha tutti i poli all'interno di tale cerchio.

Questa affermazione può essere verificata considerando le evoluzioni libere campionate di semplici sistemi e come esse varino al modificarsi della posizione dei poli della relativa funzione di trasferimento in z .

1.14 Poli reali

Si consideri un sistema continuo caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{k}{s+a} \quad (1.69)$$

e si tralasci l'organo di tenuta. La sua funzione di trasferimento in z sarà (vedi par 1.7):

$$G(z) = \frac{k}{1 - bz^{-1}} \quad (1.70)$$

con polo in $b = e^{-aT_c}$.

I campioni dell'uscita, noto l'ingresso e le condizioni iniziali, possono essere ricavati applicando la (1.68):

$$y(i) = by(i-1) + ku(i) \quad (1.71)$$

e posto $u(i) = 0$ per $i = 0, 1, 2, \dots$ e $y(0) = c$, si ottiene:

$$\begin{aligned} y(1) &= b * c \\ y(2) &= b^2 * c \\ &\dots \\ y(k) &= b^k * c \end{aligned} \quad (1.72)$$

ed è immediato verificare che la successione $y(k)$ converge solo se $\text{mod}(b) < 1$. Si può inoltre osservare che per $b < 0$ si ha un comportamento alternante che non trova riscontro nell'ambito dei sistemi continui. Da rilevare il caso $a = 0$, in cui la $G(s)$ rappresenta un integratore. Si ha allora $b = 1$ e ovviamente la risposta libera è una costante. Andamenti della successione relativa al modo aperiodico considerato sono mostrati in fig. 1.11 per diversi valori di b .

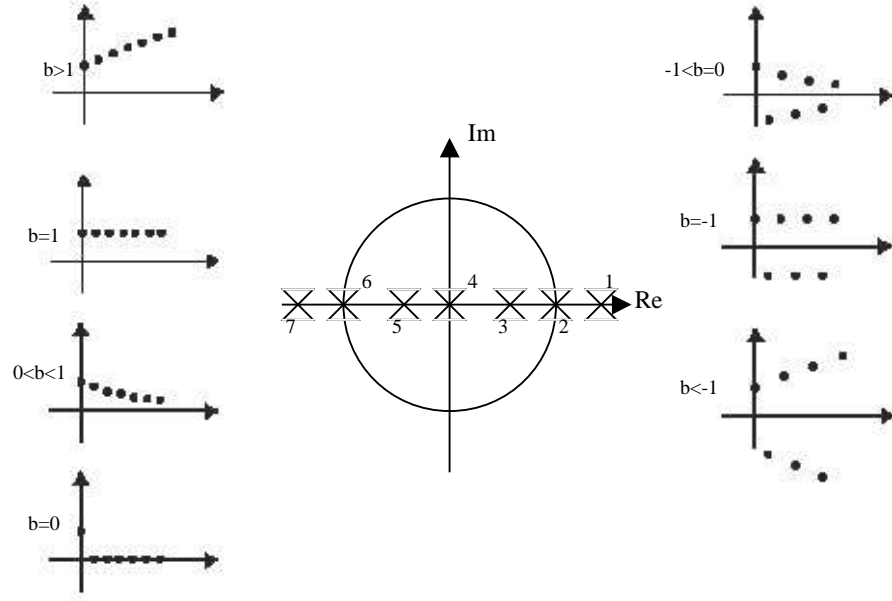


Figura 1.11: Poli reali e relative sequenze numeriche

Si consideri ora un sistema avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{k}{1 + \frac{2\zeta}{\omega} + \left(\frac{s}{\omega}\right)^2} = \frac{k * (a^2 + \omega^2)}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad (1.73)$$

dove $a = 2 * \pi * \omega \zeta$ ed i poli sono in $a \pm \omega$. La funzione di trasferimento in z è:

$$G(z) = \frac{bk \frac{b^2 + \omega}{\omega} \sin(\omega T_c) * z}{z^2 - 2b * \cos(\omega T_c) * z + b^2} \quad (1.74)$$

con poli in $b * [\cos(\omega T_c) \pm j * \sin(\omega T_c)] = b * e^{j\omega T_c}$ essendo $b = e^{aT_c}$.

I campioni dell'uscita, per ingresso nullo sono:

$$y(k) = 2b * \cos(\omega T_c) * y(k - 1) - b^2 * y(k - 2) \quad (1.75)$$

e si può dimostrare che, con opportuna scelta delle condizioni iniziali $y(0)$ e $y(1)$, valgono:

$$y(k) = b^k * \cos(k\omega T_c) * y(0) \quad (1.76)$$

Anche in questo caso la successione converge solo se $\text{mod}(b) < 1$.

La fig. 1.12 mostra i luoghi a pulsazione naturale e smorzamento costanti. I luoghi del piano s a parte reale e immaginaria costanti (rette orizzontali e verticali) si trasformano rispettivamente in circonferenze e raggi nel piano z , come si può rilevare immediatamente osservando le espressioni dei poli in z o comunque ricordando che:

$$z = e^{sT_c} \quad (1.77)$$

ed essendo $s = a \pm j\omega$, si ha

$$\text{mod}(z) = e^{aT_c}, \quad \arg(z) = \arctan\left(\pm \frac{\sin(\omega T_c)}{\cos(\omega T_c)}\right) = \pm \omega T_c \quad (1.78)$$

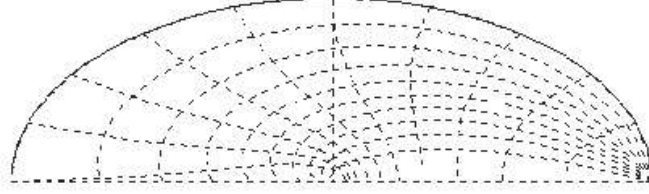


Figura 1.12: Luoghi a ωn e ζ costanti sul piano z

Andamenti delle successione relativa al modo pseudoperiodico considerato sono mostrati in fig. 1.13 per diversi valori di b e ω . Su tale figura è specificato anche il valore di $\arg(z)$ per le diverse successioni considerate. Esso è ovviamente una misura della frequenza di campionamento rispetto alla frequenza propria del modo.

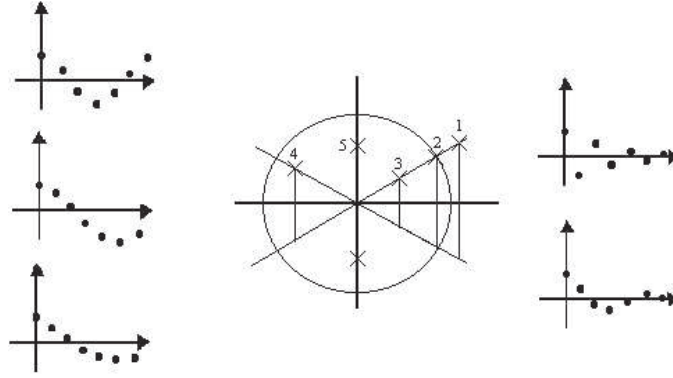


Figura 1.13: Poli complessi e relative sequenze numeriche

1.15 Caratteristiche delle funzioni di trasferimento in z

Diverse caratteristiche importanti del tipo di processo possono essere ricavate dall'osservazione della sua funzione di trasferimento $G(z)$. La più importante è ovviamente la stabilità, di cui già si è detto in un precedente paragrafo e per la cui analisi esistono metodi simili al criterio di Routh, per cui si rimanda ai testi sull'argomento (vedi ad es. [Bu1]). Il guadagno k di un processo con comportamento proporzionale può essere ottenuto utilizzando il teorema del valore finale alla sua uscita quando al suo ingresso è applicato un gradino unitario:

$$k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) * \frac{z}{z - 1} * G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{a_0 + a_1 + \dots + a_m} \quad (1.79)$$

I processi con comportamento integrale hanno un polo in $z = 1$, quindi la loro $G(z)$ può essere fattorizzata come

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} * \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{a_0 + a_1 + \dots + a_m} = \frac{1}{1 - z^{-1}} * G'(z) \quad (1.80)$$

La pendenza della risposta ad un gradino unitario, esauriti i transitori, è data dal guadagno della $G'(z)$.

Diversi sistemi presentano un tempo morto o ritardo di trasporto nella loro risposta impulsiva. Ciò è particolarmente frequente nella realizzazione di controllori mediante microcalcolatori, a causa dei tempi di calcolo connessi con l'algoritmo di controllo. La funzione di trasferimento di un sistema con tempo morto T_m è:

$$G(s) = e^{-sT_m} \quad (1.81)$$

e nel dominio di z :

$$G(z) = z^{-d} \quad \text{con} \quad d = \frac{T_m}{T_c} \quad \text{intero.} \quad (1.82)$$

Quindi in generale la funzione di trasferimento in z di un sistema comprendente un tempo morto è del tipo:

$$G(z) = z^{-d} * G'(z) \quad (1.83)$$

Il caso in cui d non sia intero (e non si reputi opportuno approssimarlo) è piuttosto complesso e non sarà qui trattato.

Affinchè una funzione di trasferimento $G(z)$ sia fisicamente realizzabile essa deve essere causale. Ciò significa che l'equazione alle differenze del tipo (1.64) che ne deriva non deve contenere a secondo membro termini del tipo $u(i+k)$, ma solo $u(i)$, $u(i-1)$, etc. Pertanto nell'espressione (1.63) e nelle seguenti deve risultare:

$$\begin{aligned} a_0 <> 0 & \quad b_0 <> 0 \\ a_1 <> 0 & \quad \text{se} \quad a_0 = 0 \quad e \quad b_1 <> 0 \\ & \dots \end{aligned} \quad (1.84)$$

Ciò si può esprimere affermando che il grado del numeratore della (1.64) deve essere minore o al massimo uguale a quello del denominatore.

La risposta in frequenza di un sistema a segnali campionati $G(z)$ può essere ricavata con la sostituzione $z = e^{j\omega T_c}$. Ricordando che la $G(z)$ rappresenta anche un segnale (la risposta impulsiva $g(t)$) campionato si deduce che la risposta armonica $G(j\omega)$ avrà le note caratteristiche di periodicità e problemi di aliasing. Ad esempio, si consideri un sistema continuo con un polo semplice, per cui è già stata ricavata la $G(z)$ nel paragrafo 1.14, e si effettui la sostituzione specificata.

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{k}{1 - b * z^{-1}} &= \frac{k}{1 - b * e^{-j\omega T_c}} = \frac{k}{1 - b * \cos(\omega T_c) + j * b * \sin(\omega T_c)} = \\ &= \frac{k * [1 - b * \cos(\omega T_c) - j b * \sin(\omega T_c)]}{1 - 2 * b * \cos(\omega T_c) + b^2} \end{aligned} \quad (1.85)$$

Da cui si possono ricavare parti reale e immaginaria e quindi modulo e fase della risposta armonica, che per la presenza delle funzioni trigonometriche sono andamenti a lobi. Nel caso dei sistemi campionati la risposta armonica, periodica, non ha l'utilità progettuale che ha nel caso dei sistemi continui. Per questa ragione la necessità di calcolarla è piuttosto rara. Ovviamente diversa è la situazione nel campo della progettazione di filtri digitali.

1.16 Introduzione alla sintesi

Nell'introduzione a questa dispensa è stato descritto un semplice sistema di controllo comprendente un calcolatore, senza entrare nei dettagli della funzione delle varie parti. La fig. 1.14 mostra uno schema a blocchi che ne descrive il funzionamento. In esso $M(z)$ rappresenta l'algoritmo realizzato sul calcolatore, $T(s)$ l'organo di tenuta, $G(s)$ l'amplificatore, il motore ed il carico, $H(s)$ il trasduttore ed infine C un organo di campionamento. I valori del segnale di riferimento si assumono generati dal 'terminale' con opportuno sincronismo, e rappresentati dalla sequenza di impulsi $r(iT_c)$. In questo schema convivono blocchi di diversa natura: alcuni intrinsecamente discreti, altri continui, altri ancora di conversione. Essi hanno diversi tipi di modelli, per poter studiare il comportamento del sistema e sintetizzare l'organo di controllo occorre riportarli tutti ad uno stesso genere di rappresentazione; quale esso sia dipende dal tipo di approccio che si vuole impiegare. Due sono le possibilità: considerare il controllore discreto come approssimazione di uno continuo o studiare tutto il sistema con le tecniche proprie dei sistemi a segnali campionati, precedentemente descritte. Il primo metodo può essere impiegato quando la frequenza di campionamento è sufficientemente alta rispetto a quelle in gioco durante il funzionamento del sistema. Si può allora determinare la funzione di trasferimento di un controllore continuo $M(s)$ che fornisca le prestazioni desiderate e poi convertirla in $M(z)$ ed in equazione alle differenze per la realizzazione dell'algoritmo ed una eventuale verifica del progetto. Seguendo tale via l'organo di campionamento o si trascura o viene schematizzato come un filtro passa basso (vedi par 1.4).

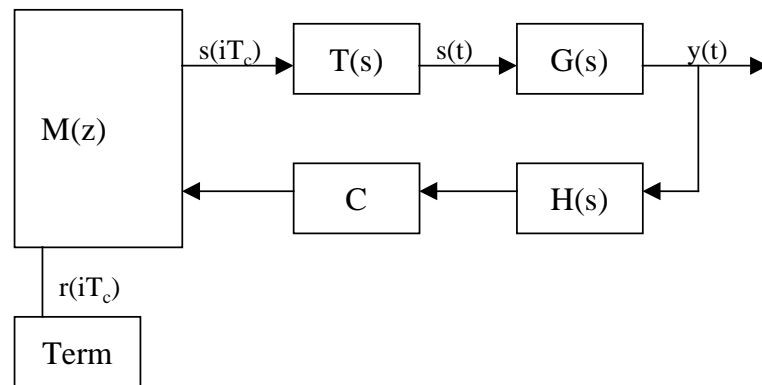


Figura 1.14: Semplice asservimento di posizione

La seconda possibilità richiede invece la discretizzazione dei blocchi $T(s)$ e $G(s)$ per ricavare un modello utilizzabile con questo tipo di sistemi, spesso espresso in termini di trasformata Z . La trasformata Z permette di determinare esattamente il valore delle grandezze agli istanti di campionamento, ma non fornisce informazioni negli intervalli tra questi. Tale informazione può essere comunque estrapolata se si è sicuri che siano soddisfatte le condizioni del teorema del campionamento. Generalmente l'approccio di più facile e sicuro impiego è il primo. Esso fornisce risultati soddisfacenti se le prestazioni richieste non sono molto stringenti e permette di impiegare le usuali tecniche di progettazione dei sistemi continui. Il secondo approccio permette invece di considerare tutti i dettagli del progetto, ma richiede una specifica competenza da parte del progettista. I paragrafi che seguono sono dedicati alle procedure impiegabili per ottenere modelli tempo discreto di sistemi continui e ad alcuni esempi di metodi di sintesi, utilizzati soprattutto per mettere in luce la diversa filosofia di progettazione.

1.17 Discretizzazione di sistemi continui

Si è visto nel precedente paragrafo come nell'effettuare l'operazione di discretizzazione di un sistema continuo sia talora necessario tenere conto della presenza di un organo di tenuta a monte dei blocchi costituenti il sistema, mentre altre volte ciò non sia necessario. Si studierà innanzitutto la prima eventualità. Si consideri la funzione di trasferimento complessiva $G(s)$ di un insieme di blocchi lineari preceduti da un dispositivo di tenuta del tipo descritto nel par 1.4, la cui funzione di trasferimento si riporta per comodità:

$$T(s) = \frac{1 - e^{-sT_c}}{s} \quad (1.86)$$

Occorre quindi determinare la funzione di trasferimento in z di $T(s) * G(s)$, che risulta:

$$T(z) * G(z) = Z \left[(1 - e^{-sT_c}) * \frac{G(s)}{s} \right] = (1 - z^{-1}) * Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (1.87)$$

dove la funzione $\frac{G(s)}{s}$ può essere trasformata con i metodi descritti nel paragrafo 1.5. Esistono anche altri metodi, di più agevole applicazione, che partono dall'equazione differenziale che descrive il sistema continuo (immediatamente ricavabile dalla $G(s)$):

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u \quad (1.88)$$

dove con u e y si sono indicati rispettivamente l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ del sistema. Secondo il più semplice di tali metodi, se l'intervallo di campionamento è sufficientemente breve, al suo interno si possono assumere costanti il valore delle funzioni e quello delle loro derivate, che possono essere approssimate (ad esempio) usando le differenze all'indietro. Si ha così:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(iT_c), y(t) = y(iT_c) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y(iT_c) - y[(i-1)T_c]}{T_c} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{y(iT_c) - 2y[(i-1)T_c] + y[(i-2)T_c]}{T_c} \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.89)$$

e analogamente per le derivate successive e quelle di u . Tali espressioni, sostituite nella (1.88), permettono di ricavare un'equazione alle differenze che la approssima. Un altro metodo, che si basa sulla tecnica di integrazione trapezoidale, verrà illustrato con un semplice esempio. Si consideri il modello di un integratore nel dominio del tempo:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t u(p) dp \quad (1.90)$$

e la si integri applicando la tecnica trapezoidale:

$$y(kT_c) = \frac{T_c}{T} \sum_{i=0}^k \frac{u(iT_c) + u((i-1)T_c)}{2} \quad (1.91)$$

ma vale anche:

$$y((k+1)T_c) = \frac{T_c}{T} * \sum_{i=0}^k \frac{[u((i+1)T_c) + u(iT_c)]}{2} \quad (1.92)$$

sottraendo le due:

$$y(kT_c) - y((k-1)T_c) = \frac{T_c}{2T} [u(kT_c) + u((k-1)T_c)] \quad (1.93)$$

considerando le trasformate Z delle sequenze $y(kT_c)$, $y((k-1)T_c)$, $u(k)$ e $u((k-1)T_c)$ e le loro trasformate Z , si ottiene:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T_c}{2T} * \frac{z+1}{z-1} \quad (1.94)$$

da cui, tenendo conto che la trasformata di Laplace della (1.90) è $G(s) = \frac{1}{sT}$ e confrontando, si ha:

$$s = \frac{2}{T_c} * \frac{z-1}{z+1} \quad (1.95)$$

sostituzione che permette di ottenere la trasformata Z (approssimata) di un segnale o di una funzione di trasferimento da quella di Laplace. La (1.95) prende il nome di trasformazione bilineare o di Tustin. I metodi approssimati descritti hanno il pregio di fornire il modello tempo discreto del sistema molto più facilmente di quelli descritti nel paragrafo 1.5. Le differenze di comportamento tra i modelli discreti che si ottengono applicando i diversi metodi allo stesso sistema continuo, vanno analizzate con cautela. Non è infatti detto che progettando un sistema di controllo utilizzando uno dei metodi cosiddetti approssimati di discretizzazione, non si possano ottenere prestazioni migliori che se si fossero usati metodi basati sulla definizione di trasformata Z (1.29). Questi infatti conservano esattamente nel modello discreto i campioni della risposta impulsiva del modello continuo, ma non altre caratteristiche altrettanto importanti per la sintesi di un sistema di controllo, come la risposta in frequenza. Interessanti confronti sono svolti in [Ja1] e [Ka1].

1.18 Un regolatore PID discreto

Uno dei dispositivi di controllo di più largo impiego nel campo dei sistemi continui è senz'altro il regolatore PID, la cui uscita nel dominio del tempo $c(t)$, può essere espressa come:

$$c(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(p) dp + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1.96)$$

in funzione dell'ingresso del regolatore $e(t)$, errore del sistema di regolazione.

Una possibile scelta per la discretizzazione della (1.96) è di approssimare l'integrale con la formula trapezoidale (ovvero con l'approssimazione di Tustin) e la derivata con le differenze all'indietro: si ottiene così per l'istante i -mo:

$$c(i) = k_p e(i) + \frac{1}{2} k_i T_c * [(e(0) + e(1)) + (e(1) + e(2)) + \dots + (e(i) + e(i-1))] + \frac{k_d}{T_c} * [e(i) - e(i-1)] \quad (1.97)$$

dove si è posto $e(h) = e(hT_c)$ e $c(i) = c(iT_c)$. Un'analogha espressione può essere scritta per l'istante $(i-1)$ -mo e sottratta dalla precedente, ottenendo così:

$$\begin{aligned} c(i) &= c(i-1) + k_p [e(i) - e(i-1)] + \frac{k_i T_c}{2} [e(i) + e(i-1)] + \frac{k_d}{T_c} [e(i) - 2e(i-1) + e(i-2)] = \\ &= c(i-1) + a_1 * e(i) + a_2 * e(i-1) + a_3 * e(i-2) \end{aligned} \quad (1.98)$$

La (1.98) rappresenta quindi l'equazione alle differenze che descrive una possibile realizzazione in campo discreto del regolatore PID, valida per tempi di campionamento piccoli rispetto alle costanti di tempo dell'intero sistema. Altre espressioni possono essere ricavate utilizzando diverse approssimazioni dell'integrale e della derivata. La (1.98) può essere immediatamente implementata su un microcalcolatore. A titolo esclusivamente indicativo si riporta il listato in uno pseudolinguaggio di un possibile programma che implementa la (1.98). In esso si assumono disponibili due funzioni *INA* e *OUTA* che permettono rispettivamente l'ingresso e l'uscita delle grandezze analogiche. Un'altra funzione, che si assume presente, è la *WAIT*(T_c) che attende sia trascorso un tempo pari all'intervallo di campionamento da una precedente chiamata, prima di permettere l'esecuzione dell'istruzione successiva.

REM INIZIALIZZAZIONE

$E1 = 0 : E2 = 0 : C0 = 0$

$A1 = \dots\dots$

$A2 = \dots\dots$

$A3 = \dots\dots$

$T_c = \dots\dots$

REPEAT

REM CICLODICONTRULLO

INA($E0$)

$C1 = C0 + A1 * E0 + A2 * E1 + A3 * E2$

OUTA($C1$)

$C0 = C1$

$E2 = E1$

$E1 = E0$

WAIT(T_c)

FOREVER

Il programma riportato, pur nella sua schematicità, permette alcune considerazioni sulle risorse che devono essere presenti in un calcolatore che debba essere impiegato per compiti di controllo. Escludiamo qui per semplicità l'adozione di un sistema operativo in tempo reale (RTOS); supponiamo, ad esempio, di operare su un PC sotto DOS.

Innanzitutto occorre la capacità di comunicare con il 'mondo esterno', espressa qui dalle funzioni *INA* e *OUTA*. Queste funzioni, pur concettualmente semplici, richiedono circuiti dedicati (convertitori, campionatori, etc) e inoltre un insieme di funzioni per la loro gestione che, qualora si impieghino schede di acquisizione dati commerciali, sono in genere fornite a corredo per i principali linguaggi.

Un'ulteriore necessità è che l'esecuzione del programma avvenga con tempi controllabili (funzione *WAIT*) dal programmatore. Ciò è generalmente ottenuto impiegando un clock in tempo reale che scandisce gli istanti di campionamento, generalmente collegati ad una linea di interruzione (interrupt) del sistema. Questa prestazione richiede la presenza di un circuito dedicato (talvolta è sufficiente il clock di sistema) e di funzioni per la gestione delle interruzioni.

Finalmente si può notare che le istruzioni *INA*($E0$) e *OUTA*($C1$) non vengono eseguite contemporaneamente, ma tra di esse è presente un ritardo connesso al calcolo della variabile $C1$. Se tale ritardo non è trascurabile rispetto al tempo di campionamento T_c , di esso si deve tenere conto nella funzione di trasferimento del processo.

1.19 Sistemi a tempo di assestamento finito

E' noto dallo studio dei sistemi di controllo a tempo continuo che il loro errore non può annullarsi dopo un tempo finito dall'applicazione di un disturbo o di una variazione dell'ingresso, ma che esso può solo tendere a zero quando il tempo tende all'infinito. Una prerogativa dei sistemi a tempo discreto è di permettere invece di imporre che il tempo di assestamento sia limitato. Il metodo di progettazione che qui si esporrà garantisce tale condizione solo negli istanti di campionamento. Esistono peraltro altri metodi in grado di assicurare ciò per ogni valore di t , anche durante gli intervalli tra un istante di campionamento e l'altro (sistemi a risposta piatta). Si denoti con $F(z)$ la funzione di trasferimento in z di un sistema la cui uscita sia uguale all'ingresso ritardato di n intervalli di campionamento, pari a:

$$F(z) = z^{-n} \quad (1.99)$$

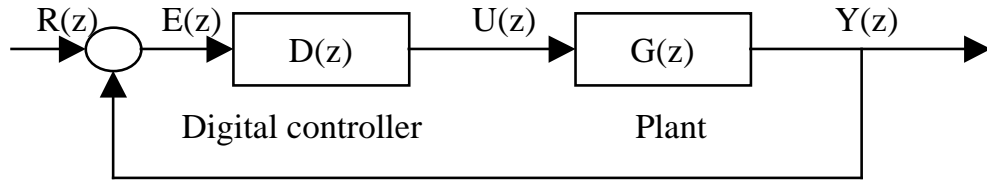


Figura 1.15: Sistema di controllo

Si consideri ora il sistema di regolazione di fig. 1.15, la cui funzione di trasferimento a ciclo chiuso è data da:

$$W(z) = \frac{R(z)G(z)}{1 + R(z)G(z)} \quad (1.100)$$

che fornisce il valore della funzione di trasferimento in z del regolatore. Il valore di n non è però arbitrario, ma va scelto in modo da garantire la fisica realizzabilità, cioè la causalità, del regolatore stesso. Assumendo per la $G(z)$ del processo e per la $R(z)$ un'espressione del tipo (1.68):

$$G(z) = \frac{N_g(z)}{D_g(z)} \quad R(z) = \frac{N_r(z)}{D_r(z)} \quad (1.101)$$

e chiamando $g_{ng}, g_{dg}, g_{nr}, g_{dr}$ rispettivamente i gradi dei polinomi N_g, D_g, N_r, D_r , per la realizzabilità di $G(z)$ e $R(z)$ deve essere:

$$g_{ng} \leq g_{dg} \quad g_{nr} \leq g_{dr} \quad (1.102)$$

La $W(z)$ può essere messa nella forma:

$$W(z) = \frac{N_g(z) * N_r(z)}{D_g(z)D_r(z) + N_g(z)N_r(z)} \quad (1.103)$$

La differenza tra il numero di poli e quello degli zeri della $W(z)$ vale, per le scelte fatte, n ed è pari a:

$$n = (g_{dg} + g_{dr}) - (g_{ng} + g_{nr}) = (g_{dr} - g_{nr}) + (g_{dg} - g_{ng}) \quad (1.104)$$

che, scegliendo per il regolatore $g_{dr} = g_{nr}$, diviene:

$$n = g_{dg} - g_{ng} \quad (1.105)$$

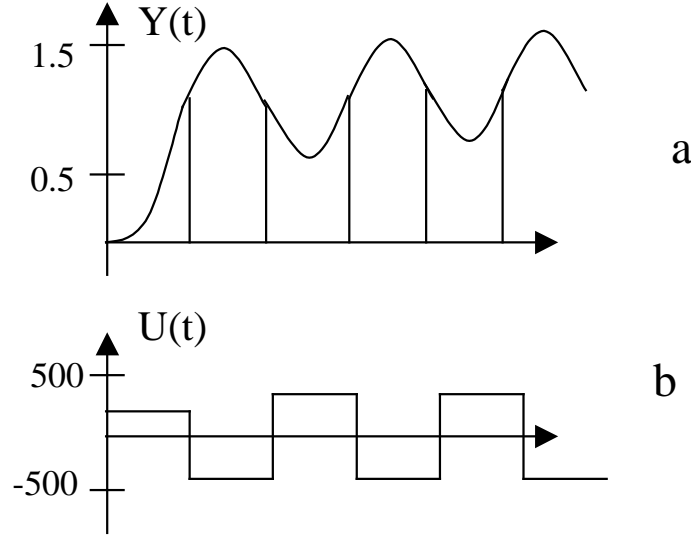


Figura 1.16: Comportamento di un sistema a tempo di assestamento finito: a- uscita b- ingresso

Pertanto il minimo ritardo (espresso in intervalli di campionamento) che occorre accettare per garantire la realizzabilità del regolatore è pari alla differenza tra il grado del denominatore e quello del numeratore della funzione di trasferimento in s del processo.

Questo tipo di sintesi produce abbastanza spesso un comportamento del sistema troppo oscillatorio. Infatti l'uscita assumerà il valore desiderato negli istanti di campionamento, ma non fra essi. La fig. 1.16 illustra tale tipo di comportamento. In essa il diagramma in alto rappresenta l'uscita $y(t)$ del sistema, mentre quello in basso il suo ingresso $c(t)$, fornito dal regolatore. Tale comportamento è conseguenza dell'ingenuità con cui sono state date le specifiche sul comportamento del sistema; risultati completamente diversi possono essere ottenuti completandole, come si fa nel caso dei regolatori a risposta piatta. In questo caso si impone al sistema che dopo m passi di campionamento l'uscita sia uguale al riferimento ed inoltre l'ingresso del processo risulti costante. La procedura di sintesi di tale tipo di sistemi non verrà qui esposta. Per essa si rimanda [Is1] e [Is2]. In generale i metodi di sintesi diretta del tipo illustrato vengono utilizzati con cautela in quanto molto sensibili alle variazioni parametriche del processo. Per questaragione essi (specialmente il secondo) vengono frequentemente impiegati in connessioni a dispositivi che permettono la stima in linea dei parametri del processo da controllare.

1.20 Un cenno sull'identificazione parametrica

Si è affermato precedentemente che lo studio di un sistema a tempo discreto può risultare molto più agevole di quello di un sistema a tempo continuo.

Un caso in cui ciò è particolarmente evidente è quello dell'identificazione dei parametri di un sistema, ad esempio del processo da controllare. Supponiamo che esso sia descritto da un'equazione del tipo della (1.68), che qui si riporta per comodità:

$$y(i) = -a_1 y(i-1) - \dots - a_m y(i-m) + b_0 u(i) + \dots b_m u(i-m) \quad (1.106)$$

Si considerino due vettori: un vettore dei parametri p definito come:

$$p^T = [-a_1, \dots, -a_m, b_0, \dots b_m] \quad (1.107)$$

ed uno q delle misure all'istante i -mo:

$$q^T = [y(i-1), \dots, y(i-m), u(i), \dots, (u(i-m))] \quad (1.108)$$

In tal caso l'equazione alle differenze può essere riscritta come:

$$y(i) = q_i^T * p \quad (1.109)$$

Effettuando m misure in m istanti di campionamento diversi, è possibile scrivere m equazioni:

$$\begin{aligned} y(0) &= q_0^T * p \\ &\dots \\ y(m) &= q_m^T * p \end{aligned} \quad (1.110)$$

e costruire, pertanto, un sistema di m equazioni in m incognite che può essere agevolmente risolto.

Ovviamente nei casi reali le cose non sono così semplici e le misure contenute nel vettore q sono quasi sempre affette da errori. Per ridurre il loro effetto è allora necessario effettuare più di m misure e risolvere il sistema (1.111) con metodi che si basano sul principio dei minimi quadrati.

BIBLIOGRAFIA

- [GH1] Ghizzetti, Analisi matematica, vol.2. Veschi.
- [BU1] Buhler, Reglages echantillonnes. Presses polytechniques romandes.
- [JA1] Jacquot, Modern digital control systems. Dekker.
- [KA1] Katz, Digital control systems using microcomputers. Prentice-Hall.
- [IS1] Iserman, Digital control systems. Springer Verlag.
- [IS2] Isidori, Sistemi di controllo. Siderea.