A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Secondo appello
18 settembre 2014

Esercizio 1

Achille impiega 5 minuti per raggiungere la tartaruga a partire da una distanza iniziale di 2 stadi. Un leone impiega non più del doppio per raggiungere Achille da una distanza iniziale di uno stadio. Tutti corrono a velocità costante lungo una retta e nello stesso verso, la velocità del leone è doppia di quella di Achille e quest'ultima è dieci volte quella della tartaruga. La tartaruga percorre non più di 80 metri prima di essere raggiunta da Achille. Si vuole sapere quanto è lungo al più il piede di Achille. Si assuma che uno stadio misuri 600 piedi di Achille.

1. Formulare il problema di PL <u>precisando le unità di misura</u>
2. Risolvere il problema con il metodo di Fourier Motzkin.
3. Impostare il problema duale
4. Trovare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità.

Soluzione

Per formulare questo problema scegliamo come variabili la velocità x_1 di Achille (in m/s) e la lunghezza x_2 (in m) del piede di Achille. La velocità del leone è doppia di quella di Achille e quest'ultima è dieci volte quella della tartaruga. Quindi rappresenteremo la velocità del leone con $2x_1$ m/s e quella della tartaruga con $0{,}1x_1$ m/s.

I vincoli da considerare derivano dalle varie informazioni:

1. Achille impiega 5 minuti (300s) per raggiungere la tartaruga a partire da una distanza iniziale di 2 stadi (1200 piedi). In 300 s la tartaruga percorre $30x_1$ m e Achille $300x_1$ m colmando la distanza iniziale di 1200 piedi:
$$300x_1 = 30x_1 + 1200x_2$$
2. Un leone impiega non più del doppio per raggiungere Achille da una distanza iniziale di uno stadio. Quindi dopo 600 secondi la distanza percorsa dal leone ($1200x_1$) è maggiore o uguale di quella percorsa da Achille ($600x_1$) più uno stadio:
$$1200x_1 \ge 600x_1 + 600x_2\text{, che semplificato diventa: } x_1 \ge x_2.$$
3. la tartaruga percorre non più di 80 metri: $30x_1 \le 80$.

Il modello è pertanto:

$$\max \quad x_2 \qquad \begin{cases} 27x_1 - 120x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ 3x_1 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Dal metodo di F.M. si ottiene

$$\max \quad x_2 \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{40}{9}x_2 \\ \dfrac{120-27}{27}x_2 \ge 0 \\ x_2 \le \dfrac{6}{10} \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

che comporta

$$x_1^* = \frac{8}{3} \qquad x_2^* = 0{,}6 .$$

Duale:

$$\min \quad 8y_3$$

$$\begin{cases} 27y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 0 \\ -120y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1 \text{ libera} \\ y_2 \le 0 \\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni di ortogonalità si ottiene: $y_1^* = -\dfrac{1}{120}, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = \dfrac{3}{40}$

che è ammissibile duale e ottima.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 7 nodi 1…7. Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, 7 è il nodo sorgente e 1 è il nodo pozzo.

Archi	1 , 2	2 , 5	3 , 2	3 , 6	3 , 7	4 , 1	5 , 4	5 , 6	6 , 4	6 , 1	7 , 3	7 , 5
Flussi	2	2	0	0	3	2	2	2	0	2	3	2
Capacità	3	10	7	3	5	8	2	7	5	6	9	6

1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
2. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi 7 e 1.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo se la capacità dell'arco (3,6) è incrementata di 3 unità. Evidenziare il taglio ottimo trovato.

Soluzione

La soluzione data rispetta i vincoli del problema (bilanciamento dei flussi nei nodi di transito, flusso in ciascun arco compreso tra 0 e la capacità dell'arco), il flusso uscente dalla sorgente (entrante nel pozzo) è pari a 3+2-3=2. La ricerca di cammini aumentanti porta a trovare i cammini:

7→3→2→1 flusso aumentante 2, flusso totale sulla rete 4.
7→3→6→1 flusso aumentante 3, flusso totale sulla rete 7.
7→5→6→1 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 8.
7→5→6→4→1 flusso aumentante 3, flusso totale sulla rete 11.
7→3→2→5→6→4→1 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 12.

La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 7 porta a costruire l'albero orientato:

7←3→2→5 che individua il taglio $S = \{7,3,2,5\}$ $\overline{S} = \{4,6,1\}$

Gli archi del taglio diretto sono (3,6); (5,6); (5,4) di capacità 3+7+2=12, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

Per rispondere alla terza domanda si osserva che l'arco di cui si incrementa la capacità è uno degli archi del taglio diretto minimo, che quindi aumenta a 15 la capacità del taglio $S = \{7,3,2,5\}$ $\overline{S} = \{4,6,1\}$. Il flusso 12 pertanto potrebbe non essere più massimo e si cerca, a partire da questo (che resta ammissibile) un nuovo cammino aumentante:

7←3→6→4→1 flusso aumentante 1, flusso totale sulla rete 13.

La ricerca di un albero dei cammini aumentanti dal nodo 7 porta a costruire l'albero orientato:

7←3→2→5
↘6

che individua il taglio $S = \{7,3,2,5,6\}$ $\overline{S} = \{4,1\}$

Gli archi del taglio diretto sono (6,1); (6,4); (5,4) di capacità 6+5+2=13, pari al flusso totale che si dimostra così essere massimo.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2014

Esercizio 1

Una società chimica produce tre solventi: A,B,C, i cui prezzi di vendita sono, rispettivamente, 40, 60 e 40 euro/kg. Il profitto sul solvente C è pari al 20% del prezzo di vendita, mentre il profitto su A e B è pari al 15% del prezzo di vendita.
La società desidera ottenere un fatturato mensile non inferiore a 10 milioni di euro. Il processo produttivo di A, B e C richiede il consumo di una risorsa D altamente deperibile, in misura pari a 5 grammi di D per kg di A prodotto, 8 grammi di D per kg di B prodotto e 6 grammi di D per kg di C prodotto. La risorsa D è prodotta in un impianto della capacità massima di 2 tonnellate/mese e va consumata nello stesso mese di produzione. Si consideri che l'intera produzione mensile, comunque ripartita tra i tre prodotti, possa sempre essere venduta sul mercato, e che tuttavia si debba garantire la produzione di almeno 150 tonnellate/mese complessive tra solventi B e C.

1. Si formuli come problema di PL il problema determinare i livelli mensili di produzione di A, B, C tali da massimizzare il profitto complessivo.
2. Determinare la soluzione ottima del problema con l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2).
3. Impostare il problema duale e determinarne la soluzione ottima a partire dalla soluzione trovata al punto precedente.

Soluzione

Associando una variabile alla quantità (in tonnellate, 1ton=1000kg) prodotta di ogni solvente, si hanno tre variabili x_A, x_B, x_C e tre vincoli: uno sul fatturato minimo, uno sulla quantità disponibile di risorsa D e uno sulla produzione minima di B e C.

Formulazione:

$$\max \quad 6000x_A + 9000x_B + 8000x_C \qquad\qquad \max \quad 6000x_A + 9000x_B + 8000x_C$$

$$\begin{cases} 40x_A + 60x_B + 40x_C \geq 10000 \\ 5x_A + 8x_B + 6x_C \leq 2000 \\ x_B + x_C \geq 150 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 4x_A + 6x_B + 4x_C \geq 1000 \\ 5x_A + 8x_B + 6x_C \leq 2000 \\ x_B + x_C \geq 150 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere il problema occorre portarlo in forma standard introducendo 3 variabili di scarto s_1, s_2, s_3 e poi passare al problema artificiale introducendo 2 variabili artificiali ϕ_1, ϕ_3.

$$\min \quad \phi_1 + \phi_3$$

$$\begin{cases} 4x_A + 6x_B + 4x_C - s_1 + \phi_1 = 1000 \\ 5x_A + 8x_B + 6x_C + s_2 = 2000 \\ x_B + x_C - s_3 + \phi_3 = 150 \\ x, s, \phi \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1: la base iniziale contiene le variabili $[\phi_1, s_2, \phi_3]$. Alla prima iterazione entra x_A ed esce ϕ_1. Alla seconda iterazione entra x_B ed esce ϕ_3. Fine della Fase 1, la base finale è $[x_A, s_2, x_B]$.

FASE 2: Alla prima iterazione entra x_C ed esce x_B. Alla seconda iterazione entra s_1 ed esce s_2. Alla terza iterazione entra s_3 ed esce x_A. Fine della Fase 2, la soluzione finale è $[s_3, s_1, x_C] = [550/3 \quad 1000/3 \quad 1000/3]$.

DUALE

$$\begin{array}{ll} \max & 6000x_A + 9000x_B + 8000x_C \\ y_1 & \left\{\begin{array}{l} 4x_A + 6x_B + 4x_C \geq 1000 \\ 5x_A + 8x_B + 6x_C \leq 2000 \\ x_B + x_C \geq 150 \\ x \geq 0 \end{array}\right. \\ y_2 & \\ y_3 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \min & 1000y_1 + 2000y_2 + 150y_3 \\ x_A & \left\{\begin{array}{l} 4y_1 + 5y_2 \geq 6000 \\ 6y_1 + 8y_2 + y_3 \geq 9000 \\ 2y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 8000 \\ y_1, y_3 \leq 0 \, ; \, y_2 \geq 0 \end{array}\right. \\ x_B & \\ x_C & \end{array}$$

La soluzione ottima duale si ottiene dalla riga 0 della matrice carry finale, ovvero dalle condizioni di ortogonalità, che richiedono:

$$\begin{array}{l} s_1 \neq 0 \\ s_3 \neq 0 \\ x_C \neq 0 \end{array} \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ 2y_1 + 6y_2 + y_3 = 8000 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_2 = 4000/3 \end{array}\right.$$

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 8 nodi 1…8. Per ogni arco sono dati il costo di percorrenza unitario ed un flusso ammissibile iniziale.

1. Determinare la fornitura dei nodi.
2. A partire dal flusso iniziale dato, determinare un flusso ammissibile di costo minimo con l'algoritmo del simplesso su reti o dimostrare che non esiste.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(3,7)	(4,2)	(4,5)
Flussi	0	3	4	2	0	0	0	1	0	6
Costi	6	1	2	12	5	1	0	-1	10	3
Archi	(4,6)	(4,8)	(5,3)	(5,6)	(6,4)	(6,8)	(7,5)	(7,6)	(7,8)	(8,7)
Flussi	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Costi	5	15	18	5	-2	6	6	12	18	1

Soluzione

La fornitura di un nodo è la differenza tra flusso uscente e flusso entrante nel nodo, per cui si hanno le seguenti forniture:

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8
Fornitura	5	2	-2	2	-5	0	-1	-1

Per risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso su reti si osserva preliminarmente che gli archi con flusso strettamente positivo devono essere tutti archi in base. Poiché questi formano un albero ricoprente della rete è perfettamente individuata la base iniziale del problema.
Alla prima iterazione entra in base (2,5) ed esce (2,1)
Alla seconda iterazione entra in base (3,5) ed esce (1,4)
Alla terza iterazione entra in base (4,6) ed esce (5,6). La soluzione così ottenuta è ottima.