Luca Rocco - luc.rocco@stud.uniroma3.it

Ricorda:

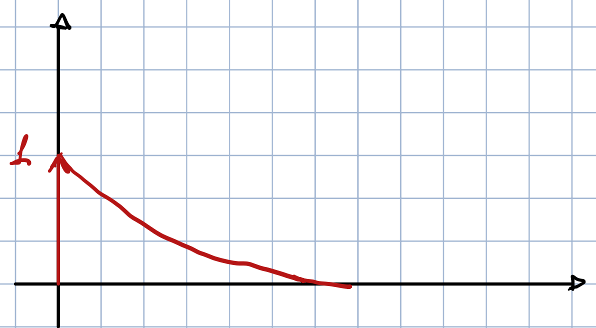
$$\dot{y} + 3y = u \Rightarrow sY + 3Y = U \quad ; \quad Y = \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{} U$$

con condizioni iniziali nulle

Questa è la funzione di trasferimento

Siccome la risposta impulsiva, cioè l'antitrasformata della funzione di trasferimento, è pari a e^{-3t} si ha che il sistema è stabile, cioè che converge a zero. Questo si nota se poniamo $U(s) = 1$ (impulso).

$$U(s) = 1 \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+3} \rightarrow y(t) = e^{-3t}$$



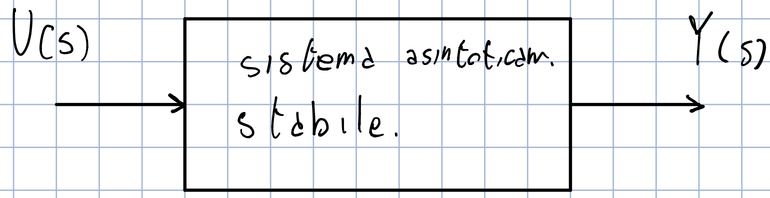
Quindi l'impulto non ha fatto altro che cambiare le condizioni iniziali del sistema in un tempo pari a zero. E ci permette di studiare l'evoluzione libera del sistema poiché applicare un impulso o calcolare l'evoluzione libera da luogo alle stesse identiche dinamiche. In sostanza per qualunque condizione iniziale diversa da zero avremmo avuto la stessa dinamica e^{-3t}:

Per provarlo basta fare la trasformata di Laplace con condizioni iniziali diverse da zero.

$$sY(s) - y(0^-) + 3Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+3} U(s) + \underbrace{\frac{Y(0^-)}{s+3}}_{} \rightarrow y(0^-)\, e^{-3t}$$

Ed ecco che si ha la stessa dinamica. Da questo possiamo assumere che l'evoluzione libera è della stessa forma della risposta impulsiva.



Se ho un sistema come quello descritto qua sopra:

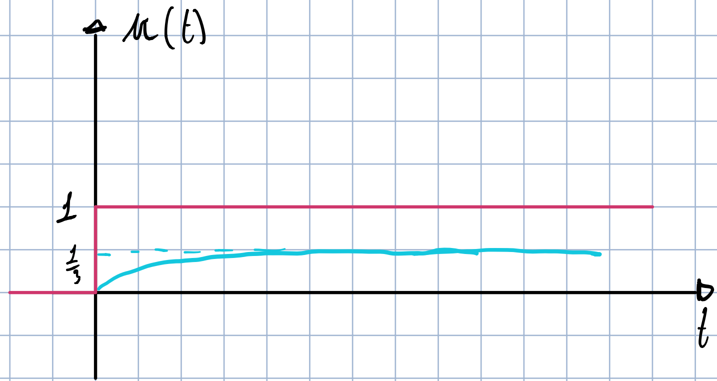
$$Y(s) = \frac{1}{s+3} U(s)$$

quando decompongo in residui avró dei residui che dipendono dalla funzione di trasferimento e altri residui che dipendono da come è fatta $U(s)$:

$$\underbrace{\frac{R_1}{s+3}} + \underbrace{\frac{R_1^u}{s-p_1} + \frac{R_2^u}{s-p_2}}$$

Questo per definizione va a zero per $t \to \infty$

essendo uscite di ingressi che interessano: PERMANENTE della stessa classe dell'ingresso.



Ad esempio con un ingresso a gradino non si può avere che avere in uscita un gradino

Per scoprire l'altezza del gradino basta applicare il teorema del valore finale

$$Y(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{s+3} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{1}{3}$$

Definizione Si definisce guadagno di un sistema il valore:

$$K_F = \lim_{s \to 0} s F(s) \cdot \frac{1}{s} = F(s)\Big|_{s=0}$$

dove ricordiamo $F(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema

N.B La corrispondenza tra dinamiche di ingresso e dinamiche di uscita si verifica solo per sistemi asintoticamente stabili.

Ingressi e risposte canoniche

Ingresso impulsivo $\to$ risposta impulsiva $w(t)$

La risposta impulsiva è di scarso interesse pratico ma teoricamente importante poiché fa vedere i soli modi del sistema

Ingresso a gradino $\to$ risposta indiciale (risposta al gradino) $w_1(t)$

Su questa risposta indiciale vengono indicati una serie di parametri utili per i sistemi di controllo

Ingresso a rampa $\to$ risposta alla rampa $w_2(t)$

Un esempio di risposta indiciale è quella per cui abbiamo calcolato il guadagno in precedenza.

Osservazione sul guadagno Il guadagno di una funzione che non va ad un valore finito (che quindi ha un guadagno infinito perché la s sta al denominatore) si dice che non esiste ma si definisce un "guadagno generalizzato" che è il guadagno calcolato con la funzione di trasferimento privata dei poli in zero.

Esempio

Sia $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ la funzione di trasferimento, calcolo $F'(s)$ che è $F(s)$ privata dei poli in zero:

$$F'(s) = \frac{1}{s+1}$$

e di questa funzione calcolo il guadagno:

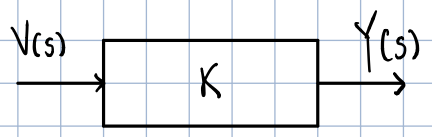
$$K_F = F'(s)\Big|_{s=0} = 1$$

Creazione dei diagrammi a blocchi:

Simboli

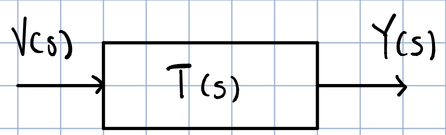
Operazioni nel dominio di Laplace

Moltiplicazione per una costante (Blocco istantaneo)



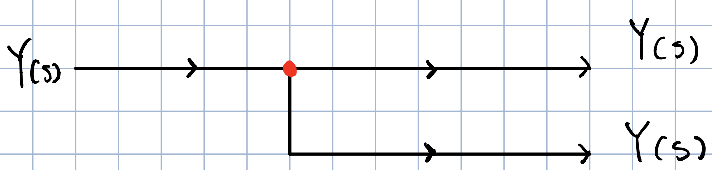
$$Y(s) = K\,V(s)$$

Funzione di trasferimento (Blocco Dinamico)



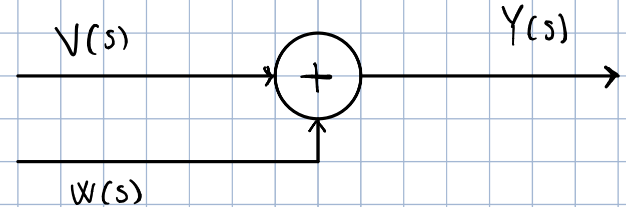
$$Y(s) = T(s)\,V(s)$$

Punto di prelievo o diramazione



Questo blocco non fa altro che duplicare Y(s) per poi mandarlo su tutti i collegamenti della diramazione. Non è presente alcuna operazione è una semplice biforcazione di Y(s) tale e quale a come è prima della biforcazione stessa

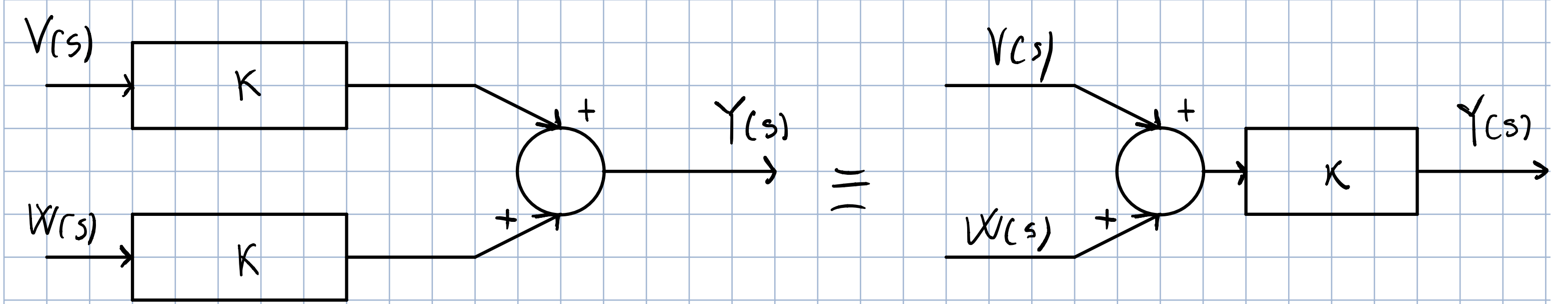
Sommatore (nodo di Somma)



$$Y(s) = V(s) + W(s)$$

Se al posto del segno + ci fosse il segno − prenderebbe il nome

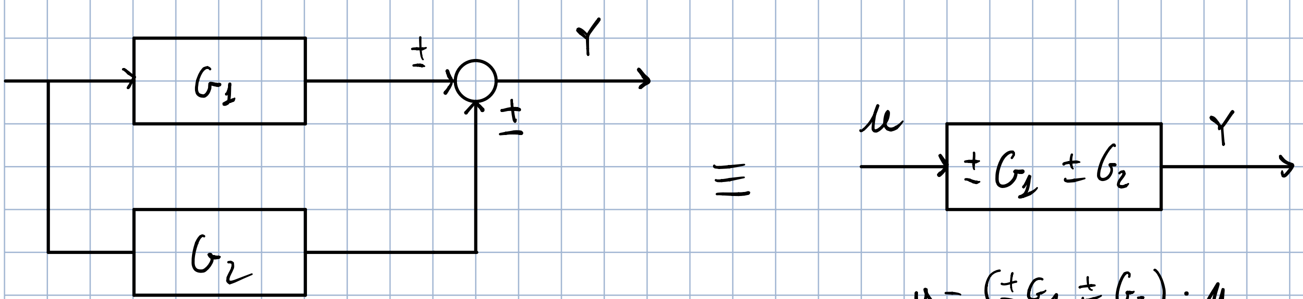
di organo di confronto o comparatore. Notare che è una somma algebrica.
Si noti come con gli schemi a blocchi definiscano una vera e propria algebra e che quindi sono possibili una serie di operazioni aritmetiche.



Sistemi in cascata

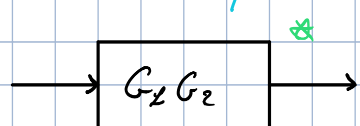
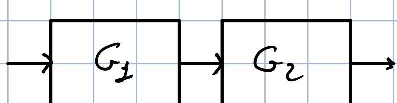
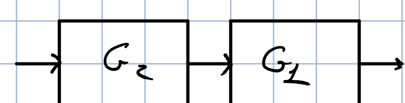
N.B: $G_1 G_2 = G_2 G_1$
Poiché sono scalari

Blocchi in parallelo



$$y = (\pm G_1 \pm G_2) \cdot u$$

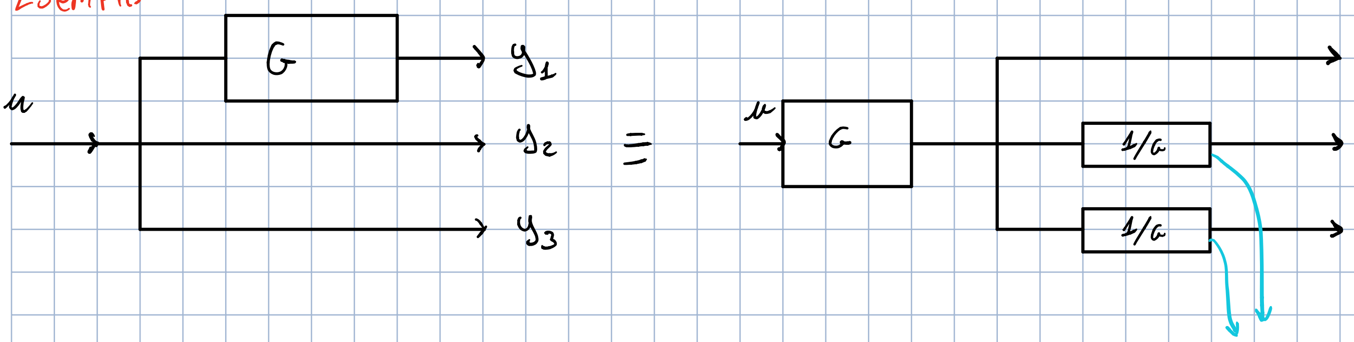
N.B. Avere un sistema "esploso" in un diagramma a blocchi ci da un livello di dettaglio maggiore rispetto a un diagramma a blocchi "collassato" in meno blocchi. In un diagramma a blocchi collassato, ad esempio, perdiamo le informazioni sull'ordine delle operazioni. A dimostrazione di questo:

Un sistema fatto così:  lo posso ottenere da  oppure da un sistema  ma vista nella forma * non possiamo sapere come fosse in origine.

N.B. Si deve fare sempre attenzione agli spostamenti che si fanno ai blocchi poiché potrebbero essere necessarie delle modifiche per fare in modo che non si modifichi l'espressione di uscita in modo non desiderato.

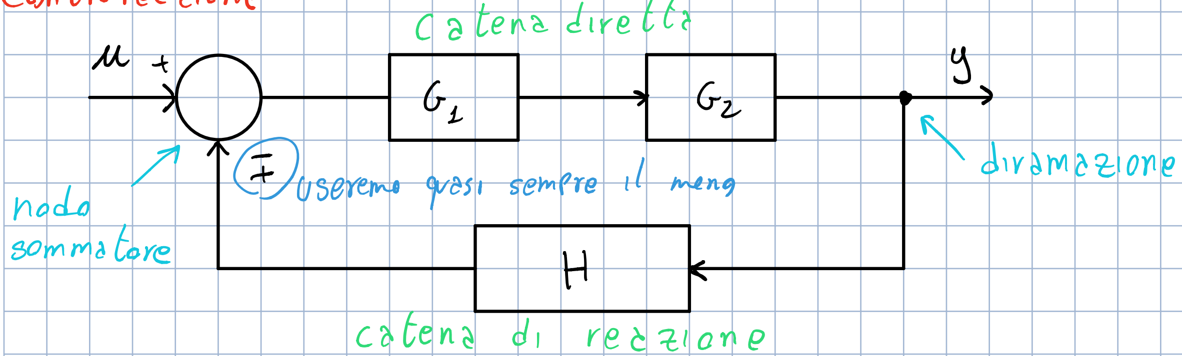
Altre accortezze si devono prendere quando si lavora con dei sistemi causali poiché le operazioni dove il denominatore è più grande del numeratore non sono ammesse quindi fino a quando si tratta di pura rappresentazione possiamo farlo anche se non proprio corretto se invece poi si deve implementare lo schema a blocchi allora non posso farlo.

Esempio



L'ho dovuto inserire per mantenere inalterate le tre relazioni ingresso-uscita tra u e y_1, y_2 e y_3

Controreazione



Poniamo $G(s) = G_1 G_2$; $H(s) = H$; $U(s) = u$; $Y(s) = y$

e definiamo una funzione $E(s)$ che rappresenta l'errore della comparazione (nel caso del segno meno) tra $U(s)$ e la sua misura: $E(s) = U(s) - H(s) \cdot Y(s)$

dove $Y(s) = G(s) \cdot E(s)$. Con una sostituzione e isolando $Y(s)$ si trova:

$E(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} \Rightarrow \frac{Y(s)}{G(s)} = U(s) - H(s)Y(s) =$

$= Y(s) = G(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s)$

$Y(s) = G(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}} U(s) = \underbrace{W(s)} U(s)$$

Funzione di trasferimento dell'anello di controreazione

La forma che abbiamo trovato è una forma canonica ed è composta da:

- Numeratore: Catena diretta
- Denominatore: 1 + (il prodotto di tutti i blocchi lungo l'anello)

Il prodotto di tutti i blocchi dell'anello si indica con $F(s)$ che prende il nome di Funzione di trasferimento ad anello aperto.

In questo caso $F(s) = G(s)H(s)$ mentre $W(s)$ indica la funzione di trasferimento a ciclo chiuso.

Con le osservazioni appena fatte possiamo riscrivere:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} U(s) = W(s)U(s) = \frac{G(s)}{1+F(s)} U(s)$$