Il metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin

DEF. Il poliedro $P' \in \mathfrak{R}^{n-1}$ si dice <u>proiezione</u> del poliedro $P \in \mathfrak{R}^n$ per eliminazione di x_n se

1. $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in P \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in P'$;
2. $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in P' \Rightarrow \exists x_n : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in P$.

<u>Caso 1</u>: la rappresentazione del poliedro contiene un'equazione.

Data la rappresentazione $\begin{cases} Ax \leq b \\ x_n = f(x_1 \dots x_{n-1}) \end{cases}$ del poliedro P, la rappresentazione del poliedro P' si può ottenere mediante *proiezione per sostituzione* della variabile x_n come segue:

$$P' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n-1} : A_1 x_1 + \dots + A_{n-1} x_{n-1} + A_n f(x_1 \dots x_{n-1}) \leq b \right\}$$

<u>Caso 2</u>: la rappresentazione del poliedro contiene unicamente disequazioni.

Data la rappresentazione, con m vincoli,

$$\begin{cases} x_n \leq f_i(x_1 \dots x_{n-1}) & i = 1, \dots, m_1 \\ x_n \geq g_j(x_1 \dots x_{n-1}) & j = 1, \dots, m_2 \\ h_k(x_1 \dots x_{n-1}) \geq 0 & k = 1, \dots, m - m_1 - m_2 \end{cases}$$

del poliedro P, con $f_i(.), g_j(.), h_k(.)$ espressioni lineari, la rappresentazione del poliedro P' si può ottenere mediante *proiezione propria* della variabile x_n come segue:

$$P' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n-1} : \begin{matrix} f_i(x_1 \dots x_{n-1}) \geq g_j(x_1 \dots x_{n-1}) \;\; con \;\; i = 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2 \\ h_k(x_1 \dots x_{n-1}) \geq 0 \;\; con \;\; k = 1, \dots, m - m_1 - m_2 \end{matrix} \right\}$$

Il poliedro proiettato avrà quindi $m_1 m_2 + m - m_1 - m_2$ vincoli e $n-1$ variabili.

Il metodo consente di trovare un punto del poliedro P proiettando $n-1$ variabili e risolvendo per ispezione sistema finale di disequazioni in una variabile.

Esempio: Dato il poliedro con m=6 vincoli, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 4 \end{cases}$ eliminare la x_3 con proiezione propria.

Soluzione. Anzitutto è necessario esplicitare tutti i vincoli rispetto alla variabile x_3:

$\begin{cases} x_3 \geq 5 - 3x_1 + 2x_2 \\ x_3 \leq 4 - x_1 - x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq \frac{1}{2}(-3 + x_1 + x_2) \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 4 \end{cases}$ e dividerli nei tre gruppi $x_3 \leq$, $x_3 \geq$ e il terzo gruppo in cui x_3 non compare:

$$\begin{cases} x_3 \geq 5 - 3x_1 + 2x_2 \\ x_3 \geq \frac{1}{2}(-3 + x_1 + x_2) \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 4 - x_1 - x_2 \\ x_3 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \end{cases}$$

da cui si vede che $m_2 = 3, m_1 = 2$ e $m - m_1 - m_2 = 1$.

Il poliedro proiezione avrà quindi 3×2+1=7 vincoli. I primi 6 si ottengono ponendo il termine di destra di uno dei due vincoli del secondo gruppo maggiore o uguale al termine di destra di uno dei tre vincoli del primo gruppo, per tutte le combinazioni possibili:

$$\begin{cases} 4 - x_1 - x_2 \geq 5 - 3x_1 + 2x_2 \\ 4 - x_1 - x_2 \geq \dfrac{1}{2}(-3 + x_1 + x_2) \\ 4 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ 4 \geq 5 - 3x_1 + 2x_2 \\ 4 \geq \dfrac{1}{2}(-3 + x_1 + x_2) \\ 4 \geq 0 \end{cases}$$

Il settimo vincolo è l'unico del terzo gruppo, che rimane uguale: $x_1 - 2x_2 \geq 2$.

Il poliedro proiettato è quindi:

$$\begin{cases} 4 - x_1 - x_2 \geq 5 - 3x_1 + 2x_2 \\ 4 - x_1 - x_2 \geq \dfrac{1}{2}(-3 + x_1 + x_2) \\ 4 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ 4 \geq 5 - 3x_1 + 2x_2 \\ 4 \geq \dfrac{1}{2}(-3 + x_1 + x_2) \\ 4 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Chiaramente il vincolo $4 \geq 0$ è sempre vero e quindi può essere eliminato, restano quindi 6 vincoli.

(**Nota**: se invece fosse venuto fuori $0 \geq 4$, vincolo sempre falso, il sistema di disequazioni dato sarebbe stato inammissibile)

Esercizio: proiettare x_2 verificando che al prossimo passo $m_1 = 6$ mentre i gruppi 2 e 3 sono vuoti.

Per trovare una soluzione del sistema di disequazioni iniziale sarà sufficiente percorre a ritroso le proiezioni: data una soluzione x_1 del sistema finale di 1 variabile, basta sostituire questa nel sistema precedente di 2 variabili x_1, x_2, ottenendo così un sistema nella sola incognita x_2. Dopo aver assegnato un valore ammissibile a x_2 si potrà tornare al sistema precedente in tre variabili e così via, risolvendo n sistemi di una variabile.

Esempio: trovare una soluzione ammissibile per l'esercizio precedente.

Soluzione. Qui abbiamo un caso molto particolare perché il sistema finale nell'incognita x_1 è vuoto (non ha vincoli, o al limite ha il vincolo $4 \geq 0$ se non l'avete eliminato). Questo significa che x_1 può essere scelta liberamente, per esempio $x_1 = 0$. Tornando al poliedro in 2 variabili del riquadro precedente e sostituendo $x_1 = 0$ rimane:

$$\begin{cases} -1 \geq 3x_2 \\ \frac{11}{2} \geq \frac{3}{2}x_2 \\ 4 \geq x_2 \\ -1 \geq 2x_2 \\ \frac{11}{2} \geq \frac{1}{2}x_2 \\ 4 \geq 0 \\ -2 \geq 2x_2 \end{cases}$$ di tutti i vincoli i l più stringente è l'ultimo: $-1 \geq x_2$.

A questo punto assegniamo, per es., $x_2 = -1$ e torniamo al sistema iniziale ponendo $x_3 = 0$ e $x_2 = -1$.

$$\begin{cases} x_3 \geq 5 - 2 \\ x_3 \leq 4 + 1 \\ 2 \geq 2 \\ x_3 \geq \frac{1}{2}(-3 - 1) \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 4 \end{cases}$$ I vincoli più stringenti sono solo due: $\begin{cases} x_3 \geq 3 \\ x_3 \leq 4 \end{cases}$ possiamo scegliere, per es. $x_3 = 4$.

Una soluzione ammissibile è quindi $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Il metodo può essere utilizzato anche per risolvere i problemi di PL osservando che se $c_n = 0$ ciascun punto di P si proietta in un punto di P' conservando il valore della funzione obiettivo, ovvero:

$$\text{Se } c_n = 0 \Rightarrow \; min\,\{c^T x : x \in P\} = min\,\{c_1 x_1 + \cdots + c_{n-1} x_{n-1} : x \in P'\}.$$

Se tutte le variabili hanno costo diverso da zero, è sufficiente introdurre una variabile e un vincolo al problema, ovvero impostare il problema di PL:

$$min\,\{z : z = c^T x;\; x \in P\}$$

Del tutto equivalente all'originale (ma nello spazio aumentato $\Re^{n+1}$) e con tutti i costi nulli, tranne che per la variabile z, che sarà l'unica a non essere proiettata. Proiettando le n variabili x_1 ... x_n si otterrà un problema di PL nella sola variabile z che potrà essere risolto per ispezione.

Esempio: Trovare la soluzione ottima del 53° Quesito con la Susi con il metodo di eliminazione di F.M.

Soluzione. Partiamo dalla formulazione del problema:

$$\max x_G$$
$$\begin{cases} 3x_P - x_G \le 20 \\ x_G - 2x_P \le 0 \\ x_G \ge 0 \\ x_P \ge 0 \end{cases}$$

Poiché x_P ha costo nullo, è possibile proiettarla senza la necessità di introdurre un'ulteriore variabile fittizia. Esplicitiamo quindi i 4 vincoli rispetto a x_P:

$$\begin{cases} x_P \le \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_G \\ x_P \ge \frac{1}{2}x_G \\ x_G \ge 0 \\ x_P \ge 0 \end{cases}$$ da cui si vede che $m_1 = 2, m_2 = 1$ e $m - m_1 - m_2 = 1$.

Il poliedro proiettato avrà quindi 3 vincoli:

$$\begin{cases} \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_G \ge \frac{1}{2}x_G \\ \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_G \ge 0 \\ x_G \ge 0 \end{cases}$$, ovvero: $$\begin{cases} 40 \ge x_G \\ x_G \ge -20 \\ x_G \ge 0 \end{cases}$$ Il problema di PL proiettato è quindi: $$\max x_G \quad \begin{cases} x_G \le 40 \\ x_G \ge 0 \end{cases}$$

Poiché ci interessa il massimo valore ammissibile di x_G, la soluzione ottima è $x_G^* = 40$. Volendo trovare anche il valore ottimo di x_P, è sufficiente sostituire $x_G = 40$ nel sistema iniziale ottenendo

$$\begin{cases} 3x_P - 40 \le 20 \\ 40 - 2x_P \le 0 \\ 40 \ge 0 \\ x_P \ge 0 \end{cases}$$ che ammette l'unica soluzione $x_P^* = 20$.

Nota di approfondimento: nel caso peggiore il numero di vincoli cresce con rapidità doppiamente esponenziale nel numero di variabili, ovvero l'algoritmo ha complessità $O\left(m^{2^n}\right)$. Per esempio, partendo da un problema con **8 variabili e 8 vincoli**, si avranno:

dopo la prima proiezione 7 variabili e 4x4=16 vincoli;

dopo la seconda proiezione 6 variabili e 8x8=64 vincoli;

dopo la terza proiezione 5 variabili e 32x32=1024=2^{10} vincoli;

dopo la quarta proiezione 4 variabili e 2^{18} vincoli;

dopo la quinta proiezione 3 variabili e 2^{34} vincoli;

dopo la sesta proiezione 2 variabili e 2^{66} vincoli;

dopo la settima e ultima proiezione 1 variabili e 2^{130} vincoli, circa pari a 10^{39}

Si osservi che un computer in grado di verificare un miliardo di vincoli al secondo impiegherebbe 10^{30} secondi. Poiché in un anno ci sono 365x24x3600 sec = 31.536.000 sec < 3x10^7 sec, servirebbero più di 3x10^{22} anni per completare l'ispezione dell'ultimo sistema. Si noti che secondo gli ultimi calcoli dell'Agenzia Spaziale Europea, l'universo ha meno di 14 miliardi di anni (1,4x10^{10} anni). Quindi anche parallelizzando il calcolo con un miliardo di computer operanti in parallelo dal Big Bang a oggi ci troveremmo ad appena un millesimo del tempo di calcolo necessario. Quindi questo metodo non è pratico per problemi reali.