Convenzioni

Le variabili scritte in minuscolo presentano una dipendenza dal tempo.
Le variabili scritta in maiuscolo non presentano dipendenza dal tempo.

Regime sinusoidale

Per poter compiere operazioni e quindi analizzare il circuito tutte le sinusoidi dovranno essere isofrequenziali, quindi possiamo omettere la frequenza ω dai fasori.
Per passare dal regime sinusoidale al regime fasoriale bisogna avere la sinusoide espressa tramite il coseno e l'ampiezza della sinusoide deve essere moltiplicata per $\sqrt{2}$.

$$e(t) = \hat{E}\cos(\omega t + \varphi_E)$$

$$e(t) = \sqrt{2}\frac{\hat{E}}{\sqrt{2}}\cos(\omega t + \varphi_E)$$

Il fasore che si ricava è

$$\bar{E} = \frac{\hat{E}}{\sqrt{2}}e^{j\varphi_E}$$

Le lettere utilizzate significano:

- $\hat{E}$ Ampiezza della sinusoide
- ω Pulsazione della sinusoide
- φ Sfasamento della sinusoide
- j Unità immaginaria
- $\bar{E}$ Fasore associato alla sinusoide $e(t)$

Il valore efficace sarà dato da $E = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{E}$
Questa relazione vale sia per la tensione sia per la corrente.

Quando si trovano equazioni differenziali nel regime sinusoidale, per passare al regime fasoriale si possono effettuare le seguenti sostituzioni:

$v(t)$	$\bar{V}$
$\frac{d}{dt}v(t)$	$j\omega\bar{V}$
$\int v(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}\bar{V} = -\frac{j}{\omega}\bar{V}$

Se la sinusoide fosse espressa tramite il seno per trasformarla in coseno si utilizzerebbe la seguente relazione

$$e(t) = \hat{E}\sin(\omega t + \varphi_E) = \hat{E}\cos\left(\omega t + \varphi_E - \frac{\pi}{2}\right)$$

Definizioni

Unità immaginaria: $j = i$ (in analisi matematica)
Frequenza: $f\ [Hz]$
Pulsazione: $\omega = 2\pi f$
Impedenza: $\bar{Z}\ [\Omega]$
Ammettenza: $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}\ [S]$ (Siemens)
In un circuito *RCL*

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$	La parte immaginaria si annulla.
$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	Il sistema è in risonanza.
$\omega L > \frac{1}{\omega C}$	Si ha un'impedenza ohmico induttiva.
$\omega L < \frac{1}{\omega C}$	Si ha un'impedenza ohmico capacitiva.

Concetto di Potenza

Alimentando un circuito in corrente alternata si introduce il concetto di **potenza complessa**:

$$\bar{S} = \bar{V}\underline{I}$$

dove $\underline{I} = Ie^{-j\varphi_I}$ è il fasore coniugato della corrente.

$$\bar{S} = VIe^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = VIe^{j\varphi}$$

con $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ detto sfasamento.

Può essere espressa in base all'ampiezza delle sinusoidi di corrente e tensione:

$$\bar{S} = VIe^{j\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{V}\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{I}e^{j\varphi} = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}e^{j\varphi}$$

Si può esprimere infine anche in forma trigonometrica:

$$\bar{S} = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi \to \bar{S} = P + jQ$$

Il modulo della potenza complessa è la **potenza apparente**

$$S = VI = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Riassumendo

Potenza attiva	$P = VI\cos\varphi$
Potenza reattiva	$Q = VI\sin\varphi$
Potenza complessa	$\bar{S} = P + jQ$
Potenza apparente	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
Fattore di potenza	$\cos\varphi = \frac{P}{S}$
Sfasamento	$\varphi = \arctan\frac{Q}{P}$
Potenza attiva	$P = S\cos\varphi$
Potenza reattiva	$Q = S\sin\varphi$

Teoremi sulla Potenza

Per il principio di conservazione della potenza, la somma delle potenze complesse deve essere zero.

$$\sum_{k=1}^{N}\overline{S_k} = \sum_{k=1}^{N}(P_k + jQ_k) = 0$$

Per il teorema di Boucherot si ottiene che sia la somma delle potenze attive, sia quella delle potenze reattive, è uguale a zero.

$$\sum_{k=1}^{N}P_k = 0\,;\ \sum_{k=1}^{N}Q_k = 0$$

Potenze dei componenti circuitali

	Potenza attiva P	**Potenza reattiva Q**	**Fattore di potenza $\cos\varphi$**
Resistore	$RI^2 = \frac{V^2}{R}$	0	1
Induttore	0	$X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} = \frac{V^2}{\omega L}$	0
Condensatore	0	$X_C I^2 = \frac{V^2}{X_C} = \omega C V^2$	0

Il resistore assorbe potenza attiva.
L'induttore immagazzina potenza reattiva positiva.
Il condensatore immagazzina potenza reattiva negativa.

Legge di Ohm (LΩ)

$$I = \frac{V}{R} \qquad V = R * I \qquad R = \frac{V}{I}$$

Leggi di Kirchhoff

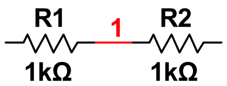
LKT – Si applica alla maglia scegliendo un verso di rotazione, associandogli quindi un segno alle tensioni. Stesso verso di rotazione stesso segno.

$$\sum_{n=0}^{N} V_n = 0$$

LKC – Si applica ai nodi, stabilendo un segno alle correnti in entrata e l'opposto a quelle in uscita.

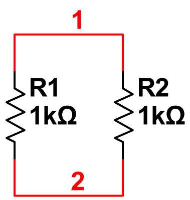
$$\sum_{n=1}^{N} I_n = 0$$

Resistori in serie



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$
$$I_1 = I_2$$

Resistori in parallelo



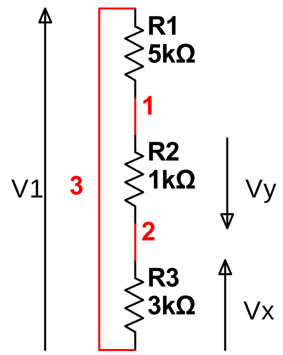
$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_n}}$$

$$R_{12} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_1 = V_2$$

Se si applica un cortocircuito dal nodo 1 al nodo 2 le resistenze in parallelo si annullano.

Partitore di tensione e corrente

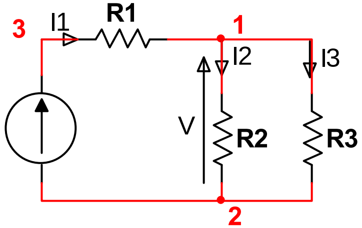


Per poterlo applicare le resistenze devono essere in serie.

$$Vx = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} V_1$$

$$Vy = -\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} V_1$$

Se le tensioni hanno lo stesso verso di rotazione si mette un meno.



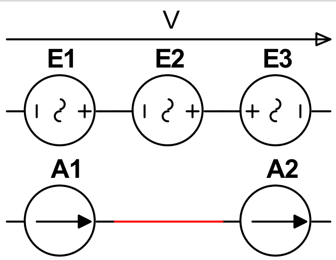
$$I_2 = \frac{V}{R_2} = G_2 V = \frac{G_2}{G_{23}} I_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1$$

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = G_3 V = \frac{G_3}{G_{23}} I_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1$$

$$V = V_2 = V_3 = R_{23} * I_1 = \frac{I_1}{G_{23}}$$

Se la corrente entra nello stesso nodo, invece di uscire, si pone il segno meno.

Serie di generatori



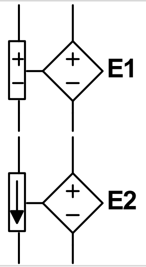
$$V = E_1 + E_2 - E_3$$

Non esiste il circuito, poiché viola la legge di Kirchhoff alle correnti.

Generatore pilotato

Il generatore pilotato è un doppio bipolo.
Non lo si può spegnere nell'analisi circuitale, ma si può supporre la corrente circolante uguale a zero, quindi supporre che sia spento.
Il generatore pilotato può generare resistenze negative quando viene semplificato nel circuito.

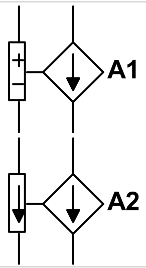
Generatori di tensione a sorgente controllata



Generatore controllato in tensione
$$E_1 = \alpha V_x$$

Generatore controllato in corrente
$$E_2 = R_m I_x$$

Generatori di corrente a sorgente controllata



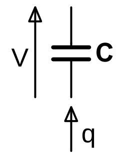
Generatore controllato in tensione
$$A_1 = gmV_x$$

Generatore controllato in corrente
$$A_2 = \beta I_x$$

Componenti dinamici

Sono circuiti resistivi o circuiti alimentati in corrente continua, che presentano una dipendenza dal tempo.

Condensatore



C è la capacità del condensatore misurata in Farad (F).
q è la carica e dipende dal tempo:
$$q(t) = CV(t)$$
La corrente che passa nel condensatore si può calcolare in un intervallo di tempo infinitesimo:
$$i(t) = \frac{\Delta q}{\Delta t} \rightarrow i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dV(t)}{dt}$$
$$= \omega CV \cos(\omega t + \varphi_V + \frac{\pi}{2})$$
La corrente aumenta linearmente nel tempo quando la tensione varia, ed è zero quando V è costante.
$$V = \frac{1}{C}\int_0^t i_c \, dt$$
L'energia immagazzinata in un condensatore è pari al lavoro fatto per caricarlo:
$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$
Integrando questa equazione si può determinare l'energia potenziale immagazzinata.
Gli estremi di integrazione saranno zero e Q, ovvero il condensatore scarico e la carica immessa sui piatti del condensatore.
$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = E$$
La potenza di un condensatore si determina con la seguente formula:
$$P = \frac{dW_c(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}Cv(t)^2 = v(t)C\frac{dv(t)}{dt} = v(t) * i(t)$$

Per studiare il circuito levando la dipendenza dal tempo, si passa ai fasori.

$$\bar{I} = j\omega C\bar{V}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I} = \bar{Z}\bar{I}$$

L'impedenza del condensatore è $\bar{Z} = -jX_C$

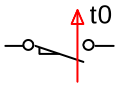
La reattanza capacitiva, misurata in Ohm, utilizzata come resistenza immaginaria per il calcolo nei circuiti, è data da:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

<u>Nella sostituzione nel circuito si utilizza l'impedenza.</u>

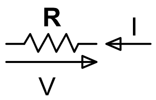
<u>Il condensatore a regime stazionario si comporta come circuito aperto.</u>

Interruttore



Rappresenta un interruttore aperto da un tempo infinito che all'istante t0 si chiude.

Resistore



$$v = RI\cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$i = I\cos(\omega t + \varphi_I)$$

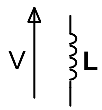
$$\bar{V} = RIe^{j\varphi_I} = R\bar{I}$$

$$\bar{I} = Ie^{j\varphi_I}$$

La potenza assorbita dal resistore si calcola come:

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} = GV^2$$

Induttore



L è l'induttanza dell'induttore e si misura in Henry (H).

La tensione che attraversa il condensatore in un intervallo infinitesimo si ottiene con:

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt} = L\frac{di}{dt} =$$

$$= -LI\omega\sin(\omega t + \varphi_I) = \omega LI\cos(\omega t + \varphi_I + {}^{\pi}/_{2})$$

Il flusso magnetico concatenato misurato in Weber (Wb) si ottiene da:

$$\phi = Li$$

La corrente che attraversa l'induttore è data da:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L\,dt = I\cos(\omega t + \varphi_I)$$

Per evitare di studiare il circuito nel dominio del tempo si passa ai fasori:

$$\bar{V} = \omega LIe^{j\left(\varphi_I + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega LIe^{j\varphi_I} + e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega LIe^{j\varphi_I}$$

$$= j\omega L\bar{I} = \bar{Z}\bar{I}$$

Impedenza dell'induttore è $\bar{Z} = j\omega L$.

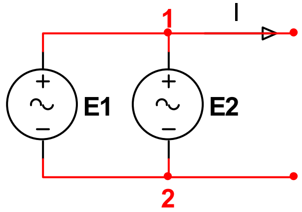
La reattanza induttiva, misurata in Ohm, utilizzata come resistenza immaginaria per il calcolo nei circuiti, è data da:

$$X_L = \omega L$$

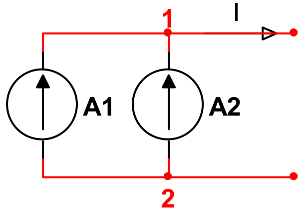
<u>Nella sostituzione nel circuito si utilizza l'impedenza.</u>

<u>L'induttore a regime stazionario si comporta come cortocircuito.</u>

Parallelo di generatori

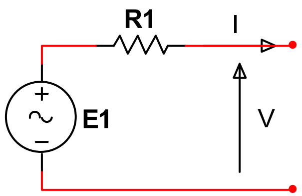


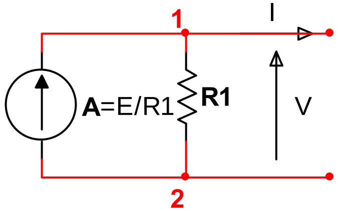
Non esiste il circuito, poiché viola la legge di Kirchhoff alle correnti.
Potrebbe esistere se ci fosse almeno una resistenza attaccata tra E1 ed E2.



$$I = A_1 + A_2$$

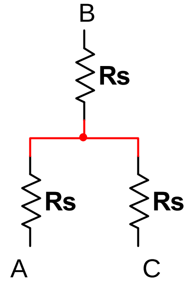
Trasformazione generatori

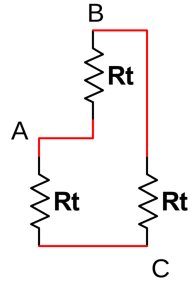




Per passare dal generatore di corrente al generatore di tensione, E1 = A*R1

Trasformazione stella-triangolo resistori

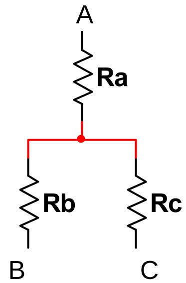


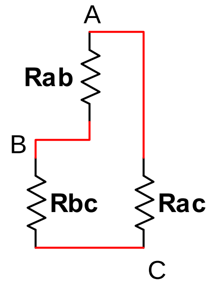


Caso particolare.

$$Rt = 3Rs$$

$$Rs = \frac{1}{3}Rt$$





$$R_a = \frac{R_{ab} * R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}$$

A numeratore si ha la moltiplicazione tra le resistenze connesse al nodo, in questo caso A.

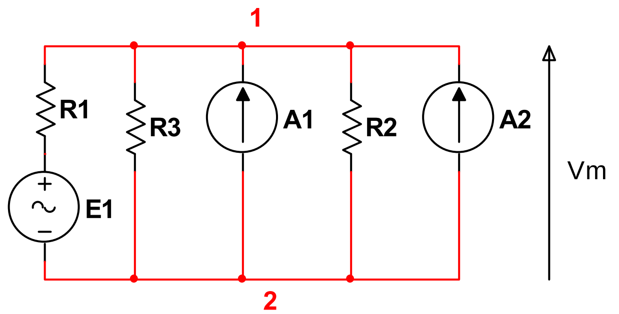
A denominatore la somma di tutte e tre le resistenze del circuito.

$$R_{ab} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_c}$$

$$R_{bc} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_a}$$

$$R_{ca} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b}$$

Teorema di Millman



In una rete a due nodi, con componenti collegati in parallelo

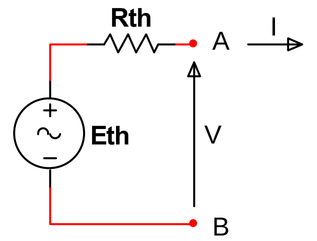
$$Vm = \frac{\sum_i \frac{E_i}{R_i} + \sum_j A_j}{\sum_k \frac{1}{R_k}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + A_1 + A_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Dove Ei/Ri è la somma dei generatori di tensione con collegato in serie una resistenza.
Aj è la somma dei generatori di corrente senza le relative resistenze attaccate in serie.
1/Rk è la somma di tutte le resistenze che compaiono nel circuito ad <u>eccezione di quelle collegate in serie ad un generatore di corrente</u>.

I segni dipendono dal verso della corrente, ovvero se la corrente è concorde con il verso di Vm allora avrà segno positivo.
Si assume come convenzione il verso del primo nodo, quindi verso il nodo 1.

<u>NOTA</u>: Quando si crea un cortocircuito la tensione è nulla su quel ramo.

Teorema di Thévenin



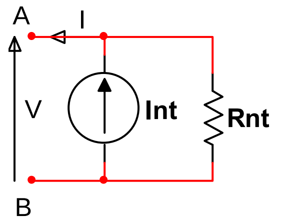
Un circuito lineare, comunque complesso, visto da due punti, è equivalente ad un generatore reale di tensione in cui la tensione impressa assume il valore della tensione a vuoto misurata ai morsetti mentre la resistenza è uguale al rapporto tra la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito.
Formula basata sulla convenzione dei generatori:

$$V = V_{th} - \frac{V_{th}}{I_{cc}} I = V_{th} - R_{th} * I$$

$$I_{cc} = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$

Compare il segno meno davanti alla resistenza per via della convenzione utilizzata.
La resistenza R_{th} nel caso particolare in cui <u>non vi siano generatori controllati</u> nel bipolo esaminato, può essere calcolata come la resistenza equivalente ai morsetti del bipolo, A e B, dopo aver disattivato tutti i generatori presenti.

Teorema di Norton



Un circuito lineare, è equivalente ad un generatore reale di corrente, in cui il generatore assume il valore della corrente di corto circuito misurata ai morsetti del bipolo e la resistenza è uguale al rapporto tra la tensione a vuoto e la corrente di cortocircuito.
Per la convenzione dei generatori la corrente di cortocircuito deve andare dal nodo A al nodo B, altrimenti avrà segno meno.

Metodo dell'analisi nodale

1. Identificare e nominare i nodi del circuito, ogni nodo sarà identificato da un potenziale μ_n.
   Il nodo della terra è identificato dal valore zero.
2. La tensione tra due nodi è orientata verso il nodo con indice maggiore e sarà data da:
$$V_{21} = \mu_2 - \mu_1$$
3. Prendo tutte le correnti dei lati con la convenzione degli utilizzatori, ovvero verso opposto alla tensione.
4. Scrivo le equazioni di Kirchhoff delle correnti ai nodi, supponendo le correnti entranti nel nodo negative e quelle uscenti positive.
5. Esplicito le equazioni raccogliendo i potenziali e ponendo come termine noto i valori delle correnti, ottenendo un'equazione del tipo:
$$\begin{array}{r} 1: \\ 2: \\ 3: \end{array}\begin{cases} (G_1 + G_4 + G_5)\mu_1 - (G_4 + G_5)\mu_2 = I_1 - G_5E_3 \\ -(G_4 + G_5)\mu_1 + (G_3 + G_4 + G_5)\mu_2 - G_3\mu_3 = G_5E_3 \\ -G_3\mu_2 + (G_2 + G_3)\mu_3 = -G_2E_1 \end{cases}$$
6. Creo la matrice del sistema:

	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
Nodo 1	$G_1 + G_4 + G_5$	$-(G_4 + G_5)$	0
Nodo 2	$-(G_4 + G_5)$	$G_3 + G_4 + G_5$	$-G_3$
Nodo 3	0	$-G_3$	$G_2 + G_3$

$$\cdot \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 - G_5E_3 \\ G_5E_3 \\ -G_2E_1 \end{Bmatrix}$$

$$[G][V] = [A]$$

Le colonne e le righe identificano i nodi del circuito, nel nostro esempio il circuito presenta 3 nodi.
La matrice si riempie andando a sommare tutte le conduttanze collegate direttamente tra i due nodi, qual'ora non vi fossero resistenze collegate tra i due nodi si pone zero.
Tutte le caselle fuori dalla diagonale principale (segnata in azzurro) saranno moltiplicate per -1.

Si moltiplica la matrice per i potenziali nel nodo considerato, ottenendo una matrice composta dai generatori collegati nel nodo, sommati tra loro. Si pone il segno meno quando il verso della tensione va al contrario, ovvero dal nodo più alto al nodo più basso.
Il valore dei generatori va moltiplicato per l'eventuale conduttanza collegata in serie.

La matrice è simmetrica rispetto alla diagonale principale:
$$x_{a,b} = x_{b,a}$$

Metodo della sovrapposizione degli effetti

Si utilizza per analizzare circuiti composti da n generatori, avendo così n circuiti indipendenti da risolvere.
Si procede con lo spegnere n-1 generatori, lasciandone attivo solo uno e studiando il circuito risultante.

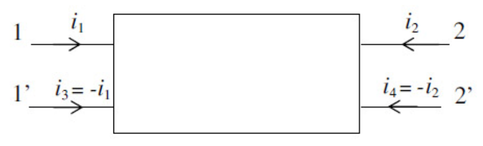
Spegnendo un generatore di tensione il circuito rimane chiuso.
Spegnendo un generatore di corrente il circuito si apre.

<u>Si possono spegnere i generatori pilotati supponendo la grandezza pilota nota.</u>

Nei sottocircuiti alcune tensioni e correnti potrebbero scomparire, quindi bisogna fare attenzione alla nomenclatura.

Terminato lo studio n circuiti, si sommano le stesse variabili ottenute dallo studio dei vari casi, facendo attenzione al verso delle correnti e tensioni. Nel caso il verso sia opposto si pone il segno meno.

Studio di doppi bipoli o quadri-porta



Convenzione degli utilizzatori:
Vi sono dei legami tra le porte 1 e 1', così come tra le porte 2 e 2'.
La tensione V_1 va dalla porta 1' alla porta 1.
La tensione V_2 va dalla porta 2' alla porta 2.

Matrice resistiva o matrice R

$$\begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{cases}$$

$$\overline{Z_{11}} = R_{11} = \frac{\overline{V_1}}{\overline{I_1}}\bigg|_{\overline{I_2}=0} \qquad \overline{Z_{12}} = R_{12} = \frac{\overline{V_1}}{\overline{I_2}}\bigg|_{\overline{I_1}=0}$$

$$\overline{Z_{21}} = R_{21} = \frac{\overline{V_2}}{\overline{I_1}}\bigg|_{\overline{I_2}=0} \qquad \overline{Z_{22}} = R_{22} = \frac{\overline{V_2}}{\overline{I_2}}\bigg|_{\overline{I_1}=0}$$

Se esiste R può esistere la matrice F solo se R è invertibile.

$$R = G^{-1}$$
$$G = R^{-1}$$

Quindi

$$\det(R) = 0 \rightarrow G\nexists$$
$$\det(G) = 0 \rightarrow R\nexists$$

Le rappresentazioni R e G possono esistere entrambe o soltanto una.

Rappresentazione controllata in corrente o matrice G

$$\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2 \\ I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2 \end{cases}$$

$$G_{11} = \frac{I_1}{V_1}\bigg|_{V_2=0} \qquad G_{12} = \frac{I_1}{V_2}\bigg|_{V_1=0}$$

$$G_{21} = \frac{I_2}{V_1}\bigg|_{V_2=0} \qquad G_{22} = \frac{I_2}{V_2}\bigg|_{V_1=0}$$

Matrici ibride H e H'

Matrice H diretta:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

Matrice gemella, H':

$$\begin{cases} I_1 = h'_{11}V_1 + h'_{12}I_2 \\ V_2 = h'_{21}V_1 + h'_{22}I_2 \end{cases}$$

$$H = H'^{-1}$$

h è un coefficiente adimensionale di resistenza o conduttanza.

Passaggio dalla matrice R alla matrice H

$$R: \begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{cases}$$

$$H: \begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 = R_{11}I_1 - \frac{R_{12}R_{21}}{R_{22}}I_1 + \frac{R_{12}}{R_{22}}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 = -\frac{R_{21}}{R_{22}}I_1 + \frac{V_{22}}{R_{22}} \end{cases}$$

Simmetria circuitale del doppio bipolo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Circuito simmetrico

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} \\ a_{21} = a_{12} \end{cases}$$

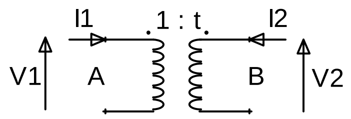
Circuito reciproco

$$\begin{cases} a_{11} \neq a_{22} \\ a_{21} = a_{12} \end{cases}$$

Potenza di un doppio bipolo

$$P = V_1I_1 + V_2I_2$$

Trasformatore reale



$V_1 : V_2 = 1 : t$
t è il rapporto di trasformazione

$I_1 : (-I_2) = t : 1$

$P = V_1 I_1 + V_2 I_2 = 0$
$P = V_1 I_1 + V_1 t\left(-\frac{I_1}{t}\right) = V_1 I_1 - V_1 I_1 = 0$
Il trasformatore non assorbe potenza.

Il funzionamento del trasformatore reale è influenzato dai campi elettromagnetici.
Viene studiato con la convenzione degli utilizzatori.
La parte del circuito identificata con la lettera A si chiama parte primaria, quella di B secondaria.
Direttamente proporzionale al rapporto di trasformazione.
$V_1 < V_2 \rightarrow I_1 < I_2$
Inversamente proporzionale al rapporto di trasformazione.

$$\begin{cases} V_2 = V_1 t \\ I_2 = -\frac{I_1}{t} \end{cases}$$

Il segno meno della I_2 è dato dal suo verso, se non fosse entrante non ci sarebbe il meno.

Trasformazione circuitale da secondario (B) a primario (A)

Per la trasformazione fare attenzione al rapporto di trasformazione riportato nel disegno.

<u>$1 : t$</u>	<u>$t : 1$</u>
Gen. di corrente -> Moltiplico per t	Gen. di corrente -> Divido per t
Gen. di tensione -> Divido per t	Gen. di tensione -> Moltiplico per t
Resistori -> Divido per t^2	Resistori -> Moltiplico per t^2

Se si ha un rapporto del tipo:
<u>$a : b$</u>
si pone $h = \frac{b}{a}$
ottenendo così $1 : h$

Se si passa da primario a secondario le formule sono le inverse.

Equazioni differenziali per i circuiti transitori (RC o RL)

Sono caratterizzati da equazioni differenziali

$$f(t) = \alpha \frac{dx}{dt} + \beta x$$

Dove $f(t)$ è detta forzante.
Il grado dell'equazione differenziale è data dall'ordine della derivata, in questo caso è di primo grado, poiché si ha $\frac{dx}{dt}$.

Per poter risolvere i circuiti si passa alla forma omogenea associata, che si ottiene nel seguente modo

$$\alpha \frac{d^n x}{d^n t} = \alpha\lambda^n \text{ e } \beta x^n = \beta\lambda^{n-1}$$

nel nostro caso avremmo

$$\alpha\lambda + \beta = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$$

nella quale ci interessa calcolare λ.

Integrando si ottiene

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} + B$$

Poniamo delle condizioni iniziali e finali

$$\begin{cases} \lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{t \to 0} (Ae^{-\lambda t} + B) = x_0 = A + B \\ \lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} (Ae^{-\lambda t} + B) = x_\infty = B \end{cases} \quad A = x_0 - B = x_0 - x_\infty$$

Si ricava che

$$x(t) = (x_0 - x_\infty)e^{-\lambda t} + x_\infty$$

x è denominata variabile si stato e descrive l'andamento nel tempo del circuito.

Per i condensatori:

$$i = C\frac{d}{dt}v(t)$$

Dove $v(t)$, la tensione, è la variabile di stato.

Per gli induttori:

$$v = L\frac{d}{dt}i(t)$$

Dove $i(t)$, la corrente, è la variabile di stato.

Metodo risolutivo circuiti transitori (RC o RL)

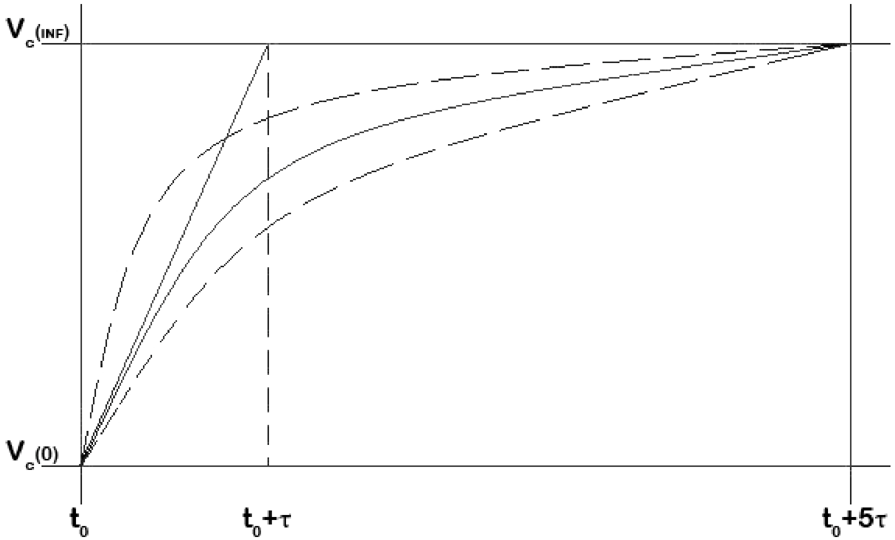
Introduciamo

$$\lambda = \frac{1}{\tau}$$

Dove τ è la costante di tempo che identifica la curva caratteristica del circuito, nel fascio di curve di tipo esponenziale.

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} + B = (x_0 - x_\infty)e^{-\lambda t} + x_\infty = (x_0 - x_\infty)e^{-t/\tau} + x_\infty$$

x è la variabile di stato del circuito transitorio, determinata dai componenti che lo compongono.



Per convenzione, un condensatore o induttore, si può considerare a regime, scarico o carico, dopo un periodo di tempo di 5τ o 4τ dove avrà raggiunto rispettivamente il 99% o 98% della propria carica o scarica.

La risoluzione dei circuiti transitori, che presentano quindi un interruttore che fa variare il comportamento del circuito nel tempo a partire dall'istante t_0, si può suddividere in tre parti:

Parte 1

$$t < t_0 \rightarrow t_{0^-}$$

Si analizza il circuito prima del cambiamento di comportamento, ad esempio della chiusura di un interruttore.

Si determina la variabile di stato dei componenti transitori, detta costante iniziale, per i condensatori la $V_C^{0^-}$ e per gli induttori la $I_L^{0^-}$.

I transitori sono a regime stazionario.

Parte 2:

$$t \geq t_0 \rightarrow t_{0^+}$$

Si analizza la dinamica del circuito, andando a calcolare τ.

Si calcola la resistenza equivalente vista dal componente transitorio, spegnendo i generatori.

Nel caso del condensatore si calcola come $\tau = CR_{eq}$ mentre per l'induttore come $\tau = {}^{L}/_{R_{eq}}$.

Se il circuito viene riaperto o richiuso, è necessario ricalcolare τ.

Parte 3:

$$t = +\infty$$

Si analizza il circuito in un tempo infinito, quindi senza ulteriori variazioni.

Si calcola la variabile di stato dei componenti, detta costante finale, per i condensatori V_C^{∞} e per gli induttori I_L^{∞}.

I transitori sono a regime stazionario.

NOTA:

Si può dire che:

$$V_C^{0^-} = V_C^{0^+}$$
$$I_L^{0^-} = I_L^{0^+}$$

questo perché le variabili di stato in natura sono sempre delle funzioni continue e non presentano discontinuità.

Prefissi per le potenze del 10

10^{-24} yocto [y]	10^{1} deca [da]
10^{-21} zepto [z]	10^{2} etto [h]
10^{-18} atto [a]	10^{3} chilo [k]
10^{-15} fento [f]	10^{6} mega [M]
10^{-12} pico [p]	10^{9} giga [G]
10^{-9} novo [n]	10^{12} tera [T]
10^{-6} micro [μ]	10^{15} peta [P]
10^{-3} milli [m]	10^{18} exa [E]
10^{-2} centi [c]	10^{21} zetta [Z]
10^{-1} deci [d]	10^{24} yotta [Y]

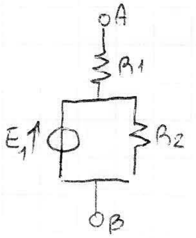
	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H'}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T'}$
$\boldsymbol{R}$	$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta_G} & -\frac{g_{12}}{\Delta_G} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta_G} & \frac{g_{11}}{\Delta_G} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta_{H'}}{h'_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta_{T'}}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$
$\boldsymbol{G}$	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{\Delta_R} & -\frac{r_{12}}{\Delta_R} \\ -\frac{r_{21}}{\Delta_R} & \frac{r_{11}}{\Delta_R} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_H}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_{H'}}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta_T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta_{T'}}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$
$\boldsymbol{H}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_R}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ -\frac{r_{21}}{r_{22}} & \frac{1}{r_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta_G}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta_{H'}} & -\frac{h'_{12}}{\Delta_{H'}} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta_{H'}} & \frac{h'_{11}}{\Delta_{H'}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta_{T'}}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$
$\boldsymbol{H'}$	$\begin{matrix} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11}} \\ \frac{r_{21}}{r_{11}} & \frac{\Delta_R}{r_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta_H} & -\frac{h_{12}}{\Delta_H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta_H} & \frac{h_{11}}{\Delta_H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta_T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta_{T'}}{D'} & \frac{B'}{D'} \end{matrix}$
$\boldsymbol{T}$	$\begin{matrix} \frac{r_{11}}{r_{21}} & \frac{\Delta_R}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{22}}{r_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{22}}{g_{21}} & -\frac{1}{g_{21}} \\ -\frac{\Delta_G}{g_{21}} & -\frac{g_{11}}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta_{H'}}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta_{T'}} & \frac{B'}{\Delta_{T'}} \\ \frac{C'}{\Delta_{T'}} & \frac{A'}{\Delta_{T'}} \end{matrix}$
$\boldsymbol{T'}$	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{r_{12}} & \frac{\Delta_R}{r_{12}} \\ \frac{1}{r_{12}} & \frac{r_{11}}{r_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ -\frac{\Delta_G}{g_{12}} & -\frac{g_{22}}{g_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta_H}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_{H'}}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta_T} & \frac{B}{\Delta_T} \\ \frac{C}{\Delta_T} & \frac{A}{\Delta_T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$

$\Delta \;= \det$

Figura 5.15: Passaggio di rappresentazione: sulle righe sono riportate le matrici da ottenere mentre sulle colonne sono riportate le matrici di partenza. Analizzando i coefficienti sono facilmente ricavabili le condizioni per cui alcune rappresentazioni non possono essere ottenute partendo dalle altre. Per esempio non si può ricavare la matrice [T] dalla matrice [H] se il coefficiente $h_{21} = 0$

Trasformazioni rapide

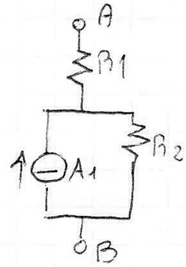
(1)



Eq. Thevenin V $E = E_1$, $R_{eq} = R_1$

Eq. Norton $i\uparrow$ $A = \frac{E_1}{R_1}$, $R_{eq} = R_1$

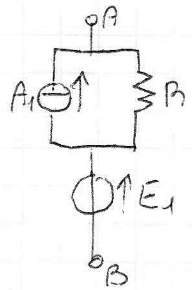
(2)



Eq. Thevenin V $E = \cancel{A_1(R_1+R_2)}\ A_1R_2$, $R_{eq} = R_1 + R_2$

Eq. Norton $i\uparrow$ $A = \frac{A_1R_2}{R_1+R_2}$ $R_{eq} = R_1 + R_2$

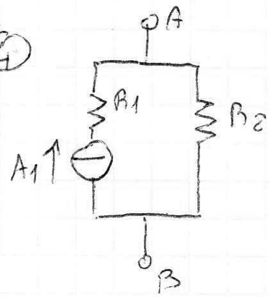
(3)



Eq. Thevenin V $E = E_1 + RA_1$, $R_{eq} = R$

Eq. Norton $i\uparrow$ $A = A_1 + \frac{E_1}{R}$, $R_{eq} = R$

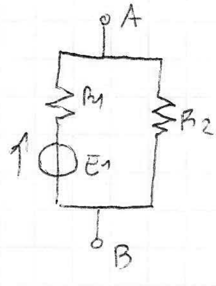
(4)



Eq. Thevenin V $E = A_1R_2$, $R_{eq} = R_2$

Eq. Norton $i\uparrow$ $A = A_1$, $R_{eq} = R_2$

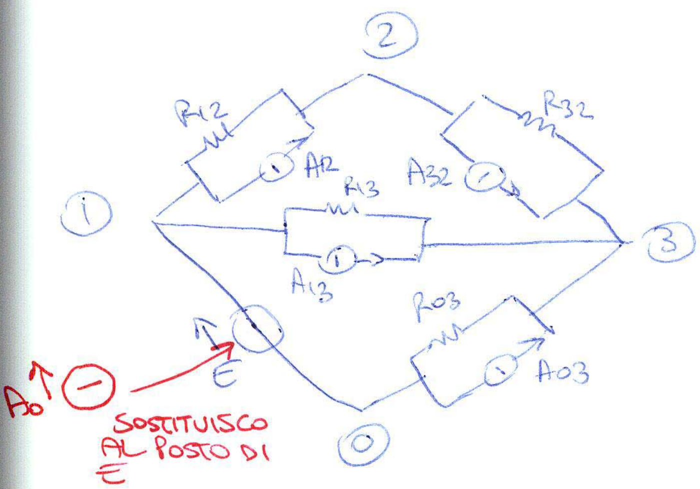
(5)



Eq. Thevenin $E = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}$, $R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $(R_1 // R_2)$

Eq. Norton $i\uparrow$ $A = \frac{E}{R_1}$, $R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $(R_1 // R_2)$

ANALISI NODALE MISTA



1. OTTENUTA LA RETE NORTONALIZZATA
2. COMPARE UN GENERATORE IDEALE DI TENSIONE

NOTA IL GENERATORE E DEVE AVERE IL MORSETTO − MESSO A TERRA, NODO ZERO.

CREO LA MATRICE

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} \quad\;\; 1 \qquad\qquad & \qquad 2 \qquad & \qquad 3 \qquad & \text{COLONNA AGGIUNTA} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \text{RIGA AGGIUNTA} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} & -\frac{1}{R_{12}} & -\frac{1}{R_{13}} & -1 \\
-\frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{32}} & -\frac{1}{R_{32}} & 0 \\
-\frac{1}{R_{13}} & -\frac{1}{R_{32}} & \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{32}} + \frac{1}{R_{03}} & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ A_0 \end{bmatrix}
=
$$

NELLA RIGA E COLONNA AGGIUNTA VIENE POSTO IL VALORE −1 AL NODO A CUI PUNTA IL MORSETTO + DEL GENERATORE E, TUTTI GLI ALTRI NODI VENGONO POSTI A ZERO

$$
= \begin{bmatrix} -A_{12} - A_{13} \\ A_{12} - A_{32} \\ A_{32} + A_{03} + A_{13} \\ -E \end{bmatrix}
$$

DERIVA DAL PRODOTTO TRA MATRICI

$$-1 \cdot V_1 = -E$$

POICHÉ $V_1 = E$

TEOREMA DELLE POTENZE

SI DIVIDE IL CIRCUITO IN PIÙ PARTI SEMPLICI, COMPOSTE DA POCHI ELEMENTI, LE GRANDEZZE DA CALCOLARE SONO: LA POTENZA, LA TENSIONE E LA CORRENTE. SE UTILIZZO:

1. POTENZA COMPLESSA USERÒ I FASORI NEI CALCOLI $(\bar{V}, \bar{I})$
   $\bar{S} = P + jQ$

2. POTENZA APPARENTE USERÒ IL VALORE EFFICACE NEI CALCOLI (V, I)
   $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

ESEMPIO:

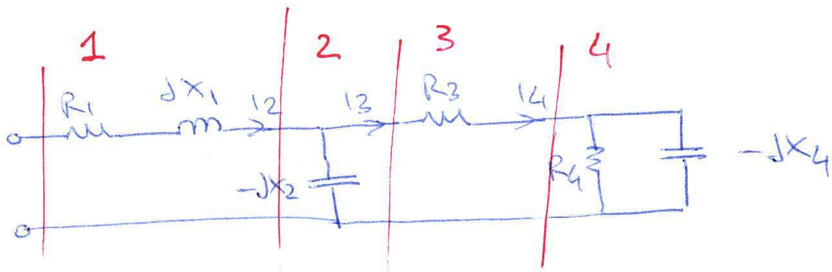
DATI:

V_4

$P = A (\cos\varphi)$ — POTENZA APPARENTE

RICAVO CHE

$\cos\varphi = \frac{P}{A} = \frac{P_{14}}{A_{14}}$ — FATTORE DI POTENZA



(4) $P_4 = \frac{V_4^2}{R_4}$, $Q_4 = \frac{V_4^2}{X_4}$ $\quad A_4 = \sqrt{P_4^2 + Q_4^2} \xrightarrow{\text{RICORDO CHE}} I_4 = \frac{A_4}{V_4}$

(3) $I_3 = I_4$

$P_3 = R_3 I_3^2$, $Q_3 = 0$ $\quad A_3 = \sqrt{P_3^2} \quad A_{34} = A_3 + A_4 \longrightarrow V_3 = \frac{A_{34}}{I_3}$

(2) $V_2 = V_3$

$Q_2 = \frac{V_2^2}{X_2}$, $P_2 = 0$ $\quad A_2 = \sqrt{Q_2^2} \quad A_{24} = A_2 + A_{34} \longrightarrow I_2 = \frac{A_{24}}{V_2}$

(1) $I_1 = I_2$

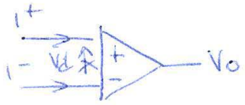
$P_1 = R_1 I_2^2$, $Q_1 = X_1 I_1^2$ $\quad A_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} \quad A_{14} = A_1 + A_{24} \longrightarrow V_1 = \frac{A_{14}}{I_1}$

CONCLUSIONE

$\cos\varphi = \frac{P_{14}}{A_{14}}$

$P_{14} = P_4 + P_3 + P_2 + P_1$

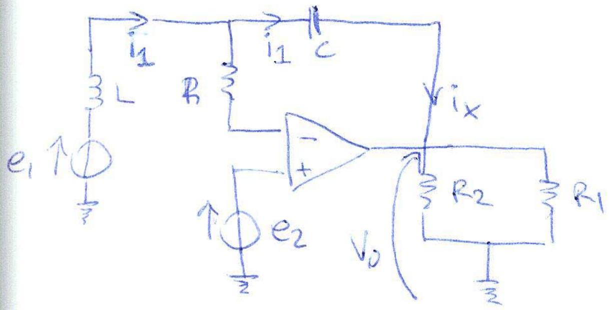
AMPLIFICATORI OPERAZIONALI



$V^- = V^+ \rightarrow V_d = V^+ - V^- = \phi$

$i^+ = i^- = \phi$ DOVUTO ALL'IMPEDENZA DI INGRESSO MOLTO ELEVATA (∞)

esempio soluzione circuito



$e_1 = -10\cos(\omega t)$

$e_2 = 25\sin(\omega t)$

$\omega = 400$ rad/s

INCOGNITE: $V_0(t), i_x(t), \overline{A}_{E_1}, \overline{A}_{E_2}$

1. TRASFORMO TUTTO IN FASORI E SEMPLIFICO IL CIRCUITO

$e_1 = \sqrt{2}\left(\frac{-10}{\sqrt{2}}\right)\cos(\omega t + \phi)$

$\overline{E}_1 = -\frac{10}{\sqrt{2}}e^{j\phi}$

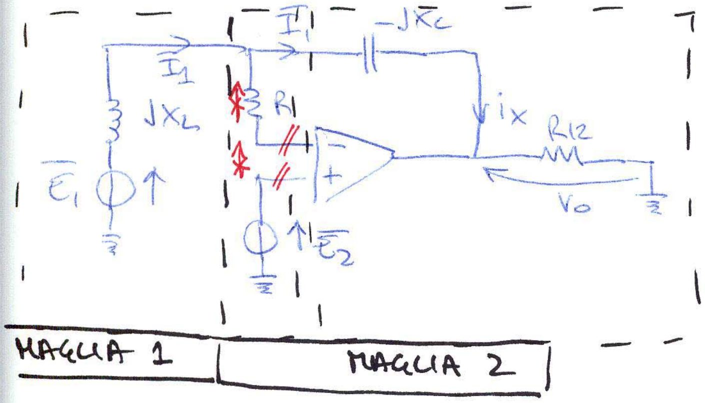
$e_2 = \sqrt{2}\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$\overline{E}_2 = \frac{25}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

$X_L = \omega L$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$



2. APPLICO LE PROPRIETÀ DELL'OPERAZIONALE
3. DETERMINO LE INCOGNITE

$\overline{I}_1 = \frac{\overline{E}_1 - \overline{E}_2}{jX_L} = I_1 e^{j\varphi_I}$

$i_1 = i_x = \sqrt{2}\, I_1 \cos(\omega t + \varphi_I)$

- LKT - MAGLIA 2

$\overline{V}_0 - \overline{E}_2 + (-jX_C\overline{I}_1) = 0$

$\overline{V}_0 = -(-jX_C\overline{I}_1) + \overline{E}_2 = V_0 e^{j\varphi_0}$

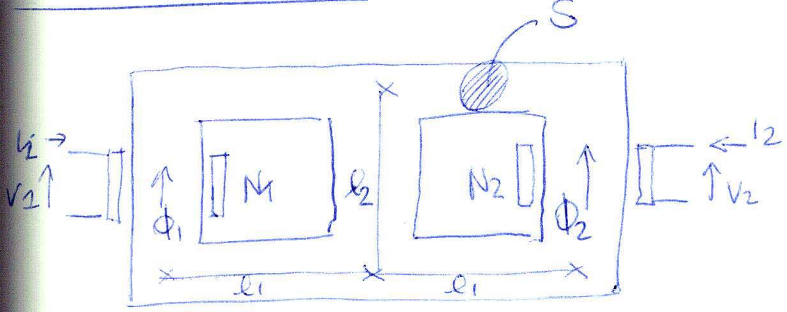
$V_0 = \sqrt{2}\, V_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

$I_{E_2} = \phi$ PER LE PROPRIETÀ DELL'OPERAZIONALE.
DA CIÒ DERIVA CHE:

$\overline{A}_{E_2} = \overline{E}_2 \underline{I}_{E_2} = \phi$

$\overline{A}_{E_1} = \overline{E}_1 \underline{I}_1$

CIRCUITI MAGNETICI



Φ FLUSSO CONCATENATO $= N\varphi$

φ CORRENTE, FLUSSO MAGNETICO (Wb)

$\mathcal{R}$ RILUTTANZA $= \dfrac{\Delta x}{\mu_0 \mu_r S}$

S SEZIONE

μ_0 PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO $= 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{H}{m}$

μ_r PERMEABILITÀ MAGNETICA RELATIVA AL MATERIALE

- LEGGE DI OHM MAGNETICA O DI HOPKINSON

$$Ni = \mathcal{R}\varphi$$

$$\Phi = N\varphi = \frac{N^2}{\mathcal{R}} i = Li$$

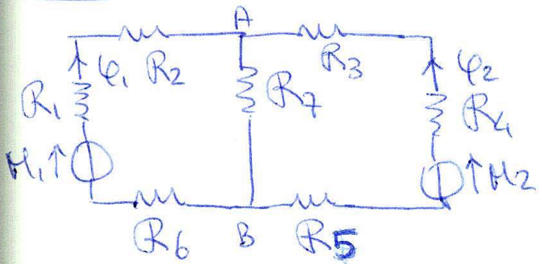
$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r S}{\Delta x} \quad \text{INDUTTANZA}$$

N NUMERO DI SPIRE

$\mu_0 \mu_r = \mu$

M FORZA MAGNETOMOTRICE $= Ni$

MODELLO EQUIVALENTE



TRASFORMATORE REALE

$$\begin{cases} \Phi_1 = N_1 \varphi_1 \\ \Phi_2 = N_2 \varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = N_1 i_1 \\ M_2 = N_2 i_2 \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\ell_2}{\mu S} \qquad \mathcal{R}_6 = \frac{\ell_1}{\mu S}$$

$$\mathcal{R}_7 = \mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_1 \qquad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_5 = \mathcal{R}_6$$

SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI:

1. SPENGO M_2

$$V'_{AB} = \frac{\dfrac{M_1}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_6}}{\dfrac{1}{\mathcal{R}_1} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_2} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_6} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_7} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_{35}}} \qquad \mathcal{R}_{35} = \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_5$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} \\ \varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} \end{cases}$$

$$\varphi_{21} = \frac{V'_{AB}}{\mathcal{R}_{35}} = \frac{1}{\mathcal{R}e_{21}} N_2 i_1$$

$$\varphi_{11} = \frac{M_1 - V'_{AB}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_6} = \frac{1}{\mathcal{R}e_{11}} N_1 i_1$$

2. SPENGO M_1

$$V''_{AB} = \frac{\dfrac{M_2}{\mathcal{R}_{35}}}{\dfrac{1}{\mathcal{R}_{35}} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_7} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_1} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_2} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_6}}$$

$$\varphi_{12} = \frac{-V''_{AB}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_6} = \frac{1}{\mathcal{R}e_{12}} N_1 i_2$$

$$\varphi_{22} = \frac{M_2 - V''_{AB}}{\mathcal{R}_{35}} = \frac{1}{\mathcal{R}e_{22}} N_2 i_2$$

3. CONCLUSIONE

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{\mathcal{R}e_{11}} N_1 N_1\right) i_1 - \left(\frac{1}{\mathcal{R}e_{12}} N_1 N_2\right) i_2$$

$$\Phi_2 = -\left(\frac{1}{\mathcal{R}e_{21}} N_2 N_1\right) i_1 + \left(\frac{1}{\mathcal{R}e_{22}} N_2 N_2\right) i_2$$

NOTA: $N_x N_x$

QUANDO $x = x \rightarrow$ AUTOINDUTTANZA

$x \neq x \rightarrow$ MUTUA INDUTTANZA