



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Prima prova intermedia
21 aprile 2017

Nome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 270/04 – Laurea ing. Inf.
Cognome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 509/99 – Laurea ing. Inf.
Matricola:	<input type="radio"/>	Altro _____

Esercizio 1

Il concime NP6-12 contiene esattamente il 6% di Azoto (N) e il 12% di Fosforo (P) e si ottiene industrialmente a partire da composti ricchi di queste sostanze. La versione bio del concime si ottiene miscelando guano (N 10%, P 20%, costo 20€/kg), farina di ossa (N 0% P 18%, costo 8€/kg), pennone (N 10% P 4%, costo 5€/kg) e cenere di legna (N 1%, P 10%, costo 2€/kg).

1. Formulare come PL il problema di produrre 10 kg di concime NP6-12bio al costo minimo;
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare il costo minimo di produzione del concime NP6-12bio e indicare una soluzione ottima del problema. In alternativa, dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.

Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza vertici/lati di un grafo composto da 8 vertici e 16 lati. Per ogni lato è riportato un costo.

Grafo	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r
1	1	1	1													
2	1			1		1	1									
3		1		1	1			1								
4			1		1				1	1						
5						1					1		1	1		
6							1	1	1		1	1			1	
7										1		1	1			1
8														1	1	1
Costo	6	4	3	2	3	2	3	2	2	4	4	3	2	3	2	1

- a. Partendo dai dati in tabella, trovare l'albero ricoprente di costo minimo, a partire dal vertice **5**, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (versione efficiente).
- b. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero ricoprente di costo minimo.
- c. Partendo dai dati in tabella, come varia la soluzione ottima se il lato **q** ha peso 4?
- d. Partendo dai dati in tabella, come varia la soluzione ottima se il lato **b** ha peso 2?
- e. Partendo dai dati in tabella, come varia la soluzione ottima se il lato **f** è tolto dal grafo?

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) poliedro, (2) vertice, (3) direzione e (4) direzione estrema di un poliedro. Partendo dal teorema di Weyl-Minkowski, dimostrare (5) le condizioni geometriche di ottimalità e (6) quelle di illimitatezza per un problema di PL.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Prima prova intermedia
21 aprile 2017

Nome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 270/04 – Laurea ing. Inf.
Cognome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 509/99 – Laurea ing. Inf.
Matricola:	<input type="radio"/>	Altro _____

Esercizio 1

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo grafico.
2. Ridurre il problema in forma standard e ricavarne tutte le SBA e tutti gli insiemi di indici di base associati. Per ogni eventuale SBA degenerare individuare tutti gli insiemi di indici di base corrispondenti.
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Esercizio 2

Un lanificio produce filato di tipo standard e filato di tipo speciale utilizzando 3 differenti macchine A, B e C. La produzione di una matassa di filato standard richiede 1 ora di lavoro sulla macchina A e 2 ore su B. La produzione di una matassa di filato speciale richiede 1 ora di lavoro sulla macchina A e 3 ore su C. Le macchine sono disponibili per 10 ore al giorno ma ciascuna macchina, per produrre, necessita della presenza costante di un operaio. Poiché diversi operai sono in ferie o malattia il lanificio dispone di soli due operai per le tre macchine, ciascuno dei quali lavora per un turno giornaliero di 8 ore di lavoro ordinario alle quali possono aggiungersi al più quattro ore di lavoro straordinario (per operaio) che però devono essere retribuite a parte. Il costo dello straordinario va quindi a sottrarsi al ricavato della vendita delle matasse. Una matassa standard si vende a 50 euro, mentre una matassa di tipo speciale si vende a 75 euro. Il costo di un'ora di lavoro straordinario per un operaio è di 20 euro, mentre può assumersi nullo il costo di un'ora di lavoro ordinario.

Formulare il problema di PL di determinare il piano di produzione che massimizza il ricavo del lanificio, al netto dei costi per il lavoro straordinario.

Spiegare in dettaglio (1) il significato e (2) le unità di misura delle variabili utilizzate, nonché (3) il ruolo dei vari vincoli e (4) della funzione obiettivo del problema di PL formulato.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) albero e (2) albero ricoprente di un grafo. (3) Dimostrare che un albero ricoprente di costo minimo rispetta sempre le condizioni di ottimalità sui tagli. (4) Illustrare il funzionamento dell'algoritmo di Prim–Dijkstra e (5) dimostrarne la complessità computazionale.

Nome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 270/04 – Laurea ing. Inf.
Cognome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 509/99 – Laurea ing. Inf.
Matricola:	<input type="radio"/>	Altro _____

Esercizio 1

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo grafico.
2. Ridurre il problema in forma standard e ricavarne tutte le SBA e tutti gli insiemi di indici di base associati. Per ogni eventuale SBA degenerare individuare tutti gli insiemi di indici di base corrispondenti.
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto, trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Esercizio 2

Un'azienda metalmeccanica produce laminati di tipo standard e di tipo speciale utilizzando 3 differenti macchine A, B e C. La produzione di un laminato standard richiede 2 ore di lavoro sulla macchina A e 3 ore su B. La produzione di un laminato speciale richiede 1 ora di lavoro sulla macchina A e 2 ore su C. Le macchine sono disponibili per 16 ore al giorno ma ciascuna macchina, per produrre, necessita della presenza costante di un operaio. Poiché diversi operai sono in ferie o malattia l'azienda dispone di soli tre operai per le tre macchine, ciascuno dei quali lavora per un turno giornaliero di 8 ore di lavoro ordinario alle quali possono aggiungersi al più quattro ore di lavoro straordinario (per operaio) che però devono essere retribuite a parte. Il costo dello straordinario va quindi a sottrarsi al ricavato della vendita dei laminati. Un laminato standard si vende a 40 euro, mentre un laminato di tipo speciale si vende a 60 euro. Il costo di un'ora di lavoro straordinario per un operaio è di 10 euro, mentre può assumersi nullo il costo di un'ora di lavoro ordinario.

Formulare il problema di PL di determinare il piano di produzione che massimizza il ricavo dell'azienda, al netto dei costi per il lavoro straordinario.

Spiegare in dettaglio (1) il significato e (2) le unità di misura delle variabili utilizzate, nonché (3) il ruolo dei vari vincoli e (4) della funzione obiettivo del problema di PL formulato.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) albero e (2) albero ricoprente di un grafo. (3) Dimostrare che un albero ricoprente di costo minimo rispetta sempre le condizioni di ottimalità sui tagli. (4) Illustrare il funzionamento dell'algoritmo di Prim–Dijkstra e (5) dimostrarne la complessità computazionale.

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Prima prova intermedia
21 aprile 2017

Nome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 270/04 – Laurea ing. Inf.
Cognome:	<input type="radio"/>	Ordinamento 509/99 – Laurea ing. Inf.
Matricola:	<input type="radio"/>	Altro _____

Esercizio 1

Le principali specifiche dettate dai regolamenti europei sulla composizione della benzina verde sono: il numero di ottano (RON) minimo, pari a 95, e il contenuto di Zolfo (S) totale massimo, pari a 10 mg/kg. La benzina da biocarburanti si può ricavare aggiungendo etanolo (RON=120, S=0, costo 2 €/ kg) e butanolo (RON=100, S=10, costo 1,2 €/ kg), derivati dai vegetali, ad altri carburanti fossili quali il gasolio (RON=30, S=25, costo 0,6 €/ kg) e il benzene (RON=120, S=20, costo 1 €/ kg).

1. Formulare come PL il problema di produrre 1000 kg di benzina verde al costo totale minimo;
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare il costo unitario minimo di produzione della benzina verde e indicare una soluzione ottima del problema. In alternativa, dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. (Suggerimento: evitare le iterazioni di pivot degeneri).

Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza vertici/lati di un grafo composto da 8 vertici e 16 lati. Per ogni lato è riportato un costo.

Grafo	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r
1	1	1	1													
2		1			1	1	1									
3	1			1	1			1								
4			1	1					1	1						
5						1					1		1			1
6							1	1		1	1	1			1	
7									1			1	1	1		
8														1	1	1
Costo	6	8	4	5	3	3	4	3	6	3	5	4	3	1	3	4

- a. Partendo dai dati in tabella, trovare l'albero ricoprente di costo minimo, a partire dal vertice **5**, tramite l'algoritmo di Prim-Dijkstra (versione efficiente).
- b. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero ricoprente di costo minimo.
- c. Partendo dai dati in tabella, come varia la soluzione ottima se il lato **q** ha peso 5?
- d. Partendo dai dati in tabella, come varia la soluzione ottima se il lato **a** ha peso 1?
- e. Partendo dai dati in tabella, come varia la soluzione ottima se il lato **f** è tolto dal grafo?

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) base di una matrice, (2) soluzione base ammissibile di un sistema in forma standard, (3) vertice di un poliedro. Dimostrare che una soluzione ammissibile di un problema di PL in forma standard è un vertice del poliedro delle soluzioni ammissibili (4) se e (5) solo se è una soluzione di base ammissibile.