Marco Bramanti

***Pre*Calculus**

PROGETTO LEONARDO
ESCULAPIO · BOLOGNA

Prima edizione: Ottobre 1999

Responsabile produzione: Alessandro Parenti
Redazione: Gabriella Gatti e Giancarla Panigali
Stampa: L.E.G.O. S.P.A - Stabilimento di Lavis (TN)

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

COLLANA PROGETTO LEONARDO
40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

A Giacomo e Francesca

Sommario

Prefazione

Chi comincia lo studio della matematica non dovrebbe scoraggiarsi se scopre di non avere i prerequisiti necessari per studiare i prerequisiti.

Qualsiasi corso universitario di matematica che contenga anche i primi elementi di calcolo infinitesimale (si chiami "Analisi Matematica I", "Matematica A", "Istituzioni di Matematiche", o in qualunque altro modo), contiene al suo interno una marcia di avvicinamento, tradizionalmente piuttosta lunga, in cui si introducono il linguaggio, gli strumenti, gli oggetti, che si utilizzeranno in seguito; parallelamente, spesso nelle esercitazioni, si richiamano e consolidano le proprietà delle funzioni elementari (esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e loro inverse...).

Il confine tra i contenuti "nuovi" di queste parti introduttive e i cosiddetti "prerequisiti" è spesso sfumato, e in realtà lo studente deve, al tempo stesso, richiamare alla mente cose studiate a scuola e acquisirne di nuove. Spesso le prime settimane del corso richiedono perciò allo studente un grosso lavoro personale, che solo parzialmente può essere guidato dalle lezioni.

Questo superlavoro chiesto allo studente all'inizio dei suoi studi, diventa a mio avviso ancora più gravoso nei corsi "brevi" (come gli attuali corsi di Diploma e i corsi della laurea triennale di prossima comparsa), dove, anche se il programma risulta alleggerito in alcuni argomenti "avanzati", le conoscenze e abilità di base richieste non sono affatto ridotte, mentre ridotto è il numero di ore che vi si possono dedicare in aula.

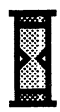
Questo libro è scritto per aiutare lo studente ad affrontare in modo costruttivo lo studio di queste prime, cruciali, settimane del corso, e per aiutare lo studente che scopra, a posteriori, di avere gravi lacune di base, a colmarle in modo autodidatta.

Qui si forniscono quelle conoscenze, riguardanti soprattutto le funzioni elementari e i grafici di funzioni in generale, ma anche l'uso delle disuguaglianze, la nozione di estremo superiore, ecc., che sono necessarie per affrontare lo studio del calcolo infinitesimale in una variabile in modo fruttuoso e motivato. Inoltre, si affronta un ripasso ragionato della trigonometria e delle funzioni trigonometriche inverse, e si introducono i numeri complessi.

Non si è voluto distinguere in alcun modo ciò che si debba considerare contenuto "nuovo" (cioè specifico del corso universitario) da ciò che si debba considerare "prerequisito". Questo nella convinzione che la distinzione non abbia alcuna utilità *per lo studente*: il punto è che esiste un certo bagaglio di idee che lo studente deve possedere con padronanza, *oggi*: se le abbia incontrate per la prima volta anni fa o giorni fa, questo non fa molta differenza. Caso mai, sarà un problema del docente decidere quanto spazio dedicare a certi argomenti elementari nel corso; e questo è un problema che non si può risolvere una volta per tutte, ma solo in base al tipo di corso e di studenti che si hanno di fronte.

Come usare questo libro. Note per lo studente

Questo libro è uno *strumento per il lavoro personale;* va letto "attivamente", avendo sempre carta e penna a fianco, in modo da provare mentre si legge a svolgere i facili passaggi che talvolta sono omessi, con tutto il dettaglio che è necessario per capire. Come si vedrà, talvolta una spiegazione è interrotta da un simbolo



che richiede allo studente di fermarsi a riflettere e cercare di continuare per proprio conto, prima di proseguire nella lettura; questo nella convinzione che si capisca molto meglio un'argomentazione quando si è toccato con mano il problema a cui essa risponde, ovvero quando si è provato per proprio conto a risolvere il problema.

Numerosi esercizi sono assegnati nel testo; di tutti è riportata la soluzione nelle ultime pagine del libro, in modo che il lavoro personale possa avere un riscontro. Talvolta si sono proposti esercizi non di routine, fornendo opportuni suggerimenti, sempre per stimolare il lavoro personale.

Parecchi esercizi chiedono di *dimostrare* qualcosa. Lo studente è invitato a cimentarsi anche con questi (di cui pure è riportata la "soluzione"), a prescindere dal fatto che questo tipo di esercizio sia richiesto o no all'esame: questi esercizi sono infatti un'ottima verifica del fatto che le argomentazioni precedenti siano state comprese *criticamente.*

Avvertenze per il docente

Questo testo è stato scritto avendo in mente i corsi "brevi" che d'ora in poi, soprattutto nelle facoltà di ingegneria, sostituiranno i tradizionali corsi di analisi matematica e, se avrà un'accoglienza favorevole, potrebbe diventare il "volume zero" di un ciclo di volumetti che coprano per intero il calcolo infinitesimale insegnato in tali corsi.

Il *Calculus* a cui questo *PreCalculus* vuole introdurre è quello per le *funzioni reali di una variabile reale.* Si sono introdotte perciò solo quelle nozioni teoriche necessarie a questo scopo, senza allargare il discorso più del necessario.

Poiché il *Calculus* successivo può essere svolto, in corsi diversi, in modo più rigoroso oppure più pragmatico, si sono introdotti alcuni paragrafi e due capitoli, contrassegnati da un asterisco *, che si possono considerare "di approfondimento": ometterne la lettura non pregiudica la comprensione delle parti rimanenti. Ho cercato a questo modo di fornire, sugli argomenti più delicati (come: numeri naturali e assioma di induzione; numeri reali e proprietà dell'estremo superiore) due possibili itinerari logici: uno che affronta il problema in modo didatticamente motivato, l'altro che aggira il problema nel modo più... onesto possibile, fornendo comunque quelle nozioni pragmaticamente utili al seguito del discorso.

Non ostante il carattere elementare degli argomenti trattati, questo testo non vuole essere un libro di ripasso delle matematiche elementari, ma l'inizio di un corso *universitario*, quanto agli obiettivi e al livello critico seguito.

Questo, a mio giudizio, deve andare di pari passo con l'acquisizione dell'abilità "manuale": di conseguenza teoria ed esercizio procedono come un unico discorso, così come, ritengo, dovrebbe accadere in aula.

Un criterio seguito è quello di introdurre una nozione astratta solo nel momento in cui è necessaria; quindi, ad esempio, sia la terminologia sulle funzioni che il discorso sui numeri reali sono stati introdotti in due tempi, prima a livello informale, e poi in modo più approfondito. Questa gradualità mi sembra particolarmente necessaria visto il carattere di questo libro, che è pensato per lo studio individuale.

Sarò grato a chiunque vorrà segnalarmi errori nel testo, o mi farà avere i suoi commenti. Il mio indirizzo e-mail è

MARBRA@MATE.POLIMI.IT

Questo testo è stato composto dall'autore, usando EXP 4.0 come word processor matematico, mentre i grafici sono stati realizzati con Mathematica 2.0 e in qualche caso con Microsoft Excel e Word.

M. B.

Milano, ottobre '99

0. Linguaggio

Da più di cent'anni, il linguaggio con cui è comunemente formalizzata e presentata la matematica è quello degli insiemi. La teoria degli insiemi si può studiare come teoria formale, al pari di un'altra branca della matematica; per noi sarà invece solo un linguaggio, utilizzato dando alla parola *insieme* il suo significato intuitivo di *aggregato, famiglia, collezione, ecc.*, di oggetti a priori qualsiasi.

Un ***insieme*** (solitamente indicato da una lettera maiuscola, come $A, B, \ldots$) è costituito da ***elementi*** (solitamente indicati con lettere minuscole, come $a, b, \ldots, x, y, \ldots$), anzi è totalmente determinato quando si sa dire quali elementi ***appartengono*** all'insieme stesso. Si scrive

$$x \in A$$

per indicare che x *appartiene ad* A, cioè x è un elemento di A, e affermare questo sottointende che A sia un insieme (mentre x potrebbe essere qualsiasi cosa, in particolare -perché no?- anche un insieme).

Se vogliamo descrivere A elencandone tutti gli elementi, scriveremo, ad esempio

$$A = \{a, b, c\}$$

per indicare che A è costituito esattamente dagli elementi $a, b, c,$ né più né meno.

Dire che A è totalmente determinato dai suoi elementi significa che, ad esempio,

$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{a, a, b, c\}.$$

In altre parole, i concetti di *ordine* tra elementi diversi, o di *molteplicità* con cui un elemento è contato (come nella frase "l'equazione $(x-1)^2 = 0$ ha per soluzioni $x = 1$ contato due volte") sono estranei all'idea di insieme: un insieme è definito a prescindere da queste cose.

Un insieme A è ***contenuto***, o ***incluso***, in B se ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B. Si scrive allora

$$A \subseteq B \text{ o } A \subset B\text{ [1]}.$$

La stessa cosa si può esprimere dicendo che B contiene A, o include A, e si scrive $B \supseteq A$ o $B \supset A$. Si dice allora che A è un ***sottoinsieme*** di B.

Due insiemi coincidono (cioè sono lo stesso insieme) se hanno gli stessi elementi, quindi se *ogni elemento che appartiene al primo appartiene anche al secondo, e viceversa*. Perciò $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

C'è uno e un solo insieme che non ha alcun elemento: l'***insieme vuoto***, che si indica col simbolo $\emptyset$, [2] ed è un sottoinsieme di ogni insieme.

Il linguaggio degli insiemi è strettamente legato al linguaggio della ***logica***. Per spiegare questo fatto, richiamiamo che cos'è una ***proprietà***. E' un'affermazione

---

[1] Di solito si scrive $A \subseteq B$ per indicare che A è incluso in B nel senso della definizione data, che non esclude la possibilità che sia $A = B$; si usa invece $A \subset B$ per indicare l'inclusione stretta, ovvero il fatto che $A \subseteq B$ e $A \neq B$. Tuttavia questa convenzione non è usata da tutti; molti testi usano $A \subset B$ come sinonimo di $A \subseteq B$. Salvo avviso contrario, non sarà così importante distinguere le due cose.

[2] Evitare di usare questo simbolo per indicare lo zero!

(sensata, cioè sintatticamente corretta) contenente una o più *variabili libere*, che risulta vera o falsa ogni volta che si assegna alla variabile un valore. Ad esempio:

l'affermazione "n è un numero pari" è una proprietà; possiamo indicarla simbolicamente con $p(n)$. Risulta vera se $n = 2$, falsa se $n = 3$.

Analogamente $q(x)$: "x è fratello di Tizio" risulta vera se $x =$ Caio (sapendo che Tizio e Caio sono fratelli), e falsa per qualsiasi altro x (se Tizio e Caio non hanno altri fratelli).

Negli esempi, x, n sono variabili libere, perché ad esse si può *assegnare* un valore, e in corrispondenza di ogni valore la frase diventa vera o falsa. Invece, nelle frasi:

a : "Per ogni numero pari n, il quadrato di n risulta ancora pari"; oppure

b : "Esiste un intero $n > 1$ che è sottomultiplo di 24 e di 10"

la variabile n non è *libera* perché ad essa non possiamo assegnare un valore. Ad esempio la frase "Per ogni intero pari 4 ecc." non ha alcun significato (c'è un solo numero 4): nella frase originaria la variabile n è usata (2 volte) per formulare la frase, ma è una variabile "interna" o "muta" o, più precisamente, "quantificata" dalla locuzione "per ogni" o "esiste", che la precede.

Le due locuzioni "per ogni" e "esiste", degli esempi precedenti, sono molto comuni in matematica. Si chiamano ***quantificatori***:

locuzione	*nome*	*simbolo*
per ogni	quantificatore universale	$\forall$
esiste (esitono)	quantificatore esistenziale	$\exists$

Quantificando una variabile, essa cessa di essere *libera*.

Un quantificatore trasforma perciò una proprietà (costruita con un'unica variabile libera) in una ***proposizione***, cioè un'affermazione che è vera o falsa *una volta per tutte*, come le affermazioni a, b degli esempi sopra.

I Teoremi sono esempi tipici di proposizioni matematiche; queste proposizioni sono solitamente costruite a partire da varie proprietà, usando vari quantificatori. Questi talvolta sono sottointesi: il Teorema di Pitagora, le cui prime parole sono "In un triangolo rettangolo... " significa più precisamente che "Per ogni triangolo rettangolo si ha che... ".

Torniamo ora agli esempi di proprietà $p(n), q(x)$. La variabile x, n, ecc. a cui una proprietà si riferisce, deve variare in un *insieme* opportuno, affinché la proprietà sia perlomeno *sensata*; ad esempio, prima che essere vera o falsa, ha poco senso la frase "4 è fratello di Tizio" o "Caio è un numero pari".

Dato un insieme A, e una proprietà $p(x)$ che ha senso almeno per $x \in A$, questa consente di individuare un sottoinsieme di A: quello costituito dagli elementi di A per cui p è vera. In simboli, stiamo definendo, a partire dall'insieme A e la proprietà p, un nuovo insieme

$$B = \{x \in A : p(x)\}.$$

(Scrivere $p(x)$ significa affermare che essa *è vera*). Il simbolo : usato nella definizione di B si legge "tale che".[3]

Una proprietà definisce quindi un insieme, come appena spiegato; viceversa, comunque sia definito, un insieme X individua una proprietà: la proprietà "$x \in X$". E'

---

[3] Si eviti, invece, la locuzione sgrammaticata "tale per cui"! In italiano si può dire "per cui" o "tale che", ma non "tale per cui".

naturale quindi che ogni operazione o relazione tra insiemi abbia un corrispettivo logico, ossia in termini di proprietà.

Se A, B sono entrambi sottoinsiemi di un "insieme universo" X, si possono definire le seguenti operazioni:

- intersezione di A e B:

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\};$$

- unione di A e B:

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

- complementare di A in X:

$$\overline{A} = \{x \in X : x \notin A\}.$$

(Il simbolo $\notin$ si legge "non appartiene").

Si noti che le operazioni di intersezione e unione di insiemi sono definite, rispettivamente, mediante la *e* e la *o* logica; l'operazione di complementazione corrisponde al *non* logico.

Le locuzioni *e*, *o*, *non* prondono il nome di ***connettivi logici***. Il quarto connettivo logico è l'***implicazione***, che si indica con $\Rightarrow$. Ad esempio, se a, b sono due proposizioni (o proprietà),

$$a \Rightarrow b$$

è la proposizione (o proprietà) "a implica b", ovvero "se vale a allora vale b".

La relazione di inclusione tra insiemi corrisponde alla relazione di implicazione tra proprietà:

$$\text{Se } A = \{x \in X : p(x)\}, B = \{x \in X : q(x)\},$$

$$A \subseteq B \quad \text{significa} \quad \forall x \in X, (p(x) \Rightarrow q(x)).$$

Riassumiamo:
i 4 connettivi logici sono:

locuzione	*nome*	*simbolo*
e	congiunzione	$\wedge$
o	disgiunzione	$\vee$
non	negazione	$\sim$
se... allora (o "implica")	implicazione	$\Rightarrow$

C'è inoltre una corrispondenza tra i connettivi logici *e*, *o*, *non*, e le operazioni insiemistiche di intersezione, unione, complementazione, e c'è corrispondenza tra la relazione di inclusione insiemistica e il connettivo logico *implica*.

1. Numeri, uguaglianze e disuguaglianze

1.1. Insiemi numerici

Introdurremo ora i principali insiemi numerici che si utilizzano in matematica: i numeri naturali, interi, razionali, reali. Dei numeri complessi parleremo invece nel Cap.15.

Il taglio di questa sezione non è affatto quello di un'introduzione rigorosa e formale. Al contrario, si supporrà che lo studente "sappia già", in sostanza, di che cosa si sta parlando: dopo tutto, da almeno 13 anni ha imparato a usare i numeri naturali, da almeno 7-8 usa i numeri interi e i numeri razionali, e nelle scuole superiori ha certamente incontrato i numeri reali. Tutto quel che si vuol fare qui è richiamare alla memoria e puntualizzare alcuni fatti che si utilizzeranno effettivamente nel seguito del discorso. Lo studente quindi è invitato a non saltare a pié pari questi paragrafi come "noiosi e inutili preamboli": non si dirà niente che non sia utile per il seguito del discorso.

1.1.1. Numeri naturali

I numeri naturali sono quelli con cui si conta: $0, 1, 2, 3, \ldots$. L'insieme dei numeri naturali si indica con il simbolo $\mathbb{N}$.[4] Solo in questo paragrafo, "numero" sarà sinonimo di "numero naturale". Ci interessa richiamare alcuni fatti riguardanti la *divisione* e la *divisibilità* in $\mathbb{N}$.

Si dice che un numero n è ***divisibile*** per un numero $m \leq n$, o che n è ***multiplo*** di m, se esite un (terzo) numero k tale che $n = m \cdot k$; in tal caso si dice anche che m è un ***divisore*** di n.

Nessun numero è divisibile per 0.

Ogni numero $n \neq 0$ ha almeno due divisori banali: n e 1.

Se un numero non ha altri divisori oltre ai divisori banali, si dice che è ***primo***. Sono numeri primi, ad esempio, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ Anche 1 soddisfa la definizione che abbiamo dato di numero primo, ma solitamente *non* si considera primo (o si dice che è un "numero primo banale"). I numeri primi sono infiniti (Teorema di Euclide).

Teorema fondamentale dell'aritmetica. *Ogni numero naturale n può essere fattorizzato come prodotto di numeri primi, cioè scritto nella forma:*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

dove $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sono numeri primi non banali, e gli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sono numeri ≥ 1. Questa decomposizione è inoltre essenzialmente unica, cioè: è unica fatto salvo per l'ordine dei fattori.

---

[4] Lo studio delle proprietà di $\mathbb{N}$ a livello elementare si chiama Aritmetica, mentre a livello superiore si chiama Teoria dei Numeri.

Due numeri n, m si dicono ***primi fra loro*** o ***coprimi*** se nelle fattorizzazioni di n, m in prodotto di numeri primi non compaiono fattori comuni. Ad esempio 9 e 10 sono coprimi, anche se nessuno dei due è primo.

Un numero si dice ***pari*** se è multiplo di 2, ***dispari*** altrimenti. Si osservi che gli insiemi dei numeri pari e dispari possono essere indicati così:

$$\mathbb{P} = \{\text{numeri pari}\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{D} = \{\text{numeri dispari}\} = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Detto in altri termini, il *generico* numero pari si può scrivere nella forma $2n$, con n *generico* numero naturale; il *generico* numero dispari si può scrivere nella forma $2n + 1$, con n *generico* numero naturale.

Esercizio 1. Lo studente provi a dimostrare *rigorosamente* le seguenti semplici proposizioni.

a. La somma di due numeri pari è pari.

b. La somma di due numeri dispari è pari.

c. Il prodotto di due numeri dispari è dispari.

d. Se n è un numero qualsiasi, nella decomposizione in fattori primi di n^2 gli esponenti α_i sono tutti pari.

(*Suggerimento. Dimostrare rigorosamente la a, ad esempio, significa provare che, presi due generici numeri pari, la loro somma è necessariamente pari; tutto sta nel saper esprimere correttamente il fatto che si sta considerando due generici numeri pari*).

Dati due numeri n, m, se $n \geq m$ si può sempre eseguire la divisione $n : m$, ottenendo un quoziente q e, in generale, un resto r. Più precisamente:

Teorema sulla divisione tra numeri interi. *Se $n \geq m \geq 1$, esistono e sono univocamente determinati due numeri q, r, detti rispettivamente* ***quoziente*** *e* ***resto*** *della divisione $n : m$, con le seguenti proprietà:*

$$n = qm + r;$$

$$0 \leq r < m.$$

Lo studente rifletta sul fatto che le due proprietà scritte sono esattamente ciò che *definisce* i concetti di *quoziente* e di *resto*.

1.1.2. Numeri interi

I numeri interi, detti anche "interi relativi" sono:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

L'insieme dei numeri interi è indicato con $\mathbb{Z}$ e, chiaramente, contiene $\mathbb{N}$. Dal punto di vista algebrico, $\mathbb{Z}$ ha un vantaggio su $\mathbb{N}$: si può *sempre* eseguire la *differenza* (oltre che la somma) tra due numeri. Il numero $-n$ viene detto ***opposto*** di n, ed è quel numero che sommato ad n dà zero.

1.1.3. Numeri razionali

I numeri razionali sono le cosiddette "frazioni", ovvero i numeri che si possono scrivere nella forma $\frac{n}{m}$ con n, m interi, $m \neq 0$. (Quindi anche i numeri razionali sono dotati di *segno*). L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$. Si ha quindi:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m = 1, 2, 3, \dots \right\}; \quad \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}.$$

Somma e prodotto di due numeri razionali si eseguono nel modo ben noto (!):

$$\frac{n}{m} + \frac{r}{s} = \frac{n \cdot s + m \cdot r}{m \cdot s};$$

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{r}{s} = \frac{n \cdot r}{m \cdot s}.$$

Da un punto di vista algebrico, l'insieme $\mathbb{Q}$ ha un vantaggio rispetto a $\mathbb{Z}$: si può sempre eseguire la divisione (o quoziente) di due razionali (di cui il divisore non zero), ottenendo un razionale. Si ha:

$$\frac{\frac{n}{m}}{\frac{r}{s}} = \frac{n}{m} \cdot \frac{s}{r},$$

che mostra che il quoziente di due razionali (di cui il secondo non zero) è sempre un razionale. Il numero $\frac{m}{n}$ si dice ***reciproco*** di $\frac{n}{m}$: un numero moltiplicato per il suo reciproco fa 1. Ogni numero diverso da 0 ha un reciproco.

Se si prova ad eseguire effettivamente la divisione $\frac{n}{m}$ come divisione tra interi, si troverà un quoziente e un resto. Ma se non ci si ferma al resto e si esegue la divisione coi decimali, cosa si trova? Si hanno due casi:

- o dopo un numero finito di passi il resto è zero, e questo significa che il numero razionale può essere espresso mediante un numero finito di decimali, come nel caso $\frac{5}{8} = 0.625$;
- oppure dopo un numero finito di passi si entra in una situazione "ciclica", in cui le cifre decimali del quoziente si ripetono periodicamente, come in

$$\frac{58}{13} = 4.461538\,461538\,461538\,461538\ldots = 4.\overline{461538}.$$

E' importante convincersi che non possono darsi altri casi. Infatti ad ogni passo della divisione il resto dev'essere minore del divisore (nel nostro esempio, minore di 13), perciò dopo un numero finito di passi (nel nostro esempio, al più 13 passi) o si trova resto zero, o si trova un resto già trovato, e da quel passo si innesca il processo periodico.

Quindi i numeri razionali ammettono una rappresentazione decimale avente, dopo il punto, un numero finito di cifre diverse da zero oppure una successione infinita, ma in questo caso periodica, di cifre diverse da zero.[5]

L'ultima cosa che occorre ricordare è che un periodo non può essere costituito solo dalla cifra 9, nel senso che: $0.\overline{9} = 1$; $23.45\overline{9} = 23.46$, ecc.

---

[5] Si rimanda ai libri di algebra di scuola per la regola che consente, viceversa, di ricostruire, a partire dall'espressione decimale di un numero razionale, la frazione che la genera.

1.1.4. Numeri reali, intervalli, intorni

I numeri reali sono quelli che, scritti in forma decimale, presentano dopo il punto un allineamento eventualmente illimitato e non periodico di cifre decimali. Se tale allineamento è *effettivamente* illimitato e non periodico, il numero di dice ***irrazionale***, altrimenti ritroviamo un numero razionale. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$, e contiene $\mathbb{Q}$. Quindi completiamo (per il momento) la catena di inclusioni tra insiemi numerici, scrivendo:

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}.$$

L'esempio più semplice di numero irrazionale è $\sqrt{2}$. Il suo sviluppo decimale è:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753 7695\ldots$$

Ovviamente, non si possono scrivere tutte le cifre.

Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Supponiamo di sapere che esiste un numero reale x, che indichiamo col simbolo $\sqrt{2}$, con la proprietà che $x > 0$ e $x^2 = 2$, e dimostriamo che x non è razionale.

Se per assurdo fosse

$$x = \frac{m}{n}, \text{ poiché } x^2 = 2 \text{ si avrebbe}$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \text{ ossia } m^2 = 2n^2.$$

L'ultima uguaglianza scritta porta a un assurdo. Infatti, si supponga di scomporre in prodotto di numeri primi ambo i membri dell'uguaglianza. Per quanto visto nell'Esercizio 1.d, sia n^2 che m^2 dovrebbero contenere il fattore 2 un numero pari di volte (eventualmente 0 volte). Ne segue che il 2 comparirebbe con esponente pari a primo membro, e con esponente dispari a secondo membro, assurdo. pertanto $\sqrt{2}$ (se esiste!) è irrazionale. □

Il dubbio appena insinuato (il numero reale $\sqrt{2}$ esiste?) ha naturalmente risposta positiva, ma questo è tutt'altro che banale da provare.

L'insieme $\mathbb{R}$ sarà l'ambiente di lavoro naturale del calcolo infinitesimale. In particolare, utilizzeremo molto spesso dei particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, gli *intervalli*.

Definizione. Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice ***intervallo*** se ha la seguente proprietà: se $x_1 < x_2 < x_3$ e $x_1, x_3 \in I$, allora anche $x_2 \in I$.

Detto in parole, un intervallo è un insieme con la proprietà che ogni volta che contiene due numeri, contiene anche tutti i numeri compresi tra questi due; perciò è, in un certo senso, un insieme "senza buchi" di numeri reali.

Se un insieme è un intervallo, necessariamente ha una delle seguenti forme:

Intervalli limitati:

Intervalli chiusi:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Intervalli aperti:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Intervalli semiaperti:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Intervalli illimitati:
Intervalli chiusi:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

Intervalli aperti:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

e infine

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

La simbologia appena introdotta è standard, e verrà usata sistematicamente. I numeri a, b si dicono ***estremi*** dell'intervallo. Parentesi quadre o tonde indicano che l'estremo corrispondente è incluso o escluso, rispettivamente. I simboli $\pm\infty$, in questo contesto, indicano semplicemente l'*assenza* di un estremo superiore o inferiore dell'intervallo. Perciò scrivere $(-\infty, +\infty)$ è un altro modo per scrivere $\mathbb{R}$. L'uso dei termini *intervallo aperto, chiuso, semiaperto, limitato, illimitato* dovrebbe risultatre chiaro dalle definizioni precedenti.

Lo studente si convinca che un insieme I, per il fatto di soddisfare la definizione generale di intervallo che abbiamo dato, non può che coincidere con uno dei tipi di intervalli che abbiamo elencato.

Si osservi anche che, per quanto gli intervalli siano insiemi molto importanti, non *ogni* insieme di numeri reali è un intervallo! Ad esempio, $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ma non è un intervallo; lo stesso vale per $\mathbb{Q}$, o per l'insieme dei razionali compresi tra due estremi fissati, cioè un insieme del tipo $[a, b] \cap \mathbb{Q}$, che contiene "molti meno punti" di $[a, b]$. Lo studente faccia quindi ben attenzione a distinguere quando, ad esempio, l'enunciato di un teorema si riferisce a "un insieme $I \subset \mathbb{R}$" oppure a "un intervallo $I \subset \mathbb{R}$": la prima cosa è molto più generale della seconda.

Definizione. Si dice ***intorno*** di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ un intervallo aperto del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$ qualsiasi, ovvero un intervallo aperto *centrato in* x_0.

Useremo talvolta per indicare un intorno di x_0 i simboli $\mathcal{U}(x_0), \mathcal{V}(x_0), \ldots$

1.2. Proprietà algebriche

1.2.1. La struttura di campo ordinato

Dal punto di vista algebrico, o più precisamente, dal punto di vista delle "4 operazioni", gli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ hanno proprietà simili. Entrambi questi insiemi hanno infatti la ***struttura algebrica di campo ordinato***. Questo significa, per definizione, quanto segue.

(*In tutte le proprietà che seguono,* a, b, c, *sono generici elementi del campo ordinato:* $\mathbb{Q}$ *o* $\mathbb{R}$).

- La *somma* soddisfa le proprietà:

associativa:

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

commutativa:

$$a + b = b + a;$$

lo zero è elemento neutro (per la somma):

$$a + 0 = 0 + a = a;$$

ogni numero ha un opposto, ovvero per ogni a esiste $-a$ tale che

$$a + (-a) = 0.$$

- Il *prodotto* soddisfa le proprietà:

associativa:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

commutativa:

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

l'uno è elemento neutro (per il prodotto):

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$$

ogni numero diverso da zero ha un reciproco, ovvero per ogni $a \neq 0$ esiste $\frac{1}{a}$ tale che

$$a \cdot \frac{1}{a} = 0.$$

- Vale la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- La ***relazione d'ordine*** $\leq$ soddisfa le proprietà:

riflessiva:

$$a \leq a;$$

antisimmetrica:

$$a \leq b \text{ e } b \leq a \ \Rightarrow a = b;$$

transitiva:

$$a \leq b \text{ e } b \leq c \ \Rightarrow a \leq c;$$

di ordinamento totale:

$$a \leq b \text{ o } b \leq a;$$

compatibilità con la somma:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c;$$

compatibilità col prodotto:

$$a \leq b,\ c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Osservazioni. Lo studente probabilmente ha incontrato varie volte, nel corso dei suoi studi, il precedente elenco, che gli sarà sembrato tanto noioso quanto inutile. Cosa serve ricordare che "la somma è commutativa"? Lo sanno tutti che $3 + 5 = 5 + 3$.

In realtà, queste proprietà formali servono soprattutto quando eseguiamo operazioni su espressioni che contengono *variabili*, come

$$\frac{3x+5}{4-x},\ \left(a^2b + b^3c\right)^2$$

per le quali quindi la consuetudine al calcolo è meno d'aiuto che quando si opera con numeri "concreti". Più specificamente, quando:

- trasformiamo una espressione in un'altra scrivendo catene di uguaglianze;
- risolviamo un'equazione;
- risolviamo una disequazione;

quello che facciamo non è altro che applicare opportunamente le proprietà di campo ordinato sopra ricordate. Il motivo di questo è che dobbiamo scrivere relazioni che siano vere *qualunque sia il valore assunto dalle variabili in gioco.*

Qualche osservazione più specifica

E' utile che, arrivato a questo punto dei suoi studi, lo studente acquisisca, se già non l'ha, una certa *consapevolezza,* oltre che padronanza tecnica, dei procedimenti algebrici che si utilizzano abitualmente. Per questo, è invitato ora a riflettere sulle seguenti affermazioni, rendendosi conto di perché sono vere.

• Le proprietà di esistenza dell'opposto e del reciproco di un numero diverso da zero sono esattamente quelle che stanno alla base dei cosiddetti ***princìpi di identità per le equazioni***:

-sommando ad ambo i membri di un'equazione una stessa quantità, qualsiasi, si ottiene un'equazione equivalente;

-moltiplicando ambo i membri di un'equazione per una stessa quantità *diversa da zero,* si ottiene un'equazione equivalente.

A sua volta, ricordiamo che questi princìpi si applicano solitamente "spostando dal primo al secondo membro un addendo, cambiandolo di segno", e "portando una quantità diversa da zero dal denominatore del secondo membro al numeratore del primo membro".

• Le proprietà della relazione d'ordine $\leq$ stanno invece alla base dei ***princìpi di identità per le disequazioni***:

-sommando ad ambo i membri di una disequazione una stessa quantità, qualsiasi, si ottiene una disequazione equivalente;

-moltiplicando ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità *positiva*, si ottiene una disequazione equivalente.

• Le proprietà associative, della somma e del prodotto, dicono che le parentesi sono superflue quando inserite in una catena di operazioni che contiene soltanto somme, o soltanto prodotti.

• Invece, la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto, dice che nelle espressioni che "mescolano" somme e prodotti, le parentesi sono essenziali. Dimenticarle è una distrazione purtoppo comune, che si paga sempre con un errore al passaggio immediatamente successivo. Lo *schema dell'errore* è il seguente:

$$a(b+c) = \text{dimentico per errore la parentesi} = ab + c$$

ossia

$$ab + c \textit{ invece che } ab + ac.$$

• Le proprietà delle potenze seguono dalle proprietà del prodotto. Precisamente, le identità

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};\ (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

sono un'applicazione della proprietà associativa del prodotto, mentre l'identità

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

segue dalla proprietà commutativa del prodotto.

1.2.2. Equazioni e disequazioni

Sulla base delle osservazioni del paragrafo precedente, lo studente provi ora a fare gli esercizi di questo paragrafo, in modo ragionato e non puramente meccanico.

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni. Risolvere poi gli stessi esercizi come disequazioni, sostituendo, nel testo dell'esercizio, al segno di $=$ quello di disuguaglianza indicato tra parentesi.

2. $$3x + 2 = \frac{x-5}{2} \quad (\leq)$$

3. $$x = \frac{x}{4} \quad (<)$$

4. $$x = 2x + a \quad (\geq)$$

5. $$x + a^2 x = 2 \quad (>)$$

6. $$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{2x-b} \quad (\leq)$$

7. $$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} \quad (<)$$

8. $$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = 0 \quad (\leq)$$

Esempi sulle "semplificazioni"

I prossimi esercizi di equazioni e disequazioni sono centrati sul problema di ragionare correttamente sulle possibili semplificazioni. Lo studente è invitato a svolgere gli esercizi per proprio conto, e quindi a leggere attentamente lo svolgimento riportato oltre. Dove compare un segno di disuguaglianza tra parentesi, svolgere anche l'esercizio corrispondente

a. $$\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} \quad (\geq)$$

b. $$\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$$

c. $$(x+1)^2(x+2) \leq (x+1)^2(2x+1) \quad (<)$$

d. $$\left(x^2+1\right)(x+2) \leq \left(x^2+1\right)(2x+1)$$

e. $$x^2 = 2x$$

f. $$x + \sqrt{x} = -1 + \sqrt{x}$$

Fare gli esercizi per proprio conto prima di leggere le soluzioni...

Svolgimento degli esempi

a. $$\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Ha senso per $x \neq -1$. Sotto questa ipotesi, si può anche semplificare e si trova

$$x+2=2x+1$$

cioè

$$x=1, \text{ accettabile.}$$

Se ci fosse $\geq$. Sotto l'ipotesi $x \neq -1$ si riscrive la disequazione come:

$$\frac{x-1}{x+1} \leq 0,$$

che ha soluzioni , $-1 < x \leq 1$.

b.

$$\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$$

Ha senso per $x \neq 3$. Sotto quest'ipotesi si può semplificare e si ottiene $x = 3$, non accettabile: nessuna soluzione.

c.

$$(x+1)^2(x+2) \leq (x+1)^2(2x+1).$$

Si può semplificare per $(x+1)^2$ se questa quantità è positiva. Poiché non è mai negativa, distinguiamo i casi:

$x = -1$. Non si può semplificare, ma la disequazione è verificata;

$x \neq -1$. Si può semplificare, e si trova

$$x+2 \leq 2x+1,$$

che ha soluzioni $x \geq 1$. Quindi le soluzioni sono: $x \geq 1$ e $x = -1$.

Se ci fosse stato invece il segno di $<$, $x = -1$ non sarebbe stata soluzione. Si sarebbe trovata solo $x > 1$.

d.

$$\left(x^2+1\right)(x+2) \leq \left(x^2+1\right)(2x+1)$$

Simile a prima, ma ora la quantità (x^2+1) è sempre > 0, si può semplificare senz'altro, e si trova

$$x+2 \leq 2x+1,$$

che ha soluzioni $x \geq 1$.

e.

$$x^2 = 2x$$

Si può semplificare se $x \neq 0$. Ma $x = 0$ è pure soluzione quindi:

o $x = 0$;

oppure $x \neq 0$, e in questo caso semplificando si trova $x = 2$.

Soluzioni: $x = 0$; $x = 2$.

f.

$$x + \sqrt{x} = -1 + \sqrt{x}.$$

Ha senso per $x \geq 0$ (per via della radice). Sotto quest'ipotesi, possiamo semplificare per $\sqrt{x}$ e abbiamo $x = -1$, non accettabile. Nessuna soluzione. □

Esercizi

Risolvere le seguenti disequazioni:

9.
$$\frac{2x+1}{x^2-1} \geq \frac{3}{x+1}$$

10.
$$\frac{1}{2x-3} < \frac{1}{2-x}$$

11.
$$ax + b \leq a \pm bx \text{ (risolvere i due casi)}$$

12. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ l'equazione seguente ha soluzioni:

$$\frac{ax}{5+b} = \frac{bx+1}{a}.$$

Terminiamo questo breve paragrafo sulle equazioni e disequazioni con una avvertenza. Lo studente che avesse trovato difficili gli esercizi precedenti, ha probabilmente bisogno di svolgerne un numero maggiore, e non avrà difficoltà a reperire esercizi sui suoi libri di scuola. Il consiglio, però, è sempre quello di *non* cercare di rendere "meccanico" lo svolgimento degli esercizi, ma cercare soprattutto di ragionare.

1.3. Matematica discreta

In matematica l'aggettivo "discreto" è contrapposto a "continuo". La matematica del continuo è quella, ad esempio, che ha a che fare con i numeri reali, le funzioni, il calcolo infinitesimale. La matematica del discreto è quella che ha a che fare con numeri interi, problemi di conteggio, somme e prodotti finiti (ma non solo). In questa sezione introdurremmo alcuni strumenti elementari di matematica discreta che utilizzeremo nel seguito.

1.3.1. Il simbolo di sommatoria

Definizione. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n numeri reali. La loro somma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

si può indicare in forma compatta col simbolo di ***sommatoria***:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

che si legge: "sommatoria per i da 1 a n di a_i". Il simbolo i si dice ***indice di sommatoria.***

Il simbolo di sommatoria è dunque una pura e semplice stenografia, che tuttavia risulta molto utile quando i termini a_i sono definiti esplicitamente in funzione dell'indice i, ad esempio:

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10};$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Se volessimo indicare la somma:

$$3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$$

potremmo usare il simbolo:

$$\sum_{i=3}^{n} i^2.$$

In altre parole, l'indice di sommatoria non necessariamente varia da 1 a n: può avere altri estremi di variabilità.

Per usare agilmente il simbolo di sommatoria occorre capire bene l'utilizzo dell'*indice di sommatoria*. Anzitutto, l'indice di sommatoria è un ***indice muto***. Questo vuol dire che se i si sostituisce con j, k o qualunque altro indice (in tutte le sue occorrenze) il senso dell'espressione non cambia:

$$\sum_{i=3}^{n} i^2 = \sum_{j=3}^{n} j^2.$$

In sostanza, il simbolo di sommatoria va pensato come un'*istruzione*. Ad esempio, la sommatoria appena scritta contiene l'istruzione: "somma tutti i numeri del tipo i^3, quando i varia da 3 a n". Proprio perché i non è una costante, ma una variabile che assume successivamente i valori da 3 a n, non è importante come lo chiamiamo, ma solo i valori che assume, che sono tutti gli *interi* compresi tra gli estremi di variabilità. Per lo stesso motivo invece,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \neq \sum_{i=1}^{m} i^2$$

in quanto i due simboli indicano la somma, rispettivamente, dei primi n oppure dei primi m quadrati: se $n \neq m$ il risultato sarà diverso.

Detto in modo un po' più formale:

fissata la legge con cui i termini a_i dipendono dall'intero i, la somma

$$s(n_0, n) = \sum_{i=n_0}^{n} a_i$$

dipende (solo) dalle due variabili "esterne" n_0, n, mentre i è una variabile "interna" (cioè un indice muto).

Esercizi

Scrivere per esteso (eseguendo esplicitamente i calcoli) le seguenti sommatorie:

13.
$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2}$$

14.
$$\sum_{i=0}^{5} \frac{(i+1)(i+2)}{i+3}$$

15.
$$\sum_{k=10}^{12} (k+1)^3$$

Scrivere sotto forma di sommatoria le seguenti somme:

16.
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 10 \cdot 11.$$

17.
$$2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n.$$

18.
$$a^2 b^{10} + a^3 b^9 + a^4 b^8 + \ldots + a^{10} b^2.$$

Le seguenti proprietà formali delle sommatorie sono facilmente comprensibili se si pensa a ciò che esse affermano in termini di somme scritte per esteso.

Proposizione. *Proprietà formali delle sommatorie.*
1. Prodotto per una costante:

$$\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. Sommatoria con termine costante:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n = c \cdot (\textit{numero di addendi della sommatoria})$$

3. Somma di sommatorie:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

4. Scomposizione di una sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \sum_{k=1}^{n+m} a_k$$

5. *Traslazione di indici:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$$

6. *Riflessione di indici:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}.$$

La dimostrazione di queste proprietà è un esercizio di trascrizione: basta, cioè, scrivere per esteso cosa indica ciascuna sommatoria, ed eseguire eventualmente qualche passaggio elementare. (Se lo studente ha difficoltà a ragionare nel caso generale, può, ad esempio, porre $n = 5$ e $m = 2$ in tutte le formule precedenti, e dimostrarle in questi casi: il ragionamento generale è identico).

Le prossime due Proposizioni, oltre ad avere un interesse di per sé, forniranno l'occasione per mostrare l'utilizzo delle proprietà delle sommatorie.

Proposizione. *La somma dei primi n interi positivi dà $\frac{n(n+1)}{2}$. In simboli:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostrazione. Scriviamo:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k =$$

applicando nella seconda sommatoria la (6)

$$= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n - k + 1) =$$

applicando la (3)

$$= \sum_{k=1}^{n} (k + n - k + 1) = \sum_{k=1}^{n} (n + 1) =$$

applicando la (2)

$$= n(n + 1).$$

La catena di uguaglianze dimostra quindi che

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n + 1).$$

Dividendo per 2 si ha la tesi. □

Proposizione. Somma geometrica. *Sia q un numero reale qualunque diverso da* 1. *Allora, per ogni intero $n > 0$ vale la formula:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Dimostrazione. Proviamo l'identità nella forma equivalente:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Infatti:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k =$$

per la (1)

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} =$$

applicando alla seconda sommatoria la (5)

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k =$$

per la (4)

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1}. \qquad \square$$

Esercizi

Utilizzando il simbolo di sommatoria, le sue proprietà, e le ultime due proposizioni dimostrate, calcolare:

19. La somma dei primi n numeri pari:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k).$$

20. La somma dei primi n numeri dispari:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1).$$

21. La somma delle prime 10 potenze dispari di 3:

$$\sum_{k=0}^{9} 3^{2k+1}.$$

NB. In questi esercizi "calcolare le somme" significa trovare un'espressione semplice, che non contenga più il simbolo di sommatoria, che esprima quanto vale la somma, (analogamente a quanto visto nella dimostrazione delle due proposizioni precedenti).

1.3.2. Fattoriale e coefficienti binomiali

Definizione. Se n è un numero naturale, si dice "n fattoriale", e si indica con $n!$, il numero:

$$n! = \begin{cases} n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 & \text{se } n \geq 2 \\ 1 & \text{se } n = 1 \text{ o } 0. \end{cases}$$

Esempi:

n	$n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

Come si vede, $n!$ cresce molto rapidamente al crescere di n.

Proprietà elementari del fattoriale (verificarle per esercizio):

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\text{se } n > k, \quad \frac{n!}{k!} = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (k+1).$$

Definizione. Siano n, k numeri naturali, $n \geq k$. Si definisce il ***coefficiente binomiale*** $\binom{n}{k}$ (che si legge "n su k") come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad \text{se } k \geq 1; \qquad (1)$$

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Si osservi che il numeratore nell'espressione (1) è il *prodotto di k interi consecutivi, partendo da n e decrescendo.*

I coefficienti binomiali intervengono tipicamente in problemi di *calcolo combinatorio*, di cui però noi non ci occuperemo [6]; per noi i coefficienti binomiali saranno importanti essenzialmente per il seguente Teorema, a cui devono il loro nome:

Teorema. Formula del binomio di Newton. *Se a, b sono numeri reali qualunque e n è un numero naturale, vale la seguente formula, per lo sviluppo della potenza n-esima del binomio:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Abbiamo enunciato subito questo Teorema per fornire una motivazione allo studio dei coefficienti binomiali. Una dimostrazione del teorema sarà data nella prossima sezione, utilizzando l'*induzione matematica*.

Vediamo ora alcune proprietà elementari dei coefficienti binomiali.

Anzitutto, la definizione di coefficiente binomiale si può anche riscrivere nella forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2}$$

Infatti, l'espressione (2) si può *semplificare*, ottenendo la (1) (si vedano le proprietà del fattoriale ricordate in precedenza). Perciò per il calcolo effettivo è più comoda la (1). Dalla (2) si vede subito la proprietà di *simmetria* dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{3}$$

Ad esempio, per calcolare $\binom{10}{7}$ conviene procedere così:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

Si osservi anche che

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \text{per ogni intero } n.$$

Esercizio 22. Dimostrare la seguente formula di ricorrenza:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{4}$$

Suggerimento: riscrivere il secondo membro mediante la definizione di coefficiente binomiale, fare denominatore comune e semplificare.

Le identità (3), (4), permettono di costruire i coefficienti binomiali mediante il cosiddetto ***Triangolo di Tartaglia***:

[6] Lo studente incontrerà il calcolo combinatorio, ad esempio, se studierà il *calcolo delle probabilità*.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Si osservi il triangolo: i lati destro e sinistro sono costituiti da 1; ogni altro numero è ottenuto come la somma dei due numeri posti sopra di esso. Ad esempio, i due 10 della riga più in basso sono ottenuti come $6+4$. Se numeriamo le righe con l'indice n, contando il vertice del triangolo come $n=0$ (quindi la riga successiva è $n=1$, ecc.), e numeriamo i posti di ogni riga con l'indice k, che varia da 0 a n (ad esempio il numero 6 ha la posizione $n=4$, $k=2$), vediamo che il numero di posto (n,k) è proprio il coefficiente $\binom{n}{k}$. La regola con cui è formato questo triangolo è espresso dalla formula di ricorrenza (4): questa, insieme ai primi tre elementi del triangolo (uguali ad 1) determina tutto il resto della figura. Queste osservazioni ci permettono di concludere che:

la riga di posto n nel triangolo di Tartaglia ci fornisce i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$.

Il Triangolo di Tartaglia è utile ad esempio quando si deve sviluppare $(a+b)^n$ con n abbastanza piccolo, perché permette di scrivere rapidamente tutta la riga desiderata di coefficienti binomiali.

Esempio. Calcolare $(2a^2-3b)^5$.

$$\left(2a^2-3b\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\left(2a^2\right)^k(-3b)^{5-k}=$$

$$=1\cdot\left(-3b^2\right)^5+5\cdot\left(2a^2\right)\left(-3b^2\right)^4+10\cdot\left(2a^2\right)^2\left(-3b^2\right)^3+$$

$$+10\cdot\left(2a^2\right)^3\left(-3b^2\right)^2+5\cdot\left(2a^2\right)^4\left(-3b^2\right)+1\cdot\left(-3b^2\right)^5=$$

$$=-243b^{10}+810a^2b^8+\dots$$

Enunciamo ora una importante disuguaglianza di cui potremo fornire una dimostrazione, sia pure parziale, usando la formula del binomio di Newton.

Teorema. Disuguaglianza di Bernoulli. *Per ogni numero reale $x\geq -1$ e ogni intero positivo n, vale:*

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

Dimostrazione. Proviamo la disuguaglianza sotto l'ipotesi più restrittiva $x\geq 0$. Il caso generale potrà essere dimostrato nella prossima sezione, mediante l'induzione matematica. Basta osservare che matematica. Basta osservare che

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \ldots \geq 1 + nx,$$

perché se $x \geq 0$, tutti i termini trascurati sono senz'altro ≥ 0. □

Esercizi

23. Costruire le prime 10 righe del Triangolo di Tartaglia, usando il procedimento spiegato (senza guardare la figura!)

24. Calcolare i seguenti coefficienti binomiali facendo il minor numero possibile di calcoli (ossia riscriverli esplicitamente come quozienti, semplificando le espressioni ottenute, e poi eseguire il calcolo utilizzando una calcolatrice):

$$\binom{12}{8}; \binom{30}{4}; \binom{48}{45}; \binom{90}{5}.$$

25. Scrivere esplicitamente lo sviluppo di

$$\left(3x^2y + y\right)^6.$$

26. Determinare il coefficiente del termine x^6y^{18} nello sviluppo di

$$\left(x^2y - 2y^3\right)^8$$

1.4.* Induzione e numeri naturali

1.4.1. La dimostrazione per induzione

Presentiamo ora un potente metodo dimostrativo proprio di tutta la matematica, detto *dimostrazione per induzione*. Questo procedimento si può applicare ogni volta che il Teorema che si vuol dimostrare abbia la struttura:

"Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, vale la proprietà $p(n)$".

(Il numero n_0 è, cioè, il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà sia vera; se il teorema afferma semplicemente che il teorema è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$, sarà $n_0 = 0$). Si noti che un asserto del genere può avere a che fare anche con oggetti matematici diversi dai numeri naturali: ad esempio, tanto la formula del binomio di Newton quanto la disuguaglianza di Bernoulli, che dimostreremo con questo metodo, sono asserti che si riferiscono sia a una variabile $n \in \mathbb{N}$ sia a numeri reali.

La **dimostrazione per induzione** consiste in questo:

1. Si dimostra che $p(n)$ è vero per $n = n_0$ (primo passo dell'induzione).
2. Si dimostra che, se n è un generico numero naturale $\geq n_0$, dal fatto che $p(n)$ sia vero segue che $p(n+1)$ è vero.

Si può allora concludere che per *ogni* $n \geq n_0$, $p(n)$ è vero.

La validità di questo metodo dimostrativo, intuitivamente, si basa su questo fatto:

Per il punto 1, sappiamo che $p(n_0)$ è vero. Supponiamo ad esempio $n_0 = 1$: sappiamo quindi che $p(1)$ è vero (questo va dimostrato esplicitamente).

Per il punto 2, poiché è vero $p(1)$, sarà vero $p(2)$: infatti abbiamo dimostrato che qualunque sia n, se è vera $p(n)$ è vera anche $p(n+1)$. Ma allora, poiché è vero $p(2)$, sarà vera $p(3)$; ma allora è vera $p(4), \dots$ e così via, dunque è vera $p(n)$ per ogni $n \geq 1$.

Concretamente, la dimostrazione si articola in due fasi.

1. Dimostrare direttamente $p(n_0)$;
2. Assumere come ipotesi $p(n)$ (ipotesi induttiva), e provare $p(n+1)$.

E' questo il punto delicato, spesso soggetto a equivoci. "Assumere per ipotesi" $p(n)$ non significa assumere come ipotesi esattamente la nostra tesi? Non proprio. Quello che si deve provare è che:

per ogni n, se è vero $p(n)$ allora è vero anche $p(n+1)$

e NON

se per ogni n è vero $p(n)$, allora è vero anche $p(n+1)$.

Lo studente rifletta con calma sulla profonda differenza tra le due frasi appena scritte. La sottigliezza della dimostrazione per induzione è tutta lì.

Esempio

Dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato: per ogni intero $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dimostrazione. Per induzione su n.

Sia $n = 0$. Allora l'asserto diventa

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x,$$

cioè $1 \geq 1$, evidentemente vero.

Supponiamo che sia vero per n, e proviamolo per $(n+1)$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \geq$$

(per ipotesi induttiva $(1+x)^n \geq 1 + nx$; inoltre per ipotesi $(1+x) \geq 0$ perché $x \geq -1$)

$$\geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è sfruttato il fatto che $nx^2 \geq 0$. La catena di disuguaglianze mostra che $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$, pertanto la tesi è dimostrata. □

Dimostrazione della formula del binomio di Newton

Enunciato: per ogni intero $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dimostrazione. Per induzione su n.

Per $n = 0$ l'asserto è

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0, \text{ cioè } 1 = 1,$$

vera.

Sia vero per n, e dimostriamolo per $(n+1)$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

per l'ipotesi induttiva

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

eseguendo nella prima sommatoria una traslazione di indici:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

scorporando l'addendo per $k = 0$ dalla seconda sommatoria e quello per $k = n+1$ dalla prima

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

sommando le due sommatorie:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} =$$

applicando la formula di ricorrenza (4) per i coefficienti binomiali

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1},$$

che è esattamente l'asserto voluto, per $n+1$. □

Esercizi

27. Dimostrare per induzione la formula per la somma dei primi n interi, provata nel §1.3.1 con un'altra tecnica.

28. Dimostrare per induzione la formula per la "somma geometrica", provata nel §1.3.1 con un'altra tecnica.

Osservazione. Potenza e limite della dimostrazione per induzione. I semplici esempi fatti dovrebbero far intuire la potenza di questo metodo dimostrativo. D'altro canto, paragonato ad altri metodi, questo ha un limite: occorre sapere già la forma precisa dell'asserto che si vuole dimostrare. Si confrontino, ad esempio gli ultimi due esercizi con le corrispondenti proposizioni del §1.3.1: l'uso delle tecniche di sommatoria permette di *ricavare* la formula corretta; l'uso della dimostrazione per induzione permette di *dimostrarla* rigorosamente, dopo che la si è "*indovinata*" in qualche altro modo.

1.4.2. Gli assiomi dei numeri naturali

Nel paragrafo precedente si è spiegata quale sia l'idea intuitiva che sta alla base della validità del procedimento di dimostrzione per induzione. E' lecito naturalmente chiedersi se ci sia una base rigorosa, e non solo intuitiva, di questa validità.

La risposta è che il principio di induzione è uno degli assiomi stessi che definisce il sistema $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Dire che qualcosa è vero "per assioma" lascia spesso un po' di amaro: è forse come dire che si chiede di accettare un fatto senza giustificazione?

No; occorre imparare a pensare più positivamente gli assiomi. Non si tratta di accettare il principio di induzione come un'affermazione sui numeri naturali priva di giustificazione. Sarebbe così se noi sapessimo già, indipendentemente dall'induzione, cosa sono i numeri naturali, e ci fosse chiesto di prendere per buono un teorema su di essi. Invece, occorre capire che l'assioma di induzione è, insieme ad altri assiomi (che complessivamente prendono il nome di "assiomi di Peano" [7]) la definizione stessa dell'insieme $\mathbb{N}$.[8] Elenchiamo dunque questi assiomi, in modo che il discorso sia meno astratto.

---

[7] Gli assiomi furono formulati nel 1889 da G. Peano; erano apparsi in realtà già nel 1888 ad opera di R. Dedekind, che però li considerava proposizioni dimostrabili all'interno della teoria degli insiemi, anziché assiomi, cioè punti di partenza.

[8] Il problema psicologico nell'accettare questo sta nel fatto che noi siamo, in un certo senso, così familiari con $\mathbb{N}$ che ci sembra di averlo sempre conosciuto. A dispetto di questa apparenza, lo studente provi a *definire* cosa sono i numeri naturali: si troverà probabilmente in imbarazzo... Deve dunque accettare il fatto che *ancora non conosce la definizione di* $\mathbb{N}$: accetti dunque quella che gli viene proposta.

I termini primitivi a cui si riferiscono gli assiomi sono 3:

- zero;
- numero naturale;
- successivo di un numero naturale.

Gli assiomi, che si riferiscono a questi termini, sono 5:

1. Zero è un numero naturale.
2. Il successivo di un numero naturale è un numero naturale univocamente determinato.
3. Numeri naturali con successivi uguali sono uguali.
4. Zero non è il successivo di alcun numero naturale.
5. (Assioma di induzione). Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Se zero appartiene ad S, e se ogni volta che un numero n appartiene ad S anche il successivo di n appartiene ad S, allora S coincide con $\mathbb{N}$.

I 5 assiomi di $\mathbb{N}$ ora ricordati, e nella cui discussione non entreremo, devono pensarsi, complessivamente, come la definizione implicita dei 3 "concetti primitivi" di cui parlano, esattamente come le regole di un gioco definiscono implicitamente i "pezzi" del gioco stesso (si pensi agli scacchi).

L'induzione è quindi, in questo senso preciso, parte integrante della definizione dei numeri naturali.

2. Funzioni, coordinate, grafici

Contrariamente al luogo comune secondo il quale la matematica sarebbe "la scienza dei numeri", si può dire che la maggior parte delle teorie matematiche ha a che fare con oggetti un po' più complessi dei numeri. Il *calcolo infinitesimale*, ad esempio, si occupa di *funzioni*: il concetto di funzione, che in effetti è basato sul concetto di numero, è il vero mattone col quale è costruito l'edificio del calcolo infinitesimale.

Dei numeri in senso stretto si occupa invece una branca specifica della matematica, importante ma circoscritta, che prende appunto il nome di Teoria dei Numeri. Questo è per certi versi analogo a quello che succede nella fisica: anche se ogni oggetto fisico è costituito da atomi, solo una branca specifica della fisica si dedica allo studio dell'atomo in quanto tale, mentre la maggior parte delle teorie fisiche si occupa di oggetti più complessi.

Tornando alla matematica, osserviamo che la *geometria* si occupa di oggetti di tipo ancora diverso: nell'opinione comune (e ingenua), la geometria studia le *figure*. Dall'avvento della geometria analitica "cartesiana" però, è stato posto un nesso profondo tra le cosiddette "figure geometriche" e certi enti algebrici (equazioni, disequazioni, polinomi), tanto che gli oggetti di studio della geometria moderna sono diventati equazioni, sistemi di equazioni, polinomi, ..., piuttosto che rette, triangoli e cerchi. Anche in questo caso, comunque, si tratta di oggetti più complessi dei numeri, anche se in qualche modo fondati su questi ultimi.

Buona parte del discorso successivo avrà lo scopo di fare conoscenza degli oggetti più semplici di cui si occupano il calcolo infinitesimale da una parte, la geometria e l'algebra dall'altra. Si tratta in un certo senso di "presentare i personaggi del dramma", ovvero introdurre una ***biblioteca di funzioni***.

2.1. Funzioni

L'idea di ***funzione*** nasce per descrivere matematicamente le *quantità variabili in base a una certa legge*.

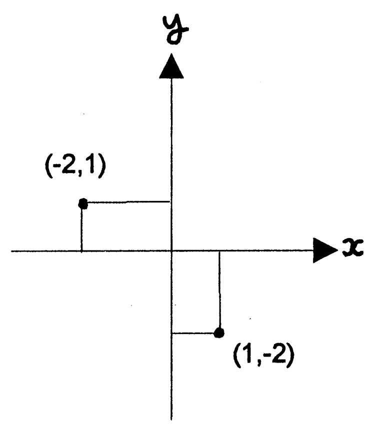
Più precisamente, diciamo che una quantità y è funzione di un'altra quantità x (con x e y espresse da numeri reali), e scriveremo $y = f(x)$, se in corrispondenza di ogni valore di x (in un dato insieme numerico) la y assume un valore ben determinato (in un dato insieme numerico). Il valore di x determina quello di y in base a una certa legge, che è la funzione f.

Ad esempio, lo spazio percorso in t secondi da un oggetto che cade nel vuoto è $s = \frac{1}{2}gt^2$ metri, dove $g = 9.8\text{m/sec}^2$ è l'accelerazione di gravità. In questo caso lo spazio s è funzione del tempo t. Scriveremo perciò simbolicamente $s = f(t)$, con $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Il volume di una sfera è funzione del suo raggio, secondo la legge $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, e così via.

Per dire che y è funzione di x è essenziale che il valore di y sia *univocamente determinato* dal valore di x: ad esempio, la temperatura minima giornaliera di Roma nello scorso mese di maggio è una funzione della data ($y = T(x)$ con $x = 1, 2, \dots, 31$), ma la data non è funzione della temperatura (la stessa temperatura minima può essere stata assunta in giorni diversi).

2.2. Coordinate cartesiane

Come è noto, fissare un ***sistema di riferimento cartesiano nel piano***, significa fissare due rette perpendicolari, dette convenzionalmente asse x (o delle ascisse) e asse y (o delle ordinate), e fissare su ognuna di esse un'unità di misura e un verso di percorrenza. Quest'ultimo è scelto convenzionalmente in modo che rispetto a un osservatore che vede l'asse x come retta orizzontale orientata verso destra, l'asse y sia una retta verticale orientata verso l'alto. Il punto di intersezione degli assi è detto origine; *su ciascun asse risulta così stabilita una corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti dell'asse* [9]. Il punto -3 sull'asse x, ad esempio, è il punto di quest'asse che dista 3 dall'origine ed è situato dalla parte opposta a quella verso cui è orientato l'asse x. Questa corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti di ciascun asse crea una corrispondenza biunivoca tra coppie ordinate di numeri reali e punti del piano, in base alla nota costruzione:



Richiamiamo alcuni fatti elementari. La distanza del punto (x, y) dall'origine, per il Teorema di Pitagora si può calcolare come

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Analogamente la distanza tra due punti $A \equiv (x_A, y_A)$, $B \equiv (x_B, y_B)$ è data da

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Il punto medio M del segmento AB ha per coordinate la media aritmetica delle coordinate di A, B:

$$M \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Lo studente si convinca di questo tracciando dai punti A, M, B le rette parallele ai due assi, e applicando il Teorema di Talete ai triangoli così formati.

Esercizio 29. Dati i punti $(3, 1)$, $(1, -2)$, determinare la lunghezza del segmento che li unisce e il punto medio del segmento.

Se ora si considera una qualsiasi equazione in 2 variabili, $f(x, y) = 0$ (ogni equazione in due variabili si può scrivere così!), questa individuerà un insieme di punti

[9] E' così comune identificare i punti della retta con i numeri reali, che in matematica si usa abitualmente l'espressione *la retta reale* per intendere $\mathbb{R}$.

nel piano: il luogo geometrico dei punti le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione. Ad esempio

$$x^2 + y^2 = 4$$

rappresenta il luogo geometrico dei punti (x, y) per i quali $x^2 + y^2$, cioè il quadrato della distanza dall'origine, è uguale a 4: perciò il luogo geometrico in questione è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2. In molti casi un'equazione in due variabili individua una *linea* nel piano x, y, come nell'esempio precedente, ma vi sono eccezioni:

$$x^2 + y^2 = 0$$

individa un solo punto (l'origine), mentre

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

non individua alcun punto del piano (il luogo geometrico è "l'insieme vuoto").

2.3. Grafici di funzioni

Consideriamo ora una funzione $y = f(x)$. Questa appena scritta è una *particolare* equazione nelle due variabili x, y, e come tale individuerà un luogo geoemetrico (insieme di punti) nel piano. Questo insieme di punti si chiama ***grafico della funzione*** $y = f(x)$, nel riferimento x, y. Il grafico di f è quindi l'insieme dei punti del piano di coordinate $(x, f(x))$, al variare di x nell'insieme in cui f è definita. Se f ha proprietà ragionevoli, quest'insieme è una *linea* nel senso intuitivo del termine. Ecco stabilito quindi il nesso fondamentale tra le funzioni (enti *analitici*) e i loro grafici (enti *geometrici*). Tutte le volte che sarà possibile, cercheremo di interpretare le *proprietà analitiche delle funzioni* come *proprietà geometriche dei loro grafici*, e viceversa. Ad esempio, la *definizione* di funzione implica che il grafico di $y = f(x)$ intersechi ogni retta verticale in un solo punto. Diversamente, fissato il valore di x, il valore di y non sarebbe *univocamente* determinato. Viceversa invece, uno stesso valore di y può corrispondere a più valori di x, e quindi una retta orizzontale può intersecare il grafico di una funzione in più punti.

Esempio. La circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ non è il grafico di una funzione, in quanto le rette verticali possono tagliare la circonferenza in due punti. La controparte analitica di quest'affermazione è che se cerchiamo di esplicitare y rispetto a x, una volta scritto

$$y^2 = 4 - x^2$$

siamo in imbarazzo su come procedere: in effetti i due valori

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

corrispondono allo stesso punto x (e difatti quella scritta non è una funzione, ma *due* funzioni). La semicirconferenza superiore $y = \sqrt{4 - x^2}$, invece, è una funzione. Si noti che una retta verticale taglia la semicirconferenza in non più di un punto, ma una retta orizzontale la può tagliare anche in due punti.

Nei prossimi paragrafi cominceremo a descrivere alcune proprietà che una funzione può avere o non avere. Ogni proprietà della funzione equivarrà ad una proprietà del suo grafico.

2.3.1. Simmetrie: funzioni pari e dispari

Le proprietà di simmetria che ora descriviamo hanno senso per una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ o su un intervallo simmetrico, cioè del tipo $(-a, a)$.

Si dice che una funzione è ***pari*** se per ogni x in cui è definita risulta

$$f(-x) = f(x).$$

Un attimo di riflessione mostra che il significato geometrico di questa proprietà è il seguente: il grafico di f è *simmetrico rispetto all'asse* y.

Si dice che una funzione è ***dispari*** se per ogni x in cui è definita risulta

$$f(-x) = -f(x).$$

Il significato geometrico di questa proprietà è la seguente: il grafico di f è *simmetrico rispetto all'origine*.

Lo studente rifletta sul perché una funzione non può, invece, avere grafico simmetrico rispetto all'asse x.

Esempi

- Consideriamo la famiglia di funzioni $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, \dots$

Se n è pari, ad esempio $n = 4$, per la regole dei segni risulta

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x),$$

e quindi f è pari. Perciò il grafico di x^4 (o di x^n con n pari) è simmetrico rispetto all'asse y. Se n è dispari, ad esempio $n = 5$,

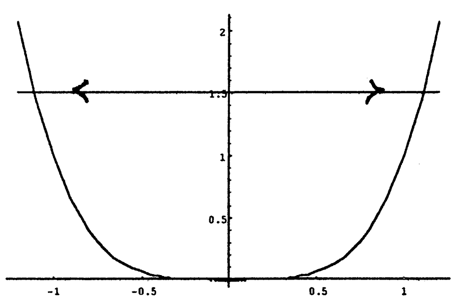
$$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x),$$

e quindi f è dispari. Perciò il grafico di x^5 (o di x^n con n dispari) è simmetrico rispetto all'origine. Ecco spiegato l'origine dei termini *funzione pari*, *funzione dispari*: nel caso particolare delle potenze a esponente intero, la funzione è pari (dispari) se l'esponente è pari (dispari).

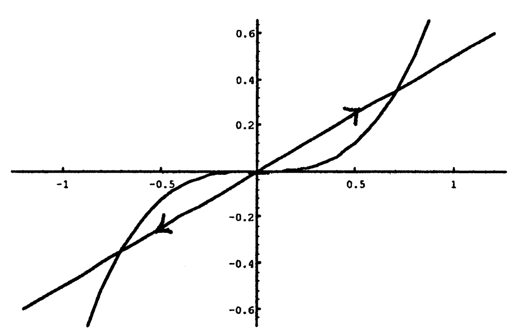
- Sia ora $f(x) = 1 + x$.

$$f(-x) = 1 - x,$$

e quest'espressione non coincide né con $f(x) = 1 + x$, né con $-f(x) = -x - 1$. perciò f non è né pari né dispari: osserviamo quindi, a scanso di equivoci, che solo *particolari* funzioni hanno una simmetria (pari o dispari).



funzione pari



funzione dispari

2.3.2. Periodicità

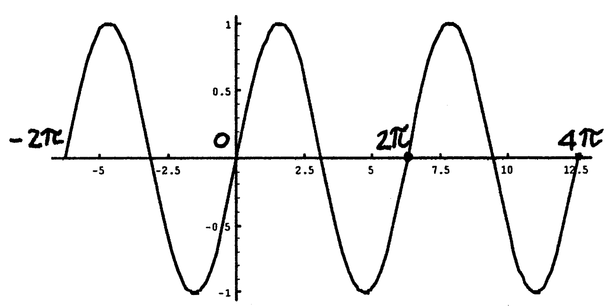
Una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ si dice ***periodica*** se esiste un numero positivo T per cui risulti

$$f(x+T) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Se un numero T con questa proprietà esiste, in realtà ne esistono infiniti, ad esempio anche $2T$, $3T$, $4T, \ldots$ avranno questa proprietà (perché?). Si dice ***periodo di f il più piccolo*** numero positivo T per cui la (*) è verificata.

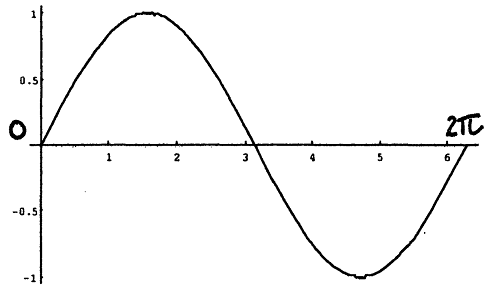
Se f è periodica di periodo T, il grafico di f sull'intervallo $[0, T]$ determina il grafico di f su tutto $\mathbb{R}$: basta affiancare il grafico di f su $[0, T]$ con infinite copie di questo, su ciascun intervallo $[T, 2T], [2T, 3T], [-T, 0], \ldots$ Lo stesso vale per il grafico di f su qualunque intervallo di ampiezza T, ad esempio $[0.2,\ 0.2 + T]$.

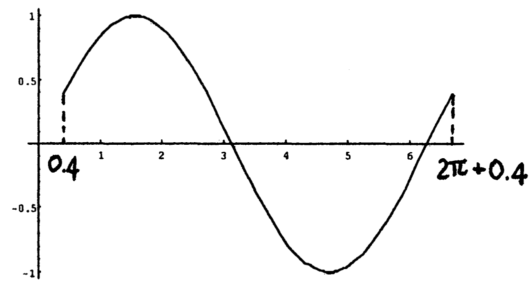
Le più importanti funzioni periodiche sono certamente le funzioni trigonometriche, di cui parleremo oltre. Ad esempio la funzione $\sin x$ ha grafico:



ed è periodica di periodo 2π. Il grafico intero di $\sin x$ si può ottenere dal grafico di $\sin x$ su un *qualsiasi* intervallo di ampiezza 2π, come $[0, 2\pi]$, ma anche, ad esempio,

$[0.4, 2\pi + 0.4]$: si osservino i prossimi grafici:





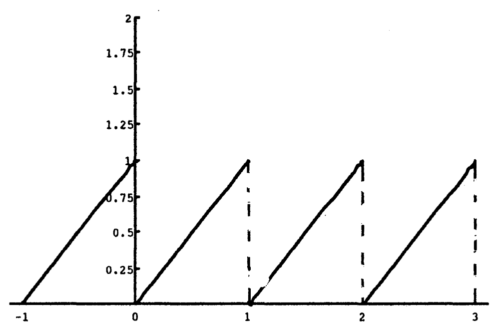
Ad ogni modo, la periodicità non è una prerogativa delle funzioni trigonometriche:

Esempio. La funzione ***mantissa***: $\mathrm{mant}(x)$ è la differenza tra x e il numero intero immediatamente precedente. Ad esempio,

$\mathrm{mant}(3.45) = 3.45 - 3 = 0.45,$

$\mathrm{mant}(-2.78) = -2.78 - (-3) = 0.22.$

Il grafico di $\mathrm{mant}(x)$ è:



e come si vede è una funzione periodica di periodo 1.

2.3.3. Limitatezza, massimi e minimi

Una funzione si dice ***limitata*** sull'insieme E su cui è definita se esiste un numero K tale che

$$|f(x)| \leq K \text{ per ogni } x \in E,$$

ossia

$$-K \leq f(x) \leq K \text{ per ogni } x \in E.$$

Ciò significa che il grafico di f è interamente contenuto nella striscia compresa tra le due rette orizzontali $y = K$, $y = -K$.

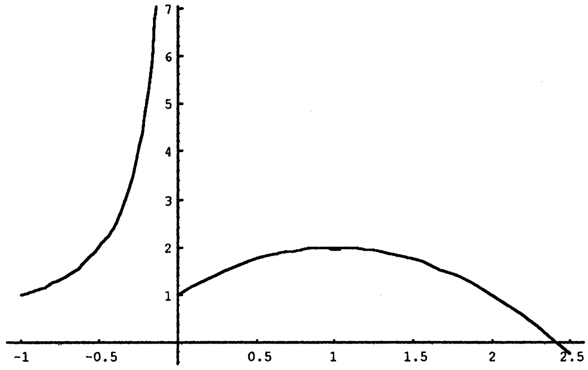
Se sappiamo solo che

$$f(x) \leq K \text{ per ogni } x \in E$$

diremo che f è ***superiormente limitata***. Analogamente, diremo che f è ***inferiormente limitata*** se

$$-K \leq f(x) \text{ per ogni } x \in E.$$

Osservazione. Il punto essenziale della definizione di funzione limitata è che *lo stesso* numero K dev'essere maggiore o uguale a $|f(x)|$ *per tutti* gli (infiniti) $x \in E$. E' ovvio infatti che in ciascun punto x (fissato) la quantità $|f(x)|$ assuma un certo valore numerico, e quindi sia certamente minore o uguale di un K opportuno. Tuttavia non sempre c'è un K più grande di tutti i valori. Ad esempio la funzione:



è illimitata. (La porzione di grafico disegnata sottointende che avvicinandosi al valore $x = 0$ da sinistra, la funzione assuma valori sempre più grandi, oltre ogni limite). Si dice spesso (erroneamente) che questo accade "perché per $x = 0$ la funzione vale infinito". Questo non è vero: la nostra funzione in $x = 0$ vale 1, e in ogni altro punto ha un valore *numerico* (nessun numero è "infinito"). Tuttavia non c'è un K che maggiori $|f(x)|$ al variare di x in ogni modo. Geometricamente poi è evidente che il grafico di f non è contenuto in nessuna striscia orizzontale.

Lo studente rifletta su questa semplice definizione. La sottigliezza di questa e molte altre definizioni del calcolo infinitesimale sta nel fatto che coinvolgono una variabile che può assumere *infiniti valori diversi*.

Consideriamo una funzione limitata, e chiediamoci ora: c'è, tra i valori assunti dalla funzione, uno "più grande di tutti gli altri"? Se sì, questo valore M si dice ***massimo della funzione***. Il valore x_M della variabile x in cui questo valore è assunto si dice ***punto di massimo***. Quindi il punto di massimo è un punto sull'asse x, il massimo è un punto sull'asse y. In simboli:

$$f(x) \leq M \text{ per ogni } x \in E, \text{ ed esiste } x_M \in E \text{ tale che } f(x_M) = M.$$

Analogamente si definiscono i concetti di ***minimo*** e ***punto di minimo***. (Per esercizio, scrivere esplicitamente la definizione).

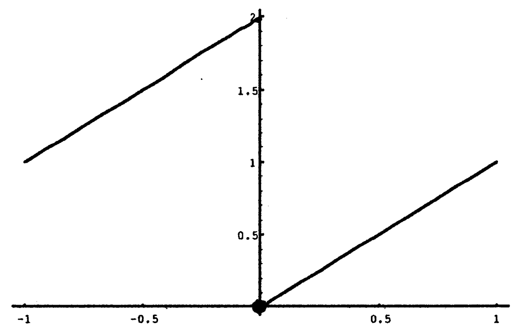
Può sembrare strano che una funzione possa essere limitata ma non ammettere massimo. Di nuovo, questo dipende dal fatto che x può assumere infiniti valori diversi. Se f fosse definita su un insieme costituito da 3 punti, "f è limitata" e "f ammette massimo e minimo" sarebbero affermazioni equivalenti (e sempre vere!). Invece, si consideri il prossimo

Esempio. Sia $f(x) = x$ per $x \in I = (0,1)$. La funzione è evidentemente limitata: $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in (0,1)$. Tuttavia, in I non ha né massimo né minimo. Infatti il valore $y = 1$ (che è il più piccolo numero di cui $f(x)$ è sempre minore o uguale, e quindi è "candidato" ad essere il massimo) non è mai assunto da f nell'insieme specificato. Analogamente f non ha minimo.

Un esempio differente è il seguente. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ 2 + x & \text{per } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

che ha grafico



Questa funzione, definita sull'intervallo $[-1, 1]$ è limitata, ha minimo ma non ha massimo (lo studente se ne renda conto in dettaglio). Questa volta non si può obiettare che la funzione non ha massimo "perché abbiamo tolto apposta un punto all'insieme di definizione": il "problema" sta nella funzione.

Massimo e *punto di massimo* si dicono anche ***massimo assoluto*** e ***punto di massimo assoluto***.

Si dice invece che x_0 è un ***punto di massimo relativo*** per f, definita in E, e che $M = f(x_0)$ è ***massimo relativo***, se esiste un *intorno* $\mathcal{U}(x_0)$ (v. §1.1.4) tale che

$$f(x) \le f(x_0) = M \text{ per ogni } x \in E \cap \mathcal{U}(x_0).$$

Un punto di massimo assoluto è anche di massimo relativo, ma non viceversa. Analogamente si definisce il concetto di minimo relativo e punto di minimo relativo.

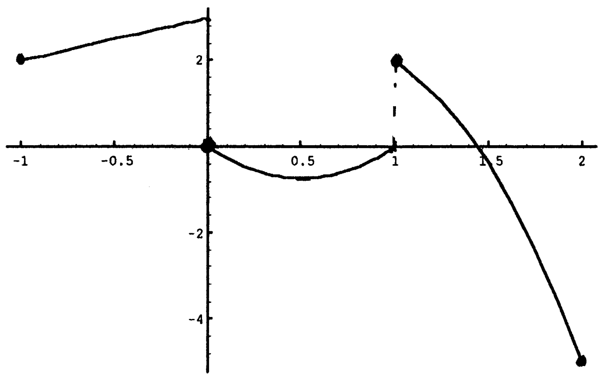
Esempio. Nell'ultimo esempio fatto, il punto $x = -1$ è di minimo relativo ma non assoluto, il punto $x = 1$ è di massimo relativo ma non assoluto.

Esercizio 30.

a. Dare la definizione di minimo relativo e punto di minimo relativo.

b. Costruire poi (graficamente) un esempio di funzione che ammetta un massimo assoluto, un massimo relativo diverso dal massimo assoluto, un minimo relativo, e non ammetta minimo assoluto.

c. Indicare, nel grafico seguente, gli eventuali i punti di massimo e minimo relativi e assoluti.



d. Dimostrare che un punto di massimo assoluto è, a maggior ragione, punto di massimo relativo.

2.3.4. Monotonia

Al crescere del raggio, il volume di una sfera cresce. Al crescere della velocità media, il tempo impiegato a percorrere una data distanza decresce. Relazioni di questo tipo significano che una certa funzione è *crescente* o *decrescente*. Più in generale una funzione si dirà ***crescente su un intervallo I*** se, per ogni coppia di valori $x_1, x_2 \in I$ risulta

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

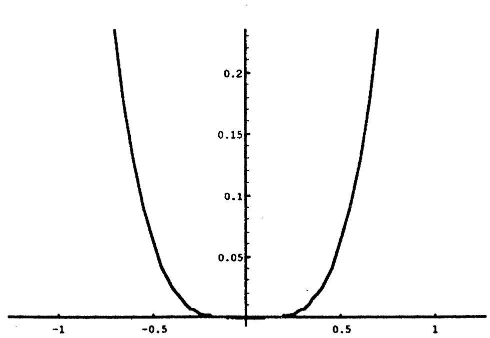
si dirà ***decrescente su un intervallo I*** se per ogni $x_1, x_2 \in I$ risulta

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

si dirà ***strettamente crescente (decrescente)*** se le relazioni precedenti valgono con tutti i segni di $\leq$ sostituiti da $<$. Una funzione si dice ***monotòna*** sull'intervallo I se è crescente, oppure decrescente, su tutto I (ma non cambia andamento sull'intervallo); ***strettamente monotòna*** se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

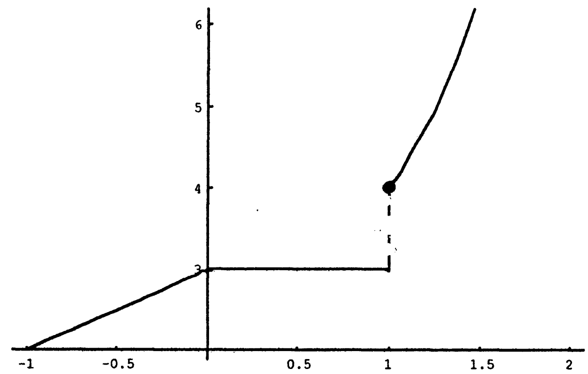
Esempi

- La funzione



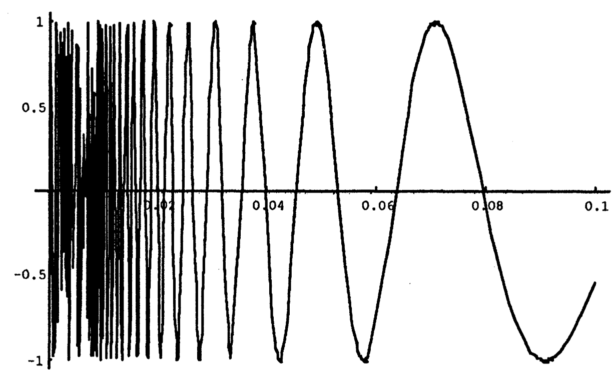
è strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$, strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0]$; non è monotona su $(-\infty, +\infty)$.

- La funzione



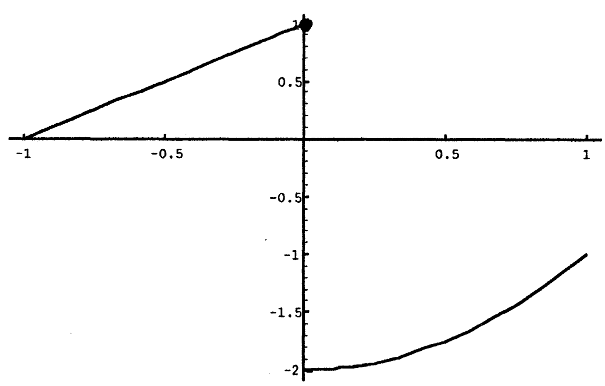
è crescente (non strettamente) sul suo intervallo di definizione.

- La funzione



non è monotona su nessun intervallo del tipo $(0, \varepsilon)$, per quanto piccolo si prenda ε.

- La funzione



è crecente in $[-1, 0]$ e in $(0, 1]$, ma non è crescente in $[-1, 1]$. Infatti, ad esempio, $f(-\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{2})$.

Proposizione. *La funzione* $f(x) = x^n$*, con* n *intero positivo, è strettamente crescente per* $x \geq 0$.

Dimostriamolo per $n = 2$. ($y = x^2$). Siano x_1, x_2 due valori positivi di x, e proviamo che

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2.$$

Infatti: sappiamo che $x_1 < x_2$. Se moltiplichiamo ambo i membri di questa disuguaglianza per la quantità positiva x_1, otteniamo:

$$x_1^2 < x_1 x_2.$$

Se invece moltiplichiamo ambo i membri della disuguaglianza $x_1 < x_2$ per la quantità positiva x_2, otteniamo

$$x_1 x_2 < x_2^2.$$

Leggendo in catena le ultime due disuguaglianze scritte abbiamo

$$x_1^2 < x_1 x_2 < x_2^2,$$

e quindi $x_1^2 < x_2^2$. □

La dimostrazione per n qualsiasi si può fare *per induzione* su n (si veda il §1.4.1*). L'idea, per il resto, è simile: per $n = 1$ la monotonia di $y = x$ è ovvia; supponiamo vera la proprietà per n, ossia

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$$

e dimostriamola per $n + 1$. Sia dunque $x_1 < x_2$. Quindi $x_1^n < x_2^n$. Moltiplichiamo ambo i membri di questa disuguaglianza per x_1, e abbiamo $x_1^{n+1} < x_1 x_2^n$; moltiplichiamo ora ambo i membri della disuguaglianza $x_1 < x_2$ per x_2^n, e abbiamo $x_1 x_2^n < x_2^{n+1}$. Leggiamo in catena le due disuguaglianze scritte e otteniamo $x_1^{n+1} < x_2^{n+1}$, cioè la tesi. □

Esercizio 31. Dimostrare che $y = x^3$ è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$. Suggerimento: dimostrare che lo è per $x \geq 0$ e poi ragionare sulla simmetria della funzione.

3. Equazione della retta. Funzioni lineari

3.1. Equazione della retta

Come si scrive l'equazione di una retta nel piano? Lo studente conoscerà già la risposta. Ad ogni modo, è invitato a ripercorrere per proprio conto le prossime tappe, rendendosi conto dei *perché*.

1° passo. Retta passante per l'origine e un punto assegnato $A \equiv (x_A, y_A)$. Sia $P \equiv (x, y)$ il punto generico sulla retta. Dimostrare, ragionando su opportuni triangoli simili, che P appartiene alla retta passante per l'origine O e A se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione

$$y = mx,$$

dove $m = y_A/x_A$. Il numero m, com'è noto, si dice *coefficiente angolare della retta*, ne rappresenta la pendenza.

2° passo. Retta passante per due punti $A \equiv (x_A, y_A), B \equiv (x_B, y_B)$. Ci si può ricondurre al caso precedente mediante una traslazione che porti A nell'origine. Così facendo si trova l'equazione

$$y - y_A = m(x - x_A), \quad \text{con } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Questa retta si può riscrivere nella forma

$$y = mx + q$$

dove m è il coefficiente angolare e q l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y.

Le uniche rette che in questo modo non riusciamo a scrivere sono quelle verticali (perché?) Queste, d'altro canto, hanno equazione $x =$ costante.

3° Passo. L'equazione generale della retta, che contiene tutti i casi possibili, è

$$ax + by + c = 0.$$

Se $b \neq 0$, si ha una retta obliqua con $m = -a/b$ (orizzontale se $a = 0$); se $b = 0$ si ha la retta verticale $x = -c/a$; i coefficienti a, b non possono essere entrambi nulli (perché?).

Proposizione.

a. Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

b. Due rette sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari m, m' soddisfano la relazione $mm' + 1 = 0$, ovvero $m' = -1/m$.

Esercizi

32. Dimostrare la proposizione precedente utilizzando la geometria elementare.

Suggerimento. Per a: ragionare sugli angoli formati da rette parallele con una trasversale, triangoli simili, triangoli uguali... Per b. Tracciare due rette perpendicolari passanti per l'origine, fissare sulla prima il punto $(1, m)$ sulla seconda il punto $(1, m')$, e ragionare su opportuni triangoli simili.

33. Disegnare il grafico delle rette:
$y = -x$; $y = 2x$; $y = \frac{3}{2}x + 1$; $2x + y - 1 = 0$.

34. Scrivere l'equazione della retta:
passante per $(0,0)$, $(-1,-3)$;
passante per $(1,2), (0,-1)$;
passante per $(3,-2)$ e avente pendenza $m = -\frac{1}{2}$.

35. Siano $A \equiv (1,2), B \equiv (3,5)$, r la retta di equazione $y = -3x + 100$.
a. Scrivere l'equazione della retta passante per A e B.
b. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto medio di AB e parallela ad r.
c. Scrivere l'equazione della retta passante per B e perpendicolare ad r.
d. Determinare l'intersezione di r con la retta passante per A e B.

36. Si consideri la famiglia di rette r_a di equazione

$$r_a : ax + (1-a)y - 3a + 1 = 0,$$

al variare del parametro reale a.
a. Scrivere l'equazione della retta passante per $(0,0)$ e perpendicolare ad r_a.
b. Dire per quale valore di a la retta r_a è parallela all'asse x, per quale è parallela all'asse y.
c. Dire per quale valore di a la retta r_a passa per $(1,1)$, per quale valore passa per $(2,-1)$.

3.2. Funzioni lineari

La retta $y = mx + q$ si può vedere anche come *funzione*. Queste funzioni si dicono *lineari* (più precisamente, si dice ***lineare*** la funzione $y = mx$, ***lineare affine*** la funzione $y = mx + q$). La retta $x = x_0$ *non* si può vedere invece come funzione. (Perché?)

La funzione $y = mx + q$ è *crescente* se e solo se $m > 0$, *decrescente* se e solo se $m < 0$, costante per $m = 0$ (retta orizzontale).

Per $q = 0$ la funzione è *simmetrica, dispari*. Per $q \neq 0$ non ha simmetrie, tranne il caso $m = 0$ in cui è pari.

3.3. Fenomeni lineari

Le funzioni lineari $y = mx$ devono la loro importanza al fatto di soddisfare l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ per ogni } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(Si può dimostrare che sono *le uniche* funzioni "ragionevoli" a soddisfare questa relazione). Se ad esempio $y = f(x)$ rappresenta la risposta di un sistema fisico a qualche tipo di sollecitazione x, la relazione funzionale precedente esprime il fatto che *alla somma delle cause corrisponde la somma degli effetti*. (Principio di sovrapposizione lineare). Alcune semplici leggi fisiche hanno, esattamente o approssimativamente, questa forma. Ad esempio l'allungamento di una molla è proporzionale al peso che vi appendiamo, almeno entro certi limiti (legge di Hooke), la corrente elettrica che passa attraverso un filo di rame è proporzionale alla differenza di potenziale applicata agli estremi del filo (legge di Ohm), e così via.

Anche quando una legge non è esattamente lineare, talvolta lo è almeno approssimativamente; inoltre, vedremo in seguito che il calcolo infinitesimale permette di approssimare *ogni* funzione abbastanza regolare mediante una funzione lineare (o lineare affine), quando la variabile x subisce *piccole* variazioni. Questo fatto dovrebbe essere almeno intuitivamente chiaro, dal momento che ogni curva "ragionevole" in un suo breve tratto non si discosta troppo da una retta.

Esistono, d'altro canto, fenomeni marcatamente non lineari, per i quali l'approssimazione lineare non rende ragione delle caratteristiche più importanti, quando la variazione di x non è piccola.

4. Valore assoluto

4.1. Valore assoluto di un numero e di una funzione

Il ***valore assoluto***, o ***modulo***, di un numero reale a si indica con $|a|$ ed è il numero positivo uguale o opposto ad a. Ad esempio. $|3| = 3$; $|-4| = 4$. E' facile quindi prendere il valore assoluto di un numero ben preciso, come 3 o -4; un po' più insidioso è considerare il valore assoluto di una *quantità variabile*, cioè una *funzione*. Quanto vale, ad esempio, $|-x|$? Oppure $|2x+1|$?

(*Lo studente provi a rispondere da sé, prima di proseguire nella lettura*).

Per rispondere a queste e simili domande, diamo anzitutto una definizione un po' più formale (e precisa) di valore assoluto. Poniamo

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a \leq 0. \end{cases}$$

(Il fatto che il caso $a = 0$ compaia due volte nella precedente definizione non è un problema, poiché $-0 = 0$). Si noti il secondo caso: se $a < 0$, $|a| = -a > 0$. In ogni caso $|a| \geq 0$: *il valore assoluto di una qualsiasi quantità è sempre una quantità non negativa*.

A questo punto possiamo dire che, ad esempio,

$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{se } -x \geq 0, \text{ cioè } x \leq 0 \\ x & \text{se } -x \leq 0, \text{ cioè } x \geq 0. \end{cases}$$

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0, \text{ cioè } x \geq -1/2 \\ -(2x+1) & \text{se } 2x+1 \leq 0, \text{ cioè } x \leq -1/2. \end{cases}$$

4.2. Equazioni e disequazioni contenenti valori assoluti

Esempio. Risolvere la disequazione:

$$|x| + 5 + x \geq |2x - 1|.$$

L'equazione contiene due valori assoluti. Ognuno di essi si può riscrivere senza il simbolo $|\cdot|$ se è noto il segno della quantità entro modulo. Perciò discutiamo questi segni:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } 2x-1 \geq 0, \text{ cioè } x \geq 1/2 \\ 1-2x & \text{se } 2x-1 \leq 0, \text{ cioè } x \leq 1/2. \end{cases}$$

Per riscrivere la disequazione senza moduli dobbiamo quindi distinguere 3 casi:

$$x \leq 0;\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2};\ x \geq \frac{1}{2}.$$

(Si noti che i casi sono 3, e non 4 come potrebbe sembrare "combinando tutti i casi possibili": infatti il caso $x \geq \frac{1}{2}$ è incompatibile con $x \leq 0$. In generale, occorre disporre in ordine crescente i "valori capisaldo": se questi sono n, i casi saranno $n+1$).

Caso 1. $x \leq 0$ (e quindi $x \leq \frac{1}{2}$). La disequazione diventa:

$$-x+5+x \geq 1-2x$$

disequazione di primo grado che risolta dà: $x \geq -2$. Pertanto un primo insieme di soluzioni è $-2 \leq x \leq 0$.

Caso 2. $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. La disequazione diventa:

$$x+5+x \geq 1-2x,$$

che risolta dà: $x \geq -1$, il che è verificato in tutto l'intervallo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, pertanto un secondo insieme di soluzioni è $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Caso 3. $x \geq \frac{1}{2}$ (e quindi $x \geq 0$). La disequazione diventa:

$$x+5+x \geq 2x-1$$

che è sempre verificata. Pertanto $x \geq \frac{1}{2}$ sono tutte soluzioni.

Conclusione. Raccogliendo le soluzioni trovate nei tre casi si ottiene che la disequazione è verificata per $x \geq -2$.

Esercizi

37. $|1-2x| + (2x-1)^3 > 4x(2x^2-3x) + |x+6|$

38. $|x+1+2a| \leq 2x-a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

4.3. Valore assoluto e distanze sulla retta

Il valore assoluto di un numero ha un significato geometrico: rappresenta, sulla retta reale, la distanza di quel punto dallo 0. Analogamente, $|a-b|$ rappresenta la distanza tra i due numeri a, b, ovvero la lunghezza del segmento che li unisce. L'utilità di questa scrittura è che non c'è bisogno di sapere chi sia maggiore e minore tra i due numeri.

Ragionare sui moduli in termini di distanze può essere utile per intepretare velocemente certe equazioni o disequazioni.

Esempi

- $|x| \leq 2$ vuol dire: punti che distano dallo 0 per non più di 2, quindi: $-2 \leq x \leq 2$.

- $|x-1| \geq 3$ vuol dire: punti che distano da 1 per almeno 3, quindi:
  $x \geq 1+3$, $x \leq 1-3$ cioè $x \geq 4$ o $x \leq -2$.

- $|x-1| \leq |x+3|$ vuol dire: la distanza di x da 1 è $\leq$ della distanza di x da -3, cioè, poiché il punto medio tra -3 e 1 è -1: $x \leq -1$.

- $|x| = 1$ vuol dire $x = \pm 1$

- $|x| = -1$ non è mai verificato

- $|x| = 0$ vuol dire $x = 0$.

- $|x-1| = 0$ vuol dire $x = 1$.

Proposizione. *Il valore assoluto soddisfa le seguenti proprietà algebriche. Per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad |a/b| = |a|/|b|$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad e \quad ||a| - |b|| \leq |a-b| \quad \textit{(disuguaglianze triangolari)}$$

Dimostrazione. La prima riga dipende dal fatto che $|a|$ è uguale ad a oppure a $-a$, e $|\pm 1| = 1$. La seconda dipende dal fatto che $a \leq |a|$. Sommando questa all'analoga disuguaglianza $b \leq |b|$ si trova

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

Lo stesso ragionamento applicato a $-a, -b$ porta a

$$-a - b \leq |a| + |b|$$

e quindi $|a+b| \leq |a| + |b|$. Applicando questa disuguaglianza ad $(a-b)$ e b si ha poi:

$$|a| = |a - b + b| \leq |a-b| + |b|$$

e quindi

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Scambiando i ruoli di a, b si trova anche $|b| - |a| \leq |a - b|$, e dalle due disuguaglianze segue $||a| - |b|| \leq |a - b|$. □

Lo studente è invitato a completare ogni dettaglio di questa semplice dimostrazione, in modo da convincersene.

Si osservi che per ragionare sui moduli non occorre *sempre* applicare la definizione (cioè "fare la casisitica"). In questa dimostrazione, ad esempio, si usa ripetutamente il fatto che $|a|$ è uguale ad a oppure a $-a$, non importa sotto che ipotesi.

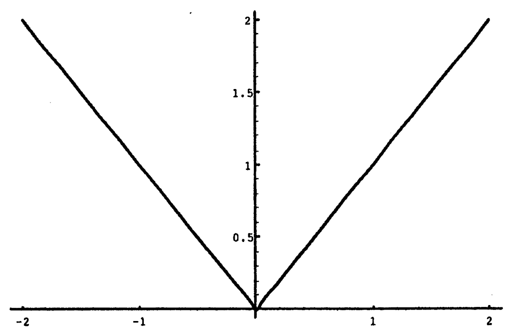
Osservazione. Perché le disuguaglianze nella seconda riga della proposizione si chiamano *triangolari*? La ragione di questo nome si comprende, in realtà, non tanto da questa versione della disuguaglianza quanto dalle sue generalizzazioni. In termini di distanza, la disuguaglianza triangolare dice che la distanza tra a e b non supera la somma della distanza tra a e 0 e la distanza tra b e 0: andare direttamente da un punto all'altro è più breve che andarci passando da un terzo punto obbligato (in questo caso l'origine).Questo stesso enunciato, riferito a tre punti non allineati, nel piano, diventa la disuguaglianza triangolare della geometria elementare, che afferma che un lato di un triangolo è sempre $\leq$ della somma degli altri due, e $\geq$ della differenza degli altri due.

4.4. Funzione valore assoluto, valore assoluto di una funzione, funzione segno

Vediamo ora il valore assoluto come funzione. Poiché

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

si può facilmente disegnare il grafico della funzione $y = |x|$: per $x \geq 0$ coincide con quello della retta $y = x$, per $x \leq 0$ con quello della retta $y = -x$. Il grafico complessivo è unione di due semirette:



Nell'origine questa funzione presenta un comportamento detto per evidenti motivi "punto angoloso".

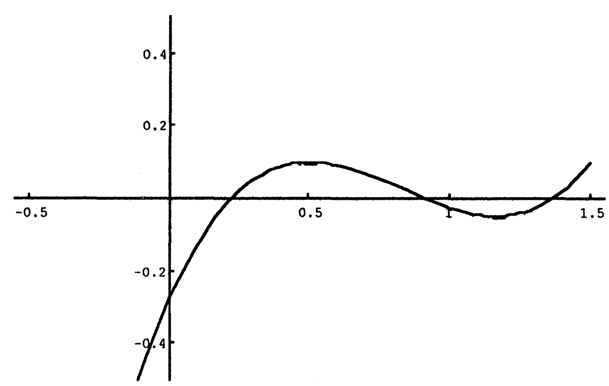
Se $f(x)$ è una funzione qualsiasi, $y = |f(x)|$ sarà una nuova funzione, che per definizione di valore assoluto è data da:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{per le } x \text{ per cui è } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{per le } x \text{ per cui è } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

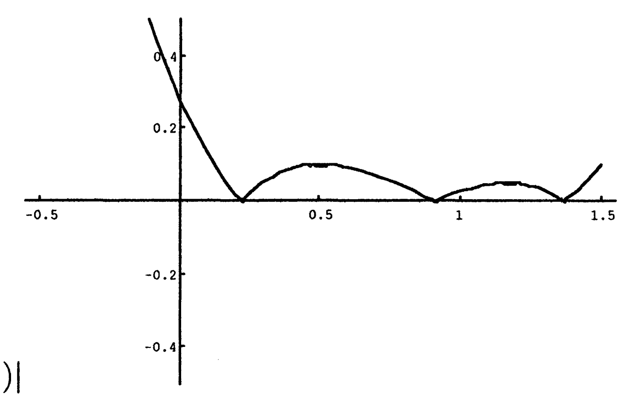
Graficamente si opera così:

- si traccia il grafico di $f(x)$;
- dove questo grafico sta al disopra dell'asse x, il grafico coincide con quello di $|f(x)|$;
- dove questo grafico sta al disotto dell'asse x, il grafico di $|f(x)|$ si ottiene da questo ribaltandolo rispetto all'asse x;
- il grafico di $|f(x)|$ sta quindi *tutto al disopra dell'asse* x.

Esempio



$y = f(x)$



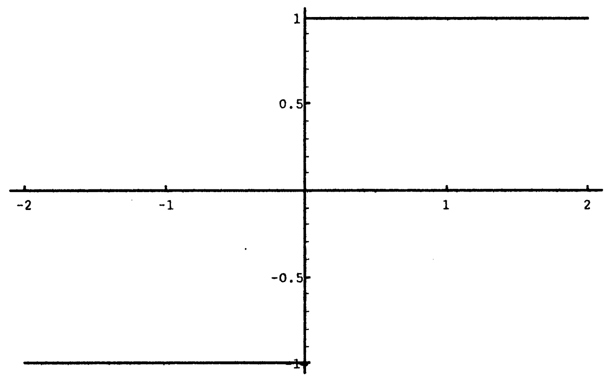
$y = |f(x)|$

Esercizio 39. Disegnare il grafico di $y = |2x + 1|$

Una funzione imparentata con $|x|$ è la funzione *segno di* x:

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

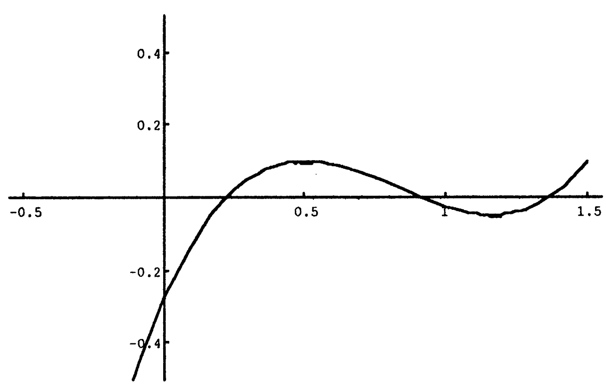
La funzione non è definita per $x = 0$. Il suo grafico è:



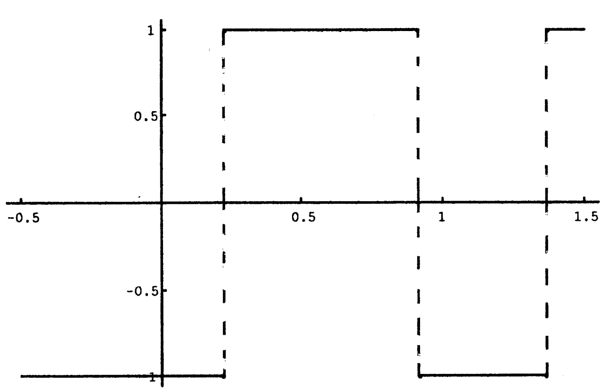
Data la funzione $f(x)$, si può considerare la funzione $\text{sgn}(f(x))$, definita

$$\text{sgn}(f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{per quegli } x \text{ per cui } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{per quegli } x \text{ per cui } f(x) < 0. \end{cases}$$

Esempio



$y = f(x)$



$y = \text{sgn}(f(x))$

5. Operazioni sui grafici

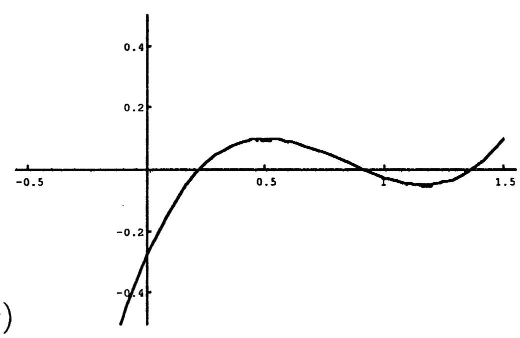
Vediamo ora vari modi in cui a partire dal grafico di una funzione si può ottenere il grafico di un'altra.

5.1. Traslazione

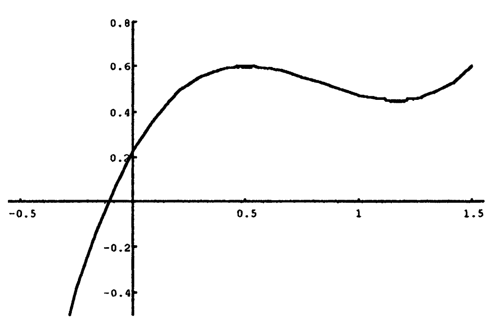
- La funzione $y = f(x) + k$ è ottenuta dal grafico di $f(x)$ eseguendo una traslazione sull'asse y (la nuova funzione ha per valore quello di $f(x)$, *più* k).
- La funzione $y = f(x + k)$ è ottenuta dal grafico di $f(x)$ eseguendo una traslazione sull'asse x (la nuova funzione vale nel punto $x + k$ quello che la funzione di partenza valeva in x). Normalmente lo studente ha l'imbarazzo: traslare a destra o a sinistra? La cosa più semplice è individuare un punto "speciale" di f e ragionare su quello. Ad esempio: f ha un certo punto di massimo per $x = 2$? Allora $f(x + k)$ avrà quel massimo dove $x + k = 2$, cioè per $x = 2 - k$: il resto viene da sé.

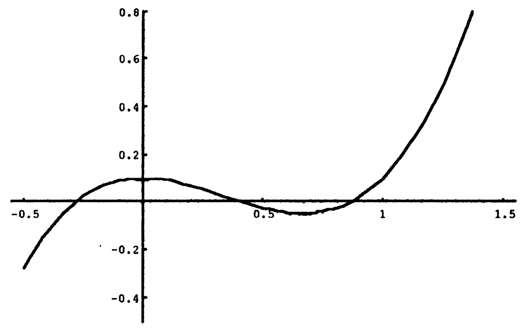
Esempio.

$y = f(x)$



$y = f(x) + \frac{1}{2}$



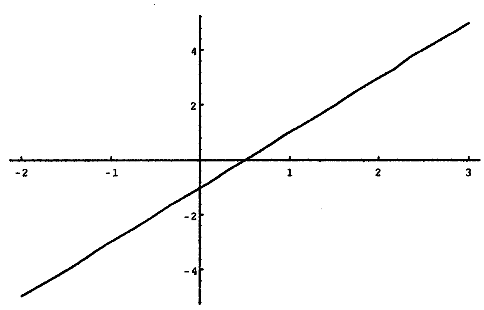


$$y = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

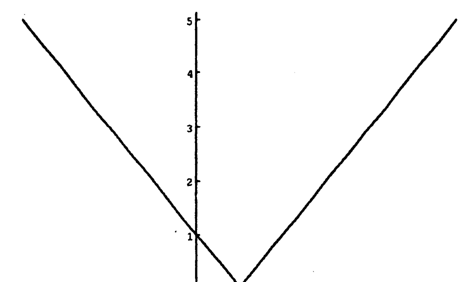
Si osservi che $f(x)$ ha un punto di massimo in $x = \frac{1}{2}$; $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ha un punto di massimo per $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, cioè per $x = 0$.

Esempio. Disegnare il grafico di $y = \left||2x - 1| - 1\right|$.

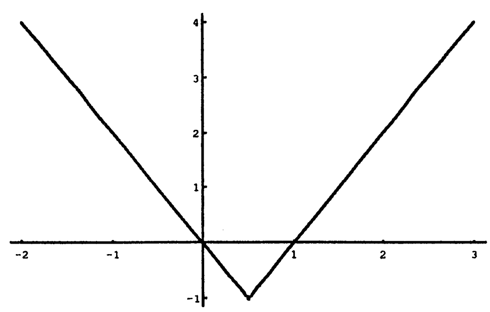
Andiamo per gradi. $y = 2x - 1$ è la retta:



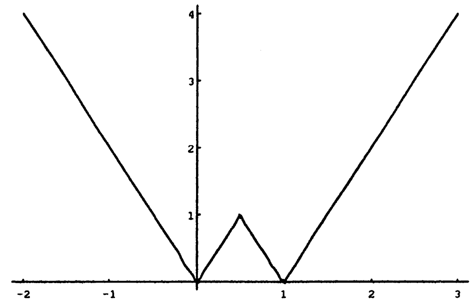
La funzione $y = |2x - 1|$ si ottiene da questa prendendo il modulo, come visto nel paragrafo precedente:



Ora si considera $y = |2x - 1| - 1$, che si ottiene con una traslazione sull'asse y, traslando verso il basso di 1:



Infine si prende il modulo di questo funzione, ottenendo $y = ||2x - 1| - 1|$:



□

Esercizio 40. Risolvere la seguente disequazione graficamente:

$$|||x| - 1| - 2| > 1.$$

(Ossia: tracciare un grafico accurato della funzione a primo membro, ragionando come nell'esempio precedente, e osservare per quali x risulta verificata la disuguaglianza). A titolo di confronto, risolvere poi la stessa disequazione algebricamente, cioè discutendo i moduli caso per caso.

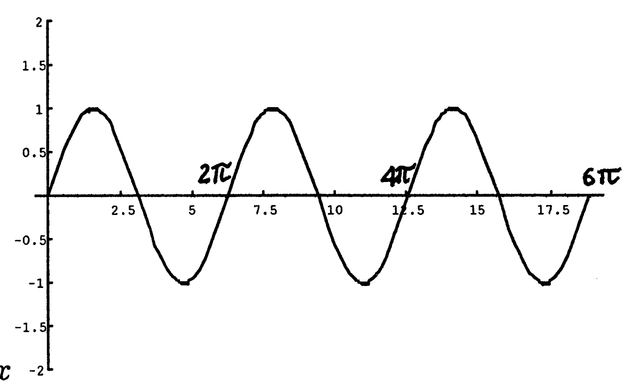
5.2. Dilatazione

- Il grafico di $y = \alpha f(x)$ (con $\alpha > 0$) è ottenuto dal grafico di $f(x)$ eseguendo una dilatazione di coefficiente α sull'asse y (se $\alpha > 1$ la funzione diventa "più ripida", se $\alpha < 1$ "più schiacciata").
- Il grafico di $y = f(\alpha x)$ (con $\alpha > 0$) è ottenuto dal grafico di $f(x)$ eseguendo una dilatazione di coefficiente α sull'asse x (se $\alpha > 1$ il grafico viene "compresso" in senso orizzontale, se $\alpha < 1$ viene "allungato" in senso orizzontale).

Lo studente è invitato a riflettere sul *perché* le cose vanno così.

Esempio. Sapendo che il grafico di $y = \sin x$ su $[0, 6\pi]$ è

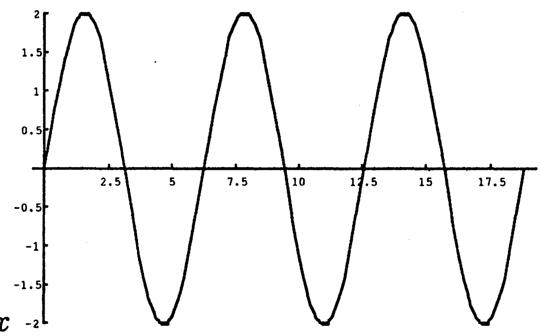
$y = \sin x$



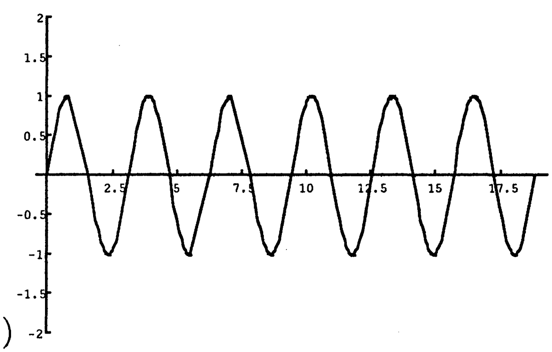
disegnare, sullo stesso intervallo, il grafico di: $y = 2\sin x$; $y = \sin(2x)$; $y = \sin(x/3)$; $y = 2\sin(x/2)$.

Provare a disegnare i grafici per proprio conto, prima di osservare la soluzione, a pagina seguente.

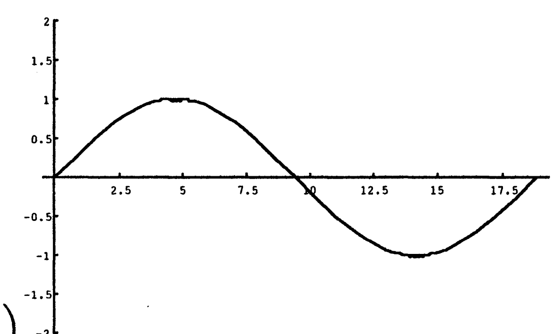
Soluzione esempio precedente:



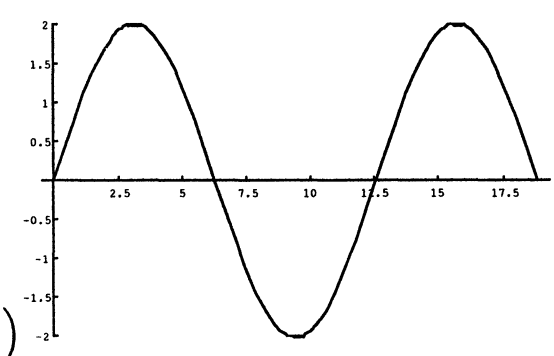
$y = 2\sin x$



$y = \sin(2x)$



$y = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$



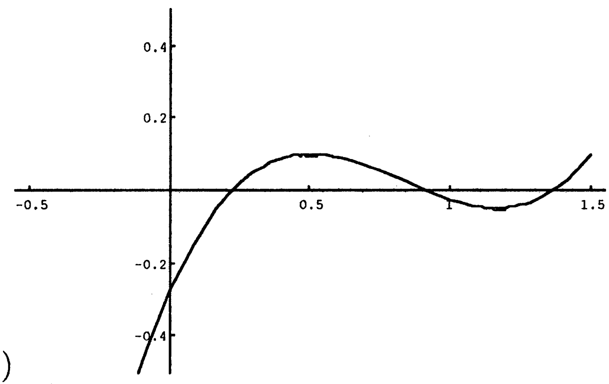
$y = 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

5.3. Riflessioni

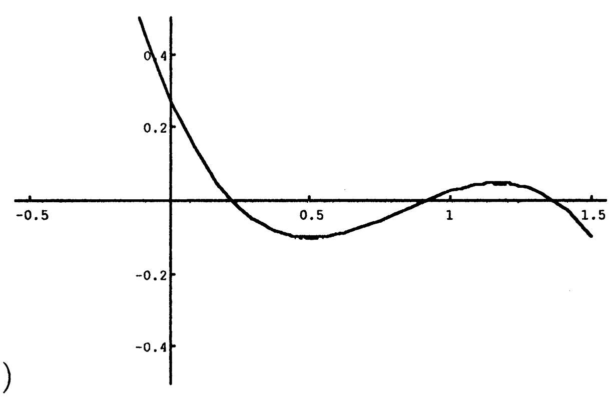
- Il grafico di $y = -f(x)$ si ottiene dal grafico di f mediante una riflessione attraverso l'asse x.
- Il grafico di $y = f(-x)$ si ottiene dal grafico di f mediante una riflessione attraverso l'asse y.

Lo studente è invitato a riflettere sul *perché* le cose vanno così.

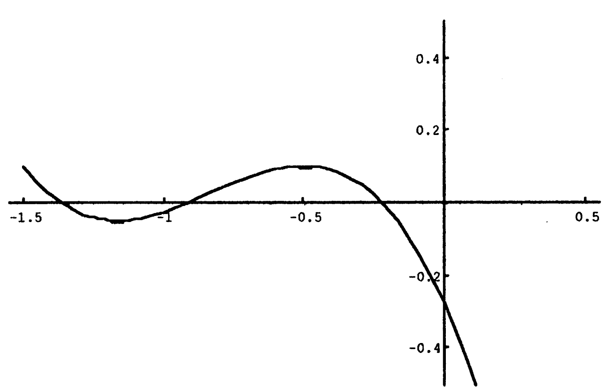
Esempio.



$y = f(x)$



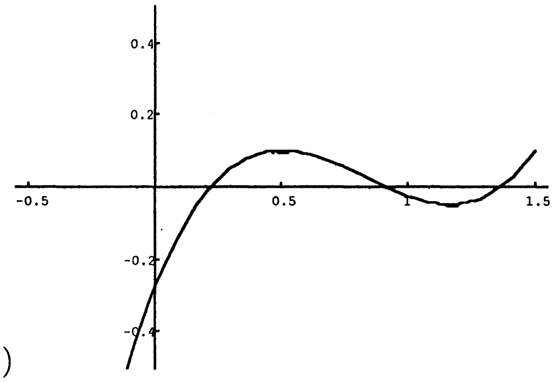
$y = -f(x)$



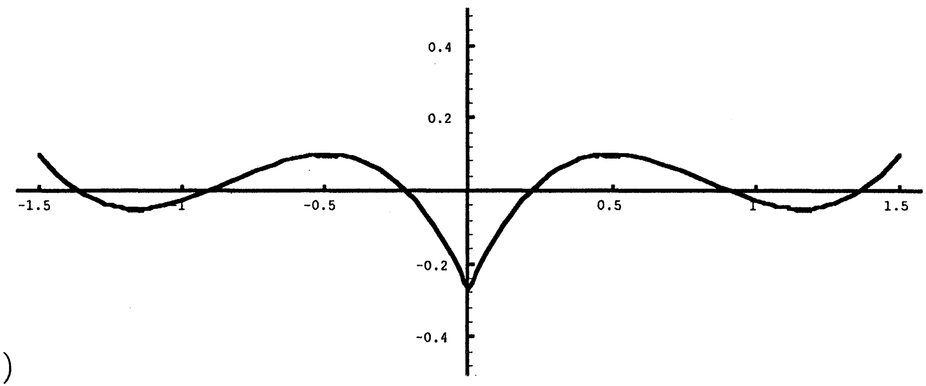
$y = f(-x)$

Un tipo di riflessione diversa è la seguente:

Esempio. Dato il grafico di $f(x)$, disegnare il grafico di $f(|x|)$.



$y = f(x)$



$y = f(|x|)$

Spiegazione. Poiché $|x| \geq 0$, il grafico di $f(|x|)$ dipende solo dal grafico di $f(t)$ per $t \geq 0$. Per prima cosa si concella quindi il pezzo di grafico di $f(t)$ per $t < 0$; quindi, poiché $|-x| = |x|$, e quindi $f(|-x|) = f(|x|)$, si simmetrizza rispetto all'asse y il grafico rimanente. Il risultato è il grafico di una funzione pari, che dipende solo dai valori che f assume sul semiasse positivo.

6. Polinomi ed equazioni algebriche; funzioni razionali

6.1. Polinomi e operazioni su di essi; funzioni razionali

I polinomi vengono solitamente introdotti, nelle scuole, in un modo un po' formale (ad esempio come "somma di monomi", dove un monomio è definito a sua volta come "un'espressione letterale", definizione a dir poco fumosa). Lo studente provi, prima di proseguire la lettura, a dare una definizione di polinomio che gli sembri convincente e sia espressa nell'ordine di idee che abbiamo sviluppato fin qui. Qual è, dunque, la definizione dell'oggetto matematico

$$3x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 7x + 2?$$

Noi li vedremo qui come *particolari funzioni*. Un ***polinomio (a coefficienti reali)*** è una funzione del tipo:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad (*)$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono numeri reali fissati, e si dicono *coefficienti del polinomio*. Ad esempio, il polinomio

$$p(x) = 3x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 7x + 2$$

è semplicemente la funzione che associa ad ogni numero reale x il numero $3x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 7x + 2$.

Un polinomio si dice ***di grado n*** se si può scrivere nella forma (*) con $a_n \neq 0$. Ad esempio, il polinomio $p(x)$ scritto qui sopra ha grado 5. Si noti che alcuni coefficienti dei termini con potenze *più basse* possono annullarsi (ad esempio, $p(x)$ ha $a_3 = a_2 = 0$); il grado è determinato dalla potenza *massima* che compare.

Analogamente $q(x) = 3x$ è un polinomio di grado 1, e $r(x) = 2$ (polinomio costante!) è un polinomio di grado zero. Per motivi che saranno chiari più avanti, *il polinomio identicamente nullo si dice non avere grado.* In altre parole, lo zero *non* viene visto come una particolare costante, ma come un oggetto un po' diverso.

Come si definiscono la ***somma e il prodotto di polinomi***? Nell'unico modo coerente con il concetto più generale di ***somma e prodotto di funzioni***. Apriamo una parentesi.

Operazioni sulle funzioni. Date due funzioni, $y = f(x)$, $y = g(x)$ si definisce somma di f e g la funzione $f + g$ che associa ad x il numero $f(x) + g(x)$, in simboli

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Analogamente si definiscono le altre operazioni sulle funzioni: $f \cdot g$, f/g, f^g... Ad esempio [10]

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

La somma e il prodotto di polinomi sono la somma e il prodotto di due (particolari) funzioni. *Per questo motivo* (e non perché "così dice la regola"!) queste operazioni si eseguono nel modo che dovrebbe essere familiare:

$$\left(3x^2 + 5x\right) + \left(2x^2 - x + 1\right) = 5x^2 + 4x + 1$$

$$\left(3x^2 + 5x\right) \cdot \left(2x^2 - x + 1\right) = 6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 5x.$$

Si sono applicate le usuali proprietà delle operazioni di somma e prodotto di numeri reali, (distributive, commutative...) e le proprietà delle potenze (che da esse seguono).

Cosa si può dire sul ***grado della somma e del prodotto di due polinomi***? Un attimo di riflessione mostra che:

- *il grado del prodotto di due polinomi* (non nulli) *è uguale alla somma dei gradi dei due polinomi*;
- *il grado della somma è minore o uguale del massimo dei gradi* dei due polinomi (infatti, nella somma algebrica i termini di grado massimo potrebbero cancellarsi, mentre nel prodotto questo non è possibile).[11]

Si osservi che in generale non è possibile eseguire altre operazioni sui polinomi ottenendo un polinomio: in particolare, se $p(x)$, $q(x)$ sono due polinomi, in generale $p(x)/q(x)$ non è un polinomio.

Si dice ***funzione razionale*** una funzione esprimibile come quoziente di due polinomi:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ con } p,\ q \text{ polinomi.}$$

Ad esempio, sono funzioni razionali

[10] Lo studente cerchi di capire cosa affermano le precedenti definizioni, così naturali da poter sembrare prive di contenuto. Una funzione è un oggetto diverso da un numero; però il valore che essa assume in corrispondenza di un dato valore della variabile x è un numero; questo consente di definire un'operazione di somma *di funzioni* specificando come agisce questa nuova funzione $f + g$: ad ogni x associa la somma dei valori delle due funzioni in x. Il simbolo di $+$ posto tra f e g è una somma di funzioni; quello posto tra $f(x)$ e $g(x)$ è una somma di numeri reali.

[11] Questa proprietà fornisce uno dei motivi per cui è bene *non* definire il grado del polinomio zero uguale a zero (o a un altro numero). Infatti, in ogni caso il polinomio zero farebbe eccezione alla regola del grado del prodotto: ad esempio, $0 \cdot x = 0$ ma se scriviamo $\mathrm{gr}(0) + \mathrm{gr}(x) = \mathrm{gr}(0)$ otteniamo $\mathrm{gr}(0) + 1 = \mathrm{gr}(0)$, impossibile.

$$\frac{x^5-3x^2+1}{x^3+1}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{3+2x}{(2+x)^4}.$$

Le funzioni razionali giocano un ruolo importante nel calcolo infinitesimale, oltre che in algebra.

Riflettiamo ora sulla seguente analogia. Il quoziente di due numeri interi è un numero razionale, e in generale non è un numero intero; si può eseguire però la divisione tra numeri interi, trovando un quoziente e un resto:

Teorema sulla divisione tra gli interi. *Se $a > b > 0$ sono due interi positivi, esistono e sono univocamente determinati due numeri q, r detti quoziente e resto della divisione $a : b$, con le proprietà:*

1. $a = b \cdot q + r$
2. $0 \leq r < b$.

Analogamente, il quoziente di due polinomi è una funzione razionale, in generale non un polinomio; si può eseguire la divisione di polinomi, trovando un quoziente e un resto:

Teorema sulla divisione di polinomi. *Se $a(x)$, $b(x)$ sono due polinomi di grado positivo, $gr(a) \geq gr(b)$, esistono e sono univocamente determinati due polinomi $q(x), r(x)$, detti quoziente e resto della divisione $a(x) : b(x)$, con le proprietà:*

1. $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$
2. *$r(x)$ è zero, oppure $gr(r) < gr(b)$.*

Se il resto della divisione $a(x) : b(x)$ è zero, si dice che $a(x)$ è ***divisibile*** per $b(x)$. In questo caso la funzione razionale $\frac{a(x)}{b(x)}$ è in realtà un polinomio. Lo studente è invitato a questo punto a rendersi conto, anche mediante esempi numerici, di cosa dicono i due teoremi precedenti, del significato della due condizioni, e del fatto che l'algoritmo che si segue per eseguire la divisione tra polinomi è del tutto analogo a quello che si usa per eseguire la divisione tra due numeri interi.

Esercizio 41. Eseguire la divisione e determinare quoziente e resto:

$$\frac{x^4+2x^3-x-2}{x^2+2}.$$

Una conseguenza dell'esistenza di quoziente e resto tra polinomi è il fatto che:

Proposizione. *Una funzione razionale si può sempre riscrivere come somma di un polinomio e un'altra funzione razionale, in cui il numeratore ha grado minore del denominatore.*

Infatti, se $q(x)$, $r(x)$ sono quoziente e resto di $a(x) : b(x)$, per la condizione 1 si può scrivere

$$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)},$$

e per la condizione 2 del Teorema, $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(b)$. □

Esercizio 42. Eseguire le seguenti divisioni di polinomi e riscrivere la funzione razionale $\frac{a}{b}$ nella forma $q + \frac{r}{b}$, come nella precedente Proposizione:

$$\frac{2x^5 - x^3 + 9x^2 + 1}{x^3 + x^2 - 1}; \quad \frac{x^{500} + x - 2}{x - 1}.$$

Prima di proseguire il discorso sui polinomi in generale, apriamo ora una parentesi sui polinomi di secondo grado, richiamando una serie di fatti elementari che dovrebbero essere ben noti al lettore. Ci occuperemo poi di un'altra classe speciale di polinomi, le potenze x^n, per tornare in seguito ai polinomi qualsiasi.

6.2. Equazione della parabola, trinomio di secondo grado, equazioni e disequazioni di secondo grado

6.2.1. Grafico della parabola definita da un polinomio di secondo grado

Il problema di tracciare il grafico di una generica funzione polinomiale $y = p(x)$ potrà essere affrontato in modo soddisfacente solo con il calcolo infinitesimale. Nel caso del polinomio di secondo grado, però, la situazione è molto semplice e può essere studiata in dettaglio. Ci proponiamo ora di dedurre, per passi successivi, il grafico della funzione

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

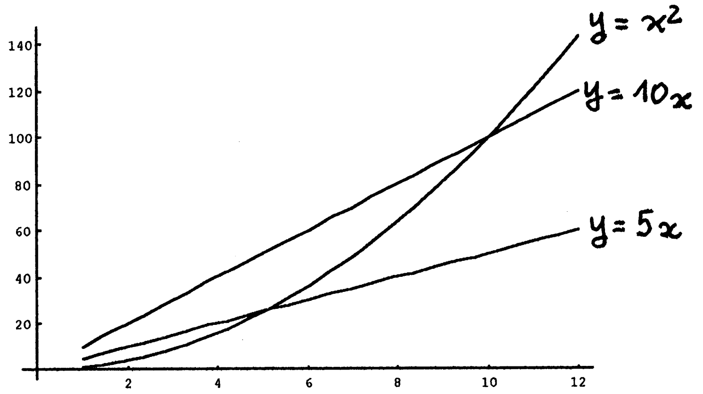
(Se $a = 0$ si ritrova l'equazione della retta). Lo studente è invitato a seguire questo discorso nella sua logica, anziché cercare di incasellare le nozioni nei propri "ricordi di scuola".

1° passo. Studiamo il grafico di $y = x^2$. E' una funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, non negativa, simmetrica pari (v. §1.3.1) e strettamente crescente per $x > 0$ (v. §1.3.4.); $f(0) = 0$. Cerchiamo di capire *come* cresce la funzione x^2 per $x > 0$. Per far questo, confrontiamo $y = x^2$ con le più semplici funzioni che conosciamo già: le rette $y = mx$. La disequazione

$$x^2 \geq mx, \text{ per } x > 0,$$

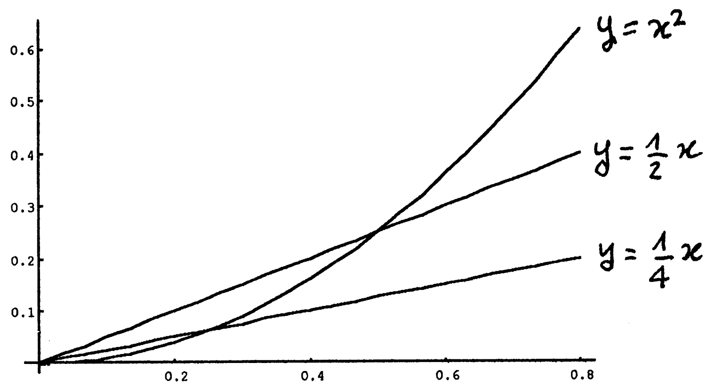
è soddisfatta per $x > m$. Questo significa che:

- fissata una retta $y = mx$, con m grande quanto si vuole, per x sufficientemente grande il grafico di x^2 sta sopra il grafico della retta. Ad esempio: $x^2 > 10x$ per $x > 10$, $x^2 > 100x$ per $x > 100$, ecc. Questo implica che la crescita di x^2 per valori grandi di x sia più rapida di qualsiasi crescita lineare. Per x grande il grafico sarà quindi del tipo:

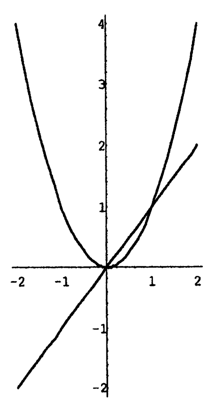


Ragioniamo ora per x vicino a zero. La disequazione scritta sopra dice che, per $x > 0$, $x^2 \leq mx$ purché $x < m$, ossia:

- fissata una retta $y = mx$, con m positivo ma piccolo quanto si vuole, per $x > 0$ ma sufficientemente vicino a 0, il grafico di x^2 sta sotto la retta mx (e sopra l'asse x). Ad esempio, $0 < x^2 < \frac{1}{10}x$ per $x < \frac{1}{10}$; $0 < x^2 < \frac{1}{100}x$ per $x < \frac{1}{100}$, ecc. Questo implica che la curva $y = x^2$ si avvicini all'origine con tangente orizzontale, cioè con crescita più lenta di qualsiasi crescita lineare:

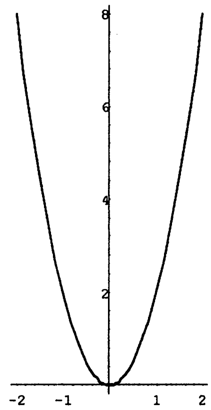


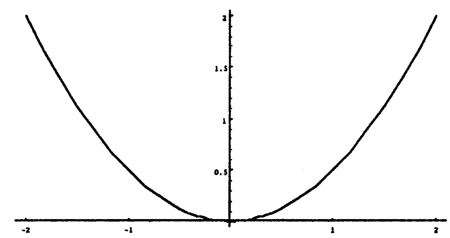
- La funzione x^2 taglia la bisettrice $y = x$ in $x = 1$, sta al disotto per $0 < x < 1$ e al disopra per $x > 1$. Mettendo insieme questi fatti si ottiene il grafico di x^2 per $x > 0$ e quindi, sfruttando la simmetria pari, per ogni x:



Come si vede, il grafico di $y = x^2$ è stato ottenuto abbastanza rigorosamente, senza dover "prendere per buono" il fatto che rappresenti una parabola (cosa che molti studenti sanno, ma pochi saprebbero giustificare!)

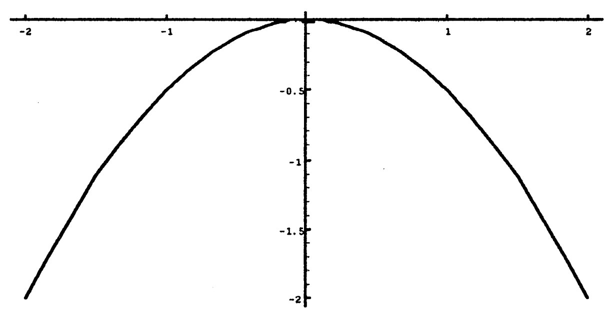
2° passo. Grafico di $y = ax^2$. Se $a > 0$, si ottiene dal grafico di $y = x^2$ con una dilatazione sull'asse y (v. §5.2) Quindi, ad esempio:





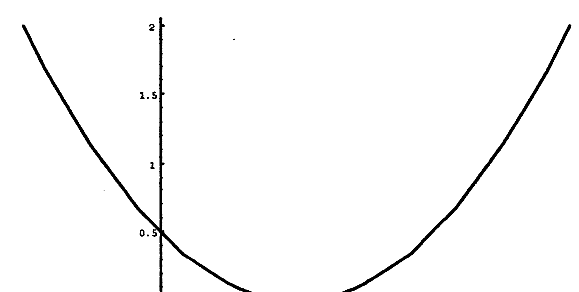
$y = 2x^2$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x^2$

Se poi $a < 0$, oltre a una dilatazione di coefficiente $|a|$ sull'asse y, ci sarà una riflessione rispetto all'asse x (v. §5.3). Ad esempio:



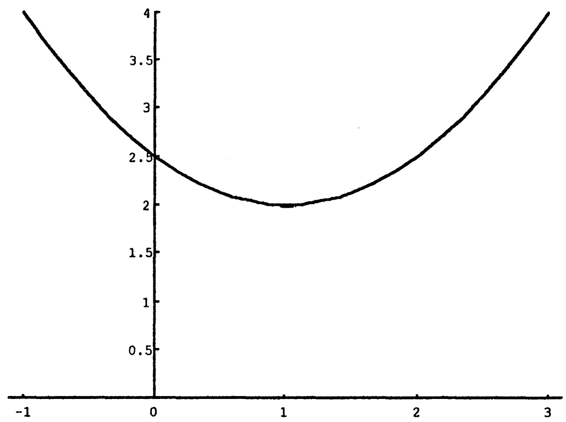
$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

3° passo. Grafico di $y = a(x - x_0)^2$. Si ottiene dal precedente mediante una traslazione sull'asse x (v. §5.1), che porta il "vertice della parabola" ad avere ascissa x_0. Ad esempio:



$$y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

4° passo. Grafico di $y = a(x - x_0)^2 + k$. Si ottiene dal precedente mediante una traslazione sull'asse y(v. §5.1), che porta il vertice ad avere ordinata k. Ad esempio:



$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2.$$

5° passo. Si tratta ora di rendersi conto che *l'ultimo caso scritto è il caso generale*, ossia che *ogni trinomio* $ax^2 + bx + c$ *si può riscrivere nella forma* $a(x - x_0)^2 + k$.

A tal fine, basta fare i seguenti passaggi algebrici:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) =$$

$$= a(x - x_0)^2 + k \qquad (1)$$

con $x_0 = -b/2a$; $k = c - b^2/4a$. Quindi:

Ogni funzione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola, con le seguenti caratteristiche:

- il vertice ha ascissa $x_0 = -b/2a$ (l'ordinata si trova sostituendo questo valore nella funzione);
- la parabola ha l'apertura rivolta verso l'alto (il basso) se $a > 0$ ($a < 0$);
- è tanto più "ripida" quanto maggiore è $|a|$.

Esercizi

Riscrivere le seguenti parabole nella forma $a(x - x_0)^2 + k$, determinarne il vertice e tracciarne il grafico qualitativo (non si richiede, per ora, di determinare le intersezioni con l'asse x).

43. $y = 2x^2 - x - 1$

44. $y = -x^2 + 2x + 1$

45. $y = x^2 + 4x + 1$

46. $y = x^2 + 4x + 4$

47. $y = x^2 + 4x + 5$

6.2.2. Equazione di secondo grado

L'ultimo calcolo algebrico fatto (v. (1)) è importante anche per il seguente motivo. Se vogliamo risolvere l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

possiamo riscriverla nella forma

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] = 0.$$

Semplificando per $a \neq 0$, si vede che questa è verificata per

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \tag{2}$$

Ne segue la ben nota casistica. Se il ***discriminante*** $\Delta = b^2 - 4ac$ è *positivo*, l'equazione ha due soluzioni distinte date da

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

cioè

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Formula risolutiva per l'equazione di secondo grado).

Se il *discriminante è nullo*, si ottiene una sola soluzione

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Questo significa che il trinomio di partenza è un quadrato perfetto:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Infine, se il *discriminante è negativo*, l'equazione non ha soluzioni reali, in quanto la (2) esprime l'uguaglianza tra un quadrato e una quantità negativa. In questo caso il trinomio può essere riscritto nella forma

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right]. \tag{3}$$

Nel caso $\Delta > 0$, è utile anche ricordare la cosiddetta *formula ridotta*, che si ottiene quando l'equazione è scritta nella forma

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

In questo caso, applicando la formula precedente con b sostituito da $2b$, ed eseguendo le semplificazioni si ottiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

6.2.3. Decomposizione del trinomio di secondo grado; disequazione di secondo grado

Poniamoci nel caso $\Delta \geq 0$. Allora si può verificare la seguente identità:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

(Lo studente è invitato a svolgere il calcolo e verificare l'identità). Questo significa che, dette x_1, x_2 le soluzioni (eventualmente coincidenti) dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, il trinomio può essere decomposto nella forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

D'altro canto è chiaro che se il trinomio ammette la decomposizione precedente x_1 e x_2 sono le sue radici (il prodotto si annulla se e solo se si annulla uno dei suoi fattori). Ne segue che un generico trinomio di secondo grado con discriminante non negativo si può rappresentare in questo modo. Questo fatto è fondamentale per studiare la ***disequazione***

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ (o } >, \leq, < \text{)}.$$

Infatti, riscritta la disequazione nella forma

$$a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0 \text{ (o } >, \leq, < \text{)}$$

basterà ora applicare la "regola dei segni" per studiare il segno del prodotto. Otteniamo così la ben nota casistica:

- Se $x_1 < x_2$ sono le soluzioni distinte dell'equazione corrispondente, e $a > 0$, il trinomio sarà positivo per $x > x_2$ o $x < x_1$, negativo per $x_1 < x < x_2$. Se $a < 0$ ovviamente i due casi si scambiano. (Perché?)
- Se $x_1 = x_2$ il trinomio ha la forma $a(x - x_1)^2$ e pertanto si annulla solo per $x = x_1$, e per il resto ha il segno di a.

Esempi

- Risolvere $x^2 + 5x + 6 > 0$. Si risolve l'equazione corrispondente:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

Poiché il coefficiente di x^2 è positivo, il trinomio è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici, ossia $x < -3$, $x > -2$.

- Risovere $x^2 + 5x - 6 \leq 0$. Il trinomio si può decomporre "a occhio":

$$x^2 + 5x - 6 = (x+3)(x-2) = 0 \text{ per } x = 2, x = -3.$$

Il coefficiente di x^2 è positivo, quindi il trinomio è ≤ 0 per $-3 \leq x \leq 2$.

- Risolvere $x^2 - 2 > 0$. Soluzioni dell'equzione: $\pm\sqrt{2}$. Soluzioni della disequazione: $x < -\sqrt{2}$; $x > \sqrt{2}$.
- Risolvere $2x^2 + x < 0$. Si scompone:

$$2x^2 + x = 2x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ per } x = 0,\ x = -\frac{1}{2}$$

perciò la disequazione è verificata per $-\frac{1}{2} < x < 0$.

- Risolvere $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$. Il discriminante è nullo, e la disequazione si riscrive nella forma:

$$-(x-1)^2 \geq 0,$$

ed è verificata solo per $x = 1$ (per cui vale il segno di $=$).

- Risolvere $x^2 + 3x + 4 > 0$. Il discriminante è negativo, l'equazione non ha soluzioni, il trinomio è sempre positivo (perché il coefficiente di x^2 è positivo), quindi la disequazione è sempre verificata.

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni

48. $x^2 + 5x + 5 = 0$ $\quad x^2 + \sqrt{5}x + 1 > 0$ $\quad 2x^2 + x + 6 \leq 0$

49. $3x^2 + 4x - 5 < 0$ $\quad x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$ $\quad -x^2 + 4x + 1 > 0$

50. $x^2 - x - 1 = 0$ $\quad x^2 + 10x - 7 \geq 0$ $\quad x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = 0$

Osservare i seguenti trinomi e, se possibile, decomporli "a occhio" nel prodotto $a(x - x_1)(x - x_2)$. Risolvere quindi le disequazioni corrispondenti:

51. $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ $\quad 2x^2 + x - 6 \geq 0$ $\quad x^2 + x - 6 > 0$

52. $x^2 + 4x - 5 < 0$ $\quad x^2 - \sqrt{2} \leq 0$ $\quad x^2 + 740x - 741 \geq 0$

53. $x^2 + 2x + 1 > 0$ $\quad x^2 + 4x + 3 < 0$ $\quad x^2 - x \leq 0$

54. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 \geq 0$ $\quad x^2 - x - 12 > 0$ $\quad x^2 + 4x < 0$

I seguenti trinomi hanno discriminante negativo. Riscriverli nella forma

$$a\left[(x+\beta)^2+\gamma^2\right].$$

(Questa operazione sarà utile nel *calcolo integrale*).

55. x^2+x+1 $\qquad 2x^2+\sqrt{3}x+1$ $\qquad 2x^2-2x+1$

56. $2x^2+4x+3$ $\qquad x^2-3x+3$ $\qquad x^2+2$

Risolvere le seguenti equazioni:

57. $$x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$$

58. $$\frac{x+1}{x+2}=\frac{x+1}{x+3}$$

59. $$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x+2}$$

60. $$x^2-ax+1=\frac{x}{a},\ \text{con } a\in\mathbb{R}$$

61. $$\frac{x+a}{x}+\frac{2x}{x-a}=0$$

Risolvere le seguenti disequazioni:

62. $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\geq 2$$

63. $$x^2+\lambda x+1<|\lambda x-1|$$

64. $$-\frac{1}{y-1}+\frac{2}{y-2}+\frac{3}{y-3}\leq 0$$

65. $$\frac{x-1}{2x-1}\leq\frac{2x+1}{x+1}$$

66. $$(y-1)^2+(y+1)^2>(y+2)^2$$

67. $$\frac{2x+3}{x-1}-(x+1)>0$$

68. $$\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{2x-1}{x+1}$$

69. $$\frac{x-1}{x^2+x} \geq \frac{1}{x}$$

70. $$ax^2 + (1-a)x + a > 0$$

71. $$\left(a^2-1\right)x^2 + ax + 1 \leq 0$$

72. $$1 + 3x^2 \geq -|x+1|$$

6.3. Potenze a esponente intero positivo

Ci occupiamo ora di un altra classe molto speciale di polinomi: le funzioni

$$y = x^n \quad n \geq 2$$

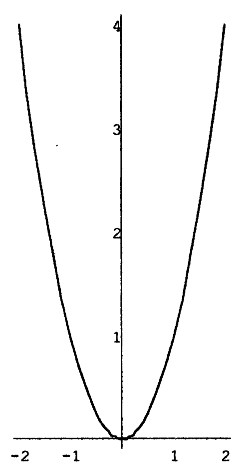
ovvero le funzioni *potenza a esponente intero positivo*. Sappiamo che:

$f(x) = x^n$ è una funzione simmetrica, pari se n è pari, dispari se n è dispari (v. §1.3.1). Perciò basta studiarla per $x \geq 0$.

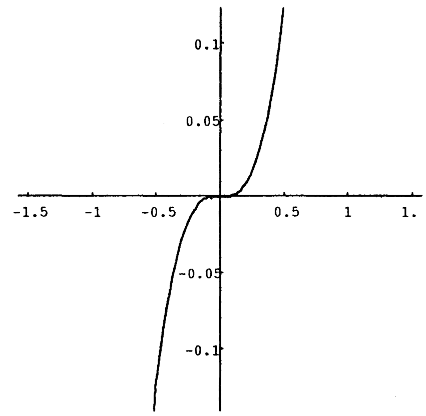
x^n è una funzione strettamente crescente per $x > 0$ (v. §1.3.4)

Il comportamento di x^n per $x > 0$ e prossimo all'origine o per x grande è qualitativamente simile a quello di x^2, in quanto gli stessi ragionamenti compiuti nel §6.2.1 possono qui essere ripetuti. Il grafico di x^n è quindi, per $x > 0$, simile a quello di x^2; per $x < 0$ si sfrutta la simmetria pari o dispari. Quindi:

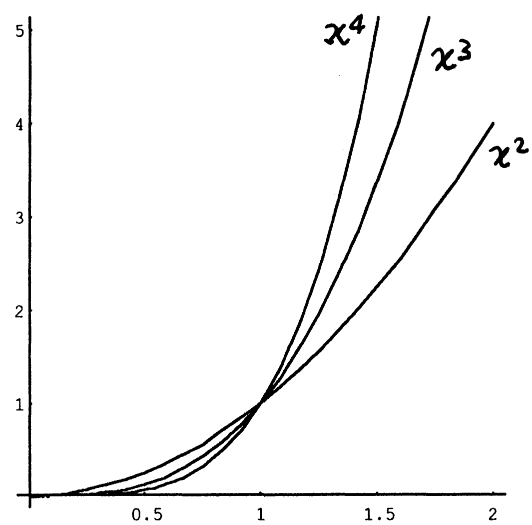
- il grafico qualitativo di $x^2, x^4, x^6 \ldots$ è:



- il grafico qualitativo di $x^3, x^5, x^7, \ldots$ è:



Volendo invece confrontare tra loro i grafici delle varie potenze, si può osservare che, fissato $x > 0$, al crescere di n il valore di x^n diventa sempre più grande, se $x > 1$, sempre più piccolo, se $0 < x < 1$. Ad esempio, per $x > 0$ il confronto tra x^2, x^3, x^4 è il seguente:



- ***Come si risolve l'equazione $x^n = k$ o la disequazione $x^n > k$***, con k numero reale assegnato?

Questo problema è legato alla nozione di *radice n-esima*, e si può trattare semplicemente una volta che sono noti i grafici qualitativi delle funzioni x^n. Invece di scrivere una casistica astratta, mostriamo alcuni esempi.

Esempi

- $x^4 > 2$.

Dal grafico di x^4 si vede che questa disuguaglianza è verificata per $x > a$, $x < -a$, dove a è quel numero positivo che elevato alla quarta dà 2. Tale numero si indica con $\sqrt[4]{2}$. Pertanto la disequazione è verificata per $x > \sqrt[4]{2}$, $x < -\sqrt[4]{2}$.

- $x^4 > -2$. Ovviamente, è sempre verificata.

- $x^3 > 5$. Dal grafico di x^3 si vede che quest'equazione è verificata per $x > b$, dove b è quel numero (positivo) che elevato al cubo dà 5, ossia $\sqrt[3]{5}$. Perciò le soluzioni sono $x > \sqrt[3]{5}$.

- $x^3 > -5$. Anche in questo caso le soluzioni sono del tipo $x > b$, dove ora b è quel numero (negativo) che elevato al cubo dà -5. Poiché x^3 è dispari, poi, tale numero è l'opposto di $\sqrt[3]{5}$, quindi le soluzioni sono $x > -\sqrt[3]{5}$.

Questi 4 casi contengono in sostanza l'intera casistica. Ovviamente, le disuguaglianze analoghe col segno di minore saranno verificate sull'insieme complementare, ad esempio:

- $x^4 < 2$ per $-\sqrt[4]{2} < x < \sqrt[4]{2}$;

- $x^4 < -2$ mai verificata, ecc.

Si noti la differenza fondamentale tra il caso in cui l'esponente è pari o dispari.

6.4. Radici di polinomi; fattorizzazione di polinomi; equazioni e disequazioni algebriche

Torniamo ora a occuparci di polinomi qualsiasi.

Si dice ***equazione algebrica di grado n*** un'equazione del tipo $p(x) = 0$, dove $p(x)$ è un polinomio di grado n. Analogamente, $p(x) \geq 0$ si dirà ***disequazione algebrica***.

Si dice ***radice di un polinomio*** $p(x)$ un numero reale α tale che $p(\alpha) = 0$. *Radice di un polinomio* $p(x)$ è quindi sinonimo di *soluzione dell'equazione algebrica* $p(x) = 0$. Ad esempio, $x = 1$ è una radice del polinomio

$$x^4 + x - 2,$$

come si verifica sostituendo il valore $x = 1$, mentre $x = 2$ non lo è.

Si dice che un polinomio di grado positivo è ***riducibile*** se si può scrivere come prodotto di due polinomi di grado inferiore; altrimenti si dice ***irriducibile***. Ad esempio,

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

perciò $x^2 - 1$ è riducibile. Invece, $x^2 + 1$ è irriducibile, come dimostreremo fra poco.

Teorema di Ruffini. *Un polinomio $p(x)$ di grado positivo è divisibile per $(x - \alpha)$ (α numero reale) se e solo se α è una radice del polinomio $p(x)$.*

Dimostrazione. Si applica il teorema sulla divisione di polinomi. Poiché $\mathrm{gr}(p) \geq 1$, possiamo eseguire la divisione $p(x) : (x - \alpha)$, e scrivere

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r$$

dove $q(x)$ è il quoziente e r il resto. O r è zero, o ha grado < 1 (1 è il grado di $(x - \alpha)$), cioè ha grado zero, cioè è una costante. Dunque: in ogni caso r è una costante (zero o non zero), perciò abbiamo scritto r anziché $r(x)$. Ora basta sostituire $x = \alpha$ nell'identità precedente, e troviamo

$$p(a) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r,$$

ossia

$$p(\alpha) = r.$$

Segue la tesi, perché α è radice del polinomio $p(x)$ se e solo se $p(\alpha) = 0$, se e solo se $r = 0$ (perché $p(\alpha) = r$), se e solo se $p(x)$ è divisibile per $(x - a)$ (perché r è il resto della divisione). □

Conseguenze del teorema di Ruffini (lo studente si renda conto del perché):

- Se un polinomio ha una radice, è riducibile; se è irriducibile, non ha radici.
- Un polinomio di grado n ha al più n radici.
- Un polinomio di grado 2 è irriducibile se e solo se non ha radici (ad esempio, $x^2 + 1$ è irriducibile).

Una conseguenza del *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, che lo studente incontrerà nel cap.15, in quanto coinvolge i numeri complessi, è invece la seguente:

Teorema di fattorizzazione dei polinomi a coefficienti reali. *Un polinomio a coefficienti reali si può sempre decomporre nel prodotto di polinomi di primo grado, e polinomi di secondo grado irriducibili.*

Conseguenze di questo Teorema (lo studente si renda conto del perché):

- Un polinomio di grado maggiore di 2 è sempre riducibile (anche se privo di radici reali).
- Un polinomio di grado dispari ha sempre almeno una radice reale.

Esempi

- Il polinomio $x^4 + 1$ non ha radici reali, evidentemente. Tuttavia, per l'ultimo teorema enunciato, deve essere riducibile, In effetti si può procedere così per decomporlo:

$$x^4 + 1 = \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - 2x^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 - 2x^2 =$$

$$= \left(x^2 + 1 - \sqrt{2}\,x\right)\left(x^2 + 1 + \sqrt{2}\,x\right).$$

I due polinomi di secondo grado scritti sono irriducibili (altrimenti avrebbero una radice, e quindi anche $x^4 + 1$ avrebbe una radice).

- Il polinomio $x^5 + 4x^4 + 78x^3 - 2x^2 + x + 101$ è di grado dispari, pertanto ha almeno una radice reale (a prescindere dal fatto che noi la sappiamo trovare!).

Abbiamo ora gli elementi per discutere tre problemi naturali che ci capiterà di dover affrontare, e che sono strettamente legati tra loro:

- risolvere un'equazione algebrica;
- risolvere una disequazione algebrica;
- decomporre un polinomio nel prodotto di fattori irriducibili;

Se si sa decomporre un polinomio in prodotto di fattori irriducibili (che, ricordiamo, possono essere solo di primo o di secondo grado, e nel secondo caso sono privi di radici) si sanno anche trovare le soluzioni dell'equazione, che sono individuate dai fattori di primo grado. Inoltre, il segno del polinomio può essere studiato a partire dai segni dei fattori (regola dei segni), e quindi in questo caso si sa risolvere anche la disequazione corrispondente.

Viceversa, la conoscenza delle soluzioni dell'equazione permette, per il Teorema di Ruffini, di trovare i fattori di primo grado della decomposizione, ma non necessariamente i fattori di secondo grado. Si rifletta ancora sull'esempio già fatto del polinomio x^4+1: una volta osservato che non ha radici, il problema della sua scomposizione rimane aperto: è *un altro* problema.

Segnaliamo anche che saper decomporre un polinomio in fattori irriducibili non serve *solo* a risolvere equazioni e disequazioni. Si vedrà ad esempio che nel calcolo integrale è utile saper decomporre una funzione razionale in somma di funzioni razionali *il più possibile semplici*; a tal fine il primo passo è proprio decomporre un polinomio in fattori irriducibili.

Venendo al primo dei problemi, la soluzione dell'equazione algebrica, diciamo subito che *non esistono metodi generali per la soluzione di un'equazione qualsiasi*. Le equazioni di grado 1 e 2 sono risolubili elementarmente, sappiamo come; per le equazioni di grado 3 e 4 esistono formule risolutive, di cui non parleremo ora perché coinvolgono anche il calcolo coi numeri complessi. Per equazioni di grado ≥ 5 non esistono formule analoghe a quelle per le equazioni di grado 2 (e anche 3 e 4) che assegnino le soluzioni per un'equazione qualunque, eseguendo operazioni razionali ed estrazioni di radici sui coefficienti dell'equazione. L'affermazione *non esistono formule* ha un significato molto forte, in questo caso: è stato dimostrato che tali formule *non ci possono essere*, e non solo *non sono note fino ad ora.* Questo naturalmente non esclude che si sappiano risolvere *particolari* equazioni anche di grado molto alto: non esiste però un *metodo generale*.

Notiamo anche che la mancanza di metodi per trovare le soluzioni esatte non toglie la possibilità di costruire algoritmi per la soluzione approssimata delle equazioni algebriche. Tali metodi, sfruttando opportunamente certi risultati di calcolo infinitesimale, permettono di calcolare, con successive iterazioni, valori approssimati delle soluzioni, con un errore controllato.

Torniamo ora al livello elementare e operativo. Solitamente, data un'equazione di grado abbastanza basso avente coefficienti abbastanza semplici, quel che si fa per determinare le soluzioni esatte, è osservare se si vede "ad occhio" una soluzione α: in tal caso la divisione per $(x-\alpha)$ abbassa di grado il polinomio, e si può proseguire cercando una soluzione dell'equazione di grado inferiore. Oppure si possono fare *raccoglimenti parziali* sul polinomio, che applicati successivamente decompongano direttamente il polinomio in un prodotto. Conviene anche tener presenti i seguenti:

prodotti notevoli:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n + b^n = \text{se } n \text{ è dispari! } (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Illustriamo questi metodi elementari con esempi.

Esempio. Risolvere la disequazione

$$x^4 + 2x^3 - x - 2 \geq 0.$$

Si può eseguire il raccoglimento parziale:

$$x^4 + 2x^3 - x - 2 = x^3(x+2) - (x+2) = (x+2)\left(x^3 - 1\right) =$$

$$= (x+2)(x-1)\left(x^2 + x + 1\right).$$

L'ultimo polinomio di secondo grado scritto è irriducibile, perciò la fattorizzazione è completa. Ora il segno del polinomio è il segno del prodotto dei 3 fattori; ma il terzo è sempre positivo, perciò la disequazione è equivalente alla disequazione di secondo grado

$$(x+2)(x-1) \geq 0$$

che ha soluzioni $x \leq -2$, $x \geq 1$.

Altro procedimento. Si può osservare "a occhio" che $x = 1$ è soluzione dell'equazione, perciò il polinomio è divisibile per $(x-1)$. Eseguendo la divisione si trova

$$x^4 + 2x^3 - x - 2 = (x-1)\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 2\right).$$

Si tratta ora di osservare il polinomio di terzo grado $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ cercando di "vederne" una radice. Sappiamo che certamente c'è una radice almeno, e sappiamo anche che è negativa (perché i coefficienti sono tutti positivi, quindi per $x > 0$ il polinomio non si annulla senz'altro). *Se* ci si accorge che $x = -2$ è soluzione, eseguendo un'altra divisione si decompone il polinomio. □

Da quanto visto nell'esempio precedente, risulta utile avere un criterio con cui scegliere le *candidate soluzioni* di un'equazione algebrica, ossia restringere la rosa dei numeri da provare a sostituire nel polinomio. Vale in proprosito il seguente criterio:

Proposizione. Ricerca delle radici razionali di un polinomio a coefficienti interi. *Sia*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$$

un polinomio a coefficienti interi, *sia* $x = \frac{m}{k}$ *una radice* razionale *di* $p(x)$ *(cioè* m, k *sono interi, primi tra loro). Allora* k *è un divisore di* a_n*, e* m *è un divisore di* a_0.

Esempio. Si consideri l'equazione:

$$3x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = 0.$$

Il polinomio ha coefficienti interi. Se ci sono radici razionali, devono essere del tipo $x = m/k$ con m divisore di 2 e k divisore di 3. Perciò:

$$m = \pm 1, \pm 2;\ k = 1, 3,$$

e

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}.$$

Abbiamo solo 8 numeri razionali che possono essere soluzioni dell'equazione. [12] Lo stesso ragionamento fatto nell'Esempio precedente mostra che ogni eventuale soluzione dell'equazione è *negativa*. Questo restringe la rosa dei numeri da provare a 4. Provando a sostituirli, si vede che $x = -1/3$ è soluzione. Per Ruffini, il polinomio è divisibile per $(x + 1/3)$, quindi anche per $(3x + 1)$. Eseguendo questa divisione si trova:

$$3x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = (3x + 1)(x^2 + 2x + 2).$$

Il trinomio di secondo grado ha discrimenante negativo, perciò $x = -1/3$ è l'unica soluzione dell'equazione.

Un caso particolare dell'ultima Proposizione enunciata è la seguente. Supponiamo che il polinomio, oltre ad avere coefficienti interi, abbia il coefficiente $a_n = 1$ (un tale polinomio si dice *monico*). Allora le uniche possibili radici razionali avranno denominatore uguale a ± 1, cioè saranno interi. Quindi:

Proposizione. *Un polinomio monico ha radici intere o irrazionali (ma non può avere radici razionali che non siano intere).*

A sua volta, un caso particolare di questo fatto è il seguente. Consideriamo l'equazione

$$x^n = k$$

con k intero. Poiché $(x^n - k)$ è un polinomio monico, le sue radici sono intere o irrazionali.

- *Perciò la radice* n*-esima di un intero* k*, o è un intero o è un numero irrazionale.*

[12] Altre eventuali soluzioni *possono esistere*, ma in questo caso saranno *irrazionali*, il che non ci consola certo: il senso della Proposizione è di darci un modo semplice di individuare le soluzioni che sono semplici da trovare, nella speranza che non ce ne siano altre.

Questo dimostra ad esempio l'irrazionalità dei numeri

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \ldots$$

Esercizi

Risolvere le seguenti disequazioni, dopo aver decomposto il polinomio in prodotto di fattori irriducibili.

73. $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 \leq 0$

74. $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

75. $x^3 - 2x^2 + x + 4 < 0$

76. $2x^3 + 7x^2 - 2x - 7 \geq 0$

Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili. (*Suggerimento: usare opportunamente i prodotti notevoli*).

77. $x^4 - 1$

78. $x^6 - 1$

79. $x^6 + 1$

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni.

80. $(x + a)^4 = b^4$

81. $x^3 > a^3$

82. $x^3(x - 1)^4 \geq 0$

83. $x^3(x - 1)^4 > 0$

84. $x^3(x + 1)^4 \geq 0$

85. $x^4 > a^4$

86. $\frac{2x^3+x}{x^2+2} > x^2$

87. $x^5 + 1 > \frac{1}{x^5+1}$

7. Un po' di terminologia sulle funzioni

7.1. Funzioni tra insiemi qualsiasi

Finora abbiamo parlato di funzioni in modo abbastanza intuitivo. Per il seguito del discorso, però, sarà utile fisssare una terminologia precisa riguardante le funzioni. Perciò ora introduciamo alcune definizioni un po' più formali. Gli esempi di funzioni già incontrati dovrebbero aiutare a chiarire questi concetti.

Definizione. Siano A e B due insiemi qualsiasi. Una ***funzione** f **definita su** A **a valori in** B* è una legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B. Si scrive in tal caso $\boldsymbol{f : A \longrightarrow B}$ (che si legge "f da A a B"). Gli insiemi A, B si dicono, rispettivamente, ***dominio*** e ***codominio*** della funzione, e si indicano coi simboli $\mathbf{Dom}(\boldsymbol{f})$, $\mathbf{Cod}(\boldsymbol{f})$. Se $a \in A, b \in B$ e $b = f(a)$ si dice anche che ***b è immagine di a mediante f***, o che ***b è il valore assunto da f in a***, e si scrive $\boldsymbol{f : a \longmapsto b}$ (che si legge "f manda a in b"). Si noti la differenza nell'uso dei simboli $\longrightarrow$ e $\longmapsto$.

Notiamo che, mentre una funzione $f(x)$ è definita per ogni valore di $x \in A$, non necessariamente i valori che essa assume esauriscono tutto l'insieme B. In generale, l'insieme dei valori assunti da f sarà un sottoinsieme di B:

Definizione. L'insieme degli elementi di B che sono immagine di qualche elemento di A mediante f, è un sottoinsieme di B detto ***immagine di f***. Si indica con $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$ o con $\boldsymbol{f(A)}$.

Si noti che, fissata una funzione f definita sul dominio A, l'immagine di f è univocamente determinata, mentre il codominio di f può essere definito altrettanto lecitamente come qualunque insieme contenente $\text{Im}(f)$.

Ad esempio, $f(x) = x^2$ ha per dominio naturale $\mathbb{R}$. Possiamo indicare con $\mathbb{R}$ anche il codominio di f; in realtà però $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$: si può scegliere perciò come codominio $[0, +\infty)$, o qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contenga questo insieme. In ogni caso *il grafico di f non cambia*.

Osservazione sulla natura degli insiemi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$. In tutti gli esempi di funzione che abbiamo incontrato finora, gli insiemi A e B coincidevano con $\mathbb{R}$ (o eventualmente, A era un sottoinsieme di $\mathbb{R}$). Tuttavia, è importante capire che la definizione di funzione è realmente molto più generale. La temperatura in una stanza può essere vista come una funzione del tempo e del punto; essendo un punto dello spazio tridimensionale individuabile da 3 coordinate cartesiane, la temperatura dipende complessivamente da 4 variabili: è funzione di 4 variabili. Il dominio di f in questo caso non è un insieme di numeri, ma un insieme di quaterne ordinate di numeri, (x, y, z, t) ($t =$ tempo, $(x, y, z) =$ coordinate spaziali). Un esempio diverso è: la funzione che ad ogni uomo associa il proprio padre è una funzione, di dominio l'insieme A di tutti gli uomini (viventi o vissuti), e codominio l'insieme B di tutti i padri, viventi o vissuti.

La richiesta fondamentale per poter parlare di funzione è quella di *corrispondenza univoca* tra elementi di A ed elementi di B: il valore di $a \in A$ deve *determinare univocamente* il valore di $b = f(a) \in B$.

Nel calcolo infinitesimale in una variabile si considerano funzioni f il cui dominio e codominio è contenuto in $\mathbb{R}$, e noi nel seguito ci occuperemo soprattutto di questa situazione, ovvero delle cosiddette ***funzioni reali di variabile reale***. Tuttavia il concetto di funzione è veramente una *parola chiave* in matematica, ed è bene coglierne l'estrema generalità. Quando si vuole sottolineare il fatto che f ha per dominio e codominio due insiemi "qualunque" (non necessariamente numerici) si usa anche, come sinonimo di funzione, il termine ***applicazione insiemistica***.

Osservazione sulla natura della legge *f*. Limitiamoci pure per semplicità a considerare funzioni reali di variabili reale, e chiediamoci ora quale possa essere la natura della legge f. Negli esempi visti fin qui, la legge f era di natura algebrica (lineare, polinomiale, razionale, eventualmente con l'uso di valori assoluti). Nelle prossime sezioni introdurremo alcune altre funzioni elementari di natura non algebrica: funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche. Queste funzioni si diranno funzioni *trascendenti elementari* [13]. E' importante comunque rendersi conto che, a prescindere dalla limitata varietà di esempi che lo studente conosce a questo punto del suo studio, la definizione di funzione non pone alcun limite al tipo di procedimento matematico con cui il valore della variabile x determina quello della variabile $y = f(x)$. Oltre che con una espressione analitica semplice, si possono definire funzioni:

- con i procedimenti del calcolo infinitesimale: funzioni definite mediante serie, funzioni definite mediante integrali, che lo studente incontrerà ben più avanti nel suo studio. Tanto per scrivere qualche formula a titolo d'esempio,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}; \; f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

La complessità di queste definizioni sta nel fatto che esse coinvolgono *procedimenti infiniti*, come si spiegherà a suo tempo.

- incollando tra loro definizioni diverse, valide su intervalli diversi, come nell'esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x > 0 \\ -x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

("funzioni definite a tratti").

- con qualsiasi altro tipo di definizione, ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

Quest'ultimo è il famoso esempio di "funzione di Dirichlet", coniato da Dirichlet esattamente per dimostrare la generalità del concetto di funzione che lui stesso aveva introdotto, nel 1829 (la definizione che abbiamo riportato). La "stravaganza" di questa funzione sta nel fatto che invano si cercherebbe di disegnarne il grafico (lo studente rifletta sul perché...). Si osservi che quest'esempio non rientra nella classe delle

[13] I termini *algebrico* e *trascendente* saranno spiegati nel Cap. 11.

"funzioni definite a tratti", perché l'insieme dei razionali e l'insieme degli irrazionali non sono *intervalli*.

Talvolta ci interessa considerare una funzione definita su un dominio un po' più ristretto del dominio naturale su cui essa è definita. Ad esempio: il dominio naturale su cui è definita $f(x) = x^2$ è $\mathbb{R}$; se però ci interessa, per qualche motivo, considerare solo funzioni crescenti, potremo considerare $f(x)$ definita soltanto per $x \geq 0$. Si dice che stiamo considerando la *restrizione* di f al dominio $[0, +\infty)$. In generale:

Definizione. Se $f : A \to B$ è una funzione e $A' \subset A$, si dice ***restrizione di f ad A'***, e si indica con $f/_{A'}$, la funzione che ha dominio A', codominio B, ed agisce sugli elementi di A' esattamente come f. (Sta cambiando solo il dominio su cui la si considera).

Il grafico di $f/_{A'}$ non coincide col grafico di f, ma con *quella porzione* del grafico di f corrispondente al dominio ristretto A'.

Esempio.
Grafico di $f(x) = x^2$ definita su $\mathbb{R}$:

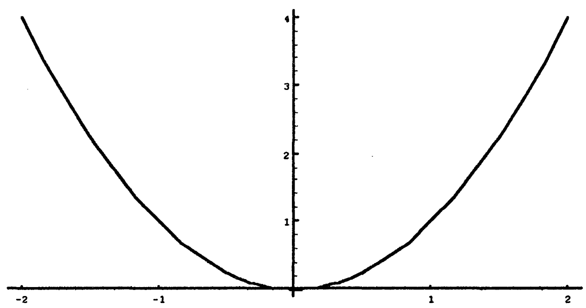
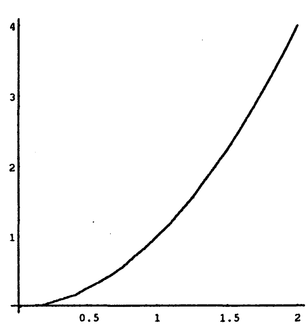


Grafico della restrizione a $[0, +\infty)$ di $f(x) = x^2$:



Veniamo ora al concetto fondamentale di *composizione di funzioni*.

Definizione. Siano $f : A \to B$, $g : C \to D$ due funzioni, e si abbia $\mathrm{Im}(f) \subset C$. Allora per ogni $a \in A$ ha senso considerare l'elemento $f(a) \in \mathrm{Im}(f)$; poiché $\mathrm{Im}(f) \subset C$, $f(a) \in C$, ed ha senso ora considerare $g(f(a)) \in D$. La funzione così ottenuta, di dominio A e codominio D, che associa ad $a \in A$ l'elemento $g(f(a)) \in D$ si dice ***composizione di g con f***, e si indica con $\boldsymbol{g \circ f}$ (che si legge ***g composta f***):

$$g \circ f : A \to D$$

$$g \circ f : a \mapsto g(f(a)).$$

Esempio. Se $f(x)=|x|$ e $g(x)=x^3+2x+1$, entrambe le funzioni hanno dominio e codominio $\mathbb{R}$, e si possono comporre perciò in entrambi i sensi. Si ha:

$$(f\circ g)(x)=\left|x^3+2x+1\right|;$$

$$(g\circ f)(x)=|x|^3+2|x|+1.$$

Si noti che *non sono* la stessa cosa.

E' importante che lo studente impari sia a *comporre* tra loro funzioni assegnate (come nell'esempio precedente), sia ad *analizzare* una funzione complessa, vedendola come composizione di funzioni più semplici (come nel prossimo esempio). Le funzioni che capiterà di incontrare possono essere ottenute, infatti, attraverso molte composizioni successive.

Esempio. La funzione

$$\frac{1}{(|x|+1)^3}$$

si può vedere ottenuta dalle seguenti composizioni successive:

$$f:x\mapsto |x| \quad \text{funzione modulo}$$

$$g:t\mapsto t+1 \quad \text{funzione lineare affine}$$

$$h:u\mapsto u^3 \quad \text{funzione potenza}$$

$$m:v\mapsto \frac{1}{v} \quad \text{funzione reciproco.}$$

Difatti:

$$\frac{1}{(|x|+1)^3}=m(h(g(f(x)))).$$

Si tratta, in sostanza, di saper analizzare un algoritmo come "sequenza di istruzioni elementari", procedendo in un certo senso a ritroso: infatti la prima funzione che agisce su x (in questo caso f) è la più interna negli "annidamenti successivi" $m(h(g(f(x))))$, ed è quindi l'ultima che si incontra leggendo la composizione dall'esterno. Si vedrà, ad esempio, studiando il calcolo differenziale, che per saper calcolare la derivata di una funzione un po' complessa è necessario "pensarla" a questo modo, come ottenuta per composizioni successive. Come altro esempio dell'utilità di questa operazione, si pensi che per saper scrivere un semplice algoritmo implementabile su un computer è utile questo stesso tipo di analisi logica.

Altra nozione chiave è quella di *funzione inversa*.

Definizione. Sia $f:A\to B$ una funzione. Se accade che ogni elemento $b\in \mathrm{Im}(f)$ proviene da un solo elemento $a\in A$, ossia, detto altrimenti, se accade che elementi diversi di A hanno necessariamente immagini diverse, allora la funzione f si dice

invertibile (o ***iniettiva***). In questo caso risulta ben definita una nuova funzione $g : \mathrm{Im}(f) \to A$, che ad ogni elemento $b \in f(A)$ associa l'unico elemento $a \in A$ per cui si abbia $b = f(a)$. Questo elemento a viene indicato con $f^{-1}(b)$, e la funzione g si dice allora ***funzione inversa*** di f, e si indica con $\boldsymbol{f^{-1}}$. Si dice anche che $f^{-1}(b)$ è la ***controimmagine di b mediante f***. In simboli:

$$f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to A$$

$$f^{-1} : b \mapsto a \text{ tale che } f(a) = b.$$

Valgono anche le relazioni:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b \text{ per ogni } b \in \mathrm{Im}(f);$$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a \text{ per ogni } a \in A.$$

Esempi

- La funzione $f(x) = x^3$ è invertibile su $\mathbb{R}$. Infatti ogni elemento dell'immagine proviene da un solo valore x: graficamente, ciò significa che ogni retta orizzontale taglia il grafico di x^3 in un sol punto. La funzione inversa, definita su $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, è $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Si noti che:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

- La funzione $f(x) = x^2$ non è invertibile. Infatti, ogni retta orizzontale $y = \text{cost.} > 0$ taglia il grafico in due punti. Non esiste perciò la funzione inversa di x^2.

- Consideriamo però la restrizione di x^2 a $[0, +\infty)$, cioè la nuova funzione definita solo su $[0, +\infty)$, che vale x^2. Questa funzione è ora invertibile. La sua inversa è $g(x) = \sqrt{x}$. Si noti che $\sqrt{x}$ non è dunque l'inversa di x^2, ma è l'inversa della restrizione di x^2 a $[0, +\infty)$. Di conseguenza valgono le relazioni:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{per ogni } x > 0$$

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{per ogni } x > 0 \text{ (ma non per } x < 0\text{)}.$$

Teorema. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, e sia f strettamente monotòna. Allora f è invertibile.*

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio che f sia strettamente crescente (discorso analogo vale se f è decrescente). Siano $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, e proviamo che allora $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Poiché $x_1 \neq x_2$, deve verificarsi una delle due disuguaglianze: $x_1 < x_2$ o $x_2 < x_1$. Poiché f è strettamente crescente,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

$$x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

In entrambi i casi, $f(x_1) \neq f(x_2)$, quindi f è invertibile. □

Non è detto che una funzione *non* strettamente monotona non sia invertibile:

Esempio. La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{per } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

è invertibile, sull'intervallo $[-1,1]$ su cui è definita, come si verifica intersecando il grafico con rette orizzontali; d'altro canto non è monotona su tutto l'intervallo $[-1,1]$. Per esercizio lo studente tracci il grafico di questa funzione e verifichi le affermazioni fatte.

7.2. Successioni

Definizione. Si dice ***successione*** (a valori reali) una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Il valore $s(n)$ si indica anche con s_n, e si dice ***termine n-esimo***, o ***di posto n***, della successione. L'intera successione si indica col simbolo $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ o con

$$s_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Più in generale, una successione può essere definita per $n \geq n_0$.

Esempi

Sono esempi di successioni:

a. $$s_n = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

b. $$s_n = n!,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

c. $$s_n = (-1)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Abbiamo trovato espressioni simili nel §1.3, ma allora consideravamo solo un numero finito di termini, cioè $n = 1, 2, 3, \ldots, N$. Si noti l'importanza di scrivere, dopo i puntini di sospensione, l'indice dell'ultimo termine, per indicare che si sta considerando un numero finito di termini, e non una successione.

Si noti che una successione può assumere un numero finito (come nell'esempio *c*) o infinito (come negli esempi *a, b*) di valori.

Una succesisone si dice ***limitata*** se l'insieme dei valori assunti è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ (come negli esempi *a,c*), ***illimitata*** altrimenti (esempio *b*). Si dirà ***monotona, crescente o decrescente, strettamente o no***, se, come funzione reale di variabile reale ha queste proprietà. Ad esempio, successione strettamente crescente significa che:

$$n < m \Rightarrow a_n < a_m.$$

Trattandosi di una successione, la stessa cosa si può esprimere anche così (perché?):

$$\text{per ogni } n,\ a_n < a_{n+1}.$$

Il tipico problema che ci si pone, per una successione, è studiare il suo comportamento al crescere di n. Questo sarà il problema, trattato nel calcolo infinitesimale, dello *studio della convergenza della successione*. Un altro problema sarà quello di generalizzare il concetto di *sommatoria* al caso delle successioni, ossia: definire in modo ragionevole la *somma di infiniti termini*. Questo sarà un altro argomento del calcolo infinitesimale, lo studio delle *serie*.

8. Potenze

Vogliamo ora estendere "il più possibile" la nozione di elevamento a potenza, a^b. Per ora abbiamo incontrato solo le potenze a esponente intero positivo:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ fattori}} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Definiremo ora, successivamente, le *potenze a esponente intero* (anche negativo), *razionale*, *reale*.

Una delle idee guida in queste estensioni successive è costituita dalle *proprietà formali delle potenze*:

(1)	$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ per $n, m = 1, 2, 3, \ldots$
(2)	$\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ per $n > m$ e $n, m = 1, 2, 3, \ldots$
(3)	$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ per $n, m = 1, 2, 3, \ldots$

8.1. Potenze a esponente intero

Le proprietà appena scritte si dimostrano nell'aritmetica elementare, *sotto le ipotesi che abbiamo scritto*. Ad esempio, fino a questo momento un passaggio come

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$$

non sarebbe lecito, per due motivi:

- il simbolo x^{-2} non è (ancora) stato definito;
- la proprietà (2) non è applicabile perchè $3 < 5$.

Si può però decidere di *definire* le potenze a esponente intero qualsiasi, in modo che la (2) continui ad essere vera. Porremo quindi ***per definizione***

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} \text{ per } m = 1, 2, 3, \ldots \text{ e } x \neq 0$$

e otteniamo che la (2) risulta ora valida anche per $n < m$. Se poi poniamo anche, per definizione,

$$x^0 = 1 \quad \text{per } x \neq 0,$$

le (1), (2), (3) risultano ora valide per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$. (Anzi, la (1) e la (2) dicono ora la stessa cosa, per cui possiamo mantenere solo (1) e (3)).

Abbiamo così definito x^m per ogni $m \in \mathbb{Z}, x \neq 0$; 0^m è definito solo per $m = 1, 2, 3, \ldots$, e vale 0. La definizione è stata data in modo che valgano le proprietà formali (1)-(3).

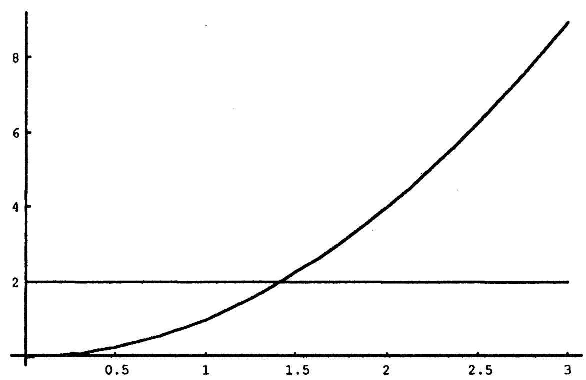
8.2. Radice n-esima

Per estendere ora la definizione di x^α al caso $\alpha = n/m$, cioè α razionale, richiamiamo prima alcuni fatti riguardanti la radice n-esima, in parte già discussi nel § 6.3.

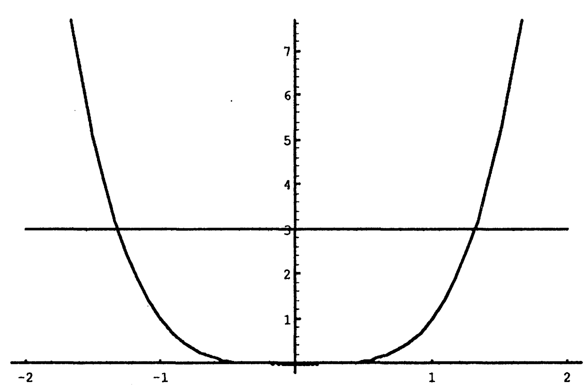
Definizione. Si dice radice n-esima di un numero reale positivo x, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, l'unico numero positivo y che elevato alla n dà x. In simboli:

$$\text{Per } x > 0,\ y = \sqrt[n]{x} \text{ se: } 1)\ y > 0;\ 2)\ y^n = x.$$

Per comprendere la definizione, si tracci il grafico di x^n per $x > 0$ e si fissi una retta orizzontale $y = k$: la radice n-esima di k è l'ascissa del punto in cui la retta interseca il grafico della curva. Che questo punto sia *unico* segue dal fatto che x^n è strettamente crescente per $x > 0$ (v. figura sotto); che questo punto *esista* è un fatto intuitivo, graficamente, ma la cui dimostrazione è assai delicata. Questo problema si riprenderà nel §10.3.



La precisazione "l'unico numero *positivo*" si rende necessaria perché, se $x > 0$ e n è pari, ci sono *due* numeri che elevati a n danno x: quello positivo si chiama $\sqrt[n]{x}$, l'altro è $-\sqrt[n]{x}$. Perciò, ad esempio, $x^4 = 3$ per $x = \pm\sqrt[4]{3}$, ma il simbolo $\sqrt[4]{3}$ indica un solo numero, positivo (v. figura qui sotto).



Definizione. Se $x < 0$ e n è dispari, si dice radice n-esima di x, l'unico numero y che elevato alla n dà x. Questo numero risulta essere negativo, ed è uguale a $-\sqrt[n]{|x|}$.

Ad esempio, $\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8}$.

Consideriamo ora la ***funzione radice n-esima***, $y = \sqrt[n]{x}$. Le sue proprietà principali sono:

- Per n pari è definita solo per $x \geq 0$; per n dispari è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è una funzione dispari.
- Per n pari è la funzione inversa della restrizione di $y = x^n$ all'intervallo $[0, +\infty)$; per n dispari è semplicemente la funzione inversa di x^n. Questo significa che:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x, \quad \sqrt[n]{x^n} = x$$

per ogni $x > 0$, se n pari, per ogni $x \in \mathbb{R}$, se n dispari.

- Il grafico si può ottenere per simmetria rispetto alla retta $y = x$ a partire dal grafico di x^n (se n dispari) o della restrizione di x^n a $[0, +\infty)$ (se n è pari).
- E' strettamente crescente.
- Per x vicino a zero la funzione ha crescita più rapida di qualsiasi funzione lineare ("retta tangente verticale"), mentre per x grande, la funzione ha crescita più lenta di qualsiasi funzione lineare ("concavità verso il basso").

Lo studente rifletta sulle definizioni date, per convincersi di tutte le affermazioni precedenti e dei prossimi grafici.

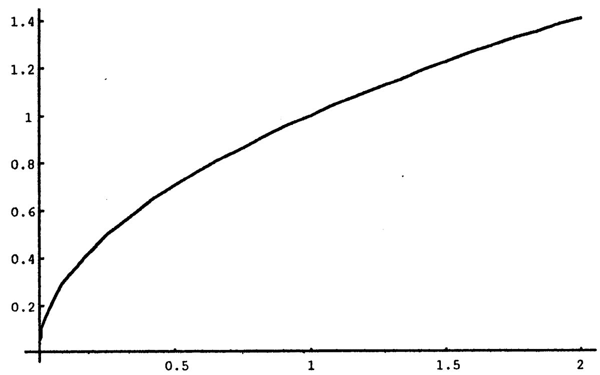


Grafico qualitativo di $y = \sqrt[n]{x}$, per n pari.

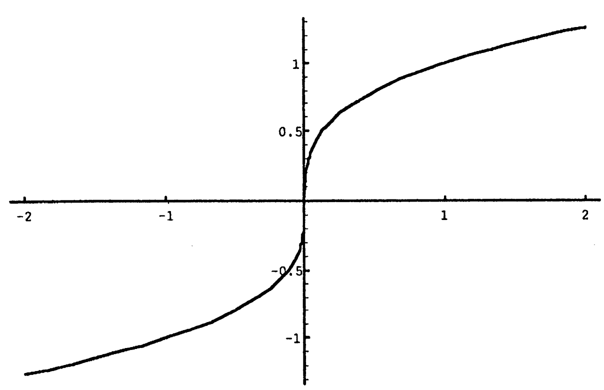


Grafico qualitativo di $y = \sqrt[n]{x}$, per n dispari.

8.3. Potenze a esponente razionale

L'utilizzo della radice n-esima ci permette di estendere l'operazione di elevamento a potenza al caso in cui l'esponente sia razionale. Se vogliamo che valgano le proprietà formali delle potenze, e in particolare $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, è naturale ***definire***:

$$x^{1/m} = \sqrt[m]{x}.$$

Infatti in tal caso risulta

$$\left(x^{1/m}\right)^m = \left(\sqrt[m]{x}\right)^m = x$$

e d'altro canto, formalmente,

$$\left(x^{1/m}\right)^m = x^{m/m} = x.$$

Poniamo dunque, ***per definizione***,

$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} \text{ per } n \in \mathbb{Z}, m = 2, 3, 4, \ldots$$

e per quegli x per cui questo ha senso.

Le "operazioni proibite" sono: elevare 0 a potenza negativa; estrarre radice di indice pari di un numero negativo; perciò bisogna escludere i casi: $x = 0$ e $n < 0$; $x < 0, n$ dispari e m pari.

Si verifica che con queste definizioni continuano a valere le ***proprietà formali delle potenze***, anche quando gli esponenti sono razionali:

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

per $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, e quegli x per cui le espressioni scritte hanno senso.

Dalla seconda proprietà segue, in particolare, che *le funzioni $x^{n/m}$ e $x^{m/n}$ sono l'una l'inversa dell'altra*, almeno per $x > 0$ (per $x < 0$ le funzioni potrebbero avere domìni diversi). Questo ci consentirà di ricavare i grafici di alcune di queste funzioni dal grafico di altre.

Osservazione. Calcolo di potenze mediante una calcolatrice. Le calcolatrici tascabili hanno solitamente una funzione x^y con cui si può elevare un numero *positivo* qualsiasi a un esponente qualsiasi. Volendo calcolare $\sqrt[3]{6}$, ad esempio, si calcolerà 6 elevato a $(1/3)$. La calcolatrice non "riconosce" però il numero $1/3$ come il reciproco di un numero dispari, ma lo tratta come un qualsiasi numero decimale: 0.333333333. Di conseguenza non "riesce" a calcolare la radice terza di un numero negativo: alla richiesta di calcolare (-6) elevato a $(1/3)$ risponde "ERRORE". Questo è dovuto al fatto che sta cercando di calcolare $(-6)^{333\,333\,333/1\,000\,000\,000}$, quindi in realtà sta estraendo una radice di indice pari di un numero negativo. Per sapere quanto fa $\sqrt[3]{-6}$ bisogna quindi calcolare $\sqrt[3]{6}$ e poi mettere un segno $-$ davanti al risultato. Il fatto che $(-6)^{1/3}$ esista e $(-6)^{333333333/1000000000}$ non esista non deve stupire: il numero $1/3$ non è *esattamente* uguale a $333\,333\,333/1\,000\,000\,000$; in matematica una piccolissima differenza può avere un profondo significato...

Osservazione. Semplificazioni dell'esponente. Dalle proprietà formali delle potenze segue in particolare che se l'esponente è una frazione n/m che *non è* già ridotta ai minimi termini, si può semplificare. Ad esempio:

$$x^{\frac{6}{15}} = x^{\frac{2}{5}}.$$

C'è una precisazione da fare, però, nel caso in cui si semplifica per un numero *pari*. Cosa significa, ad esempio,

$$x^{\frac{2}{4}}?$$

Per la definizione che abbiamo dato, è uguale a $\sqrt[4]{x^2}$. Si noti che questa espressione ha senso anche per $x < 0$ (x^2 è comunque positivo, ed esiste perciò $\sqrt[4]{x^2}$). Invece, la versione "semplificata" $x^{\frac{1}{2}}$ non esiste per $x < 0$, perciò le due espressioni *non sono uguali*. L'uguaglianza esatta è invece:

$$x^{\frac{2}{4}} = |x|^{\frac{1}{2}},$$

e più in generale:

$$x^{\frac{2n}{2m}} = |x|^{\frac{n}{m}}.$$

In particolare si osservi che:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

A questo punto potrebbe non essere inutile per lo studente verificare di avere *effettiva* dimestichezza con l'utilizzo di queste proprietà formali. Si perdoni perciò il carattere elementare dei prossimi esercizi...

Esercizi

Dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false

88. $\sqrt[3]{27} = 3\sqrt{3}$ $\quad$ $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ $\quad$ $\sqrt[3]{-6} = \sqrt[3]{6}$

89. $\sqrt{-6} = -\sqrt{6}$ $\quad$ $\sqrt{9} = \pm 3$ $\quad$ $\sqrt{-9} = -3$

90. $\sqrt{1+x^2} = 1 + x$ $\quad$ $\sqrt{x^2} = x$ $\quad$ $\sqrt{x^2} = \pm x$

91. $\sqrt{x^2} = |x|$ $\quad$ $\sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{11}$ $\quad$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{30}$

92. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2}$ $\quad$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^8}$ $\quad$ $\sqrt{3}/\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3}$

93. $2^{-2/3} = 1/\sqrt[3]{4}$ $\quad$ $3^{3/2} = \sqrt{9}$ $\quad$ $(-2)^{3/5} = 1/\sqrt[5]{8}$

94. $(-3)^{1/3} = -\sqrt[3]{3}$ $\quad$ $\left(3^{1/3}\right)^{3/2} = \sqrt{3}$ $\quad$ $3^{1/3} \cdot 3^{1/4} = 3^{7/12}$

Calcolare le seguenti espressioni (ossia riscriverle in forma semplificata, esprimendo il risultato mediante radici e potenze a esponente intero. Ad esempio: $x^{-3/4} \cdot x^{1/2} = 1/\sqrt[4]{x}$)

95. $\sqrt[3]{64/27}$ $\quad a\left(a^{1/3}\right)^{-2/3}$ $\quad \left[\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right]^{-1/2}$

96. $8^{-1/3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/8}$ $\quad \sqrt[4]{a^3b^5}/\sqrt{ab^2}$ $\quad a\sqrt{a^3\sqrt[4]{a}}$

Dire quali delle seguenti operazioni hanno senso

97. $(-2)^{3/4}$ $\quad (-2)^{4/3}$ $\quad 0^{3/4}$

98. $0^{-1/2}$ $\quad (-3)^{4/2}$ $\quad \sqrt{|-x|}$

99. 0^0 $\quad 0^1$ $\quad 1^0$

100. $(-5)^{-1/3}$ $\quad \left|\sqrt{-2}\right|$ $\quad (-2)^0$

8.4. Grafici delle potenze a esponente razionale

Consideriamo ora le potenze a esponente razionale come *funzioni*, e ci chiediamo che proprietà abbiano e quale sia il loro grafico.

Cominciamo a considerare il caso in cui l'***esponente è positivo***:

$$f(x) = x^{n/m} \text{ con } n, m \text{ interi positivi.}$$

Supponiamo inoltre che la frazione n/m sia già ridotta ai minimi termini. Allora, per quanto visto nel paragrafo precedente possiamo affermare[14]:

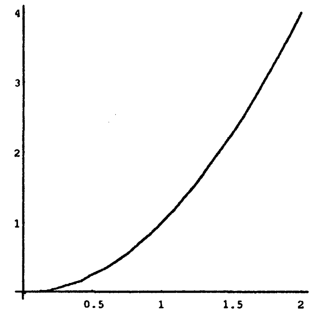
- La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, se m è dispari; solo per $x \geq 0$ se m è pari.
- Se m è dispari, la funzione è simmetrica: pari se n è pari, dispari se n è dispari. (Se m è pari non ha senso chiedersi se la funzione è simmetrica perché non è definita per $x < 0$).

Perciò in ogni caso è sufficiente studiare il grafico per $x \geq 0$.

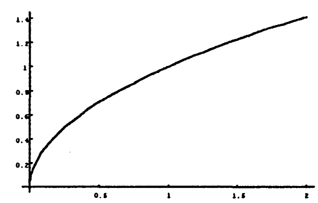
- Per $x \geq 0$ la funzione è strettamente crescente. (Infatti la funzione $x^{1/m}$ e crescente, e la funzione x^n è crescente).
- L'andamento della funzione per x grande e per x vicino a 0 dipende dal fatto che l'esponente n/m sia maggiore o minore di 1. Se è maggiore di 1, si può ripetere il

[14] Lo studente si convinca di ciascuna delle affermazioni seguenti, ragionando sulle proprietà viste in precedenza per le potenze a esponente intero e razionale.

ragionamento fatto per x^2 (v. § 6.2.1) e dedurre che l'andamento è del tipo:

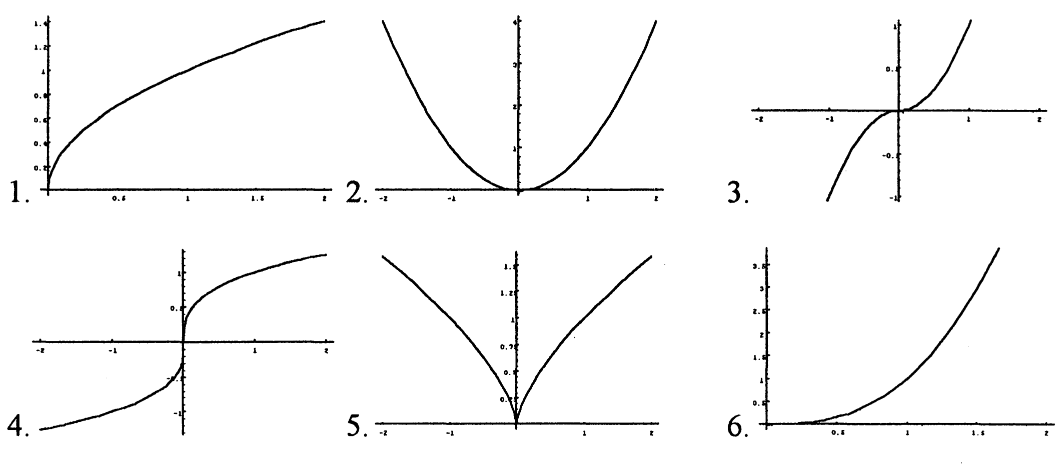


Se l'esponente è $\frac{n}{m} < 1$, poiché per $x > 0$ la funzione $x^{n/m}$ è l'inversa di $x^{m/n}$ e $\frac{m}{n} > 1$, la funzione ha un andamento del tipo:



Questi grafici vanno eventualmente completati, per $x < 0$, con il ramo simmetrico (pari o dispari, come già spiegato).

In definitiva, i grafici qualitativamente diversi che si possono ottenere sono i seguenti 6:



(Abbiamo omesso il caso banale della retta $y = x$, che si ottiene per $n = m = 1$).

Esercizio 101. Assegnare a ciascuna delle seguenti funzioni il suo grafico, scegliendolo tra i precedenti:

a. $x^{1/5}$; *b.* $x^{2/3}$; *c.* $x^{4/3}$; *d.* $x^{5/4}$; *e.* $x^{1/4}$; *f.* $x^{5/3}$.

Lo studente svolga con attenzione questo esercizio e controlli le soluzioni prima di proseguire lo studio. Si suggerisce di ripercorrere in ogni caso il ragionamento che permette di individuare il grafico, anziché memorizzare una casistica astratta (m pari, m dispari...).

Consideriamo ora il caso in cui l'***esponente è negativo***:

$$f(x) = x^{-n/m} \text{ con } n, m \text{ interi positivi}$$

In questo caso la situazione è più semplice:

• La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, se m è dispari; solo per $x > 0$ se m è pari.

• Se m è dispari, la funzione è simmetrica: pari se n è pari, dispari se n è dispari. (Se m è pari non ha senso chiedersi se la funzione è simmetrica perché non è definita per $x < 0$).

Perciò in ogni caso è sufficiente studiare il grafico per $x > 0$.

• Per $x > 0$ la funzione è strettamente decrescente, in quanto è la reciproca di una funzione positiva e strettamente crescente.

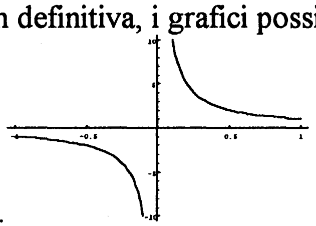
L'ultima affermazione fatta -la reciproca di una funzione positiva e crescente è decrescente- segue dalle relazioni:

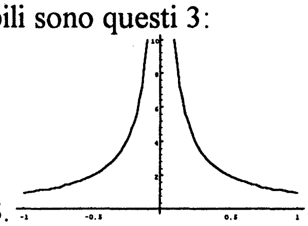
$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$$

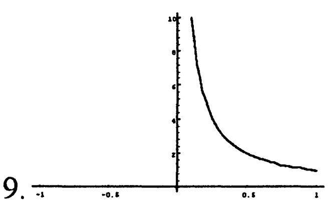
ovvero $1/f$ è decrescente.

• La funzione è illimitata vicino a 0, e per valori grandi di x assume valori prossimi a zero quanto si vuole.

In definitiva, i grafici possibili sono questi 3:

7. 

8. 

9. 

Esercizio 102. Assegnare a ciascuna delle seguenti funzioni il suo grafico, scegliendolo tra 3 i precedenti:

a. $x^{-5/4}$; *b.* $x^{-1/5}$; *c.* $x^{-4/3}$.

Vale la stessa raccomandazione dell'esercizio precedente...

Esercizio 103. Assegnare a ciascuna delle seguenti funzioni il suo grafico, scegliendolo tra i 9 precedenti:

a. $x^{7/4}$; *b.* $x^{2/4}$; *c.* $x^{-4/5}$; *d.* $x^{2/5}$; *e.* x^{6}; *f.* $x^{1/6}$.

8.5. Equazioni e disequazioni irrazionali

Si chiamano così quelle che contengono l'incognita sotto qualche segno di radice. Coinvolgono le stesse idee generali delle equazioni o disequazioni razionali, più la tecnica di *quadrare ambo i membri*, o più in generale elevare ambo i membri a una potenza intera positiva, per usare la quale occorre qualche cautela che sarà illustrata su esempi.

Esempio. Risolvere:

$$x - 3\sqrt{x} - 2 = 0.$$

Il primo membro ha senso per $x \geq 0$. Sotto questa ipotesi, riscriviamo l'equazione isolando l'unico radicale:

$$x - 2 = 3\sqrt{x}.$$

Se ora eleviamo ambo i membri al quadrato, il radicale scompare e si ottiene un'equazione di secondo grado, che sappiamo risolvere. Ma *è lecito elevare ambo i membri al quadrato*? Apriamo una parentesi.

Elevare a una potenza ambo i membri di un'equazione o disequazione

- L'***equazione***

$$A(x) = B(x) \qquad (1)$$

non è equivalente a

$$A(x)^2 = B(x)^2 \qquad (2)$$

in quanto la prima implica la seconda, mentre la seconda non implica la prima, ma implica che valga *una delle due:*

$$A(x) = \pm B(x).$$

Quindi in generale la (2) ha più soluzioni della (1). Se però è noto a priori che $A(x)$ e $B(x)$ sono sempre ≥ 0, la (1) è equivalente alla (2), perché in questo caso l'equazione $A(x) = -B(x)$ non ha alcuna soluzione.

- Dovendo risolvere invece una ***disequazione***

$$A(x) \leq B(x)$$

e volendo *elevare ambo i membri al quadrato*, il ragionamento da fare è il seguente. La funzione $f(x) = x^2$ è crescente per $x \geq 0$; quindi se sappiamo a priori che $A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$, la disequazione è *equivalente* a

$$A(x)^2 \leq B(x)^2.$$

Se $A(x) \leq 0$ non si può elevare al quadrato ambo i membri. Se però è noto che $A(x) \leq 0 \leq B(x)$, certamente la disuguaglianza è verificata. Infine, se è noto che $A(x)$ e $B(x)$ sono entrambi negativi, si riscrive la disuguaglianza nella forma

Quanto detto nel caso dell'elevamento al quadrato vale più in generale per l'elevamento a una qualunque potenza *pari*.

• Si noti anche che se si volesse *elevare ambo i membri a un esponente dispari* (ad esempio per far scomparire una radice di indice dispari), questo sarebbe sempre lecito perché le potenze a esponente dispari sono crescenti su tutto $\mathbb{R}$ e perciò, ad esempio,

$$A(x) \leq B(x)$$

è *sempre equivalente* a

$$A(x)^3 \leq B(x)^3.$$

Torniamo a considerare l'equazione

$$x - 2 = 3\sqrt{x}.$$

Se $x - 2 < 0$, l'equazione non può essere verificata, perché il secondo membro è sempre ≥ 0, in quanto è una radice quadrata.

Se invece $x - 2 \geq 0$, l'equazione è un'uguaglianza tra due quantità positive, quindi è equivalente a quella che si ottiene quadrando ambo i membri. In questo caso:

$$x^2 - 4x + 4 = 9x$$

ossia

$$x^2 - 13x + 4 = 0$$

che ha le soluzioni

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{153}}{2}.$$

Delle due, è accettabile solo quella ≥ 2 ossia (fatti i conti), $x = \frac{13+\sqrt{153}}{2}$. Si noti che questa soluzione verifica anche la condizione posta all'inizio, $x \geq 0$. □

Esempio.

$$x - \sqrt{25 - x^2} \geq 1.$$

La disequazione ha senso quando $25 - x^2 \geq 0$, ossia $-5 \leq x \leq 5$. Sotto queste ipotesi scriviamo

$$x - 1 \geq \sqrt{25 - x^2}.$$

Se $x < 1$, la disuguaglianza non è mai verificata (perché chiede che una quantità negativa -primo membro- sia $\geq$ di una quantità ≥ 0 -secondo membro-).

Se $x \geq 1$ (e quindi: se $1 \leq x \leq 5$) eleviamo al quadrato ambo i membri e otteniamo:

$$x^2 - 2x + 1 \geq 25 - x^2,$$

cioè

$$x^2 - x - 12 \geq 0$$

che ha soluzioni $x \geq 4$, $x \leq -3$. Le soluzioni accettabili sono quindi $4 \leq x \leq 5$. □

Esempio.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 2x.$$

La disequazione ha senso quando $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, ossia $x \leq 1, x \geq 2$. Poniamoci in queste ipotesi.

Se $x \leq 0$, la disequazione è senz'altro verificata, perché richiede che una quantità ≥ 0 (primo membro) sia $\geq$ di una quantità ≤ 0 (secondo membro).

Se $x > 0$ quadriamo ambo i membri e otteniamo

$$x^2 - 3x + 2 \geq 4x^2$$

ossia

$$3x^2 + 3x - 2 \leq 0$$

che ha soluzioni

$$\frac{-3 - \sqrt{33}}{6} \leq x \leq \frac{-3 + \sqrt{33}}{6} \simeq 0.457.$$

Le soluzioni sono tutte le $x \leq 0$ e quelle > 0 che soddisfano le disuguaglianze qui sopra e le condizioni $x \leq 1$ o $x \geq 2$, ovvero:

$$x \leq \frac{-3 + \sqrt{33}}{6}.$$ □

Gli esempi precedenti *non esauriscono certamente* la complessa casistica che si può trovare nel risolvere equazioni e disequazioni irrazionali: occorre ragionare caso per caso. Le idee che servono sono sostanzialmente quelle illustrate negli esempi precedenti e nell'osservazione in cornice. Lo studente provi, *ragionando*, ad affrontare i seguenti esercizi.

Val la pena forse ricordare che saper risolvere una disequazione non è un esercizio algebrico fine a se stesso. La determinazione dell'insieme di definizione di una funzione porta solitamente a risolvere un sistema di disequazioni. Nello studio del calcolo infinitesimale si vedrà che molte informazioni importanti che riguardano le proprietà di una funzione $f(x)$ si possono leggere dal *segno* di altre funzioni, dette *derivate* di $f(x)$. Studiare il segno di queste funzioni significa risolvere particolari disequazioni.

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni.

104. $$x = -\sqrt{x}$$

105. $$x = \sqrt{x}$$

106. $$\sqrt{x+1} > \sqrt{2x+1}$$

107. $$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} - 5 > 0$$

108. $$-\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2}$$

109. $$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \geq \sqrt{x}$$

110. $$\sqrt{x+1} > \sqrt[3]{2x+1}$$

111. $$\sqrt{x^2 + \sqrt{x}} = x + \sqrt{x}$$

112. $$\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{x-1}}{2x+1} \geq 1$$

113. $$\frac{-x + \sqrt{x^2 - 2}}{x+1} > 0$$

114. $$\sqrt[3]{x^3 + 7x} \geq \sqrt{x^2 + 3}.$$

8.6. Potenze a esponente reale

Arriviamo ora all'ultimo passo della generalizzazione, nella definizione di potenza a^b. Consideriamo ora il caso in cui ***b* è *reale***, quindi ***eventualmente anche irrazionale***. Cosa può significare ad esempio l'espressione

$$3^{\sqrt{2}}?$$

Una risposta esauriente a questa domanda coinvolge la definizione precisa di numero reale, come accennato nel §2. Vediamo ora di dare una spiegazione il più elementare possibile di questo fatto, riservandoci di approfondire l'argomento in una successiva sezione di approfondimento (v. §10.3*).

Com'è noto, il numero irrazionale $\sqrt{2}$ si può rappresentare come un *allineamento decimale illimitato aperiodico*:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769 5\ldots$$

Se noi ci arrestiamo a un numero finito qualsiasi di decimali (diciamo: n decimali), il numero r_n ottenuto è un numero razionale, e possiamo calcolare la potenza a esponente razionale

$$3^{r_n}.$$

I primi passi di questo calcolo sono i seguenti:

$$3^{r_1} = 3^{\frac{14}{10}} = 3^{\frac{7}{5}};$$

$$3^{r_2} = 3^{\frac{141}{100}};$$

$$3^{r_3} = 3^{\frac{1414}{1000}} = 3^{\frac{707}{500}};\text{ eccetera.}$$

Osserviamo i valori assunti, un passo dopo l'altro, dai primi termini 3^{r_n}:

n	r_n	3^{r_n}
1	1.4	4.65553672174608...
2	1.41	4.70696500171657...
3	1.414	4.72769503526854...
4	1.4142	4.72873393017119...
5	1.41421	4.72878588090861...
6	1.414213	4.72880146624114...
7	1.4142135	4.72880406380155...
8	1.41421356	4.72880437550890...
9	1.414213562	4.72880438589914...
...	...	...

Se si osserva la tabella si nota che, mano a mano che i numeri r_n approssimano $\sqrt{2}$, un numero crescente di cifre decimali di 3^{r_n} tende a "stabilizzarsi". Ad esempio: dal passo 1 in poi, la cifra delle unità è 4; dal passo 2 in poi, la cifra dei decimi è 7; dal passo 3 in poi, la cifra dei centesimi è 2; al passo 9 il numero appare avere stabilizzate le seguenti cifre: 4.7288043. proseguendo, i numeri 3^{r_n} si stabilizzeranno sempre più, indefinitamente. In questo modo iterativo viene individuato un numero reale, dato da un allineamento decimale illimitato (non sappiamo se periodico o no), le cui prime cifre ad esempio sono 4.7288043... Questo numero reale (con le infinite cifre decimali, non solo queste prime!) sarà, ***per definizione***, il numero $3^{\sqrt{2}}$.

Come si vede, abbiamo fatto molta strada dalla definizione elementare di 3^2 come "prodotto di due fattori uguali a 3" per arrivare a questa nozione di elevamento a potenza! Il tutto, comunque, è coerente e può essere reso completamente rigoroso.

Con il metodo illustrato nell'esempio precedente si può definire a^b per ogni esponente $b \in \mathbb{R}$ e base $a \in \mathbb{R}$ *purché a sia positivo*. Infatti, il fatto che per $a < 0$ la potenza a esponente razionale $a^{m/n}$ possa esistere o non esistere a seconda del valore di m, n crea un ostacolo alla definizione di a^b per $a < 0$ e b irrazionale. Rendiamocene conto su un esempio.

Quanto vale

$$(-3)^{\sqrt{2}}?$$

Provando a ripetere il ragionamento di prima troviamo:

$$(-3)^{r_1} = (-3)^{\frac{14}{10}} = 4.65553672174608\ldots$$

$$(-3)^{r_2} = (-3)^{\frac{141}{100}} \text{ \textit{non esiste}}$$

Il problema è che nella successione $(-3)^{r_n}$ un numero imprevedibile di termini *non ha significato*, e non c'è modo di garantire quindi che questo procedimento iterativo individui un numero reale.

In definitiva: ***per dar senso ad a^b quando l'esponente b è irrazionale, la base a dev'essere positiva.***

Per lo stesso motivo si richiede che la base sia positiva quando l'esponente è un numero reale a priori non specificato, o quando si vuole che l'esponente possa variare in ogni modo (e quindi possa essere *anche* irrazionale), come nelle *funzioni esponenziali*, di cui parleremo tra poco.

L'operazione di elevamento a potenza nel campo reale gode delle "solite" *proprietà formali degli esponenti*:

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

per ogni $x > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definita l'operazione a^b con a, b reali (e $a > 0$), si possono definire due diverse famiglie di funzioni:

- se si fissa l'esponente b e si fa variare la base, si ottengono le ***funzioni potenze a esponente reale***:

$$f(x) = x^b \quad \text{con } b \in \mathbb{R} \text{ fissato.}$$

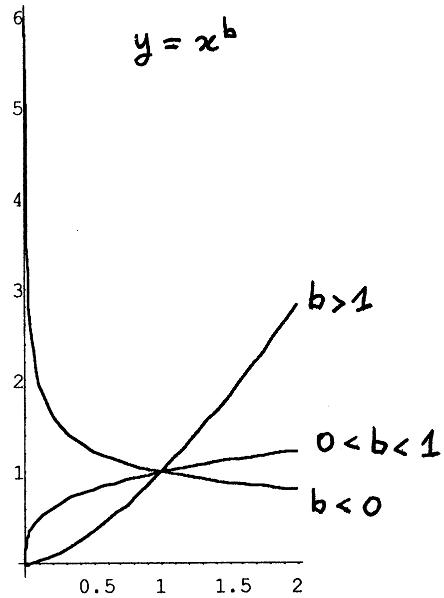
- se si fissa la base a e si fa variare l'esponente, si ottengono le ***funzioni esponenziali***:

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 0 \text{ fissato.}$$

Delle funzioni esponenziali ci occuperemo nella prossima sezione. Studiamo ora le funzioni potenze a esponente reale. Ovviamente, le funzioni potenza a esponente razionale, già studiate, sono un caso particolare di queste. Tuttavia, quando si parla di funzioni potenza a esponente reale, solitamente si sottointende il fatto che l'esponente non è razionale, o perlomeno non si può supporre che lo sia. Di conseguenza:

- l'insieme di definizione di $f(x) = x^b$ è $x \geq 0$ se $b > 0$, $x > 0$ se $b < 0$. (Escludiamo la funzione banale x^0); è sempre $f(x) \geq 0$.

Per il resto, l'andamento di queste funzioni assomiglia a quello delle funzioni a esponente razionale, a seconda che l'esponente sia $b > 1$, $0 < b < 1$, $b < 0$. I prossimi grafici esprimono le proprietà salienti di queste funzioni:



Esercizi

Tracciare i grafici qualitativi delle seguenti funzioni.

115. $x^{\sqrt{2}}$;

116. $x^{1/\pi}$;

117. $(-x)^{\sqrt{3}}$;

118. $x^{-1/\pi}$;

119. $x^{(1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3})}$;

120. $x^{(1/\sqrt{3}-1/\sqrt{2})}$.

9. Funzioni esponenziali e logaritmiche

9.1. Funzioni esponenziali

Ci occupiamo ora delle funzioni esponenziali, ossia di quelle che si ottengono mediante l'operazione di elevamento a potenza a^b se si fissa la base a e si fa variare l'esponente:

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 0 \text{ fissato.}$$

La richiesta $a > 0$ è necessaria: se fosse $a < 0$, l'operazione a^x risulterebbe non definita per tutti gli x irrazionali, e per tutti i razionali del tipo $x = n/m$ con n dispari e m pari: di conseguenza $f(x)$ sarebbe definita su un dominio molto complicato e molto povero di punti.

Studiamo le principali proprietà di $f(x)$.

- Il dominio di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$ (un numero reale positivo può essere elevato a *qualsiasi* numero reale, anche negativo o nullo);
- la funzione è sempre strettamente positiva: $a^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 1$, qualunque sia la base a.
- poiché $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = a^x$, le proprietà di a^x per $a < 1$ si ottengono dalle proprietà di a^x per $a > 1$ scambiando x con $-x$. Ad esempio, se $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, risulta $g(x) = f(-x)$.
- se $a > 1$, $a^x > 1$ se e solo se $x > 0$ e $a^x < 1$ se e solo se $x < 0$. (Per il punto precedente, se $a < 1$ vale il viceversa).

Ci si può convincere di questo fatto nel caso in cui $x \in \mathbb{Q}$: se $x = \frac{n}{m} > 0$, $a > 1 \Rightarrow a^n > 1 \Rightarrow a^{n/m} > 1$ (perché le funzioni x^n e $\sqrt[m]{x}$ sono crescenti per $x > 0$). Se poi $x < 0$, si applica il ragionamento precedente a $-x$ e si ottiene $a^x < 1$. (Il caso x irrazionale è un po' più delicato...).

- Dalla proprietà precedente segue che a^x è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ se $a > 1$ (e quindi strettamente decrescente se $0 < a < 1$. Se $a = 1$ è la funzione costante $= 1$).

Infatti, sia ad esempio $a > 1$. La disequazione

$$a^{x_1} > a^{x_2}$$

è equivalente (dividendo per la quantità positiva a^{x_2} e usando le proprietà delle potenze) a

$$a^{x_1 - x_2} > 1$$

che è equivalente (per il punto precedente) a

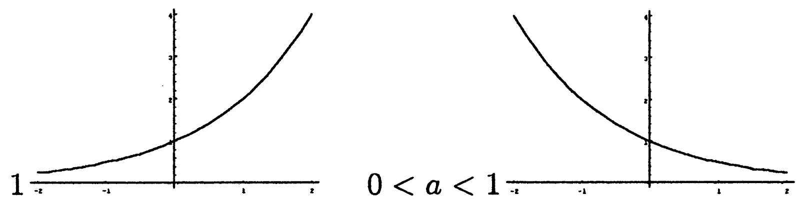
$$x_1 - x_2 > 0, \text{ ossia } x_1 > x_2.$$

Quindi a^x è crescente.

• Ragionando a titolo d'esempio sulla funzione 2^x e sui valori che essa assume per $x = 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$ ci si rende conto di un fatto generale. La funzione a^x con $a > 1$ cresce con ritmo sempre più rapido, al crescere di x; in particolare, supera qualsiasi crescita di tipo lineare. (Quest'ultimo fatto potrà essere dimostrato rigorosamente in seguito, v. §9.5*). Quando invece x diventa sempre più negativa, assume valori sempre più prossimi a zero.

Tutti questi elementi si possono riassumere nei seguenti grafici:

$$f(x) = a^x$$



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

Per l'ultima proprietà ricordata, le funzioni esponenziali intervengono spesso nella modellizzazione di fenomeni a crescita "esplosiva" (come l'aumento di una popolazione in condizioni favorevoli, la diffusione di un'epidemia incontrollata,...) oppure (esponenziali decrescenti) in fenomeni di "estinzione progressiva" (estinzione di una popolazione animale, decadimento radiotattivo,...). Sarà il calcolo infinitesimale, comunque, a spiegare i motivi profondi dell'apparire così frequente di queste funzioni in contesti diversi.

9.2. Logaritmi e funzioni logaritmiche

9.2.1. I logaritmi come funzioni inverse degli esponenziali

I ***logaritmi*** si possono definire come ***funzioni inverse delle funzioni esponenziali***. Più precisamente, consideriamo la funzione $f(x) = a^x$ con $a > 0, a \neq 1$. Allora, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, e strettamente monotona, perciò (v. §7.1) è invertibile. La sua funzione inversa sarà definita sull'insieme $\mathrm{Im}(f)$, cioè su $(0, +\infty)$, e si dice *logaritmo in base a*.

Il fatto che il logaritmo sia la funzione inversa dell'esponenziale, esplicitamente, significa che, se consideriamo l'equazione

$$a^y = x$$

dove $a > 0, a \neq 1$ è fissato, $x > 0$ è assegnato, e y è l'incognita, l'equazione ha una e una sola soluzione y, che si dice appunto ***logaritmo in base a di x, e si indica con*** $\boldsymbol{\log_a x}$. Perciò:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Detto in parole, ***il logaritmo in base a di x è l'esponente che si deve mettere ad a per ottenere x***. In forma ancora più sintetica, si può scrivere:

$$a^{\log_a x} = x.$$

Ricordiamo ancora che *il logaritmo è definito purché la* ***base a*** *sia un numero* ***positivo e diverso da*** 1, *e* ***l'argomento x*** *sia un numero positivo*.

Basi dei logaritmi. Le basi più usate per i logaritmi sono 10 ed $e = 2.71\ldots$ Il numero e è una costante notevole che lo studente incontrerà studiando il calcolo infinitesimale. Per indicare i logaritmi in queste basi, sono in uso convenzioni diverse. Per alcuni

$$\log_{10}x = \mathrm{Log}\, x; \;\; \log_e x = \log x$$

(noi useremo questa convenzione). Per altri, invece

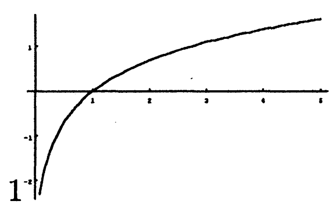
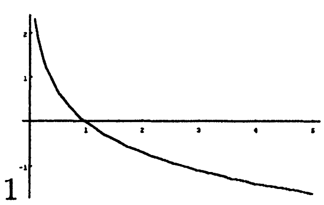
$$\log_{10}x = \log x; \;\; \log_e x = \ln x$$

(dove "ln" sta per "logaritmo naturale"). Purtroppo, questa duplice convenzione fa sì che il simbolo $\log x$ sia ambiguo. Se lo si incontra, occorre sapere che convenzione segue l'autore.

Dal fatto che il logaritmo sia la funzione inversa dell'esponenziale, seguono subito le seguenti proprietà delle funzioni logaritmiche (lo studente è invitato a spiegare in dettaglio *perché* ciascuna delle seguenti proprietà segue da quelle dell'esponenziale):

- Il grafico di $y = \log_a x$ si può ottenere dal grafico di $y = a^x$ per simmetria rispetto alla retta $y = x$:

$f(x) = \log_a x$

$a > 1$  $0 < a < 1$ 

- $f(x) = \log_a x$ è definito per $x > 0$ e la sua immagine è tutto $\mathbb{R}$ (assume, cioè, valori sia positivi che negativi).
- $f(x) = \log_a x$ è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$.
- $f(1) = 0$, qualunque sia la base.
- Se $a > 1$, $\log_a x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $\quad \log_a x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
- Se $a < 1$, $\log_a x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$; $\log_a x < 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- $\log_{1/a}x = -\log_a x$; ad esempio $\log_{\frac{1}{2}}x = -\log_2 x$, perciò le proprietà dei logaritmi in base $a < 1$ si possono dedurre da quelle dei logaritmi in base $a > 1$.
- Per $a > 1$, il logaritmo cresce sempre più lentamente, al crescere di x; in particolare, la crescita logaritmica è più lenta di qualsiasi crescita lineare. (Questo fatto potrà essere dimostrato rigorosamente nel §9.5*). Quando x si avvicina a zero (da destra!), la funzione $\log_a x$ diventa sempre più negativa.

Naturalmente tutte le proprietà precedenti, oltre a potersi dedurre dalle proprietà dell'esponenziale sfruttando il fatto che il logaritmo ne è la funzione inversa, si possono stabilire anche direttamente, ragionando su $\log_a x$ come esponente da mettere ad a per ottenere x. Ad esempio, $\log_a 1 = 0$ perché l'esponente da mettere ad a per ottenenre 1 è 0; oppure: se $a > 1$ la funzione $\log_a x$ è crescente perché per ottenere un valore sempre più grande dalla potenza a^y occorre prendere un esponente sempre più grande. Lo studente è invitato a riflettere su tutte le proprietà precedenti da questo punto di vista. (E' sempre utile comprendere più volte le stesse cose vedendole da più punti di vista).

9.2.2. Le proprietà algebriche dei logaritmi

Ci occupiamo ora delle proprietà dei logaritmi che seguono dalla definizione di logaritmo come esponente da mettere alla base per ottenere l'argomento.

Proposizione. *Siano* a, b *numeri positivi e diversi da* 1*;* x, x_1, x_2 *positivi;* α *reale qualunque, allora:*

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{1}$$

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \tag{2}$$

$$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x \tag{3}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{4}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}. \tag{5}$$

Dimostrazione. *Proviamo la (1). Per mostrare che il 2° membro è uguale al primo, cioè a* $\log_a(x_1 x_2)$*, dobbiamo provare che:*

$$a^{2^\circ \textit{membro}} = x_1 x_2.$$

Ma:

$$a^{2^\circ \textit{membro}} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} = \textit{(proprietà delle potenze)}$$

$$= a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} = \textit{(per definizione di logaritmo)}\ x_1 \cdot x_2.$$

Lo studente è invitato a dimostrare (2) e (3), con la stessa tecnica: si mostra che $a^{2^\circ \text{ membro}}$ è uguale all'argomento del logaritmo che c'è a 1° membro.

Proviamo invece la (4). Anzitutto riscriviamo la tesi nella forma equivalente:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b.$$

Per provare questa dobbiamo mostrare che

$$a^{2^\circ \text{ membro}} = x.$$

Ma:

$$a^{2^\circ \text{ membro}} = a^{\log_b x \cdot \log_a b} = \text{(proprietà delle potenze)}$$

$$= \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = \text{(per definizione di logaritmo in base } a\text{)}$$

$$= b^{\log_b x} = \text{(per definizione di logaritmo in base } b\text{)} = x.$$

Infine, la (5) segue dalla (4) ponendo $x = a$ nella (4). □

Le proprietà (1),(2),(3) mostrano la caratteristica notevole dei logaritmi, di trasformare le operazioni algebriche in operazioni "più semplici": passsando ai logaritmi, i prodotti diventano somme, i quozienti diventano differenze, le potenze diventano prodotti. Inoltre, il logaritmo di un numero "grande" è un numero molto più piccolo, e questo consente di eseguire operazioni più "trattabili". Questa caratteristica può lasciarci oggi piuttosto indifferenti, abituati come siamo ad eseguire calcoli abbastanza complessi premendo i tasti di una calcolatrice tascabile, ma storicamente ha avuto un'enorme importanza per lo sviluppo della scienza.

Esempio. Si voglia eseguire il prodotto

$$1\ 845\ 632 \cdot 98\ 653.$$

Calcoliamo, invece,

$$\log_{10} 1\ 845\ 632 + \log_{10} 98\ 653 =$$

$$= 6.256 + 4.994 = 11.21.$$

Il risultato ottenuto è il logaritmo in base 10 del risultato che vogliamo. Perciò

$$1\ 845\ 632 \cdot 98\ 653 \simeq 10^{11.21} \simeq 1.6218 \cdot 10^{21}.$$

Si tratta di un risultato approssimato (tanto meglio quante più cifre decimali usiamo per calcolare i logaritmi). Si noti che il metodo funziona pur di avere a disposizione un metodo standard per calcolare il logaritmo di un numero, ed eseguire al termine dei calcoli l'operazione inversa (di esponenziazione o, con termine classico, "antilogaritmo"). Storicamente, sono state calcolate "una volta per tutte", nel '600, delle accurate tavole dei logaritmi e antilogaritmi, che sono servite per circa tre secoli ai calcoli astronomici e scientifici in genere [1].

La proprietà (4) è la cosiddetta "regola aurea" di Eulero, e ci dice che *una volta noti i logaritmi in una base, si possono calcolare i logaritmi in qualunque altra base*, eseguendo una semplice divisione.

Esempio. Si voglia calcolare $\log_2 15$. Una calcolatrice tascabile "standard" possiede un paio di tasti per calcolare i logaritmi, in base 10 e in base e. Perciò, anche con una calcolatrice non è possibile calcolare direttamente un logaritmo in base 2 (o qualunque base diversa da 10 ed e). Usando la (4) però abbiamo:

$$\log_2 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 2} = \text{(calcolando i logaritmi in base 10 con la calcolatrice)}$$

$$= \frac{1.176091259}{0.301029995} = 3.906890596. \qquad \square$$

La (4) dice anche che le funzioni $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$ sono semplicemente una multipla dell'altra, mediante la costante $1/\log_b a$, ossia (per la (5)) $\log_a b$, che fa da

[1] Le prime tavole dei logaritmi sono state calcolate da John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) e Jost Bürgi (1620). I logaritmi di Briggs sono in base 10, quelli di Napier in base e. I metodi di calcolo dei logaritmi erano molto laboriosi, e lo sforzo necessario per compilare le tavole fu immenso.

"fattore di conversione"

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x.$$

Ad esempio:

$$\log_2 x = \frac{1}{\log_{10} 2} \cdot \log_{10} x = 3.321928095 \cdot \log_{10} x.$$

Esercizi

121. Calcolare i seguenti logaritmi (ragionando sulla definizione di logaritmo come esponente, senza usare la calcolatrice).
a. $\log_3 27$; *b.* $\log_5 \frac{1}{25}$; *c.* $\log_2 1$; *d.* $\log_{16} \frac{1}{2}$; *e.* $\log_1 2$; *f.* $\log_2(-3)$

122. Eseguendo qualche calcolo a mente, rispondere alle seguenti domande:
a. Qual è la parte intera del numero $\log_{10} 12564$?
b. Qual è la parte intera del numero $\log_2 68$?
c. Qual è il maggiore tra i numeri $\log_2 3$ e $\log_4 5$?
d. Di ciascuno dei numeri seguenti, dire se è maggiore di 1, compreso tra 0 e 1, o negativo: $\log_{10} 12$, $\log_3 2.5$, $\log_5 0.1$, $\log_e 3$, $\log_e 2$.

123. Riscrivere l'espressione

$$\log \frac{a^{3/2} b^4}{5c^3}$$

come somma algebrica di logaritmi dall'argomento più semplice.

124. Riscrivere l'espressione

$$\frac{1}{2}\log a + 3\log b - 4\log c$$

come un unico logaritmo.

125. Usando una calcolatrice tascabile (quando necessario) e le proprietà note dei logaritmi, calcolare i seguenti logaritmi:
a. $\log_2 5$; *b.* $\log_3 2$; *c.* $\log_{\frac{1}{2}} 15$; *d.* $\log_5 2$; *e.* $\log_5 5$; *f.* $\log_4 1$.

126. Dimostrare che se n è un numero intero dispari, il numero

$$\log_2 n$$

è irrazionale.

9.3. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Sono quelle equazioni o disequazioni che coinvolgono l'incognita attraverso una sua funzione esponenziale o logaritmica e che quindi per essere risolte richiedono, in qualche passagio, di applicare ad ambo i membri una funzione esponenziale (per liberare dal logaritmo l'incognita) o una funzione logaritmica (per liberare dall'esponenziale l'incognita).

Ad esempio per ricavare x da

$$2^x = 3$$

si applica ad ambo i membri il logaritmo in base 2, trovando

$$x = \log_2 3;$$

per ricavare x da

$$\log_3 x = -2$$

si applica ad ambo i membri la funzione 3^t, ottenendo

$$x = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

Per il resto, si utilizzano i soliti procedimenti algebrici, oltre naturalmente alle proprietà dei logaritmi e degli esponenziali. Per i logaritmi, bisognerà prestare attenzione al fatto che gli argomenti siano sempre positivi (sia che i logaritmi compaiano nelle espressioni di partenza, sia che applichiamo noi i logaritmi ad ambo i membri di un'equazione o disequazione). Infine, affrontando delle *disequazioni*, occorre tener presenti le proprietà di *monotonia* delle funzioni esponenziali e logaritmiche. Questo significa che:

- se si applica ad ambo i membri di una disequazione una funzione esponenziale o logaritmica con base $a > 1$, il segno della disuguaglianza si conserva;
- se si applica ad ambo i membri di una disequazione una funzione esponenziale o logaritmica con base $a < 1$, il segno della disuguaglianza si rovescia.

Ad esempio

$$2^x \leq 3$$

porta a

$$x \leq \log_2 3$$

mentre

$$\log_{\frac{1}{2}} x < 5$$

porta a

$$x > \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

A questo punto non c'è altro da fare che studiare qualche esempio, e poi fare un sufficiente numero di esercizi, *ragionando*.

Esempi

1.
$$2^x \cdot 5^{2x} = 3$$

Ha senso per ogni x reale. Applichiamo i logaritmi (in base e) ad ambo i membri (sono quantità positive):

$$\log\left(2^x \cdot 5^{2x}\right) = \log 3$$

e per le proprietà dei logaritmi

$$x\log 2 + 2x\log 5 = \log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2 + 2\log 5} \simeq 0.28.$$

2.
$$2^x + 4^x < 6.$$

Poiché $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, questa è una disequazione di secondo grado nell'incognita 2^x. Per essere più espliciti, posto $2^x = t$, si ha

$$t^2 + t - 6 < 0$$

che ha soluzioni

$$t > 3,\ t < -2$$

ossia

$$2^x > 3, \text{ cioè } x > \log_2 3$$

e

$$2^x < -2, \text{ che non ha soluzioni.}$$

Perciò le soluzioni sono $x > \log_2 3 \simeq 1.585$.

3.
$$\frac{\log x + 1}{\log x + 2} = 3$$

Imponiamo anzitutto le condizioni $x > 0$ e $\log x + 2 \neq 0$, cioè $x \neq e^{-2}$. Quindi risolviamo l'equazione in $\log x$:

$$\log x + 1 = 3\log x + 6$$

$$\log x = -\frac{5}{2}.$$

Infine passiamo agli esponenziali:

$$x = e^{-5/2}, \text{ accettabile.}$$

4.
$$\log_2\left(\sqrt{x} - 2\right) + \log_2\left(\sqrt{x} + 2\right) \leq \frac{1}{2}\log_2\left(x - \sqrt{3}\right) + \log_2\sqrt{x + \sqrt{3}}.$$

Imponiamo anzitutto le condizioni affinché quanto scritto abbia senso:

$$x \geq 0 \text{ (perché compare sotto radice)}$$

$$\sqrt{x} - 2 > 0 \text{ cioè } x > 4 \text{ (perché è argomento di un logaritmo)}$$

Tutte le altre condizioni di positività degli argomenti dei logaritmi sono automaticamente verificate se $x > 4$. Ora trasformiamo la disequazione utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$\log_2\left[\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)\right] \leq \log_2\left[\sqrt{x-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{3}}\right]$$

cioè

$$\log_2[x-4] \leq \log_2\left[\sqrt{x^2-3}\right].$$

Applichiamo quindi ad ambo i membri la funzione esponenziale di base 2 che è crescente, e perciò conserva il segno della disequazione:

$$x - 4 \leq \sqrt{x^2-3}.$$

Abbiamo ora una disequazione irrazionale; sappiamo già, però, che il radicando è positivo e il primo membro è positivo; eleviamo al quadrato e otteniamo

$$x^2 - 8x + 16 \leq x^2 - 3$$

che dà

$$x \geq \frac{19}{8}$$

che, confrontato con la condizione $x > 4$, dà le soluzioni: $x > 4$. □

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni.

127. $$\log_2 x + 3 = 2\log_2(2-x)$$

128. $$\log_3^2 x - 9 = 0$$

129. $$3\log^2 x - 2\sqrt{2}\log x - 5 = 0$$

130. $$\log(x+3) + \log(x-2) = \log\left(2x^2+x+1\right)$$

131. $$3^{2x-1} = 2\cdot 5^{x+1}$$

132. $$e^x + e^{x+2} = e^3$$

133. $$2^x + 3^{-x} + 1 = 0$$

134. $$e^{x^2} = 2^{-x}$$

135. $$\sqrt[3]{2^{x+1}\sqrt{2^x}} = 3$$

Nelle seguenti equazioni, ricavare y in funzione di x. (Esempio. $x = \log y \Rightarrow y = e^x$).

136. $$\log y = -x^2 + 1$$

137. $$x^y = 2$$

138. $$y^x = 2$$

139. $$x = \frac{\log y + 1}{\log y - 1}$$

140. $$x = \frac{\log^2 y + 1}{\log y - 1}$$

141. $$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$$

142. $$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$$

143. $$\log^2 y + x\log y - x^2 = 0, \text{ con } x > 0$$

144. $$\log y = x\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log x$$

(esprimere y senza far uso di alcun logaritmo)

145. $$e^{2\log x} y = x e^{2\log x} + c$$

(esprimere y senza far uso di alcun logaritmo)

Esercizi

Risolvere le seguenti disequazioni.

146. $$\left(1 - e^{\sqrt{\log(x^2) - 2}}\right)(1 + \log|x - 3|) < 0$$

147. $$\log_{0.1}(x - 3) + \log_{0.1}(x - 1) > \log_{0.1}(x^2 - 7x + 10)$$

148. $$0.4^{2x+1} < 10^3$$

149. $$\log_x\left(3x - 2x^2\right) \geq 0$$

(suggerimento: dopo aver imposto le condizioni di esistenza, riscrivere il logaritmo come quoziente di logaritmi in base costante)

150. $$x^x > 1$$

9.4.* Scale logaritmiche

Nello studio, teorico o sperimentale, della relazione esistente tra due grandezze x, y, càpita talvolta che sia più semplice rappresentare (analiticamente e/o graficamente) la relazione esistente tra $\log x$ e $\log y$, oppure tra x e $\log y$, o tra $\log x$ e y.

Esempio: si sta studiando, sperimentalmente, la relazione esistente tra una grandezza x e un'altra grandezza $y = f(x)$. I dati sperimentali mostrano che la relazione tra x e y non è lineare (i punti (x, y) corrispondenti alle osservazioni, rappresentati in un grafico, non sono allineati). Lo sperimentatore ha l'idea che esista una relazione non lineare, del tipo piuttosto semplice $y = a \cdot x^b$, ma quali saranno i coefficienti a, b esatti? Trasformiamo le osservazioni in scala logaritmica, ossia rapresentiamo su un grafico i punti di coordinate $(\log x, \log y)$, e supponiamo di osservare che questi sono approssimativamente allineati su una retta $y = mx + q$. In altre parole, esiste una relazione lineare tra $\log x$ e $\log y$:

$$\log y = m \log x + q$$

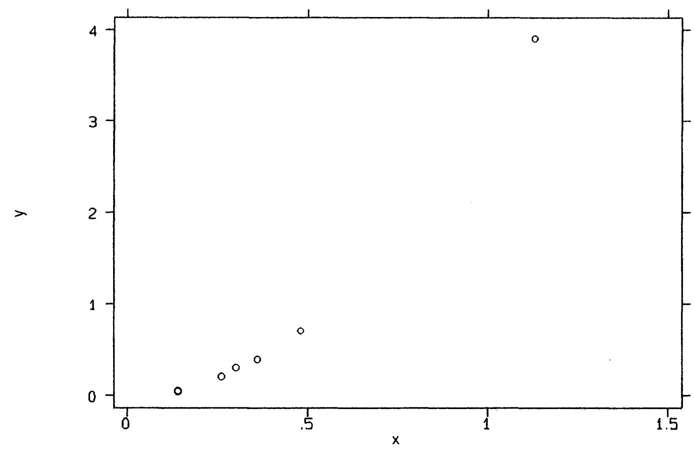
Passando agli esponenziali si ha allora:

$$y = e^q \cdot x^m,$$

che è una relazione del tipo $y = a \cdot x^b$, con $a = e^q$, $b = m$, m e q determinati sperimentalmente.

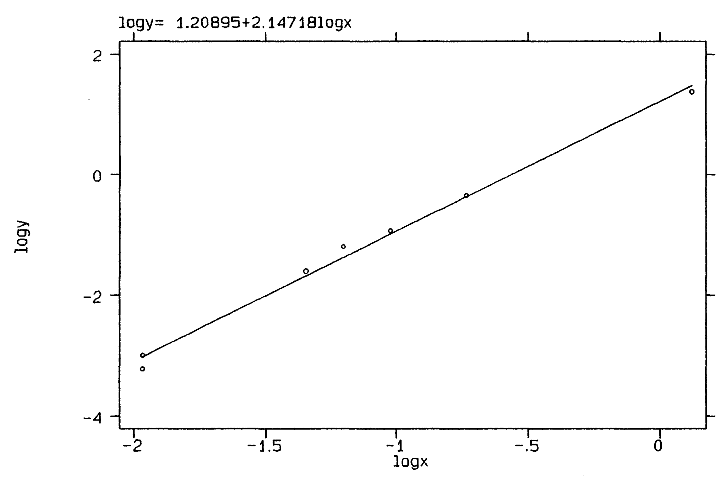
Esempio numerico. La tabella e il grafico dei valori osservati sperimentalmente per una coppia di variabili (x, y) tra cui si cerca una relazione sono:

x	y
0.36	0.39
0.14	0.05
0.26	0.2
0.48	0.7
0.3	0.3
0.14	0.04
1.13	3.9



Sembra esserci una relazione non lineare tra x e y. Passiamo ai logaritmi.

log$x$	log$y$
-0.94	-1.02
-3	-1.97
-1.6	-1.3
-0.36	-0.73
-1.2	-1.2
-3.2	-1.97
1.36	1.22



Tra log$x$ e log$y$ appare una relazione approssimativamente lineare. Più precisamente, la relazione lineare che sussiste approssimativamente tra log$x$ e log$y$ è [2] log$y = 2.147\log x + 1.2$, che si trasforma nella relazione tra x e y:

$$y = e^{1.2}x^{2.147} = 3.32\,x^{2.147}. \qquad \square$$

[2] Non entriamo nella discussione del metodo con cui si determina questa retta che passa "approssimativamente" per i punti disegnati. Tale metodo prende il nome di *metodo dei minimi quadrati*, ed è molto usato nelle scienze applicate; lo studente lo incontrerà, ad esempio, nello studio della *statistica*.

Esercizio 151. Esprimere y in funzione di x, sapendo che:

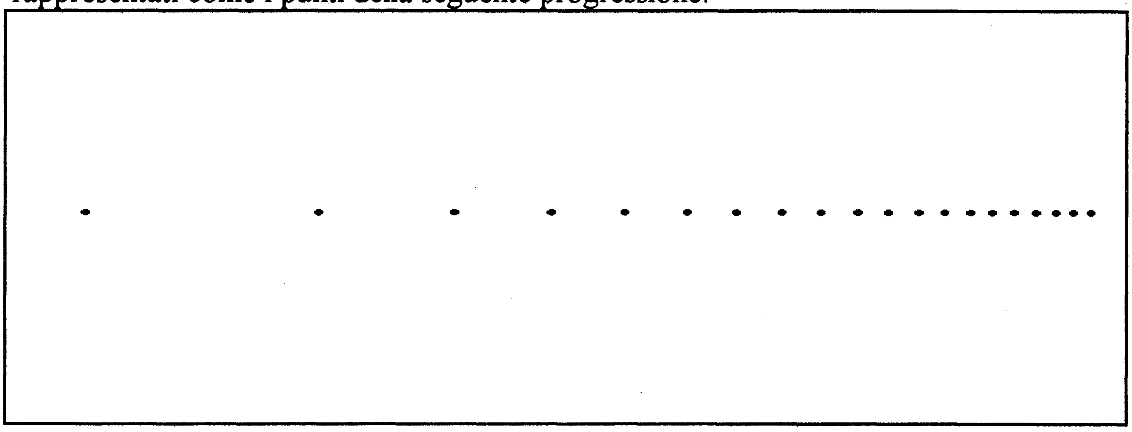
a.
$$\log y = 3.1 \log x - 0.3$$

b.
$$\log y = -2.2 \log x + 4$$

c.
$$\log y = 0.25x + 3.3$$

(calcolare esplicitamente i coefficienti; la base dei logaritmi è $e = 2.71\ldots$).

Rappresentare sull'asse x (o y) una data grandezza in *scala logaritmica*, significa che l'unità di misura non è costante sull'asse, ma i punti di ascissa $1, 2, 3, 4, \ldots$ sono rappresentati come i punti della seguente progressione:



Esempi vari

Un esempio... musicale di scala logaritmica è costituito dalla tastiera di una chitarra (o uno strumento simile): i capotasti di una chitarra sono spaziati tra loro secondo lo schema precedente. Questo dipende dal fatto che la relazione tra lunghezza della corda pizzicata e altezza della nota prodotta è di tipo logaritmico: ad ogni dimezzamento della lunghezza della corda, la nota cresce di un'ottava.

Il *regolo* degli ingegneri è una sorta di righello scorrevole graduato secondo una scala logaritmica; sfruttando queste scale, e le proprietà dei logaritmi, l'utilizzatore del regolo può eseguire prodotti e quozienti facendo somme e differenze.

In acustica, l'unità di misura del livello di intensità sonora (così come è percepito dall'orecchio umano) è il decibel (dB). Il livello di intensità sonora è definito come:

$$L = 10 \,\mathrm{Log} \frac{I}{I_0}$$

dove I e I_0 sono, rispettivamente, l'intensità sonora del livello L e quella della soglia di udibilità.[3] La relazione tra la grandezza avente un significato meccanico, cioè I, e quella avente un significato percettivo, cioè L, è quindi di tipo logaritmico. □

[3] L'intensità sonora è una grandezza diversa dal *livello* di intensità sonora, è espressa in Watt al metro quadro, e rappresenta la quantità media di energia trasportata dall'onda sonora nell'unità di tempo, attraverso l'unità d'area attraversata dall'onda stessa.

Le funzioni logaritmiche si possono caratterizzare come le uniche funzioni $L(x)$ che soddisfano la relazione

$$L(x_1 x_2) = L(x_1) + L(x_2) \text{ per ogni } x_1, x_2 > 0.$$

Le funzioni esponenziali sono le uniche funzioni $E(x)$ che soddisfano la relazione

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1)E(x_2) \text{ per ogni } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Si confronti con quanto detto a suo tempo riguardo alle funzioni lineari $y = mx$, che sono le uniche a soddisfare l'equazione $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

9.5.*Confronto tra funzioni logaritmiche, lineari e esponenziali

Questo paragrafo, anche se utilizza solo gli strumenti di cui abbiamo parlato finora, è già in un certo senso nello spirito del calcolo infinitesimale. Infatti, una volta che lo studente avrà studiato il concetto di *limite*, sarà facile riesprimere il contenuto di questo paragrafo come un teorema del calcolo infinitesimale.

Quello che si farà è mostrare rigorosamente un'affernazione fatta introducendo i grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e cioè:

- le funzioni esponenziali crescono più rapidamente di qualsiasi funzione lineare;
- le funzioni logaritmiche crescono più lentamente di qualsiasi funzione lineare.

Cominciamo a dimostrare una disuguaglianza algebrica, semplice ma non ovvia:

Proposizione. *Per ogni $x > 0$ vale:*

$$\log_2 x \le x \le 2^x.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che si dice parte intera di x, e si indica con $[x]$, il più grande numero intero $\le x$. Quindi:

$$\text{per ogni } x > 0, \ [x] \in \mathbb{N} \text{ e } [x] \le x < [x] + 1.$$

Ad esempio, $[4.8] = 4$, $[5] = 5$.

Ricordiamo anche la Disuguaglianza di Bernoulli, dimostrata nel §1.3:

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \text{ per } n \in \mathbb{N}, x > -1$$

(in realtà useremo la disuguaglianza con $x > 0$, che è più semplice da dimostrare, come osservato a suo tempo). Scriviamo ora:

$$2^x \ge 2^{[x]} \text{ (perché } x \ge [x] \text{ e } f(x) = 2^x \text{ è crescente)}$$

$$= (1+1)^{[x]} \ge 1 + [x] \text{ (per la disuguaglianza di Bernoulli, applicabile perché } [x] \text{ è intero)}$$

$$\ge x \text{ (per definizione di parte intera).}$$

Abbiamo quindi mostrato che $2^x \ge x$ per ogni $x > 0$; d'altronde, la disuguaglianza è ovviamente vera anche per $x \leq 0$, perché in tal caso il primo membro è positivo e il secondo negativo. Quindi:

$$2^x \geq x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Applichiamo ora la disuguaglianza ponendo al posto di x la quantità $\log_2 x$, e otteniamo

$$x \geq \log_2 x, \text{ per } x > 0.$$

La dimostrazione è completa. □

Proposizione. *Per ogni retta $y = mx$ risulta*

$$\log_2 x < mx \textit{ per } x \textit{ abbastanza grande, e}$$

$$mx < 2^x \textit{ per } x \textit{ abbastanza grande.}$$

Dimostrazione. Nella disuguaglianza $\log_2 x \leq x$, sopra dimostrata, sostituiamo $\sqrt{x}$ al posto di x. Si ottiene:

$$\frac{1}{2}\log_2 x \leq \sqrt{x}$$

da cui

$$\frac{\log_2 x}{mx} \leq \frac{2}{m\sqrt{x}}. \qquad (*)$$

Fissato m qualsiasi, la disuguaglianza

$$\frac{2}{m\sqrt{x}} < 1$$

è verificata per $x > 4/m^2$. Dunque per queste x (ovvero: per x abbastanza grande) risulta anche

$$\frac{\log_2 x}{mx} < 1, \text{ cioè } \log_2 x < mx.$$

Per quanto piccolo si scelga $m > 0$ (ossia: per quanto lentamente cresca la retta $y = mx$), per x abbastanza grande la funzione $\log_2 x$ è ancora minore.

Per dimostrare ora che

$$mx < 2^x \text{ per } x \text{ abbastanza grande,}$$

passiamo ai logaritmi: la tesi è dunque equivalente a:

$$\log_2 m + \log_2 x < x \text{ per } x \text{ abbastanza grande.}$$

Per provare questa applichiamo ancora la (*), con $m = 1$:

$$\frac{\log_2 m + \log_2 x}{x} < \frac{\log_2 m}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

purché sia:

$$\frac{\log_2 m}{x} < \frac{1}{2}, \text{ cioè } x > 2\log_2 m$$

e

$$\frac{2}{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}, \text{ cioè } x > 2.$$

Per x abbastanza grande le ultime due disuguaglianze scritte sono vere entrambe, e dunque è vero che $\frac{\log_2 m + \log_2 x}{x} < 1$, ossia $\log_2 m + \log_2 x < x$. Per quanto grande si scelga $m > 0$ (ossia: per quanto velocemente cresca la retta $y = mx$), per x abbastanza grande la funzione 2^x è ancora maggiore. □

10.* Continuità dell'insieme dei numeri reali. Esistenza di radici, potenze e logaritmi

Vogliamo ora approfondire un po' la nostra conoscenza dell'insieme dei numeri reali, e capire perché *questo*, e non un altro, è l'ambiente adeguato per lo studio tanto della geometria analitica quanto del calcolo infinitesimale.

Il concetto di sistema di riferimento cartesiano (v. §1.2) presuppone l'adozione di un sistema numerico adatto ad essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della retta.

Il concetto di funzione (v. §2.1 e Cap.7) presuppone di specificare gli insiemi numerici dominio e codominio.

Nel §1.2.1 abbiamo visto che esistono (almeno) due *campi ordinati*: $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$. Entrambi questi insiemi hanno buone proprietà algebriche, rispetto alle 4 operazioni, ed entrambi, a prima vista, si prestano ad essere ben rappresentati dai punti della retta: l'*ordinamento* riflette la natura unidimensionale della retta. Inoltre, mentre l'insieme degli interi, ad esempio, appare inadatto a rappresentare i punti della retta, in quanto tra due numeri interi successivi esiste evidentemente un "buco", gli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ godono della proprietà di *densità*: tra due numeri qualsiasi ne esiste sempre uno intermedio:

$$\text{se } r, s \in \mathbb{Q} \text{ (risp., } \mathbb{R}) \text{ e } r < s, \text{ il numero } t = \frac{r+s}{2} \in \mathbb{Q} \text{ (risp., } \mathbb{R}), \text{ ed è } r < t < s.$$

Questa proprietà riflette bene il fatto che i punti della retta sono indefinitamente ravvicinati tra loro: dato un punto, non esiste "quello immediatamente successivo", ma se ne possono trovare infiniti altri, vicini quanto si vuole. Questo è vero sia per i numeri razionali che per i numeri reali.

Tuttavia, ragionamenti un po' più sottili di quelli appena fatti mostrano che in realtà l'*insieme* $\mathbb{Q}$ *è inadeguato* a rappresentare i punti della retta, e quindi non è una base adatta allo studio della geometria analitica. Inoltre, $\mathbb{Q}$ risulta inadeguato a rappresentare il concetto di "quantità variabile con continuità", ovvero: una teoria delle funzioni di una variabile basata sui numeri razionali, sarebbe insoddisfacente. L'insieme $\mathbb{R}$ ha invece una proprietà cruciale in più, rispetto a $\mathbb{Q}$, che si chiama proprietà di *continuità*, che lo rende adatto a questi fini.

Scopo di questo capitolo è spiegare l'affermazione appena fatta, e dare qualche esemplificazione dell'utilizzo della proprietà di continuità di $\mathbb{R}$, applicandola alla discussione delle funzioni potenze, esponenziali e logaritmi, di cui ci siamo occupati nei paragrafi precedenti.

10.1. Inadeguatezza di $\mathbb{Q}$

10.1.1. I numeri razionali e l'impossibilità di misurare certe coppie di lunghezze

Ricordiamo che, nella geometria elementare, "misurare" vuol dire contare quante volte una grandezza campione è contenuta in quella che stiamo misurando. Consideriamo ora un quadrato quasiasi e chiediamoci: il lato l e la diagonale d sono multipli interi di una stessa lunghezza campione? Supponiamo che u sia questa unità di misura; ci chiediamo se esistono due interi n, m tali che

$$l = nu;\ d = mu.$$

Ne segue l'uguaglianza

$$\frac{l}{d} = \frac{n}{m}$$

ovvero il rapporto l/d dovrebbe essere espresso da un numero razionale. D'altronde, per il Teorema di Pitagora deve valere la relazione

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2,$$

da cui

$$2 = \left(\frac{d}{l}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2,$$

ovvero esisterebbe un numero razionale m/n il cui quadrato è 2. Ma questo, come abbiamo visto nel §1.1.4, è impossibile, per il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica[4].

La conseguenza geometrica di questo fatto è che *lato e diagonale del quadrato non sono simultaneamente multipli interi di una stessa lunghezza campione*. [5] Sono, come si usa dire, ***incommensurabili***.

Si noti che è l'idea stessa di "misura" intesa in senso elementare a presupporre l'uso di rapporti razionali. La scoperta di grandezze geometriche incommensurabili, quindi, è anzitutto la scoperta dell'inadeguatezza dell'idea classica (e ingenua) di misura come "contare quante volte una lunghezza campione è contenuta in quella da misurare" [6]. Da un altro punto di , è la scoperta dell'inadeguatezza di $\mathbb{Q}$ come insieme numerico su cui basare la geometria analitica.

---

[4] Lo studente è invitato a rivedere quella argomentazione.

[5] Si noti che è sempre possibile scegliere come unità di misura un sottomultiplo del lato del quadrato, *oppure* della diagonale (come oggetti geometrici, nessuno dei due segmenti ha proprietà "peggiori" dell'altro!) ma non è possibile fare *simultaneamente* le due cose.

[6] Nello studio del calcolo integrale lo studente vedrà come questa idea di misura sia stata superata nella matematica moderna.

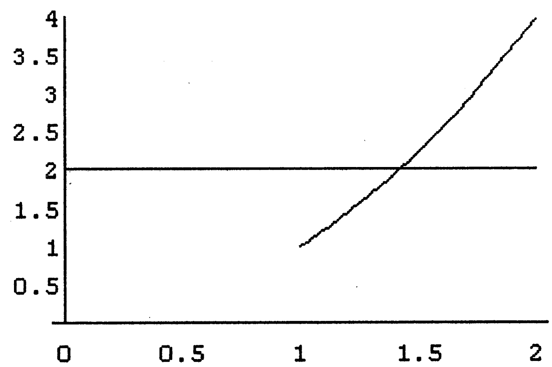
10.1.2. I numeri razionali e le proprietà delle funzioni elementari

Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = x^2$$

e supponiamo di studiarla come funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ (il quadrato di un numero razionale è un numero razionale, quindi questo è sensato).

Chiediamoci: mentre la x varia con continuità tra 1 e 2 (assumendo quindi tutti i valori razionali compresi in questo intervallo), la funzione $f(x) = x^2$ assume *tutti* i valori compresi tra $f(1) = 1$ e $f(2) = 4$? Sappiamo già che la risposta è negativa: ad esempio, x^2 non assume mai il valore 2, oppure 3. Dunque si assiste a questo strano fenomeno: per x razionale, $1 \leq x \leq 2$, la retta orizzontale $y = 2$ non taglia in nessun punto il grafico della parabola $y = x^2$ (v. figura seguente), come se tale grafico fosse una linea *discontinua*!!



Evidentemente non c'è una buona corrispondenza tra l'aspetto geometrico-intuitivo di questo problema e la sua traduzione analitica: il difetto non è nella funzione $f(x) = x^2$, ma nell'insieme numerico $\mathbb{Q}$ che abbiamo scelto come "ambiente di lavoro". Se la stessa funzione si considerasse come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, questa (come si vedrà studiando il calcolo infinitesimale) avrebbe la "proprietà dei valori intermedi", ossia: all'interno dell'intervallo $[1, 2]$ assumerebbe tutti i valori compresi tra $f(1)$ e $f(2)$.

10.1.3. I numeri razionali e l'impossibilità di definire le funzioni esponenziali e logaritmiche

Infine, se consideriamo la funzione

$$f(x) = 2^x,$$

osserviamo che non è nemmeno possibile *definirla* come funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$: infatti, il numero 2 elevato a un esponente razionale non intero *non è mai un numero razionale*. (Lo studente provi a dimostrare per esercizio questa affermazione. Ad ogni modo, per il seguito del discorso, è sufficiente sapere che il numero 2 elevato a un esponente razionale, *talvolta* non è razionale, e questo lo sappiamo già: $2^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{Q}$).

Non esistendo le funzioni esponenziali, non possono neanche esistere le loro inverse, cioè le funzioni logaritmiche.

10.1.4. Conclusione

Abbiamo visto come l'insieme $\mathbb{Q}$ si dimostri inadeguato sia dal punto di vista della *geometria* analitica che da quello dello studio delle *proprietà delle funzioni* di una variabile (che costituirà l'argomento centrale del *calcolo infinitesimale*).

Per *questi motivi* (e non solo "per poter estrarre le radici quadrate") è utile e anzi necessario considerare l'insieme dei numeri reali, che dimostra avere esattamente *quel qualcosa in più* che manca all'insieme dei razionali.

Identificare esattamente cosa fosse "quel qualcosa in più" che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ è stato oggetto di un faticoso cammino storico, culminato, nel 1872, con la pubblicazione simultanea e indipendente da parte di alcuni tra i maggiori matematici del tempo [7], di saggi che costituirono il fondamento rigoroso della teoria dei numeri reali, e un passo cruciale per il fondamento stesso dell'intero calcolo infinitesimale.

Nel prossimo paragrafo spiegheremo appunto quale sia questa proprietà specifica di $\mathbb{R}$.

10.2. Estremo superiore, proprietà dell'estremo superiore, campo reale

La nozione di *estremo superiore*, che ora definiremo ha a che fare esclusivamente con le proprietà di *ordinamento* dell'insieme dei numeri razionali o reali, e non con le proprietà algebriche. Per questo, le definizioni che daremo hanno senso in un qualsiasi insieme X *totalmente ordinato*:

Definizione. Un insieme X si dice ***totalmente ordinato*** se soddisfa le seguenti proprietà:

1. Tra gli elementi di X è definita una relazione di " $\leq$ ", per cui dati due elementi $x, y \in X$, si verifica sempre almeno una delle due:
$$x \leq y \text{ oppure } y \leq x.$$
2. Per ogni $x, y \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$.
3. Per ogni $x, y, z \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$.

Gli insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono tutti esempi di insiemi totalmente ordinati; per il seguito del discorso, ad ogni modo, gli esempi più significativi sono $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$.

Definizione. Sia X un insieme totalmente ordinato [8], e $S \subset X$. Un elemento $a \in X$ si dice ***maggiorante*** di S se risulta $s \leq a$ per ogni $s \in S$.

Un insieme non vuoto che ammette almeno un maggiorante si dice ***superiormente limitato***; in tal caso ha in realtà infiniti maggioranti (ogni numero maggiore di un maggiorante è a sua volta un maggiorante).

Definizione. Sia X un insieme totalmente ordinato, S un suo sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato, M l'insieme di tutti i maggioranti di S. Se l'insieme M

---

[7] Opere di fine secolo scorso in cui si dà una definizione rigorosa dei numeri reali sono dovute a: Cantor (1872), Dedekind (1872), Heine (1872), Méray (1872).

[8] Qui e nel seguito, quando diremo "X insieme totalmente ordinato", lo studente può pensare, per semplicità, che sia $X = \mathbb{Q}$ o $X = \mathbb{R}$.

ammette un elemento minimo, tale elemento si dice ***estremo superiore di S***, e si indica con sup$S$. In simboli:

$$\sup S = \min M = \min\{x \in X : \text{per ogni } s \in S \text{ è } s \leq x\}.$$

Esempio. Sia $X = \mathbb{R}$.

- Se $S = (0,1)$, tutti i numeri ≥ 1 sono maggioranti di S, cioè $M = [1, +\infty)$. Si osservi che non esiste alcun maggiorante di S che appartenga ad S; il numero 1 è il minimo dei maggioranti di S, e quindi è il sup$S$. L'insieme S non ha massimo.
- Se $S = [-1,1]$, i maggioranti di S sono esattamente gli stessi che nell'esempio precedente; il numero 1 è ancora il minimo dei maggioranti di S e quindi il sup$S$; questo numero appartiene ad S, e coincide con il massimo di S
- Se $S = \mathbb{N}$, non esiste alcun maggiorante di S: $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato.

Se esiste sup$S$, e questo elemento appartiene ad S, allora coincide con il massimo di S. Come mostrato con gli esempi, il sup$S$ può anche esistere ma non appartenenre ad S, oppure non esistere.

Definizione. Sia X un insieme totalmente ordinato. Si dice che ***X ha la proprietà dell'estremo superiore*** se per ogni sottoinsieme S di X, non vuoto e superiormente limitato, esiste in X il sup$S$.

Esempio.

- Sia $X = \mathbb{Q}$ e sia $S = \{s \in \mathbb{Q} : s > 0, s^2 < 2\}$. L'insieme S non è vuoto (contiene 1) ed è superiormente limitato (ad esempio, 2 è un maggiorante di S. Lo studente mostri perché). Però S non ammette estremo superiore, in X. Infatti, è facile convincersi che se esistesse il minimo dei maggioranti, questo dovrebbe soddisfare l'equazione $s^2 = 2$, che in $\mathbb{Q}$ non ha soluzioni.
- Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $S = \{s \in \mathbb{R} : s > 0, s^2 < 2\}$. L'insieme S non è vuoto e superiormente limitato; questa volta esiste, in X, l'elemento sup$S = \sqrt{2}$.

L'esempio precedente mostra che $\mathbb{Q}$ è un insieme ordinato che *non ha* la proprietà dell'estremo superiore.

L'esempio *non mostra* che $\mathbb{R}$ abbia questa proprietà (un singolo caso affermativo non è garanzia che la proprietà valga nella sua generalità!). Tuttavia le cose vanno proprio così. Anzi, vanno così *per definizione*.

Definizione. Si dice ***campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali***, un campo ordinato che ha la proprietà dell'estremo superiore.

La proprietà del sup è quindi ***la*** proprietà che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$, e viene anche detta ***assioma di continuità***. Quella appena data è una ***definizione assiomatica di $\mathbb{R}$***. Lo studente può rimanere perplesso di fronte alla pretesa che questa sia una definizione. Tuttavia è così: si può anche mostrare *costruttivamente* che esistono degli oggetti matematici "concreti" che soddisfano questi assiomi; questo può essere fatto in vari modi. Lo studente interessato a capire, ad esempio, quale nesso esista tra questa definizione assiomatica e la consueta presentazione dei numeri reali come allineamenti decimali illimitati può studiare la costruzione del campo reale così come è presentata in [Pagani-Salsa, Analisi Matematica, vol.1, pp. 78 sgg.].

Aver saputo isolare la proprietà dell'estremo superiore come il "qualcosa in più" che ha $\mathbb{R}$ rispetto a $\mathbb{Q}$ è uno dei meriti dei lavori fondazionali di fine secolo scorso a cui si è accennato.

Indipendentemente dal fatto di aver formito una costruzione concreta di $\mathbb{R}$, a partire dalla sua definizione assiomatica si possono dimostrare le sue proprietà. Ad esempio, si può provare quanto segue:

Teorema.

Il campo reale, così come è definito dagli assiomi, è ***essenzialmente unico****, nel senso che, se X, Y sono due insiemi che soddisfano gli assiomi di campo reale, esiste un modo di identificare gli elementi di X con gli elementi di Y; questa identificazione*[9] *rispecchia tutte le proprietà algebriche e di ordinamento.*

Il campo reale, così come è definito dagli assiomi, contiene un sottoinsieme identificabile con l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Diremo più brevemente (anche se meno precisamente) che $\mathbb{R}$ ***contiene*** $\mathbb{Q}$.

Il campo $\mathbb{Q}$ ***è denso in*** $\mathbb{R}$, *cioè per ogni coppia di numeri reali $x_1 < x_2$ esiste un numero razionale r tale che $x_1 < r < x_2$.*

Esercizi

Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, lo studente dica:

- se è superiormente limitato o no;
- in caso affermativo, qual è il suo estremo superiore in $\mathbb{R}$, e:
- se l'estremo superiore appartiene all'insieme stesso (cioè coincide col massimo), oppure no.

152. $$S = (0,1] \cup (2,3)$$

153. $$S = \{1,2,3\}$$

154. $$S = \left\{x = 1 - \frac{1}{n} : n = 1,2,3,\dots\right\}$$

155. $$S = \left\{x = \frac{n^2+1}{n} : n = 1,2,3,\dots\right\}$$

156. $$S = \mathbb{Q} \cap (0,1)$$

157. $$S = \left\{x = \frac{2n}{n+1} : n = 1,2,3,\dots\right\}.$$

[9] Usiamo qui volutamente il termine un po' vago di *identificazione*; il concetto preciso coinvolto in questo Teorema è quello di *isomorfismo*. Preferiamo evitare di darne la definizione esatta, per non appesantire il discorso. Il lettore interessato può trovare questa definizione su [Pagani-Salsa, Analisi Matematica, vol. 1, p. 86].

158. Analogamente alle nozioni di maggiorante ed estremo superiore di un insieme, si possono definire le nozioni di *minorante* ed *estremo inferiore* di un insieme. Lo studente dia queste definizioni, guidato dall'analogia e ragionando su qualche esempio concreto. Dopo aver dato anche la definizione di "*insieme con la proprietà dell'estremo inferiore*", lo studente provi a dimostrare la seguente proposizione:

"Un insieme X totalmente ordinato ha la proprietà dell'estremo superiore se e solo se ha la proprietà dell'estremo inferiore".

10.3. Esistenza di radici, potenze e logaritmi

La proprietà dell'estremo superiore è dunque la proprietà essenziale che dà al campo reale la sua *continuità*, ossia che lo rende adatto a rappresentare la retta nel senso geometrico-intuitivo del termine. Vediamo adesso, sia pur in modo solo accennato, come proprio questa proprietà permetta di mostrare rigorosamente l'esistenza e le proprietà delle potenze ad esponente razionale e reale, e dei logaritmi, di cui abbiamo parlato nei §§ 8 e 9.

Cominciamo dal problema dell'esistenza della radice n-esima. Nel §8.2 abbiamo definito la radice n-esima di un numero positivo x come l'unico numero positivo y tale che $y^n = x$. La definizione è sensata in virtù del prossimo:

Teorema. *Sia $x > 0$ e $n = 2, 3, 4, \ldots$ Allora esiste uno un sol numero reale positivo y tale che $y^n = x$.*

Daremo solo la **linea generale della dimostrazione**[10].

L'unicità della radice n-esima segue dal fatto che la funzione $f(x) = x^n$ è strettamente crescente per $x > 0$. Perciò se esistessero due numeri $y_1 > y_2 > 0$ tali che $y_1^n = y_2^n = x$ seguirebbe un assurdo, perché $y_1 > y_2 > 0 \Rightarrow y_1^n > y_2^n$.

Il problema è mostrare l'esistenza della radice. Anzitutto, è sufficiente dimostrarlo per $x > 1$. Infatti da questo segue il caso $0 < x < 1$ (basta considerare $\frac{1}{x}$, che è > 1, estrarne la radice n-esima e prenderne la reciproca), mentre il caso $x = 1$ è banale.

Consideriamo dunque il caso $x > 1$. Definiamo l'insieme

$$S = \{y > 0 : y^n \leq x\}.$$

L'insieme S non è vuoto, perché $1 \in S$, infatti $1^n = 1 < x$ per ipotesi.

L'insieme S è superiormente limitato. Infatti x stesso è un maggiorante: se $y^n \leq x$ è anche, a maggior ragione, $y \leq x$ (perché $x > 1$, perciò $x < x^n$; dunque $y^n \leq x < x^n \Rightarrow y \leq x$, ancora perché $f(x) = x^n$ è crescente per $x > 0$).

Poiché S non è vuoto ed è superiormente limitato, S ha estremo superiore in $\mathbb{R}$ (qui si applica la proprietà dell'estremo superiore!). Sia $\overline{y} = \sup S$.

Si prova ora che $\overline{y}^n = x$, da cui segue che $\overline{y}$ è proprio la radice n-esima di x. Questa è la parte più "tecnica" della dimostrazione, di cui ometteremo i dettagli. Per provare l'uguaglianza $\overline{y}^n = x$ si prova che non può essere né $\overline{y}^n > x$ né $\overline{y}^n < x$, perché in entrambi i casi si arriverebbe a una contraddizione, in base alla definizione di S e alle proprietà dell'estremo superiore.

---

[10] La dimostrazione completa si può trovare in (quasi) qualunque testo di Analisi Matematica 1.

Ad esempio, si mostra che se fosse $\overline{y}^n < x$, esisterebbe un numero $\varepsilon > 0$ per cui anche $(\overline{y} + \varepsilon)^n < x$, ma allora anche $(\overline{y} + \varepsilon)$ apparterrebbe a S, contro l'ipotesi che $\overline{y}$ sia il sup$S$. □

Dall'esistenza e unicità della radice n-esima segue la possibilità di definire le potenze a esponente razionale, e dimostrarne le relative proprietà.

Il successivo passo della teoria è ***definire l'elevamento a potenza a^b*** con $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Nel §8.6 abbiamo dato una definizione intuitiva di quest'operazione.

Mostriamo ad esempio come si possa definire a^b quando $a > 1$ e $b \in \mathbb{R}$. L'idea, come abbiamo visto nel §8.6, è approssimare a^b con a^r quando r è razionale e approssima b. Questa idea può essere resa precisa al modo seguente. Sia

$$S = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq b\}.$$

Esercizio 159. Dimostrare che l'insieme S non è vuoto ed è superiormente limitato (sfruttare la nostra ipotesi aggiuntiva $a > 1$).

Allora, sempre per la proprietà dell'estremo superiore, esiste

$$x = \sup S.$$

Questo x è, per definizione, a^b. Il caso $a < 1$ si può ricondurre al caso $a > 1$ passando al reciproco.

Si tratterebbe ora di *dimostrare* che le potenze a esponente reale soddisfano le stesse proprietà algebriche e di monotonia delle potenze a esponente razionale...

Concludiamo con qualche cenno all'***esistenza dei logaritmi***.

Dalle proprietà delle potenze ad esponente reale segue anche la monotonia delle funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ per $a > 0, a \neq 1$. Poiché è monotona, la funzione esponenziale è invertibile. Il logaritmo è per definizione questa funzione inversa, e il suo dominio è l'immagine della funzione esponenziale. Il problema è dimostrare che questa immagine è tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Questa dimostrazione può procedere su binari ormai consueti: fissato $x > 0$, di cui vogliamo mostrare l'esistenza del logaritmo in base a, costruiamo l'insieme:

$$S = \{y \in \mathbb{R} : a^y \leq x\}.$$

Sia ad esempio $a > 1$ e $x > 1$. Allora certamente S non è vuoto: ad esempio, contiene 0, perché $a^0 = 1 \leq x$.

Proviamo che S è superiormente limitato. (Questo, se ci si riflette, è lo stesso che mostrare che la funzione esponenziale cresce oltre ogni limite; se così *non fosse*, a^y potrebbe rimanere limitato da x pur crescendo y oltre ogni limite, e S non sarebbe superiormente limitato). Per provare questo fatto si utilizza la disuguaglianza di Bernoulli (v. §1.3.2). Poiché $a > 1$, possiamo scrivere $a = 1 + \delta$ con $\delta > 0$. Allora

$$a^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta.$$

L'ultima quantità scritta è $> x$ purché scegliamo $n > (x - 1)/\delta$. Fissiamo allora un n in questo modo. Allora n è un maggiorante di S perché:

$$y \in S \Rightarrow y^n \leq x < a^n \text{ e } y^n < a^n \Rightarrow y < a.$$

Poiché l'insieme S è non vuoto e superiormente limitato, ammette estremo superiore, $\overline{y}$. Si tratta ora di dimostrare che $a^{\overline{y}} = x$. Omettiamo questa parte della dimostrazione, che si può provare per assurdo. Provato questo, è dimostrata l'esistenza del logaritmo in base $a > 1$ di $x > 1$. Gli altri casi si riconducono facilmente a questo.

Le *proprietà* del logaritmo sono state dimostrate nel §9.2 come conseguenza del fatto di essere funzione inversa dell'esponenziale.

10.4. Conclusione

Nel paragrafo precedente abbiamo voluto mostrare, pur omettendo molti dettagli, quale possa essere l'effettivo impiego dell'assioma dell'estremo superiore. Come si è visto, questo permette in varie circostanze di *dimostrare teoremi di esistenza*. Ad esempio, l'esistenza della radice n-esima, della potenza a esponente reale, del logaritmo.

Analogamente, negli sviluppi del calcolo infinitesimale, l'assioma dell'estremo superiore permette di dimostrare vari teoremi di esistenza dell'insieme dei numeri reali, che a loro volta implicano teoremi di esistenza per *funzioni continue*. Ad esempio, il fenomeno "patologico" che abbiamo illustrato nel §10.1.2, ovvero il fatto che $f(x) = x^2$, se ristretta ai numeri razionali, non abbia la "proprietà dei valori intermedi", si può escludere per le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, "continue", grazie a questi teoremi di esistenza. Un'altra proprietà fondamentale delle funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ della *retta reale* è il fatto che queste ammettano necessariamente un punto di massimo e di minimo (Teorema di Weierstrass). Questi sono argomenti che lo studente incontrerà se approfondirà lo studio del calcolo infinitesimale.

11.* Algebrico e trascendente

Questo capitolo si può considerare come una semplice lettura tesa a spiegare due termini di uso comune in matematica. Queste nozioni non saranno utilizzate, tecnicamente, nel seguito del discorso, ma possono essere utili per riflettere sul concetto di *numero reale* e su quello di *funzione*.

11.1. Numeri algebrici e numeri trascendenti

Definizione. Un numero reale x si dice ***algebrico*** se è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi, ovvero se risulta

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

per opportuni $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}\,(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Un numero reale non algebrico si dice ***trascendente***.

Per capire meglio la definizione, cominciamo ad osservare che ogni numero razionale è algebrico. Infatti se $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, risulta

$$nx - m = 0,$$

dunque x è soluzione di un'equazione algebrica (di primo grado) a coefficienti interi.

Il numero $x = \sqrt{2}$, irrazionale, è algebrico, in quanto è soluzione dell'equazione algebrica (di secondo grado) a coefficienti interi

$$x^2 - 2 = 0.$$

Per fare un esempio più complesso, anche il numero $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{5}}$ è algebrico. Lo studente provi a dimostrare questo fatto per proprio conto prima di leggere quanto segue...

Se $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{5}}$, scriviamo:

$$x^3 = 3 + \sqrt{5},$$

$$x^3 - 3 = \sqrt{5},$$

$$\left(x^3 - 3\right)^2 = 5,$$

$$x^6 - 6x^3 + 4 = 0,$$

che è un'equazione algebrica di grado 6 a coefficienti interi. □

Esercizio 160. Dimostrare che la radice n-esima di un numero razionale positivo è un numero algebrico.

Esercizio 161. Dimostrare che la radice n-esima di un numero algebrico positivo è un numero algebrico.

Dunque, detto $\mathbb{A}$ l'insieme dei numeri reali algebrici, si ha

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R},$$

e abbiamo appena visto che la prima inclusione è *stretta*: esistono numeri algebrici irrazionali.

Che anche la seconda inclusione sia stretta (ovvero che esistano numeri reali non algebrici, cioè numeri trascendenti) è più difficile da dimostrare[11]. Si può dimostrare, utilizzando la *teoria della cardinalità degli insiemi infiniti*, che i numeri reali sono "molto più numerosi" dei numeri algebrici, il che implica l'esistenza di numeri trascendenti (anzi: di infiniti numeri trascendenti). Oppure si può dimostrare che certi specifici numeri sono trascendenti. Ad esempio, il numero π è un numero trascendente[12]; il numero $2^{\sqrt{2}}$ è trascendente. Si conoscono molti altri specifici numeri trascendenti (ma non tantissimi, non ostante la loro abbondanza!).

Un altro fatto notevole che si dimostra (non facilmente) è che l'insieme $\mathbb{A}$ costituisce un *campo ordinato* (v. §1.2.1), come $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Poiché i numeri algebrici sono particolari numeri reali, le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{A}$ "ereditano" tutte le proprietà che hanno in $\mathbb{R}$. Ciò che va dimostrato, quindi, non è tanto il fatto che la somma in $\mathbb{A}$ sia associativa e commutativa (ad esempio), quanto il fatto che la somma di due numeri algebrici sia ancora un numero algebrico. Più in generale, si prova che eseguendo le quattro operazioni su numeri algebrici si trovano ancora numeri algebrici.

Che l'insieme $\mathbb{A}$ sia un campo significa che, se ci interessa poter eseguire le quattro operazioni "al solito modo" e inoltre poter estrarre la radice n-esima di un numero positivo (si veda l'ultimo esercizio proposto), l'insieme $\mathbb{A}$ è un ambiente già sufficientemente ampio. In particolare, il problema dell'estrazione della radice n-esima *non è una motivazione sufficiente per l'introduzione dei numeri reali.* Difatti, nel capitolo precedente, abbiamo fornito altri tipi di motivazioni.

11.2. Funzioni algebriche e funzioni trascendenti

Definizione. Una funzione $y = f(x)$ (reale di variabile reale) si dice ***algebrica*** se esiste un polinomio in due variabili, $P(x, y)$, per cui vale l'identità

$$P(x, f(x)) = 0 \text{ per ogni } x.$$

Una funzione non algebrica si dice ***trascendente***.

[11] Questo risultato è noto come Teorema di Liouville, 1851.

[12] Teorema di Lindemann, 1882

Esempi

- I polinomi sono funzioni algebriche. Infatti se $f(x) = p_n(x)$ è un polinomio (in una variabile), scegliendo il polinomio in 2 variabili $P(x, y) = f(x) - y$, si ha

$$P(x, f(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

- Le funzioni razionali (v. §6.1) sono funzioni algebriche. Infatti se $f(x) = p(x)/q(x)$ è una funzione razionale, con p, q polinomi in una variabile, scegliendo $P(x, y) = p(x) - yq(x)$ si ha $P(x, f(x)) = 0$ (verificarlo per esercizio).

- Le funzioni ottenute a partire da funzioni razionali estraendo anche radici n-esime sono algebriche, Ad esempio

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + \sqrt[3]{x}}$$

è algebrica. Per vederlo, porre $y = \frac{x^2+1}{x+\sqrt[3]{x}}$ e operare così:

$$yx + y\sqrt[3]{x} = x^2 + 1$$

$$y\sqrt[3]{x} = x^2 + 1 - yx$$

$$y^3 x = \left(x^2 + 1 - yx\right)^3$$

dunque ponendo

$$P(x, y) = y^3 x - \left(x^2 + 1 - yx\right)^3$$

si ha proprio

$$P(x, f(x)) = 0.$$

Esercizio 162. Dimostrare che le potenze a esponente razionale sono funzioni algebriche.

Esercizio 163. Dimostrare che la funzione $|x|$ è algebrica.

Proposizione. *Le seguenti funzioni sono trascendenti:*
potenze a esponente irrazionale;
funzioni esponenziali;
funzioni logaritmiche;
funzioni trigonometriche elementari, e loro inverse.

Non dimostreremo questi fatti. Le funzioni elencate nelle precedente proposizione si chiamano anche *trascendenti elementari*. Mediante somma, prodotto, composizione, si possono ottenere da esse altre funzioni trascendenti, più complesse. Ovviamente, non tutte le funzioni trascendenti si possono definire a questo modo. Un semplice esempio di funzione trascendente che non è ottenuta a partire dalle trascendenti elementari è la *funzione di Dirichlet*, già citata nel §7.1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases}$$

12. La trigonometria e le funzioni trigonometriche

La maggior parte degli studenti, a scuola, ha dedicato quasi un anno allo studio della trigonometria e dovrebbe avere perciò una certa consuetudine all'uso di formule, valori notevoli, ecc. In questo capitolo si vuole:

- richiamare le idee che costituiscono il *fondamento concettuale* della trigonometria;
- segnalare quali sono le nozioni che occorre avere presenti;
- mostrare come questo bagaglio di nozioni si possa ricondurre a poche idee e formule, da cui tutte le altre si deducono.

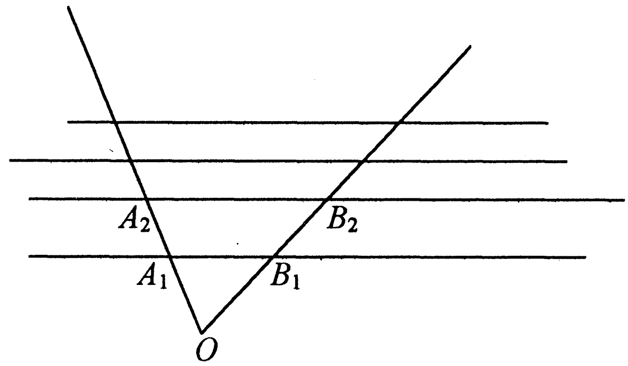
Lo studente dovrebbe così essere in grado di fare una propria sintesi ragionata di questi argomenti, che gli sia utile per farli propri "una volta per tutte". Come per gli altri argomenti, sta alla maturità dello studente capire quanto e che tipo di esercizio sia utile per sviluppare anche la "manualità" necessaria.

12.1. Concetti fondamentali

La trigonometria si occupa delle informazioni che possiamo trarre sulla lunghezza di segmenti, a partire da informazioni su altre lunghezze *e sugli angoli* di certe figure geometriche. Il punto di partenza della trigonometria è la *teoria della similitudine* nella geometria euclidea, così che ogni affermazione fatta per mezzo della trigonometria è riconducibile, in linea di principio, a successive applicazioni di criteri di similitudine dei triangoli o altre figure geometriche; detto in altre parole, ogni calcolo fatto utilizzando le *funzioni trigonometriche seno, coseno, ecc., si può rifare, in linea di principio, utilizzando, anziché le funzioni trigonometriche, opportune catene di proporzioni.* Infatti, come vedremo, le funzioni trigonometriche per definizione non sono altro che opportuni *rapporti di similitudine* fra triangoli. Naturalmente affermare questo non significa affatto dire che la trigonometria sia superflua: al contrario, per chi ne affronta lo studio per la prima volta, questa si può considerare come *un nuovo punto di vista, estremamente utile, su oggetti già noti.*

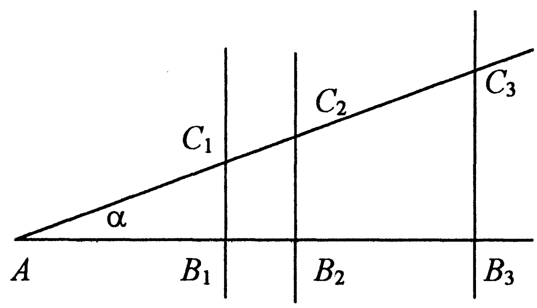
12.1.1. Definizione delle funzioni trigonometriche elementari

1° passo. Il ***Teorema di Talete*** afferma che, date due semirette uscenti da un punto O e un fascio di rette parallele che taglia queste due semirette, i triangoli che si vengono a formare per intersezione di ciascuna retta del fascio con le due semirette sono tutti simili tra loro:



A_1OB_1 è simile a A_2OB_2 ecc.

In particolare, se le rette parallele formano un *angolo retto* con una delle due semirette, i triangoli formati saranno *triangoli rettangoli simili:*

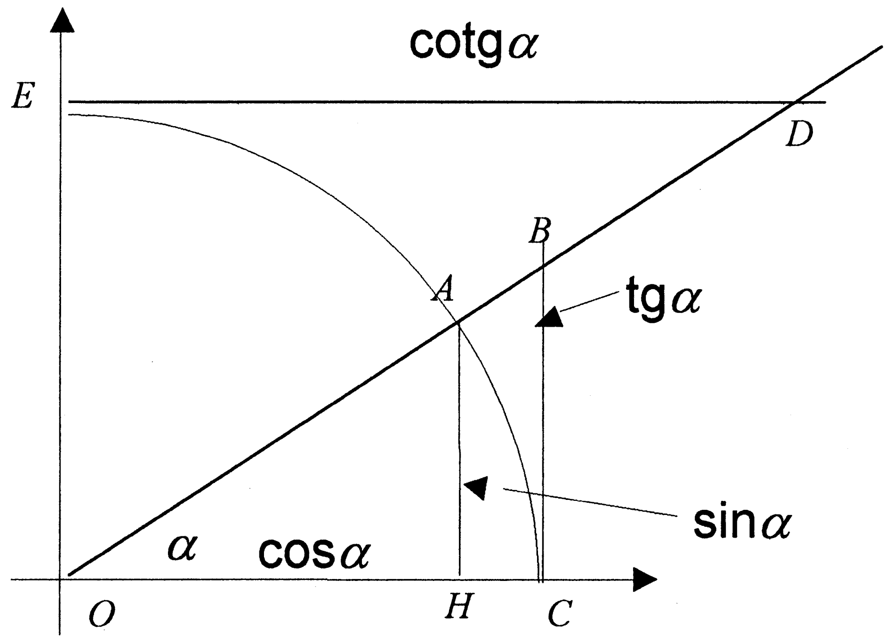


AB_1C_1 simile ad AB_2C_2 ecc. Poiché l'angolo α tra le due simirette individua completamente questa famiglia di triangoli simili, i *rapporti tra lati corrispondenti* di questi triangoli (es.: cateto minore/ipotenusa, ecc.) dipendono solo dalla *famiglia* di triangoli, cioè da α, e non dal particolare triangolo scelto nella famiglia. Si può dire perciò che ciascuno dei rapporti in questione è *funzione di* α. Con riferimento alla figura precedente, diamo dunque dei *nomi* a queste funzioni:

$$\frac{BC}{AC} = \sin\alpha; \ \frac{AB}{AC} = \cos\alpha; \ \frac{BC}{AB} = \tan\alpha; \ \frac{AB}{BC} = \cot\alpha.$$

Dato un angolo acuto α, possiamo sempre ripetere questa costruzione e definire conseguentemente le 4 funzioni trigonometriche fondamentali *seno, coseno, tangente e cotangente,* per quest'angolo.

2° passo. Consideriamo ora, in un sistema di riferimento cartesiano, la circonferenza centrata nell'origine e avente raggio unitario. Questa circonferenza si dirà *circonferenza trigonometrica.* Sia α l'angolo formato tra l'asse x e una semiretta uscente dall'origine, nel primo quadrante, e sia A l'intersezione della semiretta con la circonferenza. Allora, ragionando sul triangolo rettangolo AHO che si è venuto a formare, si vede che le quantità $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, così come sono state definite al punto precedente, uguagliano, rispettivamente, l'ascissa e l'ordinata di A (in quanto l'ipotenusa è il raggio della circonferenza, che vale 1). Analogamente, ragionando sui triangoli OCB e ODE, rispettivamente, si trova che $BC = \tan\alpha$ e $ED = \cot\alpha$.



Sia ora α un angolo *qualsiasi*, cioè un angolo che, fissata un'unità di misura, è espresso da un numero reale qualunque, con la convenzione che gli angoli sono positivi (negativi) se misurati in senso antiorario (orario) a partire dall'asse x. Possiamo *definire* le funzioni $\cos\alpha, \sin\alpha$ come (rispettivamente) l'ascissa e l'ordinata del punto A definito come sopra; analogamente si possono definire le funzioni $\tan\alpha, \cot\alpha$ come, rispettivamente, l'ordinata di B e l'ascissa di D, definendo B, D come nella figura precedente. Si noti che abbiamo usato una proprietà delle funzioni trigonometriche *dimostrata* nel caso in cui l'angolo era acuto, per *estenderne la definizione* al caso in cui l'angolo è qualunque.

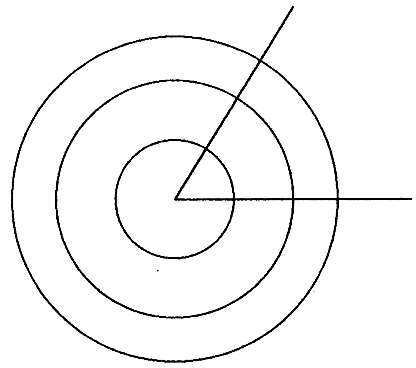
In particolare, le funzioni $\tan\alpha, \mathrm{coth}\alpha$ così definite continuano a soddisfare le relazioni (valide nel caso in cui α era un angolo acuto):

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

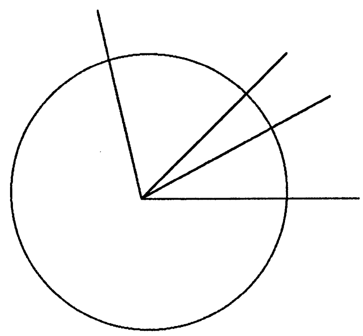
12.1.2. Unità di misura degli angoli

Le considerazioni precedenti valgono a prescindere da quale sia l'unità di misura scelta per gli angoli. Per sceglierne una in modo conveniente, partiamo ancora da considerazioni di similitudine.

In una famiglia di circonferenze concentriche, fissato un angolo al centro, l'arco sotteso è proporzionale al raggio:



(Se raddoppiamo o triplichiamo il raggio, risulta raddoppiato o triplicato anche l'arco, ad esempio). Fissato invece il raggio, l'arco sotteso è proporzionale all'angolo:



Ne segue (perché?) che l'arco a è proporzionale al prodotto dell'angolo α per il raggio r:

$$a = kr\alpha.$$

Decidiamo allora di scegliere l'unità di misura degli angoli in modo tale che nella relazione precedente, la costante di proporzionalità sia $k = 1$. In questa unità di misura degli angoli, detta ***radiante***, la lunghezza dell'arco è quindi il prodotto della lunghezza del raggio per l'angolo:

$$a = r\alpha.$$

In particolare, il radiante è un'unità di misura adimensionale, perché rapporto di due lunghezze (arco e raggio).

Poiché la circonferenza ha lunghezza $2\pi r$, dalla formula $a = r\alpha$ segue che *l'angolo giro vale* 2π *radianti*. Da questo fatto si può stabilire l'ampiezza in radianti dei *sottomultipli notevoli di angolo giro*. Lo studente deve saper riconoscere gli *angoli notevoli* espressi in radianti:

Esercizio 164. Disegnare sulla circonferenza trigometrica tutti gli angoli multipli di 30° e 45°, e trovare il valore corrispondente in radianti. Viceversa, disegnare sulla circonferenza gli angoli multipli di $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$ radianti.

Esercizio 165. Nel dedurre la formula $a = kr\alpha$ si è usato tacitamente il seguente fatto, di interesse generale: "se una grandezza è funzione di 2 variabili (in questo caso α, r) ed è proporzionale a ciascuna delle due, fissata l'altra, allora è proporzionale al prodotto delle due". Provare a dimostrarlo.

Osservazione sulla costruzione degli angoli e la definizione delle funzioni trigonometriche elementari. La definizione che abbiamo dato di $\sin x$, $\cos x$, ecc., presuppone che dato un qualsiasi numero reale x, quindi un qualsiasi segmento sulla retta, si sappia riportare sulla circonferenza trigonometrica un arco di ugual lunghezza (se x è misurato in radianti). Le coordinate dell'estremo di tale arco sono quindi per definizione $\cos x$ e $\sin x$, rispettivamente. Ora, non esiste alcuna costruzione geometrica elementare in grado di compiere l'operazione detta per un segmento x *generico*, perciò la definizione di $\sin x$ e $\cos x$ per questa via, se pure intuitiva, lascia aperto un problema concettuale. Lo studente vedrà in seguito come il calcolo infinitesimale fornisca un metodo completamente rigoroso (ma molto meno intuitivo!) di definire le funzioni trigonometriche per ogni numero reale x [1].

Facciamo una piccola divagazione che tornerà utile. L'area di un settore circolare è proporzionale all'angolo α, fissato il raggio r, ed è proporzionale al *quadrato* del raggio, fissato l'angolo. Ne segue (usando l'argomento visto nell'esercizio precedente) che l'area del settore circolare è

$$A = k\alpha r^2.$$

Per determinare k osserviamo che per $\alpha = 2\pi$ si ottiene tutto il cerchio, che ha area $A = \pi r^2$. Dunque $\pi r^2 = k 2\pi r^2$, ossia $k = \frac{1}{2}$, e

$$A = \frac{1}{2}\alpha r^2.$$

Abbiamo trovato una formula per l'area del settore circolare. Scrivendo $a = r\alpha$ per l'arco, si trova che è anche

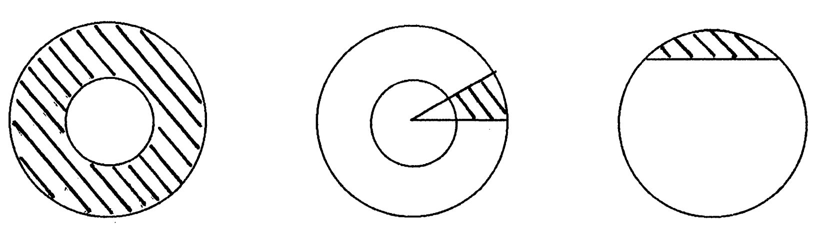
$$A = \frac{1}{2}ar,$$

formula analoga a quella dell'area del triangolo.

Esercizio 166. Con ragionamenti analoghi a quelli appena fatti, ricavare (*non* cercare sui formulari!) l'area di:

a. una corona circolare;
b. un settore di corona circolare;
c. una lunula,

esprimendo il risultato in funzione dei parametri opportuni.



corona circolare   settore di corona   lunula

[1] Si allude qui alla rappresentazione delle funzioni trigonometriche seno e coseno in *serie di potenze*, un importante risultato che si otterrà nel calcolo infinitesimale.

12.1.3. Relazioni fondamentali

Osserviamo la circonferenza trigonometrica. Il punto $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ sta sulla circonferenza e dunque ha distanza 1 dall'origine. Ne segue la relazione:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sempre dalla definizione di $\sin\alpha, \cos\alpha$ in termini di circonferenza trigonometrica, vediamo che:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1; \ -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

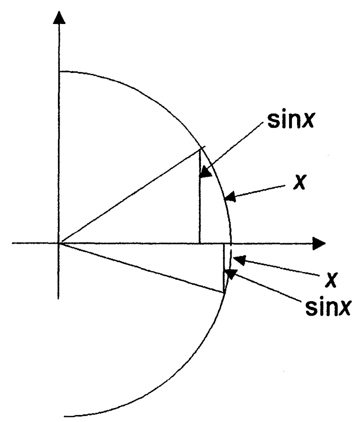
ossia

$$|\sin\alpha| \leq 1; \ |\cos\alpha| \leq 1.$$

Vedendo il valore di α come la lunghezza dell'arco su cui insiste l'angolo α (questo segue dalla definizione di radiante), si ottiene che

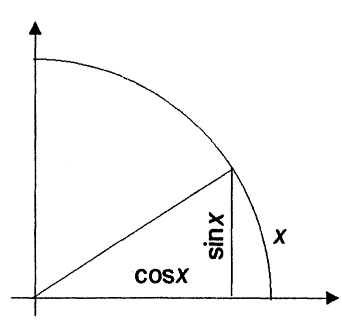
$$|\sin\alpha| \leq |\alpha| \text{ per ogni } \alpha.$$

(La relazione è vera per ogni α, è *significativa* per $|\alpha| < 1$).



Stabiliamo ora qualche altra disuguaglianza che sarà utile nel calcolo infinitesimale. Osservando il triangolo rettangolo nella figura seguente, si vede che

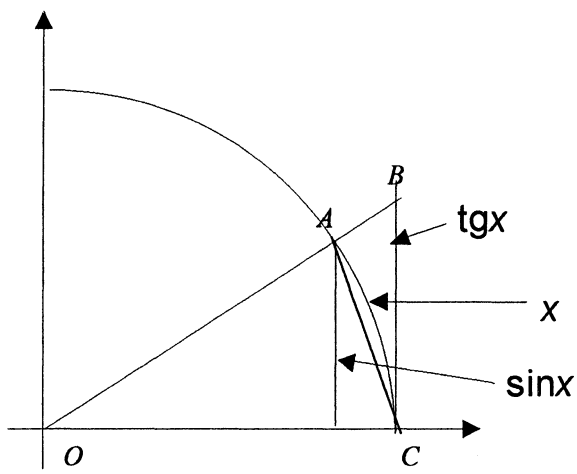
$$1 \leq \cos\alpha + \sin\alpha, \text{ per } \alpha \text{ nel primo quadrante.}$$



(per α negli altri quadranti, la disuguaglianza è vera mettendo il valore assoluto a $\sin\alpha$ e a $\cos\alpha$). In particolare:

$$0 \leq 1 - \cos\alpha \leq \sin\alpha \leq \alpha, \text{ per } \alpha \text{ nel primo quadrante.}$$

Consideriamo ora la figura seguente, per x angolo nel primo quadrante:



L'area del triangolo OCA è minore dell'area del settore circolare OCA, che è minore dell'area del triangolo OBC. Si ottiene quindi, calcolando queste aree:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \leq \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x,$$

cioè

$$\sin x \leq x \leq \tan x,$$

ossia:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Questa relazione avrà una conseguenza importante nel calcolo infinitesimale, e ci permetterà di tracciare un grafico accurato della funzione $\sin x$ per x vicino a 0.

Il fatto che le funzioni $\sin x, \cos x$ siano state definite prima per angoli acuti e poi per angoli qualsiasi, suggerisce che i valori che queste funzioni assumono nel primo quadrante determinino tutti gli altri. Difatti è proprio così. Un'occhiata alla circonferenza trigonometrica mostra che

Tabella A. Relazioni tra archi associati

$$\sin(\pi - x) = \sin x; \;\; \sin(x + \pi) = -\sin x; \;\; \sin(-x) = -\sin x;$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x; \;\; \cos(x + \pi) = -\cos x; \;\; \cos(-x) = \cos x.$$

Valgono anche le relazioni seguenti tra seno e coseno:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \;\; \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x; \;\; \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x.$$

Infine valgono le relazioni di periodicità: per ogni intero relativo k,

$$\sin(x+2k\pi) = \sin x; \; \cos(x+2k\pi) = \cos x; \; \tan(x+k\pi) = \tan x; \; \cot(x+\pi) = \cot x.$$

Per esercizio, lo studente dimostri tutte le relazioni scritte nella Tabella A, ragionando su opportune figure.

Valori notevoli delle funzioni trigonometriche elementari. Il valore di sinα, cosα per $\alpha = \pi/6$, $\pi/3$ si può dedurre ragionando sulle relazioni esistenti in un triangolo equilatero; per $\alpha = \pi/4$ si ottengono ragionando su un quadrato; per gli altri valori notevoli si ottengono osservando la circonferenza trigonometrica e deducendo il valore dai precedenti con opportune considerazioni di simmetria. Il valore di tanα, cotα si ottiene poi da quello di sinα, cosα.

Ragionando a questo modo, lo studente riottenga i risultati scritti nella prossima Tabella B, e la completi.

α	**sinα**	**cosα**	**tanα**	**cotα**
0	0	1	0	non definita
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	non definita	0
$\frac{2\pi}{3}$				
$\frac{3\pi}{4}$				
$\frac{5\pi}{6}$				
π				
ecc.				

Tabella B. Valori notevoli delle funzioni trigonometriche

Osservazione. Il valore delle funzioni trigonometriche elementari in corrispondenza di un angolo qualunque (diverso dai precedenti valori notevoli) può essere calcolato con una calcolatrice tascabile. Nel far questo:

1. Si presti attenzione all'unità di misura usata dalla calcolatrice per gli angoli;
2. Si ricordi che il valore così ottenuto è in generale approssimato. Ad esempio, $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, che è un numero irrazionale; il valore fornito dalla calcolatrice (ad esempio con 8 decimali) è perciò necessariamente approssimato. Il valore esatto è stato dedotto in questo caso con considerazioni teoriche.

Osservazione. Calcolo di sin$x$ a partire da cos$x$ e viceversa. Se si conosce il valore di sin$x$, è possibile calcolare quello di cos$x$ (o viceversa)? La relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ fornisce

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Perciò il valore di sin$x$ determina il valore di cos$x$ a meno del segno. Questo segno si può determinare se si conosce il quadrante a cui appartiene x.

Ad esempio: sapendo che $\sin\frac{5}{8}\pi = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, calcolare $\cos\frac{5}{8}\pi$. Si procede così: l'angolo $\frac{5}{8}\pi$ sta nel secondo quadrante (perché?), dunque ha coseno negativo. Allora,

$$\cos\frac{5}{8}\pi = -\sqrt{1-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}/2\right)^2} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Esercizio 167. Sapendo che $\cos x = -0.3$ e x sta nel terzo quadrante, calcolare $\sin x$ e $\tan x$.

12.2. Le identità notevoli della trigonometria

In trigonometria esiste un gran numero di *identità*, ossia relazioni che permettono di scrivere un'espressione contenente funzioni trigonometriche sotto un'altra forma, a prima vista diversa. Queste identità sono molto utili per semplificare espressioni, risolvere equazioni e disequazioni, calcolare il valore delle funzioni trigonometriche per certi valori della variabile a partire da pochi valori notevoli, e così via.

Lo studente che ha studiato la trigonometria alle superiori avrà un ricordo probabilmente poco felice di questi formulari. Cercheremo ora di sdrammatizzare la situazione mostrando come le formule più utili si possano ricavare abbastanza facilmente a partire da poche identità di base.

Abbiamo già incontrato alcune formule trigonometriche nel §12.1.3: le relazioni fondamentali, le relazioni tra archi associati (Tabella A), che si possono ricordare semplicemente disegnando la circonferenza trigonometrica e osservando una figura, e i valori notevoli delle funzioni trigonometriche (Tabella B), che anche in questo caso, si possono ricordare facilmente (una volta memorizzati per $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, gli altri casi si riconducono a questi in base a opportune simmetrie).

Dimostreremo per prima cosa le *formule di addizione e sottrazione*. Sono 4 formule fondamentali da cui si dedurranno, direttamente o indirettamente, tutte le altre identità che ci serviranno. Lo studente è invitato a riflettere sulla dimostrazione, semplice ma non banale.

Teorema. Formule di addizione e sottrazione[2]. *Per α, β angoli qualsiasi valgono le formule:*

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \tag{1}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \tag{3}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

[2] Queste formule erano già note a Tolomeo, nel 150 d.C.!

Dimostrazione. Proveremo direttamente la (1) con un argomento geometrico. La (2) segue poi dalla (1) sostituendo β con $-\beta$ e sfruttando le simmetrie di seno e coseno. La (3) segue dalla (2) sfruttando le relazioni tra gli archi associati (Tabella A):

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

per la (2)

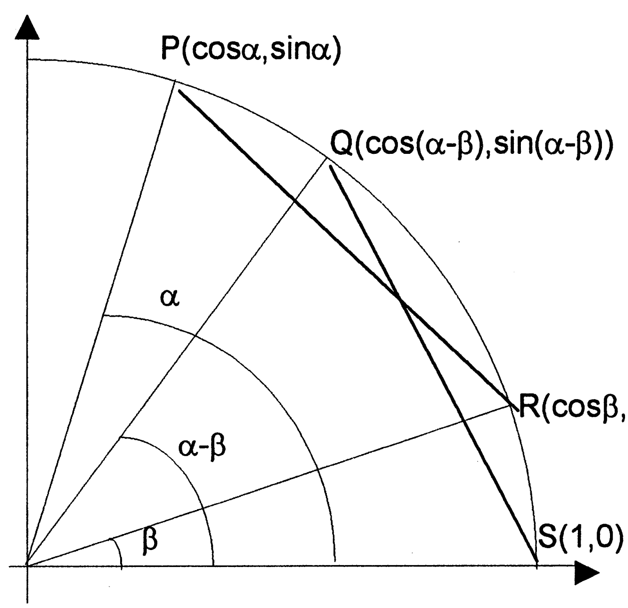
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$

ancora per le relazioni tra gli archi associati

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Infine, la (4) segue dalla (3) sostituendo β con $-\beta$ e sfruttando le simmetrie di seno e coseno.

Proviamo dunque la (1). Consideriamo la figura seguente:



Abbiamo assegnato ai punti P, Q, R, S le loro coordinate, sfruttando la definizione di seno e coseno. Ora osserviamo che i segmenti PR, QS hanno ugual lunghezza, perché sono corde sottese ad angoli uguali $(\alpha - \beta)$. Uguagliando i quadrati di queste lunghezze si ha:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta).$$

Svolgendo i calcoli e applicando la relazione fondamentale tra seno e coseno si ottiene

$$2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

che, semplificata, dà proprio la (1). $\square$

Corollario. *Valgono le seguenti identità:*

A) Formule di duplicazione:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \tag{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{6}$$

B) Formule per abbassare il grado di espressioni quadratiche:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \tag{7}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \tag{8}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha. \tag{9}$$

C) Formule di bisezione:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \tag{10}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{11}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{12}$$

D) Formule parametriche: ponendo $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, *si ha:*

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \tag{13}$$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{14}$$

E) Formule di prostaferesi (prima versione):

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]; \tag{15}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]; \tag{16}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]. \tag{17}$$

F) Formule di prostaferesi (seconda versione):

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right); \tag{18}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right); \tag{19}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right); \tag{20}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{21}$$

Dimostrazione.

A). Basta porre $\alpha = \beta$ nelle formule di addizione (2) e (3) per trovare (5) e (6). Nella (5) la stessa espressione si scrive in 3 modi diversi usando la relazione $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

B). (7) e (8) seguono dalla (5); (9) segue dalla (6).

C). Nella (7) e (8) si prende la radice quadrata di ambo i membri, e si sostituisce α con $\alpha/2$. Si ottengono così le (10), (11); il simbolo $\pm$ significa che occorre scegliere il segno giusto, sapendo in che quadrante si trova $\alpha/2$. La (12) si ottiene dividendo membro a membro le (10) e (11): si ottiene:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Se ora si moltiplica numeratore e denominatore del radicando per $(1-\cos\alpha)$ si ottiene

$$\pm\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

se invece si moltiplica per $(1+\cos\alpha)$ si ottiene

$$\pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Infine, ragionando sul segno di $\tan\frac{\alpha}{2}$ a seconda del quadrante in cui si trova α, si scopre che in realtà il segno corretto davanti alla frazione è sempre $+$.

D). Poniamo $t = \tan\frac{\alpha}{2}$; allora le (12) si riscrivono come:

$$\begin{cases} \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = t \\ \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = t. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema in $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ in funzione di t, si trovano le (13), (14).

E). Sommando membro a membro opportunamente le formule di addizione e sottrazione si trovano le (15), (16), (17).

F). Sostituendo nelle (15), (16), (17) α, β con $(\alpha+\beta)/2$, $(\alpha-\beta)/2$, rispettivamente, si ottengono le (18), (20), (21). Per ottenere (19) si sostituisce nella (15) α, β con $(\alpha-\beta)/2$, $(\alpha+\beta)/2$. □

Lo studente dev'essere in grado di ripetere agilmente le precedenti dimostrazioni, per saper ricavare rapidamente le relazioni utili di volta in volta. Questo non toglie che sia buona cosa ricordare *anche* a memoria le precedenti identità, o almeno alcune di esse.

I prossimi esercizi mostrano alcune tipiche applicazioni delle identità trigonometriche.

Esercizi

168. Usando ripetutamente le formule di addizione e di duplicazione, esprimere in funzione di $\sin x$ e $\cos x$ le funzioni:

$$\sin 3x, \cos 4x, \sin 5x.$$

169. *Il problema della trisezione dell'angolo.* Supponiamo di possedere un righello graduato ma non un trigonometro, e voler costruire l'angolo $x/3$, a partire da un angolo x. Si può procedere così:

1. dato x, si calcola $\sin x$;
2. dato $\sin x$, si calcola $\sin(x/3)$;
3. dato $\sin(x/3)$, si costruisce l'angolo $x/3$.

Il punto 2 richiede, per essere risolto, che si sappia risolvere una certa equazione di terzo grado. Quale? (Suggerimento: usare la formula per $\sin 3x$ trovata nell'esercizio precedente).

170. Riscrivere la seguente espressione in funzione di $\sin 2x, \cos 2x$, allo scopo di abbassare il grado delle potenze che compaiono:

$$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + \cos^4 x.$$

171. Usando le formule di prostaferesi, riscrivere come somma di funzioni del tipo $\sin(\omega x), \cos(\omega x)$, le espressioni:

$$\sin nx\cos mx;\ \sin nx\sin mx;\ \cos nx\cos mx,$$

con n, m interi diversi tra loro. (Questo fatto si utilizzerà, nel calcolo infinitesimale, per calcolare l'*integrale* di queste funzioni).

172. Utilizzare le formule di bisezione per calcolare il valore esatto di $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$.

173. Utilizzando anche il valore di $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ calcolato nell'esercizio precedente, calcolare il valore esatto di $\sin\left(k\frac{\pi}{12}\right)$ per $k = 5, 7, 11$.

174. Calcolare il valore esatto di $\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right)$.

175. (*Solo per chi ha studiato il Cap.11*). Dimostrare che $\sin\frac{\pi}{12}$ è un numero algebrico.

176. Dimostrare l'identità (valida quando ambo i membri hanno significato):

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

177. Dimostrare l'identità (valida quando ambo i membri hanno significato):

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}.$$

178. Utilizzando le formule parametriche, riscrivere in funzione di $t=\tan\frac{\alpha}{2}$ l'espressione

$$\frac{3+\cos x}{4+2\cos x-\sin x}.$$

(Questo tipo di trasformazione sarà utile, nel calcolo infinitesimale, quando si dovrà *calcolare l'integrale* di una funzione trigonometrica come quella appena scritta).

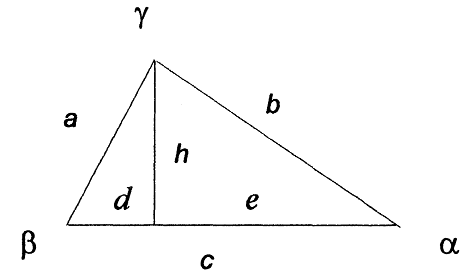
12.3. Applicazioni geometriche della trigonometria

Le applicazioni geometriche sono ciò per cui la trigonometria è stata inventata, perciò sono fondamentali per capirne l'utilità. Nello studio del calcolo infinitesimale, questi aspetti si perderanno un po' di vista, a favore di altre sottolineature. Lo studente cerchi tuttavia di non perdere questo tipo di manualità, che gli sarà molto utile nelle applicazioni geometriche e fisiche.

12.3.1. Risoluzione dei triangoli rettangoli

Dalla prima definizione di seno, coseno, tangente e cotangente come rapporti di opportuni lati di un triangolo rettangolo seguono (tautologicamente) le relazioni che permettono di esprimere un lato di un triangolo rettangolo come prodotto di un altro lato per un'opportuna funzione di un opportuno angolo.

Proposizione. *Si consideri un generico triangolo rettangolo:*



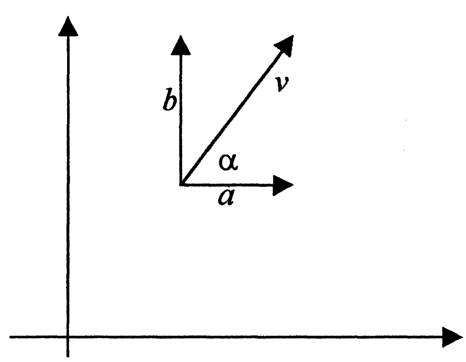
Allora valgono le seguenti relazioni:

$$b = c\sin\beta = c\cos\alpha = a\tan\beta = a\cot\alpha.$$

Esercizio 179. Applicando opportunamente le relazioni precedenti, esprimere a, d, e, h in funzione di c e α, oppure di c e β.

12.3.2. Proiezioni

La risoluzione dei triangoli rettangoli si applica, in particolare, ogniqualvolta occorre calcolare le proiezioni di un vettore su due assi coordinati:



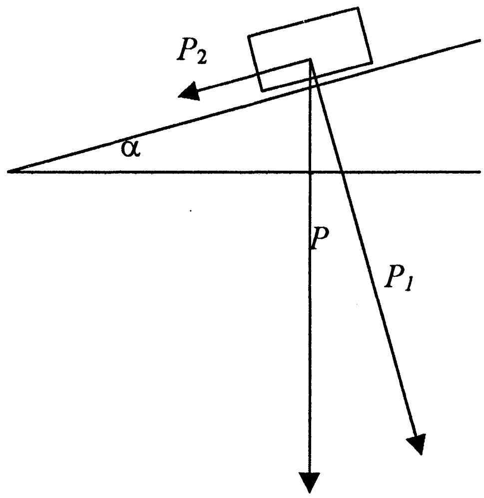
Il vettore $\boldsymbol{v}$ in figura ha componenti $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ nelle direzioni degli assi x, y i cui moduli sono dati, rispettivamente, da

$$a = v\cos\alpha; \; b = v\sin\alpha$$

dove v è il modulo di $\boldsymbol{v}$.

Esercizio 180. Si consideri la seguente figura, in cui il peso $\boldsymbol{P}$ di un corpo che scivola lungo un piano inclinato è decomposto nelle componenti ortogonale $\boldsymbol{P}_1$ e parallela $\boldsymbol{P}_2$ al piano inclinato. Esprimere il modulo dei vettori $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ in funzione del modulo di $\boldsymbol{P}$

e dell'angolo α che il piano inclinato forma con l'orizzontale.



12.3.3. Risoluzione di triangoli qualsiasi: *a.* Teorema del coseno

Consideriamo ora un triangolo ABC qualsiasi, cioè non necessariamente rettangolo. Sappiamo che il triangolo è determinato se sono noti:

i 3 lati, oppure

2 lati e l'angolo tra essi compreso, oppure

2 angoli e il lato ad essi adiacente.

Le ultime due situazioni hanno a che fare con gli angoli e quindi con la trigonometria. Ci occupiamo ora della seconda, nel prossimo paragrafo della terza.

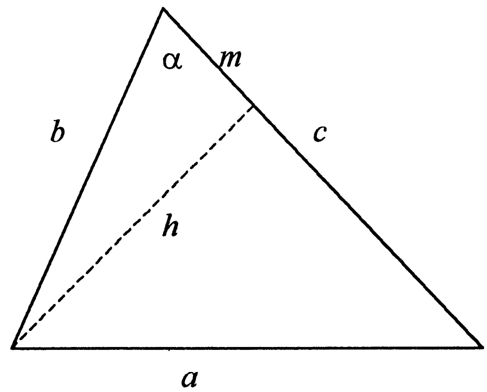
Il problema si può formulare al modo seguente: dati due lati di un triangolo e l'angolo tra essi compreso, determinare il terzo lato. Risponde a questo problema il:

Teorema del coseno. *Consideriamo un triangolo qualsiasi di lati a, b, c, e sia α l'angolo opposto ad a. Allora vale la formula:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Il Teorema serve a calcolare il lato a noti i lati b, c e l'angolo α tra essi compreso. Si osservi che se in particolare $\alpha = \pi/2$ si ritrova il Teorema di Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$. Per α acuto, il lato a risulta minore di quello del triangolo rettangolo con cateti b, c, mentre per α ottuso si ha $-2bc\cos\alpha > 0$, e il lato a risulta maggiore di quello del triangolo rettangolo con cateti b, c.

Dimostrazione. Tracciamo l'altezza h relativa al lato c:



Consideriamo ora il triangolo rettangolo di lati b, h, m.

> Lo studente provi ora a proseguire la dimostrazione da solo, prima di leggere il seguito...

Si ha:

$$m = b\cos\alpha;\ h = b\sin\alpha.$$

D'altro canto per il teorema di Pitagora,

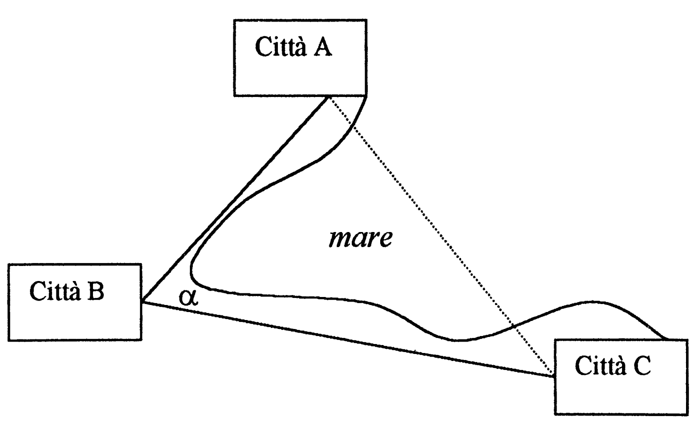
$$a^2 = h^2 + (c - m)^2.$$

Ne segue:

$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha =$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \qquad \square$$

Esercizio 181. Si vuole misurare la distanza in linea d'aria tra due città costiere A e C (v. figura seguente).



Sapendo che A dista da B 10km, B dista da C 15km, e $\alpha = 0.95$rad, calcolare la distanza tra A e C (usare una calcolatrice).

12.3.4. Risoluzione di triangoli qualsiasi: *b*. Triangolazioni

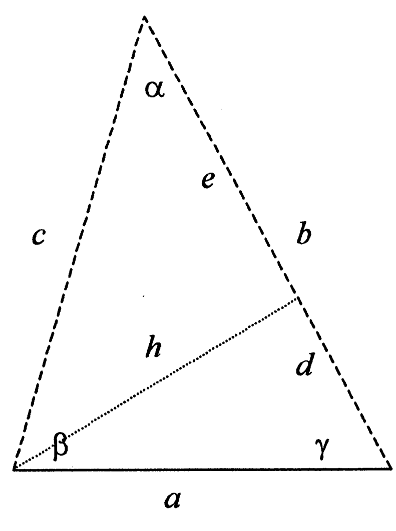
Studiamo ora la situazione seguente: sono noti due angoli di un triangolo qualsiasi, e il lato ad essi adiacente. Si vogliono determinare gli altri lati del triangolo.

Questo problema ha molte applicazioni pratiche alle misure di distanze "in natura". Il problema si può formulare anche così: si vuole determinare la posizione di un punto lontano, che non si può raggiungere, ma si può *osservare* da due punti diversi, tra loro accessibili. Esempi di questa situazione:

- determinazione della posizione di un'isola osservandola da due punti diversi della costa (tra cui la distanza in linea d'aria è nota);
- determinazione della posizione della vetta di una montagna, osservandola da due punti diversi, posti a valle, e tra loro accessibili (l'utilizzo ripetuto di questo metodo per costuire una mappa altimetrica si dice *metodo di triangolazione*);
- calcolo della distanza di una stella osservandola dalla terra a distanza di 6 mesi, cioè osservandola da due punti diametralmente oposti dell'orbita che la terra forma attorno al sole (il diametro dell'orbita è noto). Questo metodo di misurazione astronomica si chiama *metodo della parallasse*.

Consideriamo quindi un triangolo di lati a, b, c, siano β, γ gli angoli opposti a b, c, rispettivamente. Il problema è determinare b, c noti a, β, γ.

Si consideri la figura:



L'idea è quella di ricondursi alla risoluzione di triangoli rettangoli, tracciando l'altezza relativa a uno dei due lati incogniti, ad esempio h relativa a b. Ora calcoleremo b come $d + e$, dopo aver determinato d ed e ragionando su opportuni triangoli rettangoli.

Lo studente provi ora a proseguire da solo il ragionamento necessario ad ottenenre una formula per b in funzione di a, β, γ, prima di leggere il seguito...

Considerando il triangolo rettangolo di lati h, d, a abbiamo:

$$d = a\cos\gamma;$$

$$h = a\sin\gamma.$$

Considerando invece il triangolo rettangolo di lati e, h, c abbiamo:

$$e = h\cot\alpha = h\cot(\pi - \beta - \gamma),$$

dove abbiamo espresso α in funzione di $\beta + \gamma$ usando il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo fa π. Osserviamo ora che:

$$\cot(\pi - \beta - \gamma) = \frac{\cos(\pi - \beta - \gamma)}{\sin(\pi - \beta - \gamma)} = \frac{-\cos(\beta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Quindi:

$$b = d + e = a\cos\gamma + a\sin\gamma\left[\frac{-\cos(\beta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)}\right] =$$

$$= \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)}\{\cos\gamma(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) + \sin\gamma(-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)\} =$$

$$= a\frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}$$

Negli ultimi passaggi si è fatto uso di alcune identità trigonometriche viste nel §12.2.

Infine, un attimo di riflessione sulla simmetria dei ruoli di b, c mostra che una formula analoga deve valere per c, scaqmbiando tra loro β e γ. In definitiva abbiamo dunque:

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}; \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}. \qquad \square$$

Le formule finali trovate sono semplici ed eleganti, e si prestano a qualche osservazione sul loro utilizzo pratico.

Cosa accade se si cerca di determinare con questo metodo la posizione di un punto *molto lontano*? Succederà che b, c sono molto grandi rispetto ad a, ovvero che l'angolo α è molto piccolo, e l'angolo $\beta + \gamma$ è prossimo a π. Ciò significa che il denominatore, nella formula è vicino a zero; in particolare, un piccolo errore nella misurazione degli angoli porta in questo caso un errore grande nella valutazione di b, c: *per calcolare mediante triangolazione la distanza di un punto molto lontano occorre saper misurare gli angoli con grande precisione*.

Esercizi

182. Una stella viene osservata da due punti diametralmente opposti dell'orbita terrestre, posti tra loro a distanza $a = 294\,940\,000\text{km}$. Supponendo che gli angoli sotto cui viene visto l'oggetto dai due punti siano $\beta = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 10^{-6}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 10^{-6}$, determinare un valore approssimato di b e c in anni luce (1 anno luce $= 9.46 \cdot 10^{12}\text{km}$).

183. Da due punti A, B posti alla stessa altitudine, si osserva la cima C di una montagna. Si misurano i seguenti angoli:

$$B\widehat{A}C = 1.3\text{rad};\ A\widehat{B}C = 1.4\text{rad}.$$

Inoltre, il punto C è visto da A con un angolo di alzo sull'orizzontale pari a 0.7rad. Sapendo anche che $\overline{AB} = 100m$, calcolare a che altezza si trova C rispetto ad A e B.

184. In un poligono regolare, si dice *apotema* la lunghezza del segmento che unisce il centro al punto medio di un lato, e *raggio* il raggio del cerchio circoscritto.

a. Scrivere la formula che assegna l'apotema di un poligono regolare di n lati e raggio r in funzione di r e n. Calcolare poi tale valore per $n = 3, 4, \dots, 12$.

b. Scrivere le formule che assegnano il lato e l'area del poligono regolare di n lati e raggio r in funzione di r e n.

c. Per r fissato e n sempre più grande, a quale valore ci si aspetta che si avvicini l'area del poligono regolare? Quale relazione sulle funzioni trigonometriche si può quindi congetturare che valga?

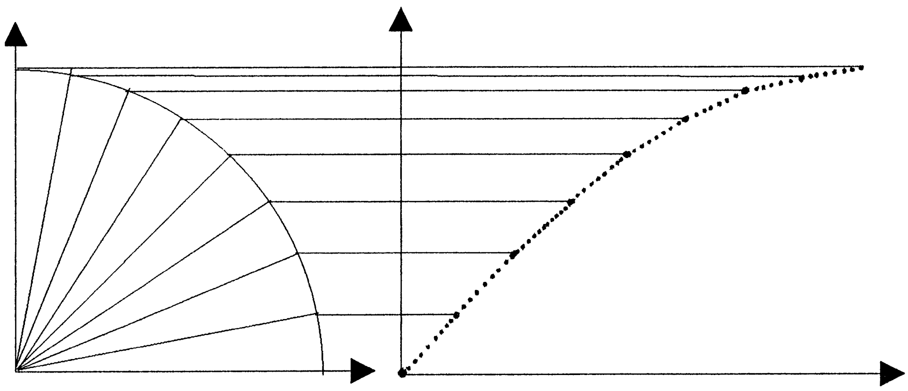
12.4. Studio delle funzioni trigonometriche elementari

Studiamo ora le proprietà di $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ vedendole come funzioni reali di variabile reale. Siamo interessati a stabilirne le proprietà funzionali: simmetria, periodicità, monotonia, ecc., e a tracciarne il grafico. Sarà questo il punto di vista importante per il calcolo infinitesimale.

Dalle relazioni scritte alla fine del §12.1.3 (Tabella *a*) leggiamo anzitutto che:

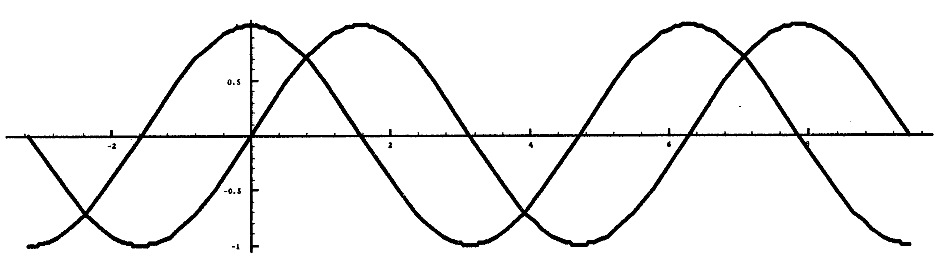
- $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π;
- $\tan x$ e $\cot x$ sono periodiche di periodo π;
- $\cos x$ è simmetrica pari;
- $\sin x$ è simmetrica dispari;
- $\tan x$ e $\cot x$ sono dispari, perché quoziente di una funzione dispari e una pari, o viceversa.

Concentriamoci sul grafico di $\sin x$ e $\cos x$. Sappiamo che i valori assunti nel primo quadrante determinano tutti gli altri. Uno sguardo alla circonferenza trigonometrica mostra che, per definizione, $\sin x$ e $\cos x$ sono, rispettivamente, strettamente crescente e strettamente decrescente nel primo quadrante, ossia sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La tabella dei valori notevoli di $\sin x, \cos x$ offre ulteriori elementi per tracciare il grafico. Per disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sin x$, ad esempio, possiamo fare la costruzione seguente:



Il disegno a sinistra è un quarto di circonferenza trigonometrica, in cui l'angolo retto è stato suddiviso in 8 parti uguali; l'ordinata di ciascuno dei punti di intersezione è il valore di sin$x$ per x corrispondente a $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \ldots$ di angolo retto. Unendo i punti ottenuti si ha un'idea abbastanza corretta della curva sin$x$ sull'intervallo $[0, \pi/2]$: si osserva che questa cresce sempre più lentamente, arrivando ad avere tangente orizzontale in $x = \pi/2$; in $x = 0$ invece ha tangente obliqua. Sappiamo che sin$x \leq x$, perciò *la pendenza di tale tangente non può superare quella della retta* $y = x$ [3]; il calcolo infinitesimale mostrerà che la retta tangente nell'origine è *esattamente* $y = x$.

Tenuto conto di simmetria e periodicità, si può ora disegnare il grafico di sin$x$. Per tracciare quello di cos$x$, poi, non occorre ripetere questi tipi di ragonamenti: per le relazioni tra seno e coseno scritte nel §12.1.3, il grafico di cos$x$ si ottiene da quello di sin$x$ mediante riflessione e traslazione. Si ottiene:



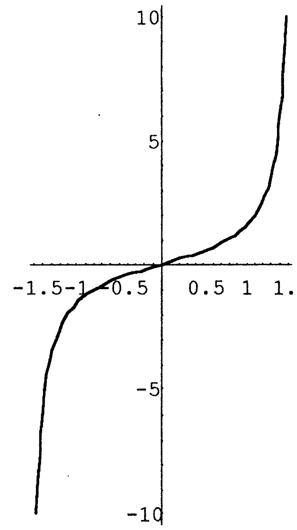
Lo studente è invitato a rendersi conto in dettaglio delle affermazioni appena fatte, ovvero:

- Dedurre dal grafico di sin$x$ su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ il grafico intero di sin$x$, sfruttando la simmetria e periodicità;
- Dedurre il grafico di cos$x$ da quello di sin$x$, sfruttando le relazioni tra le due funzioni.

Veniamo ora alla funzione tan$x$. E' sufficiente tracciarne il grafico in $[0, \frac{\pi}{2})$ (ricordiamo che non è definita in $x = \frac{\pi}{2}$) e poi prolungare il grafico mediante la simmetria e la periodicità. Nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$ la funzione tan$x$ è quoziente di due funzioni positive, una crescente, l'altra decrescente, dunque è *crescente*. (Perché?).

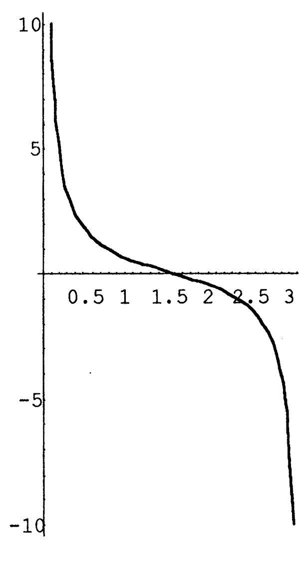
[3] Un errore abbastanza comune è quello di disegnare la sinusoide come una sequenza di semicirconferenze rivolte alternativamente verso l'alto e il basso: in questo modo si ottiene una curva con retta tangente verticale in tutti i punti d'intersezione. La sinusoide non è mai più ripida di $\frac{\pi}{4}$, invece. Un grafico accurato è essenziale quando, ad esempio, bisogna *confrontare due funzioni diverse*.

Avvicinandosi x a $\frac{\pi}{2}$, la funzione cresce oltre ogni limite (perché il numeratore si avvicina a 1 mentre il denominatore si avvicina a 0). Il grafico su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è dunque del tipo:



e presenta "asintoti verticali" per $x = \pm\pi/2$. Il grafico intero si ottiene periodizzando questo.

Infine, ragionamenti analoghi forniscono il grafico di $\cot x$ sul periodo $(0, \pi)$:



Anche se il nostro grafico, non in scala, non evidenzia questo fatto, nel punto di intersezione con l'asse x le curve $\tan x$ e $\cot x$ hanno retta tangente $y = \pm x$. Questo fatto sarà dimostrato dal calcolo infinitesimale.

Concludiamo il paragrafo con una osservazione. A seconda del problema in esame, le proprietà utili delle funzioni trigonometriche elementari possono essere ottenute (o facilmente ricordate) ragionando sulla circonferenza trigonometrica, *oppure* ragionando sul grafico delle funzioni. Lo studente deve quindi aver ben presenti *entrambi* i punti di vista, e saper passare agilmente dall'uno all'altro.

12.5. Equazioni e disequazioni trigonometriche

Vediamo ora come si affrontano le equazioni e disequazioni che coinvolgono funzioni trigonometriche. La difficoltà principale emerge già da esempi elementari, come:

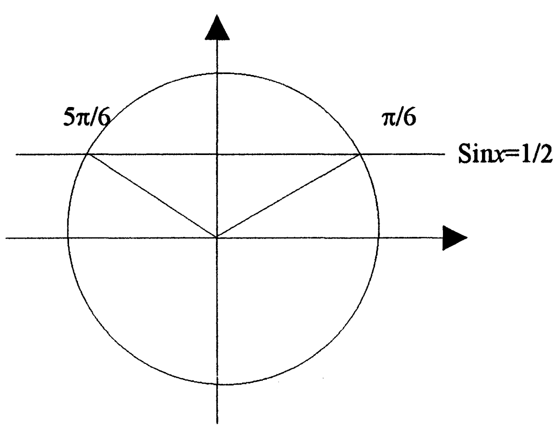
$$\sin x = \frac{1}{2},\ \sin x > \frac{1}{2},\ \sin x < \frac{1}{2}.$$

Volendo risolvere l'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$, ricordiamo che, per x compreso tra 0 e 2π, $\sin x = \frac{1}{2}$ in corrispondenza di due valori notevoli di x: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5}{6}\pi$. Poiché inoltre la funzione seno è periodica di periodo 2π, se vogliamo ottenere *tutte* le soluzioni dell'equazione dobbiamo scrivere:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo quindi infinite soluzioni: 2 successioni di soluzioni.

Per risolvere la disequazione $\sin x > \frac{1}{2}$, occorre guardarsi dal tipico "errore del principiante", che consiste nel ricopiare semplicemente le soluzioni dell'equazione corrispondente, con un segno di $>$ anziché di $=$. Infatti la funzione seno non è monotona (né crescente né decrescente), perciò $x > \alpha$ *non è equivalente* a $\sin x > \sin\alpha$. Piuttosto, occorre osservare la circonferenza trigonometrica, e vedere in quali intervalli è soddisfatta la disequazione:



In questo caso, ad esempio, si ha che nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la disequazione è verificata per $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$. Quindi tutte le soluzioni della disequazione sono espresse da:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Se poi si vuole risolvere la disequazione $\sin x < \frac{1}{2}$, occorre ancora osservare la circonferenza trigonometrica. In questo caso, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, le soluzioni sono:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < x \leq 2\pi,$$

e quindi tutte le soluzioni sono date da:

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi,\ \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Volendo esprimere le stesse soluzioni in modo più compatto, si può ricorrere a una sola successione di intervalli, così:

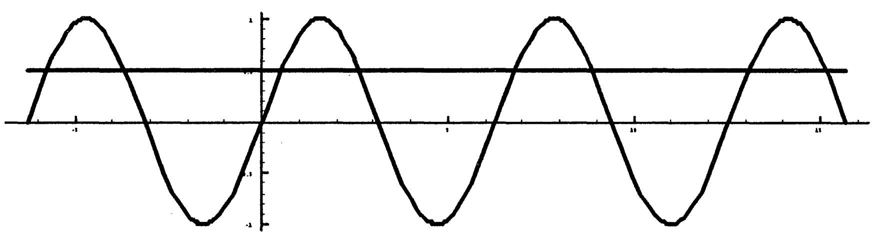
$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

(Perché?). Si noti che sarebbe invece *scorretto* scrivere

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti, qualunque sia l'intero k, il primo termine della disequazione è maggiore dell'ultimo, perciò la catena di disuguaglianze è assurda.

Il fatto che una disequazione trigonometrica elementare come $\sin x < \frac{1}{2}$ sia soddisfatta in un'infinità di intervalli è messo bene in evidenza anche dal confronto tra il *grafico della funzione* $\sin x$ e quello della retta $y = \frac{1}{2}$:



Tuttavia, per la risoluzione di disequazioni, è preferibile ragionare sulla circonferenza trigonometrica, che evidenzia meglio i valori notevoli delle funzioni seno e coseno, e poi ricordarsi di "periodizzare" le soluzioni trovate (cioè introdurre gli addendi $2k\pi$).

Come si vede, anche una disequazione trigonometrica elementare richiede un certo ragionamento, e presenta qualche insidia. Lo studente che fosse nuovo a questi problemi li affronti con calma e gradualità.

Esercizi

Ragionando in modo analogo alla discussione precedente, scrivere tutte le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni (risolvere prima l'equazione, e poi la disequazione col segno indicato tra parentesi):

185. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($<$)

186. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\leq$)

187. $\cos x = -\frac{1}{2}$ ($\geq$)

188. $\tan x = 1$ (< 1)

189. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\geq$)

Finora abbiamo discusso di equazioni e disequazioni elementari, cioè del tipo "sin$x$ (o cos$x$, o tan$x$) $= \alpha$ (o $> \alpha$, ecc.)". In generale, data un'equazione o disequazione qualunque contenente funzioni trigonometriche, si cercherà di ridurla a una o più disequazioni elementari, applicando:

- procedimenti algebrici leciti per qualsiasi tipo di equazione o disequazione;
- identità trigonometriche che permettano di semplificare la scrittura.

Esercizi

Nei prossimi esercizi, lo studente:

- provi anzitutto ad affrontare l'esercizio per proprio conto;
- se non ci riesce, legga i "suggerimenti" riportati di seguito, e risolva l'esercizio;
- confronti infine la soluzione con quella fornita.

190. $$\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 \geq 0.$$

191. $$2\tan x - 3\cot x - \sqrt{3} \leq 0.$$

192. $$2\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 < 0.$$

193. $$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0.$$

194. $$\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1 = 0.$$

195. $$\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 0.$$

196. $$\frac{\tan x}{\tan x + 1} \geq 0.$$

197. $$3 - \sin^2 x \leq 0.$$

198. $$\cos^2 x + \cos x > 0.$$

Suggerimenti.

190. Esprimere $\cos^2 x$ in funzione di $\sin^2 x$; si ottiene una disequazione di secondo grado in sin$x$, che si riporta quindi a disequazioni trigonometriche elementari.

191. Imporre le condizioni di esistenza di tan$x$ e cot$x$. Porre quindi $\cot x = 1/\tan x$; si ottiene una disequazione di secondo grado fratta, in tan$x$.

192. Semplificare l'espressione, poi raccogliere. Studiare quindi il segno del prodotto mediante i segni dei fattori.

193. Risolvere come equazione di primo grado in tan$x$.

194. Si può risolvere geometricamente, a questo modo. Chiamare anzitutto α la variabile (anziché x), e porre quindi $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Ora il punto (x, y) si muove sulla circonferenza trigonometrica. Si tratta perciò di intersecare la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con la retta $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$, e interpretare il risultato ottenuto.

195. Esprimere i primi due addendi dell'equazione mediante $\cos 2x, \sin 2x$; trasformare quindi in un'equazione di secondo grado in $\cos 2x$, risolvere in $\cos 2x$, quindi in $2x$, quindi in x.

Osservazione. Valori notevoli e non notevoli coinvolti nelle equazioni e disequazioni trigonometriche. Gli esempi di equazioni e disequazioni trigonometriche visti fin qui hanno un elemento artificioso: si riconducono sempre a equazioni o disequazioni che coinvolgono *valori notevoli* delle funzioni trigonometriche elementari. Naturalmente questo è un caso particolare: un'equazione simile ad altre già viste, come

$$\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

una volta ricondotta a equazioni elementari, coinvolge valori non notevoli della funzione $\sin x$:

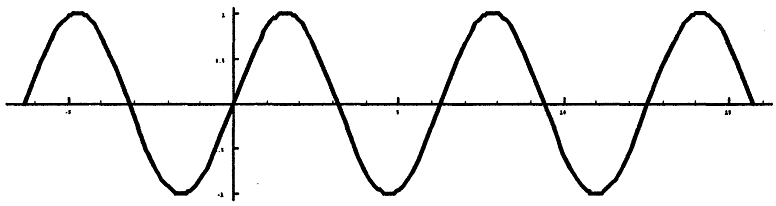
$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La discussione di queste equazioni porta a introdurre le *funzioni trigonometriche* inverse. Di questo argomento ci occuperemo però nel prossimo capitolo, per cui a questo punto rimandiamo la trattazione di equazioni e disequazioni di questo tipo.

13. Le funzioni trigonometriche inverse

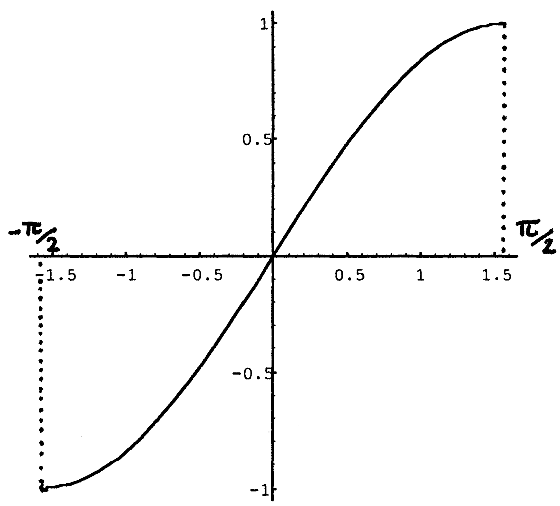
13.1. La funzione ArcoSeno

Consideriamo la funzione $y = \sin x$:

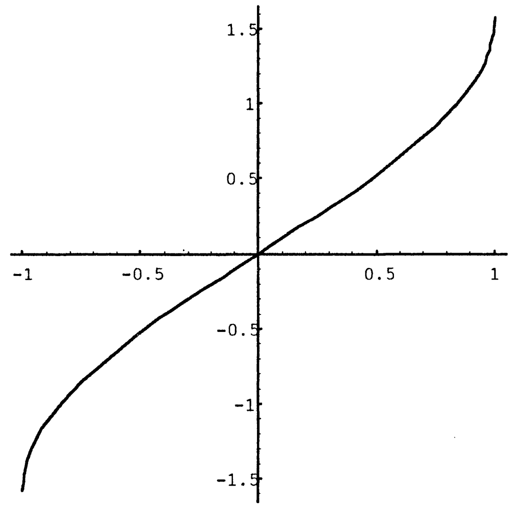


Evidentemente, questa *non è invertibile* su tutto $\mathbb{R}$, cioè su tutto il suo dominio di definizione. Infatti, assume più volte gli stessi valori.

Consideriamo ora *la restrizione di* $\sin x$ *all'intervallo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (si veda il cap.7):



Questa funzione (che *non è* la stessa di prima, perché è considerata su un dominio diverso!) è ora strettamente crescente, perciò è invertibile. L'immagine di questa funzione è l'intervallo $[-1, 1]$. Perciò la funzione inversa di questa funzione avrà per dominio $[-1, 1]$ e per immagine $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, e il suo grafico sarà dato da:



ossia dalla curva che si ottiene dal grafico precedente per riflessione rispetto alla retta $y = x$. *Questa funzione inversa si chiama funzione* ***arcoseno,*** *e si indica con* arcsin$x$.

Ricapitolando. La funzione arcsin$x$ è stata definita come *la funzione inversa della restrizione di* sin$x$ *all'intervallo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. In simboli:

$$\text{arcsin} = \left(\sin/_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}.$$

Di conseguenza,

$$\text{arcsin}x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Esplicitamente, affermare che arcsin$x = \alpha$ significa affermare che:
1) sin$\alpha = x$;
2) $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.
Detto in parole:
"arcsin$x$ è quell'angolo, compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il cui seno vale x".

E' *scorretto* invece, dire semplicemente "arcsin$x$ è quell'angolo il cui seno vale x", in quanto, fissato un valore $x \in [-1, 1]$, di angoli il cui seno vale x ce ne sono sempre infiniti.

Osserviamo dal grafico di arcsin$x$ che questa funzione è *dispari* e *strettamente crescente*; ha *retta tangente verticale* nei due estremi $x = \pm 1$ e retta tangente $y = x$ nell'origine. Non è periodica, in quanto è definita solo su un intervallo.

Esempi.

- Risolvere l'equazione

$$\text{sin}x = 0.1.$$

Poiché $0.1 > 0$, per $0 \leq x \leq 2\pi$ ci saranno 2 valori di x, uno nel primo e uno nel secondo quadrante, il cui seno vale 0.1. Il primo (compreso tra 0 e $\pi/2$) si indicherà con $x = \text{arcsin}0.1$; il secondo (compreso tra $\pi/2$ e π) sarà allora $x = \pi - \text{arcsin}0.1$. In definitiva, tutte le soluzioni dell'equazione sono

$$x = \text{arcsin}0.1 + 2k\pi;\ x = \pi - \text{arcsin}0.1 + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Una calcolatrice tascabile fornisce il valore approssimato arcsin$0.1 \simeq 0.100167\ldots$. E' bene, nello scrivere le soluzioni di un'equazione, fornire *anche* ma non *solo* tale valore approssimato.

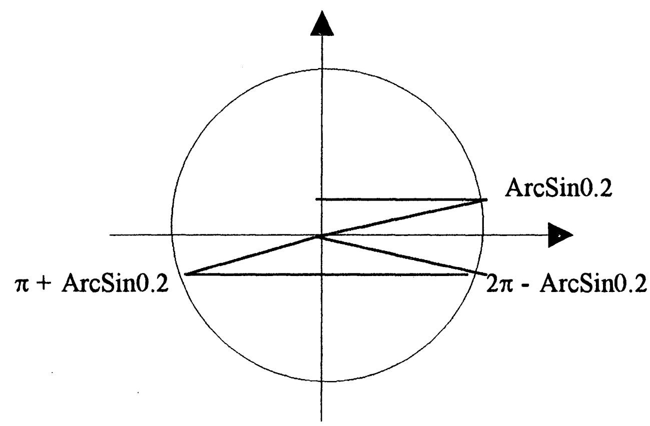
- Risolvere la disequazione

$$\sin x < -0.2.$$

L'equazione corrispondente è soddisfatta, nel primo angolo giro, da due valori di x, posti nel terzo e quarto quadrante. Quello nel quarto quadrante può essere indicato con $\arcsin(-0.2)$, cioè $-\arcsin 0.2$ (ricordiamo che $\arcsin x$ è dispari), o meglio, se vogliamo indicare un angolo compreso tra 0 e 2π, con $2\pi - \arcsin 0.2$. L'altro valore sarà allora, per simmetria, $\pi + \arcsin 0.2$. (Vedere figura seguente). Le soluzioni della disequazione sono dunque:

$$\pi + \arcsin 0.2 + 2k\pi < x < 2\pi - \arcsin 0.2 + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

con $\arcsin 0.2 \simeq 0.2013$.



Esercizi

199. Costruire con compasso e righello graduato i seguenti angoli:
$\arcsin 0.3$; $\arcsin(-0.8)$; $\pi - \arcsin 0.2$; $\pi + \arcsin 0.4$.

Scrivere in forma esatta tutte le soluzioni delle seguenti equazioni o disequazioni. Utilizzare una calcolatrice per fornire anche un valore numerico approssimato dei valori espressi da funzioni trigonometriche inverse.

200. $\sin x = -0.3$

201. $\sin x > 0.6$

202. $\sin x \geq -0.7$

203. $\sin^2 x + 3\sin x + 1 \leq 0$

204. Discutere per quali $x \in \mathbb{R}$ sono vere le seguenti identità:

a. $$\sin(\arcsin x) = x;$$

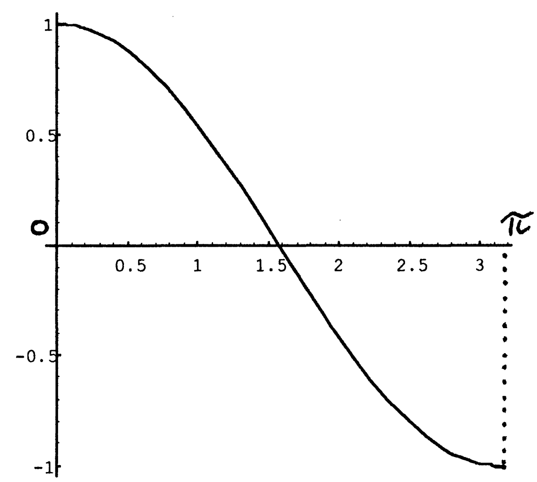
b. $$\arcsin(\sin x) = x.$$

(Questo esercizio deve far riflettere sul fatto che arcsin$x$ *non è* la funzione inversa di sin$x$, ma di una sua restrizione).

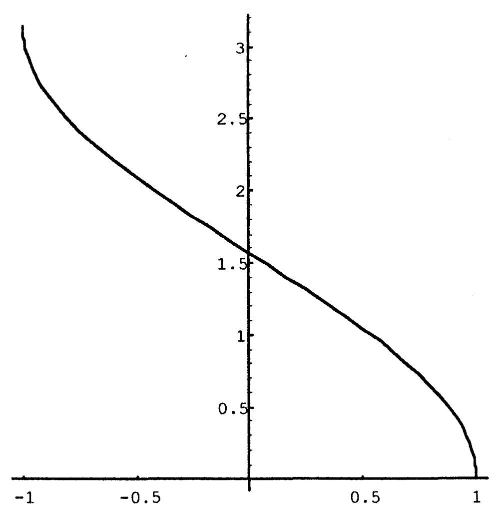
13.2. La funzione ArcoCoseno

Un discorso analogo a quello fatto per la funzione arcoseno si può ripetere nel caso del coseno.

La funzione cos$x$ non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, ma la sua restrizione all'intervallo $[0, \pi]$ lo è:



La funzione inversa di questa funzione si dice ArcoCoseno, e si indica con arccos$x$. Il suo grafico è:



La funzione arccos$x$ è definita come *la funzione inversa della restrizione di* cos$x$ *all'intervallo* $[0, \pi]$. In simboli:

$$\arccos = \left(\cos/_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

Di conseguenza,

$$\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Esplicitamente, affermare che arccos$x = \alpha$ significa affermare che:
1) $\cos\alpha = x$;
2) $0 \leq \alpha \leq \pi$.
Detto in parole:
"arccos$x$ è quell'angolo, compreso tra 0 e π, il cui coseno vale x".

E' *scorretto* invece, dire semplicemente "arccos$x$ è quell'angolo il cui coseno vale x", in quanto, fissato un valore $x \in [-1, 1]$, di angoli il cui coseno vale x ce ne sono sempre infiniti.

La funzione arcocoseno è *strettamente decrescente*; non è né pari né dispari (perché è l'inversa di una funzione definita su un intervallo non simmetrico, e perciò né pari né dispari); ha *retta tangente verticale* nei due estremi $x = \pm 1$ e retta tangente $y = -x$ per $x = 0$. Non è periodica, in quanto è definita solo su un intervallo.

Esercizi

205. Costruire con compasso e righello graduato i seguenti angoli:
arccos0.4; $\arccos(-0.2)$; $\pi + \arccos(-0.3)$; $\pi - \arccos 0.8$.

Scrivere in forma esatta tutte le soluzioni delle seguenti equazioni o disequazioni. Utilizzare una calcolatrice per fornire anche un valore numerico approssimato dei valori espressi da funzioni trigonometriche inverse.

206. $\cos x = 0.2$

207. $\cos x = -0.3$

208. $\cos x > 0.6$

209. $\cos x \geq -0.7$

210. $2\cos^2 x - 3\cos x - 1 \geq 0$

211. Discutere per quali $x \in \mathbb{R}$ sono vere le seguenti identità:

a.
$$\cos(\arccos x) = x;$$

b.
$$\arccos(\cos x) = x.$$

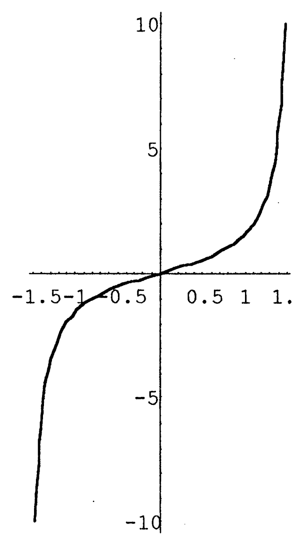
212. Dimostrare le seguenti identità:

a.
$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \text{ per } -1 \leq x \leq 1;$$

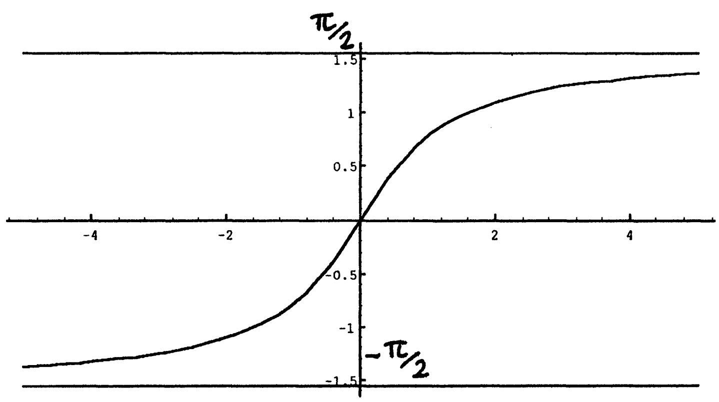
b.
$$\arccos(\sin x) = \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \text{ per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

13.3. La funzione ArcoTangente

La funzione $\tan x$ non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, ma la sua restrizione all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ lo è:



La funzione inversa di questa funzione (che ha per immagine $(-\infty, +\infty)$) si dice ArcoTangente, e si indica con $\arctan x$. $\arctan x$ è quindi definita su tutto $\mathbb{R}$, e il suo grafico è:



La funzione arctan$x$ è definita come *la funzione inversa della restrizione di* tan$x$ *all'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. In simboli:

$$\arctan = \left(\tan/_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}.$$

Di conseguenza,

$$\arctan x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Esplicitamente, affermare che arctan$x = \alpha$ significa affermare che:
1) tan$\alpha = x$;
2) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
Detto in parole:
"arctan$x$ è quell'angolo, compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, la cui tangente vale x".

E' *scorretto* invece, dire semplicemente "arctan$x$ è quell'angolo la cui tangente vale x", in quanto, fissato un valore $x \in \mathbb{R}$, di angoli la cui tangente vale x ce ne sono sempre infiniti.

La funzione arcotangente è *strettamente crescente*; è dispari (perché è l'inversa di una funzione dispari); ha *retta tangente* $y = x$ nell'origine; ha *asintoti orizzontali* $y = \frac{\pi}{2}$ a $+\infty$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ a $-\infty$.[4]

Esercizi

213. Costruire con compasso e righello graduato i seguenti angoli:
arctan4; arctan(-2); π + arccos(-0.3); π + arctan0.8.

Scrivere in forma esatta tutte le soluzioni delle seguenti equazioni o disequazioni. Utilizzare una calcolatrice per fornire anche un valore numerico approssimato dei valori espressi da funzioni trigonometriche inverse.

[4] Il significato di quest'ultima affermazione sarà chiarito nel calcolo infinitesimale, utilizzando il linguaggio dei limiti. Dovrebbe essere intuitivamente chiaro, comunque, cosa significhi che il grafico di questa funzione si avvicina sempre più alle rette $y = \pm\pi/2$, quando il valore di x diventa sempre più grande (o sempre più negativo, rispettivamente).

214. $\tan x = 0.2$

215. $\tan x = -3$

216. $\tan x > 6$

217. $\tan x \geq -7$

218. $2\tan^2 x + 3\tan x - 1 \geq 0$

219. $\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x \leq 0$

220. Lo stesso angolo può essere indicato utilizzando diverse funzioni trigonometriche inverse.

a. Sia $\alpha = \arcsin 0.2$. Esprimere α come arccos di un angolo opportuno, e come arctan di un angolo opportuno.

b. Sia $\alpha = \arccos(-0.3)$. Esprimere α mediante la funzione arcsin, e mediante la funzione arctan.

221. Discutere per quali $x \in \mathbb{R}$ sono vere le seguenti identità:

a. $$\tan(\arctan x) = x;$$

b. $$\arctan(\tan x) = x.$$

222. Dimostrare le seguenti identità:

a. $$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ per } -1 < x < 1;$$

b. $$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ per } -1 \leq x \leq 1, x \neq 0.$$

Proposizione. *Per ogni* $x \neq 0$ *è*

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \textit{per } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{per } x < 0. \end{cases}$$

La precedente identità è utilizzata con una certa frequenza nel calcolo infinitesimale, e merita perciò di essere ricordata (a differenza di quelle dell'esercizio precedente, che costituiscono, appunto, solo un utile esercizio).

Esercizio 223. Dimostrare la precedente Proposizione.

Suggerimento:

a. E' sufficiente dimostrare l'identità per $x > 0$, il caso $x < 0$ segue quindi per la simmetria di $\arctan x$.

b. Utilizzare l'identità, dimostrata in un precedente esercizio,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha};$$

c. Porre $\alpha = \arctan x$ e ragionare sulla definizione di arctan.

Osservazioni finali sulle funzioni trigonometriche inverse.

1. Le funzioni trigonometriche inverse sono necessarie tutte le volte che si vogliono eseguire calcoli trigonometrici *esatti* (non solo approssimati) con angoli *qualsiasi* (cioè non necessariamenti valori notevoli). Perciò non si ha padronanza della trigonometria (e quindi delle sue applicazioni: geometria, fisica, calcolo coi numeri complessi...) finché non si ha padronanza *anche* delle funzioni trigonometriche inverse.
2. Indicare un angolo con un'espressione del tipo $\alpha = \arcsin 0.6$ può sembrare meno "esplicito" che dare il valore numerico $\alpha = 0.6435\text{rad}$. Eppure, a ben vedere, è molto facile con un righello graduato costruire l'angolo α sapendo che $\alpha = \arcsin 0.6$, mentre costruirlo sapendo che $\alpha = 0.6435\text{rad}$ è certamente molto più complesso.

14. Funzioni composte di funzioni elementari

In questo capitolo applicheremo tutto quello che abbiamo studiato finora sulle funzioni, cominciando ad affrontare il problema di tracciare il grafico di una funzione $y = f(x)$ ottenuta per composizione di funzioni elementari. Questo problema avrà nel calcolo infinitesimale il principale strumento di attacco, ma già con i metodi elementari introdotti fin qui è possibile fare molte cose: questo capitolo, più esercitativo che teorico, vuole dare esempi in questo senso.

Utilizzeremo da una parte quello che abbiamo imparato sulle proprietà e sui grafici delle funzioni elementari (rette, cap. 3, parabole, cap. 6; potenze, capp. 6 e 8; funzioni esponenziali e logaritmiche, cap. 9; funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse, capp. 12 e 13), dall'altra parte i concetti generali sulle funzioni, come simmetrie, periodicità, monotonia (cap. 2), funzione composta, inversa (cap.7) e le operazioni sui grafici, mediante valori assoluti (cap. 4), traslazioni, riflessioni, dilatazioni (cap. 5). Lo studente deve quindi aver ben presente tutto il percorso seguito finora, se vuole studiare utilmente e, soprattutto, esercitandosi *attivamente*, il contenuto di questo capitolo. Così facendo, potrà in seguito affrontare lo studio del calcolo infinitesimale a partire da un'esperienza e una motivazione solide, e sarà in grado di coglierne la novità concettuale senza perdersi nelle difficoltà tecniche.

14.1. Grafici ottenuti per successive operazioni sui grafici di funzioni elementari

Esempi

Si disegni, sfruttando i grafici noti delle funzioni elementari ed eseguendo su essi opportune operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, o applicazione di valore assoluto, il grafico delle seguenti funzioni:

a. $|\log_2(x+1)|$
b. $\sqrt{1-x}$
c. $1+(2x+1)^{2/3}$

a. $|\log_2(x+1)|$.

Ragioniamo per passi successivi. Grafico di $\log_2 x$ (v. §9.1):

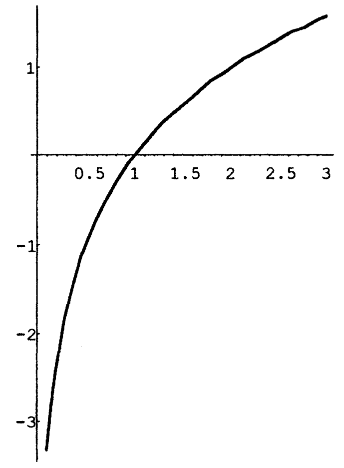


Grafico di $\log_2(x+1)$: è ottenuto dal precedente mediante una traslazione sull'asse x (v. §5.1):

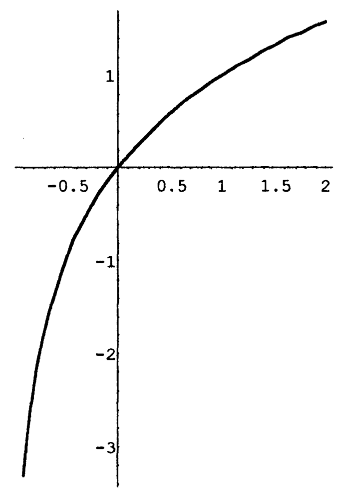
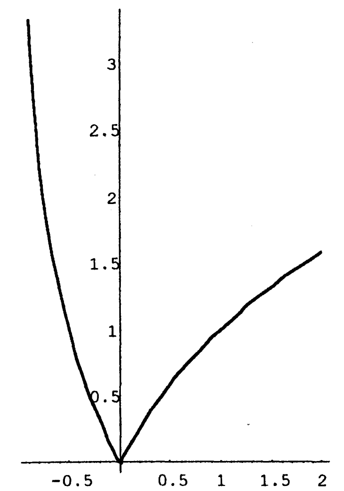


Grafico di $|\log_2(x+1)|$: è ottenuto dal precedente applicando il valore assoluto (v. §4.4):



b. $\sqrt{1-x}$.

Grafico di $\sqrt{x}$ (v. §8.2):

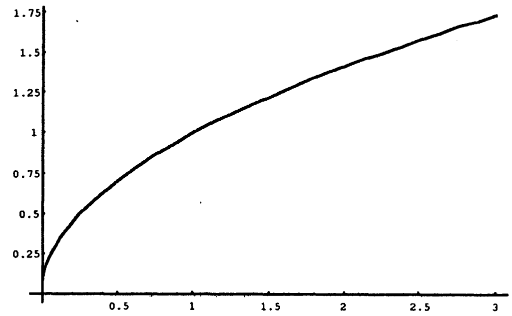


Grafico di $\sqrt{-x}$: ottenuto dal precedente per riflessione attraverso l'asse y (v. §5.3):

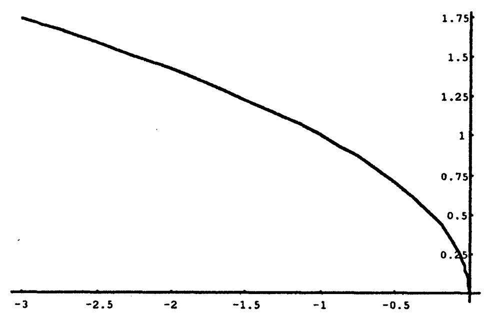
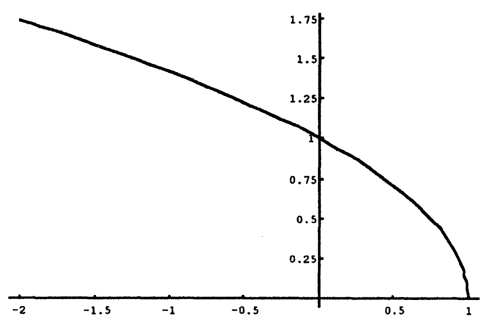


Grafico di $\sqrt{1-x}$: ottenuto dal precedente mediante una traslazione sull'asse x:



c. $1+(2x+1)^{2/3} = 1+2^{2/3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2/3}$

Grafico di $x^{2/3}$ (v. §8.4):

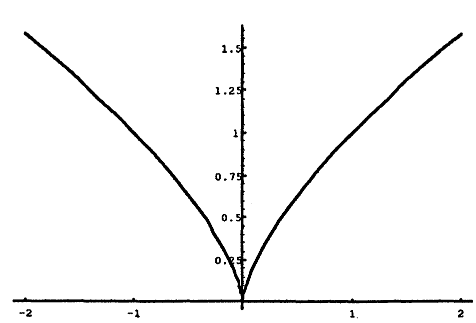


Grafico di $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2/3}$: ottenuto dal precedente mediante traslazione sull'asse x:

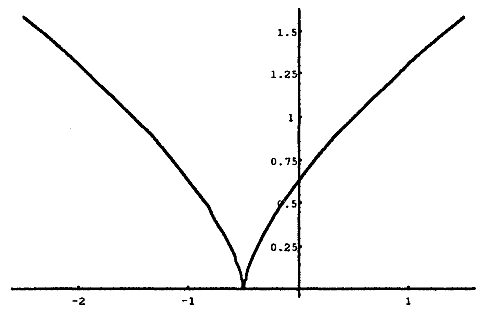
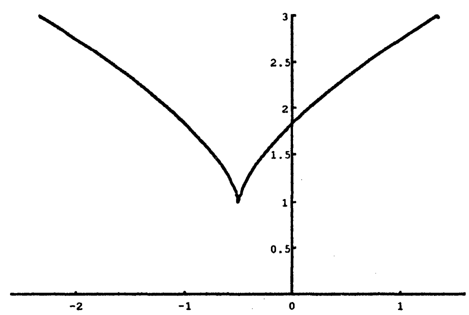


Grafico di $1+2^{2/3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2/3}$: ottenuto dal precedente eseguendo prima una dilatazione di coefficiente $2^{2/3}$ (v.§5.2), e poi una traslazione sull'asse y (v. §5.1):



□

Esercizi

Si disegni, sfruttando i grafici noti delle funzioni elementari ed eseguendo su essi opportune operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, o applicazione di valore assoluto, il grafico delle seguenti funzioni:

224. $|\log_2|x||$

225. $\sqrt[3]{x+2}$

226. 2^{-x+3}

227. $\log_3 4x$

228. $(x+3)^{-2}$

229. $2\cos\frac{x}{3}$

230. $\frac{\pi}{2}+\arctan(x+2)$

231. $|\sin 3x|$

232. $1 - \sin x$

233. Si disegni, per traslazioni e dilatazioni successive a partire dal grafico di $1/x$, il grafico di

$$\frac{2x-3}{1-x},$$

dopo aver riscritto questa funzione nella forma:

$$a + \frac{b}{x-1}, \text{ con } a, b \text{ opportuni.}$$

Osservazione. Grafico di un'iperbole equilatera del tipo

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}. \tag{*}$$

L'esercizio precedente mostra il metodo in cui si può determinare, con metodi elementari, il grafico di una funzione del tipo (*). Eseguendo la divisione e un raccoglimento, questa si può riscrivere nella forma:

$$y = \frac{a}{c} + \frac{cb-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}.$$

E' allora chiaro che la funzione ha un "asintoto verticale" $x = d/c$ (traslazione sull'asse x della funzione $1/x$), un "asintoto orizzontale" $y = a/c$ (traslazione sull'asse y della funzione $1/x$), e ha un grafico simile a quello di $\pm 1/x$, a seconda che la quantità $cb - ad$ sia positiva o negativa.

Esercizio 234. Utilizzando l'osservazione precedente si disegni il grafico delle sueguenti iperboli equilatere, osservandone i coefficienti.

a. $y = \frac{2-3x}{x+3}$;

b. $y = \frac{1+2x}{x-2}$;

c. $y = \frac{x}{2x+1}$.

14.2. Monotonia di funzioni composte

Consideriamo una funzione composta, $f \circ g$ (v. §7.1), e chiediamoci: se f e g sono monotòne, ciascuna sul proprio dominio, lo sarà anche $f \circ g$? (Stiamo ora dando per scontato che la funzione composta *esista*, cioè che $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Dom}(f)$, e che ognuna delle due funzioni sia monotòna su *tutto* il suo dominio).

Proposizione. *Nelle ipotesi appena enunciate, valgono le seguenti relazioni:*

	f *crescente*	f *decrescente*
g *crescente*	$f \circ g$ *cresc.*	$f \circ g$ *decresc.*
g *decrescente*	$f \circ g$ *decresc.*	$f \circ g$ *cresc.*

(La tabella si legge così: se f è crescente e g è crescente, allora $f \circ g$ è crescente, ecc.)

Dimostrazione. Basta ricordare che f crescente significa:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

ovvero f conserva il segno di disuguaglianza, mentre f decrescente significa:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

ossia f rovescia il segno di disuguaglianza. Proviamo allora, ad esempio, che:
f crescente e g decrescente $\Rightarrow f \circ g$ decrescente.
Infatti, per le ipotesi si ha:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$$

ossia

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow (f \circ g)(x_1) \geq (f \circ g)(x_2)$$

cioè $f \circ g$ decrescente.
Gli altri casi si dimostrano analogamente. □

In sostanza, nella composizione di funzioni l'essere crescente o decrescente si comporta secondo la *regola dei segni*: la composizione di due funzioni con monotonia concorde è crescente, con monotonia discorde è decrescente.

Naturalmente il discorso precedente si può iterare alla composizione di un numero qualunque di funzioni, applicando la regola dei segni al prodotto di n fattori.

Esempi

- La funzione $y = 2^{1+x^3}$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Difatti, è la composizione di $y = 2^t$, crescente, con $t = 1 + x^3$, crescente.

- La funzione $y = 2^{-x^2}$ è decrescente per $x \geq 0$, crescente per $x \leq 0$. Infatti: per $x \geq 0$, $t = -x^2$ è decrescente, mentre $y = 2^t$ è sempre crescente; per $x \leq 0$ $t = -x^2$ è crescente ($y = 2^t$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$).

- La funzione $\sin\left(\frac{x^2}{8}\right)$ ristretta all'intervallo $[0, \pi]$ è crescente. Infatti: $t = x^2$ è crescente su $[0, \pi]$, e la sua immagine è $\left[0, \frac{\pi^2}{8}\right]$. Poiché $\frac{\pi^2}{8} \simeq 1.23 < \frac{\pi}{2}$, $\left[0, \frac{\pi^2}{8}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, perciò sull'immagine di $t = x^2$ la funzione $y = \sin t$ è crescente.

Si noti che in quest'ultimo esempio si è applicato un ragionamento un po' più raffinato che nei casi precedenti, tenendo conto di dominio e immagine delle due funzioni; questo si è reso necessario perché ciascuna delle due funzioni *non è monotona su tutto il suo dominio* (ma lo è sul dominio che è rilevante nella composizione delle due funzioni).

Esercizi

Studiare l'eventuale monotonia delle seguenti funzioni, sul dominio indicato

235. $2^{-x+3}, x \in \mathbb{R}$

236. $\frac{1}{1+x^2}, x \geq 0$

237. $\frac{1}{1+2^x}, x \in \mathbb{R}$

238. $(\log_2 x)^3, x > 0$

239. $(\log_2 x)^2, x \geq 1$

240. $[\log_{1/2}(1+3^x)]^2, x \in \mathbb{R}$

241. $\log_{1/2}\left(\sin\frac{1}{x}\right), x \geq \frac{4}{\pi}$

242. $\cos\left(\frac{1}{x}\right), x \geq 1$

14.3. Simmetria di funzioni composte

Supponiamo che f, g siano due funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ e simmetriche (pari o dispari, v. §2.3.1). Ci chiediamo se risultano allora simmetriche le funzioni $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, $f + g$.

Ricordando che

$$f \text{ si dice pari se } f(-x) = f(x) \text{ e}$$

$$f \text{ si dice dispari se } f(-x) = -f(x),$$

si ha subito la risposta per quanto rigarda il prodotto e il quoziente: vale una sorta di "regola dei segni":

Proposizione. *Se f, g hanno la stessa simmetria (entrambe pari o entrambi dispari), il prodotto (o il quoziente) è pari, se f, g hanno simmetria opposta (una pari e l'altra dispari), il prodotto (o il quoziente) è dispari.*

Lo studente provi a dimostrare da sé questa Proposizione, prima di leggere quanto segue...

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio f pari e g dispari, allora

$$(f \cdot g)(-x) = \text{per definizione di prodotto di funzioni } \ f(-x) \cdot g(-x) =$$

$$\text{per l'ipotesi } f \text{ pari e } g \text{ dispari } = f(x) \cdot [-g(x)] = -(f \cdot g)(x).$$

Perciò $f \cdot g$ è dispari. Analogamente si dimostrano gli altri casi. □

Consideriamo ora la composizione $f \circ g$. La situazione è un po' diversa:

Proposizione.
Se g è pari, $f \circ g$ è pari per qualsiasi f (anche non simmetrica!).
Se g è dispari, $f \circ g$ è pari (dispari) se f è pari (dispari).

Esercizio 243. Dimostrare la precedente Proposizione.

Per la somma $f + g$, la situazione è ancora diversa:

Proposizione.
Se f e g sono pari, $f + g$ è pari;
se f e g sono dispari, $f + g$ è dispari.

Esercizio 244. Dimostrare la precedente Proposizione.

Le Proposizioni che abbiamo ora enunciato *non vanno ricordate a memoria*: caso per caso, occorre piuttosto saper ripetere in pochi secondi la semplicissima dimostrazione che porta al risultato cercato. Abbiamo raccolto questi risultati in proposizioni solo per mostrare che esistono regole semplici con cui si combinano le simmetrie di due funzioni. Nei prossimi esercizi, quindi, lo studente non cerchi di applicare regole, ma ragioni piuttosto, come nelle dimostrazioni viste, sostituendo ad ogni occorrenza di x il simbolo $-x$, e osservando che cosa succede.

Esercizi

Stabilire se le seguenti funzioni sono pari, dispari, o nessuna delle due cose.

245. $\cos(x^2)$

246. $\cos(x^3)$

247. 2^{x^2}

248. 2^{x^3}

249. $\sin^2 x$

250. $\sin^3 x \cos x$

251. $x \sin x$

252. $1 + \sin x$

253. $\sin x + \tan x$

254. $x^2 + \cos x$

255. $\sin x + \cos x$

256. $\frac{x^2}{1+x^4}$

257. $\frac{1+x^3}{1+x^2}$

258. $\cos(\sin(\tan x))$

Notiamo che se f è pari e g è dispari, nulla si può dire su $f + g$. Anzi:

Proposizione. Ogni funzione f definita su tutto $\mathbb{R}$ si può scrivere come somma di due opportune funzioni, $f = f_1 + f_2$, con f_1 dispari e f_2 pari.

Dimostrazione. Basta scrivere l'identità:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

e verificare, in base alla definizione, che

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ è una funzione dispari, e}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ è una funzione pari.} \qquad \square$$

14.4. Periodicità di funzioni composte

14.4.1. Composizione, somma e prodotto di funzioni periodiche

Come si comportano le proprietà di periodicità (v. §2.3.2) rispetto alla somma, al prodotto o alla composizione di funzioni?

Ricordiamo che una funzione f definita su tutto $\mathbb{R}$ si dice essere periodica di periodo $T > 0$ se:

$$f(x+T) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

e se inoltre T è il più piccolo numero per cui la precedente proprietà è vera (infatti, se f soddisfa la (*) per un certo T, la soddisfa anche per ogni *multiplo* di T).

Cominciamo a ragionare sulla ***periodicità della composizione di due funzioni***. Siano f, g due funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, e consideriamo $f \circ g$.

Se g è periodica di periodo T, possiamo scrivere

$$g(x+T) = g(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \text{ e quindi anche}$$

$$f(g(x+T)) = f(g(x)) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$

qualunque funzione sia f. Perciò:

Proposizione. *Se g è periodica, allora $f \circ g$ è senz'altro periodica.*

In altre parole, se la funzione *interna* nella composizione è periodica, la composizione lo è anche se quella esterna non lo è.

Qual è, in questo caso, il periodo di $f \circ g$? Poiché $f \circ g$ soddisfa la (*) per T, il suo periodo è $\leq T$, cioè: T è il periodo *oppure un multiplo del periodo* di $f \circ g$. Detto in altro modo, *il periodo della composizione è uguale a T oppure un sottomultiplo di T.*

Invece, se g non è periodica non c'è alcuna relazione, a priori, tra $g(x+T)$ e $g(x)$, e quindi nemmeno tra $f(g(x+T))$ e $f(g(x))$ (anche se f è periodica). Detto altrimenti:

se la funzione *interna* nella composizione non è periodica, in generale non è periodica la composizione (nemmeno se quella esterna lo è).

Esempi.

- $\cos^2 x$ è periodica, perché $\cos x$ lo è. Il suo periodo dev'essere un sottomultiplo di $T = 2\pi$, periodo di $\cos x$. In effetti, si vede che il periodo è π.
- $\cos(x^2)$ non è periodica, perché x^2 non lo è.

Osserviamo anche che:

Proposizione. *Se $f(x)$ è periodica di periodo T, $f(kx)$ è periodica di periodo T/k ($k > 0$).*

Ad esempio, $\sin 2x$ ha periodo $2\pi/2 = \pi$, $\sin(x/3)$ ha periodo $2\pi/(1/3) = 6\pi$.

Esercizio 259. Dimostrare la proposizione precedente.

Studiamo ora la ***periodicità di somma, prodotto o quoziente di funzioni periodiche***. Ragioniamo ad esempio sulla somma. Siano f_1, f_2 periodiche di periodi T_1, T_2, e cerchiamo un numero T per cui $f_1 + f_2$ soddisfi la (*). Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ è

$$f_1(x + T_1) = f_1(x), f_2(x + T_2) = f_2(x)$$

e quindi anche

$$f_1(x + nT_1) = f_1(x),\ f_2(x + mT_2) = f_2(x)$$

per n, m interi qualsiasi, affinché risulti

$$f_1(x + T) + f_2(x + T) = f_1(x) + f_2(x) \text{ per ogni } x,$$

è sufficiente che sia

$$T = nT_1 \text{ per qualche intero } n, \text{ e contemporaneamente}$$

$$T = mT_2 \text{ per qualche intero } m.$$

In altre parole, un numero T per cui $f + g$ soddisfa la (*) è il minimo comune multiplo dei due periodi T_1, T_2, ossia il più piccolo numero positivo che sia multiplo intero di entrambi i periodi.

Ad esempio:

$$f(x) = \text{sin}2x + \text{sin}3x$$

che periodo ha? sin$2x$ ha periodo π; sin$3x$ ha periodo $\frac{2}{3}\pi$, il minimo comune multiplo di π e $\frac{2}{3}\pi$ è 2π. Perciò f ha periodo 2π. (Per la precisione dovremmo dire: ha periodo $\leq 2\pi$. In questo caso, è proprio 2π).

Chiediamoci: il minimo comune multiplo di due numeri reali positivi esiste sempre?

Dati $T_1, T_2 > 0$, cerchiamo un numero $T > 0$ e due interi n, m per cui risulti

$$T = nT_1 = mT_2.$$

Da queste uguaglianze segue:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n},$$

perciò: il numero T_1/T_2 è razionale. Perciò:

Proposizione.

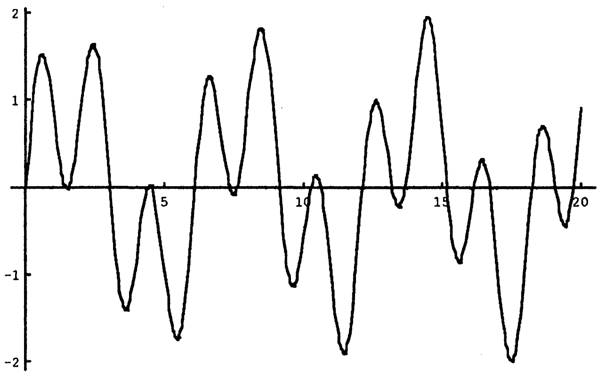
Se il quoziente dei periodi di due funzioni non è un numero razionale, la somma delle due funzioni non è periodica.

Se il quoziente dei periodi di due funzioni è razionale, invece, si può sempre determinare il minimo comune multiplo dei due periodi, e pertanto la somma risulta periodica.

Esempio.

$$f(x) = \text{sin}x + \text{sin}(\pi x).$$

Poiché sin$x$ ha periodo 2π, sin(πx) ha periodo 2, e $2\pi/2 = \pi$ irrazionale, la funzione non è periodica, anche se è somma di due funzioni periodiche. E' interessante osservarne il grafico tracciato da un computer:



Le oscillazioni non si ripetono mai in modo perfettamente periodico.

Infine, *quanto detto per la somma di funzioni periodiche vale pari pari per il prodotto o il quoziente*, come mostra un attimo di riflessione.

Esercizi

Stabilire se le seguenti funzioni sono periodiche o no, determinando in caso affermativo il periodo.

260. $\sin^2 x$

261. $\sin(x^2)$

262. $\sin^3 x \cos 2x$

263. $x \sin x$

264. $1 + \sin 3x$

265. $\sin 4x + \tan x$

266. $x^2 + \cos x$

267. $\sin 3x + \cos \frac{4}{3} x$

268. $2^{\sin 3x}$

14.4.2.* Esempi notevoli di somme periodiche di funzioni periodiche

Vediamo ora due casi particolari molto importanti di funzioni periodiche ottenute per somma di funzioni periodiche.

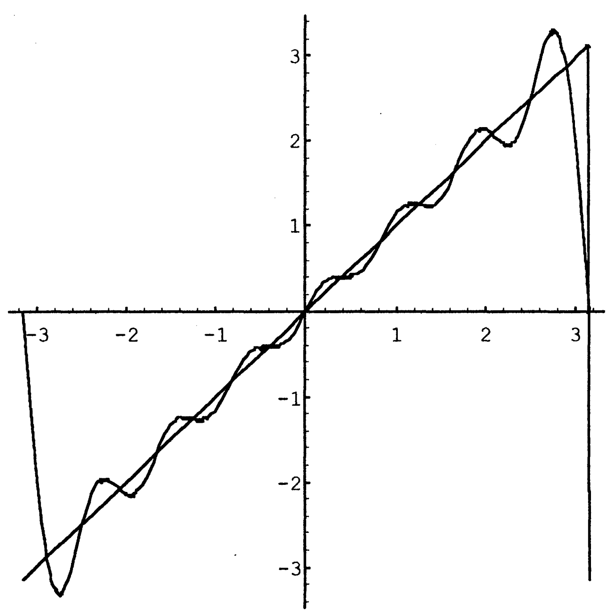
Il primo è quello dei ***polinomi trigonometrici***.

Si dice *polinomio trigonometrico di ordine* n una funzione del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1\text{cos}x + b_1\text{sin}x + a_2\text{sin}2x + b_2\text{cos}2x + \ldots + a_n\text{cos}nx + b_n\text{sin}nx$$

con a_i, b_i coefficienti reali qualsiasi. Una tale funzione è periodica di periodo 2π (o sottomultipli di 2π, se opportuni coefficienti sono nulli). I polinomi trigonometrici sono importantissimi in matematica e nelle scienze applicate perché si può dimostrare che una funzione $g(x)$ definita sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ (e soddisfacente altre ipotesi, che sono abbastanza generali) si può approssimare (in un senso opportuno) con un polinomio trigonometrico, pur di scegliere opportunamente l'ordine n e i coefficienti a_i, b_i.

Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ (che in apparenza non ha niente a che vedere con le funzioni trigonometriche!) sull'intervallo $(-\pi, \pi)$ si può approssimare con opportuni polinomi trigonometrici. Si osservi il prossimo grafico:



Il polinomio trigonometrico raffigurato insieme alla funzione $y = x$ è:

$$f(x) = 2\text{sin}x - \text{sin}2x + \frac{2}{3}\text{sin}3x - \frac{1}{2}\text{sin}4x + \frac{2}{5}\text{sin}5x - \frac{1}{3}\text{sin}6x + \frac{2}{7}\text{sin}7x.$$

La teoria matematica che studia questo tipo di approssimazioni è quella delle *serie di Fourier*, un capitolo importante del calcolo infinitesimale avanzato. Il metodo è applicabile a funzioni definite su un intervallo fissato qualsiasi (non necessariamente $[-\pi, \pi]$), pur di modificare leggermente la definizione di polinomio trigonometrico che abbiamo dato.

Un secondo caso particolare interessante (molto più semplice del precedente) è la ***combinazione lineare di una sinusoide e una cosinusoide di ugual periodo***, cioè una funzione del tipo:

$$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Tale funzione è ovviamente periodica di periodo $2\pi/\omega$. Quello che è meno ovvio, ed è interessante osservare, è che la funzione ottenuta è dello stesso tipo di ciascuno dei due addendi, cioè è una sinusoide opportunamente traslata e dilatata (e quindi anche una cosinusoide, opportunamente traslata e dilatata). Si osservino infatti le seguenti identità:

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\cos\omega x + \cos\varphi\sin\omega x)$$

(abbiamo sfruttato il fatto che due numeri la cui somma dei quadrati fa 1 si possono sempre vedere come seno e coseno di un angolo opportuno)

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x + \varphi).$$

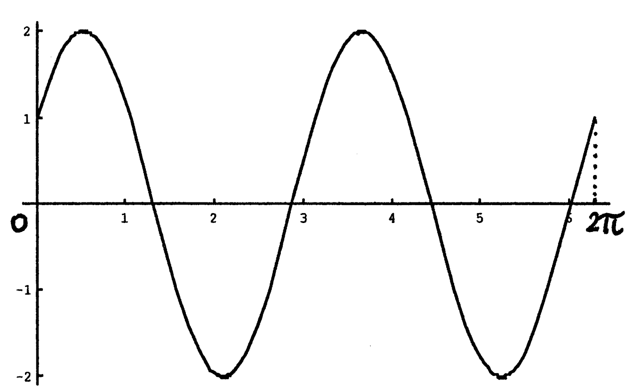
Abbiamo quindi riscritto f come una funzione sinusoidale, opportunamente traslata e dilatata.

Esempio.

$$f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Grafico di $f(x)$:



Quello che abbiamo appena illustrato è utile ad esempio in fisica, nello studio di fenomeni ondulatori. Risolvendo analiticamente certi problemi si trova che una certa grandezza oscilla nel tempo secondo una legge

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t.$$

(la variabile t è il tempo). Si riconosce quindi che l'oscillazione ha la forma

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\omega t + \varphi).$$

La quantità $\sqrt{a^2 + b^2}$ è detta *ampiezza dell'oscilazione*, ω è la *pulsazione*, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il periodo, $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ è la *frequenza*, φ è il *ritardo di fase*.

La relazione tra φ e i coefficienti a, b è espressa dalle relazioni:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

che permettono di esprimere φ in funzione di a, b, usando le opportune *funzioni trigonometriche inverse*.

Esercizio 269. Disegnare il grafico della seguente funzione, dopo averla opportunamente riscritta:

$$f(x) = \sin 3x + \cos 3x.$$

14.5. Funzioni oscillanti non periodiche

Intendiamo con l'espressione "funzioni oscillanti non periodiche" quelle funzioni che contengono sia funzioni trigonometriche che funzioni di altro tipo, e che pertanto (come vedremo sugli esempi) non sono periodiche, ma hanno ugualmente infinite oscillazioni.

Ad esempio, si vogliano studiare le funzioni:

$$\sin(x^2);\ \sin\frac{1}{x};\ x\sin x;\ 2^{-x}\sin x\ldots$$

Il grafico di funzioni di questo tipo (quando sono abbastanza semplici) si può tracciare semplicemente... ragionando un po', mentre l'applicazione di metodi "sistematici" che lo studente ha forse incontrato a scuola non dà grandi risultati.

I prossimi esempi vogliono solo dare un'idea (non esauriente) di cosa si intenda per "studiare le funzioni ragionando un po'".

Esempi

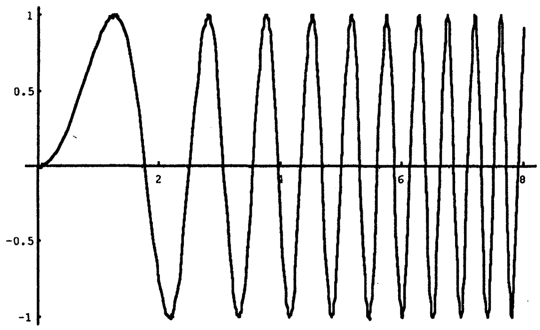
- Studiamo

$$f(x) = \sin(x^2).$$

La funzione è pari; non è periodica, perché x^2 (funzione "interna" nella composizione) non lo è. Poiché x^2 cresce più rapidamente di x, al crescere di x la funzione $\sin(x^2)$ oscillerà in modo sempre più rapido, sempre tra gli estremi ± 1 (infatti $|\sin(x^2)| \leq 1$). Osserviamo che $f(0) = 0$. Inoltre, poiché $|\sin t| \leq |t|$, si ha

$$|\sin(x^2)| \leq x^2.$$

Perciò vicino a zero la funzione è compresa tra $-x^2$ e x^2, in particolare nell'origine ha tangente orizzontale. Da tutti questi fatti segue che il grafico per $x > 0$ è del tipo:



(Il grafico è simmetrizzato pari per $x < 0$).

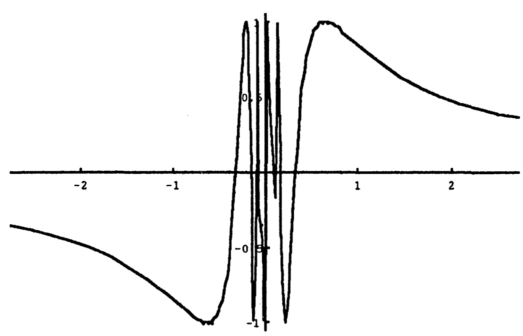
- Studiamo

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

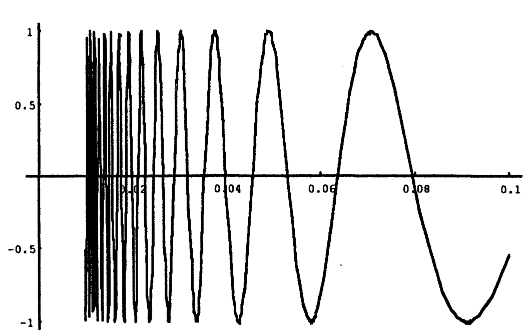
La funzione è dispari, non periodica. Valgono le maggiorazioni:

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1 \text{ e } \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}.$$

Dalla seconda disuguaglianza segue che la funzione ha l'asintoto orizzontale $y = 0$; dalla prima segue il fatto che è limitata. Per $x = 0$ non è definita. Per $x > 0$ sempre più vicino a zero, $1/x$ è sempre più grande, e dunque $\sin\frac{1}{x}$ continua a oscillare. I punti in cui $f(x) = \pm 1$ sono quelli in cui $1/x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi $x = 1/\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Il grafico è dunque del tipo:



Vicino all'origine ha oscillazioni sempre più rapide:



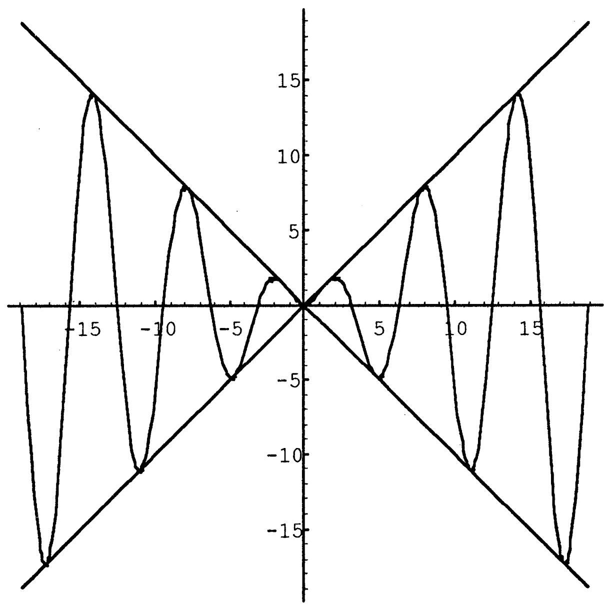
- Studiamo:

$$f(x) = x\text{sin}x.$$

La funzione è pari, non periodica. Valgono le disuguaglianze:

$$|x\text{sin}x| \leq |x| \text{ e } |x\text{sin}x| \leq x^2.$$

La seconda mostra che vicino a zero la funzione è compresa tra $-x^2$ e x^2, in particolare passa per l'origine con tangente orizzontale. La prima mostra che per x grande la funzione è comunque compresa tra x e $-x$; inoltre tocca queste rette quando $\text{sin}x = \pm 1$, cioè per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Il grafico è di conseguenza del tipo:



(Abbiamo tracciato anche le rette $\pm x$ per evidenziare il significato della disuguaglianza $|x\text{sin}x| \leq |x|$).

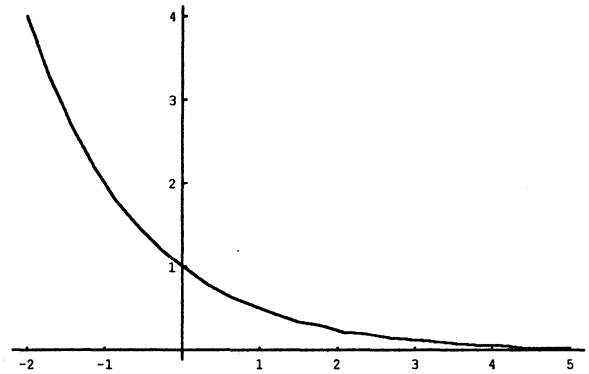
- Studiamo:

$$f(x) = 2^{-x}\text{sin}x.$$

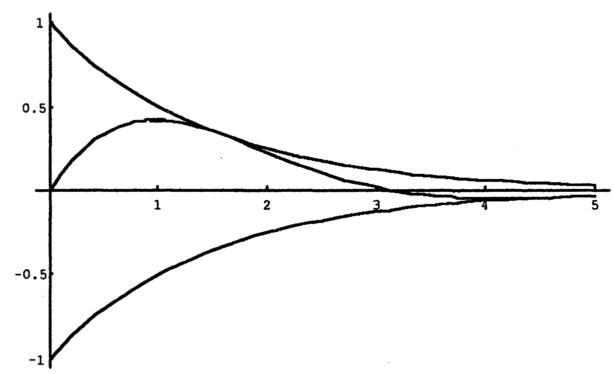
La funzione non è né simmetrica né periodica. Vale la disuguaglianza:

$$|2^{-x}\text{sin}x| \leq 2^{-x}.$$

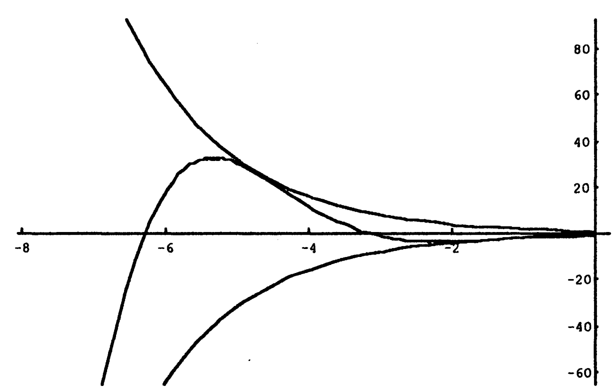
Inoltre, $f(x) = 2^{-x}$ per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dal grafico di 2^{-x},



si costruisce dunque quello di $2^{-x}\sin x$, per $x > 0$:



e per $x < 0$:



(Si sono rappresentati sullo stesso grafico anche le funzioni $\pm 2^{-x}$ per evidenziare il significato della disuguaglianza $|2^{-x}\sin x| \leq 2^{-x}$). La funzione ha infinite oscillazioni, che "si smorzano" per $x > 0$, mentre "si esaltano" per $x < 0$. $\square$

Esercizi

Con ragionamenti simili a quelli visti negli esempi precedenti, tracciare una parte del grafico delle seguenti funzioni, sufficiente a mostrarne l'andamento:

270. $f(x) = 2x + \sin x$

271. $f(x) = \sin(2^x)$

272. $f(x) = \cos(2^{-x})$

273. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

274. $f(x) = \tan(x^2)$

275. $f(x) = \sin\sqrt{x}$.

14.6. Disequazioni e confronti grafici

Uno dei tanti motivi per cui è utile saper disegnare il grafico di una funzione, è che a questo modo è possibile talvolta risolvere, almeno in modo approssimato, equazioni o disequazioni che con passaggi puramente algebrici non è possibile risolvere.

Esempi

- Risolvere la disequazione:

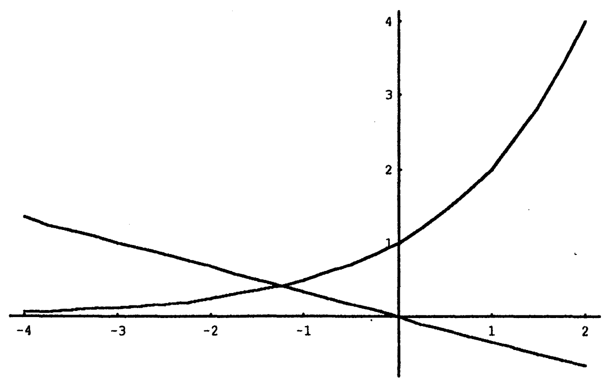
$$\frac{3 \cdot 2^x + x}{3^x(x-2)} > 0.$$

Abbiamo 3 fattori, di cui $3^x > 0$ sempre, $x - 2 > 0$ per $x > 2$. Il punto è studiare il segno di $3 \cdot 2^x + x$. Ora, $3 \cdot 2^x + x > 0$ per

$$2^x > -\frac{x}{3}.$$

Questa è una disequazione che coinvolge sia un'esponenziale che una funzione lineare, perciò non è risolubile con metodi algebrici.

Rappresentiamo sullo stesso grafico le funzioni ai due membri e vediamo dove è verificata la disuguaglianza, vedendo per quali x il grafico del primo membro sta sopra il grafico del secondo membro. Questa operazione si chiama ***confronto grafico***.



Si vede che le due curve si intersecano in uno e un sol punto, chiamiamo α l'ascissa di tale punto. La disuguaglianza è verificata per $x > \alpha$. Non sappiamo quanto vale α esattamente, ma certamente, ad esempio, è $-3 < \alpha < 0$ (perché?). La disequazione di partenza è allora verificata per $x > 2$ e $x < \alpha$.

Si può anche localizzare più accuratamente α sostituendo alcuni valori numerici. Ad esempio:

in $x = -2$ è $2^x < -\frac{x}{3}$, perciò (osservare il grafico per capire il motivo!) $-2 < \alpha < 0$;

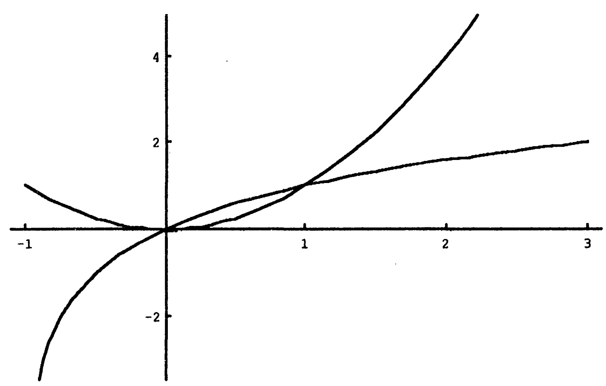
in $x = -1$ è $2^x > -\frac{x}{3}$, perciò $-2 < \alpha < -1$;

in $x = -1.5$ è $2^x < -\frac{x}{3}$, perciò $-1.5 < \alpha < -1$, ecc.

- Risolvere la disequazione:

$$x^2 \geq \log_2(x+1).$$

Anzitutto dev'essere $x > -1$. Tracciamo i due grafici:



Si vede che le due curve si incontrano in due punti. Uno è l'origine, l'altro è un certo $\alpha > 0$. (In realtà, si può notare che $\alpha = 1$. Tuttavia questo non si ricava con passaggi algebrici, ma per osservazione diretta: una persona potrebbe non accorgersene...). Le due funzioni hanno concavità opposta, perciò si può concludere che non ci sono altre intersezioni, e che la disequazione è verificata per

$$-1 < x \leq 0; \; x \geq 1.$$

Si noti che ciò che permette di dire che poco a destra di $x = 0$ il logaritmo è maggiore della parabola è l'*inclinazione della retta tangente* ai due grafici nell'origine: la parabola ha tangente orizzontale, il logaritmo una retta obliqua crescente.

Esercizi

Risolvere le seguenti disequazioni, eseguendo anche, ove necessario, un confronto grafico, e fornire una qualche localizzazione dei valori che non si possono determinare esattamente.

276. $2^{-x^2} \geq 1 - x$

277. $\log_2(1-2\log_2 x) \geq \frac{2}{(1-2\log_2 x)}$
(Suggerimento: per prima cosa porre $t=(1-2\log_2 x)$ e risolvere la disequazione in t; passare poi alla x).

278. $2x+1 \geq (x+2)\log_2 x$

279. $\arctan x \geq x^2$

280. $\arctan x < x^3$

281. $|2^x-1|+x^3 \geq 0$

282. $|\log_2|x|| \geq 4-x^2$

283. $\frac{x2^x}{1-x} \leq 1$

284. $4^x+3x\cdot 2^x+2x^2 \leq 0$
(Suggerimento: vederla anzitutto come una disequazione di secondo grado, in un'incognita opportuna...)

14.7. Funzioni definite a tratti

Un altro modo in cui, a partire da funzioni semplici si possono ottenere funzioni più complesse, è quello di considerare *funzioni definite a tratti*, ossia funzioni che sono definite su intervalli adiacenti da espressioni analitiche diverse, secondo uno schema del tipo:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{per } a \leq x \leq b \\ f_2(x) & \text{per } b < x \leq c. \end{cases}$$

Esercizi

Determinare l'insieme di definizione, tracciare il grafico e precisare quali sono gli eventuali punti di massimo e minimo, relativo e assoluto (v. §2.3.3), per le seguenti funzioni definite a tratti.

285.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ -1-x & \text{per } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

286.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^3 & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

287.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x & \text{per } x < 0 \\ 1 - \log_2(x+1) & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ (x-1)^{-3/2} & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

288.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} & \text{per } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} + \log_2|x+1| & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

289.

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-|x|} & \text{per } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^3 & \text{per } |x| > 1. \end{cases}$$

14.8. Insieme di definizione di una funzione composta

Concludiamo il capitolo con alcuni esercizi in cui si chiede di determinare l'insieme di definizione di una funzione composta (che per il momento non si chiede di studiare). Si tratta di imporre le opportune condizioni di esistenza delle varie espressioni contenute nella funzione, ovvero scrivere opportune disequazioni che devono essere verificate, e risolverle. Può anche accadere che qualcuna di queste condizioni porti a un confronto grafico.

Esercizi

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni.

290. $\frac{1}{\sqrt{1-3x}}$

291. $\frac{1}{2^{3x-2x^2}}$

292. $\sqrt[4]{\frac{4-x}{\log_3^2 x}}$

293. $\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{2x+1}}$

294. $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{x^2-x}}$

295. $\arcsin(x^2-x)$

296. $\sqrt{\arccos(2^x)}$

297. $(\sin\pi x)^\pi$

298. $(\cos x)^{-3/4}$

299. x^x

300. $\log_{x+1}(x^2-3x+1)$

301. $\log_2(x+2^x)$

15. Numeri complessi

Nel §1.1. abbiamo richiamato i 4 insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Introdurremo ora un quinto insieme numerico, che contiene tutti i precedenti, l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, che probabilmente lo studente non ha mai incontrato in precedenza. Come vedremo, anche questo insieme risulta essere un *campo* (come $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$), ma a differenza di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$, non è un campo *ordinato*. A livello elementare, questo insieme numerico è importante soprattutto per *ragioni algebriche*: il campo complesso è l'ambiente naturale per studiare le *equazioni algebriche*, come vedremo nel §15.5. L'introduzione dell'*esponenziale complesso*, che lo studente incontrerà più avanti nello studio del calcolo infinitesimale, consentirà di semplificare molti calcoli che coinvolgono le funzioni trigonometriche ed esponenziali. Infine, dal punto di vista del calcolo infinitesimale avanzato, il campo complesso consente di formulare una teoria, quella delle *funzioni olomorfe*, estremamente importante e ricca di applicazioni. Lo studente la incontrerà se proseguirà nello studio della matematica superiore.

Quanto segue è una semplice introduzione ai numeri complessi, da un punto di vista puramente algebrico.

15.1. Definizione di $\mathbb{C}$. Forma algebrica dei numeri complessi

Daremo ora una definizione dei numeri complessi che può sembrare un po' formale, ma è perfettamente rigorosa. Consideriamo l'insieme dei polinomi di primo grado a coefficienti reali, $a + bx$; d'ora in poi, in questo contesto, useremo sistematicamente il simbolo i, anziché x, per indicare l'indeterminata: scriveremo quindi $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Definiamo in questo insieme di polinomi le operazioni di somma e di prodotto, al modo seguente:

- la somma di due polinomi del tipo $a + ib$ si fa al solito modo, e ha le solite proprietà. Ad esempio,

$$(3 + 2i) + (-2 + 5i) = 1 + 7i.$$

- il prodotto di due polinomi si fa al solito modo (e di conseguenza ha le solite proprietà), *con l'aggiunta* della seguente regola:

$$i^2 = -1.$$

Quindi:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + i^2bd + i(ad + bc) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Ad esempio:

$$(3 + 2i) \cdot (-2 + 5i) = -6 - 10 + i(-4 + 15) = -16 + 11i.$$

Chiameremo insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi l'insieme dei polinomi di questo tipo, munito delle operazioni di somma e prodotto così definite. Il simbolo i prende il nome di ***unità immaginaria***. I numeri reali a, b si dicono rispettivamente ***parte reale*** e

parte immaginaria del numero complesso $a+ib$. Se $b=0$ si ritrova in particolare un numero reale; questo mostra che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Se invece $a=0$ si ottiene un numero del tipo ib che viene detto ***immaginario puro***. [5] Volendo indicare un numero complesso $a+ib$ con un unico simbolo, si usano solitamente le lettere $z, w\ldots$

Proposizione. *L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, con la somma e il prodotto definiti come sopra, è un* **campo** *(cioè le operazioni $+$, $\cdot$ soddisfano gli assiomi riportati nel §1.2.1, tranne quelli che coinvolgono anche la relazione d'ordine $\leq$).*

Dimostrazione. La definizione stessa mostra che la somma e il prodotto di due numeri complessi danno ancora un numero complesso.

Le proprietà associative, commutative e distributive che valgono in un campo qualsiasi (v. §1.2) valgono anche in $\mathbb{C}$ (perché valgono per la somma e il prodotto di *polinomi* a coefficienti reali; e questo, a sua volta, segue dal fatto che le proprietà valgano per i *numeri* reali).

Ogni numero complesso $(a+ib)$ ha un opposto:

$$-a-ib,$$

che sommato ad $a+ib$ dà 0 (cioè il polinomio zero, cioè $0+i0$).

Ogni numero complesso $(a+ib)$ diverso da 0 ha un reciproco: il numero

$$\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2},$$

che moltiplicato per $(a+ib)$ dà 1. Infatti:

$$(a+ib)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a+ib)(a-ib)=$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\left(a^2-i^2b^2\right)=1.$$

Il reciproco di $a+ib$ è dunque $(a-ib)/(a^2+b^2)$: si noti che in questa frazione il denominatore è un numero reale, il che fa sì che l'espressione equivalente $\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$ rappresenti ancora un numero complesso, del tipo $\alpha+i\beta$.

Pertanto l'insieme $\mathbb{C}$ risulta un campo. □

In particolare, l'esistenza del reciproco implica la possibilità di eseguire il ***quoziente*** di due numeri complessi:

$$\frac{a+ib}{c+id}=(a+ib)\cdot\frac{1}{c+id}=(a+ib)\cdot\frac{(c-id)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Ad esempio:

$$\frac{2+3i}{4+5i}=\frac{(2+3i)(4-5i)}{4^2+5^2}=\frac{(8+15)+i(12-10)}{41}=\frac{23}{41}+i\frac{2}{41}.$$

[5] Attenzione al fatto che la *parte immaginaria* b di un numero complesso è, essa stessa, un numero *reale*, e non un numero immaginario (invece ib è immaginario puro).

La scrittura $a+ib$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) per indicare un numero complesso prende il nome di ***forma algebrica dei numeri complessi***. Ad esempio, $2+3i$ è un numero complesso in fomra algebrica; anche $\frac{2+3i}{4+5i}$ è un numero complesso, ma non è scritto in forma algebrica; lo stesso numero complesso scritto in forma algebrica è $\frac{23}{41}+i\frac{2}{41}$, come appena visto.

Esercizi

Eseguire effettivamente le seguenti operazioni in $\mathbb{C}$, ossia scriverne il risultato come un numero complesso in forma algebrica.

302. $(3+2i)\cdot(2-3i)$

303. $(3+2i)^3$

304. $\frac{1}{3+2i}$

305. $1/i$

306. $\frac{2-\sqrt{2}i}{1+i}$

307. $\frac{3+2i}{(1+i)^2}$

Abbiamo visto che $\mathbb{C}$ soddisfa gli assiomi di campo; *non* soddisfa però quelli di *campo ordinato*, ovvero non è possibile definire una relazione $\leq$ tra i numeri complessi, in modo che valgano le proprietà elencate nel §1.2.1. Infatti si può dimostrare che da quelle proprietà segue che *il quadrato di un numero qualsiasi non è mai negativo*, e d'altra parte, *se un numero è positivo il suo opposto è negativo*. Ora, in $\mathbb{C}$ si ha:

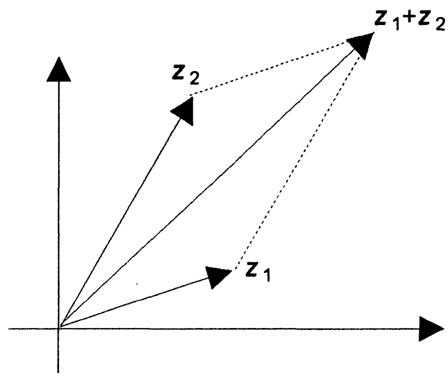
$$1^2 = 1 \text{ e } i^2 = -1.$$

Abbiamo quindi due quadrati che sono l'uno l'opposto dell'altro. Nessuno dei due però può essere negativo (perché sono quadrati), e questo è assurdo (perché tra a e $-a$ uno dev'essere negativo, se $a \neq 0$). Concludiamo che ***$\mathbb{C}$ non è un campo ordinato.*** *Tra numeri complessi, quindi, non ha senso scrivere disuguaglianze* $\leq$.

15.2. Rappresentazione geometrica di $\mathbb{C}$. Forma trigonometrica dei numeri complessi

In un piano cartesiano, rappresentiamo i numeri complessi $a+ib$ come punti di coordinate (a, b): ecco una semplice e comoda immagine geometrica del campo complesso. In questo contesto, gli assi x, y si dicono ***asse reale*** e ***asse immaginario***: i punti sull'asse reale sono i numeri reali, i punti sull'asse immaginario sono i numeri immaginari puri.

La somma di due numeri complessi è il numero complesso che ha per coordinate la somma delle coordinate: il significato geometrico di questo fatto è che il punto $z_1 + z_2$ si costruisce a partire dai punti z_1, z_2 in base alla "regola del parallelogramma":



Il punto $z = a + ib$ ha distanza dall'origine data, per il Teorema di Pitagora, da:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Questo numero (reale, ≥ 0) si dice ***modulo*** del numero complesso z, e si scrive:

$$\rho = |z|.$$

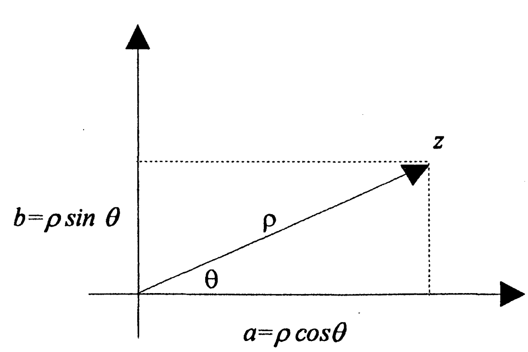
Misuriamo ora l'angolo ϑ formato (in senso antiorario) tra l'asse reale e il segmento che unisce 0 e $z = a + ib$. Risulta ovviamente:

$$\begin{cases} a = \rho\cos\vartheta \\ b = \rho\sin\vartheta. \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$z = a + ib = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

con $\rho \geq 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Quest'ultima scrittura prende il nome di ***forma trigonometrica dei numeri complessi***. Nella forma trigonometrica, un numero complesso è individuato dal modulo ρ e dall'***argomento*** ϑ. Notare che l'argomento è determinato a meno di multipli di 2π, ed è indeterminato quando $\rho = 0$ (in questo caso $z = 0$, qualunque sia l'argomento!).



Ogni numero complesso si può scrivere sia in forma algebrica che in forma trigonometrica. Il passaggio dalla seconda alla prima è ovvio: basta eseguire il prodotto di ρ per i termini entro parentesi. Il passaggio dalla forma algebrica a quella trigonometrica è meno ovvio, invece.

Esempi

Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi.

- $\sqrt{3}+i$.
  Raccogliamo $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1}$:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

- $\sqrt{3}+2i$.
  Analogamente,

$$\sqrt{3}+2i = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + i\frac{2}{\sqrt{7}}\right) = \sqrt{7}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

con

$$\vartheta = \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$$

(che è lo stesso che $\arccos 2/\sqrt{7}$, o $\arctan 2/\sqrt{3}$). Come si vede, in generale l'argomento di un numero complesso andrà espresso usando opportune *funzioni trigonometriche inverse*.

- $-\sqrt{3}-2i$.

$$-\sqrt{3}-2i = \sqrt{7}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

con

$$\vartheta = \pi + \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Esercizi

Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi.

308. 3

309. i

310. -1

311. $-i$

312. $1-i$

313. $-2+2\sqrt{3}\,i$

314. $2-3i$

Scrivere in forma algebrica i numeri complessi aventi modulo e argomento assegnato come segue.

315. $\rho=2, \vartheta=\pi/3$

316. $\rho=1, \vartheta=3\pi/4$

317. $\rho=3,\ \vartheta=\arctan 2$

318. $\rho=4,\ \vartheta=\arccos(-3/5)$

319. $\rho=\frac{1}{2}, \vartheta=\pi+\arcsin(1/4)$

Così come la forma algebrica dei numeri complessi è comoda per eseguire somme e differenze -la parte reale (o immaginaria) della somma è la somma delle parti reali (o immaginarie)-, la forma trigonometrica dei numeri complessi è comoda per eseguire prodotti, quozienti, potenze. Questo grazie al prossimo importante Teorema, che afferma che il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei moduli, e l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti:

Teorema (formule di De Moivre). *Siano*

$$z_1=\rho_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1),\ z_2=\rho_2(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)$$

due numeri complessi scritti in forma trigonometrica. Allora:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2));$$

$$z_1^n=\rho_1^n(\cos n\vartheta_1+i\sin n\vartheta_1)\ \textit{per } n \textit{ intero positivo.}$$

Dimostrazione. Eseguiamo esplicitamente il calcolo del prodotto:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)\cdot(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)=$$

$$= \rho_1\rho_2[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2)] =$$

per le formule di addizione della trigonometria

$$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)),$$

che è quanto si doveva dimostrare.

Per la formula del quoziente, è sufficiente applicare la formula del prodotto al modo seguente:

$$\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)) = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$$

e dividendo ambo i membri per $\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$ si ha la formula cercata.

Infine, la formula per la potenza n-esima segue da quella del prodotto applicata successivamente a n fattori uguali. (La dimostrazione rigorosa è una facile applicazione dell'induzione matematica, v. §1.4.1). □

Esempio. Si voglia calcolare $(1+i)^5$.

Primo procedimento. Determiniamo modulo e argomento di $(1+i)$ e poi applichiamo la formula di De Moivre.

$$|1+i| = \sqrt{2}; \ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi

$$\left|(1+i)^5\right| = \left(\sqrt{2}\right)^5; \ \arg(1+i)^5 = \frac{5}{4}\pi.$$

Di conseguenza:

$$(1+i)^5 = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4 - 4i.$$

Secondo procedimento. Calcoliamo algebricamente le potenze successive di $(1+i)$, ad esempio così:

$$(1+i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i;$$

$$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4;$$

$$(1+i)^5 = -4(1+i).$$

Se l'esponente è grande, il primo metodo è più conveniente.

Le formule di De Moivre permettono di dare un'***interpretazione geometrica al prodotto di numeri complessi***. Sia z, per cominciare, un numero complesso di modulo 1, quindi del tipo $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$. Allora, moltiplicare un numero per z significa sommare ϑ al suo argomento, cioè ***eseguire una rotazione di angolo*** $\boldsymbol{\vartheta}$. Se z ha modulo ρ anziché 1, oltre ad eseguire una rotazione si esegue una ***dilatazione di coefficiente*** $\boldsymbol{\rho}$. Ad esempio:

moltiplicare per i significa eseguire una rotazione di $\frac{\pi}{2}$;

moltiplicare per -1 significa eseguire una rotazione di π;

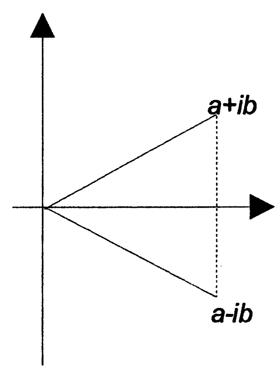
moltiplicare per $(1+i)$ significa eseguire una dilatazione di coefficiente $\sqrt{2}$ e una rotazione di $\pi/4$.

15.3. L'operazione di coniugio

Se $z = a + ib$ è un numero complesso, si dice coniugato di z, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\overline{z} = a - ib.$$

In particolare, se z è reale, $\overline{z} = z$; se z è immaginario puro, $\overline{z} = -z$. Geometricamente, il coniugato di un numero complesso è quindi il punto simmetrico di z rispetto all'asse x. Per questo motivo si ha anche la seguente caratterizzazione: se z è un numero complesso di modulo ρ e argomento ϑ, $\overline{z}$ ha modulo ρ e argomento $-\vartheta$:



L'operazione di *coniugio* ha le seguenti proprietà:

Proposizione. *Siano z_1, z_2due numeri complessi qualunque. Allora:*

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}; \qquad z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \;\; \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}; \;\; \overline{(z_1^n)} = (\overline{z_1})^n; \;\; |\overline{z_1}| = |z_1|.$$

Esercizio 320. Dimostrare la precedente proposizione. (Suggerimento: per provare le relazioni sulla prima riga, usare la forma algebrica dei numeri complessi e la prima definizione di coniugato; per provare le relazioni sulla seconda riga, usare la forma trigonometrica, le formule di De Moivre, e la caratterizzazione del coniugato in forma trigonometrica).

Corollario. *Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti reali, e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio, allora anche $\overline{\alpha}$ lo è.*

Dimostrazione. Sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

un polinomio a coefficienti reali ($a_i \in \mathbb{R}$). Dire che $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice del polinomio significa che

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Prendiamo ora il coniugato di ambo i membri dell'ultima uguaglianza (il coniugato di zero è zero!), e trasformiamo l'espressione sfruttando il fatto che (v. Proposizione precedente) il coniugato di una somma è la somma dei coniugati, il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati, e il coniugato di un numero reale è lo stesso numero. Otteniamo:

$$0 = \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0} =$$

$$= \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} =$$

$$= a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\alpha} + a_0.$$

La catena di uguaglianze dice appunto che $p(\overline{\alpha}) = 0$, cioè $\overline{\alpha}$ è radice del polinomio. □

Torneremo in seguito (§15.5) sul significato del Corollario precedente.

15.4. Radici n-esime nel campo complesso

Consideriamo l'equazione

$$z^n = w$$

con $w \in \mathbb{C}$ assegnato, n intero ≥ 2, $z \in \mathbb{C}$ incognita. Si dice ***radice n-esima*** del numero complesso w *ogni numero complesso* z che soddisfa la precedente equazione.

Notiamo subito che questa definizione *non è coerente* con la definizione di radice n-esima che si dà in $\mathbb{R}$. Ad esempio, in base a questa definizione il simbolo

$$\sqrt{4}$$

indica ogni numero complesso che al quadrato fa 4, quindi (almeno!) 2 e -2. Nel campo reale, invece, il sibolo $\sqrt{4}$ denota solo il numero 2 (ovvero quell'unico numero *positivo* che al quadrato fa 4). Nel seguito dunque occorrerà precisare se il simbolo di radice vada inteso in senso reale o complesso. (Se il radicando è complesso, oppure reale ma negativo, è chiaro che la radice va intesa sempre in senso complesso, non esistendo nel campo reale; il simbolo è ambiguo quando il radicando è reale positivo).

Il prossimo importante Teorema ci dice quante sono e come si calcolano le radici n-esime nel campo complesso.

Teorema. *Sia $w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ un numero complesso assegnato, diverso da zero, e sia n un intero ≥ 2. Allora le radici n-esime di w in $\mathbb{C}$ sono esattamente n, e sono date dalla formula:*

$$z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right), \textit{ per } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (*)$$

(Il simbolo $\rho^{1/n}$ denota qui la radice n-esima, nel campo reale, del numero positivo ρ).

Geometricamente, le radici n-esime sono disposte sui vertici di un poligono regolare di n lati (se $n \geq 3$) inscritto in una circonferenza di raggio $\rho^{1/n}$, avente uno dei vertici nel punto individuato dall'argomento ϑ/n. Se $n = 2$, saranno due punti diametralmente opposti sulla circonferenza di raggio $\rho^{1/n}$, il primo dei quali è individuato dall'argomento ϑ/n. In questo caso ($n = 2$) le due radici quadrate sono l'una l'opposta dell'altra.

Il motivo della diversa definizione di radice n-esima che si dà in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ sta proprio nel precedente risultato, semplice ed elegante (le radici n-esime in $\mathbb{C}$ sono n numeri distinti), che non ha un analogo nel campo reale, dove i numeri che elevati alla n danno un numero reale assegnato sono, a seconda dei casi, $0, 1$ o 2.

Dimostrazione. Cerchiamo sistematicamente tutti i numeri che elevati alla n danno il numero w assegnato, e verifichiamo che si trovano esattamente gli n numeri di cui alla formula (*).

Sia dunque $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, con r, φ incogniti, e calcoliamo z^n sfruttando la formula di De Moivre:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Imponiamo ora che sia $z^n = w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$. Due numeri complessi scritti in forma trigonometrica sono uguali quando hanno lo stesso modulo, e i loro argomenti differiscono per multipli di 2π. Perciò dev'essere:

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \vartheta + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Risolvendo in r e φ si ha :

$$\begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \varphi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dunque le radici n-esime di z hanno modulo $\rho^{1/n}$ e argomento dato da $\frac{\vartheta+2k\pi}{n}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Rimane da osservare che i numeri effettivamente distinti che si ottengono a questo modo sono solo n, per $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Infatti per k più grande si ha:

$$\frac{\vartheta + 2n\pi}{n} = \frac{\vartheta}{n} + 2\pi, \quad \frac{\vartheta + 2(n+1)\pi}{n} = \frac{\vartheta + 2\pi}{n} + 2\pi, \ldots$$

cioè si ritrovano argomenti che differiscono di 2π (o multipli) da argomenti già trovati per $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Questo prova che le radici n-esime sono esattamente n, e sono date dalla (*). Basta ora riflettere sul significato geometrico della formula per ottenere la seconda parte del Teorema. □

Esempi

- Calcolare $\sqrt[3]{-8i}$. Il numero $-8i$ ha modulo 8 e argomento $\frac{3}{2}\pi$. Il modulo delle radici terze sarà $\sqrt[3]{8} = 2$. L'argomento delle tre radici sarà:

$$\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi, \text{ per } k = 0, 1, 2,$$

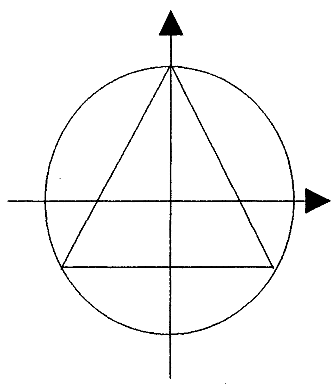
cioè

$$\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi$$

e le radici cubiche di $-8i$ sono quindi

$$2i; -\sqrt{3} - i; \sqrt{3} - i.$$

Le 3 radici cubiche sono disposte lungo i vertici di un triangolo equilatero:



- Calcolare $\sqrt{-10}$. Il numero -10 ha modulo 10 argomento π. L'argomento di una delle due radici sarà $\pi/2$, l'argomento dell'altra $\frac{\pi}{2} + \pi$. Quindi:

$$\sqrt{-10} = \pm i\sqrt{10}.$$

(Intendendo l'espressione $\sqrt{10}$ in senso reale). In generale, le radici quadrate di un numero negativo sono espresse da $\pm i$ che moltiplica la radice quadrata (reale) del *valore assoluto* del numero stesso.

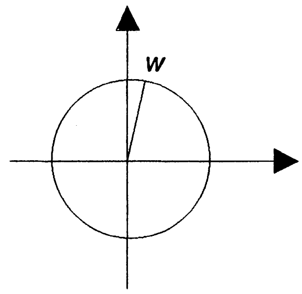
- Calcolare $\sqrt[5]{1+i}$. Il numero $(1+i)$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$. Le radici cubiche saranno quindi:

$$\sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20} + k\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{20} + k\frac{2}{5}\pi\right)\right), \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

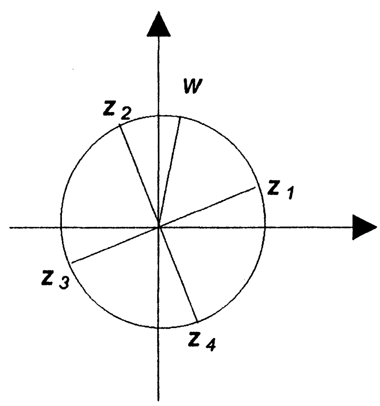
Gli angoli trovati non sono notevoli, ma volendo si possono calcolare seni e coseni in modo approssimato, usando una calcolatrice.

- Sia w il numero complesso di modulo 1 qui raffigurato:



Si costruiscano *graficamente* le radici quarte di w.

Poiché w ha modulo 1, anche le radici quarte staranno sulla circonferenza unitaria. E' sufficiente ora costruire graficamente la quarta parte dell'angolo raffigurato per trovare una delle radici; le altre saranno disposte lungo i vertici di un quadrato di cui il primo vertici è la prima radice trovata:



Esercizi

Si calcolino le seguenti radici n-esime in $\mathbb{C}$, e si disegnino poi nel piano complesso.

321. $\sqrt{-9}$

322. $\sqrt[4]{1}$

323. $\sqrt[3]{-1}$

324. $\sqrt[5]{1-i}$

325. $\sqrt{\sqrt{3}+i}$

326. $\sqrt{5i}$

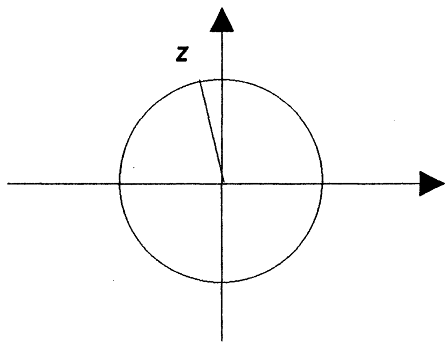
327. $\sqrt[3]{i}$

328. $\sqrt[3]{1+i}$

329. $\sqrt[4]{1+i}$

330. $\sqrt[3]{2+3i}$

331. Disegnare le radici quadrate e le radici cubiche del numero complesso di modulo unitario qui raffigurato:



15.5. Teorema fondamentale dell'Algebra ed equazioni algebriche

Quello che diremo in questo paragrafo ha strette relazioni con quanto visto per i polinomi a coefficienti reali nei §§6.1, 6.4, che lo studente è invitato a tenere presenti.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che l'equazione $z^n = w$, con z incognita e w assegnato, ha sempre n soluzioni in $\mathbb{C}$. Questo fatto ha una notevole generalizzazione, che riguarda le equazioni algebriche in $\mathbb{C}$.

Un'***equazione algebrica in*** $\mathbb{C}$ è un'equazione del tipo $p_n(z) = 0$ con $p_n(z)$ polinomio di grado n a coefficienti complessi. Una soluzione dell'equazione si dice anche ***radice del polinomio***. Per il Teorema di Ruffini (che vale anche per polinomi a coefficienti complessi!) il numero $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $p_n(z)$ se e solo se $p_n(z)$ è divisibile per $(z-\alpha)$. Una radice di $p_n(z)$ si dice avere ***molteplicità k*** se $p_n(z)$ è divisibile per $(z-\alpha)^k$, ma non è divisibile per $(z-\alpha)^{k+1}$.

Ad esempio, il polinomio

$$(z-2i)(z+4)^3(z+i)^2$$

ha come radici: $z = 2i$, di molteplicità 1 (radice semplice), $z = -4$, di molteplicità 3 (radice tripla), $z = -i$, di molteplicità 2 (radice doppia).

Richiamati questi fatti, possiamo enunciare il:

Teorema Fondamentale dell'Algebra. *Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n radici in $\mathbb{C}$, computate con la dovuta molteplicità.*

Ad esempio, il polinomio

$$z^4 + 2z^2 + 1 = \left(z^2 + 1\right)^2,$$

che nel campo reale non aveva radici, nel campo complesso ne ha 4: $\pm i$, ciascuna di molteplicità 2. Infatti:

$$\left(z^2 + 1\right)^2 = (z + i)^2 (z - i)^2.$$

Il polinomio

$$z^5 + 3z^2 - iz + 5i + 2$$

ha esattamente 5 radici, computate con la dovuta molteplicità (a prescindere dal fatto che noi le sappiamo trovare oppure no).

Non dimostreremo questo importante Teorema, ma facciamo alcune osservazioni e ne mostriamo alcune conseguenze.

Corollario. *Un polinomio di grado n a coefficienti complessi si può sempre fattorizzare nel prodotto di n polinomi di primo grado, a coefficienti complessi.*

Questo segue dal Teorema fondamentale dell'Algebra insieme al teorema di Ruffini.

Corollario. *Un polinomio di grado n a coefficienti reali si può sempre fattorizzare nel prodotto di polinomi a coefficienti reali di primo grado o di secondo grado irriducibili.*

Questo corollario è già stato enunciato nel §6.4. Siamo ora in grado di fornirne una

Dimostrazione. Anzitutto, fattorizziamo il polinomio a coefficienti reali nel prodotto di n polinomi di primo grado a coefficienti complessi, ovvero scriviamo:

$$p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

con $a \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. I numeri α_j sono le radici del polinomio. Se α_j è reale, il fattore $(x - \alpha_j)$ è un polinomio di primo grado a coefficienti reali. Se α_j non è reale, ricordiamo che, per un Corollario dimostrato nel §15.3, anche $\overline{\alpha_j}$ dev'essere radice del polinomio, quindi anche il fattore $(x - \overline{\alpha_j})$ compare nella fattorizzazione di $p(x)$. Quindi nella fattorizzazione di $p(x)$ figura il prodotto $(x - \alpha_j)(x - \overline{\alpha_j})$. Posto $\alpha_j = a + ib$, eseguiamo questo prodotto e troviamo:

$$(x - \alpha_j)(x - \overline{\alpha_j}) = (x - a - ib)(x - a + ib) = (x - a)^2 + b^2,$$

che è un polinomio a coefficienti reali, di secondo grado, irriducibile. Perciò $p(x)$ si fattorizza come enunciato. □

L'ultimo Corollario è un tipico esempio di risultato che ha a che fare coi numeri reali (si noti che l'enunciato non coinvolge i numeri complessi!), ma che si dimostra naturalmente passando attraverso il campo complesso. E' questo un fatto che càpita di sovente in matematica (anche se a questo livello elementare non è possibile fare molti esempi di questo tipo), tanto che il matematico Hadamard ha scritto:

"La via più breve tra due verità nel campo reale passa attraverso il campo complesso".

Esempio. Fattorizzare, nel campo complesso e nel campo reale, il polinomio a coefficienti reali $1 + x^4$.

Abbiamo già visto (§6.4) come si può fattorizzare in $\mathbb{R}$ questo polinomio privo di radici reali: si usa un "trucco" che coinvolge i prodotti notevoli:

$$\left(x^4+1\right) = \left(x^2+1\right)^2 - 2x^2 = \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Nel campo complesso, possiamo trovare tutte le radici del polinomio, risolvendo l'equazione

$$x^4 = -1$$

che porta (eseguire il calcolo per esercizio):

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i).$$

Si può quindi fattorizzare il polinomio nel prodotto:

$$\left(x^4+1\right) =$$

$$= \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)\right).$$

La fattorizzazione in $\mathbb{R}$ nel prodotto di due fattori irriducibili si potrebbe ottenere (anziché col "trucco" visto prima), a partire da questa fattorizzazione in $\mathbb{C}$, moltiplicando tra loro a due a due i fattori che coinvolgono radici complesse coniugate:

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right) = \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)\right) = \left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Facciamo ora una semplice osservazione sulle ***equazioni di secondo grado in*** $\mathbb{C}$. La formula risolutiva per l'equazione di secondo grado in $\mathbb{R}$,

$$ax^2+bx+c=0$$

si ottiene trasformando quest'equazione in quella equivalente:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

L'identità vale ovviamente anche se $a, b, c \in \mathbb{C}$, e di conseguenza si ottiene che l'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, $az^2 + bz + c = 0$, ha soluzioni

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

dove ora il simbolo $\sqrt{\cdot}$ denota la radice nel quadrata campo complesso, quindi due numeri (uno opposto all'altro). La formula è quindi identica al caso reale, e non c'è più la distinzione in 3 casi a seconda del segno del discriminante: la quantità $b^2 - 4ac$ è un numero complesso che in ogni caso ha due radici quadrate (tranne quando si annulla, caso in cui l'equazione ha una soluzione di molteplicità due).

Esercizi

Risolvere nel campo complesso le seguenti equazioni di secondo grado:

332. $z^2 + z + 1 = 0$

333. $z^2 + iz + 1 = 0$

334. $iz^2 + z + 1 = 0$

335. $z^2 + (1 + i)z + 1 = 0$

Risolvere le seguenti equazioni algebriche, precisando la molteplicità delle soluzioni:

336. $z^4 + iz^3 + 8iz - 8 = 0$

337. $z^4 + 2iz^2 + 1 = 0$

338. $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$

15.6. Tecniche di soluzione di equazioni in $\mathbb{C}$

Vediamo ora alcuni esempi tipici che illustrano come si possono risolvere semplici equazioni in $\mathbb{C}$. Per le equazioni algebriche si sono già visti esempi nel paragrafo precedente. Vediamo ora qualche esempio di tipo diverso.

Esempi

- $z^2 + i\mathrm{Im}z + 2\overline{z} = 0$

  L'equazione coinvolge z mediante il suo quadrato, il suo coniugato, la sua parte immaginaria. Non è perciò un'equazione algebrica (il primo membro *non è un* *polinomio in z*). Si affronta bene scrivendo z in forma algebrica, cioè ponendo $z = x + iy$, con x, y incognite reali, e trascrivendo l'equazione a questo modo:

$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$i\mathrm{Im}z = iy$

$2\overline{z} = 2(x - iy) = 2x - 2iy$

$$\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + (iy) + (2x - 2iy) = 0.$$

Ora, un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero. Perciò mettiamo in evidenza la parte reale e la parte immaginaria del primo membro ed uguagliamo entrambe a zero:

$$\left(x^2 - y^2 + 2x\right) + i(2xy + y - 2y) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - y = 0. \end{cases}$$

Si è così trasformata l'equazione in una incognita complessa in un sistema di due equazioni in due incognite reali. Risolviamo il sistema. La seconda equazione dà:

$$y = 0 \text{ o } x = \frac{1}{2}.$$

Per $y = 0$ la prima equazione diventa

$$x^2 + 2x = 0,$$

che dà

$$x = 0 \text{ o } x = -2.$$

Per $x = \frac{1}{2}$ la prima equazione diventa

$$-y^2 + \frac{5}{4} = 0,$$

che ha soluzioni

$$y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Quindi le soluzioni sono:

$$z = 0, z = -2,\ z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2},\ z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

L'equazione ha 4 soluzioni. Tale numero non era prevedibile (ribadiamo che l'equazione non è algebrica, quindi il teorema fondamentale dell'Algebra non si applica ad essa).

Il metodo visto in quest'esempio (passare alla parte reale e immaginaria dell'equazione) *è applicabile in linea di principio ad ogni equazione in* $\mathbb{C}$. In pratica, un sistema non lineare di due equazioni in due incognite è quasi sempre insolubile per via algebrica. Perciò prima di mettersi su questa strada è bene osservare se non ce n'è una più semplice.

- $z + 3i + (\mathrm{Re}z)\left(i + (\mathrm{Im}z)^2\right) = 0.$

Sostituendo $z = x + iy$ e separando parte reale e parte immaginaria si arriva al sistema (si lasciano i facili passaggi per esercizio)

$$\begin{cases} x(1+y^2) = 0 \\ y + 3 + x = 0. \end{cases}$$

La prima equazione implica $x = 0$ (si osservi che x, y *devono essere reali*, quindi il fattore $(1 + y^2)$ non si annulla mai!). La seconda dà allora $y = -3$, e l'unica soluzione dell'equazione è $z = -3i$.

- $z^3 - |z| = 0.$

Sostituire $z = x + iy$ e separare parte reale e parte immaginaria è possibile, ma porta a calcoli algebrici po' pesanti (provare per credere). Se riscriviamo l'equazione nella forma

$$z^3 = |z|,$$

possiamo invece notare che ambo i membri si esprimono facilmente se si pone $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, ovvero se si usa la *forma trigonometrica*. Infatti:

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta);\ |z| = \rho$$

e l'equazione è soddisfatta se e solo se i due membri hanno moduli uguali e argomenti che differiscono per multipli di 2π, ovvero (il secondo membro ha argomento 0):

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\vartheta = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La prima equazione dà $\rho = 0$ e $\rho = 1$ (attenzione: ρ dev'essere ≥ 0 perché è il modulo del numero complesso; perciò $\rho = -1$ non è accettabile); la seconda dà: $\vartheta = \frac{2k\pi}{3}$. Si trova pertanto:

$$z = 0;\ z = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \text{ per } k = 0, 1, 2.$$

Esplicitamente:

$$z = 0;\ z = 1;\ z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $z^4 = \overline{z}.$

Si può affrontare come l'esempio precedente, scrivendo z in forma trigonometrica, e osservando che $\overline{z} = \rho(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))$. Si lascia come esercizio lo svolgimento dei calcoli. Le soluzioni che si trovano sono $z = 0$ e $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

- $\begin{cases} |z-1| = |z+1| \\ |z-2i| = 3. \end{cases}$

E' un sistema di equazioni (non algebriche) in $\mathbb{C}$. Si ragiona bene visualizzandone il *significato geometrico*: il numero positivo $|z - z_0|$ rappresenta la distanza, nel piano, tra i due punti z, z_0. Perciò la prima equazione individua il luogo dei punti la cui distanza da 1 è uguale alla distanza da -1. Questo luogo è l'asse del segmento che unisce i due punti, ovvero l'asse immaginario (fare un disegno per convincersene). Quindi la prima equazione è equivalente a $x = 0$. La seconda esprime il fatto che la distanza di z da $2i$ è 3, quindi rappresenta la circonferenza di centro $2i$ e raggio 3. Le soluzioni dell'equazione sono le intersezioni della circonferenza con l'asse immaginario, quindi sono due punti, precisamente (come mostra una figura): $z = -i$ e $z = 5i$. Queste sono le soluzioni dell'equazione.

A titolo di confronto, provare a risolvere il sistema ponendo $z = x + iy$.

- $$\begin{cases} |z - 4i| < |z - 2i| \\ \text{Re}z < 3. \end{cases}$$

E' questo un sistema di disequazioni nel campo complesso, che individuerà una regione del piano. (Si osservi che le disequazioni sono sensate in quanto coinvolgono quantità reali: Rez e moduli di numeri complessi).

La prima disequazione individua (ragionando in modo simile all'esercizio precedente) un semipiano: Im$z > 3$. Quindi il sistema individua la regione del piano complesso:

$$\{x + iy : x < 3, y > 3\}.$$

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni

339. $z^2 + \overline{z} + 1 = 0$

340. $\overline{z} - 1 = (z - 1)^3$

341. $i\overline{z}^6 + 2\overline{z}^3 + 3i = 0$

342. $z + 2i\overline{z} = |z| - 1$

343. $(z^2 + 1)^3 = 8$

344. $\overline{z}(1 + i) = z^3$

345. $\begin{cases} |z - 4i| = |z - 2| \\ \arg z = \pi/4 \end{cases}$

346. $\begin{cases} |z-4| < |z+5| \\ \mathrm{Re} z < \frac{1}{2} \end{cases}$

347. $z^3 + (2-5i)z^2 - 13iz - 15 = 0.$
(Suggerimento: l'equazione ha una soluzione immaginaria pura).

15.7.* Cenni storici sui numeri complessi. Formula risolutiva per l'equazione di terzo grado

L'introduzione dei numeri complessi, in algebra, si deve ai matematici italiani del rinascimento, ed è legata, in particolare, alla ricerca di formule risolutive per le equazioni algebriche di terzo e di quarto grado, formule scoperte, rispettivamente, da **Scipione del Ferro** (1465 circa-1526) e **Ludovico Ferrari** (1522-1565), e pubblicate nel 1545 da **Gerolamo Cardano** (1501-1576), nella sua *Ars magna*. Scritta coi simboli moderni, la formula risolutiva per un'equazione del tipo

$$x^3 + px = q \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

(forma a cui è sempre possibile ricondurre la più generale equazione di terzo grado) è

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}. \qquad (*)$$

Ora, questa formula può portare a radici quadrate di numeri negativi anche in casi in cui sappiamo che le soluzioni sono tutte reali (a titolo d'esempio, si consideri l'equazione $x^3 - 3x = 0$, che ha soluzioni $x = 0, \pm\sqrt{3}$, e si provi ad applicare la formula). Per interpretare correttamente la formula, e per trovare mediante essa tutte le soluzioni dell'equazione, occorre operare con i numeri complessi. Fu **Raffaele Bombelli** (1526 circa-1573) il primo a suggerire il modo corretto di operare in questi casi, manipolando opportunamente espressioni contenenti il simbolo $\sqrt{-1}$. Il simbolo i per indicare l'unità immaginaria fece la sua comparsa molto più tardi, nel 1794, con **Leonhard Euler** (1707-1783), e divenne comune a partire dal 1801, con le *Disquisitiones arithmeticae* di **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855).

Per quasi trecento anni dalla loro introduzione, i numeri complessi furono usati in modo un po' formale, come uno strumento di calcolo unicamente finalizzato a raggiungere *risultati* riguardanti i numeri e le funzioni reali (ad esempio, decomposizione di polinomi, integrazione delle funzioni razionali, calcolo coi logaritmi quando questi hanno argomento negativo), il cui *fondamento* rigoroso non era certo. Ad esempio, nel 1812 **Pierre-Simon de Laplace** (1749-1827) scrive:

> "Questo passaggio dal reale all'immaginario può essere visto come un metodo euristico, che è come il metodo di induzione a lungo usato dai

matematici. Ad ogni modo, se si usa il metodo con grande attenzione e prudenza, si potrà sempre provare il risultato ottenuto".[6]

E nel 1825, Gauss ammette che "la vera metafisica di $\sqrt{-1}$ rimane elusiva".[7]

Un passo decisivo verso una comprensione più intuitiva dei numeri complessi fu la rappresentazione geometrica di questi numeri e delle operazioni con essi. Tale rappresentazione fu introdotta in modo cosciente e sistematico coi lavori di **Casper Wessel** (1745-1818) nel 1797, e **Jean-Robert Argand** (1768-1822) nel 1806. Gauss ebbe un ruolo importante nell'accettazione definitiva dei numeri complessi, in particolare per le varie dimostrazioni che egli diede (1799, 1815, 1816) del *teorema fondamentale dell'algebra,* che afferma che ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha almeno una radice, nel campo complesso (e di conseguenza ne ha esattamente tante quanto è il grado del polinomio, pur di contarle con la dovuta molteplicità). Nei suoi lavori dal 1831 in poi, Gauss non ebbe più dubbi sulla legittimità dell'uso dei complessi.

Esercizio 348. Si consideri la generica equazione di terzo grado in $\mathbb{C}$:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \; (a \neq 0).$$

Si divida ambo i membri per a, si ponga $z = w + \alpha$ e si determini α in funzione di a, b, c, d in modo tale che l'equazione di partenza risulti equivalente all'equazione:

$$w^3 + pw = q$$

con p, q opportuni. Esprimere p, q in funzione dei coefficienti a, b, c, d.

[6] Citato in Morris Kline: Mathematical Thought from ancient to modern times. Oxford University Press, 1972. Volume 2, cap. 27 ("Functions of Complex Variables"), p. 628.

[7] Citato in Kline, ibidem, p. 631.

Soluzioni degli esercizi

1. ***a.*** Siano $2n, 2m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) due numeri pari. Allora $2n + 2m = 2(n + m) = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, cioè $2n + 2m$ è pari.

b. Siano $2n + 1, 2m + 1$ ($n, m \in \mathbb{N}$) due numeri dispari. Allora $(2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m + 1) = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, cioè $(2n + 1) + (2m + 1)$ è pari.

c. Siano $2n + 1, 2m + 1$ ($n, m \in \mathbb{N}$) due numeri dispari. Allora $(2n + 1) \cdot (2m + 1) = 2(nm + m + m) + 1 = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$, cioè $(2n + 1) \cdot (2m + 1)$ è dispari.

d. Sia $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ un numero qualsiasi, fattorizzato in prodotto di numeri primi. Allora $n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_r^{2\alpha_r}$, e gli esponenti sono tutti pari.

2. $x = -9/5$ $(x \leq -9/5)$

3. $x = 0$ $(x < 0)$

4. $x = -a$ $(x \leq -a)$

5. $x = 2/(1 + a^2)$ $(x > 2/(1 + a^2))$

6. $x = b - a$ purché $b \neq 2a$. Disequazione: se $b < 2a$ soluzioni: $x \leq b - a$; $\frac{b}{2} < x < a$;
se $b = 2a$ soluzioni: $x < a$;
se $b > 2a$ soluzioni: $x < a$; $\frac{b}{2} < x \leq b - a$.

7. Equazione mai verificata; (disequazione: $-2 < x < -1$)

8. $x = 1$ $(x < -2; 1 \leq x < 3)$

9. $x < -1$; $1 < x \leq 3$

10. $x > 3/2$; $5/3 < x < 2$

11. Segno $+$ nel testo:
Se $a = b$, $\forall x$; se $a > b$, $x \leq 1$; se $a < b$, $x \geq 1$. Segno $-$ nel testo:
se $a = -b$ e $b \leq 0$, $\forall x$; se $a = -b$ e $b > 0$, mai; se $a > -b$, $x \leq \frac{a-b}{a+b}$; se $a < -b$, $x \geq \frac{a-b}{a+b}$.

12. $a \neq 0, b \neq -5; a^2 - b^2 - 5b \neq 0$

13. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = 1.46361$

14. $\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 3}{4} + \frac{3 \cdot 4}{5} + \frac{4 \cdot 5}{6} + \frac{5 \cdot 6}{7} + \frac{6 \cdot 7}{8} = 17.4357$

15. $11^3 + 12^3 + 13^3 = 5256$

16. $\sum_{k=1}^{10} k(k + 1)$

17. $\sum_{k=2}^{n} 2^k$

18. $\sum_{k=0}^{8} a^{2+k} b^{10-k}$

19. $n(n + 1)$

20. n^2

21. $\frac{3}{8}(9^{10} - 1) = 1\,307\,544\,150$

22. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} =$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-\cancel{1}-k+\cancel{1}+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-\cancel{1}-k+\cancel{1})}{k!} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)k+(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)[k+n-k]}{k!} = \binom{n}{k}$$

23. Basta rappresentare metà del triangolo:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & 1 & & 3 & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 &
\end{array}$$

24. $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$; 27405;

17296;
43 949 268.

25. $y^6(1 + 18x^2 + 135x^4 + 540x^6 +$
$+ 1215x^8 + 1458x^{10} + 729x^{12})$

26. $-1792x^6y^{18}$

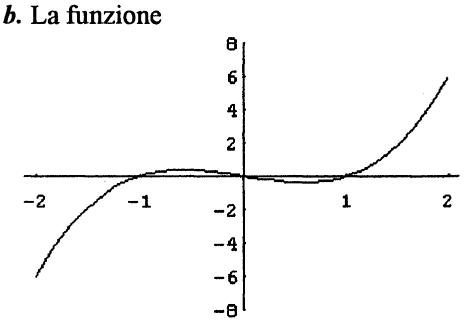
27. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Per $n = 1$ è $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, vero. Sia vero per n e proviamola per $n+1$.
$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$ per ipotesi induttiva
$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, che è la tesi.

28. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Per $n = 0$ è $1 = \frac{1-q}{1-q}$, vero. Sia vero per n e proviamola per $n+1$.
$\sum_{k=1}^{n+1} q^k = \sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1} =$ per ipotesi induttiva
$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, che è la tesi.

29. $L = \sqrt{13}$; $M \equiv (2, -\frac{1}{2})$.

30. ***a.*** Un punto x_0 si dice di minimo relativo per f se esiste un intorno $\mathcal{U}(x_0)$ tale che $\forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ è $f(x) \geq f(x_0)$. In tal caso $m = f(x_0)$ si dice minimo relativo di f.

b. La funzione



sull'intervallo $(-2, 2]$.

c. $x = -1$ punto di min. rel.; $x = 0.5$ punto di min. rel.; $x = 1$ punto di max. rel.; $x = 2$ punto di min. ass.

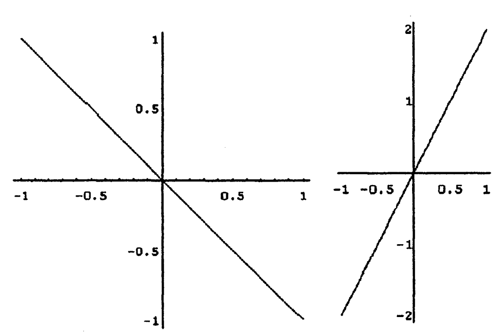
d. Se x_0 è punto di massimo assoluto, per ogni x (nel dominio di f) è $f(x) \geq f(x_0)$, in particolare questo vero per ogni x appartenente a un intorno (qualsiasi) di x_0, quindi x_0 è punto di massimo relativo.

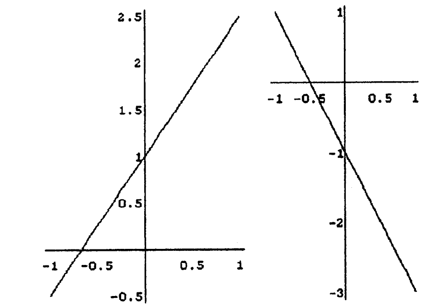
31. Proviamo che $y = x^3$ è crescente per $x \geq 0$. Sia $0 \leq x_1 \leq x_2$. Moltiplicando ambo i membri di $x_1 \leq x_2$ una volta per x_1 e una volta per x_2 si ha: $x_1^2 \leq x_1x_2$ e $x_1x_2 \leq x_2^2$; leggendo in catena le disuguaglianze si ha $x_1^2 \leq x_2^2$. Moltiplicando ambo i membri di $x_1^2 \leq x_2^2$ per x_1 si ha $x_1^3 \leq x_1x_2^2$; moltiplicando ambo i membri di $x_1x_2 \leq x_2^2$ per x_2 si ha $x_1x_2^2 \leq x_2^3$, e leggendo in catena le disuguaglianze si ha $x_1^3 \leq x_2^3$, dunque x^3 è crescente per $x \geq 0$. Poiché è dispari, è anche crescente per $x \leq 0$; infine, se $x_1 < 0 < x_2$ è anche $x_1^3 < 0 < x_2^3$, e quindi $x_1^3 < x_2^3$; perciò x^3 è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

32. ***a.*** Siano $y = m_1x + q_1$, $y = m_2x + q_2$ due rette oblique qualunque, e siano (rispettivamente) A_1, A_2 le intersezioni delle due rette con l'asse y (quindi $A_1(0, q_1)$, $A_2(0, q_2)$, B_1, B_2 i punti di ascissa 1 sulle due rette (quindi $B_1(1, m_1 + q_1)$, $B_2(1, m_2 + q_2)$), C_1, C_2 i punti sull'asse y avente l'ordinata di B_1, B_2 (quindi $C_1(0, m_1 + q_1)$, $C_2(0, m_2 + q_2)$). I triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ per costruzione hanno un angolo retto e un lato di lunghezza 1. Perciò sono uguali se e solo se $C_1A_1 = C_2A_2$; ma questo è vero se e solo se $m_1 = m_2$. D'altro canto i triangoli sono uguali se e solo se $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, e questo è vero se e solo se le due rette sono parallele (angoli corrispondenti delle due rette rispetto all'asse y che è trasversale). Perciò le rette sono parallele se e solo se $m_1 = m_2$.

b. Siano $y = mx$, $y = m'x$ due rette passanti per l'origine O e perpendicolari, siano $A(1, m)$, $B(1, 0)$, $C(1, m')$. I triangoli OBA, OBC sono simili per costruzione, dunque $OB : BC = BA : OB$, ossia $1 : |m'| = |m| : 1$. Dunque $|mm'| = 1$; ma le due rette sono una crescente e l'altra decrescente, essendo perpendicolari, perciò $mm' = -1$.

33.





34. $y = 3x$; $y = 3x - 1; y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

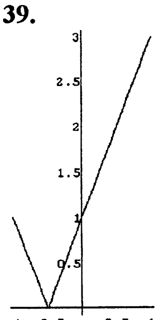
35. ***a.*** $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; ***b.*** $y = -3x + \frac{19}{2}$; ***c.*** $y = \frac{1}{3}x + 4$; ***d.*** $\left(\frac{199}{9}; \frac{101}{3}\right)$.

36. ***a.*** $(a-1)x + ay = 0$; ***b.*** Parallela all'asse x per $a = 0$; parallela all'asse y per $a = 1$; ***c.*** Passa per $(1,1)$ per $a = 3/4$; passa per $(2,-1)$ per ogni a.

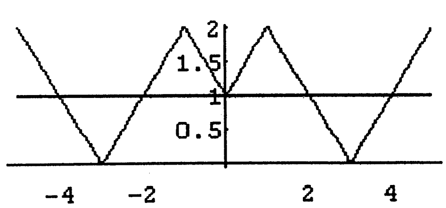
37. $x > 8/7$

38. Se $a \leq -\frac{2}{5}$, $x \geq -\left(\frac{1+a}{3}\right)$; se $a \geq -\frac{2}{5}$, $x \geq 1 + 3a$

39.



40.

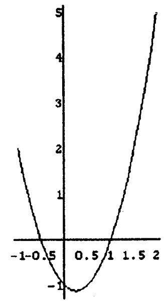


$0 < |x| < 2; |x| > 4$.

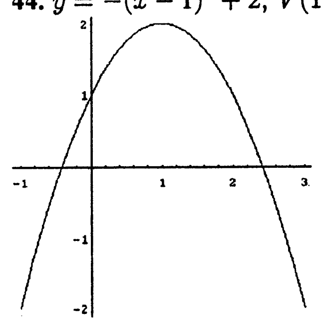
41. $q(x) = x^2 + 2x - 2; r(x) = -5x + 2$.

42. $\frac{2x^5-x^3+9x^2+1}{x^3+x^2-1} = 2x^2 - 2x + 1 + \frac{10x^2-2x+2}{x^3+x^2-1}$
$q(x) = 2x^2 - 2x + 1$; $r(x) = 10x^2 - 2x + 2$;
$\frac{x^{500}+x-2}{x-1} = x^{499} + x^{498} + \ldots + x^2 + x + 2$;
$q(x) = x^{499} + x^{498} + \ldots + x^2 + x + 2$; $r(x) = 0$.

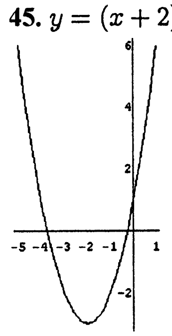
43. $y = 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{8}$; $V(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$



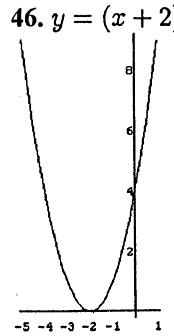
44. $y = -(x-1)^2 + 2$; $V(1,2)$



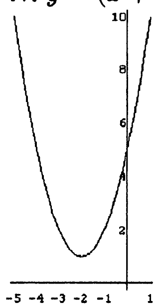
45. $y = (x+2)^2 - 3$; $V(-2,3)$



46. $y = (x+2)^2$; $V(-2,0)$



47. $y=(x+2)^2+1;\ V(-2,1)$



48. *a.* $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

b. $x>\frac{1-\sqrt{5}}{2}; x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

c. mai

49. *a.* $\frac{-2-\sqrt{19}}{3}<x<\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$

b. $x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$

c. $2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}$

50. *a.* $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

b. $x\geq -5+4\sqrt{2}; x\leq -5-4\sqrt{2}$

c. $x=-\sqrt{2}\pm 2$

51. *a.* $(x+3)(x+2)\leq 0;\ -3\leq x\leq -2$

b. $2(x+\frac{3}{2})(x-2)\geq 0;\ x\geq 2,\ x\leq -\frac{3}{2}$

c. $(x+3)(x-2)>0;\ x>2,\ x<-3$

52. *a.* $(x-1)(x+5)<0;\ -5<x<1$

b. $\left(x-\sqrt[4]{2}\right)\left(x+\sqrt[4]{2}\right)\leq 0;$
$-\sqrt[4]{2}\leq x\leq \sqrt[4]{2}$

c. $(x-1)(x+741)\geq 0;\ x\geq 1,\ x\leq -741$

53. *a.* $(x+1)^2>0;\ x\neq -1$

b. $(x+3)(x+1)<0;\ -3<x<-1$

c. $x(x-1)\leq 0; 0\leq x\leq 1$

54. *a.* $\left(x+\sqrt{2}\right)^2\geq 0;\ \forall x$

b. $(x-4)(x+3)>0;\ x>4; x<-3$

c. $x(x+4)<0;\ -4<x<0$

55. *a.* $(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

b. $2\left[\left(x+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2\right]$

c. $2\left[(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2\right]$

56. *a.* $2\left[(x+1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$

b. $(x-\frac{3}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

c. $x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$

57. $x=\frac{1}{2};\ x=\frac{1}{4}$

58. $x=-1$

59. $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

60. Per $a\neq 0, x=a,\ x=\frac{1}{a}$; se $a=0$, nessuna soluzione.

61. $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, purché $a\neq 0$

62. $-1<x\leq -\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0<x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

63. Se $\lambda>0,\ -2\lambda<x<0$; se $\lambda=0$, nessuna soluzione; se $\lambda<0,\ 0<x<-2\lambda$.

64. $y\leq 0;\ 1<y<2$

65. $x\leq -1;\ x=0;\ x\geq\frac{1}{2}$

66. $x>2+\sqrt{6}; x<2-\sqrt{6}$

67. $x<1-\sqrt{5};\ 1<x<1+\sqrt{5}$

68. $x\geq 5;\ 0\leq x<1;\ x<-1$

69. $-1<x<0$

70. Siano $x_1=\frac{a-1+\sqrt{1-2a+3a^2}}{2a}$, $x_2=\frac{a-1-\sqrt{1-2a+3a^2}}{2a}$. Le soluzioni al variare di a sono: se $a\leq -1$, nessuna soluzione; se $-1<a<0,\ x_1<x<x_2$; se $a=0,\ x>0$; se $0<a<\frac{1}{3},\ x<x_2,\ x>x_1$; se $a=\frac{1}{3},\ x\neq -1$; se $a>\frac{1}{3}, \forall x$.

71. Le soluzioni al variare di a sono: se $a<-1$, nessuna soluzione; se $a=-1,\ x\geq 1$; se $-1<a\leq -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \forall x$; se $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\frac{-a-\sqrt{4-3a^2}}{2(a^2-1)} \leq x \leq \frac{-a+\sqrt{4-3a^2}}{2(a^2-1)}$; se $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a < 1$, $\forall x$; se $a = 1$, $x \leq -1$; se $a > 1$, nessuna soluzione.

72. $\forall x$

73. $(x-1)^2(x-4) \leq 0$ per $x \leq -4, x = 1$

74. $(x-1)^2(x+1) > 0$ per $x > -1$, $x \neq 1$

75. $(x+1)(x^2-3x+4) < 0$ per $x < -1$

76. $(2x+7)(x+1)(x-1) \geq 0$ per $-\frac{7}{2} \leq x \leq -1$, $x \geq 1$

77. $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

78. $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

79. $(x^2+1)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)$

80. $x = -a \pm b$

81. $x > a$

82. $x \geq 0$

83. $0 < x < 1$, $x > 1$

84. $x \geq 0$, $x = -1$

85. $x > |a|, x < -|a|$

86. $0 < x < 1$

87. $x > 0$, $-\sqrt[5]{2} < x < -1$

88. F V F

89. F F F

90. F F F

91. V F V

92. F V F

93. V F F

94. V V V

95. $\frac{4}{3}$ $\sqrt[9]{a^7}$ $\frac{1}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}$

96. $\frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[3]{8}}$ $\sqrt[4]{ab}$ $a^2\sqrt[8]{a^5}$

97. NO SI' SI'

98. NO SI' SI'

99. NO SI' SI'

100. SI' NO SI'

101. $a:4$; $b:5$; $c:2$; $d:6$; $e:1$; $f:3$

102. $a:9$; $b:7$; $c:8$

103. $a:6$; $b:5$; $c:8$; $d:5$; $e:2$; $f:1$

104. nessuna soluzione

105. $x = 0, x = 1$

106. $-\frac{1}{2} \leq x < 0$

107. $x > 3$

108. $x \geq -1$

109. $0 \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $2 < x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

110. $-1 \leq x \leq 0$, $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

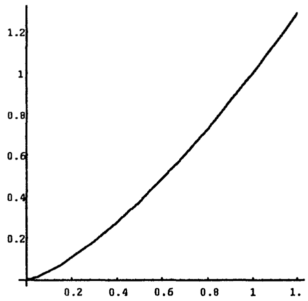
111. $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$

112. Nessuna soluzione

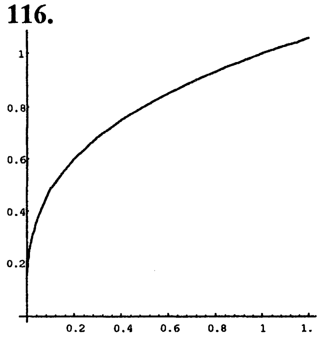
113. Nessuna soluzione

114. $x \geq 1$

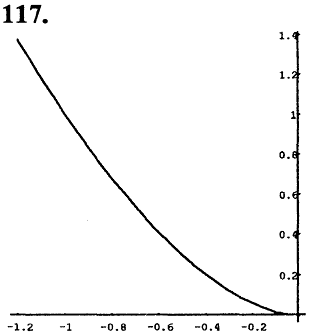
115.



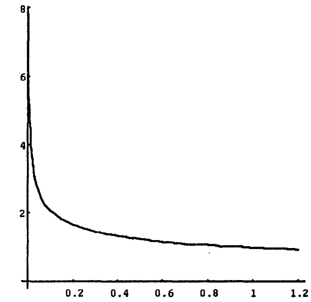
116.



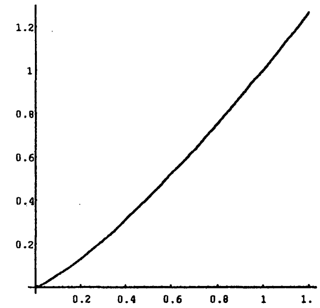
117.



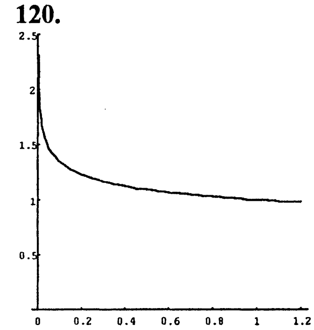
118.



119.



120.



121. $a : 3$; $b : -2$; $c : 0$; $d : \frac{1}{4}$; e : *non esiste*; f : *non esiste*

122. $a : 4$; $b : 6$; $c : \log_2 3$; $d : \log_{10} 12 > 1$; $\log_3 2.5 \in (0, 1)$; $\log_5 0.1 < 0$; $\log_e 3 > 1$; $\log_e 2 \in (0, 1)$

123. $\frac{3}{2}\log a + 4\log b - \log 5 - 3\log c$

124. $\log\left(\frac{a^{1/2}b^3}{c^4}\right)$

125. $a : 2.322$; $b : 0.6309$; $c : -3.907$; $d : 0.3408$; $e : 1$; $f : 0$

126. Per assurdo, sia $\log_2(2k + 1) = \frac{r}{s}$, con k, r, s interi, $k, s \geq 1$. Poiché $2k + 1 > 2$, dev'essere anche $r \geq 1$. Per definizione di logaritmo, si ha $2^{r/s} = 2k+1$, quindi $2^r = (2k+1)^s$, assurdo perché il 1° membro è un intero pari, mentre il 2° membro è un intero dispari.

127. $x = 6 - 4\sqrt{2}$

128. $x = 27,\ x = 1/27$

129. $x = e^{\left(\sqrt{2}\pm\sqrt{17}\right)/3} \simeq \begin{cases} 6.33 \\ 0.405 \end{cases}$

130. Nessuna soluzione

131. $x = \frac{\log 30}{\log(9/5)} \simeq 5.786$

132. $x = \log\left(\frac{e^3}{1+e^2}\right) \simeq 0.873$

133. $x = \log_2\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \simeq 0.38$

134. $x = 0,\ x = -\log 2$

135. $x = \frac{2\log 3}{\log 2} - \frac{2}{3} \simeq 2.503$

136. $y = e \cdot e^{-x^2}$

137. $y = \frac{\log 2}{\log x}$

138. $y = 2^{1/x}$

139. $y = e^{(x+1)/(x-1)}$

140. $y = e^{\left(x\pm\sqrt{-3x^2-8x-4}\right)/2}$ per $-2 < x < 2/3$

141. $y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ \forall x$

142. $y = \log\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$, per $x \geq 1$

143. $y = e^{x/2},\ y = e^{-\frac{3}{2}x}$

144. $y = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$

145. $y = x + \frac{c}{x^2}$, per $x > 0$

146. $x > 3 + \frac{1}{e}$

147. Nessuna soluzione

148. $x > \frac{1}{2}\left(\frac{3\log 10}{\log 0.4} - 1\right) \simeq -4.269$

149. $0 < x \leq \frac{1}{2}$

150. $x > 1$

151. *a.* $y = e^{-0.3} \cdot x^{3.1} \simeq 0.74x^{3.1}$;
b. $y = e^4 x^{-2.2} \simeq 54.6x^{-2.2}$;
c. $y = e^{3.3} \cdot e^{0.25x} \simeq 27 \cdot (1.28)^x$

152. Superiormente limitato; sup$S = 3$; $3 \notin S$

153. Superiormente limitato; sup$S = 3$; $3 \in S$

154. Superiormente limitato; sup$S = 1$; $1 \notin S$

155. Superiormente illimitato

156. Superiormente limitato; sup$S = 1; 1 \notin S$

157. Superiormente limitato; sup$S = 2$; $2 \notin S$

158. Sia X un insieme totalmente ordinato, e $S \subset X$. Un elemento $a \in X$ si dice *minorante* di S se risulta $s \geq a$ per ogni $s \in S$. Un insieme non vuoto che ammette almeno un minorante si dice *inferiormente limitato.* Sia S un insieme inferiormente limitato, M' l'insieme di tutti i minoranti di S. Se l'insieme M ammette un elemento massimo, tale elemento si dice *estremo inferiore di* S, e si indica con inf$S$. In simboli:

$$\inf S = \max M' = \max\{x \in X : \forall s \in S \text{ è } s \geq x\}.$$

Si dice che un insieme totalmente ordinato X *ha la proprietà dell'estremo inferiore* se per ogni sottoinsieme S di X, non vuoto e inferiormente limitato, esiste in X inf$S$. Un insieme X ha la proprietà del sup se e solo se ha la proprietà dell'inf. Dimostriamo ad esempio che la prima cosa implica la seconda (il viceversa è analogo). Sia X totalmente ordinato, $S \subset X$ non vuoto e inferiormente limitato, e proviamo che S ha inf. Sia S' l'insieme dei minoranti di S: poiché S è inferiormente limitato, S' non è vuoto; poiché S non è vuoto, S' è superiormente limitato; sunque S' ha sup, sia esso Λ. Proviamo che $\Lambda \in S'$, da cui segue che Λ è il massimo dei minoranti, e quindi è l'inf di S. Se per assurdo $\Lambda \notin S'$, esiste $s \in S$ tale che $s < \Lambda$. Poiché $\Lambda = \sup S'$, segue che esiste $x \in S'$ tale che $s < x \leq \Lambda$, assurdo perché allora x non sarebbe un minorante di S.

159. $\forall b \in \mathbb{R}\, \exists r \in \mathbb{Q}$ tale che $r \leq b$; per questo r, si ha che $a^r \in S$, il che mostra che S non è vuoto. Se $a > 1$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s \Rightarrow a^r < a^s$; fissato allora un $s \in \mathbb{Q}$ tale che $s > b$, $\forall a^r \in S$ è $r \leq b < s$ e dunque $a^r < a^s$; pertanto a^s è un maggiorante di S, e questo è superiormente limitato.

160. Se $x = \sqrt[n]{\frac{r}{s}}$ con $r, s \in \mathbb{N}$, allora $x^n = r/s$, $sx^n - r = 0$, perciò x risolve un'equazione algebrica a coefficienti interi, ed è algebrico.

161. Sia $x = \sqrt[n]{\alpha}$ con α algebrico. Dunque $x^n = \alpha$. Poiché α è algebrico, risolve un'equazione del tipo $a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$, con a_i interi. Sostituendo $\alpha = x^n$ si vede che x risolve l'equazione algebrica a coefficienti interi: $a_m x^{nm} + a_{m-1}x^{n(m-1)} + \ldots + a_1 x^n + a_0 = 0$, pertanto è algebrico.

162. Distinguiamo il caso di esponente razionale positivo o negativo. Se $f(x) = x^{m/n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$, si ha $f(x)^n - x^m = 0$, pertanto il polinomio $p(x, y) = y^n - x^m$ mostra che $f(x)$ è algebrica. $f(x) = x^{-m/n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$, si ha $f(x)^n x^m - 1 = 0$, pertanto il polinomio $p(x, y) = y^n x^m - 1$ mostra che $f(x)$ è algebrica.

163. E' un caso particolare dell'esercizio precedente, con $n = m = 2$: il polinomio $p(x, y) = y^2 - x^2$ mostra che $f(x) = |x|$ è algebrica.

164. *Non si riporta le semplice figura*

165. Se $f(x, y)$ è proporzionale a x per y fissato, si può scrivere $f(x, y) = xg(y)$. Analogamente se $f(x, y)$ è proporzionale a y per x fissato, si può scrivere $f(x, y) = yh(x)$. Uguagliando le due espressioni si ha $xg(y) = yh(x)$, $\frac{h(x)}{x} = \frac{g(y)}{y} \forall x, y$. Questo può essere vero solo se ognuno dei due membri è costante, ovvero $\frac{h(x)}{x} = \frac{g(y)}{y} = k$. Ma allora $h(x) = kx$, e $f(x, y) = kxy$, ovvero f è proporzionale al prodotto di x e y.

166. *a.* Siano r, R i raggi interno ed esterno della corona circolare. Per differenza, l'area sarà $A = \pi R^2 - \pi r^2$.

b. Siano r, R i raggi interno ed esterno della corona circolare, α l'ampiezza del settore. Per differenza, l'area del settore sarà $A = \frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2}\alpha(R^2 - r^2)$.

c. Sia R il raggio della circonferenza, 2α l'ampiezza della lunula, c la lunghezza della corda base della lunula, h la distanza della corda dal centro. Allora $h = R\cos\alpha$, mentre per il teorema del coseno, $c^2 = 2R^2(1 - \cos 2\alpha)$. Il triangolo di base c e altezza h ha area $\frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}R^2\cos\alpha\sqrt{2(1 - \cos 2\alpha)} = R^2\cos\alpha\sin\alpha$. Per differenza tra l'area del settore circolare e quest'area, la lunula ha area $A = R^2(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha)$.

167. $\sin x \simeq -0.954$.

168. $\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$; $\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x$; $\sin 5x = \sin^5 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + 5\sin x\cos^4 x$.

169. $4\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin\frac{x}{3} = \sin x$; occorre perciò risolvere in t l'equazione $-4t^3 + 3t = \sin x$, con $\sin x$ assegnato.

170. $\frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{7}{4}$

171.

$\sin nx\cos mx = \frac{1}{2}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]$;

$\sin nx\sin mx = -\frac{1}{2}[\cos(n+m)x - \cos(n-m)x]$;

$\cos nx\cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]$

172. $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;
$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

173. $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$;
$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

174. $\tan\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3}$

175. Sia $x = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Allora $(2x)^2 = 2-\sqrt{3}$; $(2-4x^2)^2 = 3$, perciò x soddisfa l'equazione algebrica a coefficienti interi $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$, pertanto è algebrico.

176.
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} =$
$= \frac{\cos\alpha\cos\beta(\tan+\tan\beta)}{\cos\alpha\cos\beta(1-\tan\alpha\tan\beta)} = \frac{\tan+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

177. $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$.

178. $\frac{t^2+2}{t^2-t+3}$

179. $a = c\sin\alpha$; $b = c\cos\alpha$;
$d = c\sin^2\alpha$; $e = c\cos^2\alpha$; $h = c\sin\alpha\cos\alpha$;
$a = c\cos\beta$; $b = c\sin\beta$;
$d = c\cos^2\beta$; $e = c\sin^2\beta$; $h = c\sin\beta\cos\beta$.

180. $P_1 = P\cos\alpha$; $P_2 = P\sin\alpha$

181. $AC = 12.27\,\text{km}$

182. $b \simeq 6.2355$ a.l.; $c \simeq 9.3533$ a.l.

183. 148.5 m

184. ***a.*** $a = r\cos\frac{\pi}{n}$

n	3	4	5	6	7
$\cos\frac{\pi}{n}$	0.5	0.707	0.809	0.866	0.901

n	8	9	10	11	12
$\cos\frac{\pi}{n}$	0.924	0.940	0.951	0.959	0.966

b. $l = 2r\sin\frac{\pi}{n}$; $A = \frac{r^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}$

c. Per n grande sarà $A \simeq \pi r^2$, quindi $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \simeq \pi$, ovvero $\sin\frac{2\pi}{n} \simeq \frac{2\pi}{n}$. (Dalla circonferenza trigonometrica si vede che se x è piccolo, x e $\sin x$ sono quasi uguali).

185. $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$; $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$
$\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right)$

186. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$
$\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right)$

187. $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$
$\left(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$

188. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$

189. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

190. $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

191. $-\frac{\pi}{6} + k\pi \le x < k\pi$; $k\pi < x \le \frac{\pi}{3} + k\pi$

192. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

193. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

194. $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

195. $x = k\pi$

196.
$k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi$

197. Mai

198. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

199. *Lo studente esegua la costruzione richiesta...*

200. $x = -\arcsin 0.3 + 2k\pi$;
$x = \pi + \arcsin 0.3 + 2k\pi$

201.
$\arcsin 0.6 + 2k\pi < x < \pi - \arcsin 0.6 + 2k\pi$

202.
$-\arcsin 0.7 + 2k\pi \le x \le \pi + \arcsin 0.7 + 2k\pi$

203. $\pi + \arcsin\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi \le x \le$
$\le 2\pi - \arcsin\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi$

204. ***a.*** $\forall x \in [-1,1]$; ***b.*** $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

205.*Lo studente esegua la costruzione richiesta...*

206. $x = \pm\text{arccos}0.2 + 2k\pi$

207.
$x = \pm\arccos(-0.3) + 2k\pi = \pi \mp \text{arccos}0.3 + 2k\pi$

208.
$-\text{arccos}0.6 + 2k\pi < x < \text{arccos}0.6 + 2k\pi$

209.
$-\arccos(-0.7) + 2k\pi \le x \le \arccos(-0.7) + 2k\pi$
ovvero
$-\pi + \text{arccos}0.7 + 2k\pi \le x \le \pi - \text{arccos}0.7 + 2k\pi$

210. $\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right) + 2k\pi \le x \le$
$\le \pi + \arccos\left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right) + 2k\pi$

211. ***a.*** $\forall x \in [-1,1]$; ***b.*** $\forall x \in [0,\pi]$

212. ***a.*** Poiché $\text{arcsin}x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$\cos(\text{arcsin}x) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{arcsin}x)} = \sqrt{1-x^2}$.
Poiché $\text{arccos}x \in [0,\pi]$,
$\sin(\text{arccos}x) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{arccos}x)} = \sqrt{1-x^2}$.
b. Sia $\alpha = \arccos(\sin x)$.
$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x \ge 0 \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \sin x$. Poiché x e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ hanno ugual seno e sono entrambi nel primo quadrante, coincidono. Perciò
$x = \frac{\pi}{2} - \arccos(\sin x)$, ossia
$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$, che è la prima identità.
Sia ora $\beta = \arcsin(\cos x)$.
$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x \ge 0 \Rightarrow \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$
$\frac{\pi}{2} - \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
$\cos x = \sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Poiché x e $\frac{\pi}{2} - \beta$ hanno lo stesso coseno e sono entrambi nel primo quadrante, coincidono. Quindi
$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x)$, da cui l'identità desiderata.

213.*Lo studente esegua la costruzione richiesta...*

214. $x = \text{arctan}0.2 + k\pi$

215. $x = -\text{arctan}3 + k\pi$

216. $\text{arctan}6 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

217. $-\text{arctan}7 + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

218. $\arctan\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right) + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$;
$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \le -\arctan\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) + k\pi$

219.
$-\arctan\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + k\pi \le x \le \arctan\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$
$+ k\pi$

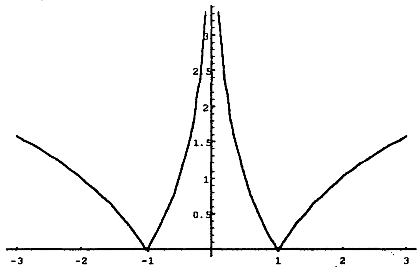
220. ***a.*** $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{5}\sqrt{6}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$;
b. $\alpha = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{91}}{10} = \pi - \arctan\frac{\sqrt{91}}{3}$.

221. ***a.*** $\forall x \in \mathbb{R}$. ***b.*** $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

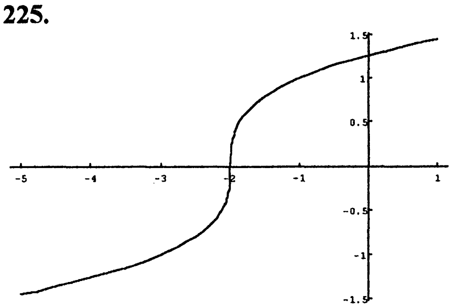
222. ***a.*** Per l'esercizio 212,
$\cos(\text{arcsin}x) = \sqrt{1-x^2} \ne 0$ perché $x \in (-1,1)$.
Allora $\tan(\text{arcsin}x) = \frac{\sin(\text{arcsin}x)}{\cos(\text{arcsin}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
b. Per l'esercizio 212,
$\sin(\text{arccos}x) = \sqrt{1-x^2}$
Allora $\tan(\text{arccos}x) = \frac{\sin(\text{arccos}x)}{\cos(\text{arccos}x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
($x \ne 0$ per ipotesi).

223. Proviamo che per $x > 0$ è
$\text{arctan}x + \text{arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
Sia $\alpha = \text{arctan}x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Allora anche
$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Per l'esercizio 177, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{x}$.
Poiché l'angolo $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ sta nel primo quadrante e ha tangente $1/x$, è $\frac{\pi}{2} - \alpha = \text{arctan}\frac{1}{x}$. Pertanto
$\text{arctan}x + \text{arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
Se poi $x < 0$, poiché la funzione $\text{arctan}x$ è dispari si ha:
$\text{arctan}x + \text{arctan}\frac{1}{x} = \arctan(-|x|) + \arctan\left(-\frac{1}{|x|}\right)$
$= -\left(\arctan|x| + \arctan\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

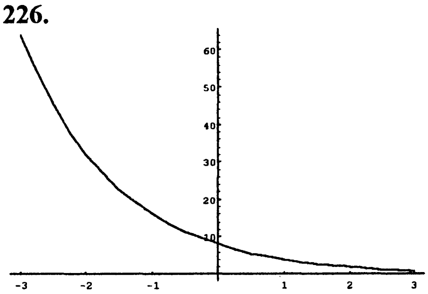
224.



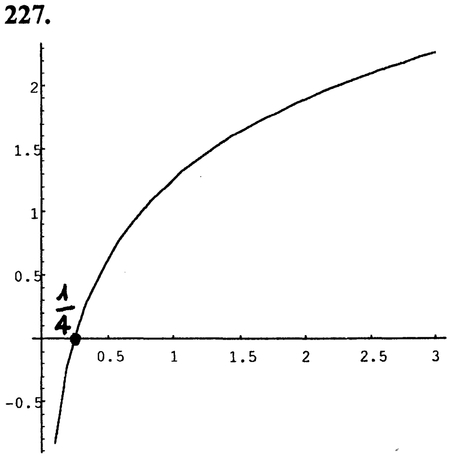
225.



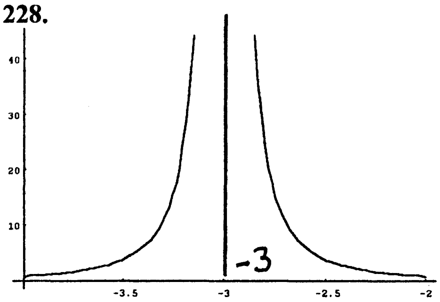
226.



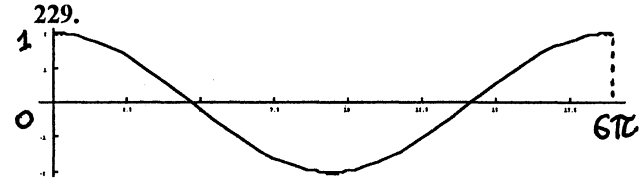
227.



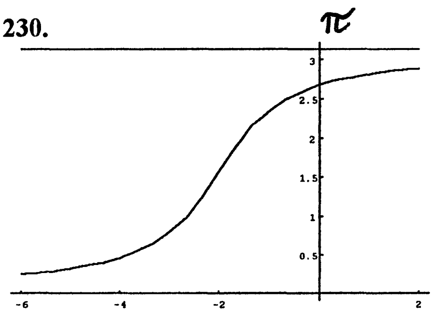
228.



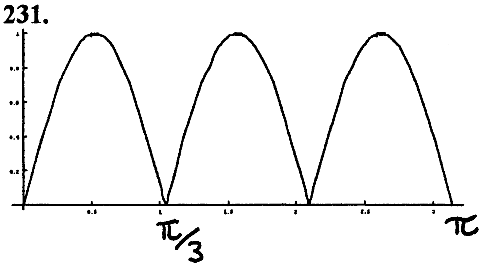
229.



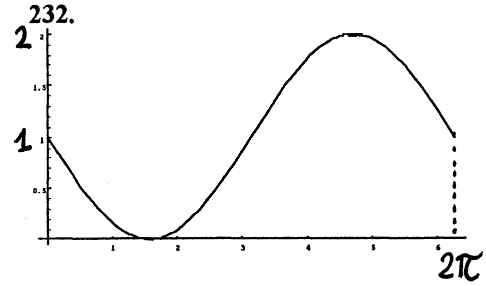
230.



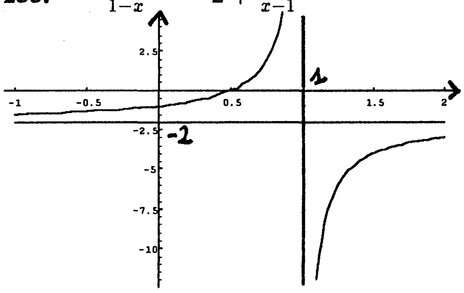
231.



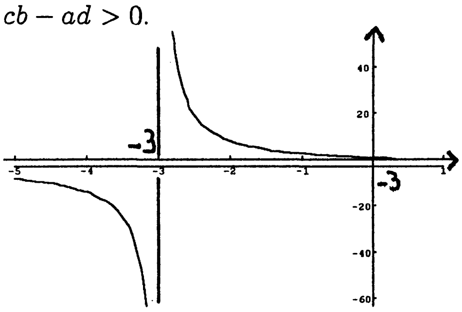
232.



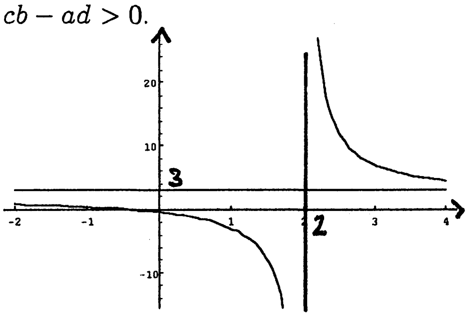
233. $\frac{2x-3}{1-x} = -2 + \frac{1}{x-1}$



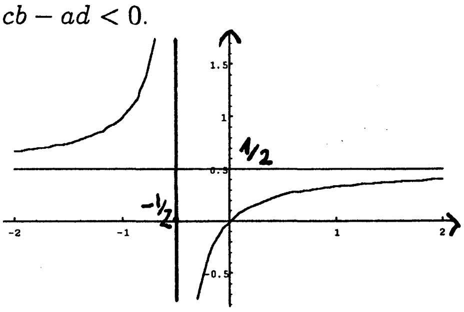
234. ***a.*** As. vert.: $x = -3$; as. orizz.: $y = -3$; $cb - ad > 0$.



b. As. vert.: $x = 2$; as. orizz.: $y = 3$; $cb - ad > 0$.



c. As. vert.: $x = -\frac{1}{2}$; as. orizz.: $y = \frac{1}{2}$; $cb - ad < 0$.



235. Decrescente

236. Decrescente

237. Decrescente

238. Crescente

239. Crescente

240. Crescente

241. Crescente

242. Crescente

243.
$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = (\text{se } g \text{ è pari}) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Pertanto se g è pari, $f \circ g$ è pari.

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = (\text{se } g \text{ è dispari}) = f(-g(x)) = \begin{cases} \text{se } f \text{ è dispari} & -f(g(x)) \\ \text{se } f \text{ è pari} & f(g(x)). \end{cases}$$

Pertanto se g è dispari e f è pari (dispari), $f \circ g$ è pari (dispari).

244. $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) =$

$$= \begin{cases} \text{se } f, g \text{ pari} & f(x) + g(x) = (f+g)(x) \\ \text{se } f, g \text{ dispari} & -f(x) - g(x) = -(f+g)(x). \end{cases}$$

Pertanto se f, g sono entrambe pari (dispari), $f + g$ è pari (dispari).

245. Pari

246. Pari

247. Pari

248. Nessuna delle due

249. Pari

250. Dispari

251. Pari

252. Nessuna delle due

253. Dispari

254. Pari

255. Nessuna delle due

256. Pari

257. Nessuna delle due

258. Pari

259. Sia $g(x) = f(kx)$ e sia T il periodo di f. Allora
$g(x + \frac{T}{k}) = f(k(x + \frac{T}{k})) = f(kx + T) = f(kx)$
$= g(x)$,
perciò T/k è il periodo di g o un suo sottomultiplo. Mostriamo che è proprio il periodo di g. Se per assurdo esistesse $T' < T/k$ tale che $g(x + T') = g(x)$ si avrebbe
$f(kx) = f(kx + kT')$ da cui $kT' \geq T$,
$T' \geq T/k$, assurdo. Quindi T/k è il periodo di g.

260. Sì, π

261. No

262. Sì, 2π

263. No

264. Sì, $\frac{2}{3}\pi$

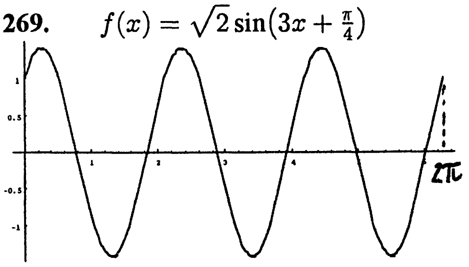
265. Sì, π

266. No

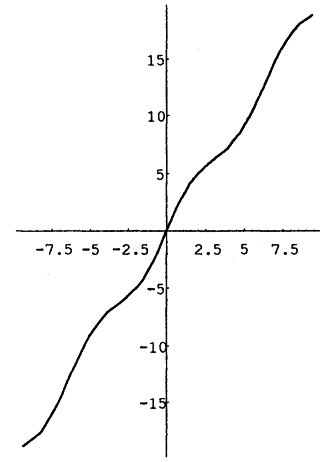
267. Sì, 6π

268. Sì, $\frac{2}{3}\pi$

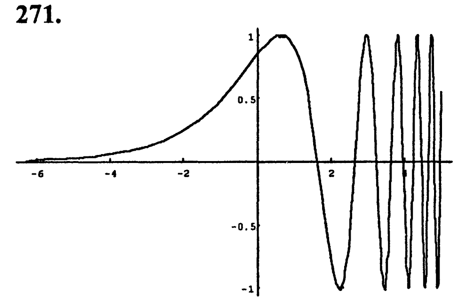
269. $f(x) = \sqrt{2}\sin(3x + \frac{\pi}{4})$



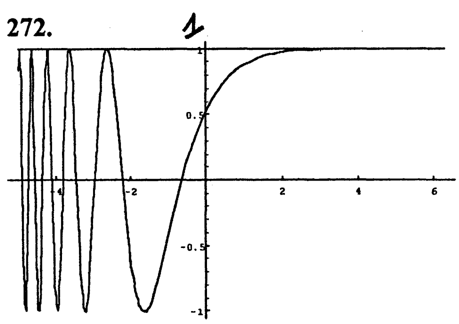
270.



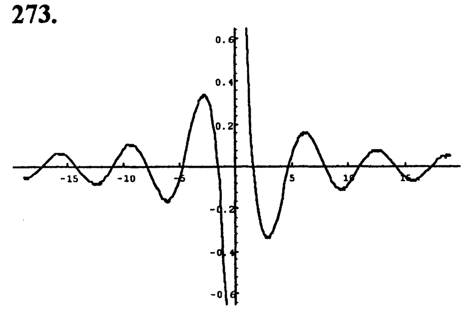
271.



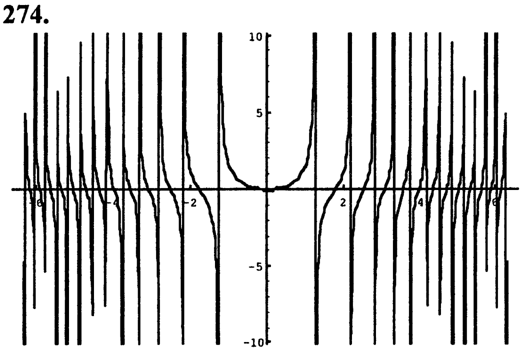
272.



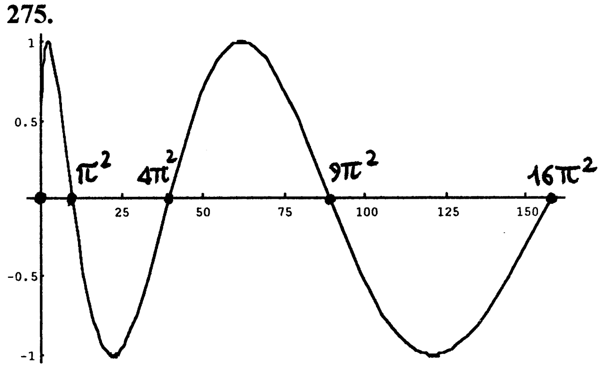
273.



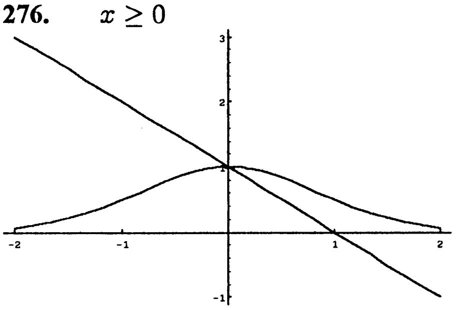
274.



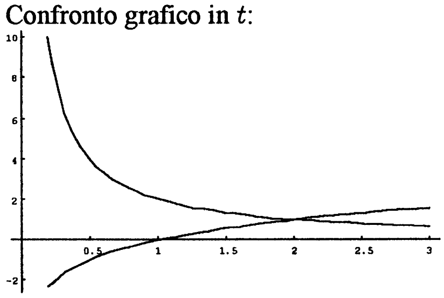
275.



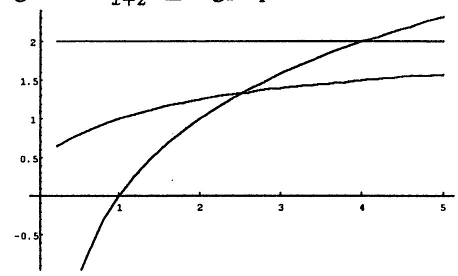
276. $x \geq 0$



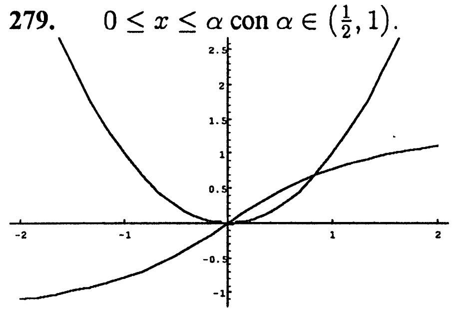
277. $\log_2 t \geq \frac{2}{t}$ per $t \geq 2$, quindi $x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Confronto grafico in t:



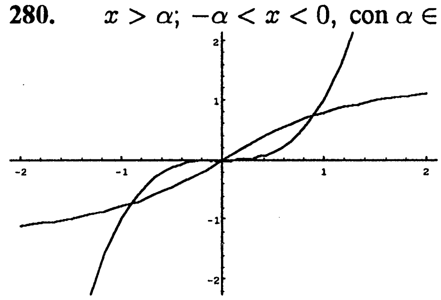
278. $0 < x \leq \alpha$, con $\alpha \in (2,3)$. Confronto grafico: $\frac{2x+1}{x+2} \geq \log_2 x$ per $x > 0$.



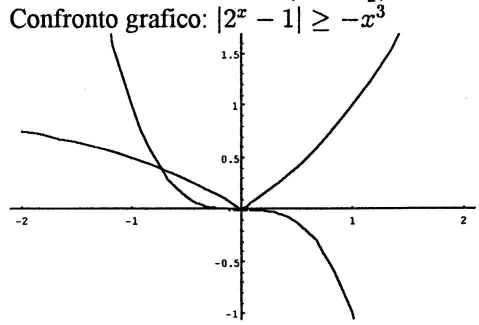
279. $0 \leq x \leq \alpha$ con $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.



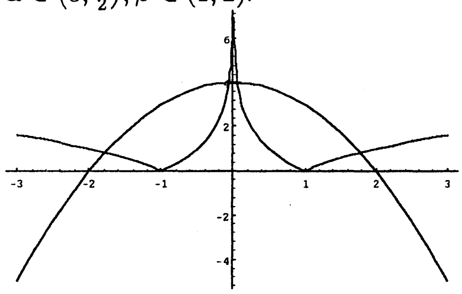
280. $x > \alpha$; $-\alpha < x < 0$, con $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.



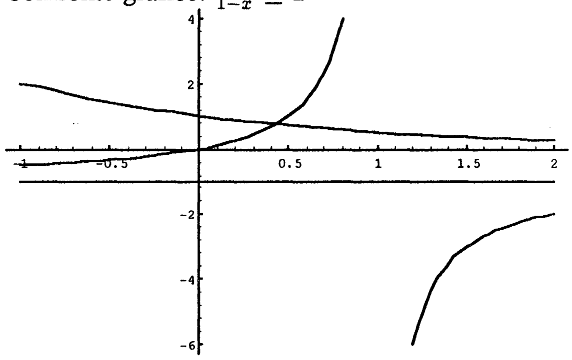
281. $x \geq \alpha$, con $\alpha \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. Confronto grafico: $|2^x - 1| \geq -x^3$



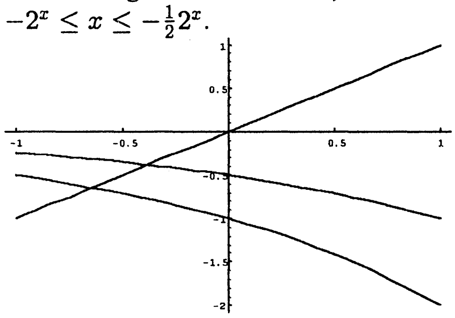
282. $0 < |x| \leq \alpha$; $|x| \geq \beta$, con $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \beta \in (1, 2)$.



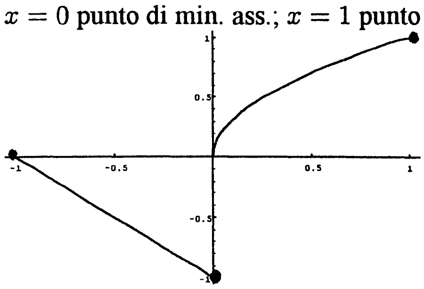
283. $x \leq \alpha$; $x > 1$, con $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Confronto grafico: $\frac{x}{1-x} \leq 2^{-x}$



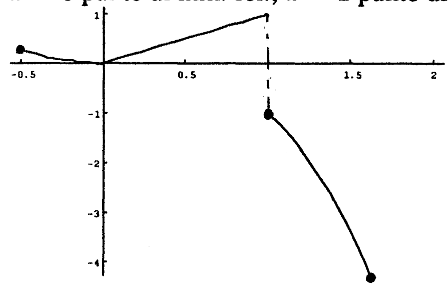
284. $\alpha < x < \beta$, con $-1 < \alpha < -\frac{1}{2} < \beta < 0$. Confronto grafico (dopo aver posto $t = x/2^x$ e aver risolto la disequazione di secondo grado così ottenuta): $-2^x \leq x \leq -\frac{1}{2}2^x$.



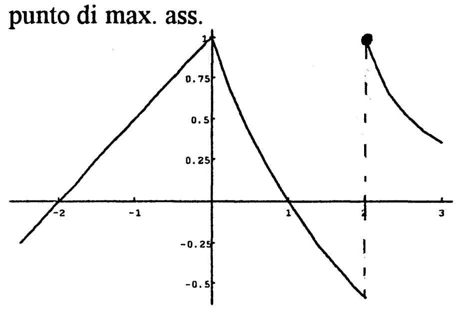
285. I.D.: $[-1, 1]$. $x = -1$ punto di max. rel.; $x = 0$ punto di min. ass.; $x = 1$ punto di max. ass.



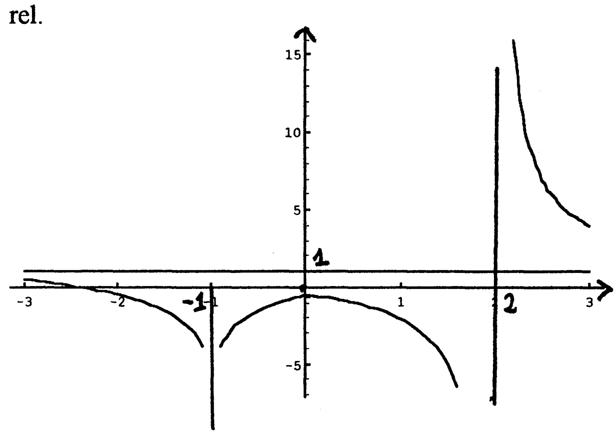
286. I.D.: $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. $x = -\frac{1}{2}$ punto di max. rel.; $x = 0$ punto di min. rel.; $x = 2$ punto di min. ass.



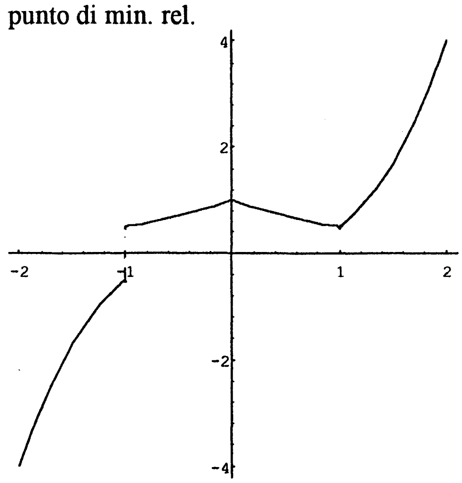
287. I.D.: $\mathbb{R}$. $x = 0$ punto di max. ass.; $x = 2$ punto di max. ass.



288. I.D.: $x \neq -1, x \neq 2$. $x = 0$ punto di max. rel.



289. I.D.: $\mathbb{R}$; $x = 0$ punto di max. rel.; $x = 1$ punto di min. rel.



290. $x < \frac{1}{3}$

291. $\mathbb{R}$

292. $(0,1) \cup (1,4]$

293. $x \neq -\frac{1}{2}$

294. $[-1,0] \cup [1,2]$

295. $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

296. $x \leq 0$

297. $2k \leq x \leq 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}.$

298. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

299. $x > 0$

300. $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} < x < 0;\ x > 0$

301. $x > \alpha$, con $\alpha \in (-1,0)$

302. $12 - 5i$

303. $-9 + 46i$

304. $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

305. $-i$

306. $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

307. $1 - \frac{3}{2}i$

308. $\rho = 3;\ \vartheta = 0$

309. $\rho = 1;\ \vartheta = \frac{\pi}{2}$

310. $\rho = 1;\ \vartheta = \pi$

311. $\rho = 1;\ \vartheta = -\frac{\pi}{2}$

312. $\rho = \sqrt{2};\ \vartheta = -\frac{\pi}{4}$

313. $\rho = 4;\ \vartheta = \frac{2}{3}\pi$

314. $\rho = \sqrt{13};\ \vartheta = -\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

315. $z = 1 + \sqrt{3}\,i$

316. $z = -1 + i$

317. $z = \frac{3}{\sqrt{5}} + i\frac{6}{\sqrt{5}}$

318. $z = -\frac{12}{5} + i\frac{16}{5}$

319. $z = -\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{i}{8}$

320. Siano $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$.
$\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)} =$
$= a_1 \pm a_2 - i(b_1 \pm b_2) = (a_1 - ib_1) \pm (a_2 - ib_2)$
$= \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.
$z_1 \cdot \overline{z_1} = (a_1 + ib_1)(a_1 - ib_1) = a_1^2 + b_1^2 = |z_1|^2$
Siano ora $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$;
$z_1 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$.
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \rho_1(\cos(-\vartheta_1) + i\sin(-\vartheta_1)) \cdot$
$\cdot\, \rho_2(\cos(-\vartheta_2) + i\sin(-\vartheta_2))$ = per De Moivre
$= \rho_1\rho_2(\cos(-\vartheta_1 - \vartheta_2) + i\sin(-\vartheta_1 - \vartheta_2)) = \rho_1$
$\rho_2(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) - i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)) =$
$= \overline{\rho_1\rho_2(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))} = \overline{z_1 z_2}$.
Analogamente si provano le altre...

***Si omettono i facili disegni nelle soluzioni dei prossimi esercizi* 321-330**

321. $\pm 3i$

322. $\pm 1; \pm i$

323. $-1;\ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

324.
$\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right)$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4.$

325. $\pm\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

326. $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1+i)$

327. $-i$; $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}i$

328. $\sqrt[6]{2}(\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}))$, con $k = 0, 1, 2$.

329. $\sqrt[8]{2}(\cos(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}))$, con $k = 0, 1, 2, 3$

330. $\sqrt[6]{13}\left(\cos(\frac{1}{3}\arctan\frac{3}{2} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{1}{3}\arctan\frac{3}{2} + \frac{2k\pi}{3})\right)$, con $k = 0, 1, 2$

331. Figura

332. $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

333. $i\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$

334. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

335. $-(\frac{1+i}{2})\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(\sin(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}) + i\cos(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2})\right)$

336. 4 radici semplici: $-i$; $2i$; $-i\pm\sqrt{3}$.

337. 4 radici semplici: $\pm\sqrt[4]{3}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right); \pm\sqrt[4]{3}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$

338. 2 radici doppie: $\pm\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$

339. $z = \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$

340. 0; $\pm i$; ± 1

341. $-i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $i\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{3}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

342. $\frac{1-2i}{3+\sqrt{5}}$

343. ± 1; $\pm\sqrt{7}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right)\right)$;
$\pm\sqrt{7}\left(-\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right) + i\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right)\right)$.

344. $z = 0$;
$z = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}))$,
$k = 0, 1, 2, 3$

345. $3 + 3i$

346. $\{z = x + iy : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$

347. $5i$;
$-1\pm\sqrt[4]{10}(\cos(\frac{1}{2}\arctan 3) + i\sin(\frac{1}{2}\arctan 3))$

348. $\alpha = -b/3a$; $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$;
$q = -\frac{b^3}{9a^3} + \frac{bc}{3a^2} - \frac{d}{a}$