UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Primo Modulo di Ricerca Operativa
20 Aprile 2001

Nome:
Cognome:
Barrare le caselle corrispondenti:
Diploma O Laurea, Ing. Inf. O Ing. Mecc. O Ing. Elett. O Ing. Civile O
orale in questo appello O orale il prossimo appello O

Esercizio 1

Un piccolo villaggio della Gallia è riuscito a resistere per anni agli attacchi dei Romani grazie ad una miracolosa pozione magica che centuplicava le forze degli abitanti. Purtroppo, nel corso di un banchetto per festeggiare una delle innumerevoli vittorie, il druido, unico depositario del segreto, ha bevuto una quantità imprecisata di vino e ha completamente dimenticato la formula della pozione. Grazie ad alcuni appunti cifrati è riuscito a ricostruire tutte le dosi degli ingredienti, però deve valutare la combinazione che costi il meno possibile per non sperperare inutilmente le risorse del villaggio.
Un chilo della magica pozione deve contenere almeno 25 mg di fosforo, 20 mg di magnesio e 15 mg di kriptonite, ingredienti contenuti nelle merci localmente reperibili e nelle dosi indicate in tabella (in mg/kg).

	Fosforo	Magnesio	Kriptonite
Occhi di pipistrello	10	27	45
Vischio	50	15	35
Mandragola	15	10	40
Fegato di rospo	30	16	45
Coda di lucertola	60	40	10

Sapendo che le merci costano rispettivamente (in franchi /kg):

	Costo
Occhi di pipistrello	80
Vischio	50
Mandragola	40
Fegato di rospo	30
Coda di lucertola	70

1. Formulare come problema di PL e risolvere il problema di determinare in quali dosi debba mescolare le merci il sapiente druido per minizzare il costo di un chilo di pozione magica.
2. Il druido, ancora sotto gli effetti dell’alcool, ha confuso nella ricetta il numero 25 (mg di fosforo) con il numero 35. Se nella pozione ci fosse bisogno di 35 mg di fosforo, quale sarebbe la nuova miscela ottima? Motivare la risposta senza effettuare di nuovo i calcoli.

Esercizio 2

Il grande campione di sci Abbatto Merlo ha deciso di pianificare tre giorni di allenamento nella nota località sciistica di Tarcino in val d'Ezzompa.
Essendo Abbatto noto per il suo fascino e, quindi, continuamente molestato da fans impazziti, ha deciso di acquistare tutto l'equipaggiamento e portare anche il maestro artigiano Beppe Soletta, noto come il miglior preparatore italiano di sci.
Il nostro prevede di utilizzare il seguente numero di sci per ogni giorno di allenamento:

Giorno 1	Giorno 2	Giorno 3
20	30	15

- Un paio di sci nuovi costa 250 euro.
- Tutti gli sci devono essere acquistati entro il primo giorno di allenamento.
- Un paio di sci utilizzato nel giorno i-esimo può essere utilizzato nel giorno (i+1)-esimo se e solo se viene sottoposto a una revisione da parte di Beppe.
- Gli sci possono essere revisionati da Beppe, durante la notte, al costo di 30 euro al paio.
- Beppe, noto stakanovista, può revisionare un numero di sci grande a piacere.

Si richiede quanto segue.

1. Formulare il problema di minimizzare il costo degli allenamenti di Abbatto Merlo come problema di PL in forma standard.
2. Formulare lo stesso problema come problema di flusso di costo minimo.
3. Determinare una soluzione ottima del problema utilizzando l'algoritmo del simplesso su reti (fase 1 e fase 2).
4. Quale prezzo dovrà pagare Abbatto Merlo per acquistare/revisionare gli sci utilizzati?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Primo e Secondo Modulo di Ricerca Operativa
20 Aprile 2001

Nome:
Cognome:
Barrare le caselle corrispondenti:
Diploma ○ Laurea, Ing. Inf. ○ Ing. Mecc. ○ Ing. Elett. ○ Ing. Civile ○
orale in questo appello ○ orale il prossimo appello ○

Esercizio 1

Il grande campione di sci Abbatto Merlo ha deciso di pianificare tre giorni di allenamento nella nota località sciistica di Tarcino in val d'Ezzompa.
Essendo Abbatto noto per il suo fascino e, quindi, continuamente molestato da fans impazziti, ha deciso di acquistare tutto l'equipaggiamento e portare anche il maestro artigiano Beppe Soletta, noto come il miglior preparatore italiano di sci.
Il nostro prevede di utilizzare il seguente numero di sci per ogni giorno di allenamento:

Giorno 1	Giorno 2	Giorno 3
20	30	15

- Un paio di sci nuovi costa 250 euro.
- Tutti gli sci devono essere acquistati entro il primo giorno di allenamento.
- Un paio di sci utilizzato nel giorno i-esimo può essere utilizzato nel giorno (i+1)-esimo se e solo se viene sottoposto a una revisione da parte di Beppe.
- Gli sci possono essere revisionati da Beppe, durante la notte, al costo di 30 euro al paio.
- Beppe, noto stakanovista, può revisionare un numero di sci grande a piacere.

Si richiede quanto segue.

5. Formulare il problema di minimizzare il costo degli allenamenti di Abbatto Merlo come problema di PL in forma standard.
6. Formulare lo stesso problema come problema di flusso di costo minimo.
7. Determinare una soluzione ottima del problema utilizzando l'algoritmo del simplesso su reti (fase 1 e fase 2).
8. Quale prezzo dovrà pagare Abbatto Merlo per acquistare/revisionare gli sci utilizzati?

Esercizio 2

In tabella viene fornita la matrice di incidenza nodi-archi di un grafo orientato (la prima e l'ultima riga indicano, rispettivamente, i nomi degli archi e i relativi pesi).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	1	0	0	0	-1
3	0	0	0	-1	0	1	1	0	1
4	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
pesi archi	4	3	4	3	6	4	5	2	6

1. Si determini l'albero dei cammini di peso minimo dal nodo 0 a tutti gli altri nodi.
2. Si interpretino ora i pesi degli archi come capacità. Applicando l'algoritmo di Ford e Fulkerson, si determini un taglio di capacità minima tra i nodi 0 e 5.
3. Trascurando il verso degli archi, determinare l'albero ricoprente di peso minimo.

Soluzione esercizi primo modulo

Esercizio 1

Variabili: x_i = quantità di ingradiente i nella pozione

Formulazione:
$$\min \quad 80x_1 + 50x_2 + 40x_3 + 30x_4 + 70x_5$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 50x_2 + 15x_3 + 30x_4 + 60x_5 \geq 25 \\ 27x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 40x_5 \geq 20 \\ 45x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 45x_4 + 10x_5 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

In forma standard:
$$\min \quad 80x_1 + 50x_2 + 40x_3 + 30x_4 + 70x_5$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 50x_2 + 15x_3 + 30x_4 + 60x_5 - x_6 = 25 \\ 27x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 40x_5 - x_7 = 20 \\ 45x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 45x_4 + 10x_5 - x_8 = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

problema artificiale:
$$\min \quad x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 50x_2 + 15x_3 + 30x_4 + 60x_5 - x_6 + x_9 = 25 \\ 27x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 40x_5 - x_7 + x_{10} = 20 \\ 45x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 45x_4 + 10x_5 - x_8 + x_{11} = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_{12} = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

soluzione: base iniziale $B = [A_9 \; A_{10} \; A_{11} \; A_{12}]$, matrice carry iniziale:
$$\begin{array}{ccccc} -1 & -1 & -1 & -1 & -61 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

soluzione ottima: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}8\overline{3} \\ 0{,}1\overline{6} \\ 10 \\ 0 \\ 24{,}1\overline{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dalla soluzione ottima si vede subito che la variabile di scarto del primo vincolo (mg di fosforo) vale 10. Questo implica che la variabile duale dello stesso vincolo (costo ridotto associato al termine noto) vale zero e che per incrementi del termine noto almeno fino a 10 non varia la miscela ottima.

Esercizio 1

Variabili: x_0 = numero di paia di sci acquistati entro il primo giorno
x_1 = numero di paia di sci non utilizzati alla fine del primo giorno
x_2 = numero di paia di sci non utilizzati alla fine del secondo giorno
y_1 = numero di paia di sci utilizzati nel primo giorno e revisionati da Beppe
y_2 = numero di paia di sci utilizzati nel secondo giorno e revisionati da Beppe

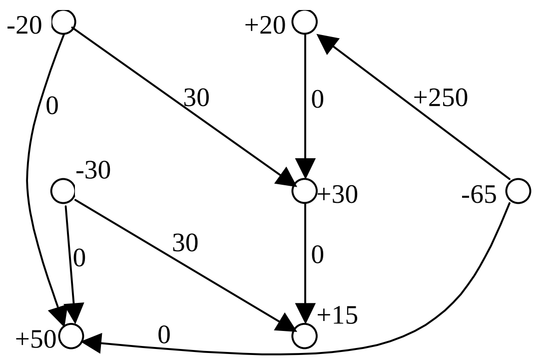
Formulazione:

$$\min \quad 250x_0 + 30y_1 + 30y_2$$
$$\begin{cases} x_0 - x_1 = 20 \\ x_1 + y_1 - x_2 = 30 \\ x_2 + y_2 = 15 \\ y_1 \le 20 \\ y_2 \le 30 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

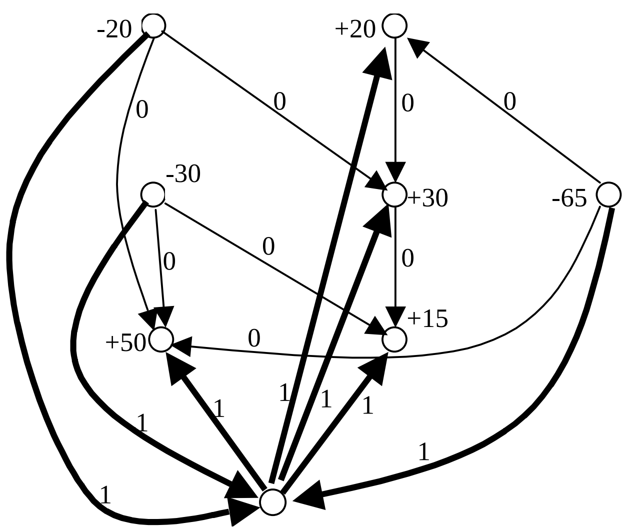
In forma standard:

$$\min \quad 250x_0 + 30y_1 + 30y_2$$
$$\begin{cases} x_0 - x_1 = 20 \\ x_1 + y_1 - x_2 = 30 \\ x_2 + y_2 = 15 \\ y_1 + s_1 = 20 \\ y_2 + s_2 = 30 \\ x, y, s \ge 0 \end{cases}$$

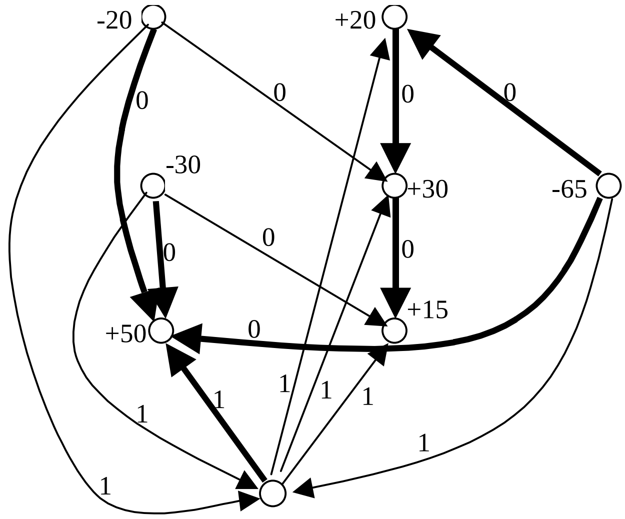
Formulazione come simplesso su reti:



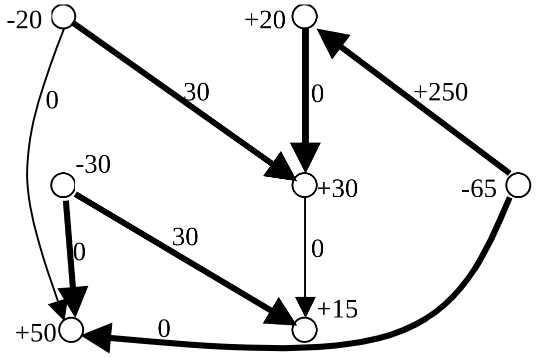
Applicando il simplesso su reti si inizia con la fase 1:



Una base ammissibile è:



La fase 2 porta alla base ottima



La soluzione ottima ha costo 250*30 +20*30+15*30=8550.