ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Ricerca Operativa I

Dario Pacciarelli

Teoria della dualità

Dipartimento di Ingegneria

Struttura del corso

Ricerca Operativa
- *Cos'è*
- *Modelli*
- *Esempi*

Modelli
- *Metodo delle 5 fasi*
- *Modelli di PL*
- *Miscelazione*
- *Allocazione*
- *Trasporto*
- *Taglio ottimo*

Teoria e Algoritmi
- *Condizioni di ottimo*
- *Teoria della dualità*
- *Metodo Grafico*
- *Metodo di Fourier-Motzkin*
- *Algoritmo del simplesso*

Teoria dei Grafi
- *Grafi e Digrafi*
- *Albero ricoprente di peso minimo*
- *Percorso di costo minimo*
- *Massimo flusso*

Esempio

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

<u>stimare</u> il valore dell'ottimo z^*

LB $\leq z^* \leq$ UB

Lower Bound Upper Bound

Stima Upper Bound: basta trovare una soluzione ammissibile:

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow z = 30 \Rightarrow z^* \leq 30$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow z = 21 \Rightarrow z^* \leq 21 = \text{UB}$$

Stima Lower Bound?

Poiché $x \geq 0$ e $5x_1 + x_2 \geq x_1 - x_2 \geq 3$ deve essere $z^* \geq 3$

$$\begin{array}{l} (x_1 + 2x_2 \geq 6) + \\ (x_1 - x_2 \geq 3) \ = \\ \hline 2x_1 + x_2 \geq 9 \end{array} \Rightarrow \boxed{5x_1 + x_2 \geq 2x_1 + x_2 \geq 9 \Rightarrow \quad 21 \leq z^* \leq 21 \Rightarrow z^* = 21} \quad z^* \geq 9$$

$$\begin{array}{l} 2(x_1 + 2x_2 \geq 6) + \\ 3(x_1 - x_2 \geq 3) \ = \\ \hline 5x_1 + x_2 \geq 21 \end{array} \Rightarrow 5x_1 + x_2 \geq 5x_1 + x_2 \geq 21 \Rightarrow z^* \geq 21 = \text{LB}$$

Problema duale

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2$$
$$\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

<u>stimare</u> il valore dell'ottimo z^*

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max 6y_1 + 3y_2$$
$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 5 \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} y_1(x_1 + 2x_2 \geq 6) + \\ y_2(x_1 - x_2 \geq 3) \ = \\ \hline (y_1 + y_2)x_1 + (2y_1 - y_2)x_2 \geq 6y_1 + 3y_2 \end{array}$$

Miglior Lower Bound? Trovare due moltiplicatori y_1, y_2 tali che

$$5x_1 + x_2 \geq (y_1 + y_2)x_1 + (2y_1 - y_2)x_2 \geq 6y_1 + 3y_2$$

e che $6y_1 + 3y_2$ sia massimo

$$x \geq 0$$

$$\begin{array}{l} 5x_1 \geq (y_1 + y_2)x_1 \\ x_2 \geq (2y_1 - y_2)x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 5 \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$y \geq 0$$

Problema duale

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + 1x_2$$
$$\begin{array}{r} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max 6y_1 + 3y_2$$
$$\begin{array}{r} x_1 \\ x_2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 5 \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dato il problema primale

$$\text{(P)} \quad \min c^T x \quad \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

È definito il problema duale

$$\text{(D)} \quad \max b^T y \quad \begin{cases} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \max y^T b \quad \begin{cases} y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Teorema debole della dualità

Dato il problema primale

$$\text{(P)} \quad \min c^T x \quad \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

È definito il problema duale

$$\text{(D)} \quad \max b^T y \quad \begin{cases} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \max y^T b \quad \begin{cases} y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Teorema debole della dualità

Data la coppia primale-duale (P)-(D), una soluzione x ammissibile primale e una soluzione y ammissibile duale, si ha: $c^T x \geq y^T b$.

Dimostrazione:

Moltiplicando i vincoli primali $Ax \geq b$ per le variabili duali $y \geq 0$ si ha: $y^T Ax \geq y^T b$. Moltiplicando i vincoli duali $y^T A \leq c^T$ per le variabili primali $x \geq 0$ si ha:$y^T Ax \leq c^T x$. Ne segue che $c^T x \geq y^T Ax \geq y^T b$ da cui la tesi.

Costruzione del duale - esempio

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \leq 0; x_3 \leq 0; x_4 libera \end{cases}$$

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array} \begin{cases} y_1 + y_2 + 7y_3 \leq 5 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ 3y_1 - y_2 - 8y_3 = -2 \\ y_1 \geq 0; y_2 \leq 0; y_3 libera \end{cases}$$

<u>stimare</u> il valore dell'ottimo z^*

$$c^T x \geq y^T A x \geq y^T b$$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq y_1(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4) +$$
$$+ y_2(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) +$$
$$+ y_3(7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4) \geq 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$5x_1 \geq (y_1 + y_2 + 7y_3)\, x_1 \Rightarrow 5 \geq y_1 + y_2 + 7y_3$$

$$x_2 \geq (2y_1 + y_2 + 2y_3)\, x_2 \Rightarrow 1 \leq 2y_1 + y_2 + 2y_3$$

Costruzione del duale - esempio

Dato il problema di PL in figura

$$z^* = \min 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \leq 0; x_3 \leq 0; x_4 \, libera \end{cases}$$

È definito il problema duale

$$z^* \geq \max 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array} \begin{cases} y_1 + y_2 + 7y_3 \leq 5 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ 3y_1 - y_2 - 8y_3 = -2 \\ y_1 \geq 0; y_2 \leq 0; y_3 libera \end{cases}$$

stimare il valore dell'ottimo z^*

$$c^T x \geq y^T Ax \geq y^T b$$

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq y_1(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4) +$$
$$+ y_2(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) +$$
$$+ y_3(7x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4) \geq 10y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$4x_3 \geq (-2y_1 + y_2 + y_3)\, x_3 \Rightarrow \quad 4 \leq -2y_1 + y_2 + y_3$$

$$-2x_4 \geq (3y_1 - y_2 - 8y_3)\, x_4 \Rightarrow -2 = 3y_1 - y_2 - 8y_3$$

Costruzione del duale - regole

Dato il problema di PL		È definito il problema duale	
$\min c^T x$	$\rightarrow$	$\max y^T b$	$c^T x \geq y^T A x \geq y^T b$
$a_i^T x \geq b_i$	$\rightarrow$	$y_i \geq 0$	
$a_i^T x \leq b_i$	$\rightarrow$	$y_i \leq 0$	
$a_i^T x = b_i$	$\rightarrow$	$y_i \ libera$	
$x_j \geq 0$	$\rightarrow$	$A_j^T y \leq c_j$	
$x_j \leq 0$	$\rightarrow$	$A_j^T y \geq c_j$	
$x_j \ libera$	$\rightarrow$	$A_j^T y = c_j$	
$\max c^T x$	$\rightarrow$	$\min y^T b$	$c^T x \leq y^T A x \leq y^T b$
$a_i^T x \geq b_i$	$\rightarrow$	$y_i \leq 0$	
$a_i^T x \leq b_i$	$\rightarrow$	$y_i \geq 0$	
$a_i^T x = b_i$	$\rightarrow$	$y_i \ libera$	
$x_j \geq 0$	$\rightarrow$	$A_j^T y \geq c_j$	
$x_j \leq 0$	$\rightarrow$	$A_j^T y \leq c_j$	
$x_j \ libera$	$\rightarrow$	$A_j^T y = c_j$	

Costruzione del duale - esempi

Primale → **Duale**

$$\max 6x_1 - 2x_3 + x_4 \quad\longrightarrow\quad \min 10y_1 + 7y_2 + 3y_3$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ \end{array}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 libera; x_3 \leq 0; x_4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array}\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 6 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ 2y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_1 \leq 0; y_2 \leq 0; y_3 libera \end{cases}$$

$$\min x_2 + 2x_3 - x_4 \quad\longrightarrow\quad \max 9y_1 + 6y_2$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \geq 6 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 libera; x_3 \leq 0; x_4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array}\begin{cases} y_1 + y_2 \leq 0 \\ y_1 = 1 \\ y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ -y_2 \leq -1 \\ y_1 libera; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Teorema debole della dualità

Teorema debole della dualità
Data la coppia $\mathrm{Primale}_{\mathrm{min}} - \mathrm{Duale}_{\mathrm{max}}$, una soluzione $\bar{x}$ ammissibile primale e una soluzione $\bar{y}$ ammissibile duale, si ha: $c^T\bar{x} \geq \bar{y}^T b$.

Dimostrazione (primale in F.S.)
Moltiplicando i vincoli primali $A\bar{x} = b$ per le variabili duali $\bar{y}$ $libere$ si ha: $\bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$. Moltiplicando i vincoli duali $\bar{y}^T A \leq c^T$ per le variabili primali $\bar{x} \geq 0$ si ha:$\bar{y}^T A\bar{x} \leq c^T\bar{x}$. Ne segue che $c^T\bar{x} \geq \bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$ da cui la tesi.

Corollario 1
Data la coppia $\mathrm{Primale}_{\mathrm{min}} - \mathrm{Duale}_{\mathrm{max}}$, se il primale è illimitato inferiormente, il duale è inammissibile; se il duale è illimitato superiormente, il primale è inammissibile.

Dimostrazione: basta osservare che se il duale [risp. il primale] non fosse inammissibile il primale [risp. il duale] non potrebbe essere illimitato.

Teorema debole della dualità

Teorema debole della dualità
Data la coppia $\mathrm{Primale}_{\min} - \mathrm{Duale}_{\max}$, una soluzione x ammissibile primale e una soluzione y ammissibile duale, si ha: $c^T\bar{x} \geq \bar{y}^T b$.

Corollario 2
Data la coppia $\mathrm{Primale}_{\min} - \mathrm{Duale}_{\max}$, se $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$ allora $\bar{x}$ è ottima primale e $\bar{y}$ è ottima duale.

Dimostrazione:
1. Per ogni y ammissibile duale deve essere $c^T\bar{x} \geq y^T b$ e quindi $\bar{y}^T b \geq y^T b$ ovvero $\bar{y}$ è punto di massimo per il duale.
2. Per ogni x ammissibile primale deve essere $c^T x \geq \bar{y}^T b$ e quindi $c^T x \geq c^T\bar{x}$ ovvero $\bar{x}$ è punto di minimo per il primale.

Teorema debole della dualità

Teorema debole della dualità

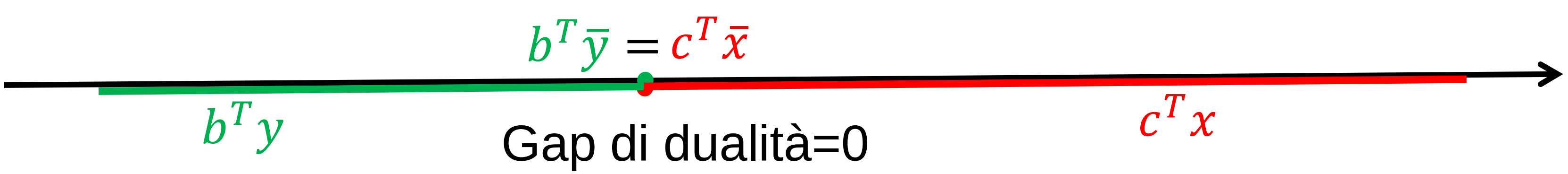
Data la coppia $\text{Primale}_{\text{min}} - \text{Duale}_{\text{max}}$, una soluzione x ammissibile primale e una soluzione y ammissibile duale, si ha: $c^T\bar{x} \geq \bar{y}^T b$.

Corollario 2

Data la coppia $\text{Primale}_{\text{min}} - \text{Duale}_{\text{max}}$, se $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$ allora $\bar{x}$ è ottima primale e $\bar{y}$ è ottima duale.

Dimostrazione:

1. Per ogni y ammissibile duale deve essere $c^T\bar{x} \geq y^T b$ e quindi $\bar{y}^T b \geq y^T b$ ovvero $\bar{y}$ è punto di massimo per il duale.
2. Per ogni x ammissibile primale deve essere $c^T x \geq \bar{y}^T b$ e quindi $c^T x \geq c^T\bar{x}$ ovvero $\bar{x}$ è punto di minimo per il primale.



Teorema forte della dualità

Teorema forte della dualità

Data la coppia $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$, una soluzione $\bar{x}$ ammissibile primale è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile (e ottima) duale tale che: $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$.

Dimostrazione (solo per primale in F.S.)

C.S. seguono dal corollario 2, quindi dimostriamo solo le C.N. Quindi per ipotesi $\bar{x}$ è ottima primale. Poiché il primale è in F.S. e ammette soluzione ottima, deve esistere una SBA ottima e una base B che soddisfa le condizioni algebriche di ottimo: $\bar{c}_N^T \geq 0$.

Quindi sappiamo che:

$$\text{(P)}\quad \begin{array}{c}\min c^T x\\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{(D)}\quad \begin{array}{c}\max y^T b\\ \begin{cases} y^T A \leq c^T \\ y\ libere \end{cases}\end{array}$$

$x_B = A_B^{-1}b \geq 0$; $x_N = 0$; $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$; $c^T\bar{x} = c_B^T A_B^{-1} b$.

Dimostriamo che $\bar{y}^T = c_B^T A_B^{-1}$ è una soluzione ammissibile del duale.

Teorema forte della dualità

Teorema forte della dualità
Data la coppia $\text{Primale}_{\min} - \text{Duale}_{\max}$, una soluzione $\bar{x}$ ammissibile primale è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile (e ottima) duale tale che: $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$.

Dimostrazione (segue)
Suddividiamo i vincoli duali $y^T A \leq c^T$ in due gruppi:

$$\begin{cases} y^T A_B \leq c_B^T \\ y^T A_N \leq c_N^T \end{cases}$$

E sostituiamo $\bar{y}^T = c_B^T A_B^{-1}$: $\Rightarrow$ $\begin{cases} c_B^T A_B^{-1} A_B \leq c_B^T \\ c_B^T A_B^{-1} A_N \leq c_N^T \end{cases}$

Il primo gruppo di vincoli è soddisfatto all'uguale, il secondo è soddisfatto perché B che soddisfa le condizioni algebriche di ottimo: $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$.

Quindi $\bar{y}^T$ è ammissibile duale e di costo $c_B^T A_B^{-1} b = c^T\bar{x}$.

Teorema forte della dualità

Interpretazione del simplesso rivisto in chiave duale

In un problema primale in F.S., se la base B soddisfa le condizioni algebriche di ottimo, la matrice CARRY contiene sia la soluzione ottima primale $x_B = \bar{b}$; $x_N = 0$ che la soluzione ottima duale $y^T = c_B^T A_B^{-1}$.

Durante le varie iterazioni, $\bar{b}$ rappresenta una soluzione ammissibile primale che diventa ottima solo nell'ultima iterazione, y rappresenta una soluzione duale che soddisfa la dualità forte e che diventa ammissibile solo nell'ultima iterazione (se esiste un costo ridotto fuori base negativo, y viola il corrispondente vincolo duale e quindi non è ammissibile duale).

Appena y diventa ammissibile duale, $\bar{b}$ diventa ottima primale e $\bar{z}$ rappresenta l'ottimo di entrambi i problemi.

Esercizio 4

Primale

$$\min\ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z^* = 2$$

$$B = \{x_1, x_2\}$$

$$\bar{c}_3 = 0 + [-5 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = 0 + [-5 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \geq 0$$

Trovata soluzione ottima!

Duale

$$\max\ 2y_1 + 4y_2$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array} \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq 2 \\ -y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y\ libere \end{cases}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

soluzione ottima duale

Relazioni primale-duale

	(P) con soluzione ottima	**(P) illimitato**	**(P) inammissibile**
(D) con soluzione ottima	SI $c^T x^* = b^T y^*$	NO	NO
(D) illimitato	NO	NO	SI
(D) inammissibile	NO	SI	SI

Esempio primale-duale inammissibili

Primale

$$\min -x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Duale

$$\max y_1 - y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 libera; y_2 libera \end{cases}$$

Esercizio di formulazione

Problema: Una signora esce di casa con x euro nella borsa. Ogni volta che incontra un mendicante gli consegna metà del denaro che ha in borsa più una certa somma z non inferiore ad un euro. Se dopo il terzo mendicante la signora resta con non meno di 2 euro nella borsa, quanto aveva al minimo nella borsa quando è uscita di casa? Formulare come problema di PL.

Formulazione:

La signora esce di casa con x euro nella borsa.

Consegna $\frac{x}{2} + z$ al primo mendicante, rimanendo con $y = \frac{x}{2} - z$ euro.

Consegna $\frac{y}{2} + z$ al secondo mendicante, rimanendo con $w = \frac{y}{2} - z$ euro.

Consegna $\frac{w}{2} + z$ al terzo mendicante, rimanendo con $\frac{w}{2} - z \geq 2$ euro.

$z \geq 1$

$\min x$

Esercizio di formulazione

Problema: Una signora esce di casa con x euro nella borsa. Ogni volta che incontra un mendicante gli consegna metà del denaro che ha in borsa più una certa somma z non inferiore ad un euro. Se dopo il terzo mendicante la signora resta con non meno di 2 euro nella borsa, quanto aveva al minimo nella borsa quando è uscita di casa? Formulare come problema di PL.

Formulazione:

$$\min x$$
$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - z \\ w = \frac{y}{2} - z \\ \frac{w}{2} - z \geq 2 \\ z \geq 1 \\ x, y, w, z \geq 0 \end{cases}$$

$$w = \frac{y}{2} - z = \frac{\frac{x}{2} - z}{2} - z = \frac{x}{4} - \frac{3}{2} z$$

$$\min x$$
$$\begin{cases} \frac{\frac{x}{4} - \frac{3}{2} z}{2} - z \geq 2 \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{7}{4} z \geq 2 \\ z \geq 1 \\ x, z \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio di formulazione

Problema. Un allevatore dispone di un terreno e di un capitale di 60.000€ che vuole investire nel modo più redditizio. Dopo essersi informato sulle specie animali più adatte al terreno deve decidere fra diverse possibilità:
Allevare capre: una capra costa 1000 €, comprensivi dei costi di mantenimento. Una capra produce una quantità di latte al giorno che può essere venduta a 3 €. Ogni capra richiede circa 20 minuti di lavoro al giorno.
Allevare pecore: una pecora costa 1500 €, omnicomprensivi. Una pecora produce 10 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.
Allevare bufale: una bufala costa circa 6000 €, produce 20 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.
Allevare mucche: una mucca costa 20.000 €, produce 50 € di latte al giorno e richiede 1 ora di lavoro al giorno.
L'allevatore può dedicare ai suoi animali 8 ore di lavoro al giorno. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare la rendita giornaliera dell'allevamento, tenendo conto dei vincoli sul capitale da investire e sulla forza lavoro disponibile.

Formulazione. È un problema di allocazione di risorse con 4 prodotti e due risorse: capitale e ore di lavoro al giorno. Quindi la formulazione avrà 4 variabili: $x_i =$ numero di animali di tipo $i = c, p, b, m$ acquistati e due vincoli: euro investiti ≤ 60000 ; ore di lavoro ≤ 8.

Funzione obiettivo: $\max 3x_c + 10x_p + 20x_b + 50x_m$

Esercizio di formulazione

Problema. Un allevatore dispone di un terreno e di un capitale di 60.000€ che vuole investire nel modo più redditizio. Dopo essersi informato sulle specie animali più adatte al terreno deve decidere fra diverse possibilità:
Allevare capre: una capra costa 1000 €, comprensivi dei costi di mantenimento. Una capra produce una quantità di latte al giorno che può essere venduta a 3 €. Ogni capra richiede circa 20 minuti di lavoro al giorno.
Allevare pecore: una pecora costa 1500 €, omnicomprensivi. Una pecora produce 10 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.
Allevare bufale: una bufala costa circa 6000 €, produce 20 € di latte al giorno e richiede 30 minuti di lavoro al giorno.
Allevare mucche: una mucca costa 20.000 €, produce 50 € di latte al giorno e richiede 1 ora di lavoro al giorno.
L'allevatore può dedicare ai suoi animali 8 ore di lavoro al giorno. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare la rendita giornaliera dell'allevamento, tenendo conto dei vincoli sul capitale da investire e sulla forza lavoro disponibile.

Formulazione

$$\max 3x_c + 10x_p + 20x_b + 50x_m$$

$$\begin{cases} 1000x_c + 1500x_p + 6000x_b + 20000x_m \leq 60000 \\ \frac{1}{3}x_c + \frac{1}{2}x_p + \frac{1}{2}x_b + x_m \leq 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Condizioni di ortogonalità

Dalla dimostrazione del Teorema debole della dualità:
Data la coppia $\mathrm{Primale}_{\min} - \mathrm{Duale}_{\max}$, una soluzione $\bar{x}$ ammissibile primale e una soluzione $\bar{y}$ ammissibile duale, si ha: $c^T\bar{x} \geq \bar{y}^T A\bar{x} \geq \bar{y}^T b$.

Dal Teorema forte della dualità:
Data la coppia $\mathrm{Primale}_{\min} - \mathrm{Duale}_{\max}$, per una coppia di soluzioni x^* ottima primale e y^*ottima duale, si ha: $c^T x^* = {y^*}^T b$.

Quindi: per una coppia di soluzioni x^* ottima primale e y^*ottima duale, si ha: $c^T x^* = {y^*}^T A x^* = {y^*}^T b$, ovvero:

Vettore degli scarti duali ≥ 0

$$\begin{cases} (c^T - {y^*}^T A)x^* = 0 \\ {y^*}^T (Ax^* - b) = 0 \end{cases}$$

$$\text{(P)} \quad \min c^T x \quad \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{(D)} \quad \max y^T b \quad \begin{cases} y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vettore degli scarti primali ≥ 0

Condizioni di ortogonalità

Teorema delle condizioni di ortogonalità:
Data la coppia $\text{Primale}_{\text{min}} - \text{Duale}_{\text{max}}$, una coppia di soluzioni x^* ammissibile primale e y^*ammissibile duale è ottima se e solo se il vettore degli scarti duali è ortogonale al vettore delle variabili primali e il vettore degli scarti primali è ortogonale al vettore delle variabili duali:

$$\begin{cases} \left(c^T - {y^*}^T A\right)x^* = 0 \\ {y^*}^T (Ax^* - b) = 0 \end{cases}$$

Corollario:
Data la coppia $\text{Primale}_{\text{min}} - \text{Duale}_{\text{max}}$, una coppia di soluzioni x^* ammissibile primale e y^*ammissibile duale è ottima se e solo se lo scarto di ogni vincolo è complementare alla variabile duale associata

$$\begin{cases} \left(c_j - {y^*}^T A_j\right)x_j^* = 0 & j = 1, \dots, n \\ y_i^* \left(a_i^T x^* - b_i\right) = 0 & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Esercizio 5

Primale

$$\min \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È ottima? **NO**

Duale

$$\max \; y_1 + 4y_2$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array} \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq 2 \\ -y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y \; libere \end{cases}$$

NON amm.

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} (1 - y_1 - 2y_2)x_1 = 0 \\ (2 + y_2)x_2 = 0 \\ (y_1)x_3 = 0 \\ (-y_2)x_4 = 0 \\ (x_1 - x_3 - 1)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 + x_4 - 4)y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - y_1 - 2y_2)2 = 0 \\ (2 + y_2)0 = 0 \\ (y_1)1 = 0 \\ (-y_2)0 = 0 \\ (2 - 1 - 1)y_1 = 0 \\ (4 - 0 + 0 - 4)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5

Primale

$$\min\ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array}\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Duale

$$\max\ y_1 + 4y_2$$

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{array}\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq 2 \\ -y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y\ libere \end{cases}$$

È ottima? **SI**

Condizioni di ortogonalità

Esiste sol. amm. con $x_4 = 2$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1 - y_1 - 2y_2)x_1 = 0 \\ (2 + y_2)x_2 = 0 \\ (y_1)x_3 = 0 \\ (-y_2)x_4 = 0 \\ (x_1 - x_3 - 1)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 + x_4 - 4)y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - 1 - 0)x_1 = 0 \\ (2 + 0)x_2 = 0 \\ (1)x_3 = 0 \\ (-0)x_4 = 0 \\ (x_1 - x_3 - 1)1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 + x_4 - 4)0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 6

Problema. Una fabbrica di cinghie di trasmissione per autoveicoli realizza tre modelli di cinghia: A (lunghezza 60 cm, profitto dalla vendita 7 €), B (70 cm, profitto 10 €) e C (110 cm, profitto 16 €). Per realizzare un cm di cinghia si consumano 10 gr di gomma speciale ad alta resistenza. Inoltre, sono necessari 5 minuti di lavoro di un operaio per realizzare una cinghia di modello A, 8 minuti per il modello B e 12 minuti per il modello C. L'azienda dispone di due operai che lavorano, ciascuno, 8 ore al giorno.

1. Sapendo che in magazzino sono disponibili solo 90 kg di gomma speciale ad alta resistenza, formulare come problema di PL il problema di pianificare la produzione giornaliera di massimo profitto.
2. Una soluzione ammissibile consiste nel produrre solo 80 cinghie di tipo C. Dimostrare o confutare l'ottimalità di questa soluzione facendo uso delle condizioni di ortogonalità.

Formulazione. Si richiede di decidere *quanto* produrre, mentre il *come* è dato. ⇒ provo a formularlo come problema di allocazione di risorse.
Variabili: $x_i =$ numero di cinghie prodotte $i = A, B, C$. Vincoli: risorse consumate (gomma, manodopera).

$$\max \; 7x_A + 10x_B + 16x_C$$
$$\begin{array}{r} gomma \\ minuti \\ \\ \end{array} \begin{cases} 600x_A + 700x_B + 1100x_C \leq 90000 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

Problema.

2. Una soluzione ammissibile consiste nel produrre solo 80 cinghie di tipo C. Dimostrare o confutare l'ottimalità di questa soluzione facendo uso delle condizioni di ortogonalità.

$$\max\ 7x_A + 10x_B + 16x_C$$

$$\begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_2\ ? \end{matrix} \quad \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 & < \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 & = \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow =$$

È ottima? **NO**

$$\min\ 900y_1 + 960y_2$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 5y_2 \geq 7 \\ 7y_1 + 8y_2 \geq 10 \\ 11y_1 + 12y_2 \geq 16 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

NON amm.

Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} (6y_1 + 5y_2 - 7)x_A = 0 \\ (7y_1 + 8y_2 - 10)x_B = 0 \\ (11y_1 + 12y_2 - 16)x_C = 0 \\ (6x_A + 7x_B + 11x_C - 900)y_1 = 0 \\ (5x_A + 8x_B + 12x_C - 960)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 11y_1 + 12y_2 = 16 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = \frac{4}{3}$$

Esercizio 6

Problema.

2. Una soluzione ammissibile consiste nel produrre solo 80 cinghie di tipo C. Dimostrare o confutare l'ottimalità di questa soluzione facendo uso delle condizioni di ortogonalità.

$$\max \ 7x_A + 10x_B + 16x_C$$

$$\begin{array}{l} = \\ = \\ \\ \end{array} \begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ok}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \neq 0 \\ ? \\ \neq 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow = \\ \\ \Rightarrow = \end{array}$$

$$\min \ 900y_1 + 960y_2$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 5y_2 \geq 7 \\ 7y_1 + 8y_2 \geq 10 \\ 11y_1 + 12y_2 \geq 16 \\ y \geq 0 \end{cases} \begin{array}{l} = \\ > \\ = \\ \text{ok} \end{array}$$

∃ sol. ottima così?

probabilmente SI

SI

Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} (6y_1 + 5y_2 - 7)x_A = 0 \\ (7y_1 + 8y_2 - 10)x_B = 0 \\ (11y_1 + 12y_2 - 16)x_C = 0 \\ (6x_A + 7x_B + 11x_C - 900)y_1 = 0 \\ (5x_A + 8x_B + 12x_C - 960)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 5y_2 = 7 \\ 11y_1 + 12y_2 = 16 \end{cases} \qquad y = \begin{pmatrix} 4/17 \\ 19/17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_B = 0 \\ 6x_A + 11x_C = 900 \\ 5x_A + 12x_C = 960 \end{cases} \qquad x^* = \begin{pmatrix} 240/17 \\ 0 \\ 1260/17 \end{pmatrix}$$

Analisi di sensitività

Scopo: studiare entro quali margini di variazioni dei parametri del problema la base ottima trovata rimane tale.

Base ottima: B, quindi B è ammissibile: $x_B^* = A_B^{-1}b \geq 0$; $x_N^* = 0$;
B è ottima $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$; $z^* = c_B^T A_B^{-1} b$.

Variazione dei termini noti: il vettore b diventa $\tilde{b} = b + \delta$. Come cambia l'ammissibilità e/o ottimalità della base B?

B rimane ammissibile solo se $A_B^{-1}\tilde{b} \geq 0 \Rightarrow A_B^{-1}(b+\delta) \geq 0 \Rightarrow A_B^{-1}\delta \geq -\bar{b}$.
B rimane ottima (se ammissibile) in quanto $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ non dipende da b.
La SBA cambia e diventa $x_B^* = A_B^{-1}(b+\delta) = \bar{b} + A_B^{-1}\delta$
La funzione obiettivo cambia e diventa $c_B^T A_B^{-1}(b+\delta) = z^* + c_B^T A_B^{-1}\delta$.

Ricordando che $y^T = c_B^T A_B^{-1}$ è la soluzione ottima duale, il nuovo ottimo offre una nuova interpretazione delle variabili duali all'ottimo, come *prezzi ombra* o *valori marginali* delle risorse. Infatti, in un problema di allocazione di risorse, y_i indica la variazione dell'ottimo associata a un incremento unitario di b_i, quindi è il prezzo massimo che conviene pagare per aumentare di 1 la risorsa i-esima.

Analisi di sensitività - Esempio

Esercizio 6: $\max\ 7x_A + 10x_B + 16x_C$

$$\begin{array}{r} gomma \\ minuti \\ \end{array}\begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 240/_{17} \\ 0 \\ 1260/_{17} \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 4/_{17} \\ 19/_{17} \end{pmatrix}$$

Problema: Quanto possiamo guadagnare da 10 minuti di straordinario di un operaio?

Soluzione: Ci chiediamo quanto convenga una perturbazione di 10 minuti del secondo termine noto.

$$\max\ 7x_A + 10x_B + 16x_C$$

$$\begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \leq 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \leq 960 + 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_A + 11x_C = 900 \\ 5x_A + 12x_C = 970 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}^* = \begin{pmatrix} 130/_{17} \\ 0 \\ 1320/_{17} \end{pmatrix} \geq 0$$

La base è ancora ammissibile, e quindi ottima.

L'ottimo è aumentato di $10y_2^* = 10\,\frac{19}{17} = \frac{190}{17}$

Nota: non disponiamo della matrice A_B^{-1} per cui risolviamo direttamente il sistema

$$A_B x_B = b + \delta$$

Analisi di sensitività - Esempio

Esercizio 6: $\max\ 7x_A + 10x_B + 16x_C$

$$\begin{array}{r} gomma \\ minuti \\ \\ \end{array}\begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \le 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \le 960 \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad x^* = \begin{pmatrix} 240/17 \\ 0 \\ 1260/17 \end{pmatrix} \quad y^* = \begin{pmatrix} 4/17 \\ 19/17 \end{pmatrix}$$

Problema: Quanto possiamo guadagnare da un'ora di straordinario di un operaio?

Soluzione: Ci chiediamo quanto convenga una perturbazione di 60 minuti del secondo termine noto.

$$\max\ 7x_A + 10x_B + 16x_C$$

$$\begin{cases} 6x_A + 7x_B + 11x_C \le 900 \\ 5x_A + 8x_B + 12x_C \le 960 + 60 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_A + 11x_C = 900 \\ 5x_A + 12x_C = 1020 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}^* = \begin{pmatrix} -420/17 \\ 0 \\ 1620/17 \end{pmatrix}$$

La base non è più ammissibile, e quindi non può essere ottima. le formule viste non valgono più.

Esercizio 7

Una fabbrica di cinghie di trasmissione per autoveicoli realizza tre modelli di cinghia: A (lunghezza 60 cm), B (70 cm) e C (110 cm). Per realizzare le cinghie si utilizzano due macchine M e P. La macchina M è in grado di produrre contemporaneamente in un'ora di lavoro 45 cinghie così suddivise: 10 cinghie A, 20 B e 15 C. La macchina P è in grado di produrre contemporaneamente in un'ora di lavoro 37 cinghie così suddivise: 7 cinghie A, 10 B e 20 C. Il costo di un'ora di lavoro di M è di 120 €, mentre un'ora di lavoro di P costa 100 €. L'impianto che ospita le due macchine deve produrre almeno 300 cinghie A, 600 B e 500 C al giorno e può lavorare su tre turni (cioè 24 ore al giorno).

1. Formulare come problema di PL il problema di realizzare le cinghie richieste a costo minimo.

Formulazione. Si richiede di decidere *come* produrre, mentre il *quanto* è dato. ⇒ provo a formularlo come problema di miscelazione.
Variabili: x_i = numero ore di lavoro della macchina $i = M, P$. Vincoli: quantità da produrre (A,B,C).

$$\min\ 120x_M + 100x_P$$

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ \\ \end{array}\begin{cases} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 7

2. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si producono più di 300 cinghie A e che x_M e x_P sono entrambe diverse da zero.

$$\min\ 120x_M + 100x_P$$

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ \end{array}\begin{cases} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\max\ 300y_A + 600y_B + 500y_C$$

$$\begin{array}{l} M \\ P \\ \end{array}\begin{cases} 10y_A + 20y_B + 15y_C \leq 120 \\ 7y_A + 10y_B + 20y_C \leq 100 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} y_A = 0 \\ (20x_M + 10x_P - 600)y_B = 0\ ? \\ (15x_M + 20x_P - 500)y_C = 0\ ? \\ 10y_A + 20y_B + 15y_C = 120 \\ 7y_A + 10y_B + 20y_C = 100 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 18/5 \\ 16/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x_M + 10x_P = 600 \\ 15x_M + 20x_P = 500 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 28 \\ 4 \end{pmatrix}$$

x, y ammissibili, quindi entrambe ottime

Esercizio 7

3. La fabbrica riceve un ordine urgente di 50 cinghie di tipo C, al prezzo di 10 euro al pezzo. Conviene accettare l'ordine?

$$\min\ 120x_M + 100x_P$$

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ \\ \end{array} \begin{cases} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 + 50 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 18/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}$$

A seguito della perturbazione, l'ottimo cambia di $c_B^T A_B^{-1} \delta$,

dove $c_B^T A_B^{-1} = y^{*T}$ e $\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Quindi l'extra costo di produzione è $50 \frac{16}{5} = 160$ euro.

Poiché l'azienda incassa 500 euro dall'ordine ricevuto, realizza un extra profitto di $500 - 160 = 340$ euro. Potenzialmente l'offerta è conveniente, si deve però verificare se la base è ancora ammissibile.

Esercizio 7

3. La fabbrica riceve un ordine urgente di 50 cinghie di tipo C, al prezzo di 10 euro al pezzo. Conviene accettare l'ordine?

$$\min\ 120x_M + 100x_P$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ \\ \end{array}\begin{cases} 10x_M + 7x_P \geq 300 \\ 20x_M + 10x_P \geq 600 \\ 15x_M + 20x_P \geq 500 + 50 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 18/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}$$

In base sono presenti x_M, x_P e la variabile di scarto del primo vincolo. Per trovare x_M, x_P è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 20x_M + 10x_P = 600 \\ 15x_M + 20x_P = 550 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 26 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Poiché x è ancora ammissibile, conviene accettare il nuovo ordine.

Analisi di sensitività

Scopo: studiare entro quali margini di variazioni dei parametri del problema la base ottima trovata rimane tale.

Base ottima: B, quindi B è ammissibile: $x_B^* = A_B^{-1}b \geq 0$; $x_N^* = 0$;
B è ottima $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$; $z^* = c_B^T A_B^{-1} b$.

Variazione di un costo fuori base: $c_j, j \in N$ diventa $\tilde{c}_j = c_j + \delta$. Come cambia l'ammissibilità e/o ottimalità della base B?

B rimane sicuramente ammissibile in quanto l'ammissibilità non dipende da c_j.
La SBA e il valore della funzione obiettivo $c_B^T A_B^{-1} b$ rimangono uguali.
B rimane ottima solo se il nuovo $\bar{\tilde{c}}_j = \tilde{c}_j - c_B^T A_B^{-1} A_j \geq 0$ ovvero se $\delta + \bar{c}_j \geq 0$, cioè se la perturbazione δ è più piccola in valore assoluto del vecchio costo ridotto $\bar{c}_j$ (prima della perturbazione).

Quindi il costo ridotto di una variabile fuori base ci dice quanto la soluzione è robusta a riduzioni di costo di quella variabile.

Esercizio 8

Un agricoltore biologico deve concimare il proprio terreno con almeno 60 gr di Azoto (N) e 120 gr di Fosforo (P) per m^2. Allo scopo utilizza composti naturali ricchi di queste sostanze, quali guano (N 10%, P 20%, costo 20€/kg), farina di ossa (N 0% P 18%, costo 8€/kg), pennone (N 10% P 4%, costo 5€/kg) e cenere di legna (N 1%, P 10%, costo 2€/kg).

1. Formulare come PL il problema di concimare il terreno al costo minimo;
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si utilizzano solo pennone e cenere di legna.
3. Vi propongono la farina di ossa scontata del 50%. Conviene acquistarla?

1. Formulazione. Si richiede di decidere *come* produrre, mentre il *quanto* è dato. ⇒ provo a formularlo come problema di miscelazione.
Variabili: $x_i =$ Kg ingr. $i = G, F, P, C$.
Vincoli: contenuto N, P nella miscela.

$$\min\ 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C$$

$$\begin{array}{l} N \\ P \\ \\ \end{array}\begin{cases} 100x_G \qquad\qquad + 100x_P + 10x_C \geq 60 \\ 200x_G + 180x_F + 40x_P + 100x_C \geq 120 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 8

2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che all'ottimo si utilizzano solo pennone e cenere di legna.
3. Vi propongono la farina di ossa scontata del 50%. Conviene acquistarla?

$$\min\ 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C$$
$$\begin{array}{l} N \\ P \\ \\ \end{array}\begin{cases} 10x_G + 10x_P + 1x_C \geq 6 \\ 20x_G + 18x_F + 4x_P + 10x_C \geq 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_P + 1x_C = 6 \\ 4x_P + 10x_C = 12 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ammissibile primale, quindi x, y ottime

$$\max\ 6y_N + 12y_P$$
$$\begin{array}{l} G \\ F \\ P \\ C \\ \\ \end{array}\begin{cases} 10y_N + 20y_P \leq 20 \\ 18y_P \leq 8 \\ 10y_N + 4y_P \leq 5 \\ 1y_N + 10y_P \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Condizioni di ortogonalità

$$\Rightarrow \begin{cases} 10y_N + 4y_P = 5 \\ 1y_N + 10y_P = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 7/16 \\ 5/32 \end{pmatrix}$$ è ammissibile duale,

Esercizio 8

3. Vi propongono la farina di ossa scontata del 50%. Conviene acquistarla?

$$\min \; 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C$$

$$\begin{array}{l} N \\ P \\ \\ \end{array} \begin{cases} 10x_G \qquad\qquad + 10x_P + 1x_C \geq 6 \\ 20x_G + 18x_F + 4x_P + 10x_C \geq 12 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad y = \begin{pmatrix} 7/16 \\ 5/32 \end{pmatrix}$$

Analisi di sensitività

Si chiede se una perturbazione $\delta = -4$ sul costo di x_F lascia la base ottima o meno. Per rispondere è necessario calcolare il costo ridotto di x_F

$$\bar{c}_F = c_F - y^T A_F = 8 - \left(7/16 \quad 5/32\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = 83/16 = 5{,}1875$$

Poiché il costo ridotto è maggiore di 4, cioè $\delta + \bar{c}_F \geq 0$, la base resta ottima, quindi <u>non conviene</u> acquistare la farina di ossa al prezzo scontato.

Interpretazione economica del duale

La teoria della dualità si presta bene per modellare rapporti economici cliente-fornitore, ovvero se il problema primale è il problema del cliente che desidera pianificare gli acquisti per minimizzare il costo dei propri acquisti, il duale può essere interpretato come il problema del fornitore che desidera ottenere il massimo ricavo dalle vendite.

ESEMPIO

Si consideri il problema dell'esercizio 8 e si assuma che un nuovo produttore di concimi biologici voglia entrare nel mercato con due nuovi concimi bio: Azoto puro e Fosforo puro. Con una strategia molto aggressiva vuole convincere l'agricoltore ad acquistare i suoi concimi e al contempo vuole massimizzare il ricavo delle vendite.

Quale problema deve risolvere?

Interpretazione economica del duale

ESEMPIO Quale problema deve risolvere?

Variabili: y_N = prezzo di vendita di 1 gr di Azoto, in euro

y_P = prezzo di vendita di 1 gr di Fosforo, in euro

Vincoli:

Il produttore deve dimostrare all'agricoltore che nessuno dei composti naturali in commercio è conveniente rispetto ai suoi prodotti, ovvero che acquistando lo stesso contenuto di azoto e fosforo di ciascun composto in commercio non si spende più che acquistando il composto della concorrenza.

guano (N 10%, P 20%, costo 20€/kg), farina di ossa (N 0% P 18%, costo 8€/kg), pennone (N 10% P 4%, costo 5€/kg) e cenere di legna (N 1%, P 10%, costo 2€/kg).

Guano: $100\, y_N + 200\, y_P \leq 20$

Farina: $180\, y_P \leq 8$

Pennone: $100\, y_N + 40\, y_P \leq 5$

Cenere: $10\, y_N + 100\, y_P \leq 2$

$y \geq 0$

Funzione obiettivo: massimizzazione del ricavo (concimare il proprio terreno con almeno 60 gr di Azoto (N) e 120 gr di Fosforo (P) per m^2)

$$\max 60 y_N + 120 y_P$$

Interpretazione economica del duale

Problema del produttore

$$\max \; 60y_N + 120y_P$$
$$\begin{array}{l} G \\ F \\ P \\ C \\ \\ \end{array} \begin{cases} 100y_N + 200y_P \leq 20 \\ 180y_P \leq 8 \\ 100y_N + 40y_P \leq 5 \\ 10y_N + 100y_P \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Problema dell'agricoltore

$$\min \; 20x_G + 8x_F + 5x_P + 2x_C$$
$$\begin{array}{l} N \\ P \\ \\ \end{array} \begin{cases} 100x_G + 100x_P + 10x_C \geq 60 \\ 200x_G + 180x_F + 40x_P + 100x_C \geq 120 \\ x \geq 0 \end{cases}$$