M/M/1/K

martedì 3 novembre 2020 15:06

SISTEMI M/M/1/K

↳ t_a DISTRIBUITO ESP. CON PARAMETRO γ

NEI SISTEMI M/M/1/K LA FREQUENZA DI ARRIVO NON LA CHIAMO λ MA γ PERCHÉ DIPENDE DALLO STATO DEL SISTEMA. QUESTO DERIVA DAL FATTO CHE SICCOME POSSO AVERE AL PIÙ K UTENTI NEL SISTEMA SE QUESTO È PIENO NON POSSO ACCETTARE ALTRI ARRIVI

$$\mu_m = \mu \cdot \quad m = 1, \dots, K$$

$$\lambda_m = \begin{cases} \gamma & se \quad 0 \leq m \leq K-1 \\ 0 & se \quad m \geq K-1 \end{cases}$$

POSSO AVERE ARRIVI SOLO SE IL SISTEMA NON È PIENO

DAI SISTEMI STAZIONARI

$$\boxed{P_m = \frac{\prod_{i=0}^{m-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{m} \mu_j} P_0}$$

NEI SISTEMI M/M/1/K

$$P_m = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^m P_0 & 1 \leq m \leq K \\ 0 & m > K \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\underbrace{1 + \sum_{m=1}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^m}_{D}}$$

CALCOLO IL DENOMINATORE
P_0 SARÀ L'INVERSO DEL RISULTATO CHE TROVERÒ

$$D = \sum_{m=0}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^m - \sum_{m=K+1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^m$$

$p = m - (K+1)$
↳ $m = p + (K+1)$

$$D = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} - \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{p+(K+1)} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1} \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} = \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \frac{\gamma}{\mu}}$$

P_0 NEI SISTEMI M/M/1/K

$$P_0 = \frac{1}{D} = \boxed{\frac{1 - \frac{\gamma}{\mu}}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}}$$

γ CI VIENE DATO, μ CI VIENE DATO
K È LA DIMENSIONE DEL SISTEMA QUINDI QUESTO QUI È UN NUMERO

LA P_m IN QUESTO CASO È DEFINITA FINO AD $m = K$ SUPERATO K VALE ZERO

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} m P_m = \sum_{m=0}^{K} m \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^m P_0 =$$

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0} n \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n P_0 =$$

$$= P_0 \left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{K} \frac{d\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n}{d\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} = P_0 \left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \frac{d}{d\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} \sum_{n=0}^{K} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n$$

$$= P_0 \left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \frac{d}{d\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^n - \sum_{s=K+1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^s \right] =$$

$$= P_0 \left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \frac{d}{d\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} \left[\frac{1}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} - \frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)} \right] = \boxed{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) P_0 \left[\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{\left(1-\frac{\gamma}{\mu}\right)^2} - (K+1)\frac{\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K}{1-\frac{\gamma}{\mu}} \right]}$$

N NEI SISTEMI $M/M/1/K$

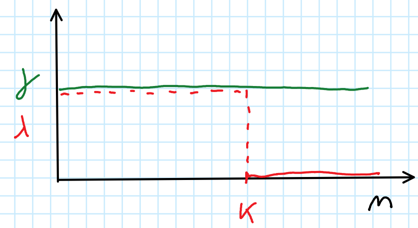
CERCHIAMO IL LEGAME TRA γ E λ

$$\lambda_n = \begin{cases} \gamma & 0 \leq n < K \\ 0 & n \geq K \end{cases}$$

$\lambda < \gamma$

$\lambda = \varepsilon \gamma$

$\hookrightarrow < 1$



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow \lambda = \mu \rho = \mu (1 - P_0)$$

$$= \mu \left[1 - \frac{1-\frac{\gamma}{\mu}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \right] =$$

$$= \mu \left[\frac{\cancel{1} - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1} - \cancel{1} + \frac{\gamma}{\mu}}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \right] = \cancel{\mu} \left[\frac{\frac{\gamma}{\cancel{\mu}}\left(1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K\right)}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \right] =$$

$$= \gamma \boxed{\left[\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K}{1-\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \right]}$$

QUESTO È ε

$$\Rightarrow \underbrace{1-\varepsilon}_{\text{FATTORE DI PERDITA}} = P_K$$