

é

Dispense per Matematica - AA 2015-2016

Equazioni differenziali

Decio Levi, Valentino Lacquaniti

levi@roma3.infn.it

Corso di Laurea in Ottica ed Optometria
Dipartimento di Scienze

1 Nozioni preliminari

Lo studio di molti fenomeni naturali porta a *equazioni differenziali*, cioè un modello matematico del fenomeno fisico ove é presente una funzione, incognita, da determinarsi conoscendo le sue derivate o una certa combinazione di esse. Un esempio comune é dato dall'equazione di Newton: la posizione $x(t)$, di un corpo di massa m , soggetto ad una forza $F(x)$ é determinata dall'equazione

$$ma = F(x),$$

dove a , l'accelerazione del corpo, é data dalla derivata seconda della posizione $x(t)$ rispetto al tempo t , $x(t)''$, ovvero l'accelerazione del corpo.

In generale, data una funzione $y(x)$, un'equazione differenziale (d'ora in poi indicata da ED), pone un legame tra la variabile indipendente x , la funzione stessa $y(x)$, e le sue derivate y', y'', y''', \dots :

$$f(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Qualche esempio:

$$y' = \frac{x^2}{y} \tag{1}$$

$$y' + 2xy = \sin x \tag{2}$$

$$y'e^{y'} = yx \tag{3}$$

$$y'' + 3y = 0 \tag{4}$$

$$\ln y'' + yx = 0 \tag{5}$$

$$y''y = x^2 \tag{6}$$

$$y''' = \frac{y}{x} \tag{7}$$

La derivata di ordine piú alto presente nell'equazione determina cio che si definisce *l'ordine dell'equazione differenziale*: nei primi tre esempi si riconoscono allora equazioni del primo ordine, dal 4 al 6 equazioni del secondo ordine, e nell'ultimo caso un'equazione del terzo ordine. Tratteremo in questo corso essenzialmente ED del primo e del secondo ordine, del tipo $f(x, y, y') = 0$ e $f(x, y, y', y'') = 0$.

Inoltre, un'ED viene detta in *forma normale* se é scritta con la derivata di ordine piú alto esplicita alla sinistra del segno di uguale, cioé nella forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Tranne i casi 3, 5, 6, negli esempi proposti abbiamo ED in forma normale; nei casi 5 e 6 é ancora possibile pervenire alla forma normale isolando algebricamente y'' e si ha:

$$\ln y'' + yx = 0 \quad \rightarrow \quad y'' = e^{-yx} \quad (8)$$

$$y''y = x^2 \quad \rightarrow \quad y'' = \frac{x^2}{y} \text{ se } y \neq 0 \quad (9)$$

Nel caso 3 invece non é possibile esplicitare y' e quindi l'equazione non si puó scrivere in forma normale. Tratteremo nel seguito solo equazioni in forma normale, o piú in generale, equazioni riconducibili a tale forma.

In via generale la soluzione di un' ED puó essere un'operazione alquanto complessa: non é detto a priori che la soluzione esista, o che, pur esistendo, sia possibile trovarla analiticamente; inoltre le ED non danno luogo a soluzioni uniche. Descriviamo in questa parte delle dispense alcune tipologie importanti di equazioni differenziali del primo e del secondo ordine che ammettono procedure risolutive note:

- equazioni risolvibili per quadratura (integrazione diretta).
- equazioni risolvibili per separazione di variabili.
- equazioni lineari del primo ordine.
- equazioni lineari a coefficienti costanti del secondo ordine.

1.1 Equazioni risolubili per quadrature

Consideriamo inizialmente una ED del **primo ordine**. Supponiamo di avere una funzione incognita $y(x)$ e di conoscere la sua derivata prima; cioé abbiamo una equazione del tipo

$$y'(x) = f(x), \quad (10)$$

con $f(x)$ funzione nota. Dato che la funzione inversa della derivata é l'integrale, per integrazione otteniamo (quadratura)

$$y(x) = \int dx f(x) = F(x) + c, \quad (11)$$

dove $F(x)$ é una funzione primitiva della funzione $f(x)$ e c una costante arbitraria di integrazione. Notiamo che la **soluzione non é unica**, per la presenza di tale costante, e che la soluzione della ED (11) é data da **una famiglia di soluzioni dipendenti da un parametro**. La famiglia contenente tutte le soluzioni di una ED viene detta *soluzione generale*, o integrale generale. Dato che (11) dipende da un parametro, questa é la soluzione generale della ED del primo ordine (10).

Consideriamo ora una ED del **secondo ordine**. Esaminiamo il caso analogo al precedente, ma del secondo ordine:

$$y''(x) = f(x) \quad (12)$$

Integrando due volte (doppia quadratura) otteniamo

$$y'(x) = \int dx y''(x) = \int dx f(x) = F(x) + c_1, \quad (13)$$

$$y(x) = \int dx y'(x) = \int dx (F(x) + c_1) = G(x) + c_1x + c_2 \quad (14)$$

dove la funzione F é la funzione primitiva della funzione f , la funzione G la funzione primitiva della funzione F e c_1, c_2 sono due costanti di integrazione. Quindi, otteniamo ancora una famiglia di soluzioni, ma adesso i **parametri arbitrari sono due**.

La presenza di una costante di integrazione nella soluzione dell'ED del primo ordine e di due costanti nel caso della soluzione dell'ED del secondo ordine rispecchia una proprietà generale di tutte le ED: **La soluzione generale di una ED contiene sempre un numero di costanti di integrazione pari all'ordine dell' ED stessa**.

Esempio 1.1 Si trovi la soluzione generale dell'ED $y' = e^{2x} + 1$

Per integrazione diretta abbiamo:

$$y(x) = \int dx [e^{2x} + 1] = \frac{1}{2}e^{2x} + x + c, \quad (15)$$

Esempio 1.2 Si trovi la soluzione generale dell'ED $y'' = g$ ove g é una costante diversa da zero.

Integrando due volte in successione si ha:

$$y'(x) = \int dx \, g = gx + c_1 \quad (16)$$

$$y(x) = \int dx \, (gx + c_1) = \frac{1}{2}gx^2 + c_1x + c_2 \quad (17)$$

1.2 Le condizioni al contorno

Come abbiamo visto, la soluzione generale di una ED di ordine n dipende da n costanti di integrazione. Possiamo quindi imporre n condizioni per determinarle ed ottenere una soluzione unica della ED. Che tipo di condizioni possiamo imporre? Per esempio possiamo imporre il valore della funzione $y(x)$ e di alcune delle sue derivate agli estremi dell'intervallo dove é definita la soluzione della ED. In questo caso parliamo di risoluzione di una ED con **condizioni al contorno** oppure imporre il valore di $y(x)$ e di $n - 1$ delle sue derivate in un punto iniziale $x = x_0$ e in questo caso parliamo di risoluzione di una ED con **condizioni iniziali**.

Riprendiamo l'esempio 139 e cerchiamo, nella famiglie di soluzioni date dall'integrale generale, la funzione $y(x)$ che, in $x = x_0 = 0$, vale $y = y(x_0) = 1$, ovvero imponiamo la condizione al contorno $y(0) = 1$. Sostituendo la condizione al contorno nella soluzione precedentemente ottenuta, $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + x + c$, cioè calcolandola nel punto $x = 0$, abbiamo

$$y(0) = \frac{1}{2} + c,$$

e pertanto, poiché $y(0) = 1$ otteniamo che c deve assumere il valore $c = \frac{1}{2}$.

Quindi, la famiglia di funzioni $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + x + c$ rappresenta l'integrale generale dell'ED $y' = e^{2x} + 1$ mentre la funzione $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + x + \frac{1}{2}$ rappresenta la soluzione (unica) del problema differenziale con la condizione al contorno $y(0) = 1$, i.e.

$$\begin{cases} y' = e^{2x} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (18)$$

L'esempio mostra come, grazie a una condizione iniziale assegnata, l'equazione differenziale del primo ordine dia una soluzione unica.

Attenzione: non sempre si ottiene una soluzione unica. Consideriamo il problema seguente.

$$\begin{cases} (y')^2 = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Ponendo l'ED in forma normale otteniamo due nuovi problemi risolvibili per quadratura diretta:

$$i) : \begin{cases} y' = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad ii) : \begin{cases} y' = -1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Lo studente può verificare come il problema i) dia per soluzione (unica) $y(x) = x$ e come il problema ii) dia per soluzione (unica) $y(x) = -x$. Ne segue che il problema originale, pur in presenza di condizioni iniziali non ammette una soluzione unica anche se la condizione iniziale abbia comunque definito la costante di integrazione, ma dia due soluzioni possibili.

In generale possiamo affermare quanto segue: la soluzione di una ED fornisce una famiglia infinita di soluzioni (ad un parametro, per le ED del primo ordine); la presenza di una condizione iniziale del tipo $y(x_0) = y_0$ permette di definire completamente la soluzione. Vedremo nel seguito classi di ED per le quali la presenza di condizioni iniziali o al contorno porta ad avere una soluzione unica del problema differenziale associato.

Nel caso di ED del secondo ordine, le medesime considerazioni sopra esposte si applicano con una importante differenza: poiché ora abbiamo a che fare con soluzioni generali dipendenti da due parametri. Quindi per sperare di giungere ad una soluzione unica necessitiamo di due condizioni al contorno. Per il primo ordine è necessario specificare il valore che la funzione assume in un punto $y(x_0) = y_0$ cioè una condizione che può essere o una condizione iniziale o al contorno. Nel caso del secondo ordine possiamo specificare i valori che la funzione assume in due punti noti $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$, oppure i valori che la derivata prima assume in due punti noti, $y'(x_1) = y'_1, y'(x_2) = y'_2$, o ancora (c.c. miste) i valori assunti dalla funzione e dalla derivata in due punti noti, o nello stesso punto $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$, condizioni iniziali. Riprendendo l'esempio

1.2 consideriamo il problema seguente:

$$\begin{cases} y'' = g \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Ricordando che si ha (16, 17)

$$y'(x) = gx + c_1 \quad (22)$$

$$y(x) = \frac{1}{2}gx^2 + c_1x + c_2 \quad (23)$$

imponendo le condizioni iniziali in $x = 0$ otteniamo:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Pertanto otteniamo come soluzione del nostro problema la soluzione (unica) $y(x) = \frac{1}{2}gx^2 + 1$

2 Equazioni del primo ordine a variabili separabili

Le ED a variabili separabili costituiscono la più vasta classe di equazioni del primo ordine per le quali sia nota una procedura risolutiva. Una generica ED del primo ordine in forma normale si scrive come

$$y' = f(x, y) \quad (25)$$

ove la derivata prima y' è espressa in funzione della variabile indipendente x e della funzione stessa y ; la presenza di y al secondo membro impedisce di ricorrere alla quadratura diretta per integrarla.

L'equazione (25) è separabile se la funzione $f(x, y)$ assume la forma

$$f(x, y) = h(x)g(y) \quad \text{i.e. } y' = h(x)g(y). \quad (26)$$

E' ancora presente la y al secondo membro ma la derivata prima è data dal prodotto di due funzioni dipendenti separatamente da y e da x . Questa

circostanza impedisce ancora l'integrazione diretta ma permette di operare con un metodo sorprendentemente semplice. Poiché, come avete visto nella parte del corso sulle derivate, si ha

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{o, equivalentemente moltiplicando entrambi i membri per } dx \quad dy = y'(x)dx,$$

possiamo scrivere la ED (26) come:

$$dy = h(x)g(y)dx$$

e dividendo entrambi i membri per $g(y)$ otteniamo

$$\frac{1}{g(y)}dy = h(x)dx \quad \text{se } g(y) \neq 0 \quad (27)$$

Se $g(y) = 0$ allora l'equazione (26) diviene l'equazione banale $y' = 0$ la cui soluzione è $y(x) = c$. Ora è possibile integrare ambo i membri:

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx + c$$

Una volta risolti gli integrali si ottiene una equazione algebrica contenente y ed x , dalla quale è possibile, in linea di principio ottenere y in funzione di x . Si noti bene che affinché la procedura sia valida è stato necessario assumere - vedi la equazione (27) - $g(y) \neq 0$. A rigore allora, si può affermare che il metodo qui descritto vale per le ED della forma

$$y' = f(x)g(y), \quad (28)$$

purché sia soddisfatto il requisito

$$g(y) \neq 0 \quad \forall y, \quad (29)$$

nell'insieme di definizione di y .

Esempio 2.1 *Si risolva l'equazione differenziale del primo ordine con condizioni al contorno*

$$\begin{cases} y' = e^{-y}x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (30)$$

Cerchiamo in primo luogo la soluzione generale: riconosciamo nell'ED data un'equazione della forma (26), con $g(y) = e^{-y}$ che soddisfa il requisito 29, e possiamo usare il procedimento della separazione delle variabili. Poniamo $y' = \frac{dy}{dx}$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}y' &= e^{-y}x \\dy &= e^{-y}x dx \\e^y dy &= x dx\end{aligned}$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$\begin{aligned}\int e^y dy &= \int x dx + c \\e^y &= \frac{x^2}{2} + c\end{aligned}$$

Risolvendo ora rispetto ad y si ottiene:

$$y = \ln \left(\frac{x^2}{2} + c \right) \quad (31)$$

La funzione sopra scritta rappresenta la soluzione generale dell'ED $y' = e^{-y}x$. Usiamo ora la condizione al contorno assegnata; si ha:

$$y(0) = \ln c \quad \rightarrow \quad \ln c = 1 \quad \rightarrow \quad c = e$$

La soluzione al problema posto é data allora da

$$y(x) = \ln \left(\frac{x^2}{2} + e \right)$$

Esempio 2.2 *Si risolva l'equazione differenziale del primo ordine con una condizione iniziale*

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} & \text{con } y \neq 0 \\ y(0) = -2 \end{cases} \quad (32)$$

Riconosciamo anche qui una ED del tipo (26) con $g(y) = \frac{1}{y}$ che rispetta il requisito (29) dato che il dominio di definizione delle y non contiene il valore 0. Poniamo $y' = \frac{dy}{dx}$ e operiamo la separazione delle variabili per trovare la soluzione generale:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{x}{y} \\ dy &= \frac{x}{y} dx \\ y dy &= x dx\end{aligned}$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$\begin{aligned}\int y dy &= \int x dx + c \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + c \\ y^2 &= x^2 + k \quad \text{per } k=2c\end{aligned}$$

Infine, risolvendo rispetto a y troviamo

$$y_+(x) = \sqrt{x^2 + k} \quad y_-(x) = -\sqrt{x^2 + k}, \quad (33)$$

due famiglie di soluzioni che , insieme, costituiscono la soluzione generale (ovvero la totalit  delle soluzioni ammissibili), con k costante arbitraria da determinarsi utilizzando la condizione iniziale assegnata. Usiamo ora la condizione iniziale data: poich    assegnato un valore negativo di $y(x)$ nel punto iniziale $x = 0$, possiamo usare solo il ramo $y_-(x)$ della soluzione generale ed otteniamo:

$$y(0) = -\sqrt{k} \quad \rightarrow \quad -\sqrt{k} = -2 \quad \rightarrow \quad k = 4$$

La soluzione al problema posto   allora

$$y(x) = -\sqrt{x^2 + 4}.$$

Notiamo che la condizione iniziale data ci permette di risolvere la indeterminazione intrinseca nella soluzione (33).

Esempio 2.3 *Si risolva il problema*

$$\begin{cases} y' = y^2 \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (34)$$

Soluzione generale Riconosciamo in (34) un'equazione della forma (26), con $h(x) = \cos x$ e $g(y) = y^2$, dove però $g(y)$ non rispetta sempre in generale il requisito (29). Per poter usare il metodo della separazione dobbiamo restringerci ai casi $g(y) \neq 0$, ovvero, data la forma di $g(y)$, ai casi in cui si abbia $y \neq 0$. nel caso in cui $y \neq 0$, poniamo $y' = \frac{dy}{dx}$ e operiamo la separazione delle variabili:

$$\begin{aligned} y' &= y^2 \cos x \\ dy &= y^2 \cos x dx \\ \frac{1}{y^2} dy &= \cos x dx \end{aligned}$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2} dy &= \int \cos x dx \\ \frac{-1}{y} &= \sin x + c \end{aligned}$$

Risolvendo ora rispetto ad y si ottiene la seguente soluzione dell'equazione (34):

$$y = \frac{-1}{\sin x + c} \quad (35)$$

L'espressione (35) rappresenta una famiglia di soluzioni (ad un parametro) che risolvono l'ED $y' = y^2 \cos x$. Possiamo dire di aver trovato la soluzione generale ? La risposta é negativa in quanto il metodo usato vale solo, come osservato, per $y \neq 0$, ovvero se $y(x)$ non coincide con la funzione, costante, nulla. Osserviamo che, per $y(x) = 0$ si ha $y' = 0$ e, sostituendo tali espressioni nella ED data essa risulta soddisfatta. Pertanto la funzione $y_0 = 0$ é una soluzione ammissibile e la soluzione generale della nostra ED

é data dall'insieme delle funzioni

$$\begin{cases} y_c(x) = \frac{-1}{\sin x + c} \text{ per } y \neq 0 \\ y_0(x) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Imponiamo ora la **condizioni iniziale**: $y(0) = 1$

Cerchiamo ora, tra le soluzioni ammissibili, la funzione che rispetti la condizione iniziale $y(0) = 1$. La funzione y_0 viene esclusa perché non la soddisfa mai. Limitiamo quindi la ricerca alle funzioni y_c . Usando la condizione iniziale assegnata; si ha:

$$y_c(0) = \frac{-1}{c} \rightarrow \frac{-1}{c} = 1 \rightarrow c = -1$$

La soluzione al problema posto é allora

$$y(x) = \frac{-1}{\sin x - 1}$$

Se invece la condizione iniziale data fosse stata $y(0) = 0$ dovremmo concludere che l'unica soluzione ammissibile era proprio $y_0 = 0$ (non esistendo alcun valore finito di c tale da avere $y_c(0) = 0$). Se però ammetto per c come possibile il valore $c = \infty$, allora avrei la soluzione $y_c(x) = 0$ per ogni x .

3 Equazioni lineari del primo ordine

Un' ED del primo ordine é detta lineare se ha la forma

$$a(x)y' + b(x)y = f(x).$$

La funzione $f(x)$ é detta il termine noto dell'equazione ed $a(x)$ e $b(x)$ sono i coefficienti non costanti rispettivamente della derivata prima e del termine non derivato.

Data un'ED lineare é sempre possibile porla in forma normale dividendo l'equazione per $a(x)$, supposta diversa da zero. Dunque ci concentreremo sui metodi risolutivi di equazioni lineari del tipo

$$y' + a(x)y = f(x)$$

Assumiamo nel seguito che $a(x)$ ed $f(x)$ siano funzioni continue, almeno in un certo dominio. Nel caso particolare in cui si abbia $f(x) = 0$ diremo che si ha una ED lineare *omogenea*, diversamente parleremo di ED *non omogenea*

$$\begin{cases} y' + a(x)y = 0 & \text{ED lineare omogenea} \\ y' + a(x)y = f(x) & \text{ED lineare non omogenea} \end{cases} \quad (37)$$

3.1 Problema omogeneo

Soluzione generale Studiamo ora il metodo risolutivo per le ED omogenee: la procedura é abbastanza semplice. In primo luogo osserviamo che le equazioni del tipo

$$y' + a(x)y = 0 \quad (38)$$

certamente ammettono tra le soluzioni la funzione nulla $y = 0$. Quando $y \neq 0$ la ED (38) non é altro che un caso particolare delle equazioni separabili (26), con $h(x) = -a(x)$ e $g(y) = y$, e pertanto é risolubile per separazione di variabili. L'aver discusso a parte il caso $y = 0$ ci permette di escluderlo da questa procedura e di soddisfare il requisito (29). Usando il metodo della separazione di variabile, poniamo $y' = \frac{dy}{dx}$ e otteniamo:

$$dy_0 = -a(x)ydx \text{ i.e. } \frac{1}{y}dy = -a(x)dx. \quad (39)$$

Integrando ambo i membri di (39) si ha:

$$\int \frac{1}{y}dy = - \int a(x)dx + c$$

$$\ln |y| = -A(x) + c$$

dove $A(x)$ é primitiva di $a(x)$. Risolvendo rispetto a y otteniamo

$$|y| = e^{-A(x)+c} = e^{-A(x)} \cdot e^c \Rightarrow \begin{cases} y = e^c \cdot e^{-A(x)} & y > 0 \\ y = -e^c \cdot e^{-A(x)} & y < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Definendo ora una nuova costante arbitraria k , dove $k = \pm e^c$ a seconda se y é maggiore o minore di zero, troviamo che la famiglia di soluzioni della ED (38) si scrive nella forma

$$y(x) = ke^{-A(x)} \quad k \neq 0 \quad (41)$$

La costante arbitraria $k = \pm e^c$, può essere positiva o negativa ma non nulla.

Per avere la soluzione generale della nostra ED, ovvero l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili dobbiamo però ricordarci, come osservato prima, che anche la funzione $y_0 = 0$ é una soluzione; possiamo includere la soluzione y_0 nella famiglia di soluzioni data da (41) semplicemente aggiungendo il caso $k = 0$. Pertanto possiamo concludere che, per equazioni di tipo (38) la soluzione generale prende la forma

$$y(x) = ke^{-A(x)}, \quad k \in R, \quad (42)$$

dove $A(x)$ é primitiva di $a(x)$, cioè $\frac{da(x)}{dx} = A(x)$.

Condizioni al contorno Studiamo ora il problema differenziale con una condizione al contorno assegnata:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (43)$$

Usiamo l'espressione della soluzione generale (42) ed imponiamo la condizione al contorno data; si ha:

$$y(x_0) = ke^{-A(x_0)} \rightarrow ke^{-A(x_0)} = y_0 \rightarrow k = y_0 e^{A(x_0)}$$

La soluzione al problema posto é allora:

$$y(x) = y_0 e^{A(x_0) - A(x)} \quad (44)$$

L'espressione (44) rappresenta la formula risolutiva per il problema (43).

Esempio 3.1 *Risolvere il problema*

$$\begin{cases} y' + y \cos x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (45)$$

Troviamo la soluzione generale per separazione di variabili: In questo caso $a(x) = \cos(x)$ e quindi la sua primitiva $A(x) = \sin(x)$. Quindi la soluzione generale della (45) é:

$$y(x) = ke^{-\sin x}, \quad (46)$$

dove k è una costante arbitraria $\in R$. Imponiamo ora la condizione al contorno assegnata:

$$y(0) = k \rightarrow k = 1$$

La soluzione al problema posto è allora:

$$y(x) = e^{-\sin x}.$$

3.2 Equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea: risoluzione con la tecnica della variazione delle costanti

Discutiamo ora il problema non omogeneo generale:

$$y' + a(x)y = f(x). \quad (47)$$

Prima di trattare la teoria generale della risoluzione delle equazioni (47) consideriamo **un esempio significativo**. Risolviamo la seguente ED:

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 \quad (48)$$

Studiamo in primo luogo il *problema omogeneo associato*, ovvero il problema

$$z' + \frac{z}{x} = 0 \quad (49)$$

Poiché abbiamo $a(x) = \frac{1}{x}$, ne consegue $A(x) = \ln|x|$ ed usando la formula risolutiva (42) otteniamo:

$$z(x) = ke^{-\ln|x|} = k \frac{1}{e^{\ln|x|}} = \frac{k}{|x|} \quad (50)$$

In virtù dell'arbitrarietà di k possiamo omettere il modulo e porre, come soluzione generale¹:

$$z(x) = \frac{k}{x} \quad k \in R \quad (51)$$

¹Rigorosamente si ha: $\frac{k}{|x|} = \frac{k}{x}$ se $x > 0$, $\frac{k}{|x|} = -\frac{k}{x}$ se $x < 0$. In entrambi i casi il segno di k non é specificato ed é arbitrario; entrambe le funzioni appartengono alla famiglia (51), ovvero la funzione $\frac{1}{x}$ moltiplicata per un parametro reale arbitrario.

L'espressione (51) rappresenta la soluzione generale del problema omogeneo (49), associato al problema non omogeneo (48); denotiamo d'ora in poi la soluzione dell'equazione omogenea (49) associata con la equazione non omogenea (48) con la dicitura $z(x) = y_{om}(x)$:

$$y_{om}(x) = \frac{k}{x} \quad k \in R \quad (52)$$

La conoscenza di $y_{om}(x)$ ci aiuterà adesso a risolvere il problema completo. Procediamo inizialmente per tentativi; supponiamo che la ED non omogenea ammetta soluzioni in qualche modo legate alla struttura dell'equazione omogenea: andiamo quindi a cercare soluzioni del tipo

$$y(x) = \frac{k(x)}{x}, \quad (53)$$

dove $k(x)$ é una funzione arbitraria di x da determinare. Si noti che $y()$ é costruita a partire da y_{om} sostituendo alla costante k una funzione generica $k(x)$; da ciò il metodo che stiamo impiegando prende il nome di **metodo della variazione delle costanti**. Per imporre che la funzione $y(x)$ sia una soluzione della equazione (48) inseriamo (53) nella (48) e imponiamo che essa sia soddisfatta. Differenziando la (53) si ha:

$$y' = \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2} \quad (54)$$

Inseriamo ora $y(x)$ data dalla (53) e y' data dalla (54) nella ED (48) ed otteniamo:

$$\left(\frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2} \right) + \frac{k(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = x^2. \quad (55)$$

I termini $k(x)$ si elidono a vicenda e quindi (55) diviene:

$$\frac{k'(x)}{x} = x^2 \quad \text{i.e.} \quad k'(x) = x^3 \quad (56)$$

Ne segue che $y(x)$ soddisfa l'ED (48)- e dunque ne é la soluzione - se esiste una funzione $k(x)$ che soddisfa l'equazione (56). Una tale $k(x)$ certamente esiste e si può determinare per integrazione diretta; si ha

$$k(x) = \int x^3 dx + k_0 = \frac{1}{4}x^4 + k_0,$$

ove k_0 é una costante. Nota $k(x)$ possiamo costruire la soluzione $y(x)$ della (48) e si ha:

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{k_0}{x} \quad (57)$$

La $y(x)$ cosí determinata rappresenta una famiglia di soluzioni che risolvono la nostra ED (48); é necessario però chiedersi se essa rappresenta la famiglia di tutte le soluzioni ammissibili, ovvero la soluzione generale dell'ED stessa. Dipendendo questa soluzione di un'equazione differenziale del primer ordine da una costante arbitraria k_0 , é la soluzione generale. Possiamo osservare inoltre che

$$y(x) = \frac{1}{4}x^4 + y_{om} \quad \text{con} \quad y = \frac{1}{4}x^4 \quad (58)$$

soluzione particolare dell'equazione (48).

Struttura della soluzione non omogenea: Supponiamo di aver trovato due diverse funzioni y_1 ed y_2 che risolvono l'equazione non omogenea

$$y' + a(x)y = f(x)$$

In questa ipotesi si ha allora:

$$\begin{aligned} y_1' + a(x)y_1 &= f(x) \\ y_2' + a(x)y_2 &= f(x) \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$\begin{aligned} y_1' - y_2' + a(x)y_1 - a(x)y_2 &= 0, \quad \text{i.e} \\ (y_1 - y_2)' + a(x)(y_1 - y_2) &= 0 \end{aligned}$$

Ma allora, detta $h(x) = y_1 - y_2$ la differenza delle due soluzioni si ha:

$$h' + a(x)h \equiv 0$$

Ne segue che $h(x)$ risolve l'equazione omogenea associata al problema completo e necessariamente si ha:

$$h(x) = y_{om}(x) \quad \rightarrow \quad y_1 = y_{om} + y_2$$

Quindi, due soluzioni qualsiasi del problema non omogeneo differiscono tra loro per una funzione appartenente alla famiglia y_{om} . Quindi, nota

una qualsiasi soluzione del problema non omogeneo, tutte le altre soluzioni ammissibili sono generate dall'aggiunta di una soluzione dell'equazione omogenea y_{om} . Rimane dimostrato allora il seguente teorema fondamentale:

Teorema 3.1 *Data un'equazione differenziale non omogenea*

$$y' + a(x)y = f(x),$$

detta $y_g(x)$ la sua soluzione generale, detta $y_{om}(x)$ la soluzione generale del problema omogeneo associato (corrispondente a $f(x) = 0$), detta $y_p(x)$ una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea si ha:

$$y_g(x) = y_{om}(x) + y_p(x) \quad (59)$$

In virtù di questo teorema riesaminiamo l'esempio (48) e la sua soluzione (57). Notiamo che $y(x)$, data da (57), contiene due contributi additivi: il termine $\frac{k_0}{x}$, ove riconosciamo $y_{om}(x)$ - si veda (52) - ed il termine $\frac{1}{4}x^3$; quest'ultimo termine rappresenta una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea (48), come si può verificare inserendolo nella ED e verificando che essa ne è soddisfatta. Pertanto $y(x)$ rispetta la struttura richiesta dal teorema 3.1 e rappresenta la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea.

Formalizziamo ora il metodo della variazione delle costanti in modo da mostrare come esso conduca a una formula risolutiva della soluzione generale di un'equazione differenziale non omogenea.

Metodo della variazione delle costanti. Consideriamo l'equazione differenziale non omogenea:

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (60)$$

In primo luogo risolviamo il problema omogeneo associato,

$$y'_{om} + a(x)y_{om} = 0. \quad (61)$$

In virtù della (42) si ha:

$$y_{om}(x) = k_0 e^{-A(x)}, \quad (62)$$

con $A(x)$ primitiva di $a(x)$ e k_0 costante arbitraria. Determiniamo una soluzione particolare della (60) tramite la *variazione delle costanti*, cioè sostituendo la costante k_0 con una generica funzione - da determinare - $k(x)$ e poniamo

$$y_p(x) = k(x)e^{-A(x)},$$

i.e.

$$y_p'(x) = k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} \quad \text{dato che } a(x) = A'(x)$$

Per trovare $k(x)$ inseriamo y_p e y_p' nell'ED (60); si ha:

$$k'(x)e^{-A(x)} = f(x) \quad \Rightarrow \quad k'(x) = f(x)e^{A(x)}.$$

E' possibile trovare $k(x)$ per integrazione diretta:

$$k(x) = \int f(x)e^{A(x)}dx + \ell. \quad (63)$$

Dato che abbiamo bisogno di una soluzione particolare, in tutta generalità possiamo scegliere $\ell = 0$ e inserendo $k(x)$ in (63) una soluzione particolare y_p é data da

$$y_p = e^{-A(x)} \left[\int f(x)e^{A(x)}dx \right] \quad (64)$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y_g = y_p + y_{om} = e^{-A(x)} \left[\int f(x)e^{A(x)}dx + k_0 \right] \quad (65)$$

Infine, sul modello di quanto fatto per l'eq. (44) é possibile dare una formula risolutiva che tenga conto di una condizione al contorno $y(x_0) = y_0$. In questo caso vale la seguente formula:

$$y_g = e^{-A(x)} \left[\int_{x_0}^x f(s)e^{A(s)}ds + y_0e^{A(x_0)} \right] \quad (66)$$

Esempio 3.2 *Risolvere il problema*

$$\begin{cases} y' + y \cos x = 2 \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (67)$$

Potremmo cercare prima la soluzione dell'equazione omogenea associata e poi una soluzione particolare, ma é preferibile usare la formula risolutiva (66). In questo caso per $a(x) = \cos x$ si ha $A(x) = \sin x$; inoltre $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e quindi $f(s)e^{A(s)} = 2 \cos s e^{\sin s}$. Complessivamente si ha:

$$y_g = \int_{x_0}^x f(s)e^{A(s)} ds = \int_0^x 2 \cos s e^{\sin s} ds = 2e^{\sin s} \Big|_0^x = 2e^{\sin x} - 2$$

4 Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti

Esaminiamo ora un caso particolare di ED lineari del primo ordine in cui i coefficienti sono costanti, i.e.

$$ay' + by = g(x), \quad (68)$$

dove a e b sono delle costanti. In presenza di una condizione iniziale dobbiamo risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} ay' + by = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (69)$$

che viene usualmente detto **problema di Cauchy**.

Una equazione differenziale del primo ordine con coefficienti costanti ammette sempre una soluzione e tale soluzione, se in presenza di condizioni al contorno o dati iniziali é unica. Per la ricerca della soluzione valgono tutti i teoremi ed i metodi risolutivi già discussi; tuttavia il fatto che i coefficienti siano costanti porta a delle semplificazioni che vale la pena sottolineare.

4.1 Problema omogeneo

In questo caso l'equazione differenziale diviene:

$$ay' + by = 0, \quad (70)$$

o, se $a \neq 0$, possiamo riscriverla nella seguente forma normale:

$$y' + \frac{b}{a}y = 0 \quad (71)$$

Risolvendo l'equazione (71) con il metodo di separazione delle variabili, o direttamente usando la formula risolutiva (42) otteniamo:

$$y(x) = ke^{\lambda x} \quad \text{con } \lambda = -\frac{b}{a} \quad (72)$$

Tale espressione é la formula risolutiva per i problemi omogenei del tipo (70) e rappresenta un risultato generale:

tutte le ED del primo ordine a coefficienti costanti ammettono come soluzione generale una funzione esponenziale.

E' possibile ricavare lo stesso risultato prendendo una soluzione del tipo $y(x) = ke^{\lambda x}$ e sostituendo tale espressione in (70). Si ottiene

$$ak\lambda e^{\lambda x} + bke^{\lambda x} = 0 \quad \rightarrow a\lambda + b = 0 \quad \rightarrow \lambda = -\frac{b}{a}$$

Val la pena notare inoltre che quando, come nel nostro caso, $a(x) = \lambda$ é costante allora $A(x) = \lambda x$ coerentemente col risultato (72) e quindi (72) coincide con (62).

4.2 Problema non omogeneo

In questo caso l'equazione che dobbiamo risolvere é la (68) con $A(x) = -\lambda x$ ed $f(x) = \frac{1}{a}g(x)$. Utilizzando la formula risolutiva per l'equazione differenziale (60) é data da (65). Tenendo in conto il valore di $A(x)$ in questo caso, abbiamo:

$$y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{a} \left[\int g(s)e^{-\lambda s} + k_0 \right]. \quad (73)$$

metodo dei coefficienti indeterminati. In luogo del metodo di variazione delle costanti, per alcuni tipi di ED si puó usare il *metodo dei coefficienti indeterminati*, che qui descriviamo. Consideriamo nuovamente l'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti

$$ay' + by = f(x). \quad (74)$$

- Possiamo applicare il metodo dei coeff. indeterminati se la funzione $f(x)$ appartiene alla classe di funzioni

$$f(x) = e^{\omega x} p_n(x) \quad \text{con } \omega \in R, \text{ e } p_n(x) \text{ polinomio di grado } n \quad (75)$$

- L'obiettivo è trovare una soluzione particolare, e poi costruire la soluzione generale usando il Teorema 3.1; la soluzione di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti (72) è un'esponenziale $y_{om} = k_0 e^{\lambda x}$ e si ha:

$$y_g(x) = k_0 e^{\lambda x} + y_p(x)$$

- Per ricavare $y_p(x)$ col metodo dei coefficienti indeterminati applico le seguenti procedure:
- Nel caso in cui $\omega \neq \lambda$ (l'esponenziale presente nel termine non omogeneo non coincide con l'esponenziale presente nella soluzione omogenea), si pone

$$y_p(x) = e^{\omega x} q_n(x), \quad (76)$$

dove $q_n(x)$ è un polinomio di grado pari a $p_n(x)$, con coefficienti arbitrari; i coefficienti vengono definiti inserendo $y_p(x)$ nell'ED (74) e richiedendo che essa sia soddisfatta.

- nel caso in cui $\omega = \lambda$ (l'esponenziale presente nel termine non omogeneo coincide con l'esponenziale presente nella soluzione omogenea), si pone

$$y_p(x) = x e^{\omega x} q_n(x), \quad (77)$$

ovvero si procede come nel caso precedente, con l'aggiunta del fattore moltiplicativo x .

Passiamo ora ad applicare la teoria descritta nel caso di alcuni esempi di equazioni del tipo (74):

Esempio 4.1 *Risolvere il problema*

$$\begin{cases} y' + 2y = f(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (78)$$

nei casi in cui $f(x)$ è data da a) e^{3x} , b) $x^2 - 1$, c) $x e^x$, d) $3e^{-2x}$, e) $2x e^{-2x}$

Indipendentemente dalla forma del termine non omogeneo, il primo passo è sempre risolvere il problema omogeneo associato; cerchiamo allora soluzioni del tipo esponenziale, $y_{om} = k_0 e^{\lambda x}$, e, in questo caso, si ha $\lambda = -2$, i.e.

$$y_{om}(x) = k e^{-2x}$$

Passiamo ora a risolvere i problemi non omogenei:

- Caso a): $f(x) = e^{3x}$

Osserviamo che $f(x)$ appartiene alla famiglia (75) per $\omega = 3$ e $p(x) = 1$, polinomio di grado zero. Poiché $\omega \neq \lambda$ usiamo la formula (76) e postuliamo una soluzione particolare del tipo:

$$y_p(x) = A e^{3x}$$

con A coefficiente incognito da determinare. Inseriamo $y_p(x)$ nell'ED di partenza e otteniamo

$$\begin{aligned} 3Ae^{3x} + 2Ae^{3x} &= e^{3x} \\ A &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione generale dell'ED non omogenea è

$$y_g(x) = k_0 e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$$

Infine, imponendo la condizione iniziale data, si trova:

$$y(0) = k + \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad k + \frac{1}{5} = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{5}$$

La soluzione al problema di Cauchy (78) è allora:

$$y(x) = \frac{4}{5} e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x} \tag{79}$$

- Caso b): $f(x) = x^2 - 1$

Osserviamo che $f(x)$ appartiene alla famiglia (75) per $\omega = 0$ e $p(x) = x^2 - 1$, polinomio di secondo grado. Poichè $\omega \neq \lambda$ usiamo la formula (76) e si ha:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

con A, B, C coefficienti costanti da determinare. Inseriamo $y_p(x)$ nell'ED di partenza e otteniamo

$$\begin{aligned}(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) &= x^2 - 1, \text{ i.e.} \\ 2Ax^2 + (2A + 2B)x + B + 2C &= x^2 - 1\end{aligned}$$

Andando ad uguagliare i termini di pari potenza di x si ha:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \\ B + 2C = -1 \end{cases} \quad (80)$$

Questo sistema ha per soluzione ($A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{4}$). Pertanto la soluzione generale dell'ED non omogenea é

$$y_g(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Infine, imponendo la condizione al contorno, si trova:

$$y(0) = k + \frac{3}{4} \rightarrow k + \frac{3}{4} = 1 \rightarrow k = \frac{1}{4}$$

La soluzione al problema di Cauchy é allora:

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad (81)$$

- Caso c): $f(x) = xe^x$

Osserviamo che $f(x)$ appartiene alla famiglia (75) per $\omega = 1$ e $p(x) = x$, polinomio di primo grado. Poichè $\omega \neq \lambda$ usiamo la formula (76) e si ha:

$$y_p(x) = (Ax + B)e^x$$

con A, B coefficienti costanti da determinare. Inseriamo $y_p(x)$ nell'ED (78) e otteniamo

$$\begin{aligned}(Ax + B)e^x + Ae^x + 2(Ax + B)e^x &= xe^x, \text{ i.e. dividendo per } e^x \\(Ax + B) + A + 2(Ax + B) &= x \\3Ax + 2B + A &= x\end{aligned}$$

Uguagliando i termini di pari potenza in x , si ha:

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 2B + A = 0 \end{cases} \quad (82)$$

Questo sistema ha per soluzione ($A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{6}$). Pertanto la soluzione generale dell'ED non omogenea (78) é

$$y_g(x) = ke^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right)e^x.$$

Infine, imponendo la condizione iniziale si ha:

$$y(0) = k - \frac{1}{6} \rightarrow k - \frac{1}{6} = 1 \rightarrow k = \frac{7}{6}$$

La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y(x) = \frac{7}{6}e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right)e^x. \quad (83)$$

- Caso d): $f(x) = 3e^{-2x}$

Osserviamo che $f(x)$ appartiene alla famiglia (75) per $\omega = -2$ e $p(x) = 3$, polinomio di grado zero. Poichè $\omega = \lambda$ usiamo la formula (77) e abbiamo:

$$y_p(x) = Axe^{-2x}$$

con A coefficiente costante da determinare. Inserendo $y_p(x)$ nell'ED di partenza si ottiene che questa é soddisfatta quando $A = 3$. La soluzione generale dell'ED non omogenea (78) é allora

$$y_g(x) = ke^{-2x} + 3xe^{-2x}.$$

Infine, imponendo la condizione iniziale, si trova:

$$y(0) = k \quad \rightarrow \quad k = 1$$

La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y(x) = e^{-2x} (3x + 1) . \quad (84)$$

- Caso e): $f(x) = 2xe^{-2x}$

Osserviamo che $f(x)$ appartiene alla famiglia (75) con $\omega = -2$ e $p(x) = 2x$, polinomio di primo grado . Poichè $\omega = \lambda$ usando la formula (77) si ha:

$$y_p(x) = x (Ax + B) e^{-2x}$$

con A e B coefficienti costanti da determinare. Inserendo $y_p(x)$ nell'ED di partenza si ottiene la condizione

$$2Ax + B = 2x ,$$

ovvero si ha ($A = 1$, $B = 0$). La soluzione generale dell'ED non omogenea é allora

$$y_g(x) = ke^{-2x} + x^2e^{-2x} .$$

Infine, imponendo la condizione iniziale, si trova:

$$y(0) = k \quad \rightarrow \quad k = 1$$

La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y(x) = e^{-2x} (x^2 + 1) . \quad (85)$$

5 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Trattiamo ora le ED del secondo ordine, ma solo nel caso di equazioni lineari e a coefficienti costanti:

$$ay'' + by' + cy = f(x) , \quad a, b, c \in R , \quad (86)$$

Per prima cosa consideriamo **un esempio** semplice:

$$y'' - 4y = 0 \quad (87)$$

Come si può mostrare per verifica diretta le funzioni $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$ sono soluzioni dell'equazione data. Inoltre, sempre per prova diretta, si può verificare che la funzione $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$, con c_1 e c_2 costanti arbitrarie è una soluzione dell'equazione data dipendente da due costanti arbitrarie. In effetti, dato che dipende da due costanti arbitrarie, essa rappresenta, come vedremo in seguito, la soluzione generale dell'ED (87). Emerge da questo esempio un tratto distintivo delle ED di secondo ordine rispetto a quelle di primo ordine: **la soluzione generale contiene due costanti arbitrarie** ed è generata dalla combinazione lineare di due soluzioni indipendenti $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ (tali cioè che $y_2(x) \neq \alpha y_1(x)$).

Vale quindi il seguente teorema:

Teorema 5.1 *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea*

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (88)$$

La soluzione generale del problema dato esiste ed è data da

$$y_{om} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (89)$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie, e $y_1(x)$, $y_2(x)$ soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea (88).

Le due soluzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ sono dette indipendenti se verificano l'equazione

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0 \quad (90)$$

Per quanto riguarda la soluzione di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea vale un teorema analogo a 3.1:

Teorema 5.2 *Data un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine non omogenea*

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

detta $y_g(x)$ la soluzione generale di tale problema, detta $y_{om}(x)$ la soluzione generale del problema omogeneo associato e detta $y_p(x)$ una qualsiasi soluzione particolare del problema completo si ha:

$$y_g(x) = y_{om}(x) + y_p(x) \quad (91)$$

Infine, consideriamo il problema di Cauchy del secondo ordine, che usualmente si pone nella seguente forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (92)$$

Anche in tal caso vale un teorema secondo il quale la soluzione del problema esiste sempre ed é unica.

5.1 Problema omogeneo

Descriviamo qui il metodo generale per risolvere un'equazione differenziale omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in R, \quad (93)$$

ovvero per trovare le soluzioni indipendenti $y_{om}^{(1)}$ ed $y_{om}^{(2)}$.

Prendendo a modello quanto abbiamo fatto nel caso delle analoghe ED del primo ordine, cerchiamo soluzioni elementari in forma esponenziale, del tipo $y = e^{\lambda x}$; se tale funzione é una soluzione dell'ED (93), allora, per le proprietà della derivata di una funzione esponenziale, si deve avere

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

ovvero dividendo l'equazione precedente per $e^{\lambda x}$:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (94)$$

L'espressione $a\lambda^2 + b\lambda + c$ è detta **polinomio caratteristico** e l'equazione scritta rappresenta la condizione che deve soddisfare l'esponente λ affinché

$y = e^{\lambda x}$ sia soluzione dell'ED (93). Risolvendo l'equazione algebrica del secondo ordine (94) per λ si ha:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dove

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Possono a questo punto verificarsi tre casi che andiamo a trattare separatamente.

1. Caso $\Delta > 0$

In questo caso l'equazione caratteristica ammette due soluzioni reali e distinte:

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \lambda_{1,2} \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Otteniamo allora due soluzioni distinte:

$$y_{om}^{(1)}(x) = e^{\lambda_1 x} \quad y_{om}^{(2)}(x) = e^{\lambda_2 x}$$

In virtù della condizione $\lambda_1 \neq \lambda_2$ il requisito (90) é soddisfatto, le due soluzioni $y_{om}^{(1)}(x)$ e $y_{om}^{(2)}(x)$ sono indipendenti e la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea del secondo ordine é data dal teorema 5.1:

$$y_{om} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad c_1, c_2 \in R \quad (95)$$

2. Caso $\Delta = 0$

In questo caso l'equazione caratteristica ammette due soluzioni coincidenti, ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$\lambda = -\frac{b}{2a}.$$

Di conseguenza la funzione

$$y_{om}^{(1)}(x) = e^{\lambda x}$$

é soluzione della ED (93), ma per costruire la soluzione generale, ai sensi del teorema 5.1, abbiamo bisogno di una seconda soluzione, indipendente, che soddisfi la condizione (90). La funzione che cerchiamo é data da

$$y_{om}^{(2)}(x) = xe^{\lambda x}.$$

Lo studente può verificare con un calcolo diretto che, per $\lambda = -\frac{b}{2a}$ e $\Delta = 0$, la funzione $y_{om}^{(2)}(x)$ é soluzione della ED (93) e controllare che $y_{om}^{(1)}(x)$ ed $y_{om}^{(2)}(x)$ soddisfano la condizione (90).

Allora, la soluzione generale in questo caso é data da:

$$y_{om} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} \quad c_1, c_2 \in R \quad (96)$$

3. Caso $\Delta < 0$

In questo caso l'equazione caratteristica non ammette soluzioni reali; per risolvere l'equazione é necessario introdurre i numeri complessi. In primo luogo si ha:

$$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta},$$

dove, dato che $\Delta < 0$, $\sqrt{-\Delta}$ é un numero reale. Risulta allora:

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Quindi le radici del polinomio caratteristico sono distinte, complesse, e come si può osservare, coniugate tra loro, in quanto risulta $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$. Per semplicitá possiamo riscrivere i numeri complessi λ_1 e λ_2 in termini della loro parte reale α ed immaginaria β , i.e.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad (97)$$

con

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad (98)$$

Le soluzioni elementari sono allora della forma

$$y_{om}^{(1)}(x) = e^{\lambda_1 x} \quad y_{om}^{(2)}(x) = e^{\lambda_2 x} \quad (99)$$

come accade peraltro anche nel caso $\Delta = 0$, e si verifica che esse rispettano la condizione (90), con l'importante differenza che ora

abbiamo a che fare con funzioni complesse. La soluzione generale dell'ED sarà ancora della forma (95), ai sensi del teorema 5.1, ma , avendo introdotto funzioni complesse, in generale potranno essere complesse anche le costanti c_1, c_2 . Tuttavia, per ED a coefficienti reali, quali stiamo esaminando in queste dispense, vale un importante risultato:

le costanti complesse c_1, c_2 non sono indipendenti tra loro ma sono coniugate, al pari delle radici λ_1, λ_2 .

La forma generale della soluzione é allora:

$$y_{om} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_2 = \bar{c}_1 \in C. \quad (100)$$

Alternativamente, riscrivendo λ_1 e λ_2 in termini di due costanti reali date della sua parte reale α e parte immaginaria β , si può mettere in evidenza un esponenziale reale, e si ha:

$$y_{om} = e^{\alpha x} (c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}), \quad c_2 = \bar{c}_1 \in C. \quad (101)$$

Ricordiamo ora che, dato un numero complesso qualsiasi $z = x + iy$, la somma $z + \bar{z} = x + iy + (x - iy) = 2x$ produce un numero reale. Nella 101 l'argomento dentro parentesi é dato dalla funzione complessa $z_1(x) = c_1 e^{i\beta x}$ sommata alla sua funzione complessa coniugata $z_2(x) = c_2 e^{-i\beta x}$; in virtù delle relazioni $c_1 = \bar{c}_2$ e $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, si ha $z_2 = \bar{z}_1$ e allora y_{om} é una funzione reale.

E' possibile - e consigliabile- evidenziare questa circostanza esprimendo la soluzione generale in forma manifestamente reale, usando la formula di Eulero, che ricordiamo:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Si ha:

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$$

Sostituendo in (101) si ottiene:

$$\begin{aligned} y_{om} &= e^{\alpha x} [c_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ y_{om} &= e^{\alpha x} [(c_1 + c_2) \cos \beta x + i(c_1 - c_2) \sin \beta x] \end{aligned}$$

Le combinazioni $(c_1 + c_2)$ e $i(c_1 - c_2)$, poiché $c_1 = \bar{c}_2$ sono numeri reali; possiamo allora porre genericamente $A = (c_1 + c_2)$ e $B = i(c_1 - c_2)$ e scrivere la soluzione come una funzione reale a vista:

$$y_{om} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad A, B \in R \quad (102)$$

L'espressione (102) é una formulazione alternativa a (100) e (101). Esistono altre due formulazioni equivalenti ed alternative, altrettanto valide:

$$y_{om} = e^{\alpha x} (L \cos(\beta x + \phi)) \quad L, \phi \in R \quad (103)$$

$$y_{om} = e^{\alpha x} (M \sin(\beta x + \delta)) \quad M, \delta \in R \quad (104)$$

Per mostrare l'equivalenza di (103) con (102) osserviamo poiché vale la formula

$$\cos(\beta x + \phi) = \cos \beta x \cos \phi - \sin \beta x \sin \phi,$$

e quindi possiamo sempre definire

$$A = L \cos \phi \quad B = -L \sin \phi.$$

In maniera analoga, usando la formula di addizione per il seno $\sin(\beta x + \phi) = \sin \beta x \cos \phi + \cos \beta x \sin \phi$, si mostra l'equivalenza di (104) con (102).

Passiamo ora ad applicare la teoria esposta ad alcuni esempi esplicativi.

Esempio 5.1 *Si risolva il problema*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (105)$$

L'equazione caratteristica é: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, reali e distinte. Pertanto si ha:

$$y_{om} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad c_1, c_2 \in R$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali. Si ha:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1 \quad (106)$$

La soluzione del problema di Cauchy é allora

$$y = e^{-x} - e^{-2x}$$

Esempio 5.2 *Si risolva il problema*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (107)$$

L'equazione caratteristica é: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ che ha due soluzioni reali e coincidenti, $\lambda = -1$. Pertanto si ha:

$$y_{om} = (c_1 + c_2 x)e^{-x} \quad c_1, c_2 \in R$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali. Si ha:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 1 \quad (108)$$

La soluzione del problema di Cauchy é allora

$$y = xe^{-x}$$

Esempio 5.3 *Si risolva il problema*

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (109)$$

L'equazione caratteristica é $\lambda^2 + 9 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$, valori complessi coniugati. Siamo nel terzo dei casi discussi in generale ed vediamo ora come scrivere la soluzione e trattare le condizioni iniziali con le varie formule risolutive proposte.

Usando la formula (100) abbiamo:

$$y_{om} = c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}, \quad c_1 = \bar{c}_2 \in C. \quad (110)$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali. Si ha:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3ic_1 - 3ic_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2} \quad (111)$$

Notiamo che i coefficienti sono uguali e reali, il che coincide con un caso particolare in cui la condizione $c_1 = \bar{c}_2 \in C$ é banalmente soddisfatta. La soluzione del problema di Cauchy é allora

$$y = \frac{1}{2} e^{3ix} + \frac{1}{2} e^{-3ix}$$

Usando infine le formule di Eulero

$$e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x \quad e^{-3ix} = \cos 3x - i \sin 3x$$

si ha infine:

$$y = \cos 3x$$

Usiamo ora la formula (102) ; per $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$ si ha $\alpha = 0$ e $\beta = 3$. Pertanto si ha:

$$y_{om} = A \cos 3x + B \sin 3x \quad A, B \in R$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali. Si ha:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3B = 0 \end{cases} \rightarrow A = 1, B = 0 \quad (112)$$

La soluzione del problema di Cauchy é allora nuovamente

$$y = \cos 3x$$

Usiamo ora la formula (103) ; per $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$ si ha come prima $\alpha = 0$ e $\beta = 3$. Pertanto in questo caso si ha:

$$y_{om} = L \cos(3x + \phi) \quad L, \phi \in R$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali. Si ha:

$$\begin{cases} L \cos \phi = 1 \\ -3L \sin \phi = 0 \end{cases} \rightarrow \phi = 0, L = 1 \quad (113)$$

La soluzione del problema di Cauchy é nuovamente

$$y = \cos 3x$$

In maniera analoga, usando la (104) possiamo scrivere

$$y_{om} = M \sin(3x + \delta) \quad M, \delta \in R \quad (114)$$

e, imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} M \sin \delta = 1 \\ 3M \cos \delta = 0 \end{cases} \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}, M = 1 \quad (115)$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy é

$$y = \sin(3x + \frac{\pi}{2}) = \cos 3x$$

5.2 Problema non omogeneo: soluzione tramite i coefficienti indeterminati

Affrontiamo ora il caso di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, limitandoci a discutere i casi che possono essere risolti con il metodo dei coefficienti indeterminati. Descriviamo qui la procedura da adottare, che riprende ed amplia quanto già discusso per le ED del primo ordine.

Consideriamo l'equazione

$$ay'' + by' + cy = f(x). \quad (116)$$

Il metodo dei coefficienti indeterminati si applica se il termine non omogeneo è $f(x)$ è del tipo

$$f(x) = e^{\omega x} [p_1(x) \cos \gamma x + p_2(x) \sin \gamma x], \quad (117)$$

dove ω e γ sono dei parametri reali, e $p_1(x)$ e $p_2(x)$ dei polinomi. L'espressione $[p_1(x) \cos \gamma x + p_2(x) \sin \gamma x]$ è detta polinomio trigonometrico.

L'obiettivo è trovare una soluzione particolare, e poi costruire la soluzione generale usando il Teorema 5.2;

$$y_g(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$$

La forma di $y_{om}(x)$ è stata descritta nella sottosezione precedente e varia in funzione delle proprietà algebriche delle radici λ_1 e λ_2 del polinomio caratteristico.

Il metodo dei coefficienti indeterminati permette di ricavare $y_p(x)$ con i seguenti passi:

- Caso $\omega \pm i\gamma \neq (\lambda_1, \lambda_2)$. In questo caso si ha

$$y_p(x) = e^{\omega x} [q_1(x) \cos \gamma x + q_2(x) \sin \gamma x], \quad (118)$$

dove $q_1(x)$ e $q_2(x)$ sono polinomi di grado pari al più alto tra i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$, e con coefficienti incogniti; i coefficienti si trovano inserendo questa soluzione $y_p(x)$ nell'ED e richiedendo che essa sia soddisfatta.

- Caso $\omega \pm i\gamma = \lambda_1, \neq \lambda_2$, oppure $\omega \pm i\gamma = \lambda_2, \neq \lambda_1$. In questo caso si ha

$$y_p(x) = x e^{\omega x} [q_1(x) \cos \gamma x + q_2(x) \sin \gamma x], \quad (119)$$

ovvero si procede come nel caso precedente, con l'aggiunta del fattore moltiplicativo x .

- Caso $\omega \pm i\gamma = \lambda_1 = \lambda_2$. In questo caso si ha

$$y_p(x) = x^2 e^{\omega x} [q_1(x) \cos \gamma x + q_2(x) \sin \gamma x], \quad (120)$$

ovvero si procede come nel caso iniziale con l'aggiunta del fattore moltiplicativo x^2 .

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione della teoria presentata.

Esempio 5.4 *Data l'ED*

$$y'' + 3y' + 2y = f(x), \quad (121)$$

costruiamo col metodo dei coefficienti indeterminati, la forma della soluzione particolare nei casi in cui $f(x)$ assume le seguenti espressioni

$$1) e^{2x} \quad 2) x^2 + 1 \quad 3) xe^x \quad 4) \sin 3x$$

$$5) e^{2x} \cos x \quad 6) x \sin x \quad 7) e^x(x \cos x + 2 \sin x)$$

In primo luogo scriviamo il polinomio caratteristico, $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ e ne determiniamo le radici:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

Tali radici andranno confrontate con le combinazioni $\omega \pm i\gamma$ provenienti dal termine non omogeneo

$$1. e^{2x}$$

Si ha:

$$\omega = 2 \quad \gamma = 0 \quad \omega \pm i\gamma = 2$$

$$p_1(x) = 1 \quad \text{polinomio di grado zero}$$

$$p_2(x) \quad \text{polinomio indeterminato, ed irrilevante in quanto moltiplicato per } \sin \gamma x = 0$$

Ne consegue:

$$q_1(x) = A \quad q_2(x) \quad \text{irrilevante in quanto moltiplicato per } \sin \gamma x = 0$$

Dato che $2 \neq \lambda_1$, $2 \neq \lambda_2$ si ha:

$$y_p(x) = Ae^{2x} \quad (122)$$

Sostituendo (122) nella ED (121) otteniamo $4Ae^{2x} + 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x}$ i.e. $A = 1/12$.

2. $x^2 + 1$

Si ha:

$$\omega = 0 \quad \gamma = 0 \quad \omega \pm i\gamma = 0$$

$$p_1(x) = x^2 + 1 \quad \text{polinomio di grado due}$$

$$p_2(x) \quad \text{polinomio indeterminato, ed irrilevante in quanto moltiplicato per } \sin \gamma x = 0$$

Ne segue:

$$q_1(x) = Ax^2 + Bx + C \quad q_2(x) \quad \text{polinomio irrilevante in quanto moltiplicato per } \sin \gamma x = 0$$

Infine, dato che $0 \neq \lambda_1$, $0 \neq \lambda_2$ si ha:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (123)$$

Sostituendo (123) nella ED (121) otteniamo $2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$ i.e. il sistema

$$2A = 1, \quad 6A + 2B = 0, \quad 2A + 3B + 2C = 1$$

la cui soluzione é $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{9}{4}$.

3. xe^x

Si ha:

$$\omega = 1 \quad \gamma = 0 \quad \omega \pm i\gamma = 1$$

$$p_1(x) = x \quad \text{polinomio di primo grado}$$

$$p_2(x) \quad \text{polinomio indeterminato, ed irrilevante in quanto moltiplicato per } \sin \gamma x = 0$$

Ne consegue:

$$q_1(x) = Ax + B \quad q_2(x) \quad \text{polinomio irrilevante in quanto moltiplicato per } \sin \gamma x = 0$$

Infine, per $1 \neq \lambda_1$, $1 \neq \lambda_2$ si ha:

$$y_p(x) = (Ax + B)e^x \quad (124)$$

Sostituendo (124) nella ED (121) otteniamo $(Ax + 2A + B)e^x + 3(Ax + A + B)e^x + 2(Ax + B)e^x = xe^x$ i.e. il sistema

$$6A = 1, \quad 5A + 6B = 0$$

la cui soluzione é $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{5}{36}$.

4. $\sin 3x$

Si ha:

$$\begin{aligned}\omega &= 0 & \gamma &= 3 & \omega \pm i\gamma &= \pm 3i \\ p_1(x) &= 0 & & \text{polinomio di grado zero} \\ p_2(x) &= 1 & & \text{polinomio di grado zero}\end{aligned}$$

Ne consegue:

$$q_1(x) = A \quad q_2(x) = B$$

Infine, per $\pm 3i \neq \lambda_1$, $\pm 3i \neq \lambda_2$ si ha:

$$y_p(x) = A \cos 3x + B \sin 3x \quad (125)$$

Sostituendo (125) nella ED (121) otteniamo $-9A \cos 3x - 9B \sin 3x + 3[-3A \sin 3x + 3B \cos 3x] + 2[A \cos 3x + B \sin 3x] = \sin 3x$ i.e. il sistema

$$2A = 0, \quad -16B = 1$$

la cui soluzione é $A = 0$, $B = -\frac{1}{16}$.

5. $e^{2x} \cos x$

Si ha:

$$\begin{aligned}\omega &= 2 & \gamma &= 1 & \omega \pm i\gamma &= 2 \pm i \\ p_1(x) &= 1 & & \text{polinomio di grado zero} \\ p_2(x) &= 0 & & \text{polinomio di grado zero}\end{aligned}$$

Ne consegue:

$$q_1(x) = A \quad q_2(x) = B$$

Infine, per $2 \pm i \neq \lambda_1$, $2 \pm i \neq \lambda_2$ si ha:

$$y_p(x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x) \quad (126)$$

Sostituendo (126) nella ED (121) otteniamo $[(3A+4B) \cos x + (3B-4A) \sin x]e^{2x} + 3[(2A+B) \cos x + (2B-A) \sin x]e^{2x} + 2[A \cos x + B \sin x]e^{2x} = \cos x e^{2x}$ i.e. il sistema $11A+9B=1$, $2A+8B=0$ la cui soluzione é $A = \frac{1}{9}$, $B = -\frac{1}{36}$.

6. $x \sin x$

Si ha:

$$\begin{aligned}\omega &= 0 & \gamma &= 1 & \omega \pm i\gamma &= \pm i \\ p_1(x) &= 0 & & & & \text{polinomio di grado zero} \\ p_2(x) &= x & & & & \text{polinomio di primo grado}\end{aligned}$$

Ne consegue:

$$q_1(x) = Ax + B \quad q_2(x) = Cx + D$$

Infine, per $\pm i \neq \lambda_1$, $\pm i \neq \lambda_2$ si ha:

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \quad (127)$$

Sostituendo (127) nella ED (121) otteniamo $(-Ax + 2C - B) \cos x - (Cx + 2A + D) \sin x + 3[(Cx + A + D) \cos x + (-Ax + C - B) \sin x] + 2[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x] = x \sin x$ i.e. il sistema $A + 3C = 0$, $C - 3A = 1$, $2C + B + 3A + 3D = 0$, $-2A + D + 3C - 3B = 0$ la cui soluzione é $A = -\frac{3}{10}$, $B = \frac{23}{20}$, $C = \frac{1}{10}$, $D = -\frac{3}{20}$.

7. $e^x(x \cos x + 2 \sin x)$

Si ha:

$$\begin{aligned}\omega &= 1 & \gamma &= 1 & \omega \pm i\gamma &= 1 \pm i \\ p_1(x) &= x & & & & \text{polinomio di primo grado} \\ p_2(x) &= 2 & & & & \text{polinomio di grado zero}\end{aligned}$$

Ne consegue:

$$q_1(x) = Ax + B, \quad q_2(x) = Cx + D$$

Infine, per $1 \pm i \neq \lambda_1$, $1 \pm i \neq \lambda_2$ si ha:

$$y_p(x) = e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x] \quad (128)$$

Sostituendo (128) nella ED (121) otteniamo $e^x[(2Cx + 2D + 2A + 2C) \cos x - (2Ax + 2A + 2B - 2C) \sin x] + 3e^x[((A + C)x + B + A +$

$D) \cos x + ((C - A)x + D + C - B) \sin x] + 2e^x[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x] = e^x[x \cos x + 2 \sin x]$ i.e. il sistema $5(C + A) = 1$, $C - A = 0$, $5(A + D + B) + 2C = 0$, $5(C + D - B) - 2A = 2$ la cui soluzione é $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{6}{25}$, $C = \frac{1}{10}$, $D = \frac{1}{10}$.

Esempio 5.5 *Ripetiamo lo studio dell'esempio precedente, con le medesime funzioni $f(x)$ per le seguenti ED:*

$$A) : y'' + y' - 2y = f(x)$$

$$B) : y'' + 9y = f(x)$$

$$C) : y'' - 4y' + 2y = f(x)$$

$$D) : y'' - 2y' + \frac{5}{4}y = f(x)$$

Rispetto all'ED dell'esempio precedente, la forma della soluzione particolare rimane inalterata, a meno che non si verifichi la coincidenza $\omega \pm i\gamma = \lambda_1, \lambda_2$, nel qual caso si moltiplica per x , o la doppia coincidenza $\omega \pm i\gamma = \lambda_1 = \lambda_2$.

Per l'ED A) abbiamo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ e non si verificano mai coincidenze a parte il caso 3), dove scriveremo

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^x$$

Lasciamo allo studente il calcolo dei valori di A e B per cui sono soluzione. Per l'ED B) abbiamo $\lambda_{1,2} = \pm 3i$ e si verifica una coincidenza nel caso 4), dove scriveremo

$$y_p(x) = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

Lasciamo allo studente il calcolo dei valori di A e B per cui sono soluzione. Per l'ED C) abbiamo $\lambda_{1,2} = 2$; le radici sono uguali e si verifica una coincidenza, doppia, nel caso 1), dove scriveremo

$$y_p(x) = x^2 A e^{2x}$$

Lasciamo allo studente il calcolo del valore di A per cui é soluzione. Per l'ED D) abbiamo $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ e si verifica una coincidenza nel caso 5), dove scriveremo

$$y_p(x) = x e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$$

Lasciamo allo studente il calcolo dei valori di A e B per cui sono soluzione.

Esempio 5.6 *Si risolva il problema*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (129)$$

Abbiamo già visto nell'esempio (5.4) che risulta:

$$y_{om}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Procedendo come nel caso 4) dello stesso esempio abbiamo anche:

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x$$

Calcoliamo y'_p ed y''_p , sostituiamo nell'ED ed imponiamo l'uguaglianza con il termine non omogeneo. Ne risulta

$$(B - 3A) \sin 3x + (A + 3B) \cos 3x = \sin 3x$$

e, di conseguenza deve averci:

$$\begin{cases} B - 3A = 1 \\ A + 3B = 0 \end{cases} \rightarrow A = -\frac{3}{10}, B = \frac{1}{10} \quad (130)$$

La soluzione generale è allora:

$$y_g(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

Imponendo infine le condizioni iniziali si trova:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{3}{10} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{1}{10} \end{cases} \rightarrow c_1 = \frac{5}{10}, c_2 = -\frac{2}{10} \quad (131)$$

La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y = \frac{5}{10} e^{-x} - \frac{2}{10} e^{-2x} - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

6 Equazioni alle derivate parziali

Una equazione alle derivate parziali (d'ora in poi PDE) coinvolge una funzione in più variabili, incognita (da determinare) e delle sue derivate parziali. Come in una equazione differenziale ordinaria, ODE, la soluzione dipende da tante costanti quanto è l'ordine dell'equazione, così per una PDE di ordine k in n variabili devo dare k funzioni di $n - 1$ variabili per determinare completamente la soluzione. La soluzione di una PDE può essere molto varia ed in qualche caso la procedura risolutiva - quando esiste - non determina interamente la funzione ma solo la forma dell'argomento (in più variabili) della funzione stessa. La forma esplicita della soluzione è definita dalle condizioni iniziali o al contorno, cioè dalle k funzioni date di $n - 1$ variabili.

Supponiamo che la soluzione di una data PDE sia del tipo $f(x, y) = f(x + y)$; cosa indica questa scrittura? Significa che tutte le funzioni di due variabili che abbiano per argomento la somma delle variabili stesse sono soluzioni; pertanto potremmo avere

$$f(x + y) = \sin(x + y), \cos(x + y), x + y + 3, \frac{2}{x + y}, e^{x+y}, \dots$$

Lo studente può verificare per sostituzione diretta che tutte le funzioni suddette sono soluzioni della PDE

$$\partial_x f(x, y) - \partial_y f(x, y) = 0 \quad (132)$$

Mostriamo ora che ogni funzione $f(x, y) = f(x + y)$ soddisfa l'equazione (132); infatti $\partial_x f(x, y) = \frac{df(x+y)}{d(x+y)} \cdot \frac{\partial(x+y)}{\partial x} = \frac{df(x+y)}{d(x+y)}$ e $\partial_y f(x, y) = \frac{df(x+y)}{d(x+y)} \cdot \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \frac{df(x+y)}{d(x+y)}$ e quindi (132) è soddisfatta.

La forma esplicita della soluzione viene fissata dalle condizioni al contorno, che corrispondono a dare il valore della soluzione in un punto o su una curva assegnata. Si abbia ad esempio, per la PDE suddetta la condizione al contorno $f(x, 0) = e^x$. In questo caso otteniamo allora

$$f(x + y)|_{x,0} = f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f(x + y) = e^{x+y}.$$

Nel seguito esaminiamo le tecniche risolutive per alcune importanti tipologie di PDE

Quadrature Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x),$$

che, com'è noto, si risolve per integrazione diretta (quadratura):

$$f(x) = \int dx g(x) + c$$

ove c è una costante arbitraria da determinare con le condizioni al contorno assegnate. Lo stesso metodo, con gli opportuni correttivi, si applica alle PDE del tipo

$$\partial_x f(x, y) = g(x).$$

Per risolvere integriamo membro a membro rispetto alla variabile x , con l'accortezza di inserire ora una costante di integrazione dipendente da y , ovvero una funzione arbitraria annullata dalla derivazione parziale rispetto ad x . La soluzione generale è allora:

$$f(x, y) = G(x) + h(y)$$

ove $G(x)$ è una funzione nota, primitiva di $g(x)$ e $h(y)$ è una funzione arbitraria dipendente solo da y . Una condizione al contorno, può permetterci la determinazione di $h(y)$. Consideriamo ad esempio il problema:

$$\partial_x f(x, y) = \sin x \quad f(0, y) = \sin y \quad (133)$$

Per integrazione, dato che la funzione $-\cos x$ è la primitiva della funzione $\sin x$, si ha per ogni condizione al contorno $f(x, y) = -\cos x + h(y)$. Imponendo la condizione al contorno contenuta in (133) possiamo fissare la funzione arbitraria $h(y)$:

$$f(0, y) = -1 + h(y) \rightarrow -1 + h(y) = \sin y \rightarrow h(y) = \sin y + 1$$

Quindi la soluzione di (133) è data da

$$f(x, y) = -\cos x + \sin y + 1.$$

Con lo stesso procedimento si risolvono anche talune PDE del secondo ordine, quali ad esempio

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = 0. \quad (134)$$

Poniamo in primo luogo $g(x, y) = \partial_y f(x, y)$ ed otteniamo

$$\partial_x g(x, y) = 0.$$

La soluzione di questa equazione, per quadratura, fornisce

$$g(x, y) = h(y) \quad \rightarrow \quad \partial_y f(x, y) = h(y)$$

ove $h(y)$ è una arbitraria funzione di y . La nuova equazione è ancora risolvibile per quadratura e si ottiene:

$$f(x, y) = c_1(y) + c_2(x),$$

ove c_2 è una ulteriore funzione arbitraria, ma questa volta della variabile x e c_1 è la primitiva di h . Pertanto la soluzione generale della PDE (134) è data dalla somma di due funzioni arbitrarie ognuna delle quali dipende però da una sola delle due variabili.

Separazione di variabile Nella Sezione 2 della Parte settima delle Dispense abbiamo considerato equazioni differenziali ordinarie del primo ordine a *variabili separabili* cioè della forma $y' = h(x)g(y)$ ed abbiamo ridotto l'integrazione dell'equazione a due integrali, uno nella variabile indipendente x e l'altro nella variabile dipendente y .

Una tecnica simile può essere usata nel caso delle equazioni differenziali alle derivate parziali assumendo, in questo caso, che la soluzione si possa scrivere come

$$f(x, y) = g(x)h(y), \tag{135}$$

cioè in termini di due funzioni arbitrarie, ciascuna dipendente da una sola variabile, la funzione g dipendente solo dalla variabile x e la funzione h solo dalla variabile y . In questo caso, a differenza del caso trattato precedentemente per le equazioni differenziali ordinarie, otteniamo una classe particolare di soluzioni, non la soluzione più generale dell'equazione alle derivate parziali. Dato però che non sempre è facile risolvere una EDP, spesso la soluzione ottenuta per separazione di variabile è importante.

Vediamo ora un esercizio esplicativo:

Esercizio N. 9 *Risolvere per separazione di variabile l'EDP detta equazione del calore* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 0$.

Dato che vogliamo la soluzione dell'equazione del calore ottenuta per separazione di variabile, imponiamo che la soluzione sia della forma (135). In questo caso l'equazione del calore diviene:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial g(x)h(y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 g(x)h(y)}{\partial x^2} = 0.$$

Quando applichiamo la derivata rispetto alla variabile y al prodotto delle funzioni $g(x)h(y)$, la derivata agisce solo sulla funzione h mentre se applichiamo la derivata rispetto alla variabile x questa agisce solo sulla funzione g . Quindi le derivate da parziali diventano ordinarie e l'equazione del calore diviene:

$$g(x)\frac{dh(y)}{dy} - h(y)\frac{d^2g(x)}{dx^2} = 0. \quad (136)$$

Dividendo l'equazione (136) per $h(y)g(x)$ la possiamo scrivere come:

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dh(y)}{dy} - \frac{1}{g(x)}\frac{d^2g(x)}{dx^2} = 0. \quad (137)$$

Il primo termine di (137) dipende solo dalla variabile y mentre il secondo termine solo dalla variabile x e quindi l'equazione può essere soddisfatta solo se entrambi i termini sono uguali ad una **stessa** costante che per comodità prendiamo negativa, i.e.

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dh(y)}{dy} = -K^2, \quad \frac{1}{g(x)}\frac{d^2g(x)}{dx^2} = -K^2. \quad (138)$$

La prima ODE contenuta in (138) è un'equazione differenziale del primo ordine che ha per soluzione $h(y) = Ae^{-K^2y}$ mentre la seconda è un'equazione differenziale del secondo ordine che ha per soluzione $g(x) = C \sin(Kx + B)$ dove A , B e C sono delle costanti di integrazione delle due equazioni differenziali ordinarie. Abbiamo quindi trovato una soluzione particolare della equazione del calore $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 0$ data da $f(x, y) = A \sin(Kx + B)e^{-K^2y}$.

Equazioni lineari omogenee del primo ordine Ci concentriamo in questa parte essenzialmente su PDE lineari omogenee del primo ordine

per funzioni in due variabili. Consideriamo prima l'equazione a coefficienti costanti

$$\partial_x f(x, y) + \partial_y f(x, y) = 0 \quad (139)$$

Operiamo un cambio di variabili, ponendo:

$$u = x + y \quad v = x - y$$

e usando le regole di derivazione composta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

ovvero, dato che $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

e quindi la PDE (139) diviene

$$2\partial_u f(u, v) = 0,$$

che è risolvibile per quadratura e fornisce il risultato

$$f(u, v) = c(v) \quad \rightarrow \quad f(x, y) = c(x - y)$$

Pertanto la soluzione generale della PDE studiata è data da una funzione arbitraria che dipenda dalla differenza delle variabili x, y .

Più in generale, si può applicare questa procedura a tutte le PDE lineari omogenee del primo ordine del tipo

$$a\partial_x f(x, y) + b\partial_y f(x, y) = 0$$

con a, b parametri reali non nulli. Se si effettua la sostituzione

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

si perviene ancora alla PDE $2\partial_u f(u, v) = 0$, e la soluzione cercata è allora

$$f(u, v) = c(v) \rightarrow f(x, y) = c\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

Consideriamo ora un caso più complesso quando i coefficienti della PDE lineari omogenee del primo ordine sono funzioni arbitrarie delle (x, y) del tipo

$$a(x, y)\partial_x f(x, y) + b(x, y)\partial_y f(x, y) = 0 \quad (140)$$

cioè dove i parametri a, b non sono più costanti ma funzioni. Per affrontare questo problema riprendiamo la formula (??) relativa alla derivata di una funzione composta $f(x(t), y(t))$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (141)$$

Supponiamo ora che esistano due funzioni $x(t)$ ed $y(t)$ tali che:

$$a(x, y) = \frac{dx}{dt} \quad b(x, y) = \frac{dy}{dt}. \quad (142)$$

Se tali funzioni esistono allora la nostra PDE diventa

$$\frac{dx}{dt}\partial_x f(x, y) + \frac{dy}{dt}\partial_y f(x, y) = 0,$$

e per confronto con la equazione (141) otteniamo che (140) diviene

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

Ma allora la soluzione generale della PDE (140) ristretta a $(x(t), y(t))$ è data da una funzione costante (i.e. la funzione che ha derivata totale nulla). All'atto pratico non è strettamente necessario determinare $(x(t), y(t))$ ma è sufficiente trovare la f che sia costante su tale restrizione. Esaminiamo un esempio chiarificatore: vogliamo risolvere l'equazione

$$y\partial_x f(x, y) - x\partial_y f(x, y) = 0.$$

Cerchiamo in primo luogo le funzioni $(x(t), y(t))$

$$y = \frac{dx}{dt} \quad - \quad x = \frac{dy}{dt}. \quad (143)$$

Ne segue:

$$dt = \frac{dx}{y} \quad dt = -\frac{dy}{x} \quad \rightarrow \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}.$$

L'equazione $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$ è risolvibile per separazione di variabili e si ottiene:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \quad \rightarrow y^2 = -x^2 + c \quad \rightarrow x^2 + y^2 = c.$$

Troviamo che la funzione $x^2 + y^2$ è costante se ristretta alle funzioni $x(t), y(t)$ date dalla soluzione delle equazioni (143). Ma allora $f(x, y) = x^2 + y^2$ è una soluzione della PDE assegnata e più in generale, tutte le funzioni aventi per argomento $x^2 + y^2$ sono soluzioni. La soluzione generale è allora $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ con g funzione arbitraria.

Esercizio N. 10 Risolvere l'EDP lineare del primo ordine a coefficienti variabili $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \sin(y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$ con la condizione al contorno $f(x, 0) = e^{-x^2}$.

L'equazione data corrisponde a (140) con $a(x, y) = -\sin(y)$ e $b(x, y) = 1$. Quindi per trovare le caratteristiche $x(t)$ e $y(t)$ devo risolvere l'equazioni (142), che in questo caso sono:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\sin[y(t)], \quad \frac{dy(t)}{dt} = 1. \quad (144)$$

La prima equazione differenziale per la variabile $x(t)$ il cui termine noto dipende anche dalla variabile $y(t)$ che posso risolvere una volta che sappia come varia la variabile $y(t)$ in funzione del suo argomento. la seconda equazione si risolve immediatamente e mi da: $y(t) = t_0 + t$ con t_0 costante di integrazione. Quindi mi rimane da risolvere l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\sin[t_0 + t],$$

la cui soluzione si ottiene per quadratura: $x(t) = x_0 + \cos[t_0 + t]$ con x_0 costante di integrazione. Quindi l'equazione data ha per soluzione generale la funzione $f(x, y) = f(x_0, t_0) = f(x - \cos y)$. Imponendo ora la condizione al contorno data $f(x, 0) = e^{-x^2}$ abbiamo $f(x) = e^{-x^2}$ e quindi $f(x, y) = e^{-(x - \cos y)^2}$.

Equazione delle onde Consideriamo l'equazione

$$\partial_x^2 f(x, y) - \partial_y^2 f(x, y) = 0, \quad (145)$$

ove i simboli ∂_x^2 e ∂_y^2 indicano le derivate parziali seconde rispetto rispettivamente alla variabile x e y . Tale equazione si risolve immediatamente con la sostituzione, già esaminata in precedenza,

$$u = x + y \quad v = x - y.$$

Effettuando tale cambio di variabili la PDE data prende la forma

$$\partial_u \partial_v f(u, v) = 0,$$

la cui soluzione è stata discussa in precedenza. La soluzione generale è allora

$$f(u, v) = c_1(u) + c_2(v) \quad \rightarrow \quad f(x, y) = c_1(x + y) + c_2(x - y) \quad (146)$$

Più in generale, tale procedura si applica a tutte le equazioni del tipo

$$a^2 \partial_x^2 f(x, y) - b^2 \partial_y^2 f(x, y) = 0 \quad (147)$$

con un'opportuna correzione nella sostituzione da effettuare:

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

La soluzione generale è allora:

$$f(x, y) = c_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) + c_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

Una forma leggermente più semplice (e più conveniente per il suo significato fisico) dell'equazione (147) si ottiene dividendo per a^2 e ponendo $\frac{1}{c^2} = \frac{b^2}{a^2}$. L'equazione delle onde (147) si riscrive quindi:

$$\partial_x^2 f(x, y) - \frac{1}{c^2} \partial_y^2 f(x, y) = 0 \quad f(x, y) = c_1(x + cy) + c_2(x - cy)$$

Supponiamo di avere le seguenti condizioni al contorno

$$f(x, 0) = h(x), \text{ ove } h \text{ è una funzione nota e } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)|_{y=0} = 0.$$

La seconda condizione al contorno impone la restrizione

$$\frac{d}{dx}c_1(x) = \frac{d}{dx}c_2(x) \rightarrow c_1(x) = c_2(x) + k$$

con k costante numerica arbitraria. La prima condizione al contorno impone quindi

$$c_1(x) + c_2(x) = h(x) \rightarrow 2c_2(x) + k = h(x)$$

da dove si ricava :

$$c_2(x) = \frac{h(x) - k}{2} \quad c_1(x) = \frac{h(x) + k}{2}$$

Ne consegue allora:

$$c_2(x - cy) = \frac{h(x - cy) - k}{2} \quad c_1(x + cy) = \frac{h(x + cy) + k}{2}$$

e la soluzione finale è:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (h(x + cy) + h(x - cy))$$

Se ad esempio abbiamo la PDE

$$\partial_x^2 f(x, y) - \frac{1}{c^2} \partial_y^2 f(x, y) = 0$$

con le condizioni al contorno

$$f(x, 0) = 2 \sin x \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)|_{y=0} = 0,$$

la soluzione cercata è

$$f(x, y) = \sin(x + cy) + \sin(x - cy).$$

L'equazione qui descritta prende il nome di *equazione delle onde*; nei fenomeni naturali descritti da questa equazione (la cui interpretazione dettagliata lo studente affronterà nei corsi di fisica ed ottica generale) usualmente la variabile x rappresenta la posizione e la variabile y il tempo; il

termine in $x + cy$ rappresenta in tal caso un'onda *progressiva*, che si propaga con velocità c lungo la direzione positiva dell'asse x mentre il termine in $x - ct$ rappresenta un'onda *regressiva* che si propaga con la medesima velocità nella direzione negativa dell'asse x .

Esercizio N. 11 *Risolvere l'EDP lineare del secondo ordine a coefficienti costanti $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0$ con le condizioni al contorno $f(x, 0) = e^{-x^2}$ ed $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)|_{y=0} = \cos(x)$.*

L'equazione data coincide con l'equazione delle onde (145) e quindi la soluzione è data da (146), i.e. $f(x, y) = c_1(x+y) + c_2(x-y)$. Introduciamo nella soluzione le condizioni al contorno date:

$$f(x, 0) = c_1(x) + c_2(x) = e^{-x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)|_{y=0} = \frac{c_1(x)}{dx} - \frac{dc_2(x)}{dx} = \cos(x). \quad (148)$$

Dal sistema di equazioni (148) ricaviamo le funzioni $\frac{dc_1(x)}{dx}$ e $\frac{dc_2(x)}{dx}$, i.e.

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = -xe^{-x^2} + \frac{1}{2} \cos(x), \quad \frac{dc_2(x)}{dx} = -xe^{-x^2} - \frac{1}{2} \cos(x),$$

da cui integrando

$$c_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2} \sin(x), \quad c_2(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2} \sin(x).$$

Quindi la soluzione dell'equazione delle onde con le condizioni al contorno date da:

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cosh(xy) + \cos(x) \sin(y).$$

Esercizi e compiti d'esame

Esercizi proposti

Esercizi sulle equazioni alle derivate ordinarie.

Corso di Matematica, Parte B

Prof. D.Levi

1. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

(a) $y' - 2y = 1$

(b) $y' + y = e^x$

(c) $y' - 2y = x^2 + x$

(d) $3y' + y = 2e^{-x}$

(e) $y' + 3y = \cos x$

(f) $y' + 2xy = x$

(g) $xy' + y = 3x^3 - 1, \quad (x > 0)$

(h) $y' + e^x y = 3e^x$

(i) $y' - (\tan x)y = e^{\sin x}, \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$

(j) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

(k) $y' + (\cos x)y = \sin 2x$

(l) $y' = \frac{2x}{x^2-1}y$

(m) $y' = \frac{x}{(x-3)^2}(y-1)$

(n) $y' = \frac{3y-2}{x^2+1}$

(o) $y' = xy + x^3$

(p) $y' + xy = x$

(q) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x+1}{x}$

(r) $y' - y \tan x - \frac{1}{\sin x} = 0$

(s) $xy' = y + \frac{2x^2}{1+x^2}$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy lineari del primo ordine:

- (a) $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}, \quad y(\pi) = \pi$
- (b) $y' - 2y = \frac{e^{3x}}{e^x + 1}, \quad y(0) = 0$
- (c) $y' - y = \frac{1}{\cosh x}, \quad y(0) = 0$
- (d) $y' + y = \sin x + 3 \cos 2x, y(0) = 0$
- (e) $y' = (\cos x)y + \cos^3 x, y(0) = 0$
- (f) $dy + x \tan y dx = 0, \quad y(0) = \pi/2$
- (g) $y' = \frac{xy}{(x-1)^2}, \quad y(2) = 1$
- (h) $y' - y = 1, \quad y(0) = 0$
- (i) $y' = y \sin x + \sin 2x, \quad y(0) = -2$
- (j) $y' = -2xy + x + x^3, \quad y(0) = 1$
- (k) $y' = \frac{y}{x} + x, \quad y(1) = 0$
- (l) $y' = \frac{y-1}{x \log x}, \quad y(\frac{1}{e}) = 2$
- (m) $y' = \frac{2x-y}{x-1}, \quad y(0) = 1$
- (n) $y' - \frac{2}{x}y = 3x^2, \quad y(2) = 0$
- (o) $y' = \frac{3y}{x+1} + e^x(1+x)^3, \quad y(0) = 2$

3. Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$x^2 y' + 2xy = 1$$

nell'intervallo $x > 0$ tende a zero per $x \rightarrow +\infty$. Calcolare quindi la soluzione $y(x)$ che soddisfa $y(2) = 2y(1)$.

- 4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = x^{-1/2}y + 1$. Determinare poi le soluzioni $y(x)$ che soddisfano $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$.
- 5. Determinare a per cui $y(x) = xe^{ax}$ è una soluzione di $xy'' - xy' - y = 0$.
- 6. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

- (a) $y' = x^2 y$

- (b) $yy' = x$
- (c) $y' = \frac{x+x^2}{y-y^2}$
- (d) $y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x}$
- (e) $y' = x^2y^2 - 4x^2$
- (f) $(x^2 + 1)dy + y^2dx = 0$
- (g) $(\sin x)y' + (\cos x)y = e^x$
- (h) $y' = y(y + 1)$
- (i) $y' = e^{x+y}$
- (j) $y' = xy^2 - 2xy$
- (k) $y' = -2xy^2$
- (l) $y' = e^x y \log y$
- (m) $y' = \frac{y^2-5y+6}{x^2+1}$
- (n) $y' = \frac{(x-1)y}{\log y}$
- (o) $y' = \frac{y(1+y^2)}{x}y$
- (p) $y' = y^2 \log x$
- (q) $y' = (1 + y^2)(1 + x^2)$
- (r) $y' = (1 + e^y)x$
- (s) $y' = (\tan^2 x)\sqrt[3]{2y + 3}$
- (t) $y' = (1 - y^2)\sin^2 x$

7. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy del primo ordine:

- (a) $y' = \frac{y}{x(1+9x^2)}, \quad y(1) = \sqrt{10}$
- (b) $y' = -xe^{-y}, \quad y(0) = -1$
- (c) $y' = \frac{x+1}{x(y-1)}, \quad y(1) = 0$
- (d) $y' = \frac{1}{2}(1 - y^2) \cos x, \quad y(0) = 3$
- (e) $y' = \frac{y^2-5y+6}{x^2+1}, \quad y(0) = 2$
- (f) $y' = \frac{y^2-5y+6}{x^2+1}, \quad y(0) = 2, 5$

- (g) $y' = \frac{1-e^{-y}}{2x+1}, \quad y(0) = 1$
- (h) $y' = \frac{1-e^{-y}}{2x+1}, \quad y(0) = 0$
- (i) $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^3 x, \quad y(\pi/2) = 0$
- (j) $y' = \frac{2-y-y^2}{x}, \quad y(1) = -1$
- (k) $y' = \frac{y-2}{(e^2+x) \log(e^2+x)}, \quad y(0) = 0$

8. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine:

- (a) $y'' - 4y = 0$
- (b) $3y'' + 2y' = 0$
- (c) $y'' + 16y = 0$
- (d) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$
- (e) $y'' - 4y' + 5y = 0$
- (f) $y'' + 2iy' + y = 0$
- (g) $y'' - 2iy' - y = 0$
- (h) $y'' + y = 0$
- (i) $y'' + 7y' + 6y = 0$
- (j) $y'' + y' + 9y = 0$
- (k) $y'' - 2y' + 5y = 0$
- (l) $y'' + 2y' + 2y = 0$
- (m) $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0$
- (n) $\ddot{y} + 2\dot{y} = 0$
- (o) $y'' - y' + y = 0$

9. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
- (b) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (c) $y'' + 10y = 0, \quad y(0) = \pi, \quad y'(0) = \pi^2$

(d) $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ e calcolare il valore di y in $x = 0$

(e) $\ddot{y} - 4\dot{y} + \frac{7}{4}y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 3$

(f) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(g) $\ddot{y} + \dot{y} + \frac{5}{2}y = 0$, $y(0) = 3$, $\dot{y}(0) = 0$

10. Utilizzando il metodo dei coefficienti indeterminati, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee del secondo ordine:

(a) $y'' + 4y = \cos x$

(b) $y'' + 4y = \sin 2x$

(c) $y'' - 3y' + 2y = x^2$

(d) $4y'' - y = e^x$

(e) $6y'' + 5y' - 6y = x$

(f) $y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$

(g) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$

(h) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$

(i) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

(j) $y'' - y' - 2y = e^{-x} + x^2 + \cos x$

(k) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + \cos x$

(l) $y'' + y = x e^x \cos 2x$

(m) $y'' - 2y' + y = 2x e^x$

(n) $\ddot{y} + 2\dot{y} = t^2 - 3t + 1$

(o) $\ddot{x} - x = e^t \sin t$

(p) $y'' - 3y' + 2y = t^2$

(q) $\ddot{y} + y = x \cos x$

11. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(b) $y'' - y = x e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$

- (c) $\ddot{y} = \sin t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$
- (d) $y'' - 2y' + y = e^x(x+2), \quad y(0) = y'(0) = 0$
- (e) $\ddot{y} + y = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0$
- (f) $y'' - 2y' = e^x \cosh x, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Esercizi sulle equazioni alle derivate parziali.

Corso di Matematica, Parte B

Prof. D. Levi

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali alle derivate parziali per quadratura:
 - (a) $\partial_x f(x, y) = e^{-y^2} \sin(x)$ con la condizione al contorno $f(0, y) = \cos(y)$;
 - (b) $\partial_y f(x, y) = \cos(y+x)$ con la condizione al contorno $f(x, 0) = \cos(x)$;
 - (c) $\partial_x \partial_x f(x, y) = \sin(x-y)$ con la condizione al contorno $f(x, 0) = \cos(x)$ e $f(x, 1) = \sin(x)$;
2. Trovare le soluzioni per separazione di variabile delle seguenti equazioni differenziali alle derivate parziali:
 - (a) $\partial_y f(x, y) = \partial_{xxx} f(x, y) + \partial_x f(x, y)$;
 - (b) $\partial_{xx} f(x, y) - \partial_{yy} f(x, y) = 0$;
 - (c) $\partial_y f(x, y) = \partial_{xx} f(x, y) + f(x, y)$;
3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti non costanti possibilmente con una condizione al contorno:
 - (a) $x \partial_x f(x, y) - y \partial_y f(x, y) = 0$ con la condizione al contorno $f(x, 1) = 2x$;
 - (b) $\sin(y) \partial_x f(x, y) - \cos(x) \partial_y f(x, y) = 0$;
 - (c) $(x+2y) \partial_x f(x, y) - y \partial_y f(x, y) = 0$;
 - (d) $\partial_x f(x, y) + (2e^x - y) \partial_y f(x, y) = 0$ con la condizione al contorno $f(0, y) = y$;

- (e) $2\sqrt{x}\partial_x f(x, y) - y\partial_y f(x, y) = 0$ con la condizione al contorno $f(1, y) = y^2$;
4. Risolvere l'equazione delle onde $c^2\partial_{xx}u(x, y) - \partial_{yy}u(x, y) = 0$ con le seguenti condizioni al contorno e fare uno sketch della soluzione:
- (a) $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $\partial_y u(x, 0) = 0$ e $c = 1$;
 - (b) $u(x, 0) = \sin x$, $\partial_y u(x, 0) = 0$ e $c = 1$;
 - (c) $u(x, 0) = 2\cos(\pi x/2)$ per $-1 \leq x \leq 1$ e altrove $u(x, 0) = 0$, $c = 1$ e $\partial_y u(x, 0) = 0$;
 - (d) $u(x, 0) = 2\sin(\pi x/2)$ per $-2 \leq x \leq 2$ e altrove $u(x, 0) = 0$, $c = 1$ e $\partial_y u(x, 0) = 0$;
 - (e) $u(x, 0) = 2|\sin(\pi x)|$ per $-1 \leq x \leq 1$ e altrove $u(x, 0) = 0$, $c = 1/2$ e $\partial_y u(x, 0) = 0$;
 - (f) $u(x, 0) = 1 - |x|$ per $-1 \leq x \leq 1$ e altrove $u(x, 0) = 0$, $c = 1/3$ e $\partial_y u(x, 0) = 0$;

D.Levi, V.Lacquaniti, G.Di Filippo;
 III Esonero di Elementi di Analisi - mod. B,
 11 Giugno 2012, Corso di Laurea in Ottica ed Optometria.

1.

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

(5p) Discutere dominio, sezioni verticali, curve di livello e disegnare qualitativamente il grafico.

(1p) La superficie $z=f(x,y)$ è una figura di rotazione ?

2. (5p) Calcolare, se esistono, i limiti:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

3.

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$$

(5p) Determinare i punti critici e studiarne la natura.

4.

$$f(x, y, z) = \log_e\left(z + \frac{x}{y}\right)$$

(4p) Determinare f_0 e Δf per $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, z_0 , $\Delta x = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta y = 10^{-2}$, $\Delta z = 10^{-2}$.

5.

$$2\partial_x f(x, y) - \partial_y f(x, y) = 0$$

(5p) Trovare la soluzione per $f(x, 0)=x$.

6.

$$\frac{y}{x} \partial_x f(x, y) + x^2 \partial_y f(x, y) = 0$$

(6p) Trovare la soluzione per $f(x, 0) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

7.

$$\partial_x \partial_x f(x, y) = 0$$

(3p) Trovare la soluzione generale

D.Levi, V.Lacquaniti, G.Di Filippo;
Elementi di Analisi - mod. B,
18 Giugno 2012,
Corso di Laurea in Ottica ed Optometria.

1. Studiare, al variare di α , la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k^2}} - 1}{k^{\alpha} \sin \frac{1}{k}}$$

2. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} 2y'' + 6y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

3. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y' - 3x^2y^2 = 3x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4. Studiare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = (x - 2)^2 - y^2$$

5. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) - 3\partial_y f(x, y) = 0 \\ f(0, y) = y \end{cases}$$

Corso di Laurea in Ottica ed Optometria
Corso di Elementi di Analisi A.A. 2011–2012
Compito d’esame del II° modulo del 09–11–2012.
Prof. D.Levi, Prof. Lacquaniti.

Gli studenti devono fare gli esercizi in **due ore**. Possono consultare i libri e le dispense ma non gli appunti. Inoltre devono usare **SOLO** i fogli dati dalla commissione.

I CELLULARI devono essere spenti.

Inoltre si devono usare solo fogli dati dalla commissione che vanno consegnati **TUTTI**.

Gli studenti che passano lo scritto con un voto inferiore a 21/30 ma superiore a 18/30 devono sostenere l’esame orale.

1. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\frac{1}{2}y'' + 2y = \sin x, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + \cos^2 x) dy + y (\cos x \sin x) dx & = 0 \\ y(\pi/2) & = 5 \end{cases}$$

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$$

4. Studiare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = (x + 1)y + x^3$$

5. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) - 3\partial_y f(x, y) = 0 \\ f(0, y) = y \end{cases}$$

**(6 punti per ogni esercizio svolto completamente e descritto in
maniera chiara e comprensiva)**

A.A. 2012-2013 Esame di Elementi di Analisi del 10/09/2013
D. Levi, V. Lacquaniti

Gli studenti devono fare gli esercizi in **due ore**. Possono consultare i libri e le dispense ma non gli appunti. Inoltre devono usare solo fogli dati dalla commissione.

Gli studenti che passano lo scritto con un voto inferiore a 21/30 ma superiore a 18/30 devono sostenere l'esame orale.

Secondo Modulo

1. Si scriva la serie di Taylor di centro 0 della funzione:

$$f(x) = \ln(x+1)^2 - \ln(x+1)$$

2. Determinare la serie di Fourier associata alla funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 3 \\ 1 & -3 < x < 0 \end{cases}$$

3. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} 2y'' + 18y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

4. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$$

Discutere dominio, curve di livello, massimi e minimi e disegnare qualitativamente il grafico.

5. Determinare la soluzione dell'equazione

$$4\partial_x f(x, y) + 3\partial_y f(x, y) = 0,$$

per $f(x, 0) = x$

A.A. 2012-2013 Esame di Elementi di Analisi del 10/06/2013
D. Levi, V. Lacquaniti

Gli studenti devono fare gli esercizi in **due ore**. Possono consultare i libri e le dispense ma non gli appunti. Inoltre devono usare solo fogli dati dalla commissione.

Gli studenti che passano lo scritto con un voto inferiore a 21/30 ma superiore a 18/30 devono sostenere l'esame orale.

Secondo Modulo

1. Si studi la convergenza della seguente serie al variare del parametro α .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{\alpha} \sin \frac{1}{k^2}$$

2. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' - 2y' + \frac{5}{4}y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

3. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y+4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4. Studiare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = (y + 1)x + y^3$$

5. Discutere dominio, sezioni verticali, curve di livello, gradiente e grafico qualitativo della funzione:

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

A.A. 2011-2012 Esame di Elementi di Analisi del 11/07/2012
D. Levi, V. Lacquaniti

Gli studenti devono fare gli esercizi in **due ore**. Possono consultare i libri e le dispense ma non gli appunti. Inoltre devono usare solo fogli dati dalla commissione.

Gli studenti che passano lo scritto con un voto inferiore a 21/30 ma superiore a 18/30 devono sostenere l'esame orale.

Secondo Modulo

1. Si studi la convergenza e si determini la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

2. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

3. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4. Studiare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = (x+1)y + x^3$$

5. Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$\partial_x^2 f(x, t) - \partial_t^2 f(x, t) = 0,$$

e la soluzione relativa alle condizioni al contorno

$$\begin{cases} f(0, t) = 0 \\ f(x, 0) = 2 \sin x \end{cases}$$

A.A. 2012-2013 Esame di Elementi di Analisi del 16/07/2013
D. Levi, V. Lacquaniti

Gli studenti devono fare gli esercizi in **due ore**. Possono consultare i libri e le dispense ma non gli appunti. Inoltre devono usare solo fogli dati dalla commissione.

Gli studenti che passano lo scritto con un voto inferiore a 21/30 ma superiore a 18/30 devono sostenere l'esame orale.

Secondo Modulo

1. Si scriva la serie di Taylor della funzione:

$$f(x) = 2 \sin x \cos x$$

2. Determinare la serie di Fourier associata alla funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 4 \\ 0 & -4 < x < 0 \end{cases}$$

3. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} 2y'' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \frac{1}{9 - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Discutere dominio, sezioni verticali, curve di livello e disegnare qualitativamente il grafico. Si tratta di una figura di rotazione? (*motivare la risposta*)

5. Determinare la soluzione dell'equazione

$$2\partial_x f(x, y) - 4\partial_y f(x, y) = 0,$$

per $f(x, 0) = x$

A.A. 2012-2013 Esame di Elementi di Analisi del 12/11/2013
D. Levi, V. Lacquaniti

Gli studenti devono fare gli esercizi in **due ore**. Possono consultare i libri e le dispense ma non gli appunti. Inoltre devono usare solo fogli dati dalla commissione.

Gli studenti che passano lo scritto con un voto inferiore a 21/30 ma superiore a 18/30 devono sostenere l'esame orale.

Secondo Modulo

1. Si determini la serie di Taylor di centro zero associata alla funzione seguente e se ne indichi il raggio di convergenza:

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

2. Si discuta la convergenza della seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\sin \frac{1}{k}} k^{\alpha}$$

3. Determinare la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 100y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Determinare curve di livello, gradiente e natura dei punti critici della funzione:

$$f(x, y) = (x-3)^2 + (y+2)^2$$

5. Determinare la soluzione dell'equazione

$$-3\partial_x f(x, y) + 6\partial_y f(x, y) = 0,$$

per $f(x, 0) = x$