Formulario di Analisi Matematica 1

Indice degli argomenti

Punti interni, di frontiera, di accumulazione, isolati

Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$

- x_0 è PUNTO INTERNO a X se e solo se ogni intorno del punto x_0 è tutto contenuto in X.

- x_0 è PUNTO DI FRONTIERA a X se e solo se in ogni intorno del punto x_0 cadono sia punti appartenenti a X sia punti non appartenenti a X.

- x_0 è PUNTO DI ACCUMULAZIONE per X se e solo se ogni intorno del punto x_0 contiene almeno un punto di X diverso da x_0.

- x_0 è PUNTO ISOLATO per X se non è di accumulazione.

Inoltre, si definiscono i seguenti insiemi:

- INTERNO di X, $\overset{\circ}{X}$ è l'insieme dei punti interni ad X.

- FRONTIERA di X, FX è l'insieme dei punti di frontiera di X.

- DERIVATO di X, DX è l'insieme dei punti di accumulazione per X.

- CHIUSURA di X, $\overline{X} = X \cup FX = X \cup DX$.

Un insieme si dice APERTO $\Leftrightarrow \quad X = \overset{\circ}{X}$.

Un insieme si dice CHIUSO $\Leftrightarrow \quad X = \overline{X} \quad \Leftrightarrow \quad FX \subseteq X \quad \Leftrightarrow DX \subseteq X$.

Vale sempre la seguente relazione:

$$\overset{\circ}{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$$

Alcune costanti fondamentali

$e = 2,7182818285\ldots$
$\pi = 3,1415926536\ldots$

Proprietà delle potenze ad esponente reale $(x, y \in \mathbb{R}^+)$

1. $x^0 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \qquad 1^\alpha = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
2. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
3. $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
4. $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
5. $\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \left(\frac{y}{x}\right)^{-\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
6. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
7. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+;$
8. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+;$

Proprietà degli esponenziali $(a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a, b \neq 1)$

1. $a^0 = 1; \quad a^1 = a;$

2. $a^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad a^x \begin{cases} < 1, & \text{se } a < 1 \\ > 1, & \text{se } a > 1 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+;$

3. $a^x \cdot a^y = (a)^{x+y}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

5. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

6. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

7. $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

8. $(a^x)^y = a^{xy}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

9. $se \quad x < y \Rightarrow a^x \begin{cases} < a^y, & \text{se } a > 1 \\ > a^y, & \text{se } a < 1 \end{cases};$

10. $a \leq b \Rightarrow a^x \leq b^b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+;$

Proprietà dei logaritmi $(x, y, a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a, b \neq 1)$

1. $a^{\log_a x} = x$;

2. $\log_a(a^x) = x$;

3. $\log_a 1 = 0$;

4. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

5. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

6. $\log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a x, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

7. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x, \quad x \neq 1$;

8. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$;

Proprietà del modulo o valore assoluto

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

1. $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
3. $|-x| = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
4. $|x| = \sqrt{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0;$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
8. $||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

Progressioni

1. PROGRESSIONE ARITMETICA: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

2. PROGRESSIONE GEOMETRICA: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1$;

Trigonometria

Per le formule di trigonometria clicca QUI.

Disequazioni

Disequazioni razionali di secondo grado

Sia $ax^2 + bx + c = 0,\ a > 0$ l'equazione associata alla disequazione di secondo grado e siano x_1 e x_2 le eventuali radici di tale equazione con $x_1 < x_2$. La soluzione della disequazione dipenderà dal suo verso e dal segno del Δ:

Δ	$>$	$\geq$	$<$	$\leq$
$\Delta > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$x \neq x_1$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$x = x_1$

Disequazioni fratte

1. Caso $\frac{A}{B} > 0$:

   si trovano le soluzioni di $A > 0\ \ (1)$ e $B > 0\ \ (2)$, per poi fare il prodotto dei segni tra (1) e (2) prendendo la parte > 0.

2. Caso $\frac{A}{B} \geq 0$:

   si trovano le soluzioni di $A \geq 0\ \ (1)$ e $B > 0\ \ (2)$, per poi fare il prodotto dei segni tra (1) e (2) prendendo la parte > 0.

3. Caso $\frac{A}{B} < 0$:

   si trovano le soluzioni di $A > 0\ \ (1)$ e $B > 0\ \ (2)$, per poi fare il prodotto dei segni tra (1) e (2) prendendo la parte < 0.

4. Caso $\frac{A}{B} \leq 0$:

   si trovano le soluzioni di $A \geq 0\ \ (1)$ e $B > 0\ \ (2)$, per poi fare il prodotto dei segni tra (1) e (2) prendendo la parte < 0.

Disequazioni irrazionali

1. Caso $\sqrt{A} > B$ (o $\geq$):

   si risolvono i sistemi e si fa l'unione delle rispettive soluzioni trovate:

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

2. Caso $\sqrt{A} < B$ (o $\leq$):

   si trovano le soluzioni dell'unico sistema:

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

Disequazioni con valore assoluto

1. Caso B **non costante** e $|A| > B$ (oppure $\geq$, $<$, $\leq$):

   si risolvono i sistemi e si fa l'unione delle rispettive soluzioni trovate:
   $\begin{cases} A \geq 0 \\ A > B \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ -A > B \end{cases}$

2. Caso B **costante** e $|A| > B$ (o $\geq$):

   le soluzioni sono $A < -B \vee A > B$ (oppure $A \leq -B \vee A \geq B$)

3. Caso B **costante** e $|A| < B$ (o $\leq$):

   le soluzioni sono $-B < A < B$ (oppure $-B \leq A \leq B$)

Numeri complessi

Forma algebrica

$$z = x + iy, \forall x, y \in \mathbb{R}; \qquad \bar{z} = x + iy, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

1. $\overline{(z \pm w)} = \bar{z} \pm \overline{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C};$
2. $\overline{(zw)} = \bar{z} \cdot \overline{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C};$
3. $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\overline{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C};$
4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C};$
5. $|z| \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C};$
6. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
7. $|z| = |\bar{z}|, \quad \forall z \in \mathbb{C};$
8. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C};$
9. $|z/w| = |z|/|w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0;$
10. $|Re(z)| \leq |z|, \quad |Im(z)| \leq |z|, \quad |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C};$
11. $|z + w| \leq |z| + |w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C};$
12. $||z| - |w|| \leq |z + w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C};$

Forma trigonometrica

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \ \theta \in [0, 2\pi)\,,$

dove $\quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

se $w = \eta(\cos\phi + i\sin\phi), \quad \eta \in \mathbb{R}^+, \ \phi \in [0, 2\pi)$ allora:

1. $zw = \rho\eta\left[\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)\right];$

2. $\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\eta}[\cos(\theta - \phi) + i\sin(\theta - \phi)]\,;$

3. $z^n = \rho^n\,[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]\,, \quad ''\ \textit{Formula di Moivre}\ '';$

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1);$

Forma esponenziale

$z = \rho e^{i\theta},\ \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in [0, 2\pi)\,.$

se $\quad w = \eta e^{i\phi},\ \eta \in \mathbb{R}^+,\ \phi \in [0, 2\pi)$ allora:

1. $zw = \rho\eta e^{i(\theta+\phi)};$

2. $\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\eta}e^{i(\theta-\phi)};$

3. $z^n = \rho^n e^{i(n\theta)};$

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1);$

Limiti

Forme indeterminate

$$0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0$$

N.B.: 0^{∞}, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$ non sono forme indeterminate!

Limiti notevoli di successioni

Scala di infiniti/infinitesimi

$$n^n, \quad n!, \quad a^n\ (a > 1), \quad n^b\ (b > 0), \quad \log n$$

Forma semplice	Forma generale
$\lim_{n \to +\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 & \text{se } b = 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}$	/
$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$	/
$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$	/
$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$	/
$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0 \quad \forall b > 0$	/
$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad \forall a > 1, \forall b > 0$	/
$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1$	/
$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$	/
$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n \log^2 n} = 1$	/
$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	$\lim_{a_n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$
$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 1$	$\lim_{a_n \to +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \log_a n = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$	$\lim_{a_n\to+\infty} \log_a a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$

Limiti notevoli di funzioni

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi di grado n e m rispettivamente, ovvero del tipo:

$$\begin{aligned} A(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ B(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Allora si ha:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{se } n>m \\ 0 & \text{se } n<m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m \end{cases}$$

Forma semplice	Forma generale
$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$	$\lim_{f(x)\to\infty} \frac{k}{f(x)} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to 0} \frac{k}{x} = \infty, \quad \forall k \in \mathbb{R}-\{0\}$	$\lim_{f(x)\to 0} \frac{k}{f(x)} = \infty, \quad \forall k \in \mathbb{R}-\{0\}$
$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \nexists & \text{se } a\le 1 \end{cases}$	$\lim_{f(x)\to+\infty} a^{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \nexists & \text{se } a\le 1 \end{cases}$
$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } -1<a<1 \\ \nexists & \text{se } a\le 1 \end{cases}$	$\lim_{f(x)\to-\infty} a^{f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } -1<a<1 \\ \nexists & \text{se } a\le 1 \end{cases}$
$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<a<1 \\ -\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$	$\lim_{f(x)\to 0^+} \log_a f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<a<1 \\ -\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$
$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$	$\lim_{f(x)\to+\infty} \log_a f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{f(x)\to\infty} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$
$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{f(x)\to\infty} [f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = 1$
$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{f(x)\to 0} [1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\ln[1+f(x)]}{f(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \quad \forall a>0,\ a\neq 1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\log_a[1+f(x)]}{f(x)}=\log_a e \quad \forall a>0,\ a\neq 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha^x-1}{x}=\ln\alpha \quad \forall\alpha>0$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\alpha^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln\alpha \quad \forall\alpha>0$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{[1+f(x)]^\alpha-1}{f(x)}=\alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha\log_a x=0 \quad \forall\alpha>0,\ a>1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0^+}[f(x)]^\alpha\log_a f(x)=0 \quad \forall\alpha>0,\ a>1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{[f(x)]^2}=\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{f(x)}=0$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sinh f(x)}{f(x)}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\cosh f(x)-1}{[f(x)]^2}=\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=1$	$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\tanh f(x)}{f(x)}=1$

Derivate

Funzione (forma semplice)	Derivata	Funzione (forma generale)	Derivata
$k, \quad k \in \mathbb{R}$	0		
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$[f(x)]^\alpha$	$\alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a f(x)$	$\frac{1}{f(x) \ln a} \cdot f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f'(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin f(x)$$	$\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos f(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan f(x)$	$\frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$
$arccot\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$arccot\ f(x)$	$-\frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh f(x)$	$\cosh f(x) \cdot f'(x)$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh f(x)$	$\sinh f(x) \cdot f'(x)$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}$
$\coth x$	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\coth f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)}$

Derivata della funzione composta esponenziale $y = [f(x)]^{g(x)}$

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right]$$

Teoremi sul calcolo delle derivate

- DERIVATA DEL PRODOTTO DI UNA COSTANTE k PER UNA FUNZIONE f:

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$

- DERIVATA DELLA SOMMA DI DUE FUNZIONI f e g:

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

- DERIVATA DEL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI f e g:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- DERIVATA DEL QUOZIENTE DI DUE FUNZIONI f e g:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange e de l'Hôpital

- TEOREMA DI ROLLE:

  Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ e tale che $f(a) = f(b)$. Si ha:

$$\exists\, c \in]a,b[: f'(c) = 0$$

- TEOREMA DI CAUCHY:

  Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$, derivabili in $]a,b[$ e tali che $g(a) \neq g(b)$ e $\nexists\, x \in]a,b[: f'(x) = g'(x) = 0$. Si ha:

$$\exists\, c \in]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- TEOREMA DI LAGRANGE:

  Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$. Si ha:

$$\exists\, c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- TEOREMA DI DE L'HÔPITAL (utile per il calcolo dei limiti del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$):

  Sia $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia x_* o un punto di accumulazione $x_0 \in (a,b)$ oppure $\pm\infty$. Si ha:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to x_*} f(x) = \lim\limits_{x \to x_*} g(x) = 0 \text{ oppure } \pm\infty \\ f, g \text{ derivabili } \forall x \neq x_0 \\ g'(x) \neq 0\ \forall x \text{ appartenente ad un intorno di } x_* \\ \exists \lim\limits_{x \to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Max e min relativi e assoluti

- TEOREMA DI FERMAT:

  Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ punto di max o min relativo tale che $\exists\, f'(x_0)$. Si ha:

$$f'(x_0) = 0$$

- Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua in x_0 e derivabile in un suo intorno. Allora:

  a. $\left.\begin{array}{r} f'(x) > 0 \quad \forall x \in I_-(x_0) \\ f'(x) < 0 \quad \forall \in I_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_0 \text{ max relativo per } f$

  b. $\left.\begin{array}{r} f'(x) < 0 \quad \forall x \in I_-(x_0) \\ f'(x) > 0 \quad \forall x \in I_+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_0 \text{ min relativo per } f$

- Sia $f : X \to \mathbb{R}$ derivabile n volte e sia x_0 tale che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

  allora

  a. n pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ max relativo

  b. n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ min relativo

  c. n dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ crescente in x_0

  d. n dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ decrescente in x_0

Ricerca dei max e min relativi

- Se $f : X \to \mathbb{R}$ è derivabile nell'interno di X allora

  1. si risolve l'equazione $f'(x) = 0$ per determinare i punti critici

  2. si applica il teorema 2) o 3) (visti sopra) per decidere se si tratta di max o min relativi.

- Se $f : X \to \mathbb{R}$ non è derivabile nell'interno di X allora occorre esaminare due tipi di punti:

1. punti critici (vedi caso precedente)

2. i punti $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ tali che $\nexists f'(x_0)$: in questo caso bisogna verificare se si tratta di minimo o di massimo relativo applicando la definizione.

Ricerca dei max e min assoluti

- Confrontare i valori che $f : X \to \mathbb{R}$ assume nei punti dei seguenti insiemi:

1. $\left\{x \in \overset{\circ}{X} \ : \ f'(x) = 0\right\}$

2. $\left\{x \in \overset{\circ}{X} \ : \nexists\, f'(x)\right\}$

3. $\{x \in FX \cup X\}$

- Scegliere il più grande M e il più piccolo m per trovare rispettivamente il massimo e il minimo della funzione

Integrali

Integrale (forma semplice)	Primitive	Integrale (forma generale)	Primitive
$\int 0\ dx$	0		
$\int k\ dx,\ k\in\mathbb{R}$	$kx+c$		
$\int x^\alpha\ dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\int [f(x)]^\alpha\cdot f'(x)\ dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$	$\sqrt{x}+c$	$\int \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)\ dx$	$\sqrt{f(x)}+c$
$\int e^x\ dx$	e^x+c	$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\ dx$	$e^{f(x)}+c$
$\int a^x\ dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\ dx$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c$
$\int \frac{1}{x}\ dx$	$\ln\|x\|+c$	$\int \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\ dx$	$\ln\|f(x)\|+c$
$\int \cos x\ dx$	$\sin x+c$	$\int \cos[f(x)]\cdot f'(x)\ dx$	$\sin f(x)+c$
$\int \sin x\ dx$	$-\cos x+c$	$\int \sin[f(x)]\cdot f'(x)\ dx$	$-\cos f(x)+c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$	$\tan x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx$	$\tan f(x)+c$
$\int -\frac{1}{\sin^2 x}\ dx$	$\cot x+c$	$\int -\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\ dx$	$\cot f(x)+c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$	$\arcsin x+c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)\ dx$	$\arcsin f(x)+c$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$	$\arccos x+c$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)\ dx$	$\arccos f(x)+c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx$	$\arctan x+c$	$\int \frac{1}{1+[f(x)]^2}\cdot f'(x)\ dx$	$\arctan f(x)+c$
$\int -\frac{1}{1+x^2}\ dx$	$arccot\ x+c$	$\int -\frac{1}{1+[f(x)]^2}\cdot f'(x)\ dx$	$arccot\ f(x)+c$
$\int \cosh x\ dx$	$\sinh x+c$	$\int \cosh[f(x)]\cdot f'(x)\ dx$	$\sinh f(x)+c$
$\int \sinh x\ dx$	$\cosh x+c$	$\int \sinh[f(x)]\cdot f'(x)\ dx$	$\cosh f(x)+c$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\ dx$	$\tanh x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}\ dx$	$\tanh f(x)+c$
$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\ dx$	$\coth x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)}\ dx$	$\coth f(x)+c$

Teoremi sul calcolo integrale

- INTEGRALE DEL PRODOTTO DI UNA COSTANTE k PER UNA FUNZIONE f:

$$\int k\cdot f(x)\ dx = k\cdot\int f(x)\ dx$$

- INTEGRALE DELLA SOMMA DI DUE FUNZIONI f e g:

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

- METODO DI INTEGRAZIONE PER PARTI:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

- ESTENSIONE DEL CONCETTO DI INTEGRALE:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

- PROPRIETA' ADDITIVA DELL'INTEGRALE ($c \in [a,b]$):

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

- TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:

  Se $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, allora, per ogni $x \in [a,b]$ si ha:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\ dx \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

- TEOREMA DELLA MEDIA:

  Se $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, esiste $c \in [a,b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Integrali impropri

- Se $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua in $]a,b]$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{x_0 \to a^+} \int_{x_0}^b f(x)\ dx$$

- Se $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b[$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to b^-} \int_a^{x_0} f(x)\,dx$$

- Se $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b] \setminus \{c\}$ con $c \in]a,b[$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to c^-} \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{x_0 \to c^+} \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

- Se $f(x) : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,+\infty[$, si ha:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to +\infty} \int_a^{x_0} f(x)\,dx$$

- Se $f(x) :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $]-\infty, b]$, si ha:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to -\infty} \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

- Se $f(x) :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ è integrabile in $]-\infty, +\infty[$, si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to +\infty}} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Criteri di integrabilità

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b[$ e se

$$\lim_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) = \begin{cases} 0 & \text{con } p < 1, \text{ allora } \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge} \\ \infty & \text{con } p \geq 1, \text{ allora } \int_a^b f(x)\,dx \text{ diverge} \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{allora } \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge se e solo se } p < 1 \end{cases}$$

Se $f(x)$ è una funzione continua in $]a,b]$ e se

$$\lim_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) = \begin{cases} 0 & \text{con } p < 1, \text{ allora } \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge} \\ \infty & \text{con } p \geq 1, \text{ allora } \int_a^b f(x)\,dx \text{ diverge} \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{allora } \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge se e solo se } p < 1 \end{cases}$$

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,+\infty[$ e se

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) = \begin{cases} 0 & \text{con } p > 1, \text{ allora } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \\ \infty & \text{con } p \leq 1, \text{ allora } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ diverge} \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{allora } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge se e solo se } p > 1 \end{cases}$$

Funzione inversa e retta tangente

Una funzione strettamente monotona (crescente o decrescente) è invertibile.

Se una funzione $f(x)$ è invertibile e derivabile in x_0 con $y_0 = f(x_0)$, allora la sua derivata prima nel punto sarà:

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto x_0 è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

dove $f'(x_0)$ è la derivata della funzione f calcolata nel punto $x = x_0$.

Serie numeriche

Serie a termini non negativi

Condizione necessaria affinchè una serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converga è che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Criteri per la determinazione del carattere di una serie numerica

- CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} < 1 & \text{la serie converge} \\ > 1 & \text{la serie diverge} \\ = 1 & \text{nulla si può dire} \end{cases}$$

- CRITERIO DELLA RADICE:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} < 1 & \text{la serie converge} \\ > 1 & \text{la serie diverge} \\ = 1 & \text{nulla si può dire} \end{cases}$$

- CRITERIO DI RAABE:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l \begin{cases} < 1 & \text{la serie diverge} \\ > 1 & \text{la serie converge} \\ = 1 & \text{nulla si può dire} \end{cases}$$

- CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY:

  Se a_n è non crescente ($a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$), la serie è convergente se e solo se lo è anche:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

- CRITERIO DEL CONFRONTO:

  Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi con $a_n \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, allora:

1. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente con somma B, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente con somma $A \leq B$.

2. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente.

- CRITERIO DEL CONFRONTO CON LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:

  La serie armonica generalizzata è data da:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

  a. Se $\exists\, p > 1 : \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n^p < +\infty$, allora la serie converge

  b. Se $\exists\, p \leq 1 : \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n^p \in \,]0, +\infty]$, allora la serie diverge

Serie a termini alterni e serie oscillanti

Indichiamo con S la somma della serie e con S_n la somma parziale dei primi n termini.

- TEOREMA DI LEIBENITS:

  Se $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, a_n monotona non crescente ($a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$) e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ allora la serie converge ed inoltre $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

- TEOREMA DELLE SERIE OSCILLANTI:

  Se $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, a_n monotona non decrescente ($a_{n+1} \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$) e $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ allora la serie oscilla.

Serie numeriche assolutamente convergenti

Una serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente.

Se una serie numerica è assolutamente convergente allora è convergente.

Somma e prodotto di serie

La somma di due serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) \begin{cases} \text{converge se entrambi convergono} \\ \text{diverge se almeno una delle due diverge} \end{cases}$$

Il prodotto di due serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n * \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n)$$

è convergente solo se entrambe le serie sono convergenti e almeno una delle due è assolutamente convergente

Alcune serie numeriche notevoli

- SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

- SERIE TELESCOPICA (DI MENGOLI):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$