

# Fondamenti di Automatica

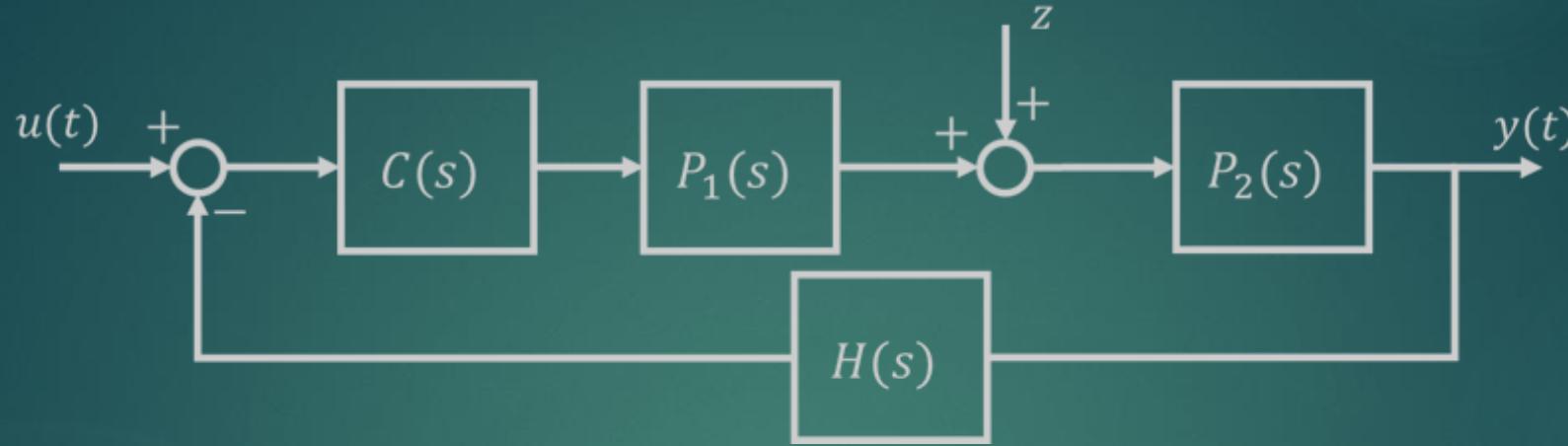
«Dispense di preparazione all'esame scritto»

Ing. Dario Masucci  
[dario.masucci@uniroma3.it](mailto:dario.masucci@uniroma3.it)

# Fondamenti di Automatica

Parte 1  
«Sintesi analitica dei sistemi di controllo a  
controleazione»

# Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controreazione



$u(t)$  è il segnale di ingresso

$y(t)$  è il segnale di uscita

$z(t)$  è il segnale di disturbo

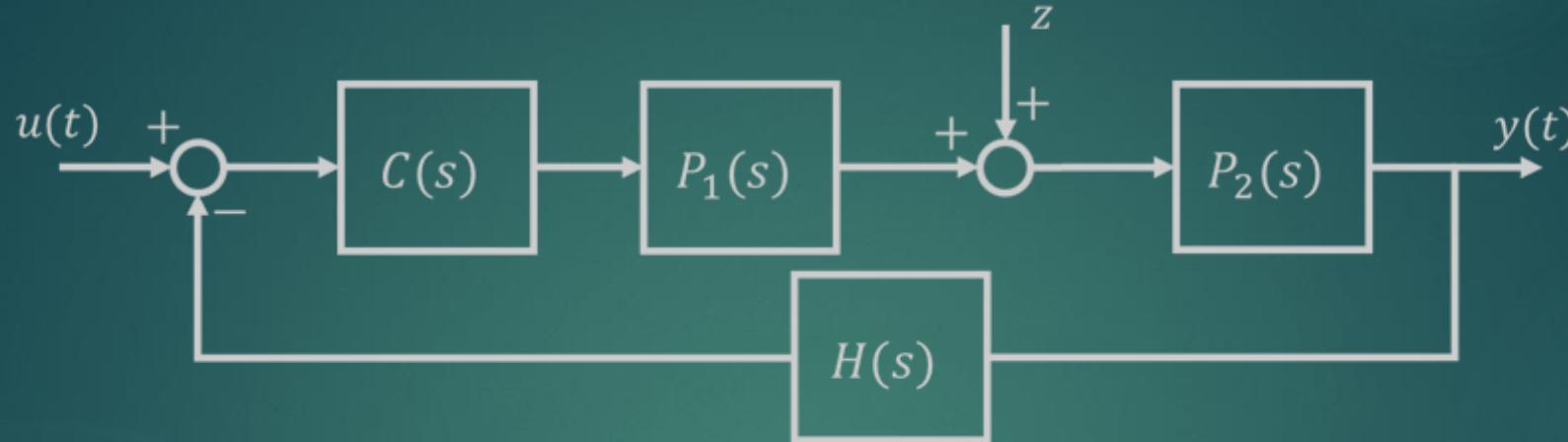
$C(s)$  fdt del controllore    $H(s)$  fdt del trasduttore di misura

$P_1(s)$  fdt della parte di processo a monte del disturbo;

$P_2(s)$  fdt della parte di processo a valle del disturbo

$K_c$  è il guadagno associato al controllore

# Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione



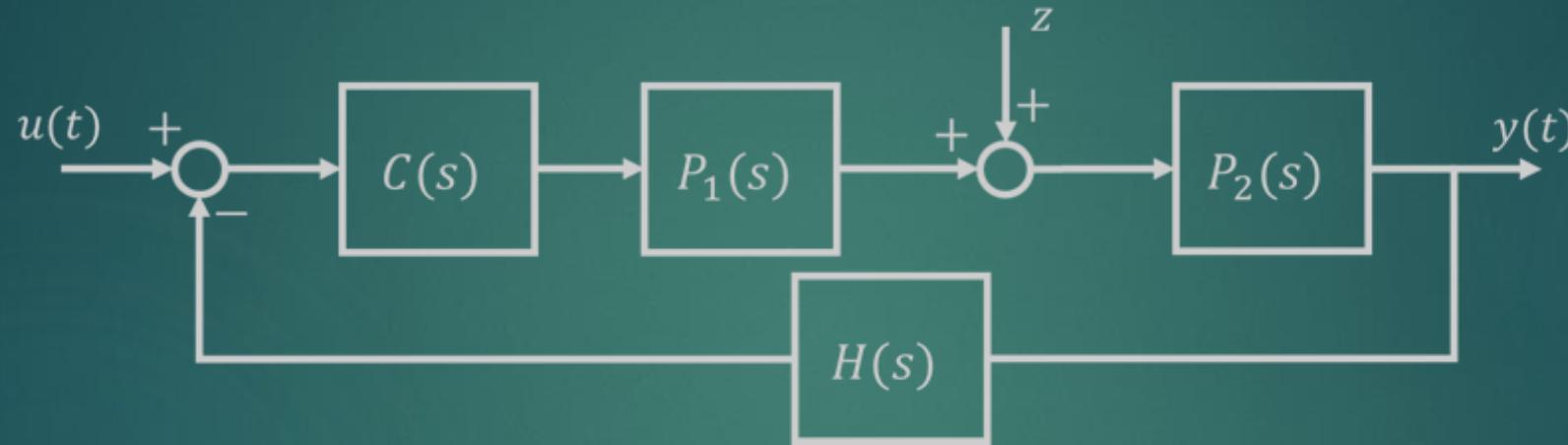
$$C(s) = \frac{K_c}{s} \quad P_1(s) = \frac{s + 2}{s + 9} \quad P_2(s) = \frac{3}{s} \quad H(s) = 0,25$$

L'obiettivo è di determinare

1. Per quali valori di  $K_c$  il sistema risulta stabile a ciclo chiuso
2. Il tipo di sistema di controllo
3. Astatismo rispetto al disturbo costante  $z$
4. L'uscita permanente  $y_p(t)$  con  $u(t) = 7\delta_{-3}$  e  $z(t) = 0$
5. L'uscita permanente  $y_z(t)$  con  $u(t) = 0$  e  $z(t) = 2\delta_{-1}(t)$

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controreazione

L'obiettivo di un sistema di controllo è quello di intervenire su un processo in modo tale che questo soddisfi determinate **specifiche** e che, quindi, abbia un comportamento dinamico che sia **stabile**. Si considera il generico sistema di controllo a controreazione



Il sistema di controllo di un processo, per poter operare al meglio delle sue potenzialità, deve essere **attentamente tarato** in funzione degli elementi che intervengono nel sistema in analisi.

Infatti, in base:

- Alle trasferenze presenti nel ramo diretto e nel ramo di controreazione del sistema;
- Alla presenza di disturbi che possono alterare l'uscita desiderata;

il controllore dovrà avere **determinate caratteristiche**

# Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

**Domanda 1** – Determinare per quali valori di  $K_c$  il sistema risulta stabile a ciclo chiuso

1. Si calcola la Funzione di Trasferimento a ciclo chiuso del sistema:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{C(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)} = \frac{\frac{K_c}{s} \cdot \frac{s+2}{s+9} \cdot \frac{3}{s}}{1 + \frac{K_c}{s} \cdot \frac{s+2}{s+9} \cdot \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{12K_c(s+2)}{4s^2(s+9) + 3K_c(s+2)} \end{aligned}$$

2. Si considera l'equazione caratteristica  $Q(s)$  del sistema, ossia il polinomio a denominatore della Funzione di Trasferimento a ciclo chiuso. E si applica ad essa il criterio di Routh

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

	$n$	
	$a_n$	$a_{n-2}$ $a_{n-4}$ ...
$n-1$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$ $a_{n-5}$ ...
$n-2$	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$ ...
$n-3$	$b_{n-3}$	$b_{n-5}$ ...

coeffienti derivati →

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\ b_{n-4} &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\ b_{n-3} &= \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}} \end{aligned}$$

# Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

3	4	$3K_c$
2	36	$6K_c$
1	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$
0	$b_{n-3}$	

$$Q(s) = 4s^2(s+9) + 3K_c(s+2) = 4s^3 + 36s^2 + 3K_c s + 6K_c$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{36 * 3K_c - 4 * 6K_c}{36} = \frac{108K_c - 24K_c}{36} = \frac{7}{3}K_c$$

3	4	$3K_c$
2	36	$6K_c$
1	$7K_c/3$	0
0	$6K_c$	

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} = \frac{36 * 0 - 4 * 0}{36} = 0 = a_{n-4}$$

$$b_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}} = \frac{\frac{7}{3}K_c * 6K_c - 36 * 0}{\frac{7}{3}K_c} = 6K_c = a_{n-3}$$

# Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

**Definizione:** (condizione necessaria e sufficiente per la stabilità)

La *condizione necessaria e sufficiente* affinché il sistema sia stabile è che tutte le radici dell'equazione caratteristica abbiano parte reale negativa. Perciò:

- I coefficienti dell'equazione caratteristica devono essere *tutti strettamente positivi*
- Gli elementi della **prima colonna** della tabella di Routh, devono essere tutti **positivi** (*criterio di Routh*)

Osservando la tabella di Routh si ha che:

- Ad ogni variazione di segno dei coefficienti della prima colonna corrisponde un polo a parte reale positiva
- Ad ogni permanenza di segno dei coefficienti della prima colonna corrisponde un polo a parte reale negativa

3	4	$3K_c$
2	36	$6K_c$
1	$7K_c/3$	0
0	$6K_c$	

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controreazione

3	4	$3K_c$
2	36	$6K_c$
1	$7K_c/3$	0
0	$6K_c$	

Si impone che tutti i coefficienti della prima colonna abbiano lo stesso segno, forzando quelli che presentano  $K_c$ . In questo modo si ricava l'intervallo di valori che assicura la stabilità del sistema a ciclo chiuso.

I primi due elementi della prima colonna della tabella di Routh (4 e 36) sono entrambi positivi. Si impone che gli elementi della prima colonna siano tutti positivi.

In questo modo si ricava l'intervallo di valori che assicura la **stabilità del sistema a ciclo chiuso**.

$$\begin{cases} \frac{7}{3}K_c > 0 \\ 6K_c > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_c > 0 \\ K_c > 0 \end{cases} \rightarrow \text{da cui } K_c > 0$$

che soddisfa entrambe le condizioni di stabilità.

# Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

**Domanda 2** – Determinare il **tipo di sistema** di controllo

Tipo del sistema

La notazione utilizzata è:

il sistema è di **tipo 0** quando in  $G(s)$  non sono presenti poli nell'origine;

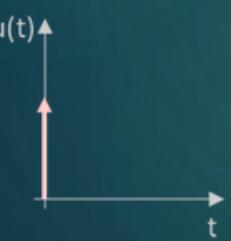
il sistema è di **tipo 1** quando in  $G(s)$  è presente un polo nell'origine;

il sistema è di **tipo 2** quando in  $G(s)$  sono presenti due poli nell'origine;

il sistema è di **tipo n** quando in  $G(s)$  sono presenti n poli nell'origine.

Tipo di segnale canonico

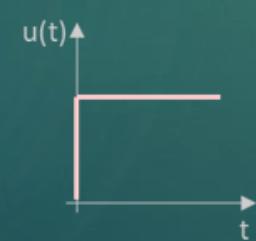
**Impulso (uso teorico)**



$$u(t) = \delta_0(t)$$

$$U(s) = 1$$

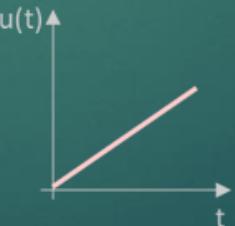
**Gradino**



$$u(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

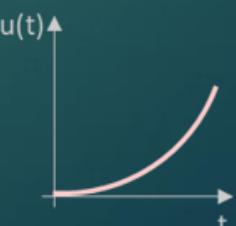
**Rampa**



$$u(t) = \delta_{-2}(t)$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

**Rampa parabolica**

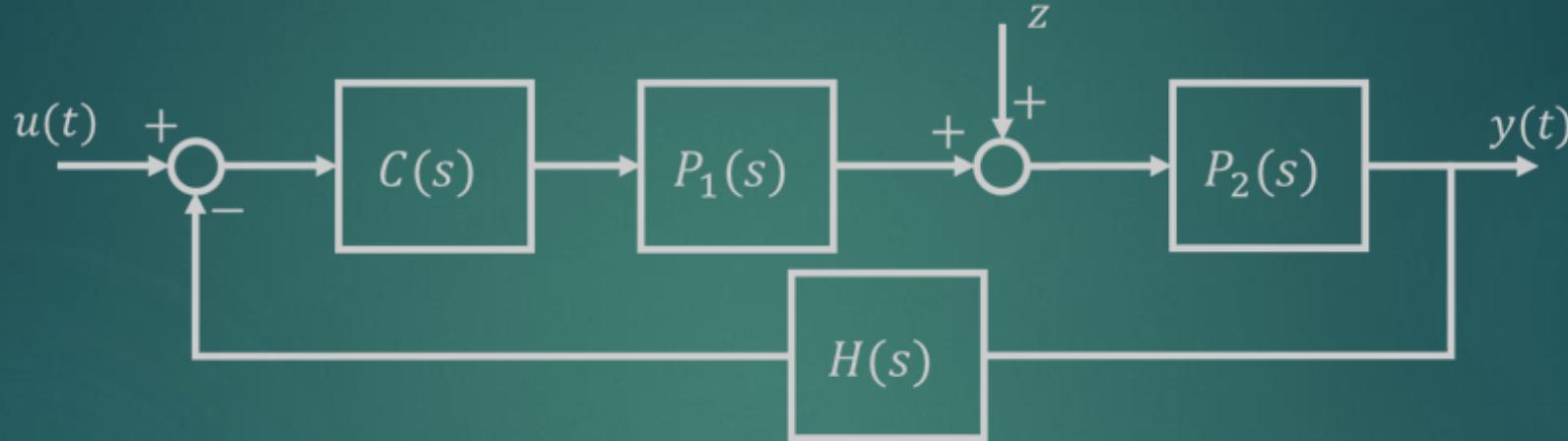


$$u(t) = \delta_{-3}(t)$$

$$U(s) = \frac{1}{s^3}$$

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

Si vuole determinare il **tipo di sistema di controllo**. Per fare ciò si considerano i poli nell'origine presenti nelle trasferenze sulla catena diretta. Il numero di poli nell'origine corrisponde al tipo di sistema.



$$C(s) = \frac{K_c}{s} \quad P_1(s) = \frac{s + 2}{s + 9} \quad P_2(s) = \frac{3}{s} \quad H(s) = 0,25$$

Nel caso in analisi, si riscontrano:

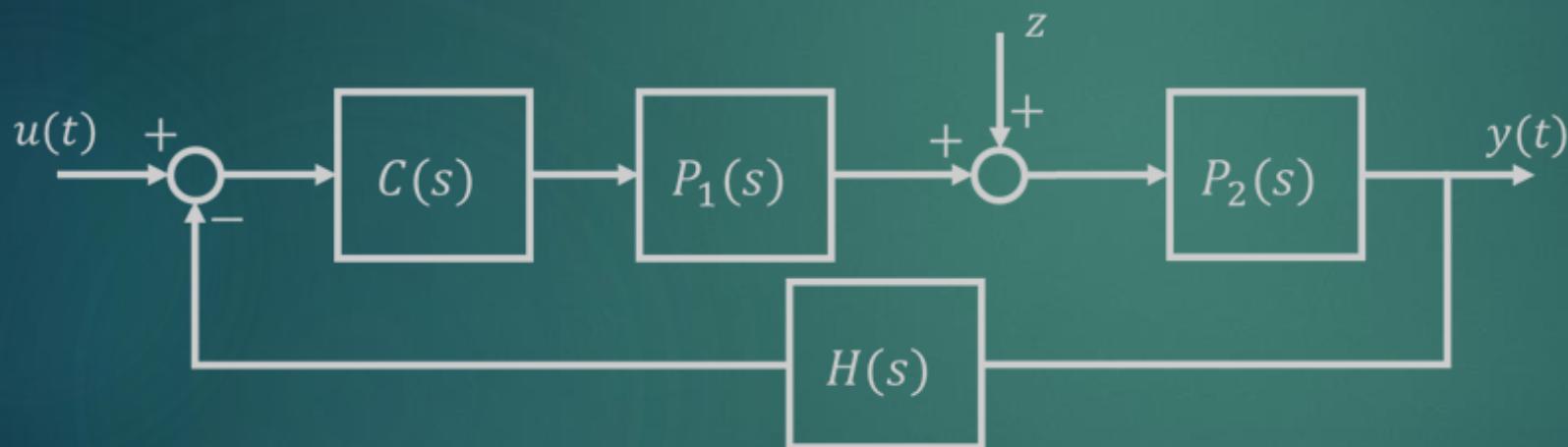
- un integratore in  $C(s) = \frac{K_c}{s}$
  - un integratore in  $P_2(s) = \frac{3}{s}$
- il sistema è di tipo 2

# Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

**Domanda 3** – Determinare se il sistema è **astatico** rispetto al disturbo costante **z**

Per determinare se il sistema è **astatico** rispetto al disturbo costante si deve valutare se il sistema presenta almeno un polo nell'origine a monte del punto in cui interviene il disturbo costante.

Se ciò viene riscontrato, allora il disturbo costante viene completamente **reiettato**. Il sistema risulta quindi **astatico** rispetto al disturbo costante



$$C(s) = \frac{K_c}{s} \quad P_1(s) = \frac{s+2}{s+9}$$
$$P_2(s) = \frac{3}{s} \quad H(s) = 0,25$$

Poiché si riscontra un integratore presente in  $C(s) = \frac{K_c}{s}$ , il disturbo a gradino costante viene completamente reiettato. Il sistema risulta quindi **astatico** rispetto al disturbo costante.

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

**Domanda 4 –** Determinare l'uscita permanente  $\mathbf{y}_p(t)$  con  $u(t) = 7\delta_{-3}(t)$  e  $z(t) = 0$

Si considerano:

- L'indice relativo all'ingresso canonico  $i$
- L'indice relativo al tipo del sistema  $h$  (poli nell'origine in catena diretta)

Si possono avere tre diverse situazioni:

1. Se il tipo di sistema è maggiore dell'indice relativo all'ingresso ( $h > i$ ), allora l'errore a regime è nullo  $e_r = 0$

L'uscita permanente si calcola come  $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{u}(t)\mathbf{K}_d$

2. Se il tipo di sistema è minore dell'indice relativo all'ingresso ( $h < i$ ), allora l'errore a regime è infinito  $e_r = \infty$

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

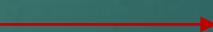
3. Se il tipo di sistema è uguale all'indice relativo all'ingresso ( $h = i$ ), allora l'errore a regime assume un valore costante, in particolare

$$\text{se } h = i = 0 \rightarrow e_r = \frac{K_d^2}{K_d + K_G} \quad \text{se } h = i > 0 \rightarrow e_r = \frac{K_d^2}{K_G}$$

l'uscita permanente si calcola come  $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{u}(t)K_d - e_r|\mathbf{u}(t)|$

$$\text{in cui } K_d = \frac{1}{H(s)} = 4 \text{ e } K_G = \lim_{s \rightarrow 0} s^h C(s) P_1(s) P_2(s)$$

Tabella nella quale è riportato il valore dell'errore a regime in funzione sia dell'ingresso canonico applicato che del tipo di sistema



	0	1	2
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{k_d^2}{k_d + K_G}$	0	0
$t\delta_{-1}(t)$	$\infty$	$\frac{k_d^2}{K_G}$	0
$\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$	$\infty$	$\infty$	$\frac{k_d^2}{K_G}$

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

Nel caso in analisi si osserva che:

- ▶ L'indice relativo all'ingresso canonico a rampa del secondo ordine  $i = 2$ ;
- ▶ L'indice relativo al tipo del sistema  $h = 2$ .

Poiché  $h = i = 2 > 0$  l'uscita permanente si calcola come  $y_p(t) = u(t)K_d - e_r|u(t)|$

In cui

$$e_r = \frac{K_d^2}{K_G} = \text{costante} \quad K_d = \frac{1}{H(s)} = 4$$

$$K_G = \lim_{s \rightarrow 0} s^h C(s) P_1(s) P_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_c}{s} \frac{s+2}{s+9} \frac{3}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3K_c(s+2)}{s+9} = \frac{6K_c}{9} = \frac{2}{3} K_c$$

Perciò si può calcolare l'errore a regime come

$$e_r = \frac{K_d^2}{K_G} = \frac{4^2}{\frac{2}{3} K_c} = 16 \frac{\frac{3}{2}}{K_c} = \frac{24}{K_c}$$

$$\text{Da cui l'uscita a regime } y_p(t) = u(t)K_d - e_r|u(t)| = 7\delta_{-3}4 - \frac{24}{K_c}7 == 28\delta_{-3} - \frac{168}{K_c} = \delta_{-3} - \frac{6}{K_c}$$

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

**Domanda 5** – Determinare l'uscita permanente  $\mathbf{y}_z(t)$  con  $u(t) = 0$  e  $z(t) = 2\delta_{-1}(t)$

Per valutare l'effetto del disturbo  $z(t)$  sul sistema, e quindi per calcolare l'uscita permanente del disturbo  $y_z(t)$  si considerano:

- L'indice relativo al tipo di disturbo  $i$
- L'indice relativo al numero di integratori a monte del disturbo  $h'$

Si possono avere tre diverse situazioni:

1. Se  $h' > i$ , allora l'uscita permanente del disturbo è  $\mathbf{y}_z(t) = \mathbf{0}$
2. Se  $h' < i$ , allora l'uscita permanente del disturbo è  $\mathbf{y}_z(t) = \infty$
3. Se  $h' = i$ , allora l'uscita permanente del disturbo assume un valore costante

Si può verificare calcolando

$$\mathbf{y}_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{W}_z(s) \mathbf{Z}(s)$$

$\begin{cases} W_z(s) \text{ funzione di trasferimento a ciclo chiuso del disturbo} \\ Z(s) \text{ è la trasformata di Laplace del disturbo} \end{cases}$

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

Per valutare l'effetto del disturbo  $z(t) = 2\delta_{-1}(t)$  sul sistema, e quindi per calcolare l'uscita permanente del disturbo  $y_z(t)$  si considerano:

L'indice relativo al disturbo a gradino  $i = 0$ ;

L'indice relativo al numero di integratori a monte del disturbo  $h' = 1$ .

Poiché  $h' > i$  allora l'uscita permanente del disturbo è  $\mathbf{y}_z(t) = \mathbf{0}$ .

Si può verificare sostituendo i valori nell'espressione dell'uscita

$$y_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W_z(s) Z(s)$$

$W_z(s)$  è la funzione di trasferimento a ciclo chiuso del disturbo definita come

$$W_z(s) = \frac{P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$$

$Z(s)$  è la trasformata di Laplace del disturbo

$$Z(s) = \frac{2}{s}$$

## Sintesi analitica dei sistemi di controllo a controllazione

Sostituendo i valori nella funzione di trasferimento a ciclo chiuso del disturbo si ha

$$W_z(s) = \frac{\frac{3}{s}}{1 + \frac{K_c}{s} \frac{s+2}{s+9} \frac{3}{s} \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{s}}{\frac{4s^2(s+9) + 3K_c(s+2)}{4s^2(s+9)}} = \frac{3}{s} \frac{4s^2(s+9)}{4s^2(s+9) + 3K_c(s+2)}$$

L'uscita permanente del disturbo si può ottenere come

$$\begin{aligned} y_z(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s W_z(s) Z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3}{s} \frac{4s^2(s+9)}{4s^2(s+9) + 3K_c(s+2)} \frac{2}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{24s(s+9)}{4s^2(s+9) + 3K_c(s+2)} = \frac{0}{6K_c} = 0 \quad c.v.d. \end{aligned}$$

# Fondamenti di Automatica

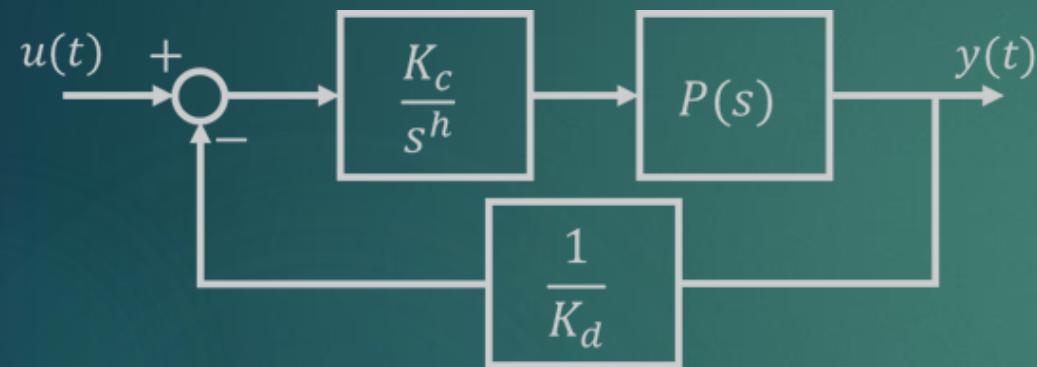
Parte 2

«Analisi e stabilizzazione dei sistemi di  
controllo a controllazione»

# Analisi e stabilizzazione dei sistemi di controllo a controllazione

L'obiettivo di un sistema di controllo è quello di intervenire su un processo in modo tale che questo soddisfi determinate **specifiche** e che, quindi, abbia un comportamento dinamico che sia **stabile**.

Si considera il generico sistema di controllo a controllazione



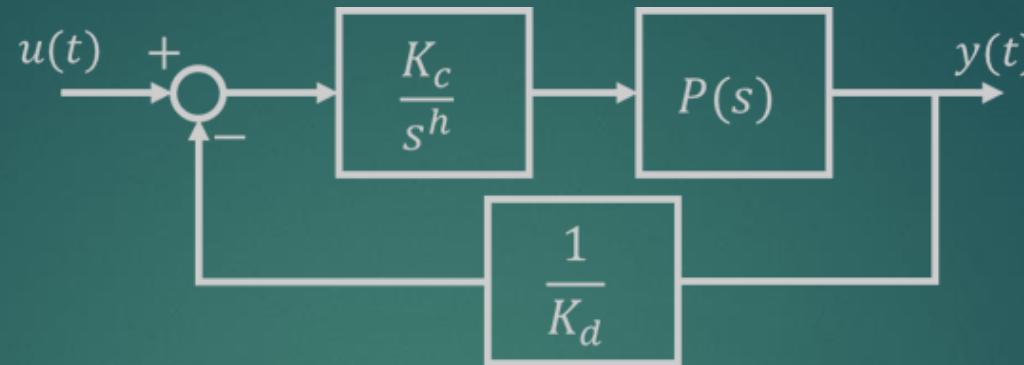
$u(t)$ , è il segnale di ingresso al sistema  
 $y(t)$ , è il segnale di uscita al sistema

$C(s) = \frac{K_c}{s^h}$ , è la funzione di trasferimento del controllore;

$P(s)$ , è la funzione di trasferimento del processo;

$H(s) = \frac{1}{K_d}$  è la funzione di trasferimento del trasduttore di misura;

## Analisi e stabilizzazione dei sistemi di controllo a controllazione



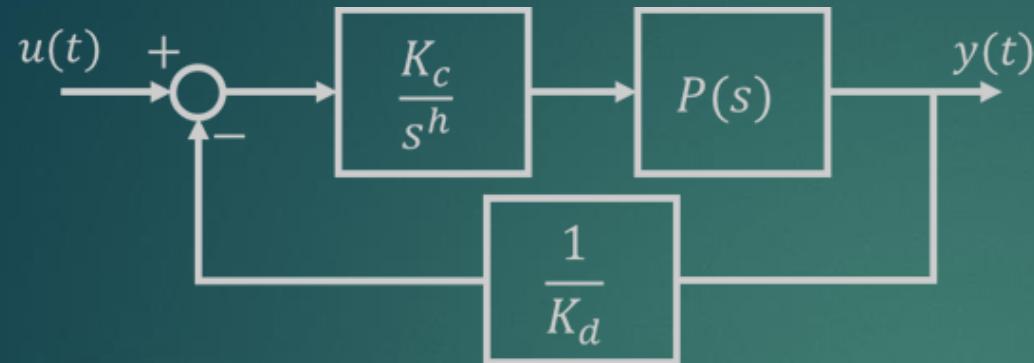
Il processo si può descrivere mediante la trasferenza:

$$P(s) = \frac{2 \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{\left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1 \right) \left( \frac{s}{80} + 1 \right)}$$

Si vuole sintetizzare il sistema di controllo, determinando  $h$  e  $K_c$ , considerando la seguente specifica:

- $K_d = 4$ ;
- l'errore per l'ingresso a rampa  $u(t) = 5\delta_{-2}(t)$  sia minore o uguale a 4, ossia  $e|u(t)| \leq 4$ .

# Analisi e stabilizzazione dei sistemi di controllo a contoreazione



$$P(s) = \frac{2 \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{\left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1 \right) \left( \frac{s}{80} + 1 \right)}$$

Si procede come segue:

1. Si considerano i seguenti indici:
  - L'indice  $i$ , relativo al tipo di ingresso canonico;
  - L'indice  $p$ , relativo al numero di poli nell'origine presenti nel processo  $P(s)$ .

In base al comportamento che viene richiesto da specifica, si definisce il tipo di sistema necessario

$$h = i - p, \text{ solo per valori di } h \text{ non negativi}$$

## Analisi e stabilizzazione dei sistemi di controllo a contoreazione

2. Il guadagno  $K_c$  del controllore si ottiene dalla specifica sull'errore rispetto al segnale d'ingresso, ricordando che l'errore a regime può essere scritto come

$$e = \frac{K_d^2}{k_d + K_G} \text{ se il sistema è di tipo 0} \quad e = \frac{K_d^2}{K_G} \text{ per gli altri tipi di sistema,}$$

in cui  $K_d$  è un dato del problema.  $K_G$  è il guadagno statico del sistema che si calcola come

$$K_G = \lim_{s \rightarrow 0} s^h C(s) P(s)$$

All'interno di questa espressione comparirà il guadagno  $K_c$  che potrà facilmente essere calcolato (l'unica incognita della disequazione rappresentata dalla specifica)

	0	1	2
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{k_d^2}{k_d + K_G}$	0	0
$t\delta_{-1}(t)$	$\infty$	$\frac{k_d^2}{K_G}$	0
$\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$	$\infty$	$\infty$	$\frac{k_d^2}{K_G}$

## Analisi e stabilizzazione dei sistemi di controllo a controcavazione

Considerando l'esempio in analisi si procede come segue:

1. Da specifica è richiesto che l'errore a regime per un ingresso a rampa sia minore o uguale ad un valore costante, in particolare  $e|u(t)| \leq 4$ .

Allora il sistema composto da  $C(s)$  e  $P(s)$  deve essere di **tipo 1** e quindi avere esattamente un polo nell'origine.

Osservando la funzione di trasferimento del processo si nota che non è presente alcun polo nell'origine, perciò questo deve necessariamente essere presente nel controllore, ossia in  $C(s)$ .

$$P(s) = \frac{2\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1\right)\left(\frac{s}{80} + 1\right)}$$

Si ha che

- L'indice  $i$ , relativo all'ingresso a rampa e pari a  $i = 1$ ;
- L'indice  $p$ , relativo al numero di poli nell'origine presenti nel processo è pari a  $p = 0$ ;

possiamo scrivere che  $\mathbf{h} = \mathbf{i} - \mathbf{p} = 1$

## Analisi e stabilizzazione dei sistemi di controllo a controcettazione

2. Il guadagno  $K_c$  del controllore  $C(s)$  si ottiene dall'espressione dell'errore tenendo in considerazione che il dato di specifica impone

$$e|u(t)| \leq 4 \quad \text{in cui} \quad |u(t)| = 5.$$

Poiché il sistema è di tipo 1 e il segnale a rampa è di indice 1, l'errore a regime è

$$e = \frac{K_d^2}{K_G} \quad \text{in cui } K_d = 4, \text{ dato del problema}$$

$K_G$  si calcola come

$$K_G = \lim_{s \rightarrow 0} s^h C(s) P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c}{s} \frac{2 \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{\left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1 \right) \left( \frac{s}{80} + 1 \right)} = K_c \frac{2}{1} = 2K_c$$

Ottenuto il valore di  $K_c$ , questo può essere sostituito all'interno della specifica dell'errore e si ottiene

$$e|u(t)| = \frac{K_d^2}{K_G} \cdot 5 = \frac{16}{2K_c} \cdot 5 \leq 4 \quad \text{da cui } K_c \geq 10$$

# Fondamenti di Automatica

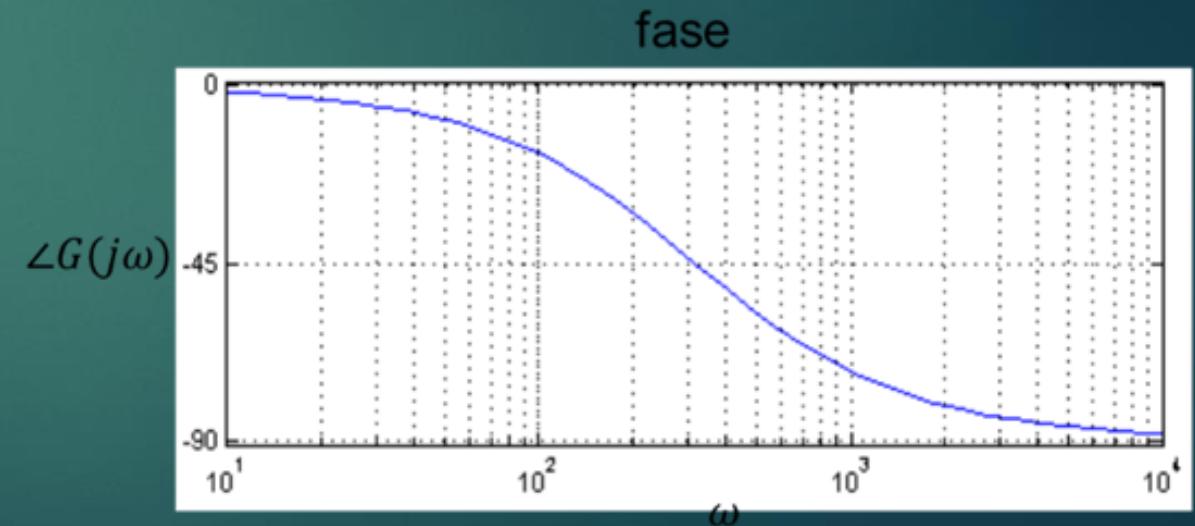
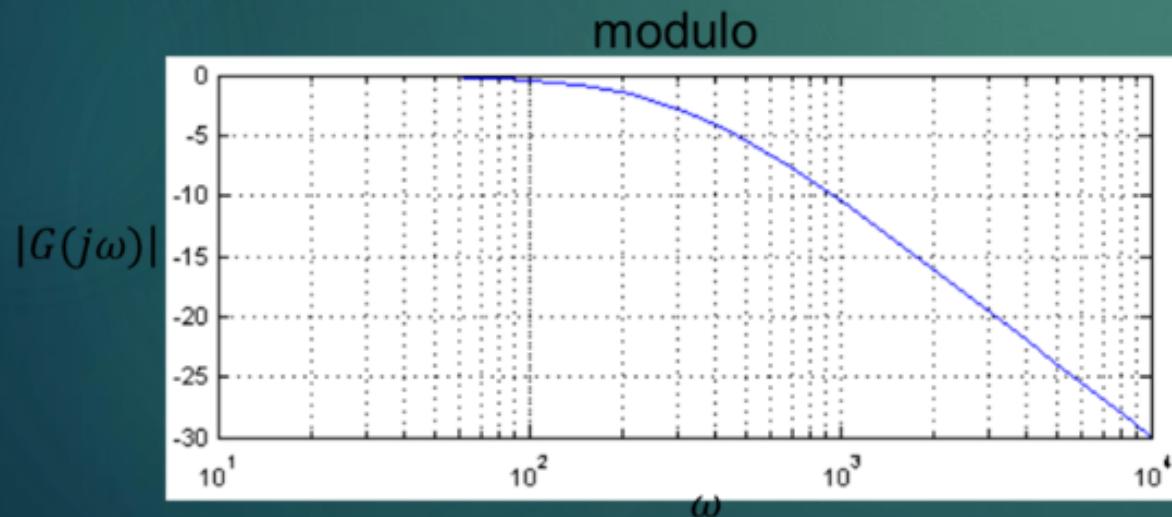
Parte 3

«Rappresentazione tramite diagrammi di Bode  
della funzione Risposta Armonica»

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

La rappresentazione esplicita del modulo e della fase sottoforma di logaritmi in base dieci, ossia i *diagrammi di Bode*, impiega una rappresentazione cartesiana semilogaritmica, utilizzando:

- ▶ Per l'asse delle ascisse una **scala logaritmica** della pulsazione  $\omega$ ;
- ▶ Per l'asse delle ordinate
  - ▶ Scala **lineare** per le fasi;
  - ▶ Scala in **decibel** per i moduli



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

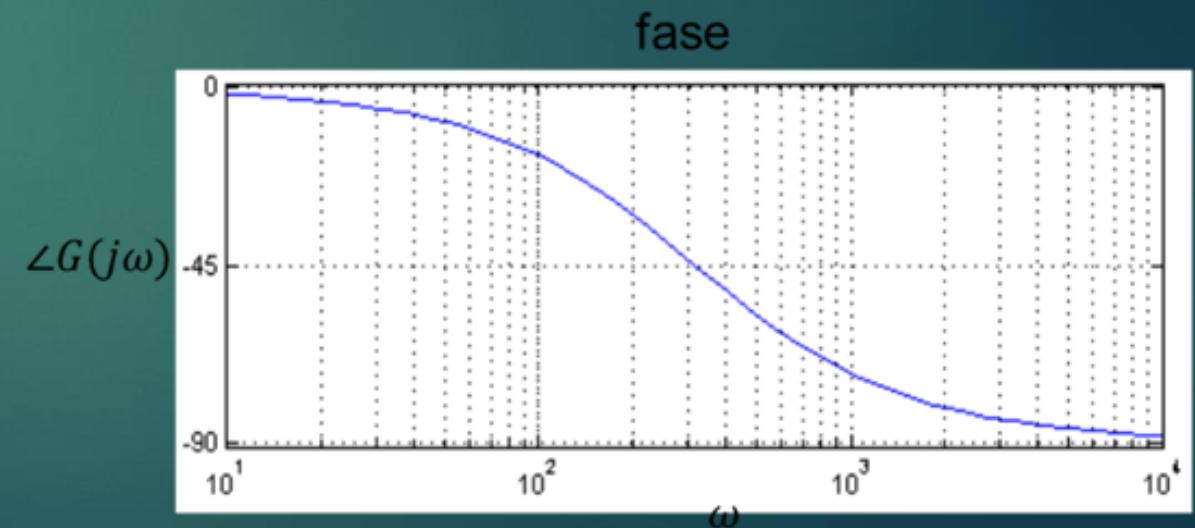
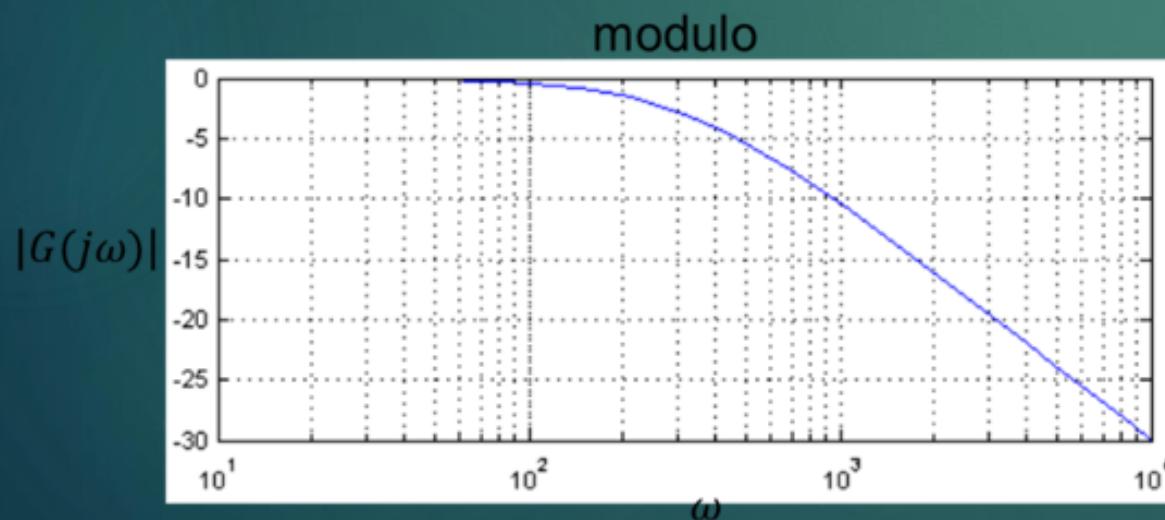
L'asse delle *ascisse* viene suddiviso in intervalli, di uguale lunghezza, pari a multipli decimali della pulsazione  $\omega$  che vengono detti *decadi*. Nell'ambito di ogni decade la scala di rappresentazione è logaritmica.

Operativamente, nel passaggio da una pulsazione  $\omega_1$  ad una pulsazione  $\omega_2$ , vi è un incremento di **una decade** quando il rapporto tra  $\omega_1$  e  $\omega_2$  è pari a dieci.

Ad esempio, l'ampiezza dell'intervallo per passare da:

$\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$  a  $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$  è di una decade;

$\omega_1 = 2,2 \text{ rad/s}$  a  $\omega_2 = 220 \text{ rad/s}$  è di due decadi.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

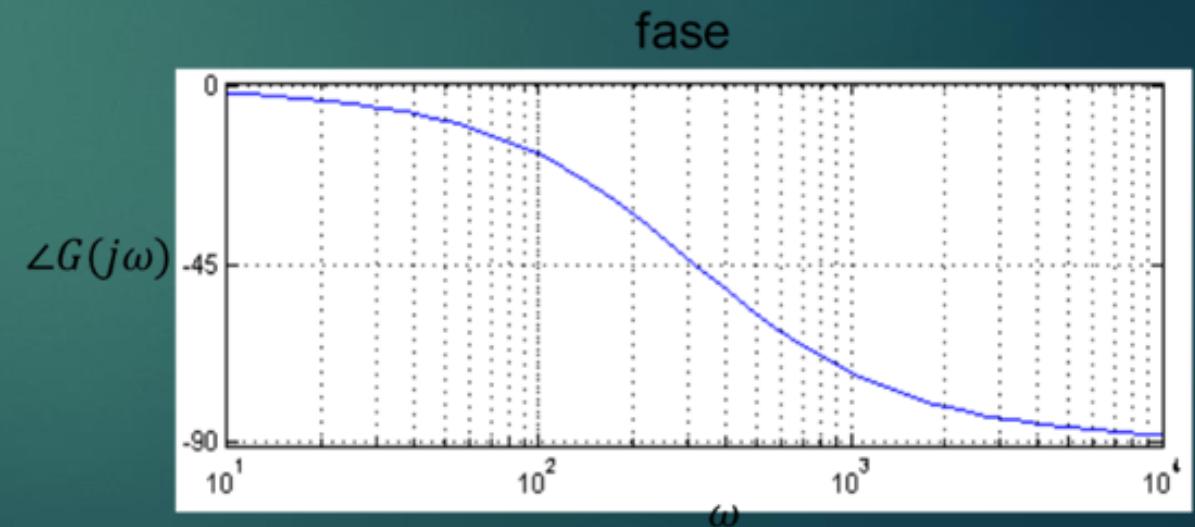
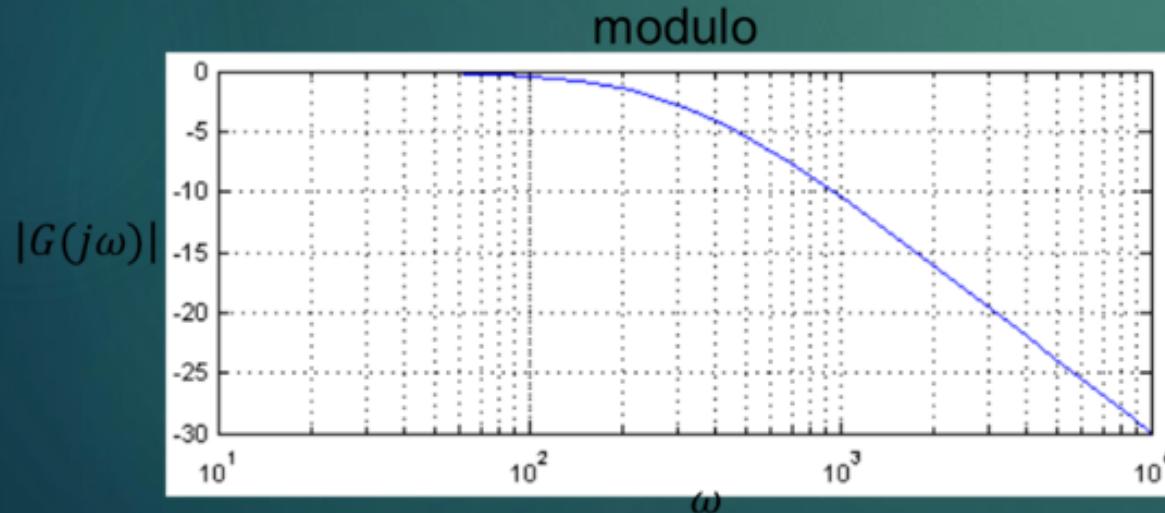
L'asse delle ordinate assume due diverse scale:

Per i diagrammi delle fasi, la scala adottata è lineare e definita quindi in *gradi angolari di sfasamento*;

Per i diagrammi dei moduli, viene impiegata come unità per l'asse delle ordinate dei moduli il *decibel*, definito in questo caso come:

$$20 \log \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = 20 \log |G(j\omega)|$$

che viene indicato con il simbolo *dB*.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

La funzione **Risposta Armonica** di un sistema lineare può essere espressa come

$$G(j\omega) = K \frac{j\omega^l \prod(1 + j\omega\tau_{z_i}) \prod \left(1 + 2j\zeta_{z_i} \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,z_i}^2}\right)}{j\omega^h \prod(1 + j\omega\tau_{p_i}) \prod \left(1 + 2j\zeta_{p_i} \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,p_i}^2}\right)}$$



$$G(j\omega) = G_0 \frac{G_{1N}^l(j\omega) \prod G_{2N}(j\omega) \prod G_{3N}(j\omega)}{G_{1D}^h(j\omega) \prod G_{2D}(j\omega) \prod G_{3D}(j\omega)}$$

$G_0 = K \rightarrow$  guadagno statico

$G_2(j\omega) = 1 + j\omega\tau \rightarrow$  termine binomio

$G_1(j\omega) = j\omega \rightarrow$  termine monomio

$G_3(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \rightarrow$  termine trinomio

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## Rappresentazione della funzione $G_0$ :

La funzione  $G_0$  rappresenta una costante reale  $K$ ,  $G_0 = K$ ,

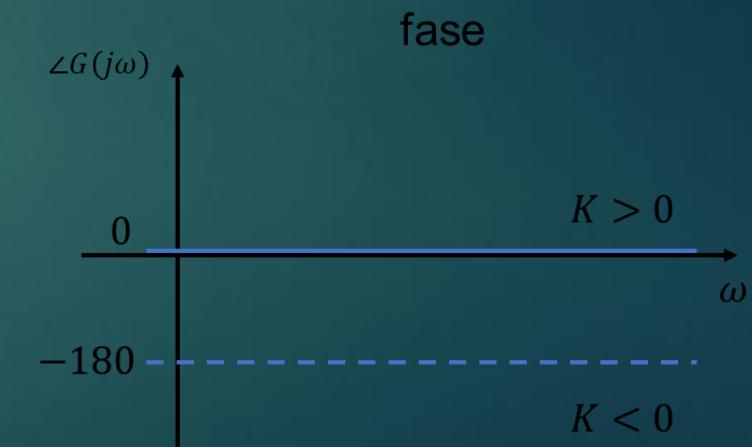
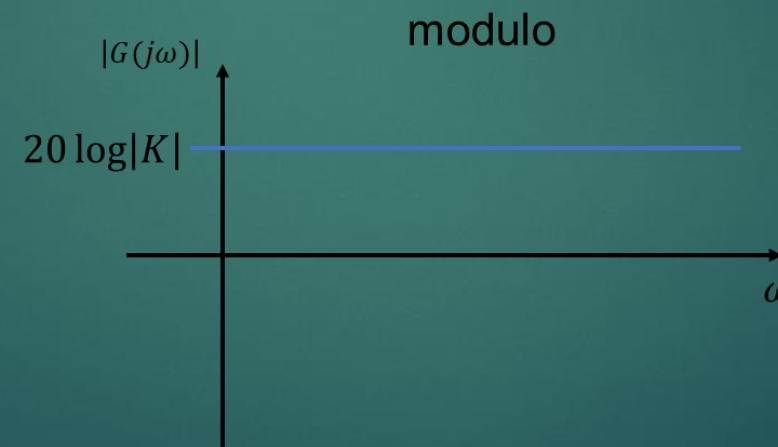
Il diagramma dei moduli è dato da una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in  $20\log|K|dB$ ;

Il diagramma delle fasi:

Nel caso di  $K$  positiva, coincide con l'asse delle ascisse;

Nel caso di  $K$  negativa, coincide con una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza di un valore pari a  $-180^\circ$ .

$$G_0 = K = \begin{cases} |K|_{dB} = 20 \log|K| \\ \angle G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & K > 0 \\ -180^\circ, & K < 0 \end{cases} \end{cases}$$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

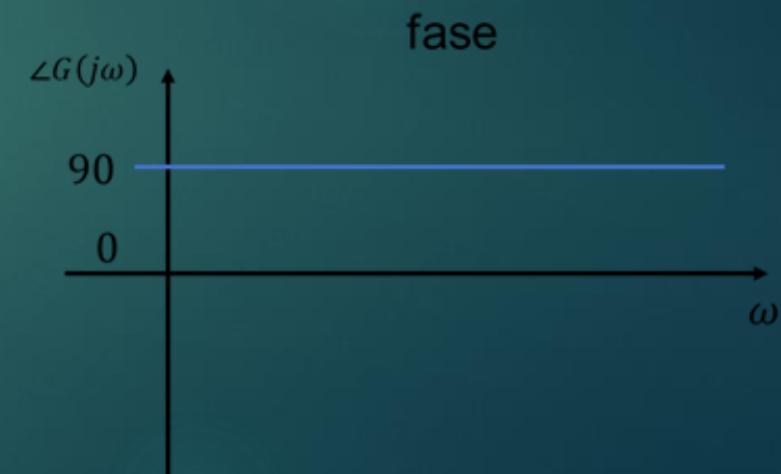
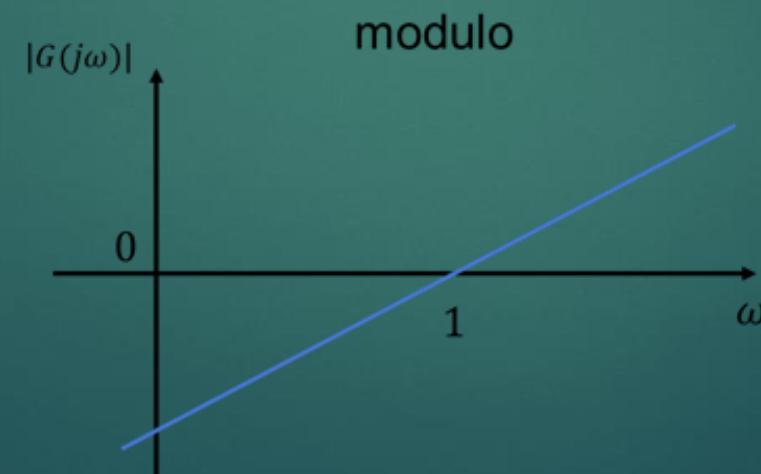
## Rappresentazione della funzione $G_{1N}$ :

La funzione  $G_{1N}(j\omega) = j\omega$  rappresenta una radice nell'origine del polinomio a numeratore.

Il modulo della funzione vale  $|G_{1N}(j\omega)|_{dB} = 20 \log|j\omega| = 20 \log \omega$ . Il diagramma è rappresentato da una retta di pendenza pari a  $+20 \text{ dB/dec}$  che interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ .

La fase della funzione vale  $\angle G_{1N}(j\omega) = \angle j\omega = \arctan \frac{\omega}{0} = 90^\circ$ . Il diagramma è rappresentato da una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza ad un valore pari a  $+90^\circ$ .

$$G_{1N} = \begin{cases} |G_{1N}(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega \\ \angle G_{1N}(j\omega) = 90^\circ \end{cases}$$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

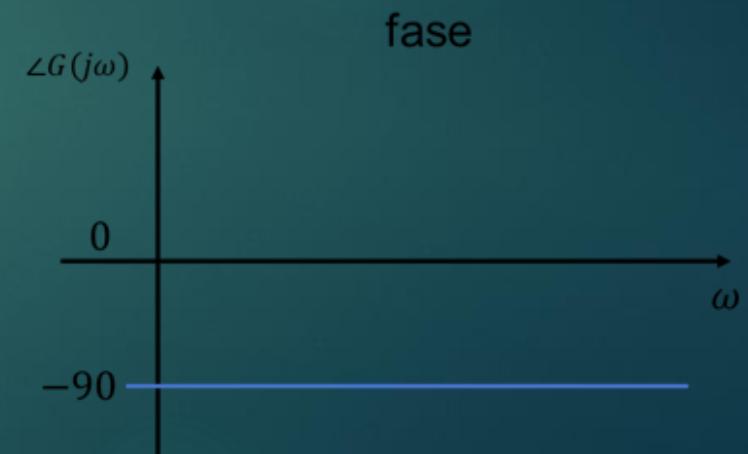
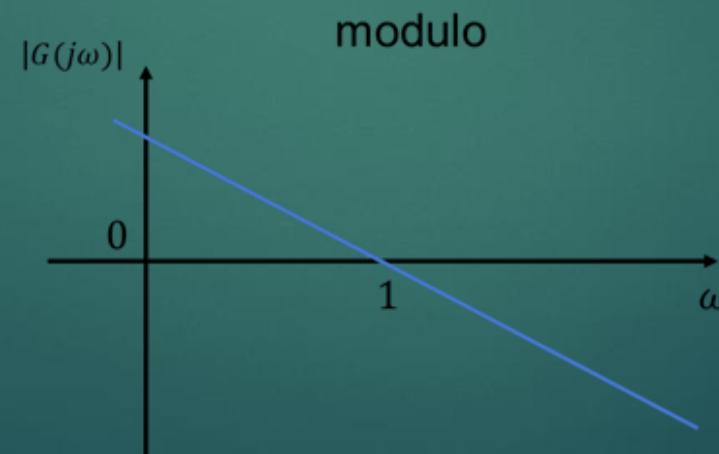
## Rappresentazione della funzione $G_{1D}$ :

La funzione  $G_{1D}(j\omega) = (j\omega)^{-1}$  rappresenta una radice nell'origine del polinomio a denominatore.

Il modulo della funzione vale  $|G_{1D}(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$ . Il diagramma è rappresentato da una retta di pendenza pari a  $-20 \text{ dB/dec}$  che interseca l'asse delle ascisse in  $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ .

La fase della funzione vale  $\angle G_{1D}(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle j\omega = -90^\circ$ . Il diagramma è rappresentato da una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza di  $-90^\circ$ .

$$G_{1D} = \begin{cases} |G_{1D}(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega \\ \angle G_{1D}(j\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



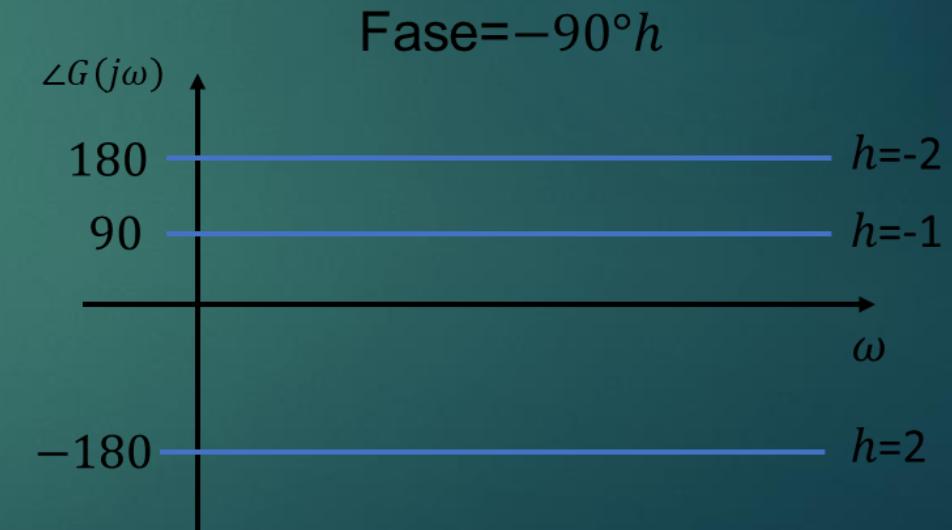
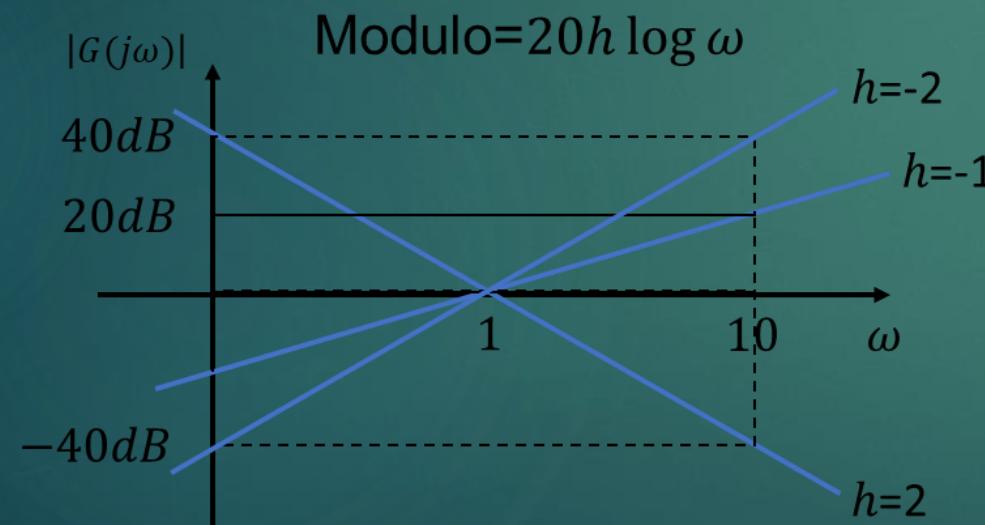
# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## Osservazione sulla funzione $G_{1D}$ :

Se gli zeri o i poli nell'origine hanno molteplicità maggiore di uno:

Il diagramma dei moduli corrisponde ad una retta di pendenza pari a  $\pm 20\text{dB/dec}$ , moltiplicata per il valore della molteplicità;

Il diagramma delle fasi corrisponde ad una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza ad un valore pari a  $\pm 90^\circ$ , moltiplicato anche esso per il valore della molteplicità.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## **Importante proprietà:**

Grazie alla rappresentazione analitica della funzione di Risposta Armonica tramite logaritmi, si ha che: Il modulo risulta

$$|G_{xD}(j\omega)|_{dB} = -|G_{xN}(j\omega)|_{dB}$$

Analogamente per le fasi si può scrivere

$$\angle G_{xD}(j\omega) = -\angle G_{xN}(j\omega)$$

## **Il punto di rottura:**

Nell'affrontare lo studio dei fattori  $G_2(j\omega)$  è conveniente utilizzare una *trattazione approssimata* che consente di tracciare in modo semplice i diagrammi di Bode. Si parla di *diagrammi di Bode asintotici*.

Si definisce il *punto di rottura*, dato dall'inverso della costante di tempo in modulo

$$\text{punto di rottura} = \frac{1}{|\tau|}$$

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## Rappresentazione della funzione $G_{2N}$ :

La funzione  $G_{2N}(j\omega) = 1 + j\omega\tau$  rappresenta uno zero reale.

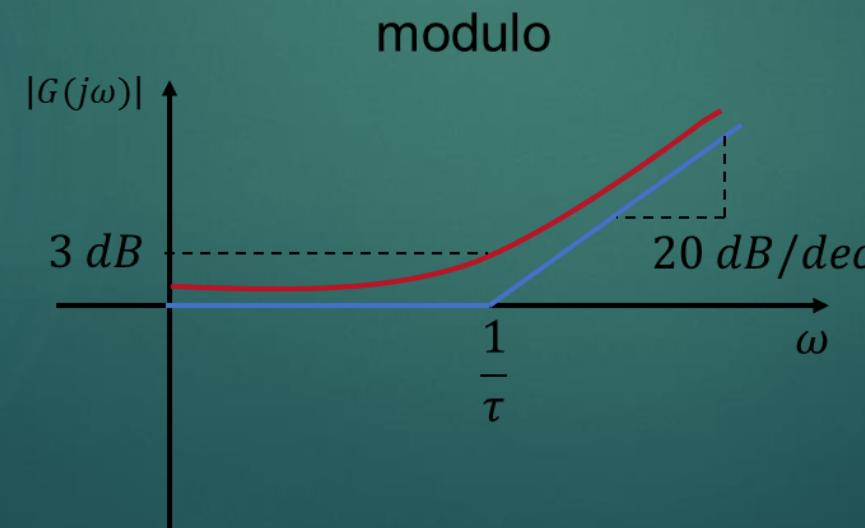
Il modulo della funzione vale

$$|G_{2N}(j\omega)|_{dB} = |1 + j\omega\tau|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} = 10 \log(1 + \omega^2\tau^2)$$

Il diagramma asintotico è rappresentato da:

Una semiretta che coincide con l'asse delle ascisse, per  $\omega < \frac{1}{|\tau|}$ ;

Una semiretta di pendenza pari a  $+20 \text{ dB/dec}$  con origine dall'asse delle ascisse in corrispondenza del punto di rottura, per  $\omega \geq \frac{1}{|\tau|}$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## Rappresentazione della funzione $G_{2N}$ :

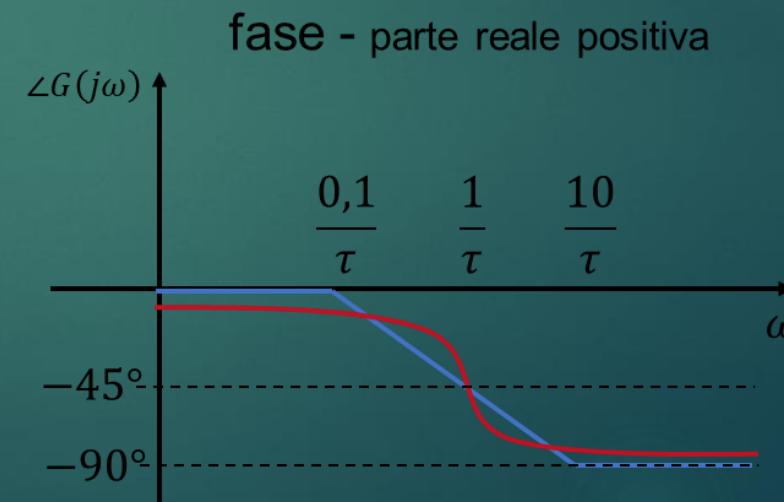
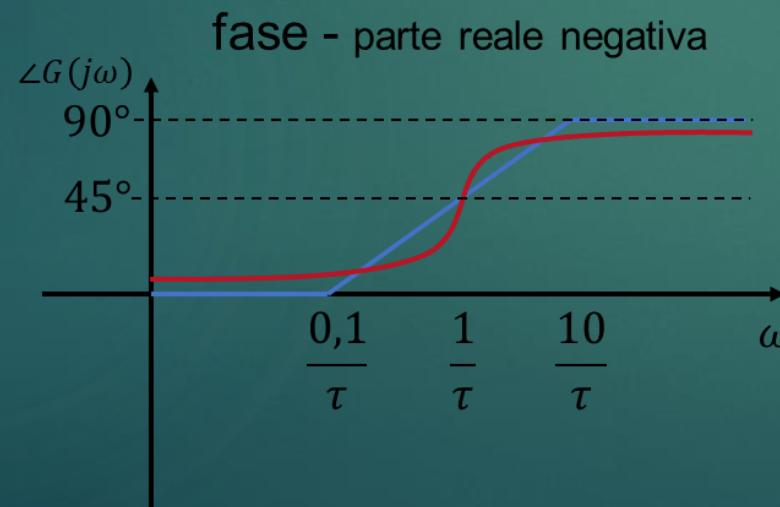
Quindi il diagramma asintotico delle fasi è rappresentato da:

Una semiretta coincidente con l'asse delle ascisse, per  $\omega < \frac{0,1}{|\tau|}$

Un segmento di retta inclinato di  $\pm 45^\circ/\text{dec}$ , per  $\frac{0,1}{|\tau|} < \omega < \frac{10}{|\tau|}$

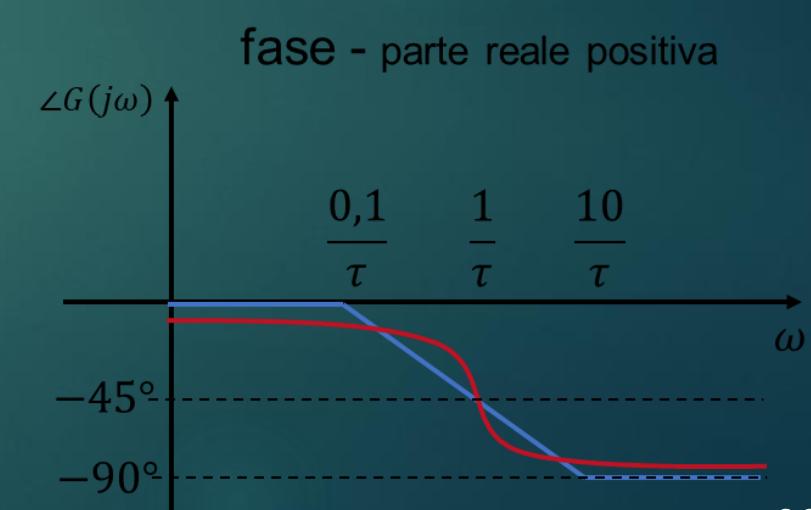
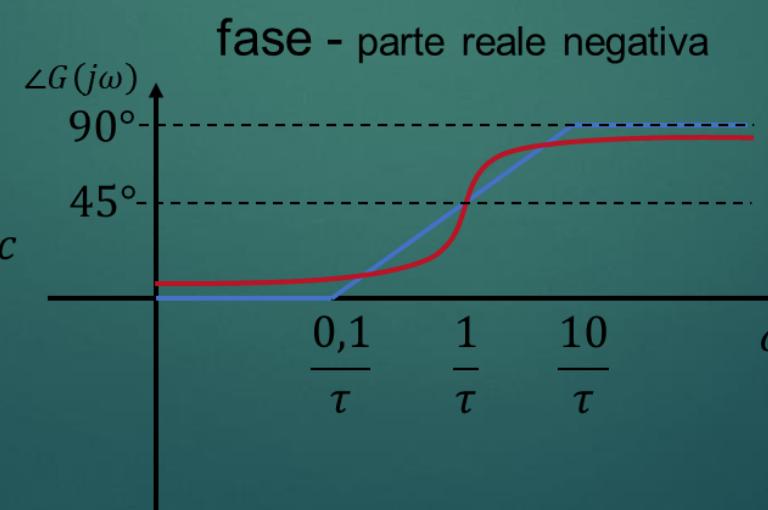
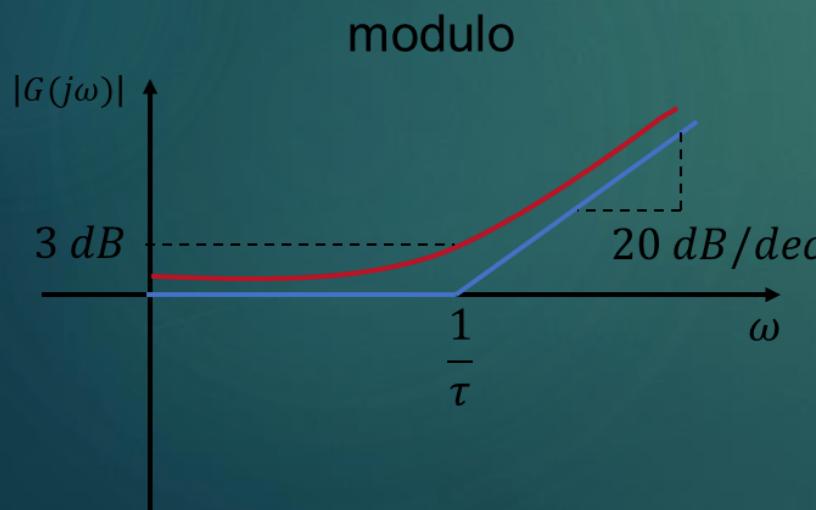
Una semiretta orizzontale parallela all'asse delle ascisse e che interseca l'asse delle ordinate in  $\pm 90^\circ$ , per  $\omega > \frac{10}{|\tau|}$

Il segno + o - dipende dal segno assunto dalla costante di tempo.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

$$G_{2N} = \begin{cases} |G_{2N}(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{1}{|\tau|} \\ semiretta di pendenza + 20d B/dec, & \omega \geq \frac{1}{|\tau|} \end{cases} \\ \angle G_{2N}(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{0,1}{|\tau|} \\ segmento di pendenza \pm 45^\circ/dec, & \frac{0,1}{|\tau|} \leq \omega \leq \frac{10}{|\tau|} \\ \pm 90, & \omega > \frac{10}{|\tau|} \end{cases} \end{cases}$$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## Rappresentazione della funzione $G_{2D}$ :

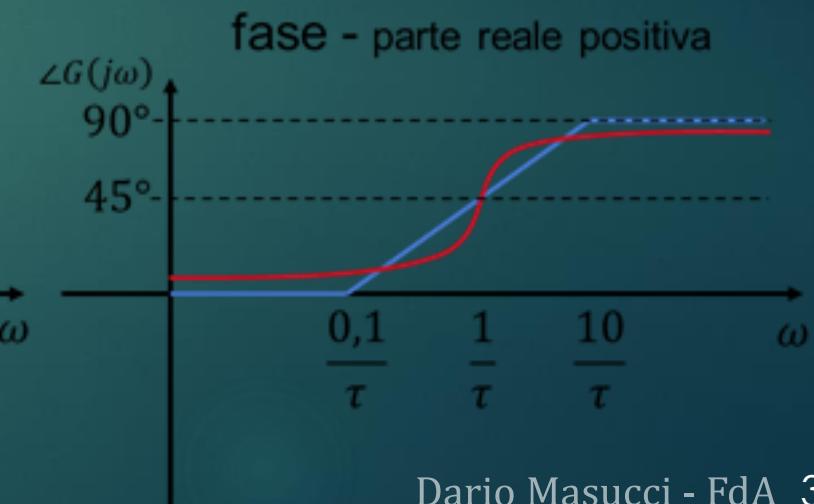
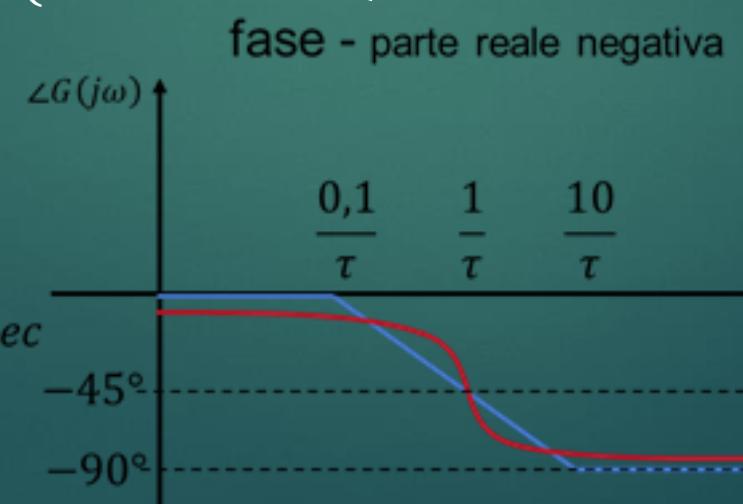
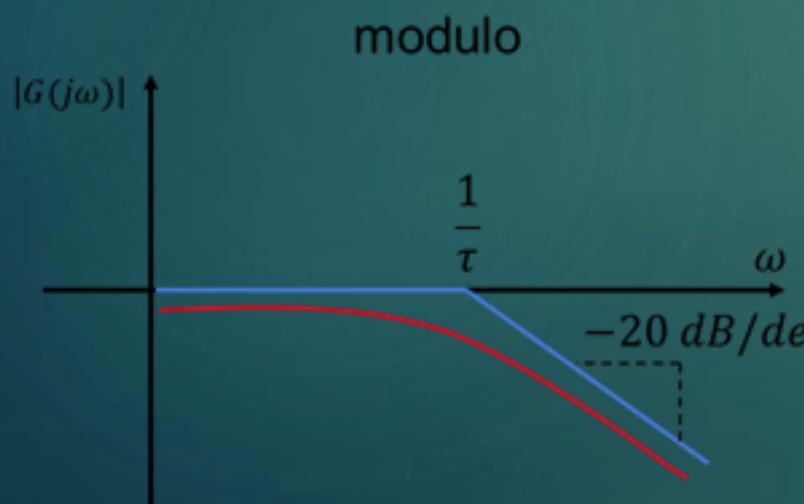
La funzione  $G_{2D}(j\omega)$  rappresenta uno zero reale.

Ricordando che:

$$|G_{xD}(j\omega)|_{dB} = -|G_{xN}(j\omega)|_{dB}$$

$$\angle G_{xD}(j\omega) = -\angle G_{xN}(j\omega)$$

$$G_{2D} = \begin{cases} |G_{2D}(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{1}{|\tau|} \\ semiretta di pendenza - \frac{20dB}{dec}, & \omega \geq \frac{1}{|\tau|} \end{cases} \\ \angle G_{2D}(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{0,1}{|\tau|} \\ segmento di pendenza \pm 45^\circ / dec, & \frac{0,1}{|\tau|} \leq \omega \leq \frac{10}{|\tau|} \\ \pm 90, & \omega > \frac{1}{|\tau|} \end{cases} \end{cases}$$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

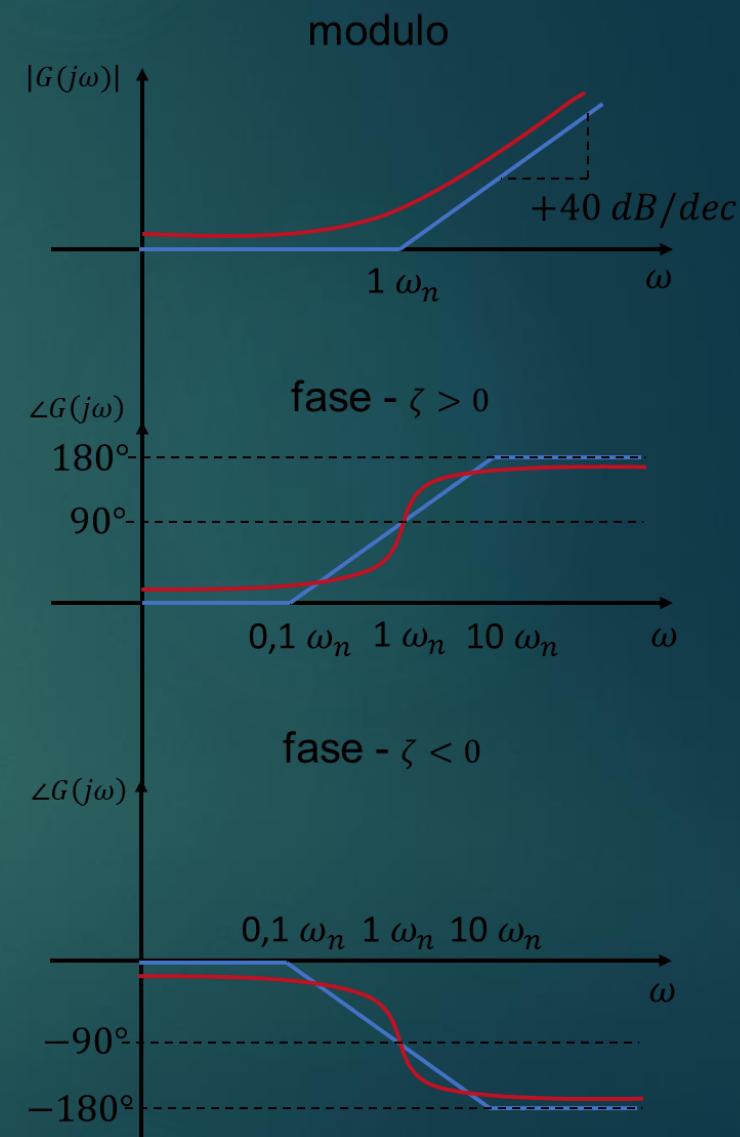
## Rappresentazione della funzione $G_{3N}$ :

La funzione  $G_{3N}$  rappresenta una coppia di zeri complessi coniugati

$$G_{3N}(j\omega) = 1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$$

Il *punto di rottura* vale  $\frac{\omega}{\omega_n}$

$$G_{3N}(j\omega) = \begin{cases} |G_{3N}(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\omega}{\omega_n} < 1 \\ semiretta pendenza \pm 40d B/d ec, & \frac{\omega}{\omega_n} \geq 1 \end{cases} \\ \angle G_{3N}(j\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\omega}{\omega_n} < 0,1 \\ segmento pendenza \pm 90^\circ/d ec, & 0,1 \leq \frac{\omega}{\omega_n} < 10 \\ \pm 180, & \frac{\omega}{\omega_n} \geq 10 \end{cases} \end{cases}$$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

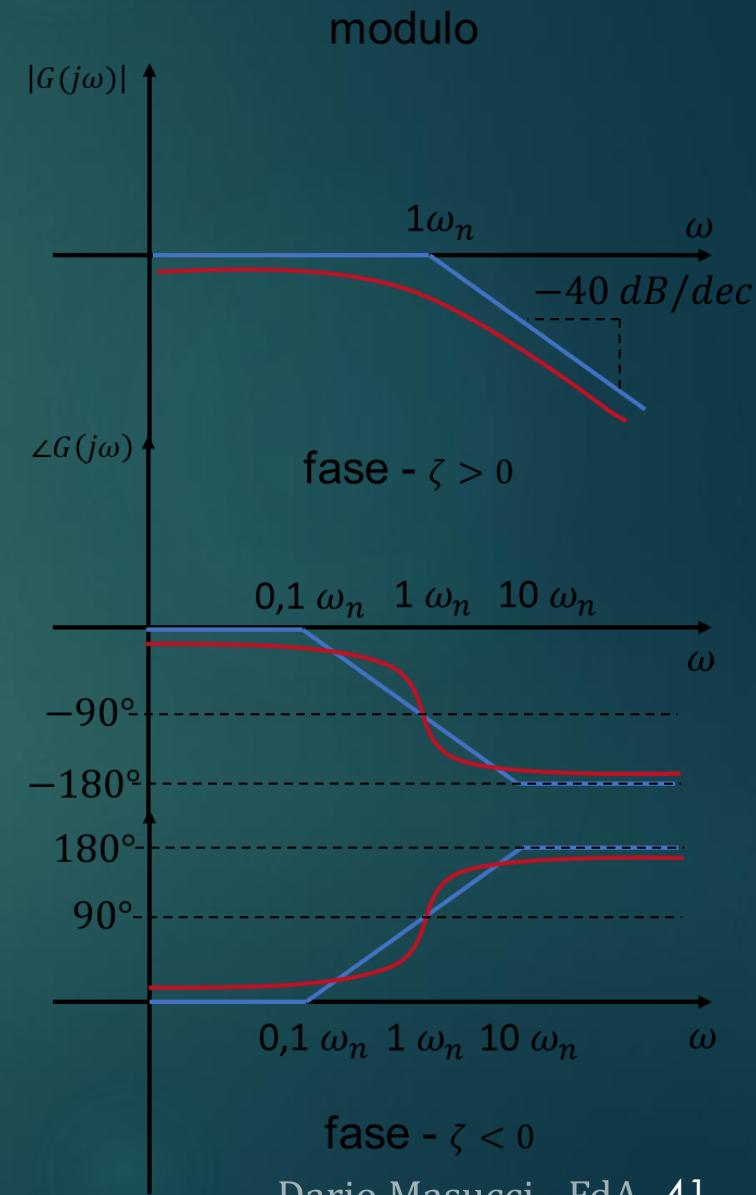
## Rappresentazione della funzione $G_{3D}$ :

La funzione  $G_{3D}$  rappresenta una coppia di poli complessi coniugati

$$|G_{xD}(j\omega)|_{dB} = -|G_{xN}(j\omega)|_{dB}$$

$$\angle G_{xD}(j\omega) = -\angle G_{xN}(j\omega)$$

$$G_{3D}(j\omega) = \begin{cases} |G_{3D}(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\omega}{\omega_n} < 1 \\ semiretta pendenza \pm 40d B/d ec, & \frac{\omega}{\omega_n} \geq 1 \end{cases} \\ \angle G_{3D}(j\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\omega}{\omega_n} < 0,1 \\ segmento pendenza \pm 90^\circ/d ec, & 0,1 \leq \frac{\omega}{\omega_n} < 10 \\ \pm 180, & \frac{\omega}{\omega_n} \geq 10 \end{cases} \end{cases}$$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## Rappresentazione esatta della funzione $G_3$ :

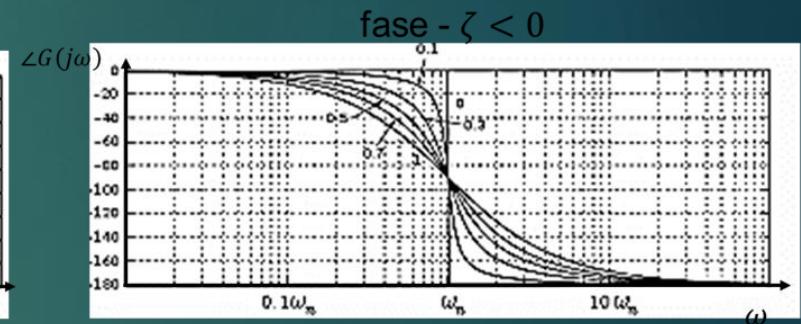
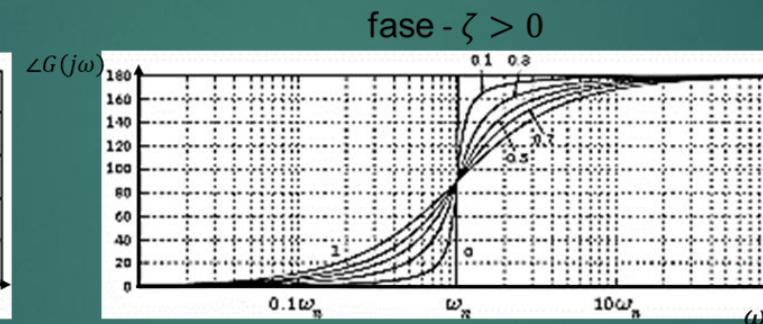
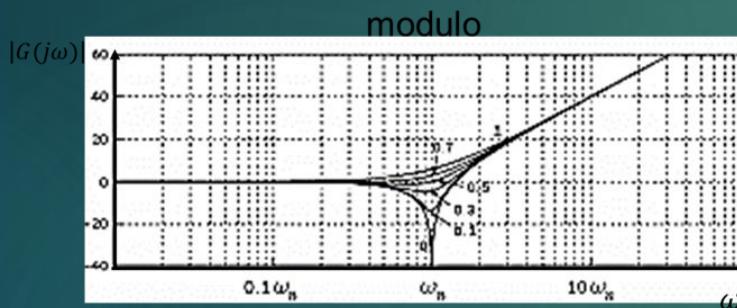
Si considera il *coefficiente di smorzamento*  $\zeta$ , si ha che:

Per valori  $|\zeta| < 1$  le radici sono complesse coniugate;

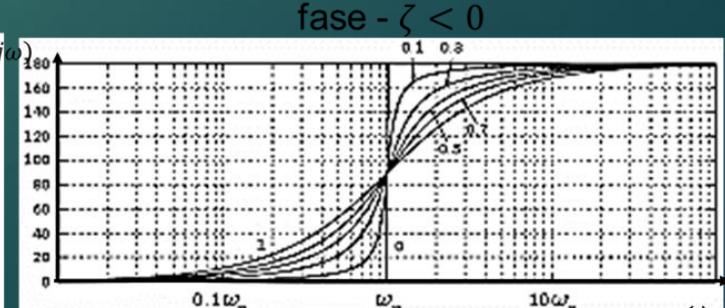
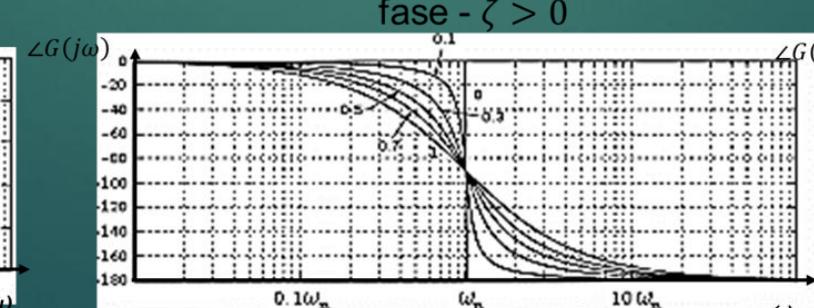
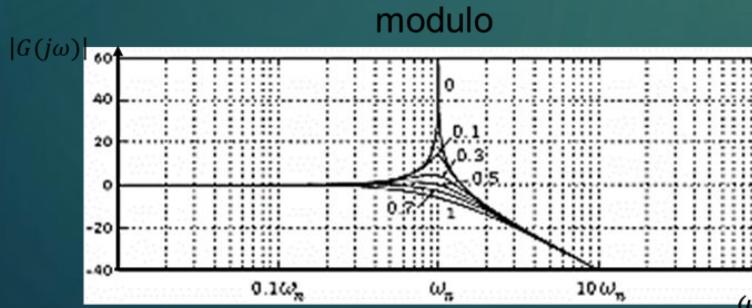
Per valori  $|\zeta| = 1$  le radici sono reali coincidenti;

Per valori  $|\zeta| = 0$  le radici sono immaginarie.

$G_{3N}$



$G_{3D}$



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## **Sistemi a fase minima e a fase non minima:**

I sistemi che, a ciclo aperto hanno tutti i poli e gli zeri allocati nel semipiano complesso negativo, sono detti *sistemi a fase minima*.

Altrimenti, se presentano uno o più zeri e/o poli allocati nel semipiano complesso positivo, sono detti *sistemi a fase non minima*.

Il tracciamento dei moduli dei fattori  $G_2(j\omega)$  non risente della distinzione

Quindi poli e zeri positivi hanno lo stesso diagramma dei moduli dei poli e degli zeri negativi.

Il tracciamento delle fasi dei fattori  $G_2(j\omega)$ , risente della distinzione. Essi invertono la loro fase a seconda che siano allocati in un semipiano complesso o nell'altro.

Il polo positivo ha un comportamento uguale a quello dello zero negativo, e quindi con fase crescente;

Lo zero positivo ha un comportamento uguale a quello di un polo negativo, e quindi con fase decrescente.

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

## *Margine di fase e margine di guadagno:*

Si tracciano i diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica associata al sistema a ciclo aperto  $F(j\omega)$ . Si definiscono:

$\omega_t \rightarrow$  **pulsazione di attraversamento**: punto in cui diagramma dei moduli interseca l'asse delle ascisse

$\varphi(\omega_t) \rightarrow$  **Fase**, letta nel diagramma delle fasi, **in corrispondenza della pulsazione  $\omega_t$**

$m_\varphi \rightarrow$  **margini di fase**: valore assoluto della differenza

$$\varphi(\omega_t) - 180^\circ$$

$\omega_{-\pi} \rightarrow$  punto in cui il **diagramma delle fasi** interseca la **retta** parallela all'asse delle ascisse che interseca le ordinate in **-180°**

$M_{dB}(\omega_{-\pi}) \rightarrow$  **Modulo**, letto nel diagramma dei moduli, **in corrispondenza della pulsazione  $\omega_{-\pi}$**

$m_g \rightarrow$  **margini di guadagno**: Valore del  $M_{dB}(\omega_{-\pi})$  in modulo

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

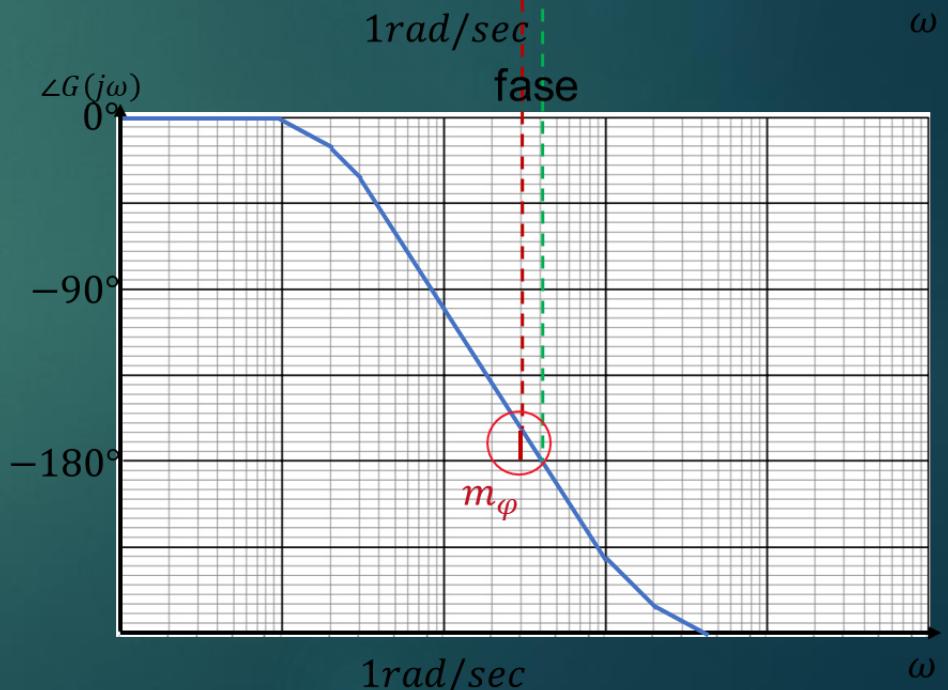
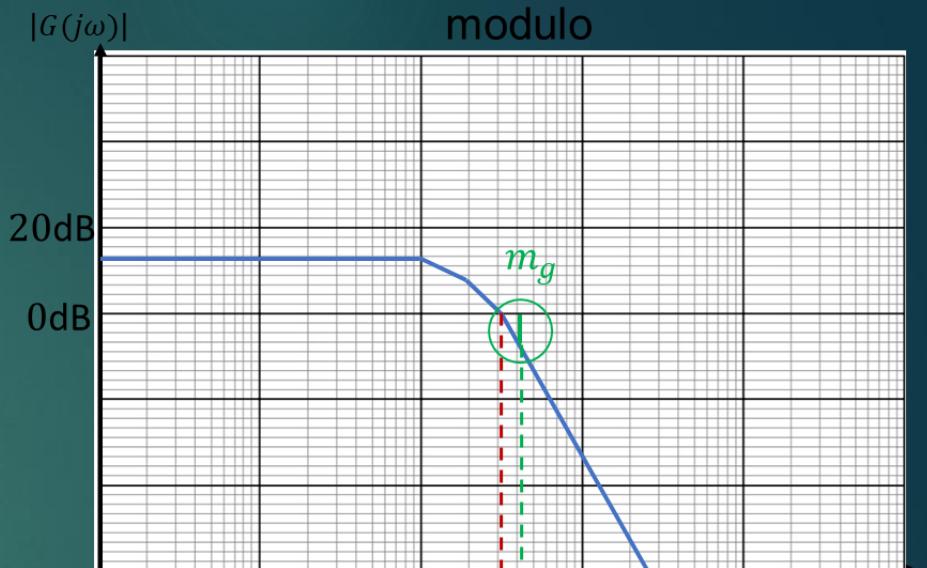
## Criterio di Bode

La condizione **necessaria e sufficiente** per la stabilità di un sistema a ciclo chiuso  $W(j\omega)$  è che i diagrammi di Bode del relativo sistema a ciclo aperto  $F(j\omega)$  presentino un **margine di fase e un margine di guadagno adeguati**. Di norma si considera adeguata la stabilità del sistema a ciclo chiuso se risulta:

$$m_g \rightarrow \text{da } 3\text{dB a } 6\text{dB} \quad m_\varphi \rightarrow \text{da } 30^\circ \text{ a } 60^\circ$$

Questa metodologia permette di valutare quanto un sistema sia **lontano dall'instabilità**.

Operativamente si deve verificare che i diagrammi di Bode del sistema a ciclo aperto  $F(j\omega)$  presentino un **margine di fase e un margine di guadagno in grado di soddisfare le specifiche di progetto richieste**.



## Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

Considerando l'esempio in analisi, si calcola la funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(s)$  del sistema come

$$\begin{aligned} F(s) &= C(s)P(s)H(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot P(s) \cdot \frac{1}{K_d} = \frac{10}{s} \cdot \frac{2\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1\right)\left(\frac{s}{80} + 1\right)} \cdot \frac{1}{4} = \\ &= \frac{5\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{s\left(\frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1\right)\left(\frac{s}{80} + 1\right)} \end{aligned}$$

Si individuano i fattori che compongono la funzione di trasferimento  $F(s)$

$\textcolor{red}{G_0}$  → termine costante 5

$\textcolor{red}{G_{1D}}$  → polo nell'origine  $\frac{1}{s}$

$\textcolor{red}{G_{2N}}$  → zero reale  $\begin{cases} \frac{s}{2} + 1 \\ \frac{s}{10} + 1 \end{cases}$

$\textcolor{red}{G_{2D}}$  → polo reale  $\frac{1}{\frac{s}{80} + 1}$

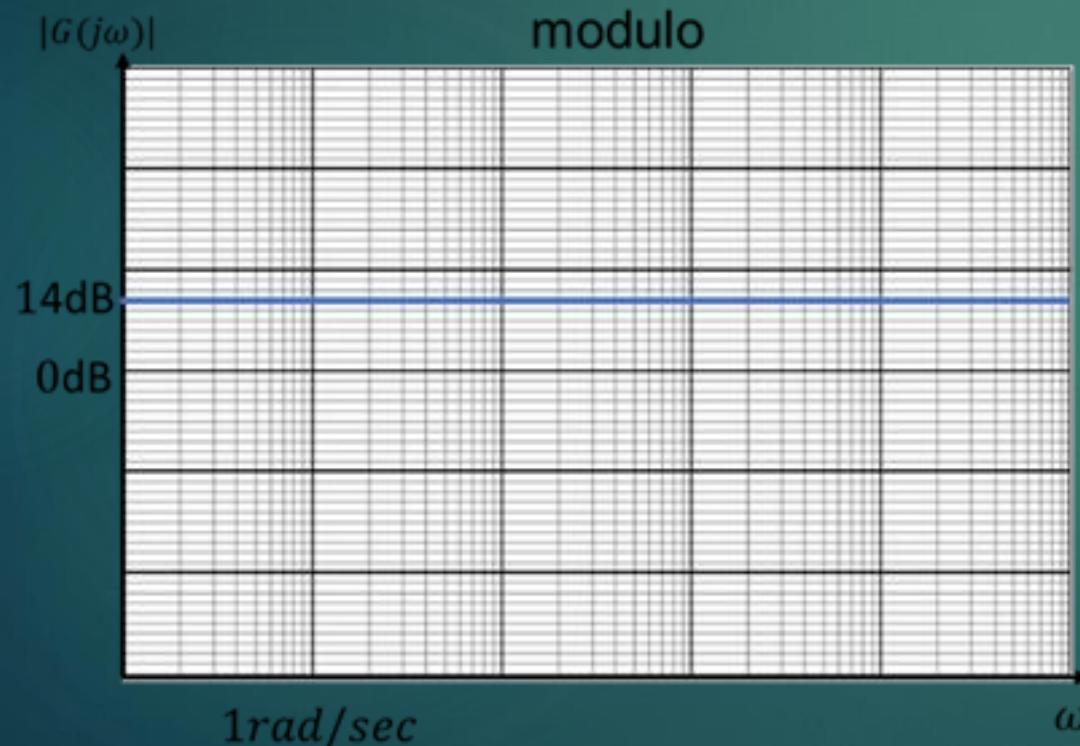
$\textcolor{red}{G_{3D}}$  → poli complessi  $\frac{1}{\frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1}$

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

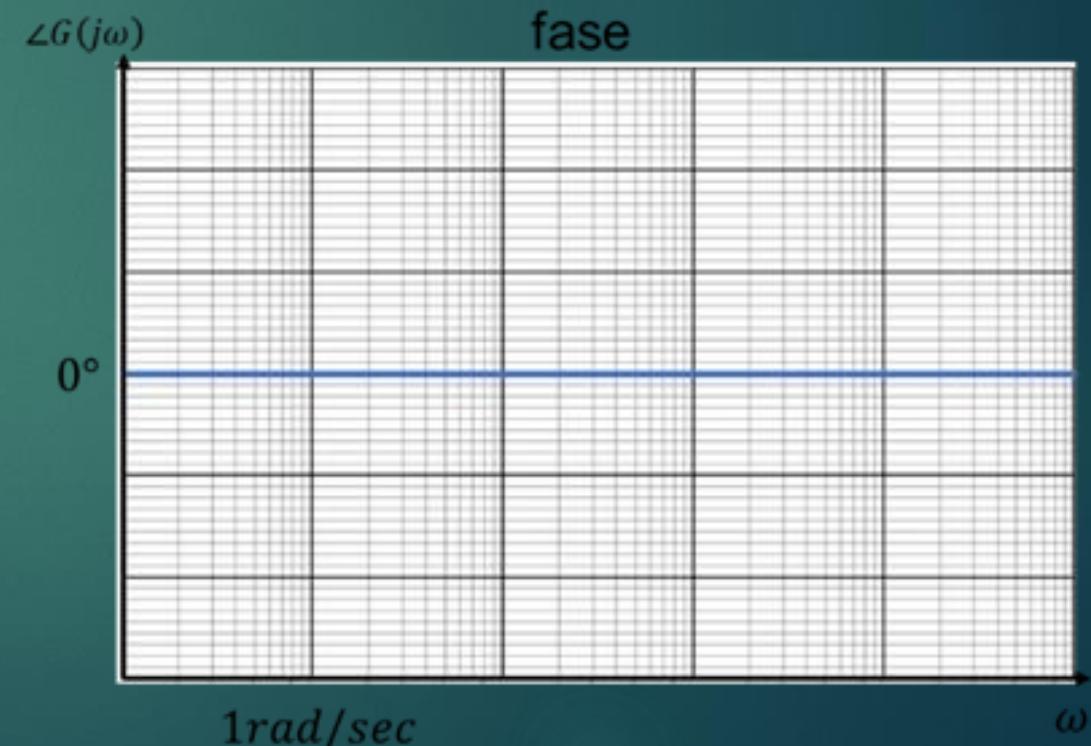
Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$G_0 \rightarrow$  termine costante 5

Modulo  $\rightarrow 20 \log_{10} 5 \approx 14 dB$



Fase  $\rightarrow 0^\circ$



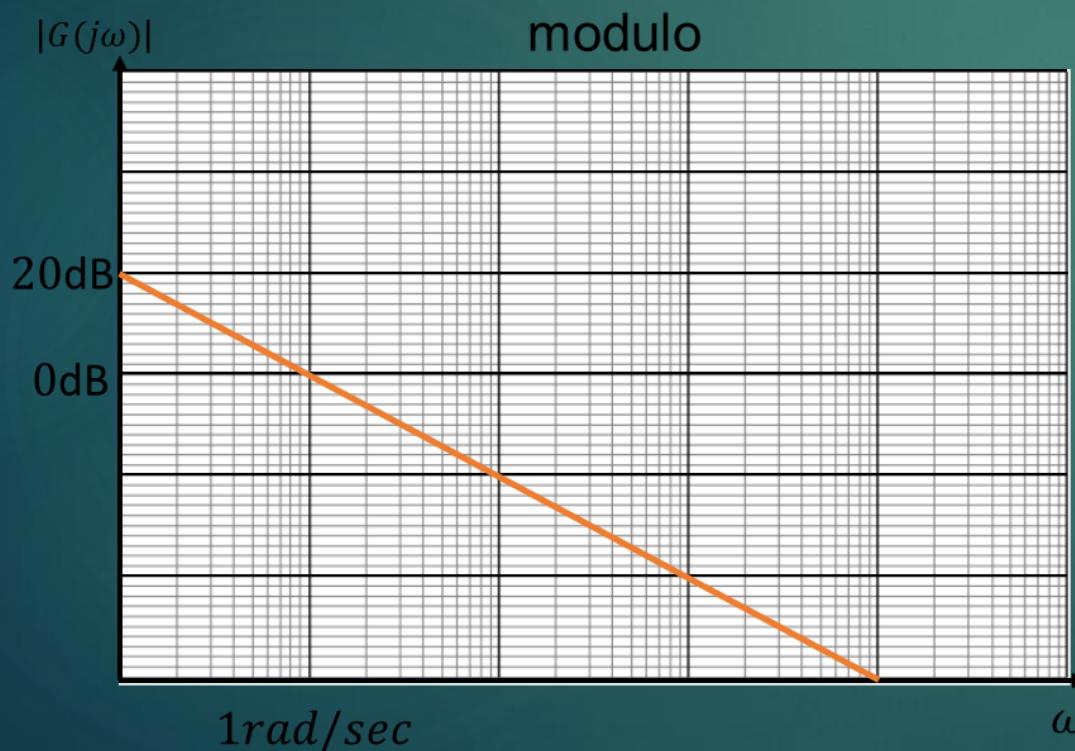
# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

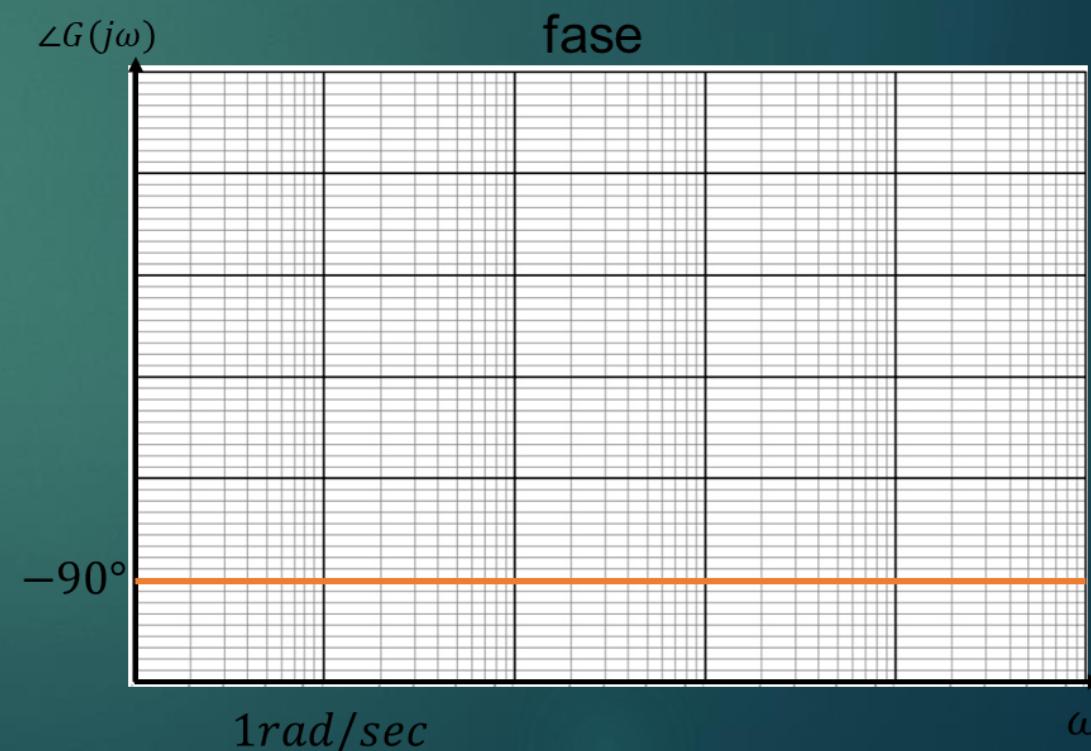
$G_{1D} \rightarrow$  polo nell'origine

$$\frac{1}{s}$$

Modulo  $\rightarrow -20 \text{ dB/dec}$   
 $0 \text{ dB in } 1 \text{ rad/sec}$



Fase  $\rightarrow -90^\circ$

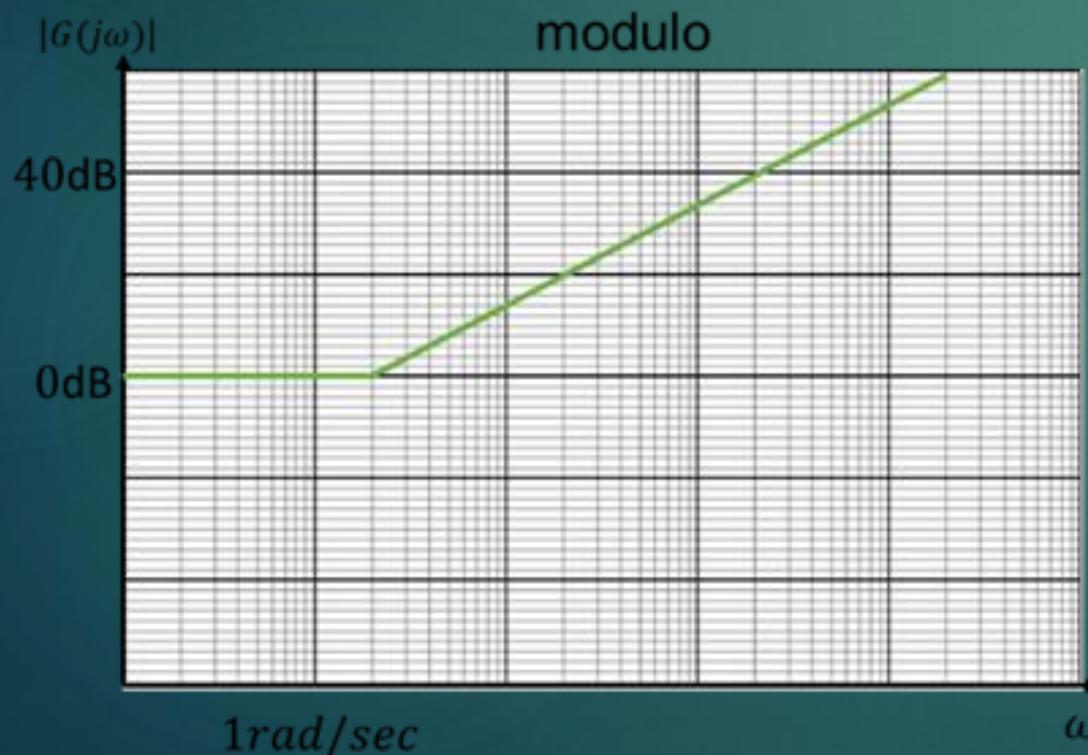


# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

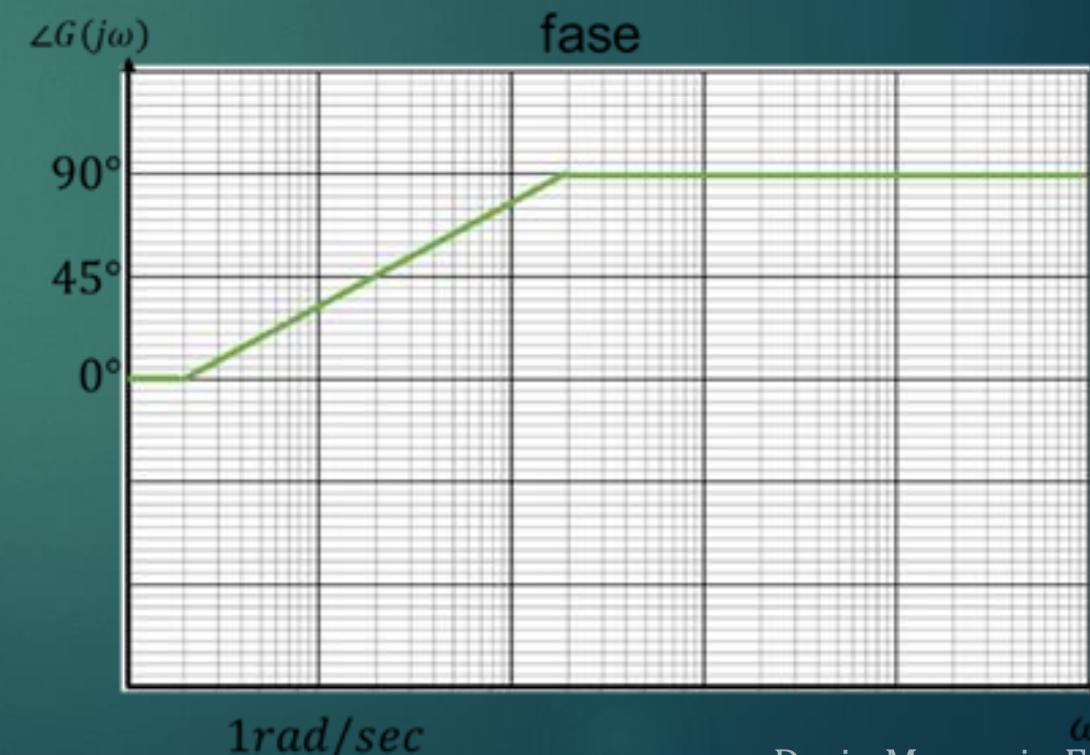
Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$$G_{2N} \rightarrow \text{zero reale} \quad \frac{s}{2} + 1$$

Modulo  $\rightarrow$  
$$\begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 2 \\ +20 \text{ dB/dec per } \omega \geq 2 \end{cases}$$



Fase  $\rightarrow$  
$$\begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 0,2 \\ +45^\circ/\text{dec per } 0,2 \leq \omega \leq 20 \\ +90^\circ \text{ per } \omega > 20 \end{cases}$$

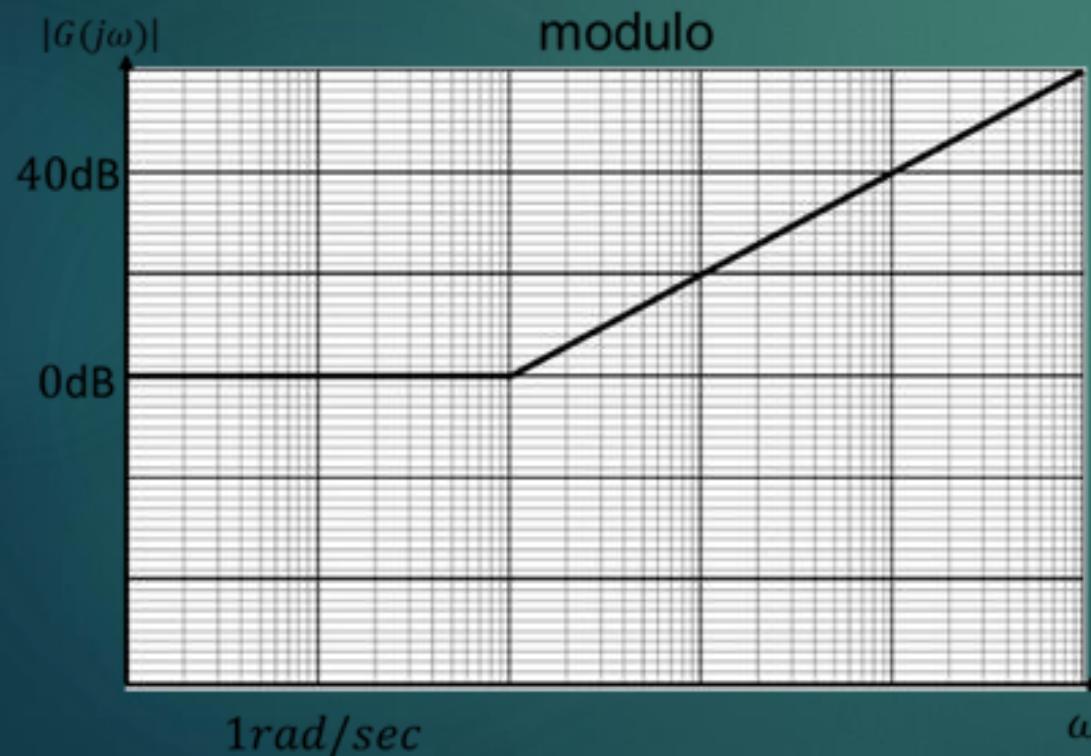


# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

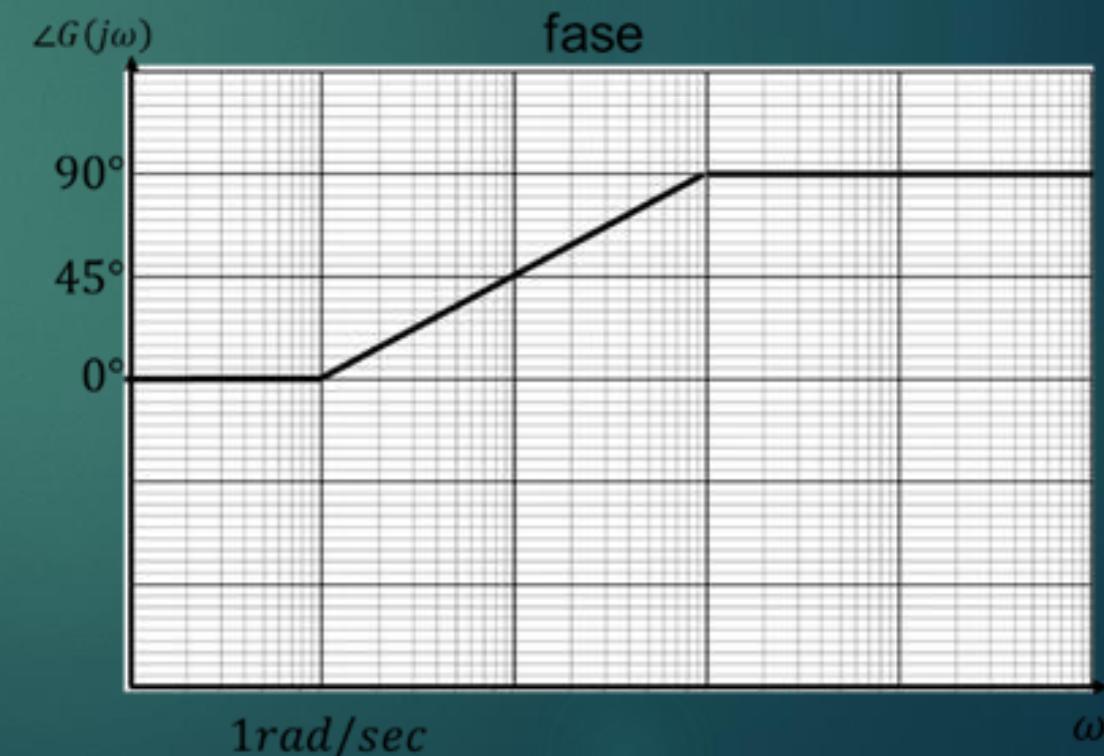
Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$$G_{2N} \rightarrow \text{zero reale} \quad \frac{s}{10} + 1$$

$$\text{Modulo} \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 10 \\ +20 \text{ dB/dec per } \omega \geq 10 \end{cases}$$



$$\text{Fase} \rightarrow \begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 1 \\ +45^\circ/\text{dec per } 1 \leq \omega \leq 100 \\ +90^\circ \text{ per } \omega > 100 \end{cases}$$

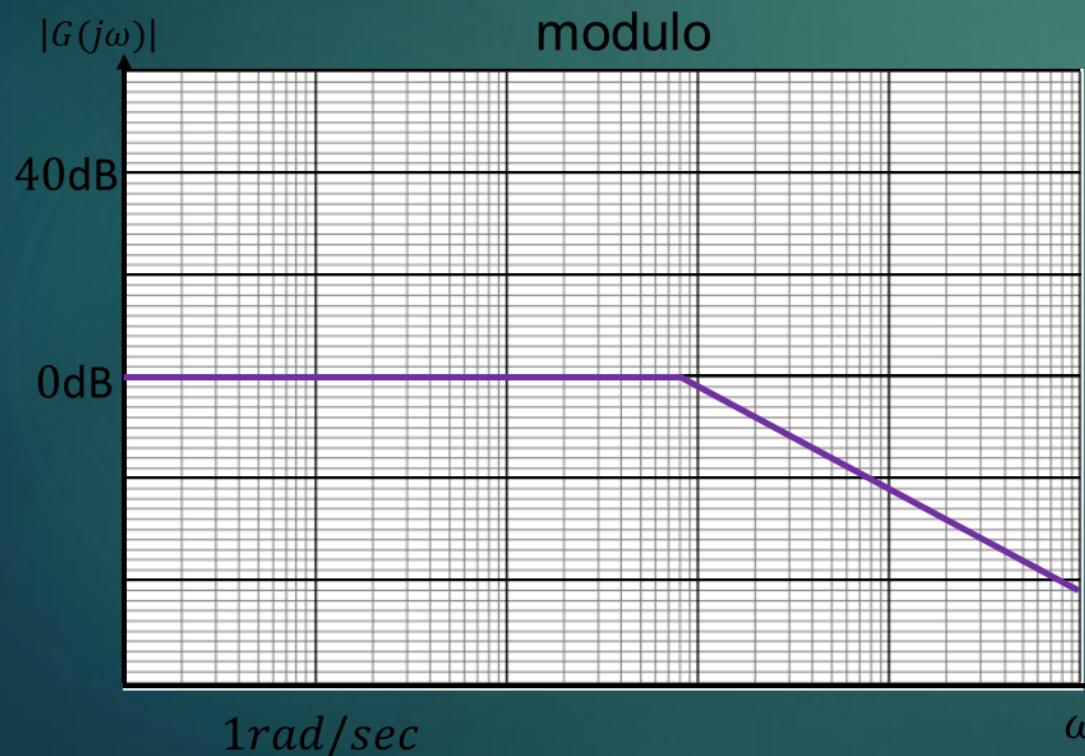


# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

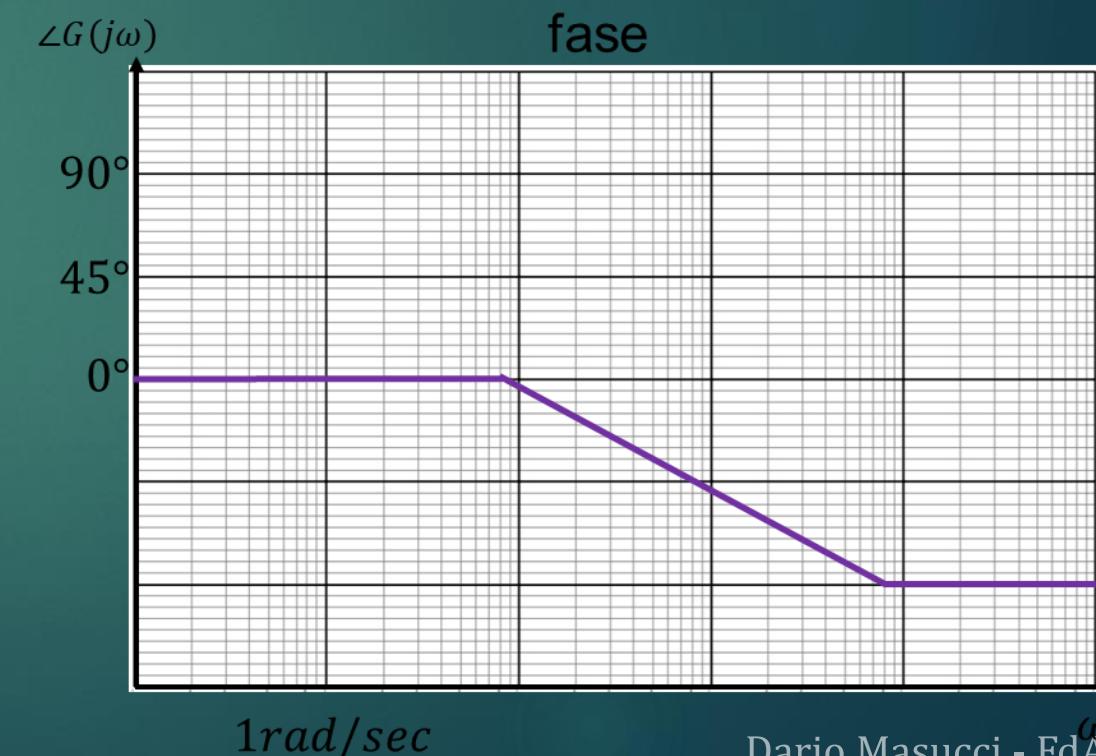
Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$$G_{2D} \rightarrow \text{polo reale} \quad \frac{1}{\frac{s}{80} + 1}$$

$$\text{Modulo} \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 80 \\ -20 \text{ dB/dec per } \omega \geq 80 \end{cases}$$



$$\text{Fase} \rightarrow \begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 8 \\ -45^\circ/\text{dec per } 8 \leq \omega \leq 800 \\ -90^\circ \text{ per } \omega > 800 \end{cases}$$

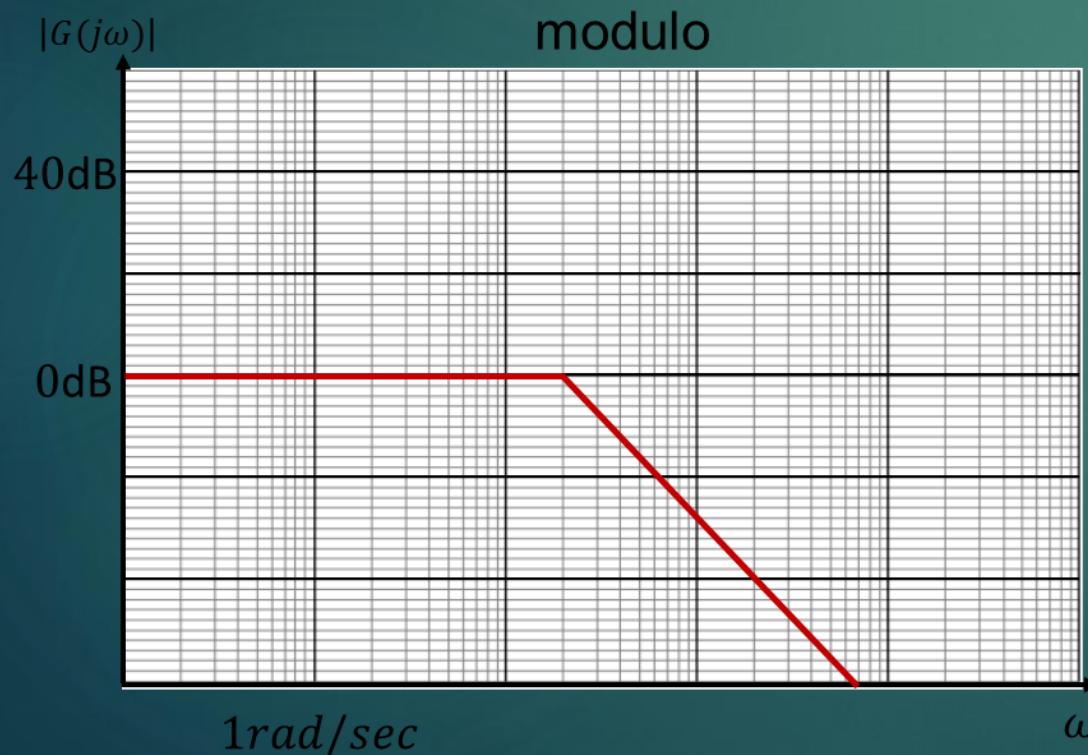


# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

$$G_{3D} \rightarrow \text{poli complessi} \quad \frac{1}{\frac{s^2}{20^2} + \frac{0,4s}{20} + 1}$$

$$\text{Modulo} \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ dB per } \omega < 20 \\ -40 \text{ dB/dec per } \omega \geq 20 \end{cases}$$

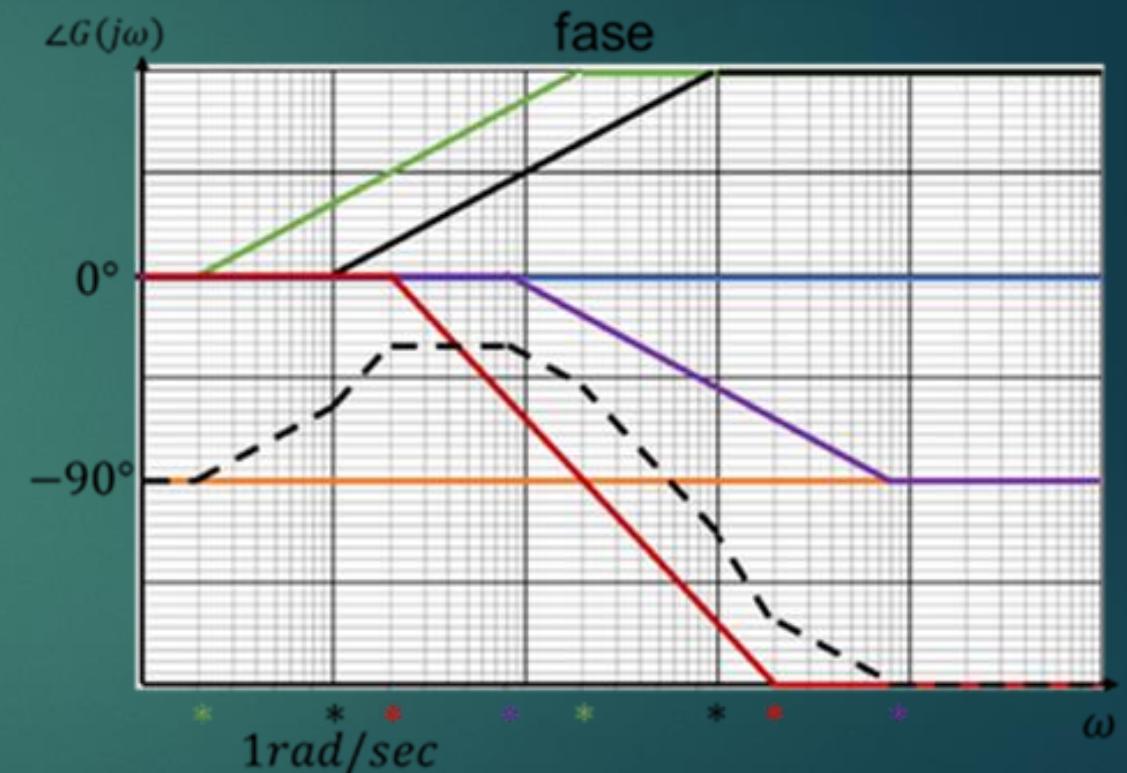
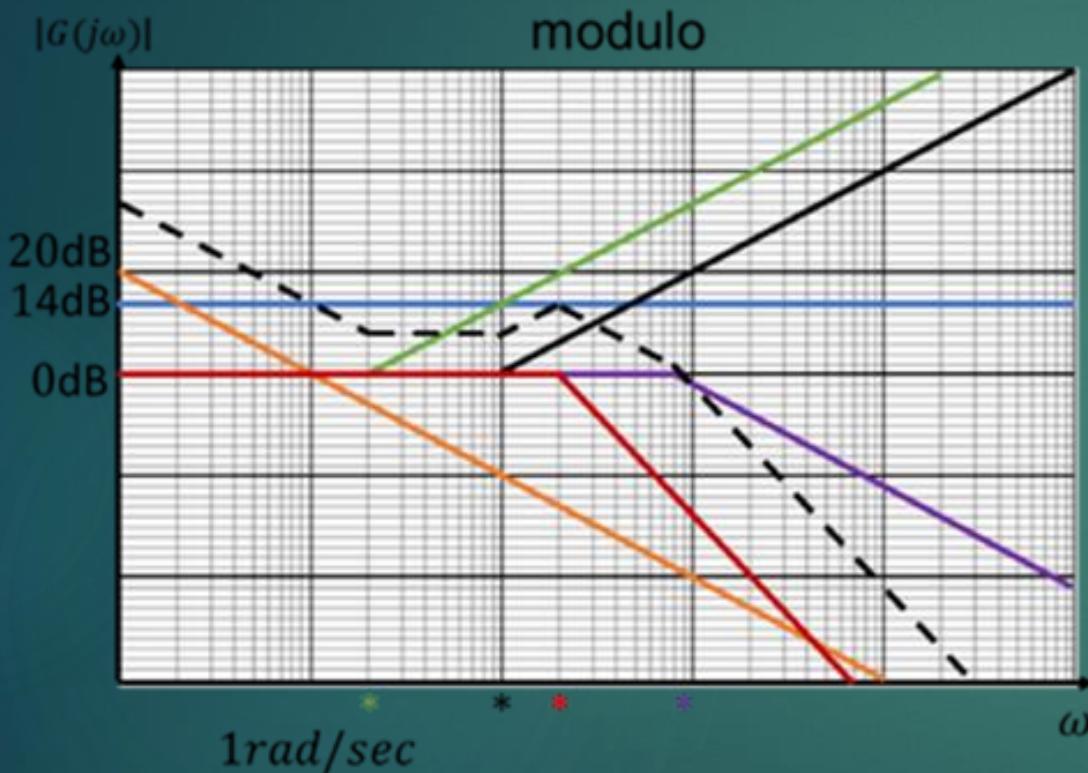


$$\text{Fase} \rightarrow \begin{cases} 0^\circ \text{ per } \omega < 2 \\ -90^\circ/\text{dec per } 2 \leq \omega \leq 200 \\ -180^\circ \text{ per } \omega > 200 \end{cases}$$



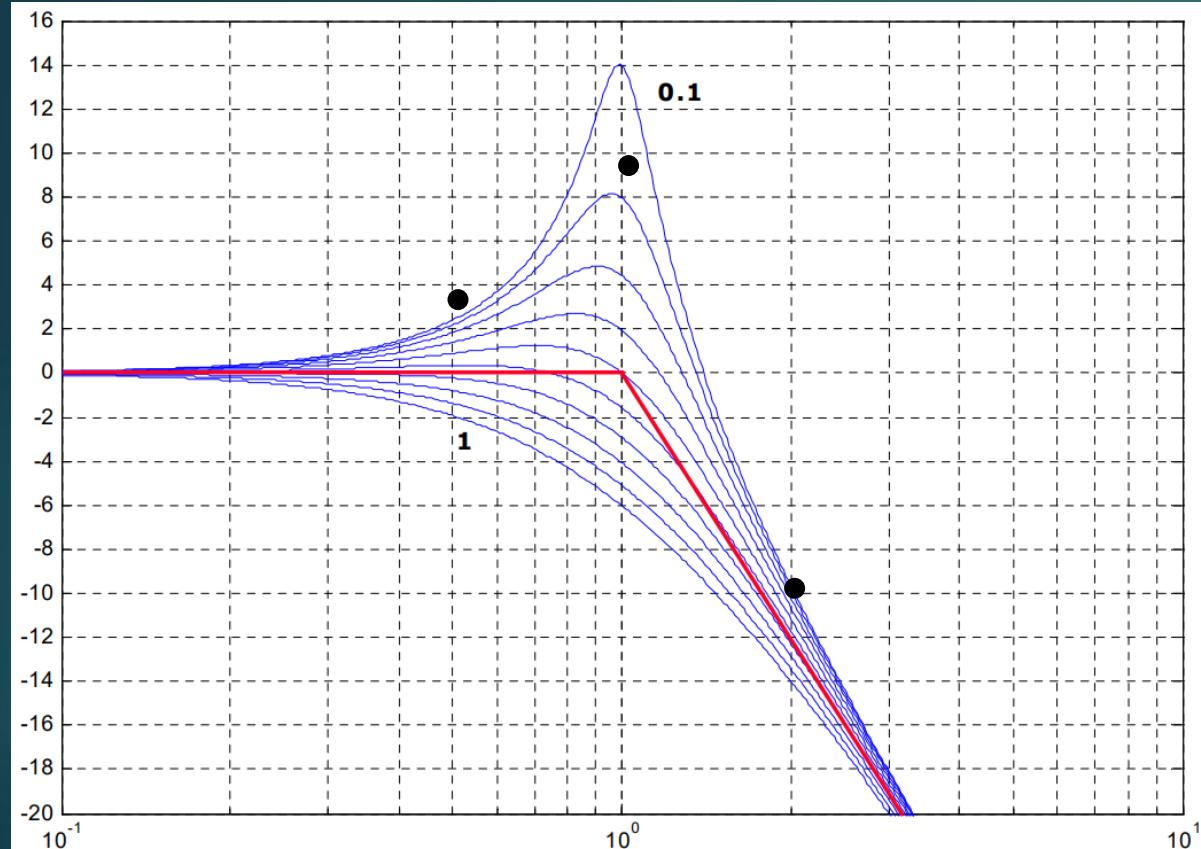
# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

Si sommano i contributi di ogni termine per ottenere il tracciamento completo



# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio con  $\zeta = 0,2$



$$\begin{aligned}\omega = 10 &\rightarrow +2dB \\ \omega = 20 &\rightarrow +8dB \\ \omega = 40 &\rightarrow +1dB\end{aligned}$$

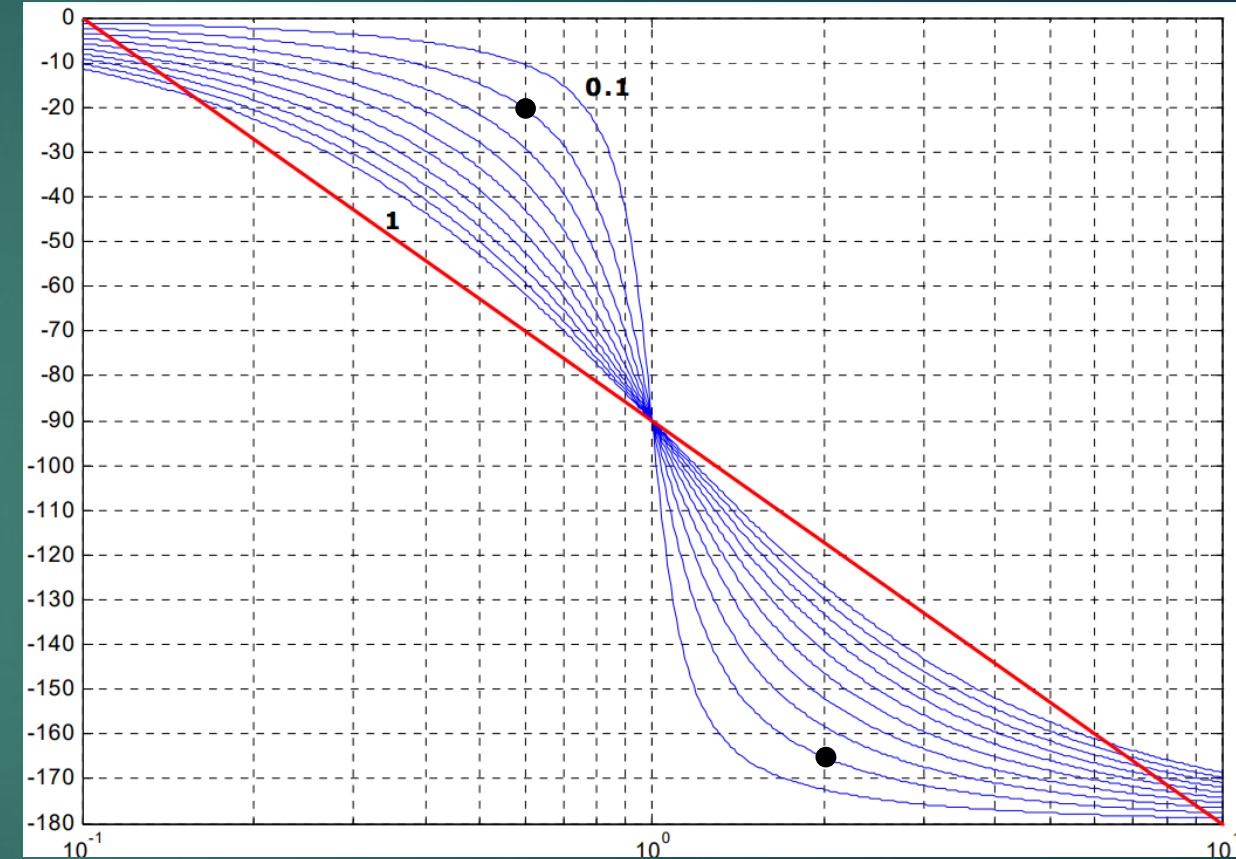


$$\omega = 40 \rightarrow -45^\circ$$

Calcolo delle posizioni su ascisse:

$$0.5 : 1 = x_1 : 20 \Rightarrow x_1 = 0.5 * 20 = 10$$

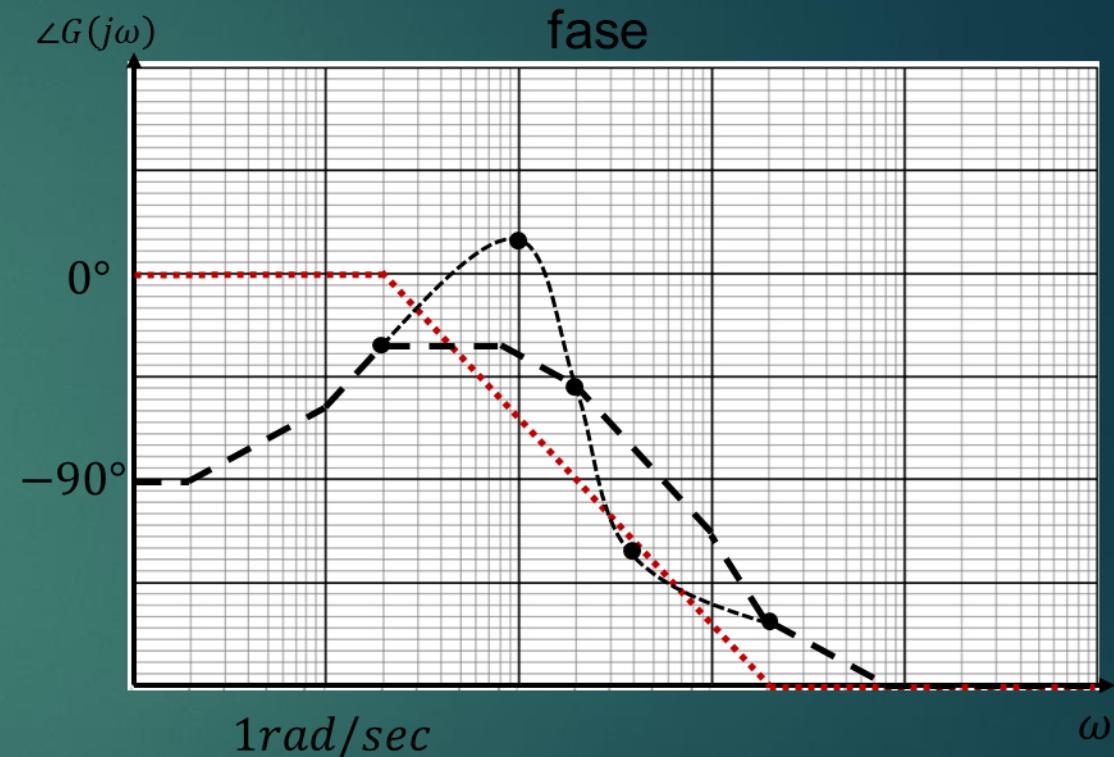
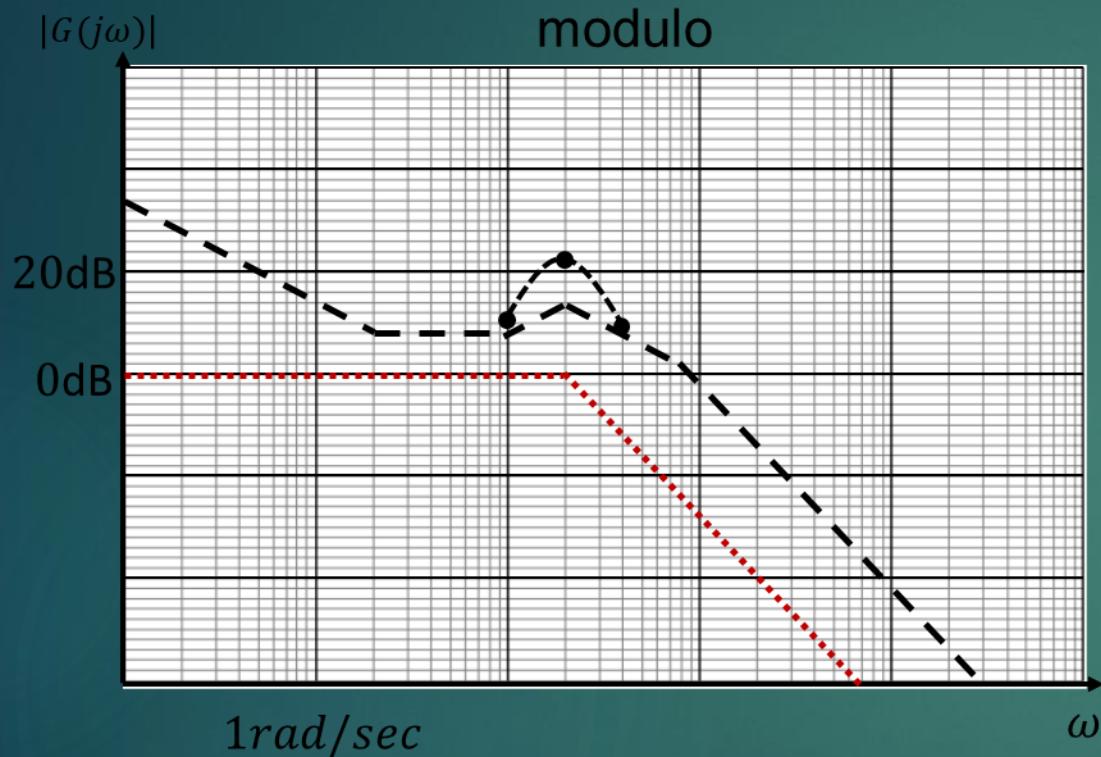
$$2: 1 = x_2 : 20 \Rightarrow x_2 = 2 * 20 = 40$$



$$\begin{aligned}\omega = 10 &\rightarrow +50^\circ \\ \omega = 20 &\rightarrow 0^\circ \\ \omega = 40 &\rightarrow -45^\circ\end{aligned}$$

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio con  $\zeta = 0,2$



$$\begin{aligned}\omega = 10 &\rightarrow +2dB \\ \omega = 20 &\rightarrow +8dB \\ \omega = 40 &\rightarrow +1dB\end{aligned}$$

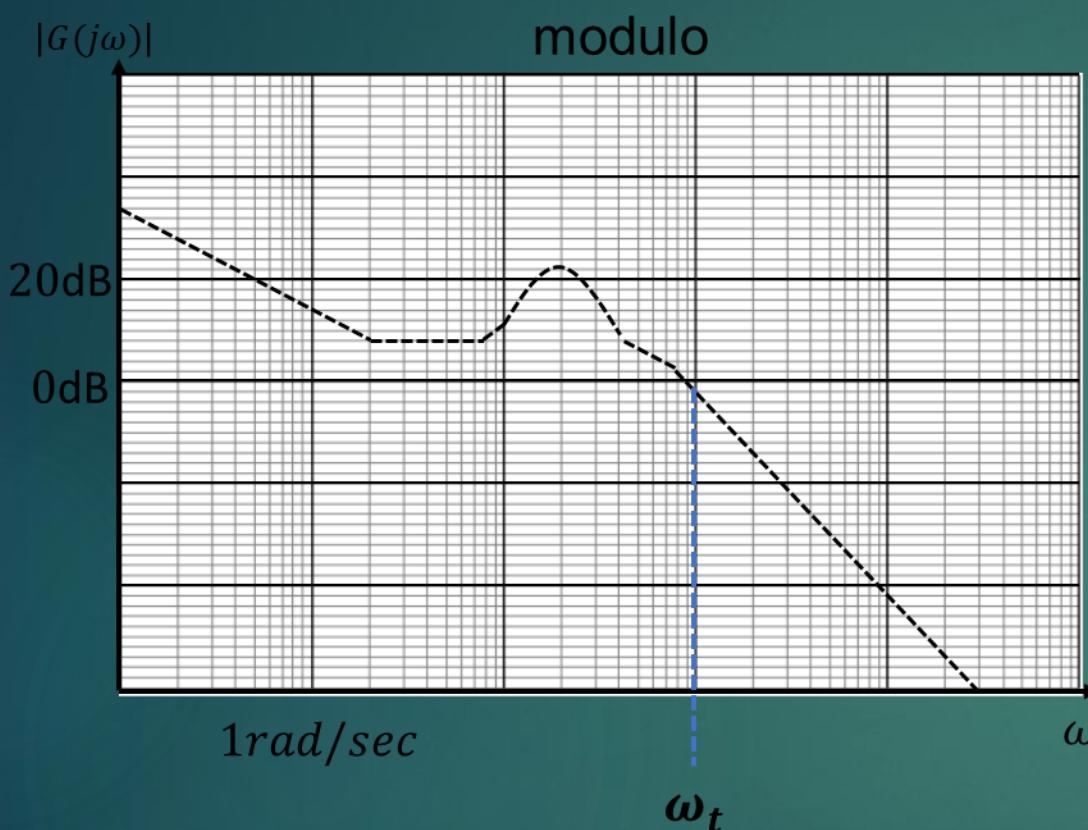
Calcolo delle posizioni su ascisse:

$$0.5 : 1 = x_1 : 20 \Rightarrow x_1 = 0.5 * 20 = 10$$
$$2 : 1 = x_2 : 20 \Rightarrow x_2 = 2 * 20 = 40$$

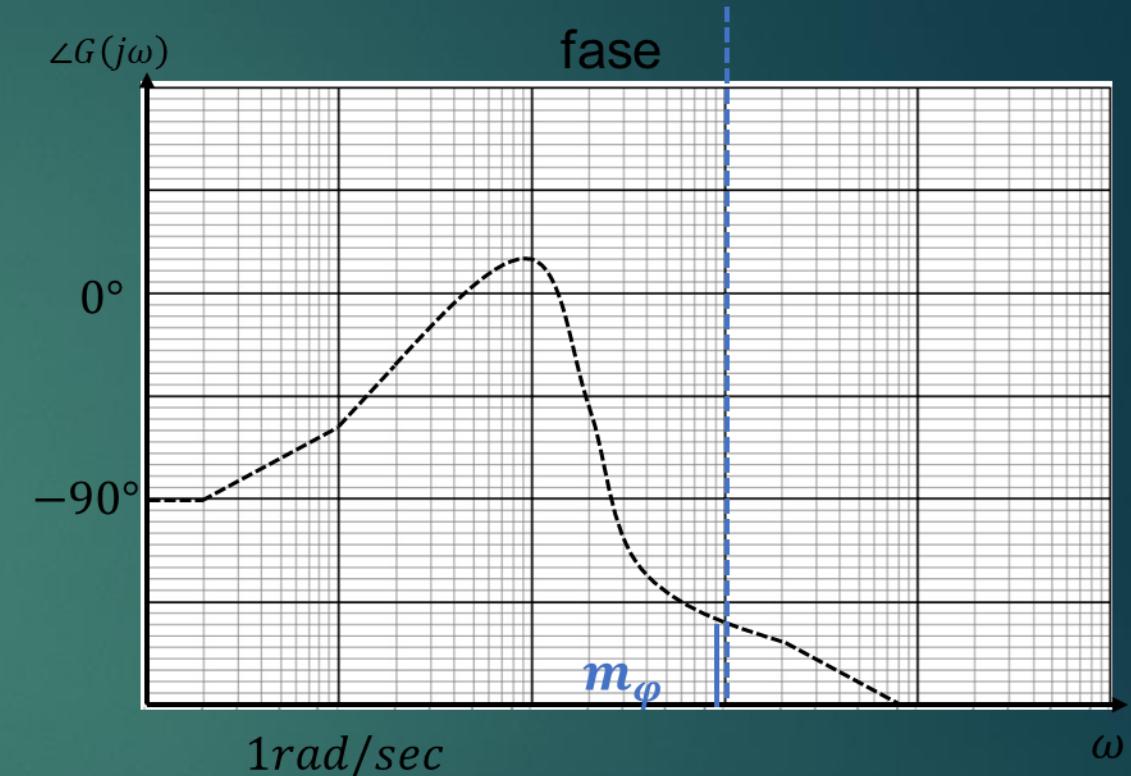
$$\begin{aligned}\omega = 10 &\rightarrow +50^\circ \\ \omega = 20 &\rightarrow 0^\circ \\ \omega = 40 &\rightarrow -45^\circ\end{aligned}$$

# Rappresentazione tramite diagrammi di Bode della funzione Risposta Armonica

Si individuano:  $\omega_t$  e il  $m_\varphi$ ,  $\omega_{-\pi}$  e il  $m_g$



$$\omega_t \approx 100 \text{ rad/sec} \text{ e } m_\varphi \approx 40^\circ$$



$$\omega_{-\pi} \text{ non è calcolabile quindi } m_g = \infty$$

Si osserva come, in questo caso il diagramma delle fasi **non scende mai oltre i  $-180^\circ$** . Non si può definire la pulsazione a  $-180^\circ$ , ossia  $\omega_{-\pi}$ , e quindi il margine di guadagno risulta **infinito**

# Fondamenti di Automatica

Parte 4

«Rappresentazione qualitativa tramite diagrammi  
di Nichols della funzione Risposta Armonica»

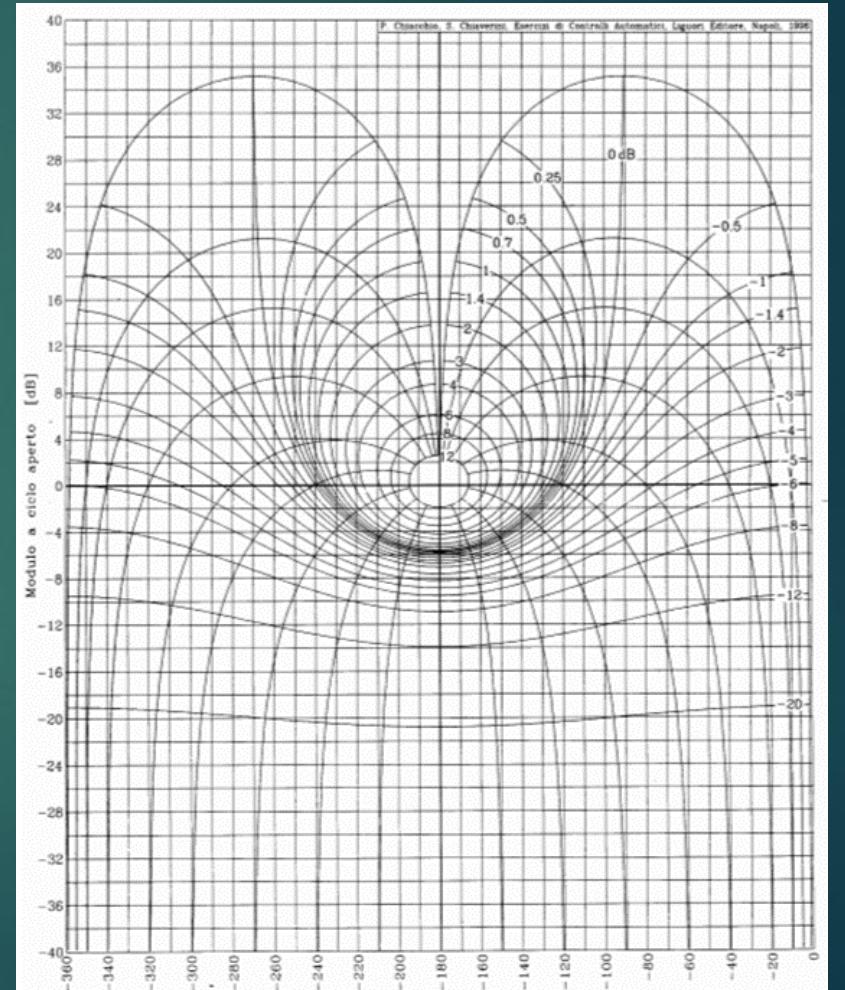
# Rappresentazione tramite diagrammi di Nichols della funzione Risposta Armonica

I diagrammi di Nichols, detti anche **diagrammi cartesiani**, sono una rappresentazione implicita, nel piano fase-modulo, del logaritmo della risposta armonica di un sistema.

In particolare, in questi diagrammi la fase  $\angle G(j\omega)$  gradua l'asse delle ascisse mentre il modulo  $|G(j\omega)|$  gradua l'asse delle ordinate

Di norma il piano di Nichols ha:

- L'asse delle ascisse che varia, da sinistra a destra, da  $-360^\circ$  a  $0^\circ$ ;
- L'asse delle ordinate che varia, dal basso verso l'alto, da  $-20$  dB a  $+20$  dB in base alle necessità;
- Intersezione tra i due assi in corrispondenza del punto  $(0dB; -180^\circ)$ .
- Le curve che rappresentano i **luoghi a modulo e fase a ciclo chiuso costanti**. Queste danno luogo a la cosiddetta *carta di Nichols*.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Nichols della funzione Risposta Armonica

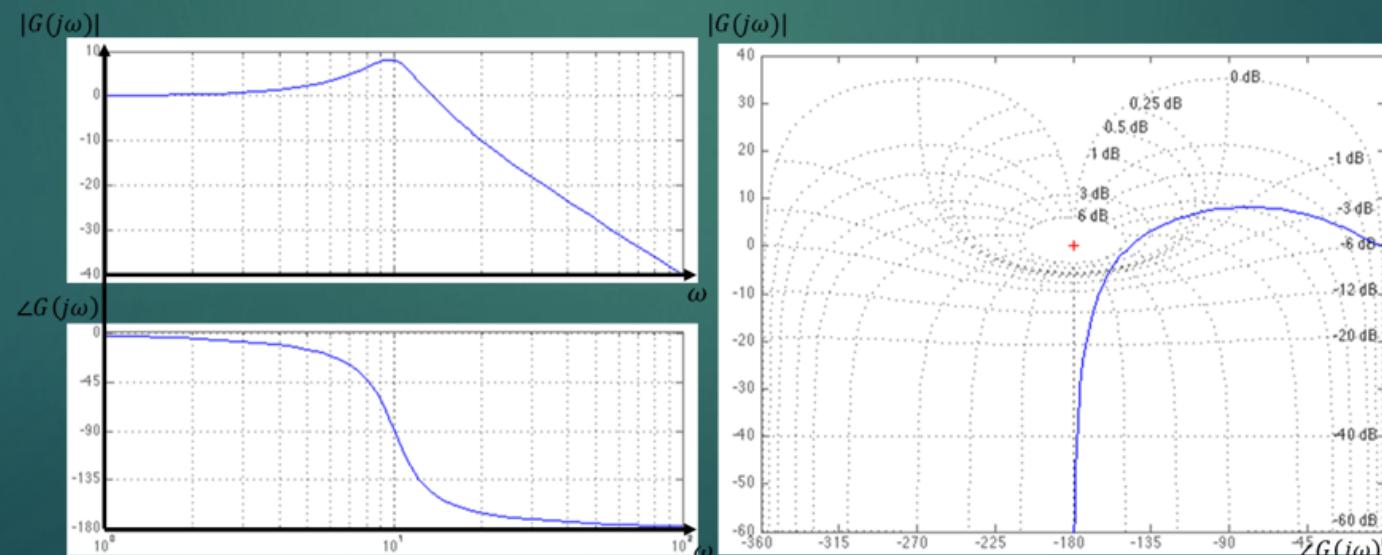
A partire dai diagrammi di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto di un qualsiasi sistema è possibile ottenere il corrispondente diagramma di Nichols rappresentativo della stessa funzione di trasferimento.

In particolare, si procede leggendo, pulsazione per pulsazione, il valore del modulo e quello della fase nei diagrammi di Bode e li si riporta sul piano di Nichols.

Si trasforma in questo modo una coppia di curve esplicite in una singola curva implicita.

La curva, graduata secondo la pulsazione  $\omega$ , rappresenta:

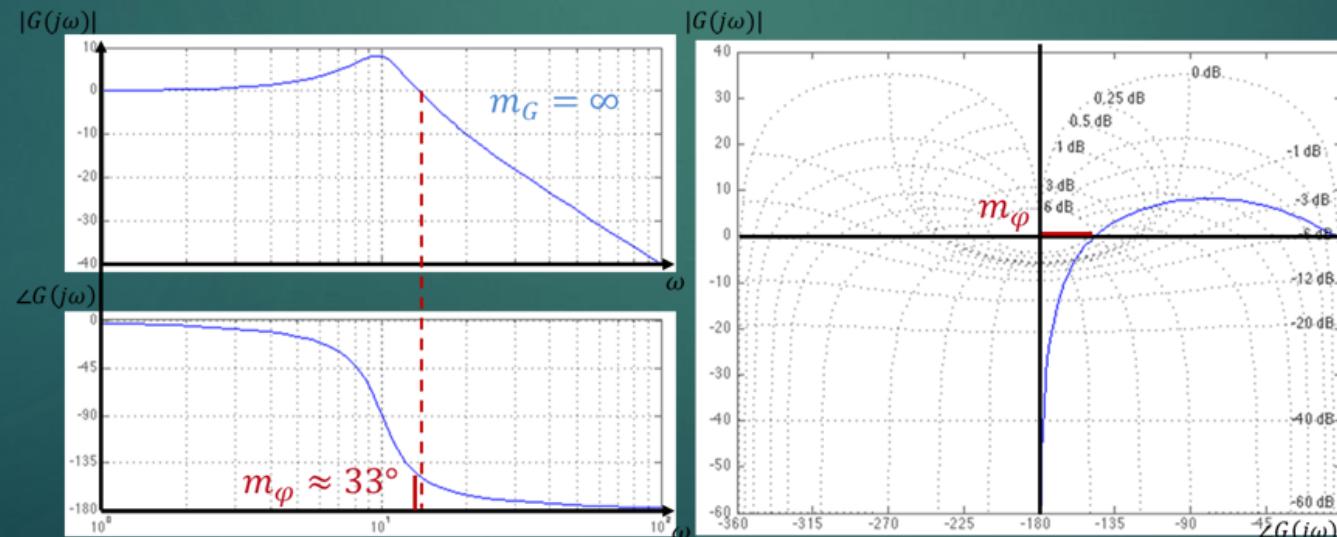
- Se letta sulle coordinate ortogonali, la **funzione di trasferimento a ciclo aperto**;
- Se letta impiegando come coordinate curvilinee i luoghi costanti tracciati, rappresenta l'andamento della **funzione di trasferimento a ciclo chiuso**.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Nichols della funzione Risposta Armonica

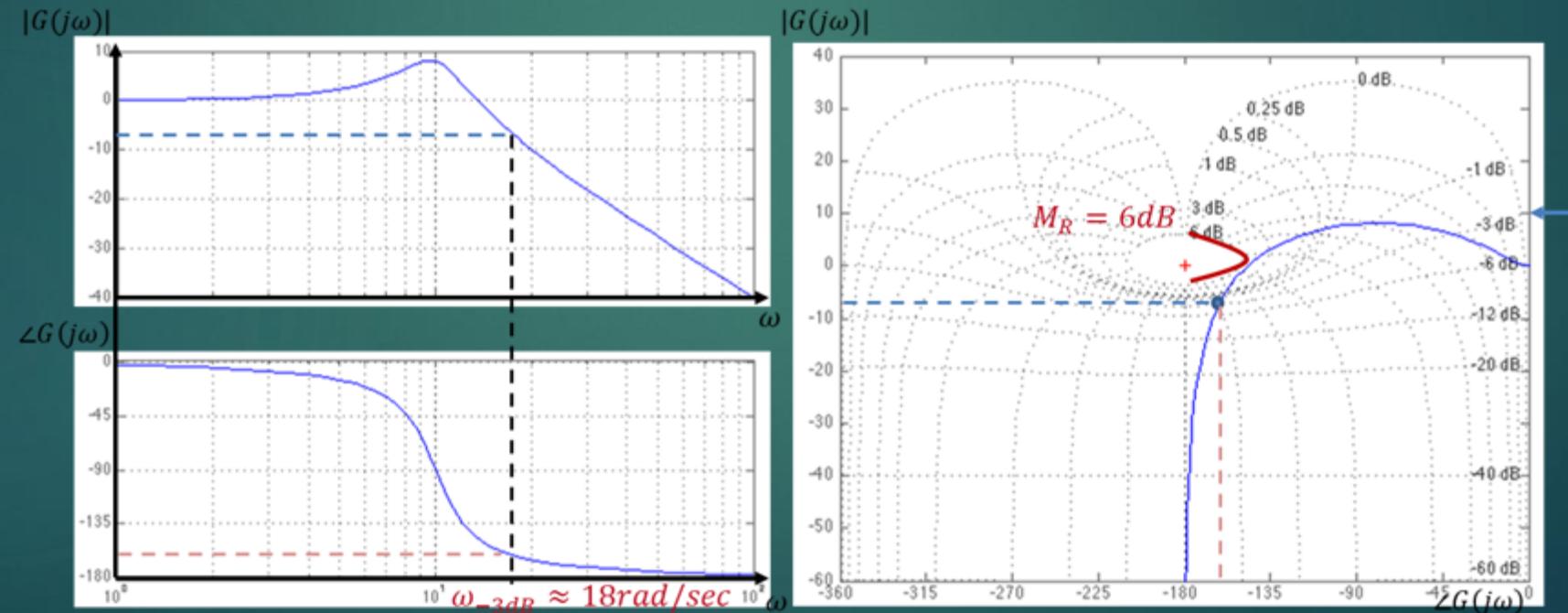
Dato il diagramma di Nichols della funzione di trasferimento a ciclo aperto di un generico sistema:

- Il margine di fase  $m_\varphi$  è rappresentato dall'ampiezza del segmento orizzontale che si forma tra:
  - l'origine degli assi ( $0dB; -180^\circ$ )
  - il punto di intersezione tra la retta parallela all'asse delle ascisse di valore  $0db$  e la curva che rappresenta la funzione di trasferimento.
- Il margine di guadagno  $m_G$  è rappresentato dall'ampiezza del segmento verticale che si forma tra:
  - l'origine degli assi ( $0dB; -180^\circ$ )
  - il punto di intersezione tra la retta parallela all'asse delle ordinate di valore  $-180^\circ$  e la curva che rappresenta la funzione di trasferimento.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Nichols della funzione Risposta Armonica

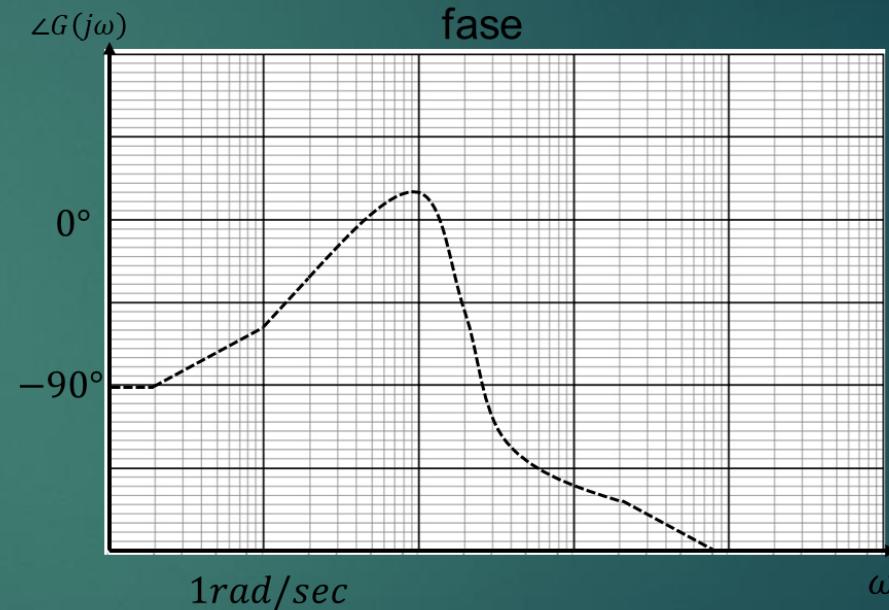
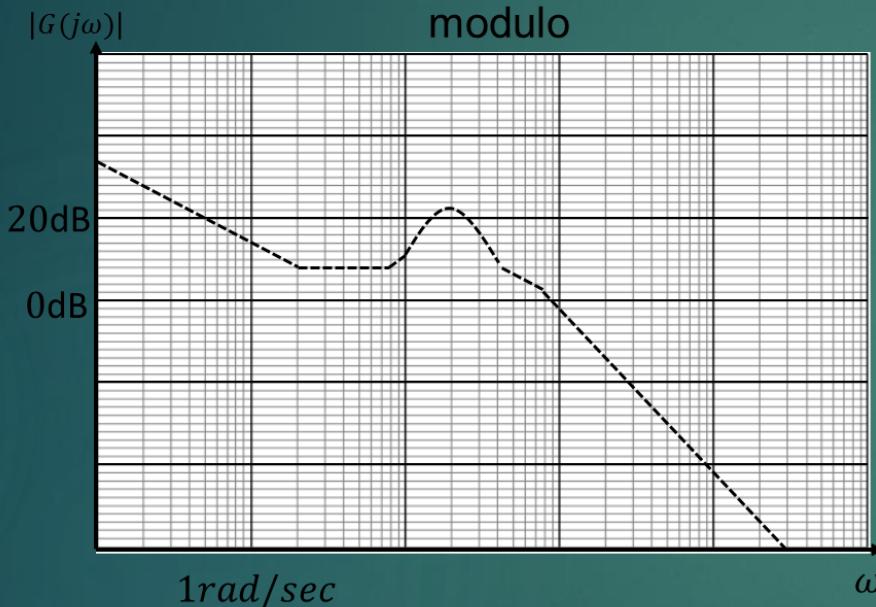
3. Per definire il **modulo alla risonanza**  $M_R$  si identifica la curva dei luoghi a modulo e fase a ciclo chiuso costanti che risulta **tangente** alla funzione di trasferimento e se ne considera il valore.
4. Per definire la **banda passante a  $-3dB$**   $\omega_{-3dB}$  si considera la curva del luogo a modulo e fase costanti pari a  $-3dB$  e si osserva il **punto di intersezione** con la curva della funzione di trasferimento. Del punto si considera **modulo e fase cartesiani** che riportati sul diagramma di Bode forniscono la pulsazione corrispondente.



## Rappresentazione tramite diagrammi di Nichols della funzione Risposta Armonica

A partire dal diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto del sistema in analisi è possibile ottenere il corrispondente diagramma di Nichols rappresentativo della stessa funzione di trasferimento.

Si procede considerando sei punti e per ognuno di questi si legge il valore del modulo e quello della fase nei diagrammi di Bode e li si riporta sul piano di Nichols.



$$\omega_{0,1} \rightarrow A = \begin{cases} 34dB \\ -90^\circ \end{cases} \quad \omega_1 \rightarrow B = \begin{cases} 14dB \\ -55^\circ \end{cases} \quad \omega_{10} \rightarrow C = \begin{cases} 8dB \\ -35^\circ \end{cases} \quad \omega_{20} \rightarrow D = \begin{cases} 14dB \\ -45^\circ \end{cases}$$

$$\omega_{100} \rightarrow E = \begin{cases} 0dB \\ -115^\circ \end{cases} \quad \omega_{1000} \rightarrow F = \begin{cases} -40dB \\ -180^\circ \end{cases}$$

# Rappresentazione tramite diagrammi di Nichols della funzione Risposta Armonica

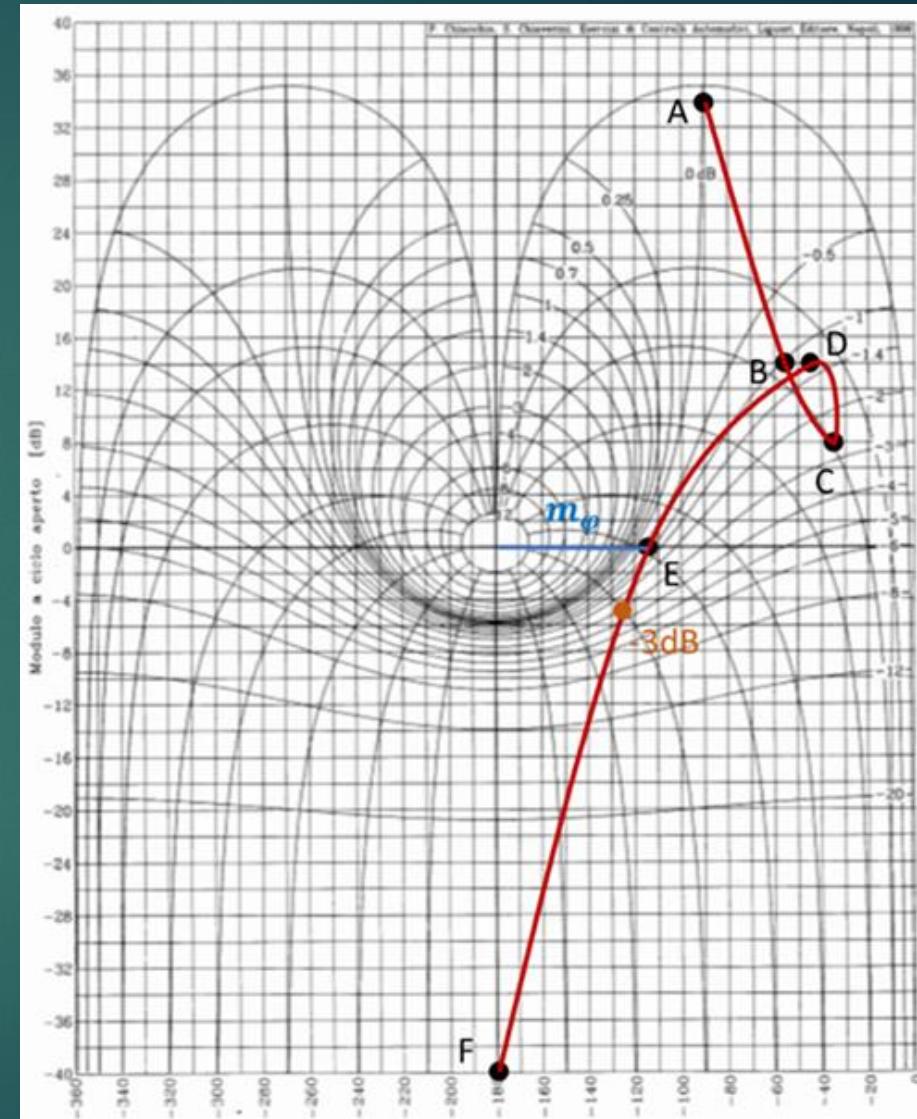
$$\omega_{0,1} \rightarrow A = \begin{cases} 34dB \\ -90^\circ \end{cases} \quad \omega_1 \rightarrow B = \begin{cases} 14dB \\ -55^\circ \end{cases}$$

$$\omega_{10} \rightarrow C = \begin{cases} 8dB \\ -35^\circ \end{cases} \quad \omega_{20} \rightarrow D = \begin{cases} 14dB \\ -45^\circ \end{cases}$$

$$\omega_{100} \rightarrow E = \begin{cases} 0dB \\ -115^\circ \end{cases} \quad \omega_{1000} \rightarrow F = \begin{cases} -40dB \\ -180^\circ \end{cases}$$

Questa curva, graduata secondo la pulsazione  $\omega$ , rappresenta:

- Se letta sulle coordinate ortogonali, la **funzione di trasferimento a ciclo aperto**;
- Se letta impiegando come coordinate curvilinee i luoghi costanti tracciati, rappresenta l'andamento della **funzione di trasferimento a ciclo chiuso**.



# Rappresentazione tramite diagrammi di Nichols della funzione Risposta Armonica

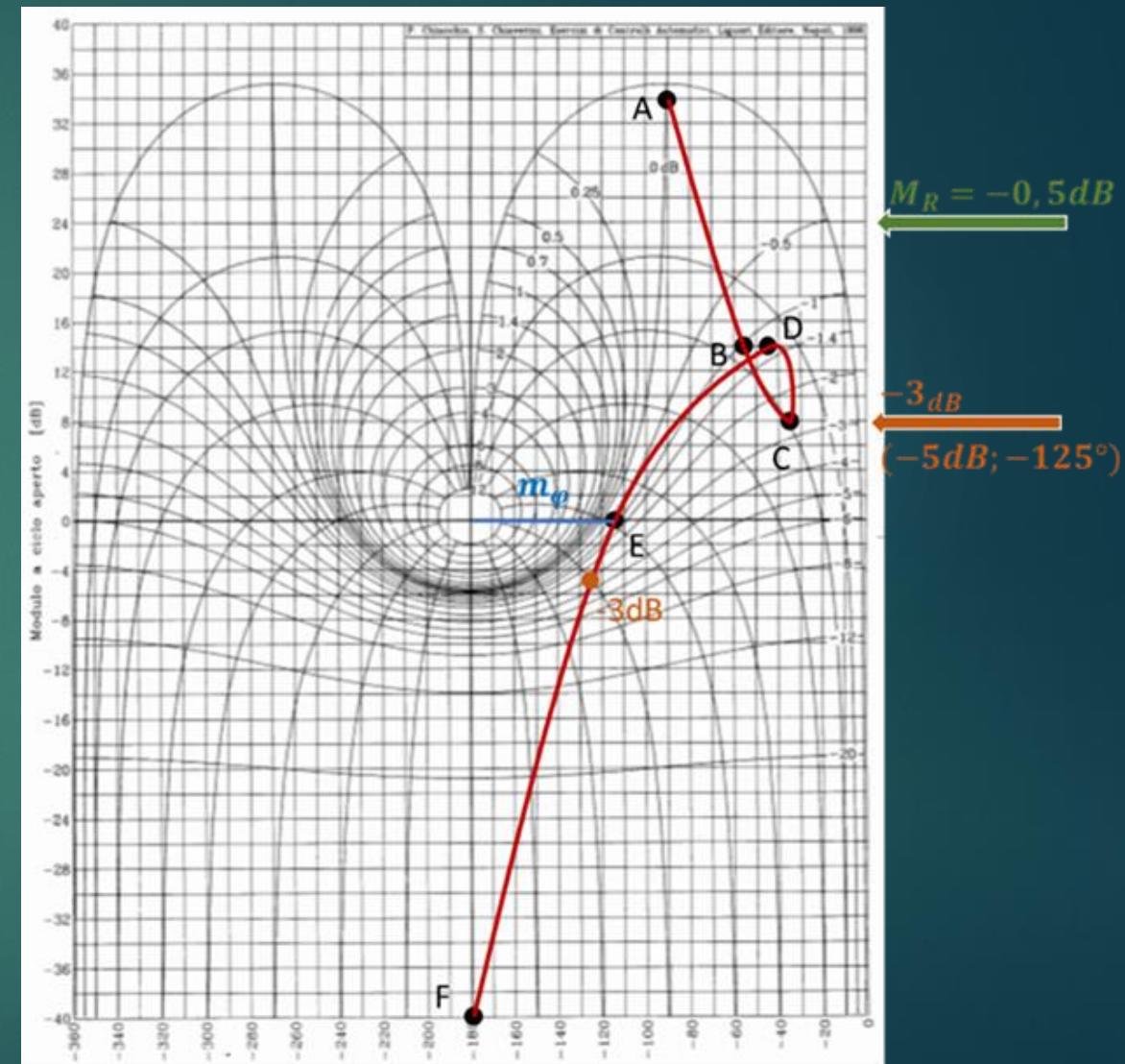
Margine di fase:  $m_\phi \approx 50^\circ$ ;

Margine di guadagno:  $m_G = \infty$  (la curva non oltrepassa mai l'asse dei  $-180^\circ$ );

Modulo di risonanza:  $M_R \approx -0,5dB$ , il luogo a modulo e fase costanti a ciclo chiuso che risulta tangente alla curva;

Pulsazione a  $-3dB$ : si considera il punto in cui il luogo a modulo e fase costanti a ciclo chiuso interseca la curva, ossia  $(-5dB; -125^\circ)$ , e si legge sui diagrammi di Bode, in modulo e fase, a quale pulsazione corrisponde.

$$100 \text{ rad/sec} < \omega_{-3dB} < 110 \text{ rad/sec}$$



# Fondamenti di Automatica

Parte 5

«Rappresentazione qualitativa tramite diagrammi  
di Nyquist della funzione Risposta Armonica»

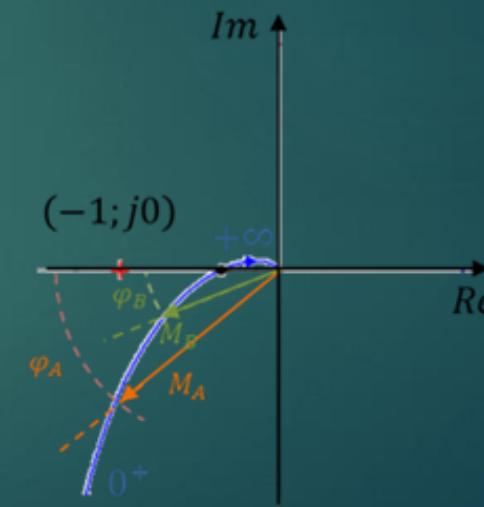
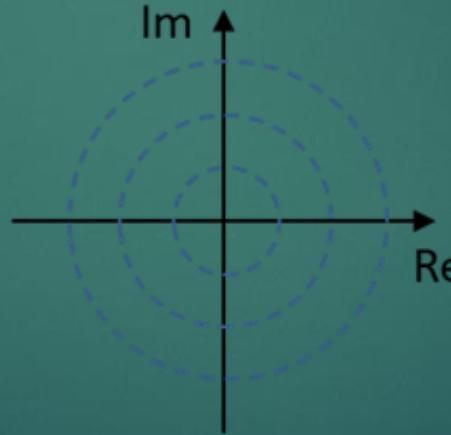
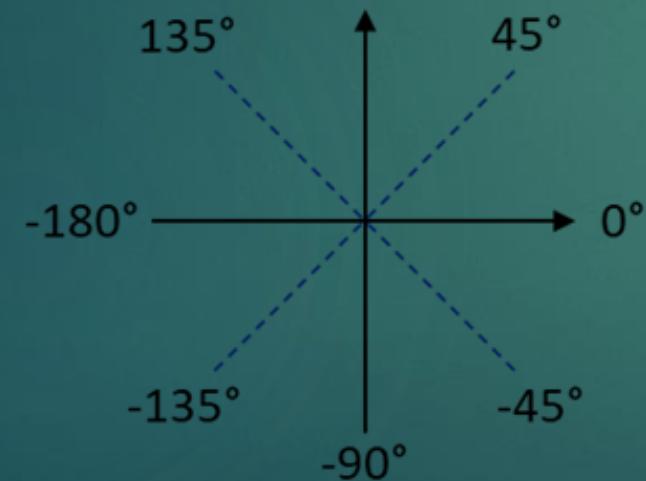
# Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

Nell'ambito dei controlli automatici trova impiego la rappresentazione implicita in coordinate naturali (parte reale e parte immaginaria).

Questa rappresentazione naturale della risposta armonica prende il nome di *rappresentazione di Nyquist*, e i relativi diagrammi prendono il nome di *diagrammi di Nyquist*, o diagrammi polari.

Di conseguenza, il piano sul quale sono tracciati viene chiamato *piano di Gauss* o piano polare.

La particolarità di questo tipo di diagramma è che risulta possibile definire la curva, punto per punto, in funzione del modulo e della fase. Infatti, si sovrappongono due piani: il piano di coordinate naturali e il piano di coordinate polari.



## Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

I diagrammi di Nyquist si possono tracciare in modo agevole facendo riferimento ai diagrammi di Bode della risposta armonica del sistema a ciclo aperto in corrispondenza dei punti estremali della pulsazione.

In particolare, si studia il comportamento per la pulsazione  $\omega$  che tende a infinito e per  $\omega$  che tende a zero, e si traccia l'andamento del corrispondente diagramma di Nyquist in modo qualitativo.

Per quanto riguarda il tracciamento qualitativo del diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento si ha che:

- $n$  è uguale alla somma del numero dei poli a parte reale negativa e del numero degli zeri a parte reale positiva;
- $m$  è uguale alla somma del numero degli zeri a parte reale negativa e del numero dei poli a parte reale positiva;
- $h_1$  è il numero di zeri nell'origine
- $h_2$  è il numero di poli nell'origine

# Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

## *Comportamento per $\omega \rightarrow 0$*

Si possono distinguere due casi a seconda del tipo del sistema, ossia in base al numero di poli nell'origine che presenta la sua funzione di trasferimento.

1. Se non vi sono poli nell'origine (il sistema è di **tipo 0**) il diagramma parte da un **punto dell'asse reale in corrispondenza di  $\omega = 0$** . In particolare il punto sull'asse reale è definito dal valore del guadagno statico  $K$  del sistema:
  - Se  $K > 0$  il diagramma parte da un punto del semiasse reale positivo;
  - Se  $K < 0$  il diagramma parte da un punto del semiasse reale negativo.
2. Se vi sono poli nell'origine (il sistema **non è di tipo 0**) il diagramma parte da un **punto all'infinito in corrispondenza di  $\omega = 0$** . Il quadrante del piano di Gauss dal quale partirà il diagramma dipende dal valore della fase nel diagramma di Bode in corrispondenza di  $\omega = 0$ .

Ad esempio, se la fase del diagramma di bode parte da una fase di  $-90^\circ$  allora il diagramma di Nyquist partirà dall'infinito vicino all'asse dei  $-90^\circ$ .

# Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

## Comportamento per $\omega \rightarrow 0$

Per riassumere, si considera  $h_1$  il numero di zeri nell'origine e con  $h_2$  il numero di poli nell'origine che caratterizzano la funzione di trasferimento del sistema. Allora si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \begin{cases} 0, & \text{se } h_2 - h_1 < 0 \\ |K|, & \text{se } h_2 - h_1 = 0 \\ \infty, & \text{se } h_2 - h_1 > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}(h_2 - h_1) + \angle K \quad \text{con}$$

## Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$

Per definire il comportamento del diagramma di Nyquist quando la pulsazione tende all'infinito, si deve considerare l'eccesso  $n - m$ , in cui  $n$  è il numero di poli e  $m$  è il numero di zeri del sistema. Si può riassumere come segue:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \begin{cases} \infty, & \text{se } n - m < 0 \\ |K|, & \text{se } n - m = 0 \\ 0, & \text{se } n - m > 0 \end{cases}$$

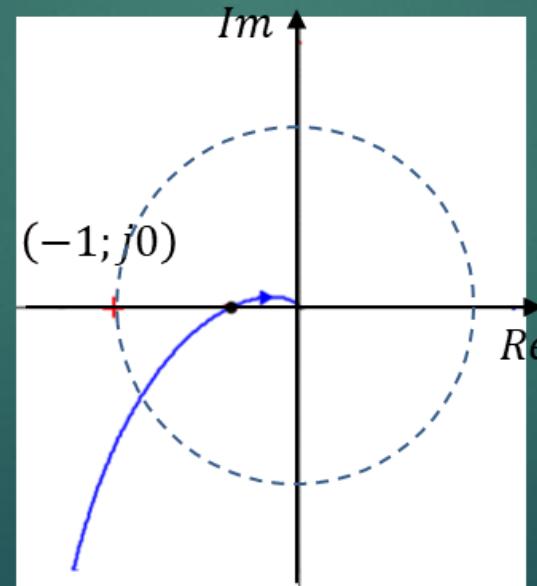
**N.B.** In entrambi i casi si considera  $\angle K = 0$  se  $K > 0$  oppure  $\angle K = -\pi = -180^\circ$  se  $K < 0$

## Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

Per introdurre il concetto di stabilità nella rappresentazione di Nyquist, deve essere evidenziato durante il tracciamento del diagramma di Nyquist il punto sull'asse reale negativo caratterizzato dalle coordinate  $(-1, +j0)$ .

Questo punto, *punto critico*, corrisponde sul diagramma di Bode ad una particolare coppia di valori di modulo e fase in cui il modulo è pari a  $0dB$  e la fase è pari a  $-180^\circ$ .

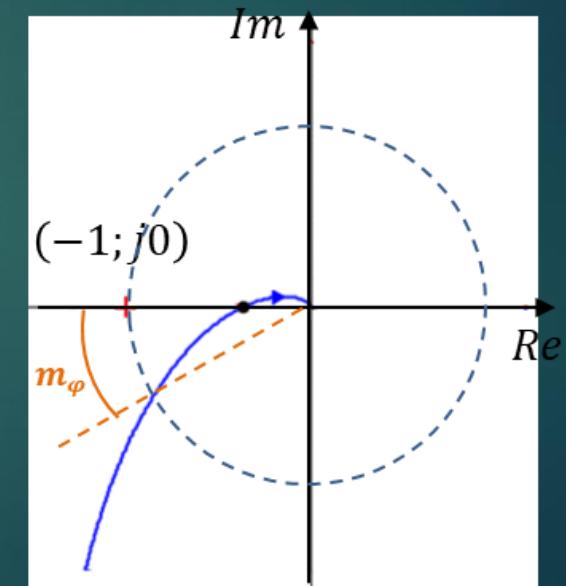
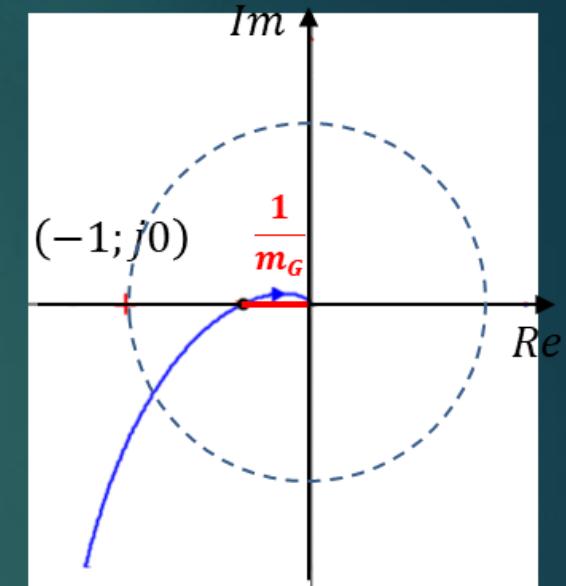
Se il diagramma di Nyquist passa proprio attraverso il punto critico allora non è possibile definire i margini di stabilità del sistema a ciclo aperto.



## Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

Se si considera un tracciamento dei diagrammi più quantitativo, si ha:

- Il **margine di guadagno**  $m_G$  corrisponde al reciproco della distanza dall'origine dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale, quando questa intersezione si trova sulla destra del punto critico  $(-1; 0j)$  e sulla sinistra dell'origine
- Il **margine di fase**  $m_\varphi$  è dato dall'angolo sotteso tra l'asse reale negativo e la semiretta passante per l'origine degli assi e l'intersezione del diagramma polare con il cerchio unitario, quando questa intersezione avviene nel secondo o terzo quadrante



## Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

Una importante proprietà del diagramma polare è che la funzione di trasferimento di un sistema lineare e stazionario mostra una *simmetria coniugata*.

Quindi, il grafico per  $\omega$  che varia da  $-\infty$  a  $0^-$  è l'immagine speculare rispetto all'asse reale del grafico tracciato per  $\omega$  che varia da  $0^+$  a  $+\infty$ .

Per convenzione, si usa distinguere graficamente il tracciato:

- Il tracciato relativo alle **pulsazioni negative** viene eseguito a **tratto discontinuo**;
- Il tracciato riguardante le **pulsazioni positive** viene eseguito con **tratto continuo**.
- Per concludere **si congiungono graficamente i due rami che tendono alla pulsazione infinita mediante dei semicerchi in senso antiorario**, che tendono teoricamente all'infinito.

Il numero di semicerchi, e quindi il numero di rotazioni attorno all'origine degli assi polari, è definito dal numero di poli nell'origine che presenta la funzione di trasferimento del sistema a ciclo aperto.

## Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

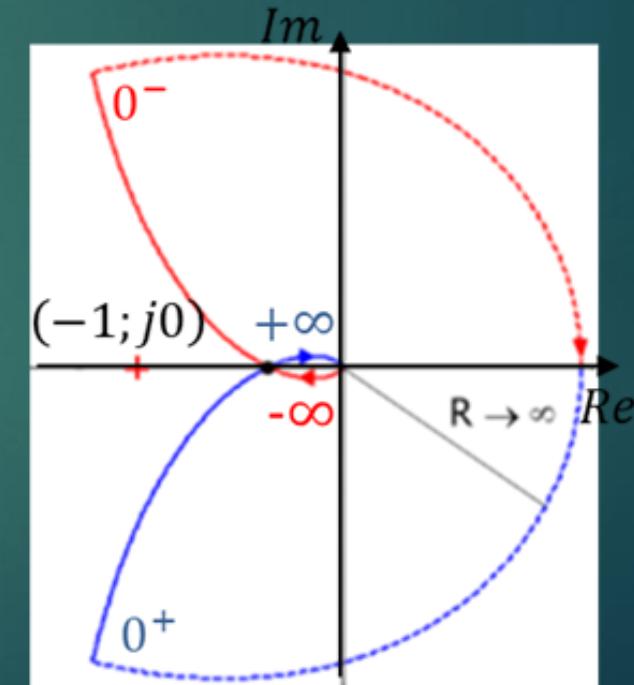
Affinché il sistema a ciclo chiuso  $W(j\omega)$  risulti **stabile** si deve verificare che il **numero di rotazioni** del diagramma di Nyquist attorno al punto critico  $(-1; 0j)$  **sia nullo**.

Ciò sta a significare che nella funzione di trasferimento del sistema a ciclo aperto  $F(j\omega)$  non presenta poli a parte reale positiva.

Se risulta che il numero di rotazioni attorno al punto critico, e che quindi lo comprendono, sono maggiori di zero, allora il **sistema a ciclo chiuso è instabile** a causa della presenza di poli a parte reale positiva

Per capire se il punto critico è interno al diagramma di Nyquist completo si percorre la curva seguendo le pulsazioni crescenti e si considera interno alla curva tutto ciò che è alla sua destra.

In questo esempio si osserva un sistema stabile a ciclo chiuso poiché il punto critico non è contenuto all'interno dell'area sottesa dalla curva.

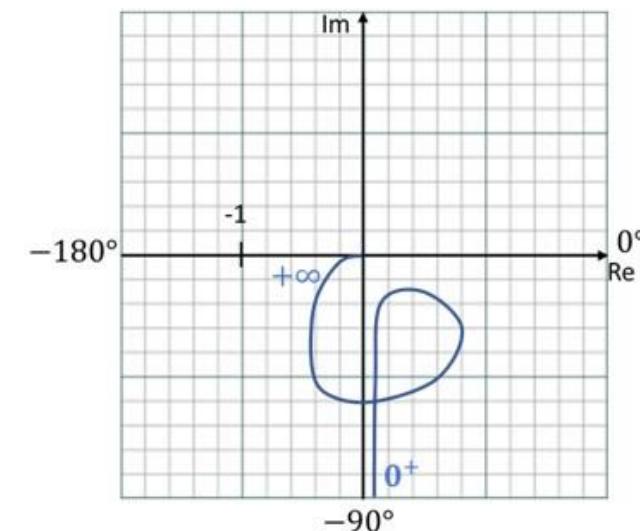
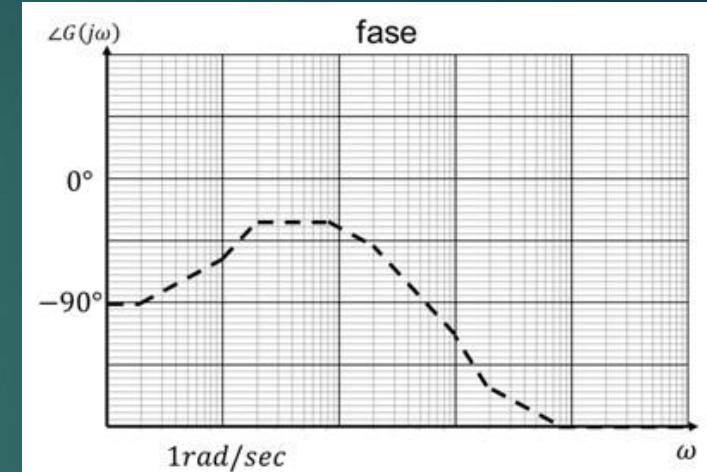


## Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

Considerando il sistema in analisi si studia il comportamento dei diagrammi di Bode per la pulsazione  $\omega$  che tende a **infinito** e per  $\omega$  che tende a **zero**, e si traccia l'andamento del corrispondente diagramma di Nyquist in modo **qualitativo**

$$F(s) = \frac{5 \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{s \left( \frac{s^2}{20^2} + \frac{0.4s}{20} + 1 \right) \left( \frac{s}{80} + 1 \right)}$$

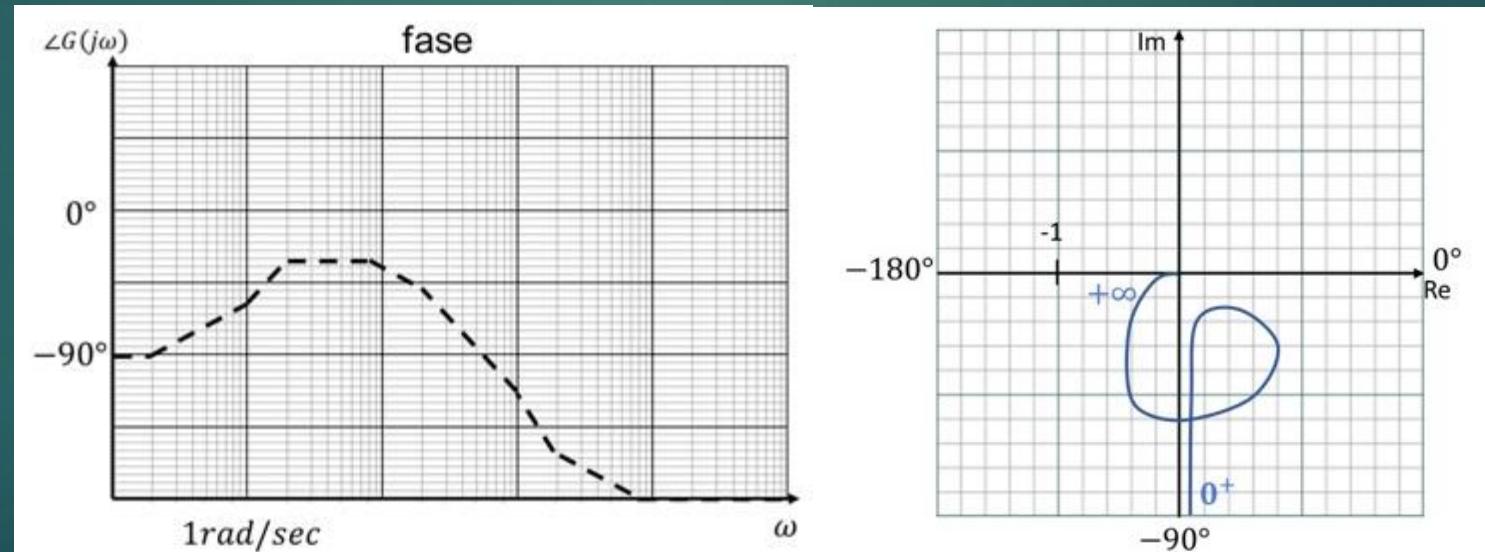
- Il sistema presenta un polo nell'origine, quindi il diagramma di Nyquist non parte dall'asse reale ma da un **punto all'infinito**.
- In particolare, poiché dal diagramma di Bode risulta che per  $\omega = 0$  la fase vale  $-90^\circ$ , e cresce all'aumentare delle pulsazioni, allora il diagramma di Nyquist inizia **tangente all'asse dei  $-90^\circ$** .



# Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

All'aumentare delle pulsazioni, si osserva che la fase:

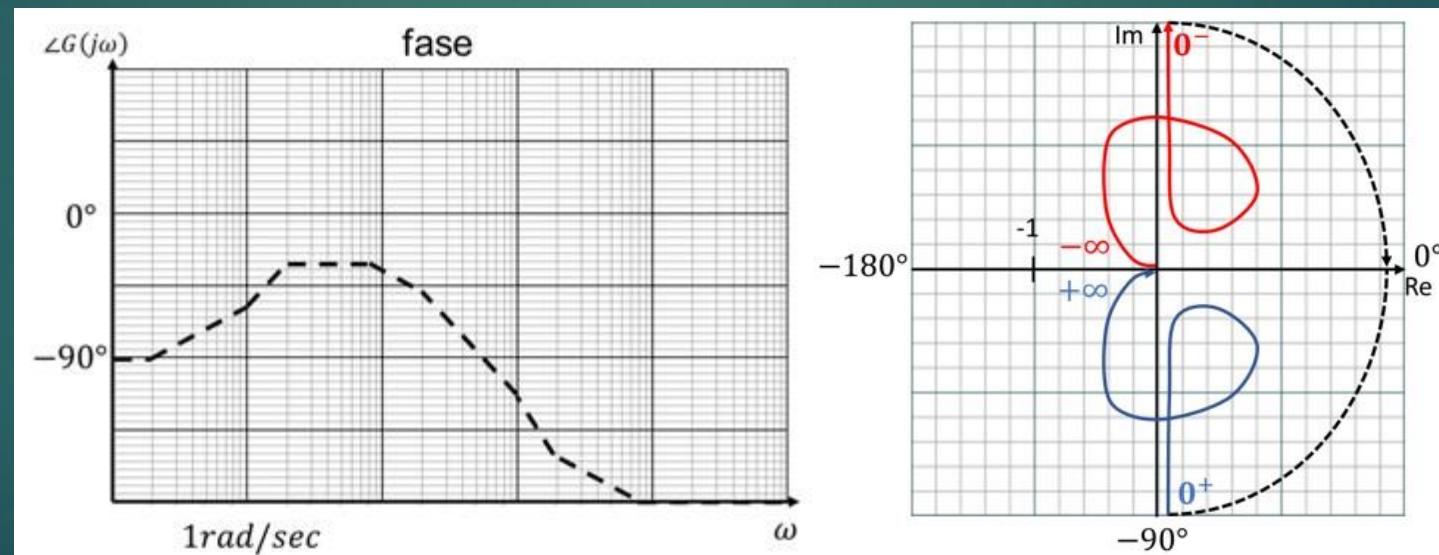
- sale fino a superare i  $-45^\circ$ ;
- scende superando i  $-45^\circ$  e i  $-90^\circ$ ;
- interseca la circonferenza di raggio unitario e centrata nell'origine nel punto X. Il segmento che unisce l'origine e il punto X forma un angolo di circa  $50^\circ$  con l'asse dei  $-180^\circ$  (**margine di fase**).
- scende fino ai  $-180^\circ$  senza oltrepassare l'asse. Il **margine di guadagno** è quindi **infinito**.



# Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

- Si ribalta rispetto all'asse reale la curva appena tracciata per ottenere il comportamento del sistema per pulsazioni negative.
- Per chiudere il ciclo si unisce il punto per  $\omega = 0^+$  e il punto per  $\omega = 0^-$  effettuando mezzo giro antiorario poiché la funzione di trasferimento a ciclo aperto presenta un polo nell'origine.

Nel caso in analisi si ha che il punto critico non è contenuto all'interno dell'area sottesa dalla curva. Il sistema è **stabile a ciclo chiuso**.

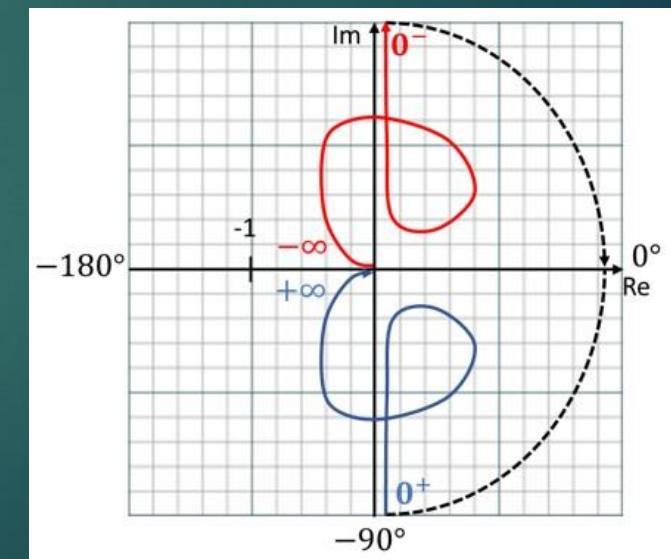
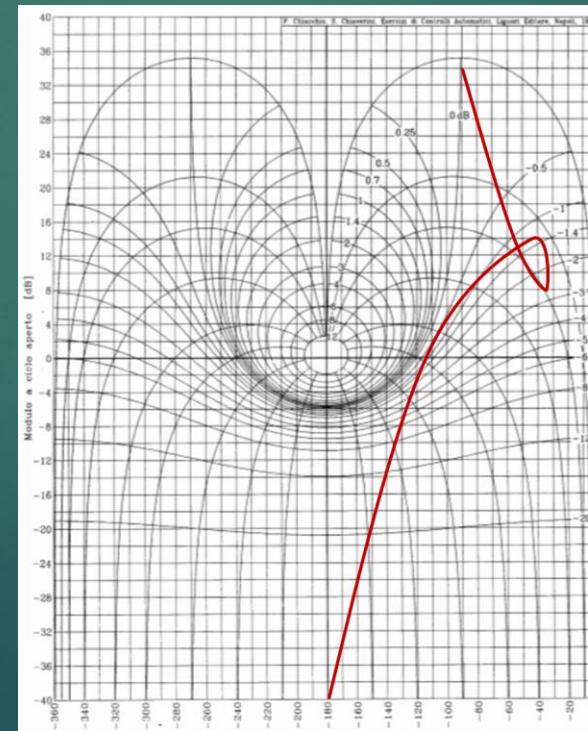
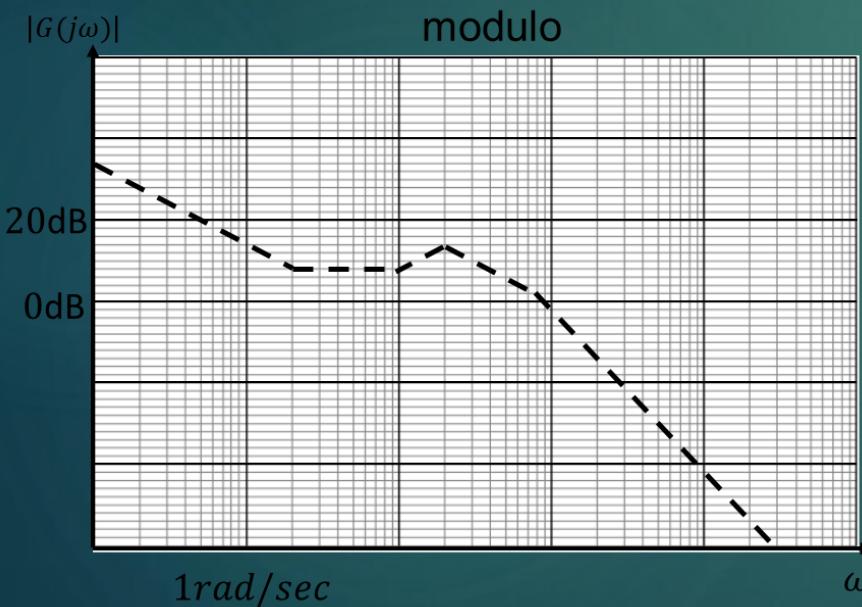


# Rappresentazione diagrammi di Nyquist della funzione Risposta Armonica

La rappresentazione grafica della funzione di trasferimento del sistema, sia tramite il piano di Nichols che tramite il piano di Nyquist, presenta un andamento caratterizzato da un cappio.

Ciò è dovuto al fatto che il modulo risulta assumere un andamento a sella, ossia:

- Inizialmente il suo valore diminuisce fino alla pulsazione  $\omega = 2 \text{ rad/sec}$
- Si mantiene pressoché costante fino alla pulsazione
- $\omega = 10 \text{ rad/sec}$  Aumenta il valore fino alla pulsazione  $\omega = 20 \text{ rad/sec}$ ;
- Diminuisce il suo valore all'aumentare delle pulsazioni per  $\omega > 20 \text{ rad/sec}$



# Fondamenti di Automatica

Parte 6

«Sintesi grafica tramite compensazione»

## Sintesi grafica tramite compensazione

Può accadere che a seguito dell'analisi di un sistema di controllo questo **non soddisfi** alcuni dati di specifica.

Tramite l'utilizzo delle **reti correttive** è possibile effettuare un'azione di **compensazione** in grado di modificare il comportamento del sistema affinché le **specifiche in frequenza a ciclo aperto** vengano rispettate

Sulla base della conoscenza del processo, si deve progettare una **rete di correzione** che sia in grado di ottenere il miglior comportamento possibile per il sistema, eventualmente di correggerlo e garantire il suo funzionamento in base alle **specifiche di progetto**

Si scelgono la **struttura** e i **parametri** del **controllore** da associare al sistema controllato in modo che il sistema complessivo si comporti come desiderato

L'azione di controllo viene effettuata mediante **una rete di correzione o una combinazione di esse**, a seconda delle azioni di controllo che devono essere realizzate.

Le reti di correzione più utilizzate nell'ambito dei controlli automatici sono:

- Rete **ritardatrice**
- Rete **anticipatrice**

# Sintesi grafica tramite compensazione

## Rete ritardatrice:

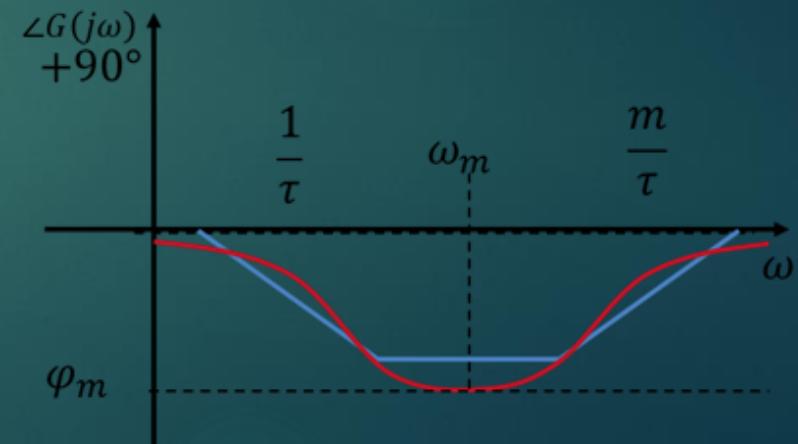
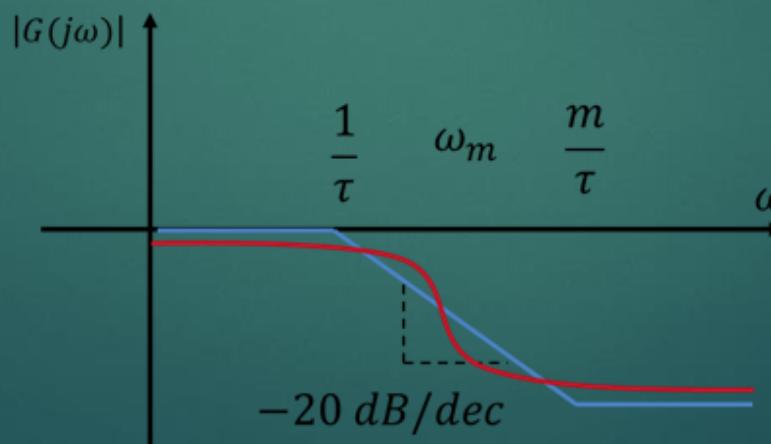
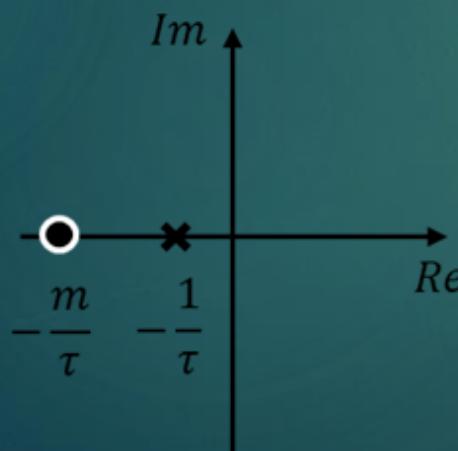
Ottenuta mediante l'impiego di una sequenza polo-zero reali a parte reale negativa, nella quale i parametri da fissare sono la posizione del polo e la distanza da questo dello zero.

Espressione generale della funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{1 + \frac{\tau}{m}s}{1 + \tau s}$$

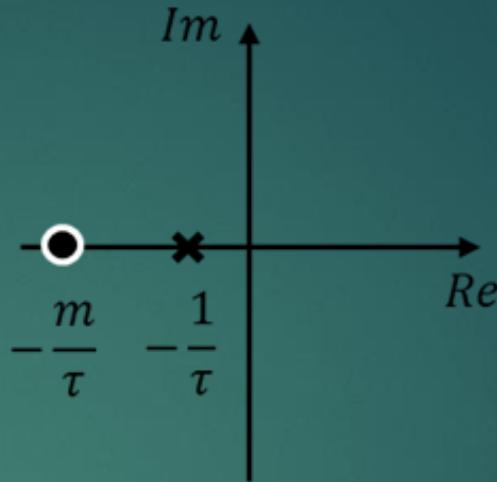
Tracciando i diagrammi di Bode si può osservare che questa rete:

- Effettua un **ritardo di fase** per tutte le pulsazioni finite;
- Non sfasa e non attenua il modulo in corrispondenza della pulsazione nulla;
- Non sfasa e **attenua il modulo** di  $1/m$  in corrispondenza della pulsazione infinita.



## Sintesi grafica tramite compensazione

$$C(s) = \frac{1 + \frac{\tau}{m}s}{1 + \tau s}$$



Il **massimo ritardo di fase** che si può ottenere dalla rete è funzione del parametro *m*, detto *distanza logaritmica*, ed è dato dalla funzione

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}$$

La **pulsazione**  $\omega_m$  in corrispondenza della quale si verifica il ritardo di fase  $\varphi_m$

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\frac{1}{m}}}$$

# Sintesi grafica tramite compensazione

## Rete anticipatrice:

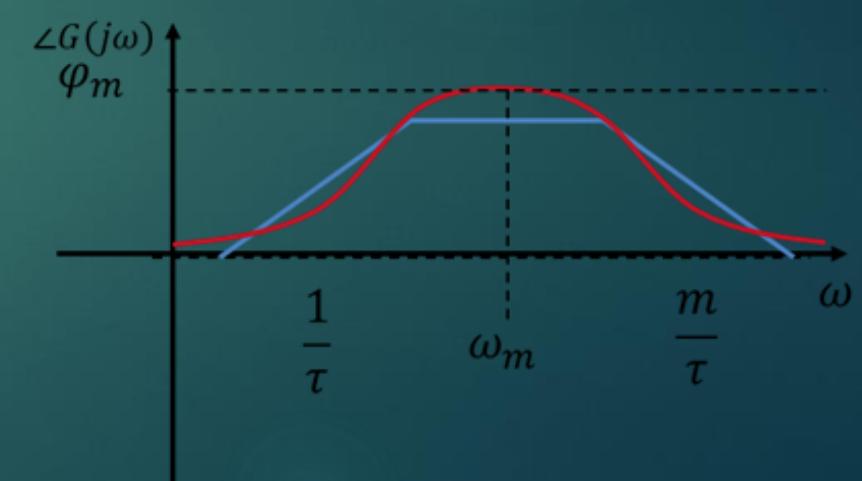
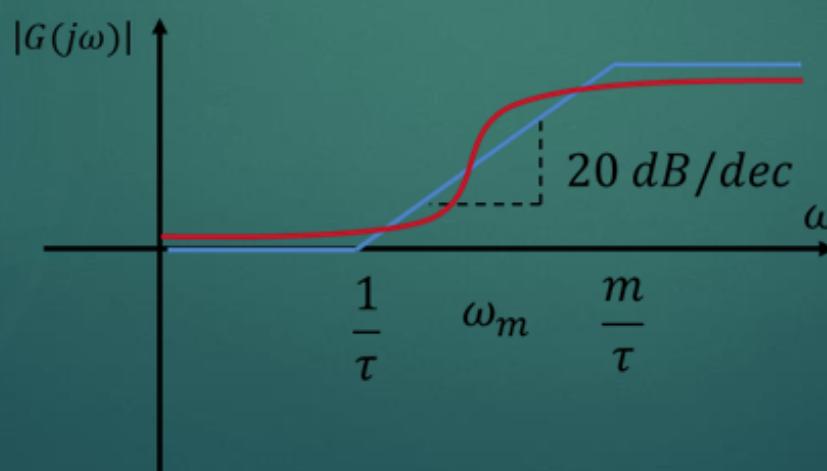
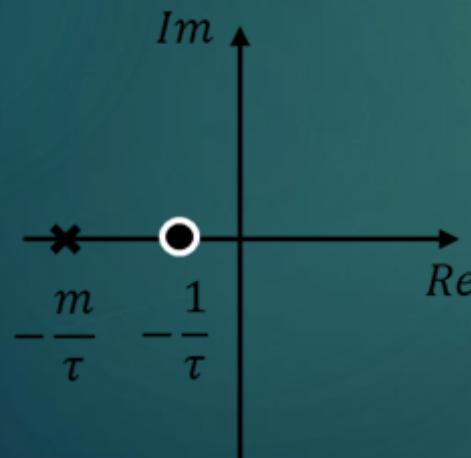
Ottenuta mediante l'impiego di una sequenza zero-polo reali a parte reale negativa, nella quale i parametri da fissare sono la posizione dello zero e la distanza da questo del polo.

Espressione generale della funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}$$

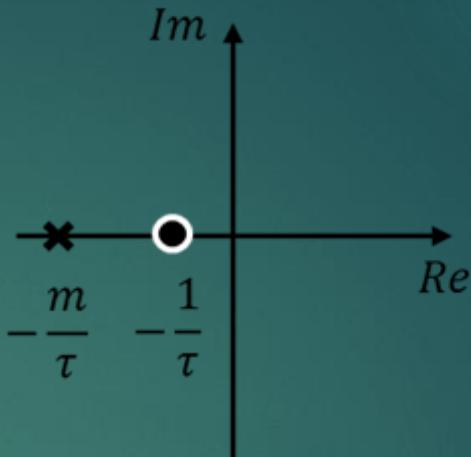
Tracciando i diagrammi di Bode si può osservare che questa rete:

- Effettua un **anticipo di fase** per tutte le pulsazioni finite;
- Non sfasa e **attenua il modulo** di  $1/m$  in corrispondenza della pulsazione nulla.
- Non sfasa e non attenua il modulo in corrispondenza della pulsazione infinita



## Sintesi grafica tramite compensazione

$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}$$



Il **massimo ritardo di fase** che si può ottenere dalla rete è funzione del parametro ***m***, detto *distanza logaritmica*, ed è dato dalla funzione

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}$$

La **pulsazione  $\omega_m$**  in corrispondenza della quale si verifica il ritardo di fase  $\varphi_m$  si può ricavare come segue

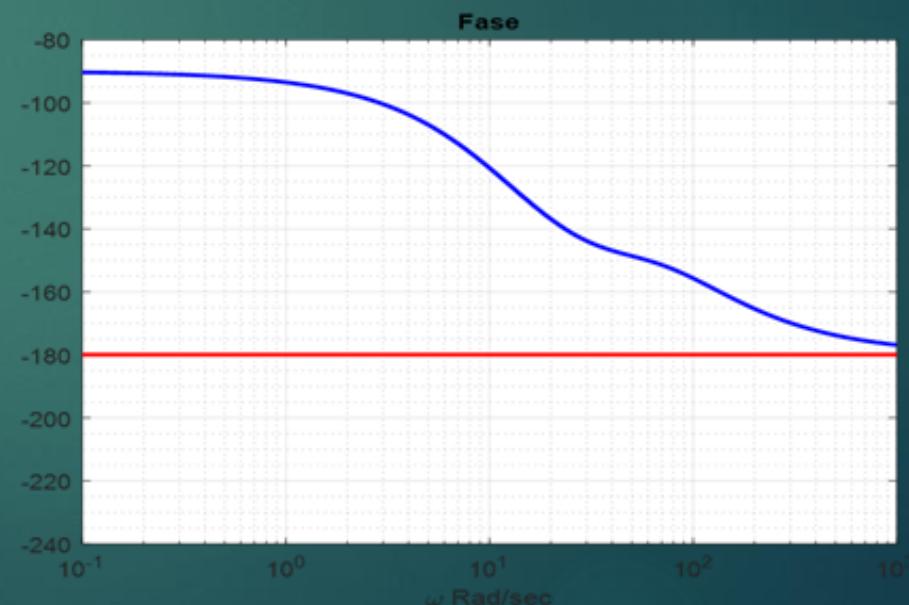
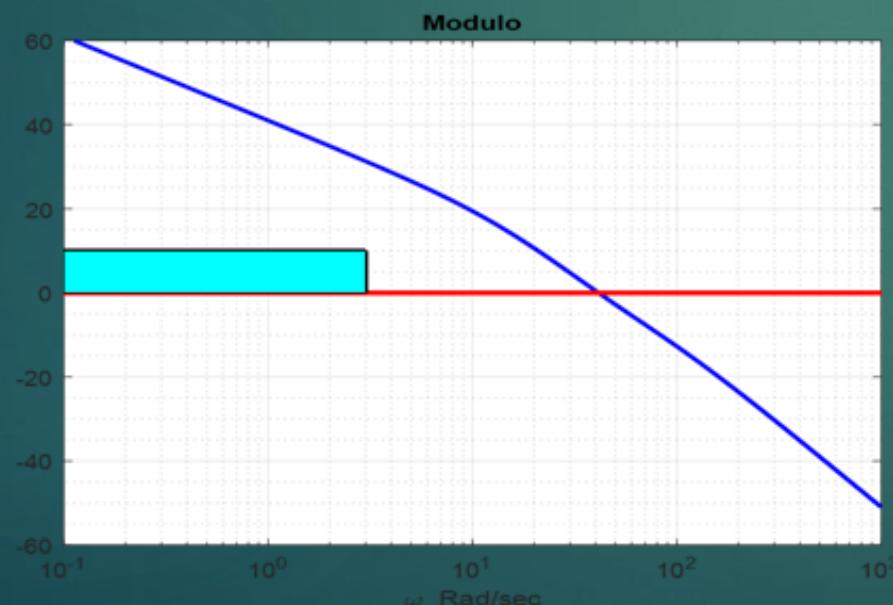
$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\frac{1}{m}}}$$

## Sintesi grafica tramite compensazione

Sia dato il diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto  $F(s)$ , sotto riportata, in cui non sono presenti poli a parte reale positiva

Si vuole determinare la rete compensatrice  $R(s)$  tale da assicurare il soddisfacimento delle seguenti specifiche di progetto:

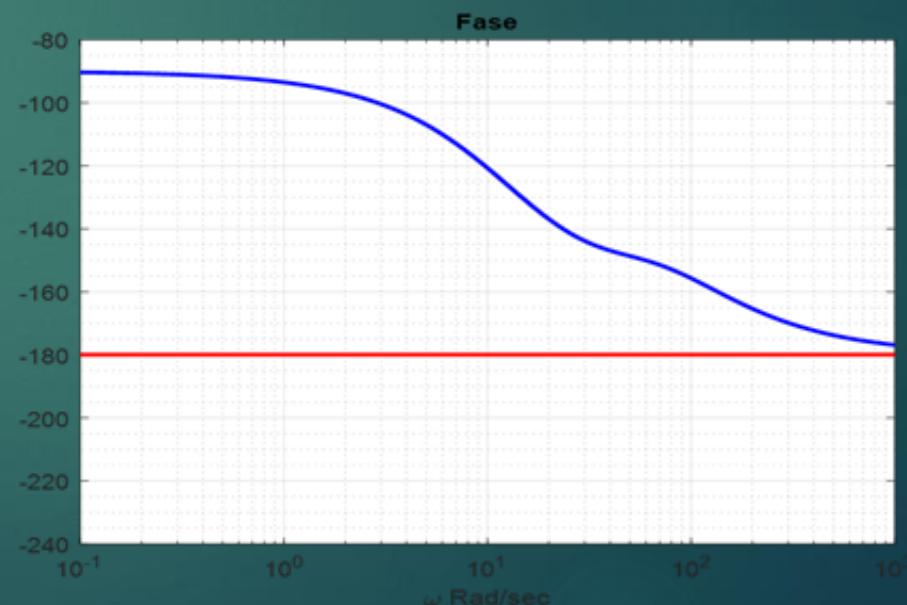
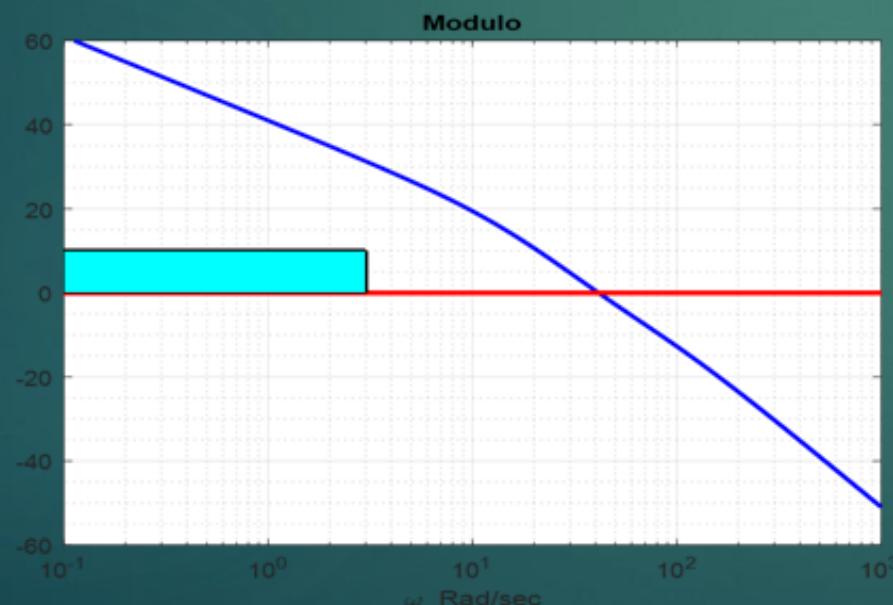
- $\omega_t \leq 10 \text{ rad/sec}$  e  $m_\varphi \geq 40^\circ$
- Il rispetto della finestra proibita indicata in figura



## Sintesi grafica tramite compensazione

1. La pulsazione di attraversamento attuale è  $\omega_t = 40 \text{ rad/sec}$ , e, da specifica, è richiesta una pulsazione di attraversamento desiderata tale che  $\omega_t^* \leq 10 \text{ rad/sec}$
2. In corrispondenza della pulsazione  $\omega = 10 \text{ rad/sec}$  si nota che il modulo è pari a  $20dB$ . E' quindi necessario **abbassare** il diagramma dei moduli di almeno  $20dB$  in quel punto.

Per ottenere questa azione di compensazione si deve fare riferimento all'utilizzo di una rete *ritardatrice*



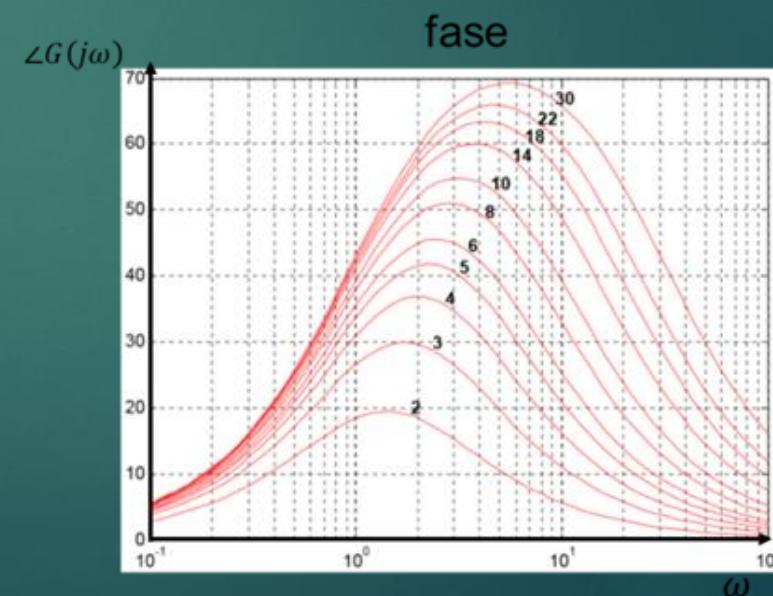
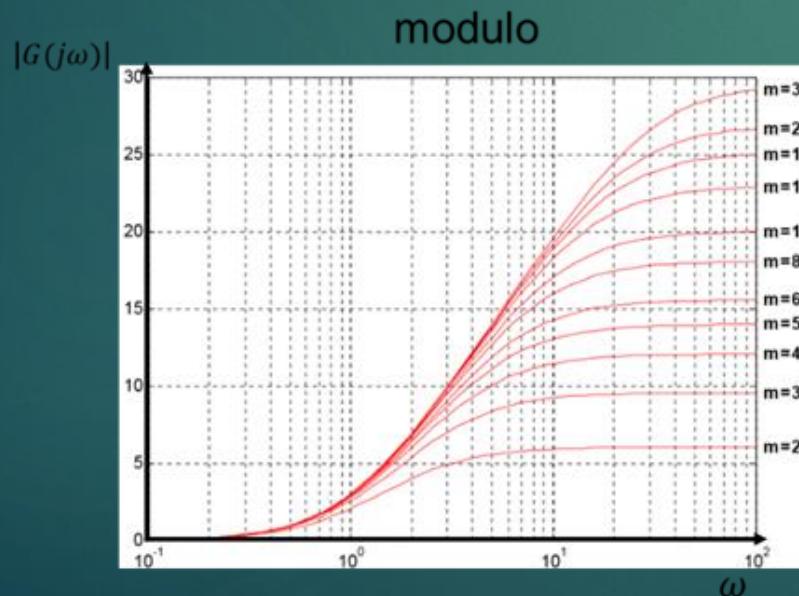
## Sintesi grafica tramite compensazione

I diagrammi di Bode delle reti ritardatrici sono speculari rispetto all'asse delle ascisse ai diagrammi di Bode delle reti anticipatrici.

3. Consultando il diagramma delle reti anticipatrici, si nota che quella caratterizzata dal parametro  $m = 10$  potrebbe realizzare l'azione di compensazione desiderata.

Per la pulsazione  $\omega = 1000 \text{ rad/sec}$  si ha che:

- Il modulo vale  $-20dB$ ;
- La fase vale circa  $-2,5^\circ$ .



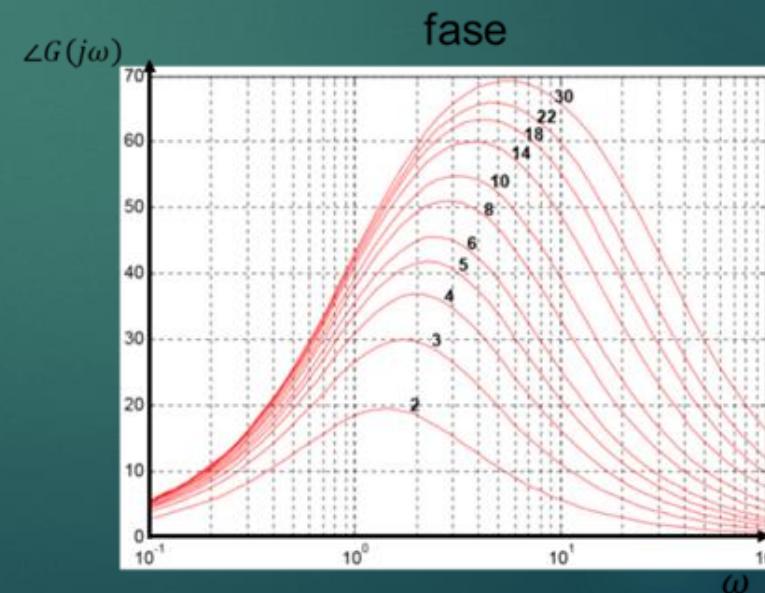
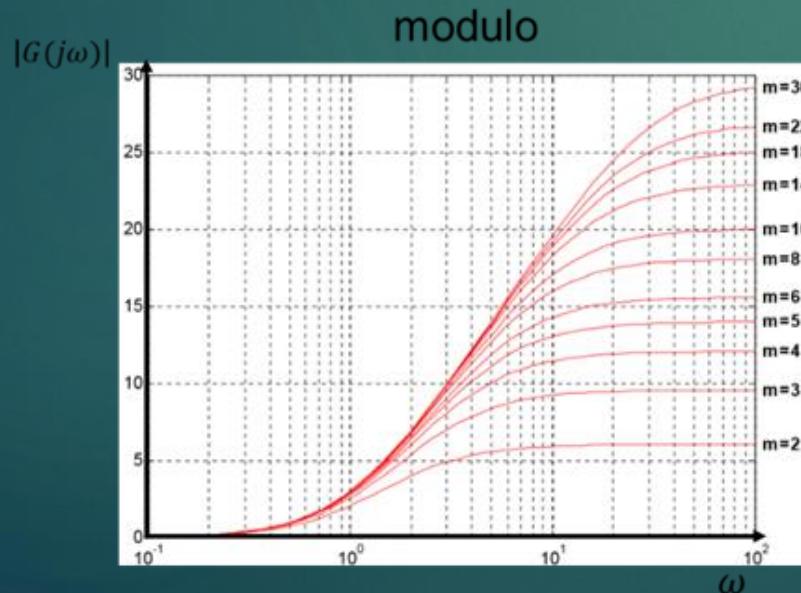
## Sintesi grafica tramite compensazione

4. Il contributo della rete osservato in  $\omega = 1000 \text{ rad/sec}$  deve essere ottenuto in corrispondenza di  $\omega_t^* = 10 \text{ rad/sec}$  del diagramma di Bode del processo a ciclo aperto. Si calcolano, quindi i parametri che devono caratterizzare la rete:

$$\omega\tau = 1000 \text{ rad/sec} \rightarrow 10\tau = 1000 \rightarrow \tau = 100$$

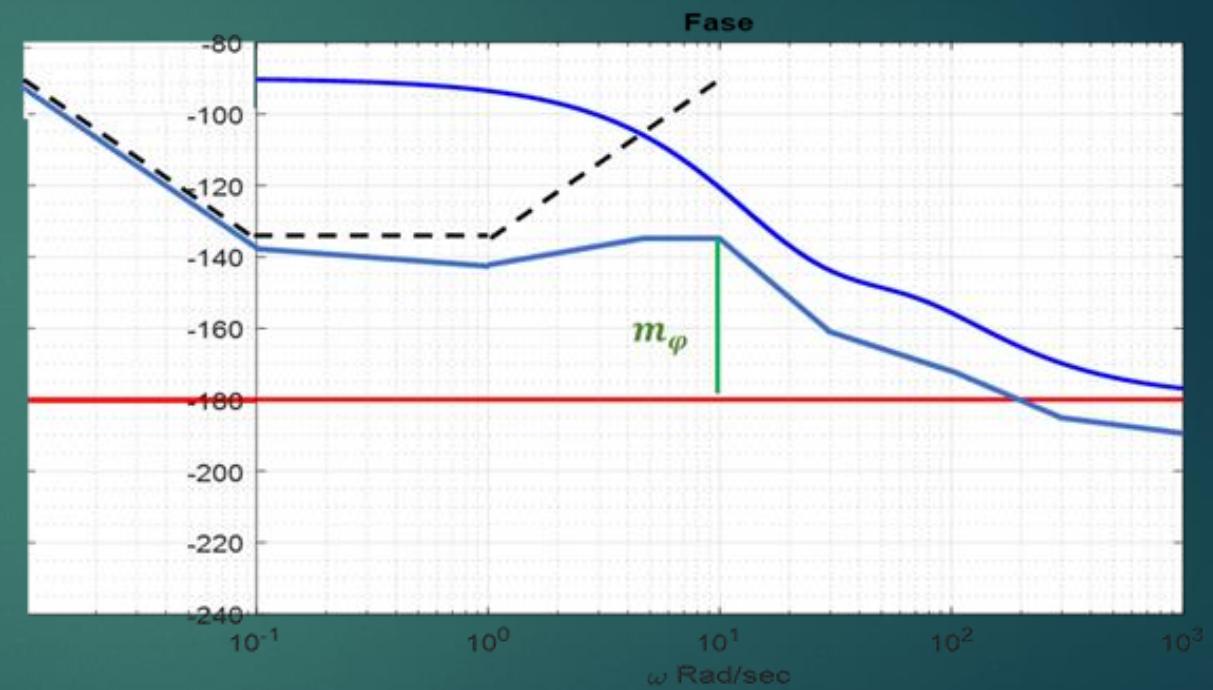
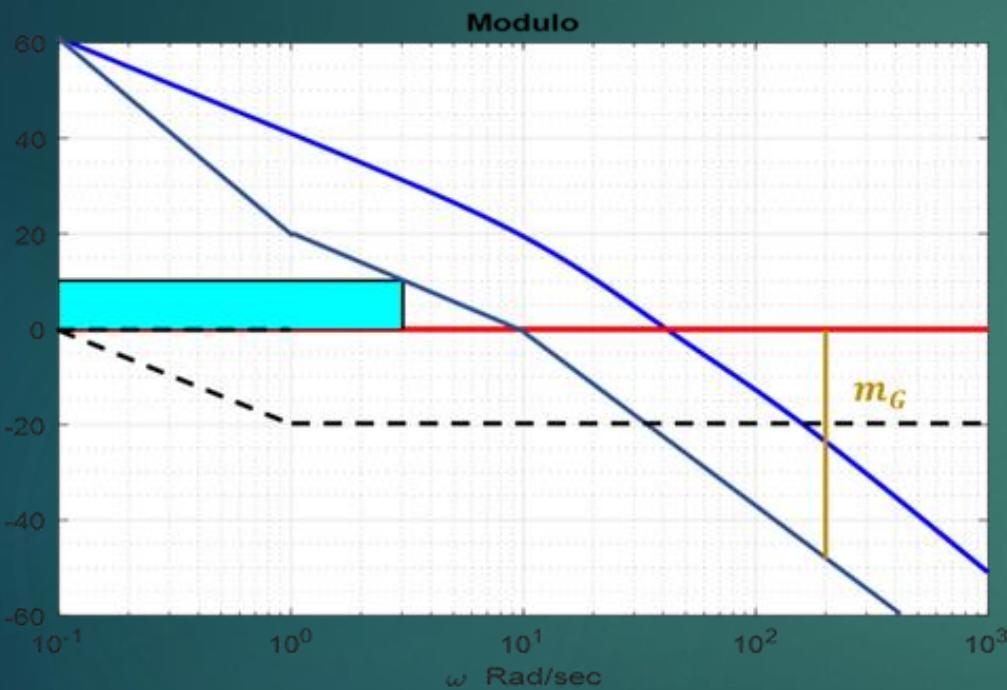
Sostituendo i valori di  $\tau$  e  $m$  nella funzione di trasferimento della rete si ha

$$C(s) = \frac{1 + 10s}{1 + 100s} \quad \text{in cui} \quad \begin{cases} \text{zero} \rightarrow \frac{m}{\tau} = 0,1 \text{ rad/sec} \\ \text{polo} \rightarrow \frac{1}{\tau} = 0,01 \text{ rad/sec} \end{cases}$$



## Sintesi grafica tramite compensazione

5. Si traccia l'andamento della funzione di trasferimento della rete  $C(s)$  nel diagramma di Bode e in quello delle fasi del processo e si sommano graficamente i due contributi



## Sintesi grafica tramite compensazione

6. Dal diagramma di Bode finale, si può notare che:

- La nuova pulsazione di attraversamento è  $\omega'_t = 10 \text{ rad/sec}$ , che soddisfa la specifica  $\omega_t^* \leq 10 \text{ rad/sec}$ ;
- Il diagramma di Bode del modulo non attraversa la banda proibita, come da specifica;
- Il margine di fase è  $m_\varphi \approx 45^\circ$ , che soddisfa la specifica  $m_\varphi^* \geq 40^\circ$ ;
- Si può definire la pulsazione a  $-180^\circ$   $\omega_{-\pi} \approx 200 \text{ rad/sec}$ , da cui il margine di guadagno  $m_G \approx 50dB$

In questo modo si è ottenuto il sistema sintetizzato  $F^*(s) = C(s)F(s)$

