Algoritmi e Strutture di Dati

Tipi astratti di dato

(pile e code realizzate tramite array)

m.patrignani

Nota di copyright

Sommario

- Tipi astratti di dato
- Strutture di dati elementari
  - le pile
  - le code
- Realizzazione con array di queste strutture
- La complessità ammortizzata

Tipo astratto di dato

- Un *tipo astratto di dato* (o ADT, abstract data type) è una descrizione di un tipo di dato indipendente dalla sua realizzazione in un linguaggio di programmazione
- Un tipo astratto di dato è costituito da:
  - i domini interessati
    - tra cui il dominio di interesse ed eventualmente altri domini di supporto
  - un insieme di costanti
  - una collezione di operazioni

Il tipo astratto di dato pila

- Le pile (o stack) realizzano una strategia LIFO (last-in first-out)
- Tipo astratto: pila di interi
  - domini
    - il dominio di interesse è l'insieme delle pile P di interi
    - dominio di supporto: gli interi Z = {0, 1, -1, 2, -1, …}
    - dominio di supporto: i booleani B = {true, false}
  - costanti
    - la pila vuota

Il tipo astratto di dato pila

- Tipo astratto: pila di interi
  - operazioni
    - verifica se una pila è vuota

      $IS\_EMPTY: P \rightarrow B$
    - inserimento di un elemento nella pila

      $PUSH: P \times Z \rightarrow P$
    - rimozione e restituzione dell'elemento affiorante della pila

      $POP: P \rightarrow P \times Z$
  - operazioni aggiuntive
    - lettura dell'elemento affiorante della pila

      $TOP: P \rightarrow Z$
    - svuotamento della pila

      $EMPTY: P \rightarrow P$
    - numero degli elementi nella pila

      $SIZE: P \rightarrow Z$

Realizzazione di un tipo astratto di dato

- Un tipo astratto di dato può essere *realizzato* (o *implementato*) in uno specifico linguaggio di programmazione tramite la definizione di
  - tipi concreti o strutture dati nello specifico linguaggio di programmazione corrispondenti ai *domini* necessari
  - costrutti che consentono di codificare le *costanti*
  - funzioni che realizzano le *operazioni* previste
- Ovviamente uno stesso tipo astratto di dato può avere diverse realizzazioni con diverse proprietà

Realizzazione di un ADT: osservazioni

- La definizione dei tipi concreti o delle strutture che corrispondono ai domini può comportare delle limitazioni
  - esempi di limitazioni
    - il dominio P delle pile viene ristretto alle pile di dimensione massima `maxsize`, nota a priori
    - il dominio Z degli interi viene realizzato tramite il tipo concreto `int` che ha un valore minimo `MININT` e massimo `MAXINT`
- Le costanti vengono spesso codificate tramite delle funzioni che ritornano la struttura corrispondente
  - esempio di costante:
    - la pila vuota viene realizzata tramite

      `CREATE-STACK(maxsize)`

      che ritorna il riferimento ad una pila vuota che potrà contenere al massimo `maxsize` elementi

Funzioni che operano su pile

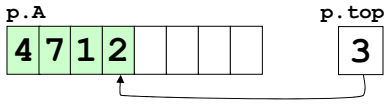
- `NEW_STACK(maxsize)`
  - ritorna il riferimento ad una pila vuota che potrà contenere al massimo `maxsize` elementi
- `IS_EMPTY(p)`
  - ritorna `true` se la pila è vuota, `false` altrimenti
- `PUSH(p,x)`
  - inserimento di un elemento nella pila
    - può dare un errore di "overflow" se l'implementazione prevede un numero massimo di elementi nella pila
- `POP(p)`
  - rimozione e restituzione dell'elemento affiorante della pila
    - dà un errore di "underflow" se la pila è vuota

Altre funzioni su pile

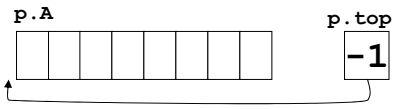
- `TOP(p)`
  - ritorna l'elemento affiorante senza rimuoverlo
    - può dare errore se la pila è vuota
- `EMPTY(p)`
  - svuota la pila
- `SIZE(p)`
  - ritorna il numero degli elementi in pila

Realizzazione di una pila con array

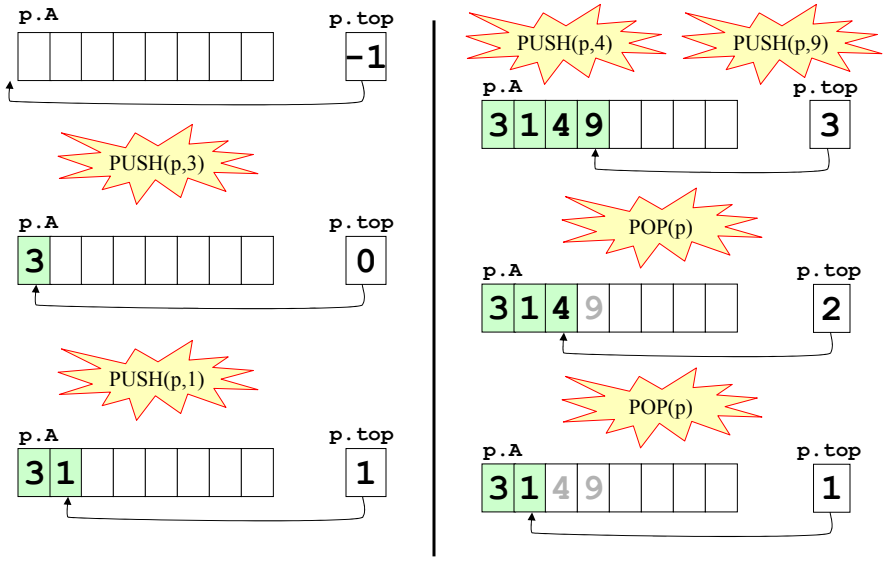
- Una pila `p` può essere realizzata tramite un oggetto contenente un array `p.A` e un intero `p.top` che specifica l'indice dell'elemento affiorante



- Quando la pila è vuota `p.top` vale -1



Sequenza di operazioni su una pila



Operazione NEW_STACK

- Implementazione in pseudocodice della funzione di creazione

```
NEW_STACK(maxsize)
1.  ▷ creo un oggetto p con:   p.A array di maxsize interi
2.  ▷                          p.top intero
3.  p.top = -1
4.  return p
```

- L'uso della funzione NEW_STACK è il seguente

```
...
p = NEW_STACK(10)        ▷ creo una pila con 10 posizioni
...
```


Operazioni PUSH e POP

- Implementazione delle funzioni di modifica

```
PUSH(p,x)
1.  if p.top == p.A.length-1
2.      error("overflow")
3.   else
4.      p.top = p.top + 1
5.      p.A[p.top] = x
```

```
POP(p)
1.  if p.top == -1
2.      error("underflow")
3.   else
4.      p.top = p.top - 1
5.      return p.A[p.top + 1]
```


Altre operazioni sulle pile

```
IS_EMPTY(p)
1.  return p.top == -1          ▷ true se la pila è vuota
```

```
EMPTY(p)
1.  p.top = -1                  ▷ vuoto la pila
```

```
TOP(p)
1.  return p.A[p.top]           ▷ l'elemento affiorante
```

```
SIZE(p)
1.  return p.top + 1            ▷ il numero di elementi
```

- Il tempo di esecuzione di ogni operazione è $\Theta(1)$

Gestione telescopica della pila

- Strategia utilizzata per non avere limiti sulla dimensione della pila
- Si adotta una dimensione iniziale di default
  - può essere un numero fissato dal programmatore
    - per esempio 128 posizioni
  - può essere il numero di celle specificato dall'utente nella funzione `NEW_STACK`
- Quando viene eseguita una `PUSH` sulla pila piena si raddoppia la dimensione della pila corrente per poter inserire ulteriori elementi

Nuova funzione PUSH

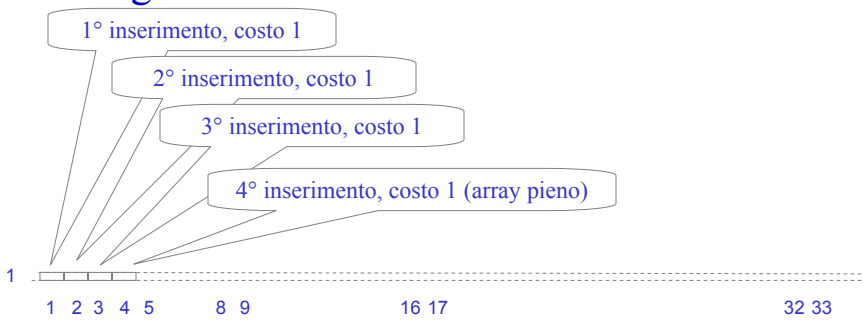
- Questa funzione PUSH raddoppia la dimensione dell'array p.A quando l'array è pieno

```
PUSH(p,x)
1.  if p.top == p.A.length-1
2.      ▷ B nuovo array di 2*p.A.length posizioni
3.      for i = 0 to p.A.length-1
4.          B[i] = p.A[i]      ▷ copio p.A dentro B
5.      p.A = B                ▷ sostituisco B a p.A
6.  p.top = p.top + 1    ▷ inserisco l'elemento x
7.  p.A[p.top] = x
```


Analisi ammortizzata

- Calcoliamo il costo degli inserimenti partendo da un array da 4 elementi

- Diagramma dei costi:



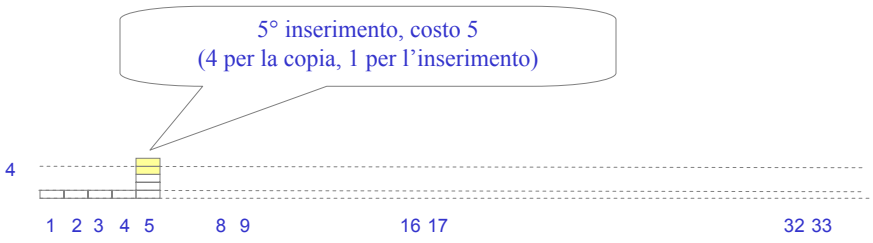
Analisi ammortizzata

- Calcoliamo il costo degli inserimenti partendo da un array da 4 elementi

5° inserimento

raddoppio la dimensione dell'array e ci copio dentro i primi 4 elementi

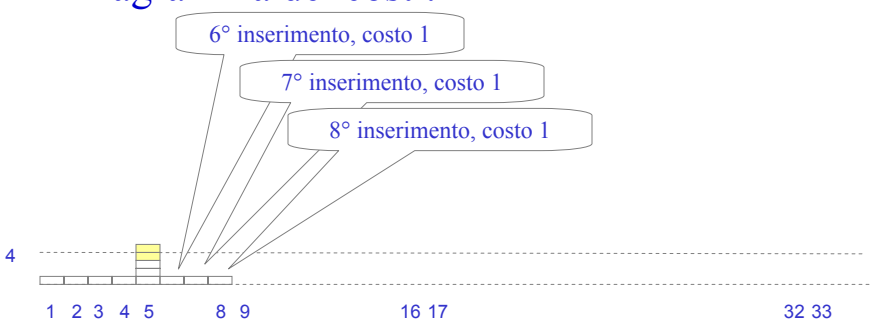
- Diagramma dei costi:



Analisi ammortizzata

- Calcoliamo il costo degli inserimenti partendo da un array da 4 elementi

- Diagramma dei costi:

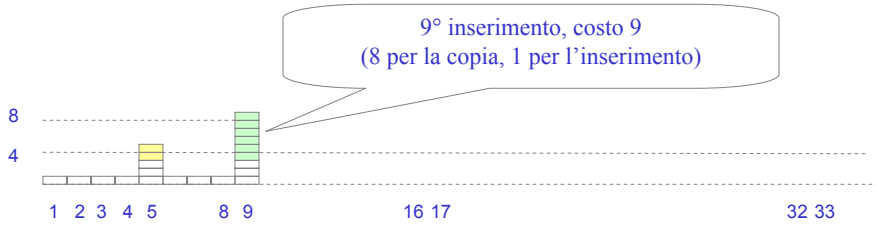


Analisi ammortizzata

- Calcoliamo il costo degli inserimenti partendo da un array da 4 elementi

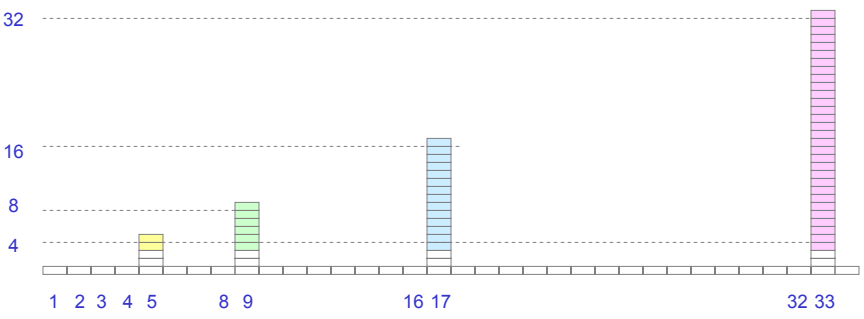
- Diagramma dei costi:

raddoppio la dimensione dell'array e ci copio dentro i primi 8 elementi



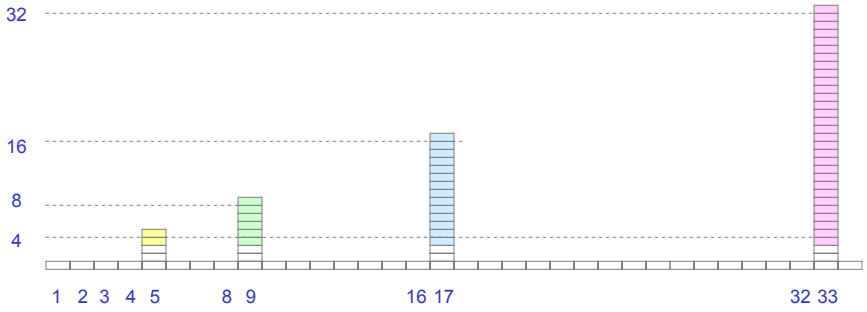
Analisi ammortizzata

- Calcoliamo il costo degli inserimenti partendo da un array da 4 elementi
- Diagramma dei costi dopo molti inserimenti



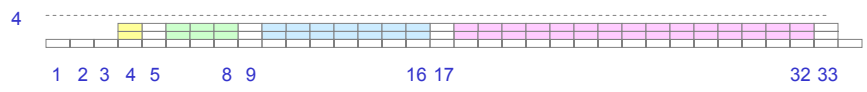
Analisi ammortizzata

- Calcoliamo il costo degli inserimenti partendo da un array da 4 elementi
- Diagramma dei costi dopo molti inserimenti
- Distribuiamo i costi sugli inserimenti



Complessità ammortizzata

- Alcuni inserimenti costano effettivamente $\Theta(n)$, dove n è il numero di elementi già contenuti nella pila
  - è corretto dire che il costo di un inserimento nel caso peggiore è $\Theta(n)$
- Una sequenza di n inserimenti costa $\Theta(n)$
  - si dice che la complessità "ammortizzata" di un inserimento è $\Theta(1)$



Uso delle realizzazioni di un ADT

- Dopo aver realizzato un ADT possiamo mettere l'implementazione a disposizione di altri programmatori specificando
  - le eventuali limitazioni della realizzazione
  - l'elenco delle operazioni supportate e la loro complessità asintotica o ammortizzata
- Esempio
  - si dispone di una realizzazione di una pila con le seguenti funzioni e complessità nel caso peggiore
    - `NEW_STACK(maxsize)` $\Theta(1)$
    - `IS_EMPTY(p)` $\Theta(1)$
    - `PUSH(p,x)` $\Theta(1)$
    - `POP(p)` $\Theta(1)$
    - `EMPTY(p)` $\Theta(1)$

Il tipo astratto di dato coda

- Le code (o queue) realizzano una strategia FIFO (first-in first-out)
- Tipo astratto: coda di interi
  - domini
    - il dominio di interesse è l'insieme delle code Q di interi
    - dominio di supporto: gli interi Z = {0, 1, -1, 2, -1, …}
    - dominio di supporto: i booleani B = {true, false}
  - costanti
    - la coda vuota

Il tipo astratto di dato coda

- Tipo astratto: coda di interi
  - operazioni
    - verifica se una coda è vuota
      $$\text{IS\_EMPTY}: Q \rightarrow B$$
    - inserimento di un elemento nella coda
      $$\text{ENQUEUE}: Q \times Z \rightarrow Q$$
    - rimozione e restituzione dell'elemento più vecchio della coda
      $$\text{DEQUEUE}: Q \rightarrow Q \times Z$$
  - operazioni aggiuntive
    - lettura dell'elemento più vecchio della coda
      $$\text{FRONT}: Q \rightarrow Z$$
    - svuotamento della coda
      $$\text{EMPTY}: Q \rightarrow Q$$
    - numero degli elementi nella coda
      $$\text{SIZE}: Q \rightarrow Z$$

Realizzazione dell'ADT coda

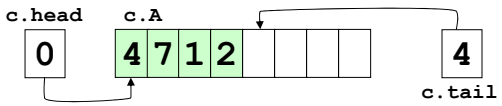
- `NEW_QUEUE(maxsize)`
  - ritorna un riferimento ad una coda vuota che può contenere al massimo `maxsize` interi
- `IS_EMPTY(c)`
  - ritorna `true` se la coda è vuota, altrimenti ritorna `false`
- `ENQUEUE(c,x)`
  - inserisce un elemento `x` nella coda
    - può dare un errore di "overflow" se l'implementazione prevede un numero massimo di elementi
- `DEQUEUE(c)`
  - rimuove l'elemento più vecchio della coda e lo restituisce
    - dà un errore di "underflow" se la coda è vuota

Altre operazioni sulle code

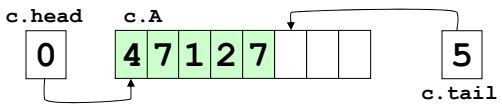
- `FRONT(c)`
  - ritorna l'elemento più vecchio senza rimuoverlo
    - può dare errore se la coda è vuota
- `EMPTY(c)`
  - svuota la coda
- `SIZE(c)`
  - ritorna il numero degli elementi in coda

Realizzazione di una coda tramite array

- Una coda `c` può essere realizzata con un array `c.A` arricchito da due attributi `c.head` e `c.tail` che contengono gli indici dell'elemento più vecchio e della prima posizione utile

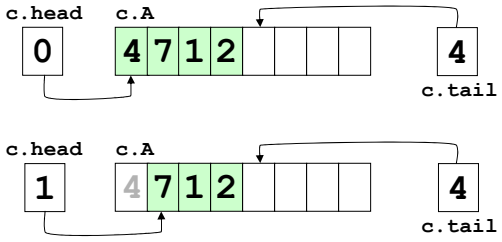


- Un nuovo elemento viene aggiunto da `ENQUEUE` nella posizione `c.tail` (che viene incrementato)

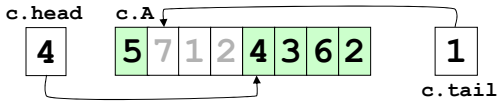


Realizzazione di una coda tramite array

- L'elemento ritornato da `DEQUEUE` è quello in posizione `c.head` (che viene incrementato)

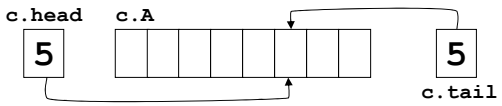


- L'array è gestito come una lista circolare

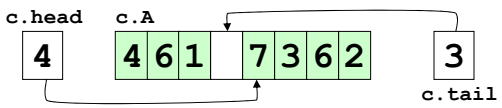


Realizzazione di una coda tramite array

- La coda è vuota quando `c.head` e `c.tail` puntano alla stessa casella



- La coda non può avere più di n-1 elementi
  - se avesse n elementi, che valore potremmo dare a `c.tail` senza creare equivoco con la coda vuota?



Operazioni ENQUEUE e DEQUEUE

```
ENQUEUE(c,x)
1.  if c.head==c.tail+1 or (c.tail==c.A.length-1 and c.head==0)
2.      error("overflow")
3.  else   c.A[c.tail] = x
4.         if c.tail == c.A.length-1
5.             c.tail = 0
6.         else    c.tail = c.tail + 1
```

```
DEQUEUE(c)
1.   if c.head == c.tail
2.      error("underflow")
3.  else   x = c.A[c.head]
4.         if c.head == c.A.length-1
5.             c.head = 0
6.         else    c.head = c.head + 1
7.         return x
```

Altre operazioni sulle code

```
IS_EMPTY(c)
1.  return c.head == c.tail
```

```
EMPTY(c)
1.  c.head = c.tail = 0
```

```
FRONT(c)
1.  if c.head == c.tail
2.      error("empty queue")
3.  else
4.      return c.A[c.head]
```

- Il tempo di esecuzione di ogni operazione è $\Theta(1)$

Esercizi sulle code

1. Scrivi lo pseudocodice della procedura `NEW_QUEUE()` che restituisce il riferimento ad una coda vuota
2. Scrivi lo pseudocodice della procedura `SIZE(c)` che restituisce il numero di elementi in una coda
3. Scrivi lo pseudocodice della procedura `ENQUEUE(q,x)` che abbia complessità ammortizzata $\Theta(1)$

Esercizi su pile e code

4. Supponi di disporre di una realizzazione di una pila con le seguenti caratteristiche
   - funzioni `NEW_STACK`, `IS_EMPTY` e `POP` di complessità $\Theta(1)$
   - funzione `PUSH` di complesità nel caso peggiore $\Theta(n)$ e complessità ammortizzata $\Theta(1)$

   Descrivi come sia possibile implementare un coda utilizzando esclusivamente pile
   - ti occorreranno due pile `p1` e `p2` da usare simultaneamente
   - l'operazione `NEW_QUEUE` creerà le due pile `p1` e `p2`
   - le operazioni `ENQUEUE` e `DEQUEUE` si tradurranno in opportune operazioni di `PUSH` e `POP` sulle due pile `p1` e `p2`

   Discuti la complessità delle operazioni `ENQUEUE` e `DEQUEUE`

Esercizi su pile e code

5. Supponi di disporre di una realizzazione di una coda con le seguenti caratteristiche
   - funzioni `NEW_QUEUE`, `IS_EMPTY` e `DEQUEUE` di complessità $\Theta(1)$
   - funzione `ENQUEUE` di complesità nel caso peggiore $\Theta(n)$ e complessità ammortizzata $\Theta(1)$

   Descrivi come sia possibile implementare un pila utilizzando esclusivamente code
   - ti occorreranno due code `q1` e `q2` da usare simultaneamente
   - le operazioni `PUSH` e `POP` si tradurranno in opportune operazioni di `ENQUEUE` e `DEQUEUE` sulle due code `q1` e `q2`

   Discuti la complessità delle operazioni `PUSH` e `POP`

Esercizi su pile e code

6. Scrivi lo pseudocodice della procedura `CONTAINS(p,x)` che ritorna `true` se l'elemento `x` è contenuto nella pila `p` e ritorna `false` se `x` non è contenuto (lasciando la pila invariata)
7. Scrivi lo pseudocodice di una struttura dati in cui si possa inserire/rimuovere elementi sia in testa che in coda
   - deve avere contemporaneamente `PUSH`, `POP`, `DEQUEUE`, `ENQUEUE` (dove evidentemente `ENQUEUE` è uguale a `PUSH`)

