ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Ricerca Operativa I

Dario Pacciarelli

Algoritmo del Simplesso

Dipartimento di Ingegneria

Struttura del corso

Ricerca Operativa	Modelli	Teoria e Algoritmi	Teoria dei Grafi
Cos'è	Metodo delle 5 fasi	Condizioni di ottimo	Grafi e Digrafi
Modelli	Modelli di PL	Teoria della dualità	Albero ricoprente di peso minimo
Esempi	Miscelazione	Metodo Grafico	Percorso di costo minimo
	Allocazione	Metodo di Fourier-Motzkin	Massimo flusso
	Trasporto	Algoritmo del simplesso	
	Taglio ottimo		

Condizioni algebriche di ottimalità e illimitatezza

Dato B, il PL $\min\{c^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$ con SBA: $x_N = 0$, $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$

Ponendo: $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$; $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$; $\bar{b} = A_B^{-1} b$; $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$

Si può ridurre il PL in forma canonica (FC) rispetto a B:

$$\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N\colon\ \ x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N, \qquad x_B, x_N \geq 0\}$$

Condizioni algebriche di ottimalità

Dato un PL in F.C. $\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N\colon\ \ x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N,\ x_B, x_N \geq 0\}$, con $\bar{b} \geq 0$,

1. se $\bar{c}_N^T \geq 0 \implies$ la SBA $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$ è una soluzione ottima.
2. se la SBA è ottima e non degenere ($x_B = \bar{b} > 0$, $x_N = 0$) $\implies \bar{c}_N^T \geq 0$.

Condizioni algebriche di illimitatezza

Dato un PL in F.C. rispetto a B: $\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N\colon\ \ x_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b},\ x_B, x_N \geq 0\}$, con $\bar{b} \geq 0$, se $\exists j \in N\colon\ \bar{c}_j < 0,\ \bar{A}_j \leq 0$, il PL è illimitato inferiormente.

Cambio di base

Dato un PL in FS e una base ammissibile B, se non si applicano le condizioni di ottimalità o illimitatezza come si procede?

Si deve cambiare base, però in totale le basi possono essere $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Se $m \cong \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ per n sufficientemente elevato $\binom{n}{m} > 2^n$

Esercizio: prendere un foglio di giornale e piegarlo a metà 80 volte. Sapendo che un foglio è spesso circa 0,05 mm, qual è lo spessore finale?

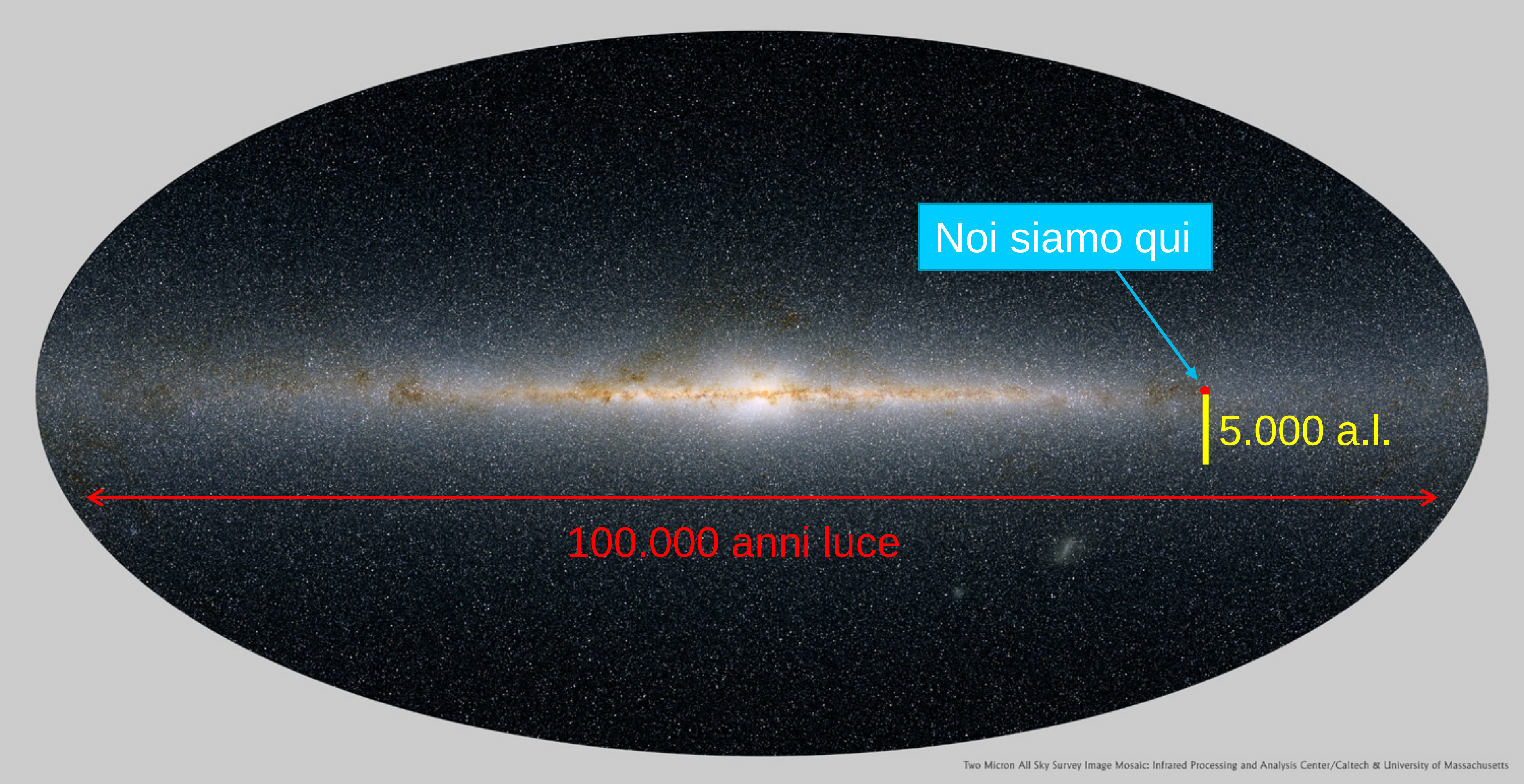
Soluzione: ad ogni piegatura lo spessore raddoppia,
quindi dopo 80 piegature lo spessore sarà $2^{80} \times 0{,}05$ mm .

Sapendo che $2^{10} \cong 1000$ si ha $10^{24} \times 0{,}05 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{19}$ metri.

1 anno luce è $300.000 \frac{km}{s} \times 3600 \frac{s}{h} \times 24 \frac{h}{g} \times 365 g \cong 10^{16}$ metri

Lo spessore finale è pari a circa 5000 anni luce

La via Lattea



Atlas Image [or Atlas Image mosaic] courtesy of 2MASS/UMass/IPAC-Caltech/NASA/NSF.

Cambio di base

Dato un PL in FS e una base ammissibile B, se non si applicano le condizioni di ottimalità o illimitatezza come si procede?

Si deve cambiare base, però in totale le basi possono essere $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

L'algoritmo del simplesso cerca una base di costo inferiore

Dato un PL in F.S. $\min\{c^T x: Ax = b, x \geq 0\}$ e base B, con $\bar{b} = A_B^{-1} b \geq 0$,
- Se $\bar{c}_N^T \geq 0$, la SBA $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$ è ottima;
- Altrimenti, se $\exists j \in N$: $\bar{c}_j < 0$, $\bar{A}_j \leq 0$, il PL è illimitato inferiormente
- Altrimenti $\exists j \in N$: $\bar{c}_j < 0$, $\exists$ riga i: $\bar{a}_{ij} > 0$. Per trovare soluzioni di costo inferiore basta aumentare x_j garantendo l'ammissibilità della soluzione.

Si dice che x_j entra in base.

Cambio di base

Se x_j entra in base, per avere una nuova base è necessario far uscire dalla base un'altra variabile (e quindi cercare una nuova soluzione in cui la variabile uscente sia nulla). Allo scopo l'algoritmo del simplesso cerca di aumentare il più possibile il valore di x_j lasciando a zero le altre variabili fuori base. Più precisamente:

Nel problema in FC: $\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N : \ x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N, \ x_B, x_N \geq 0\}$ dobbiamo studiare il segno di $\hat{x}$: $\hat{x}_j = \alpha \geq 0$, $\hat{x}_k = 0 \ \forall k \in N - \{j\}$, quindi cercare il $\max \alpha$ tale che $\hat{x}_B = \bar{b} - \bar{A}_j \alpha \geq 0$.

So che ∀ riga i: $\bar{a}_{ij} > 0$ deve essere: $\hat{x}_{B[i]} = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij}\alpha \geq 0 \Rightarrow$

∀ riga i: $\bar{a}_{ij} > 0$ deve essere: $\alpha \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \Rightarrow \quad \max \alpha = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0\right\}$

Si noti che per $\hat{x}_j = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0\right\}$ una delle variabili in base si annulla e quindi esce di base. In altre parole $\cdots$

Cambio base: calcolo della variabile uscente

Entra x_j: $\bar{c}_j < 0$. Poiché tutte le altre variabili fuori base rimangono nulle, i vincoli del problema in F.C. diventano:

Deve essere $x_B \geq 0$

$$\min \bar{c}_j x_j \qquad\qquad \min \bar{c}_j x_j \qquad\qquad \max x_j$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{1j} x_j + x_{B[1]} = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2j} x_j + x_{B[2]} = \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{mj} x_j + x_{B[m]} = \bar{b}_m \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{b}_1 - \bar{a}_{1j} x_j \geq 0 \\ \bar{b}_2 - \bar{a}_{2j} x_j \geq 0 \\ \vdots \\ \bar{b}_m - \bar{a}_{mj} x_j \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_j \geq \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \\ solo\ per\ i: \bar{a}_{ij} > 0 \end{cases}$$

$\bar{A}_j x_j$ $\qquad$ $\bar{b} \geq 0$

Sempre vero se $\bar{a}_{ij} \leq 0$

$$\Downarrow$$

$$x_j = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$$

Si osservi che se $x_j = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kj}}$ $\quad\cdots$

Cambio base: calcolo della variabile uscente

Entra x_j: $\bar{c}_j < 0$. Poiché tutte le altre variabili fuori base rimangono nulle, i vincoli del problema in F.C. diventano:

$$\min \bar{c}_j x_j$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{1j} x_j + x_{B[1]} = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2j} x_j + x_{B[2]} = \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_{mj} x_j + x_{B[m]} = \bar{b}_m \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\bar{A}_j x_j \qquad \bar{b} \geq 0$$

$$x_j = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kj}}$$

la k -esima equazione

$\bar{a}_{kj} x_j + x_{B[k]} = \bar{b}_k$ diventa

$$\bar{a}_{kj} \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kj}} + x_{B[k]} = \bar{b}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x_{B[k]}} = 0$$

Quindi ponendo $k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} \Rightarrow \boldsymbol{x_{B[k]}} = 0$ **esce $\boldsymbol{x_{B[k]}}$**

Esempio

Dato il PL in figura e $B = \{2,5,6\}$,
il PL è in FC rispetto a B
posso dire che la SB associata a B:
1. è ammissibile e non degenere
2. sicuramente non è ottima
3. non posso dire che il PL è ill. inf.
4. il costo della SBA è 0.

$$\min -4x_1 + 2x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 - 4x_3 + x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_6 = 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Cambio base

Aumentando x_1 la f.o. diminuisce. Di quando posso aumentare x_1 ? Se mantengo $x_3 = x_4 = 0$ e $x_1 = \alpha$ il problema diventa:

$$\min -4\alpha \quad \begin{cases} -\alpha + x_2 = 10 \\ \alpha + x_5 = 3 \\ 3\alpha + x_6 = 12 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \max\ \alpha \quad \begin{cases} x_2 = 10 + \alpha \geq 0 \ \ sempre \\ x_5 = 3 - \alpha \geq 0 \ \Rightarrow \alpha \leq 3 \\ x_6 = 12 - 3\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \max\ \alpha = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha = 3 \\ x_2 = 13 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

x_1 entra in base, x_5 esce di base. Nuova base $B = \{2,1,6\}$

Esempio

Dato il PL in figura e $B = \{2,5,6\}$,
il PL è in FC rispetto a B
posso dire che la SB associata a B:
1. è ammissibile e non degenere
2. sicuramente non è ottima
3. non posso dire che il PL è ill. inf.
4. il costo della SBA è 0.

$$\min -4x_1 + 2x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ \boxed{x_1 - 4x_3 + x_5 = 3} \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_6 = 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Cambio base

calcolando $k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} \Rightarrow k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \blacksquare, \frac{3}{1}, \frac{12}{3} \right\} = 2$

esce $\boldsymbol{x_{B[k]} = x_{B[2]} = x_5}$

x_1 entra in base, x_5 esce di base. Nuova base $B = \{2,1,6\}$

Interpretazione geometrica del cambio di base

Risolvere il PL in figura

$$\min -\ x_1 - 2x_2 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \min -\ x_1 - 2x_2 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

PL in FC rispetto a

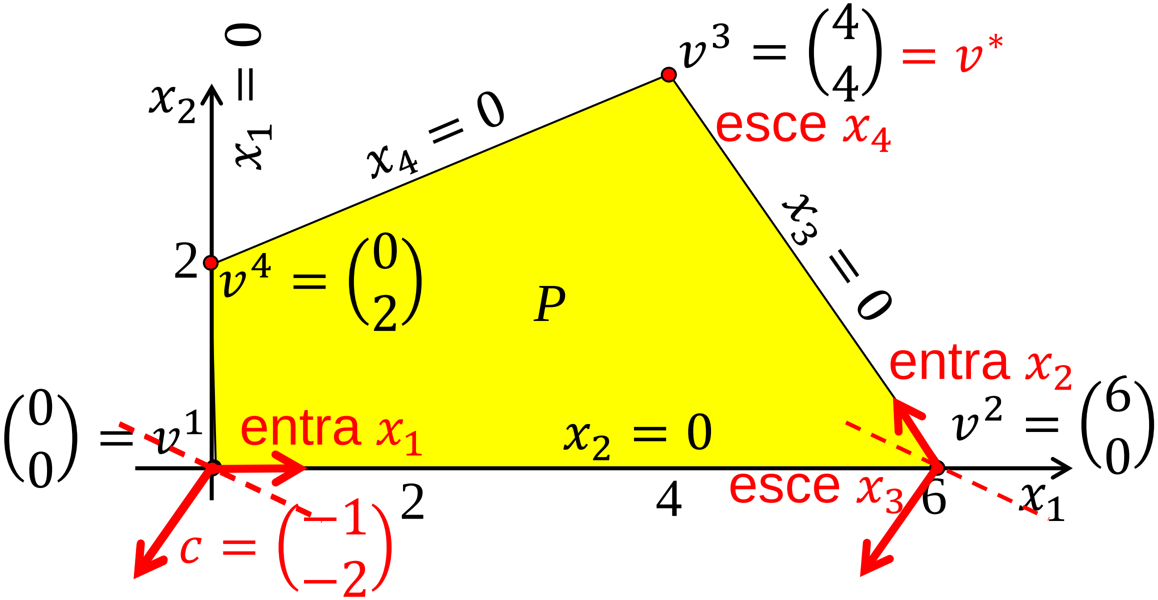
$B = \{3,4\}$ $\quad SBA = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

entra x_1

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{12}{2}, \blacksquare \right\} = 1$$

esce x_3

Nuova $B = \{1,4\}$



Esempio - segue

Risolvere il PL in figura

$$\min -\ x_1 - 2x_2 \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{2x_1 + x_2 + x_3 = 12} \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \min -\ x_1 - 2x_2$$

PL in FC rispetto a $B = \{3,4\}$ $\quad SBA = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 4 \end{Bmatrix}$

entra x_1

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{12}{2}, ■ \right\} = 1$$

$$x_1 = 6 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3$$

esce x_3

Nuova $B = \{1,4\}$

$$\min -\left(6 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3\right) - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 6 \\ -\left(6 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3\right) + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\min -6 - \frac{3}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 6 \\ \frac{5}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 + x_4 = 10 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

entra x_2

$$k = \underset{i=1,2}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{6}{1/2}, \frac{10}{5/2} \right\} = 2$$

esce x_4

Nuova $B = \{1,2\}$

Esempio

$$\min -6 - \frac{3}{2}\ x_2 + \frac{1}{2}\ x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}\ x_2 + \frac{1}{2}\ x_3 = 6 \\ \boxed{\frac{5}{2}\ x_2 + \frac{1}{2}\ x_3 + x_4 = 10} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2 = 4 - \frac{1}{5} x_3 - \frac{2}{5}\ x_4 \qquad B = \{1,2\}$$

$$\min -6 - \frac{3}{2}\ \left(4 - \frac{1}{5}\ x_3 - \frac{2}{5}\ x_4\right) + \frac{1}{2}\ x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{5}\ x_3 - \frac{2}{5}\ x_4\right) + \frac{1}{2}\ x_3 = 6 \\ x_2 + \frac{1}{5}\ x_3 + \frac{2}{5}\ x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\min -12 \boxed{+ \frac{8}{10} x_3 + \frac{3}{5}\ x_4}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{10} x_3 - \frac{1}{5}\ x_4 = 4 \\ x_2 + \frac{1}{5}\ x_3 + \frac{2}{5}\ x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{c}_N^T \geq 0$, la SBA $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$ è ottima

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmo del simplesso (forma canonica)

FASE 1: Se PL in F.S. è inammissibile STOP
Altrimenti trova una base ammissibile iniziale B;
Riduci il problema in forma canonica rispetto alla base B;

FASE 2: Se $\bar{c}_N^T \geq 0$ {*trovata soluzione ottima:* $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$, ottimo $\bar{z}$, STOP}

Altrimenti {Scegli $j \in N\colon \bar{c}_j < 0$, *entra in base* x_j;

Se $\bar{A}_j \leq 0$, *PL illimitato inferiormente*, STOP;

Altrimenti {Scegli $k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$, *esce* $x_{B[k]}$;

Nuova base $B = \{B[1], \dots, B[k-1], j, B[k+1], \dots, B[m]\}$;
Riduci il problema in forma canonica rispetto alla base B, cioè ricava x_j dal vincolo k e sostituisci negli altri vincoli e nella funzione obiettivo;
Ripeti FASE 2 }

Algoritmo del simplesso (forma matriciale)

FASE 1: Se PL in F.S. è inammissibile STOP
Altrimenti trova una base ammissibile iniziale B;
Calcola $y^T = c_B^T A_B^{-1}$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$;

FASE 2: Se $\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T A_N \geq 0$ {trovata soluzione ottima $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$, ottimo $\bar{z}$, STOP}

Altrimenti {Scegli $j \in N\colon \bar{c}_j < 0$, entra x_j;

Se $\bar{A}_j = A_B^{-1} A_j \leq 0$, PL illimitato inferiormente, STOP;

Altrimenti {Scegli $k = \operatorname*{argmin}_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$, esce $x_{B[k]}$;

Nuova base $B = \{B[1], \dots, B[k-1], j, B[k+1], \dots, B[m]\}$;
Calcola $y^T = c_B^T A_B^{-1}$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$;
Ripeti FASE 2 }

Algoritmo del simplesso (Fase 2)

FASE 1: Se PL in F.S. è inammissibile STOP
Altrimenti trova una base ammissibile iniziale B;
Calcola $y^T = c_B^T A_B^{-1}$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$;

FASE 2: While $\exists\ j \in N: \bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0$ AND $\exists\ i: \bar{a}_{ij} > 0$ do

$\{k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$ entra x_j, esce $x_{B[k]}$;

$B = \{B[1], \dots, B[k-1], j, B[k+1], \dots, B[m]\}$;

$y^T = c_B^T A_B^{-1}$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b\}$

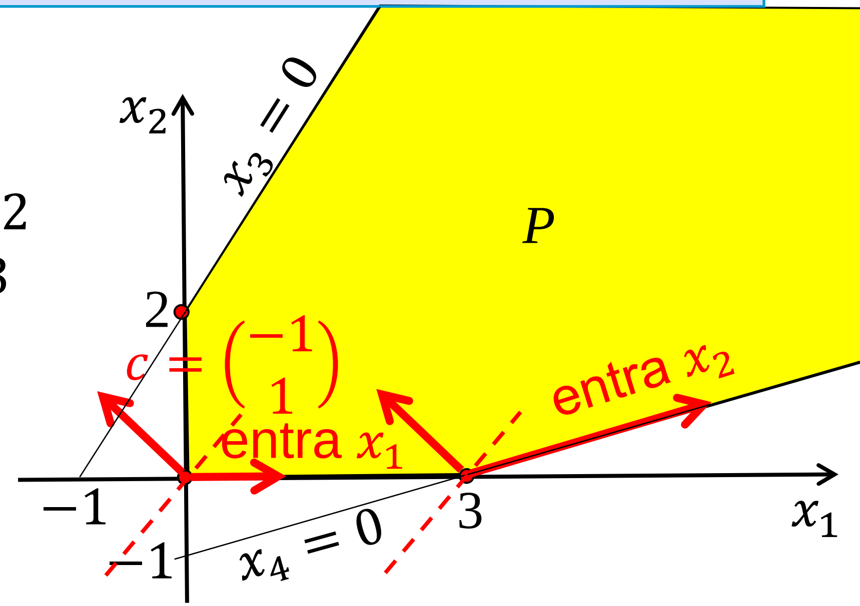
if $\bar{c}_N^T \geq 0$ then {trovata soluzione ottima $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$, ottimo $\bar{z}$ }
else {PL illimitato inferiormente}

Esempio 2

Risolvere il PL in figura

$$\min -x_1 + x_2 \qquad\qquad \min - x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ x \ge 0 \end{cases}$$



PL non è in FC rispetto a $B = \{3,1\}$

$$(A_B \;\; A_N \;\; b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$B = \{3,1\}$ $N = \{2,4\}$

Pivot su a_{22}

$$\Downarrow$$

$$(I \;\; \bar{A}_N \;\; \bar{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \{3,4\} \quad B = \{3,1\} \quad B = \{2,4\}$$

$$\min - x_1 + x_2 = -3 - 2x_2 + x_4$$

$$\begin{cases} x_3 - 5x_2 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$\bar{c}_2 = -2 < 0$, entra x_2

$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \le 0$, PL illimitato inferiormente

Esempio (Fase 2)

$$\min - x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1: $B = \{3,4\}$; $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$y^T = c_B^T A_B^{-1} = [-2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \quad 2]$;

$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0$;

$\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b = [-2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = -4.$

FASE 2: $\exists\, j \in N = \{1,2\}$:

$\bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0?$

$\bar{c}_1 = -1 - [-2 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -5$ entra x_1

$\bar{A}_j = A_B^{-1} A_j \Rightarrow \bar{A}_1 = A_B^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\exists\, i: \bar{a}_{ij} > 0$

$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \blacksquare, \frac{3}{1} \right\} = 2$ esce $x_{B[2]} = x_4$

Nuova $B = \{3,1\}$; ricalcola $y^T = c_B^T A_B^{-1}$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$

Esempio (Fase 2)

$$\min - x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Nuova $B = \{3,1\}$; $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$y^T = c_B^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}$;

$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0$;

$\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = -19.$

iterazione 2: $\exists\, j \in N = \{2,4\}: \bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0$?

$\bar{c}_2 = 1 - \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = -12$ entra x_2

$\bar{A}_j = A_B^{-1} A_j \Rightarrow \bar{A}_2 = A_B^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\bar{A}_j \leq 0$

PL illimitato inferiormente

Questione teorica

Data base B entra x_j, esce $x_{B[k]}$ si ottiene la matrice $\hat{B}$
Siamo sicuri che $\hat{B}$ è una base (cioè che $\det A_{\hat{B}} \neq 0$)?

Per rispondere, calcoliamo $\det\left(A_B^{-1} A_{\hat{B}}\right)$

La colonna $h \neq k$ di $A_B^{-1} A_{\hat{B}}$ è la colonna h di $A_B^{-1} A_B$

e quindi è la colonna h della matrice identità

La colonna k di $A_B^{-1} A_{\hat{B}}$ è $A_B^{-1} A_j = \bar{A}_j$. Quindi:

$$A_B^{-1} A_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \bar{a}_{1j} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \bar{a}_{2j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{kj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{mj} & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_B^{-1} A_{\hat{B}}) = \bar{a}_{kj} > 0$$

Si, $\hat{B}$ è una base

Questione pratica: aggiornamento dell'inversa

Data base B entra x_j, esce $x_{B[k]}$ si ottiene la matrice $\hat{B}$
Posso usare A_B^{-1} per velocizzare il calcolo di $A_{\hat{B}}^{-1}$?

Per rispondere, chiamiamo $Q = A_B^{-1} A_{\hat{B}}$ $\qquad \bar{b} = A_B^{-1} b$

$$Q^{-1} = A_{\hat{B}}^{-1} A_B \Rightarrow A_{\hat{B}}^{-1} = Q^{-1} A_B^{-1} \qquad \hat{\bar{b}} = A_{\hat{B}}^{-1} b = Q^{-1} A_B^{-1} b = Q^{-1}\, \bar{b}$$

Per calcolare Q^{-1} è sufficiente una sola operazione di pivot su $\bar{a}_{kj}$

$$Q = A_B^{-1} A_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \bar{a}_{1j} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \bar{a}_{2j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{kj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{mj} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Q \quad I] \Rightarrow [I \quad Q^{-1}]$$

$$[Q \quad A_B^{-1}] \Rightarrow [I \quad A_{\hat{B}}^{-1}]$$

$$[\bar{A}_j \quad A_B^{-1}] \Rightarrow [I_k \quad A_{\hat{B}}^{-1}]$$

$$[\bar{A}_j \quad A_B^{-1} \;\; \bar{b}] \Rightarrow [I_k \quad A_{\hat{B}}^{-1} \;\; \hat{\bar{b}}]$$

Matrice CARRY

Data base B entra x_j, esce $x_{B[k]}$ si ottiene la matrice $\hat{B}$. Posso velocizzare l'aggiornamento di $A_{\hat{B}}^{-1}$, $\hat{\bar{b}} = A_{\hat{B}}^{-1} b$, $\hat{y}^T = c_{\hat{B}}^T A_{\hat{B}}^{-1}$, $\hat{z} = c_{\hat{B}}^T A_{\hat{B}}^{-1} b$

$$CARRY = \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} \in \Re^{(m+1)\times(m+1)}$$

L'aggiornamento della $CARRY$ richiede di accostare la colonna di lavoro

$$\begin{matrix} \bar{c}_j \\ \bar{A}_j \end{matrix} \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix}$$

ed eseguire operazione di pivot su $\bar{a}_{kj}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 0 \\ I_k \end{matrix} \begin{bmatrix} -\hat{z} & -\hat{y}^T \\ \hat{\bar{b}} & A_{\hat{B}}^{-1} \end{bmatrix}$$

Algoritmo del simplesso rivisto (Fase 2)

FASE 1: Se PL in F.S. è inammissibile STOP

Altrimenti trova una base ammissibile iniziale B;

Calcola $CARRY$ associata $\begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix}$; $\quad -y^T = -c_B^T A_B^{-1}$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $-\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$

FASE 2: While $\exists\, j \in N: \bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0$ AND $\exists\, i: \bar{a}_{ij} > 0$ do

$\{k = \operatorname*{argmin}_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$ entra x_j, esce $x_{B[k]}$;

$B = \{B[1], \dots, B[k-1], j, B[k+1], \dots, B[m]\}$;

Aggiorna $CARRY$ con pivot su $\bar{a}_{kj}$ di $\begin{array}{c} \bar{c}_j \\ \bar{A}_j \end{array} \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix}$}

if $\bar{c}_N^T \geq 0$ then {trovata soluzione ottima $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$, ottimo $\bar{z}$}

else {PL illimitato inferiormente}

Esempio 1 - simplesso rivisto (Fase 2)

Risolvere il PL in figura

$$\min -x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1: $B = \{3,4\}$; $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$-y^T = -c_B^T A_B^{-1} = -[0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$;

$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0$;

$-\bar{z} = -c_B^T A_B^{-1} b = -[0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = 0.$

$B = \{3,4\}$; $CARRY$ $\begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

CARRY $\begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

FASE 2: $\exists\, j \in N = \{1,2\}$: $\bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0$?

$\bar{c}_1 = -1 + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$ entra x_1

$\bar{A}_j = A_B^{-1} A_j \Rightarrow \bar{A}_1 = A_B^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \exists\, i: \bar{a}_{ij} > 0$

$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{12}{2}, \blacksquare \right\} = 1$ esce $x_{B[1]} = x_3$

Aggiorna $CARRY$: $\begin{array}{c} \bar{c}_j \\ \bar{A}_j \end{array} \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 1/2 & 0 \\ 6 & 1/2 & 0 \\ 10 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Esempio 1 - simplesso rivisto (Fase 2)

Risolvere il PL in figura

$$\min -\ x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$B = \{1{,}4\};\ CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & {}^1/_2 & 0 \\ 6 & {}^1/_2 & 0 \\ 10 & {}^1/_2 & 1 \end{bmatrix}$$

FASE 2: $\exists\ j \in N = \{2{,}3\}$: $\bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0?$

$$\bar{c}_2 = -2 + [{}^1/_2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -{}^3/_2$$ entra x_2

$$\bar{A}_2 = A_B^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} {}^1/_2 & 0 \\ {}^1/_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1/_2 \\ {}^5/_2 \end{bmatrix}$$ non è ≤ 0

$$k = \operatorname*{argmin}_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = \operatorname*{argmin}_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{6}{{}^1/_2}, \frac{10}{{}^5/_2} \right\} = \mathbf{2}$$ esce $x_{B[2]} = x_4$

Aggiorna $CARRY$: $$= \begin{array}{c} -{}^3/_2 \\ {}^1/_2 \\ {}^5/_2 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & {}^1/_2 & 0 \\ 6 & {}^1/_2 & 0 \\ 10 & {}^1/_2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 12 & {}^4/_5 & {}^3/_5 \\ 4 & {}^2/_5 & -{}^1/_5 \\ 4 & {}^1/_5 & {}^2/_5 \end{bmatrix}$$

$1 \quad 1 \quad {}^3/_5 \quad -{}^1/_5 \quad {}^2/_5$

Esempio 1 - simplesso rivisto (Fase 2)

Risolvere il PL in figura

$$\min -\ x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$B = \{1,2\};\ CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & {}^4/_5 & {}^3/_5 \\ 4 & {}^2/_5 & -{}^1/_5 \\ 4 & {}^1/_5 & {}^2/_5 \end{bmatrix}$$

FASE 2: $\exists\ j \in N = \{3,4\}$: $\bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0?$

$$\bar{c}_3 = 0 + [{}^4/_5 \quad {}^3/_5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^4/_5 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = 0 + [{}^4/_5 \quad {}^3/_5] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^3/_5 \geq 0$$

STOP, trovato ottimo $\bar{z} = -12$

Soluzione ottima $\quad x_B = \bar{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix},\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Simplesso con base degenere

Se $\exists\, \bar{b}_h = 0$ SBA degenere. Se nel calcolo della variabile uscente si ha:

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = h$$

Si dice che l'iterazione è un pivot degenere.

Simplesso con base degenere

$$\min \; -4x_1 + 2x_3 + 7x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$B = \{2,5,6\};$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FASE 2: $\exists\, j \in N = \{1,3,4\}$: $\bar{c}_j = c_j - y^T A_j < 0?$

$$\bar{c}_1 = -4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -4$$

entra x_1

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \blacksquare, \frac{6}{3}, \frac{0}{1} \right\} = \mathbf{3}$$ esce $x_{B[3]} = x_6$

$$\begin{array}{c} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \{2,5,1\}$

La SBA è rimasta la stessa!

Simplesso con base degenere

Se $\exists\, \bar{b}_h = 0$ SBA degenere. Se nel calcolo della variabile uscente si ha:

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = h$$

Si dice che l'iterazione è un pivot degenere.
In tal caso, se la variabile entrante è x_j, si ha:

$$x_j = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hj}} = 0$$

Nella SBA di partenza $x_{B[h]} = \bar{b}_h = 0$ mentre $x_j = 0$ perché fuori base.
Nella nuova SBA si avrà $x_j = \bar{b}_h = 0$ così come la variabile appena uscita.
Nell'operazione di pivot la colonna $\bar{b}$ è rimasta invariata perché l'elemento di $\bar{b}$ sulla riga di pivot era 0.
Quindi la base è cambiata ma la SBA è rimasta la stessa. Dal punto di vista geometrico un pivot degenere corrisponde a restare nello stesso vertice.

Convergenza dell’algoritmo del simplesso

Problema della convergenza dell’algoritmo del simplesso:
l’algoritmo termina sempre entro un numero finito di iterazioni?

Ad ogni iterazione la funzione obiettivo diminuisce di $\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{kj}}\bar{b}_k$

$$\begin{array}{c} \bar{c}_j \\ \bar{a}_{1j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{kj} \end{array} \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b}_1 & \\ \vdots & A_B^{-1} \\ \bar{b}_k & \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \nearrow -\bar{c}_j/\bar{a}_{kj} \\ \xrightarrow[1/\bar{a}_{kj}]{} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} -\bar{z} - \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{kj}}\bar{b}_k & -y^T \\ \bar{b}_1 & \\ \vdots & A_B^{-1} \\ \bar{b}_k & \end{bmatrix}$$

Se tutte le iterazioni sono non degeneri (e quindi $\bar{b}_k > 0$) la funzione obiettivo diminuisce strettamente ad ogni passo, e quindi non è possibile visitare due volte la stessa base. Quindi l’algoritmo del simplesso visita al più tutte le basi $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ e termina in un numero finito di passi.

Convergenza dell'algoritmo del simplesso

Tuttavia nelle iterazioni degeneri $\bar{b}_k = 0$ e quindi esiste la possibilità che l'algoritmo cicli su un insieme di basi tutte degeneri ritornando sulla base iniziale dopo alcune iterazioni. In questo caso può entrare in un loop infinito senza terminare. Questa condizione può in effetti verificarsi senza opportuni accorgimenti, esistono però metodi anticiclo che evitano questo rischio.

Metodo della perturbazione:

- Se $\bar{b}_k = 0$ si perturba arbitrariamente la CARRY ponendo $\bar{b}_k = \varepsilon > 0$.
- A questo punto la base è non degenere e quindi non c'è rischio di ciclare. Dopo qualche iterazione si ricalcola il valore corretto del vettore $\bar{b} = A_B^{-1} b$.

$$\begin{array}{c} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0}\ \varepsilon & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 4\varepsilon & 0 & 0 & 4 \\ 4+\varepsilon & 1 & 0 & 1 \\ 6-\frac{\varepsilon}{3} & 0 & 1 & -3 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Convergenza dell'algoritmo del simplesso

Tuttavia nelle iterazioni degeneri $\bar{b}_k = 0$ e quindi esiste la possibilità che l'algoritmo cicli su un insieme di basi tutte degeneri ritornando sulla base iniziale dopo alcune iterazioni. In questo caso può entrare in un loop infinito senza terminare. Questa condizione può in effetti verificarsi senza opportuni accorgimenti, esistono però regole anticiclo che evitano questo rischio.

Regola di Bland (1977) o del minimo indice:

- entra in base la variabile di indice $\min\{j \in N : \bar{c}_j < 0\}$, ovvero la variabile di costo ridotto negativo e indice minimo
- esce la variabile di indice $\min\left\{B(k) : k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0\right\}\right\}$, ovvero tra le candidate con rapporto $\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0\right\}$ minimo esce quella di indice $B(k)$ minimo.

Convergenza dell'algoritmo del simplesso

Regola di Bland (1977) o del minimo indice

- Esempio di scelta della variabile entrante:
  se $\bar{c}_N^T = [3 \quad -1 \quad 0 \quad -7 \quad -3 \quad 2]$ e $N = \{1 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 9\}$ esce x_3
  infatti le variabili candidate a entrare in base sono solo quelle di costo ridotto negativo (in rosso).

- Esempio di scelta della variabile uscente:
  se $k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{3}{6}, \frac{5}{8}, \blacksquare, \frac{1}{2}, \blacksquare, \frac{4}{5} \right\}$ e $B = \{7 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \quad 4\}$ esce x_5
  infatti le variabili candidate a uscire dalla base sono solo quelle con rapporto $\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$ minimo (in rosso).

Si noti che con la regola di Bland l'algoritmo del simplesso non ha più alcuna scelta arbitraria (se non l'ordinamento iniziale delle variabili).

Fase 1 dell'algoritmo del simplesso

FASE 1: Se PL in F.S. è inammissibile STOP, altrimenti

trova una base ammissibile iniziale B e calcola $CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix}$;

Dato un problema di PL in F.S.: $P.I. = \min\{c^T x : Ax = b \geq 0, x \geq 0\}$

Si definisce il problema artificiale $P.A. = \min\{\sum_{i=1,\dots,m} \varphi_i : Ax + I\varphi = b;\ \ x, \varphi \geq 0\}$
con φ vettore delle variabili artificiali

Proprietà del problema artificiale:

- non è inammissibile, ammette la SBA $\varphi = b \geq 0, \quad x = 0$
- non è illimitato inferiormente, $\sum_{i=1,\dots,m} \varphi_i \geq 0$
- la soluzione $\tilde{x}$ è ammissibile per $P.I. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile per $P.A.$
- Se $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile per $P.A. \Rightarrow \tilde{x}$ è ottima per $P.A.$
- $CARRY$ iniziale è $\begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum b_i & -1^T \\ b & I \end{bmatrix}$ (solo se aggiungo m var. φ_i)

Problema artificiale - esempio

$$\min - x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\qquad \min - x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = -3 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$-y^T = -c_B^T A_B^{-1}$$
$$-\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$$

$$P.A. = \min \ \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + \varphi_1 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 + \varphi_2 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$B = \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P.A. = \min \ \varphi_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 + \varphi_2 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$B = \{x_3, \varphi_2\}$$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fase 1 dell'algoritmo del simplesso

Dato un problema di PL in F.S.: $P.I. = \min\{c^T x : Ax = b \geq 0, x \geq 0\}$

Costruisci il problema artificiale $P.A. = \min\{\sum_{i=1,\dots,m} \varphi_i : Ax + I\varphi = b;\ \ x, \varphi \geq 0\}$

$CARRY$ iniziale è $\begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum b_i & -1^T \\ b & I \end{bmatrix}$

Risolvi all'ottimo il $P.A.$ con la Fase 2. Sia $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$ una soluzione ottima di $P.A.$

1. Se $\tilde{\varphi} = 0$, $\tilde{x}$ è ammissibile per $P.I.$
2. Se $\sum_{i=1,\dots,m} \tilde{\varphi}_i > 0 \Rightarrow \nexists$ soluzione di costo 0 per $P.A. \Rightarrow P.I.$ inammissibile

Per iniziare la Fase 2 (nel caso 1) è necessario effettuare il passaggio dalla Fase 1 alla Fase 2.

Passaggio dalla Fase 1 alla Fase 2

Hp: soluzione ottima di $P.A.$ è $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{\varphi}\end{pmatrix}$ con $\tilde{\varphi} = 0$.

Purtroppo nel caso 1 avere una sol. amm. per $P.I.$ non implica sempre avere una base ammissibile per $P.I.$ Sono possibili tre casi:

1.a. se tutte le φ_i sono fuori base $\Rightarrow$ la base finale di $P.A.$ è iniziale per $P.I.$
1.b. qualche $\varphi_k = 0$ in base (base ottima di $P.A.$ è degenere), deve uscire con un pivot degenere: φ_k esce, può entrare al suo posto qualsiasi variabile x_j fuori base purché $\bar{a}_{kj} \neq 0$. Ci riportiamo così al caso 1.a.
1.c. qualche $\varphi_k = 0$ in base ma, per ogni x_j fuori base si ha $\bar{a}_{kj} = 0$. Ma allora $\bar{a}_k^T = 0^T$. Poiché anche $\bar{b}_k = 0$, La riga k del $P.I.$ è ridondante, si può eliminare rimuovendo φ_k dalla base e cancellando riga e colonna k dalla $CARRY$. Ci riportiamo così al caso 1.a.

In tutti e tre i casi, per costruire la $CARRY$ iniziale per la Fase 2 è necessario ricalcolare la riga 0 con la funzione obiettivo iniziale:

$$-y^T = -c_B^T A_B^{-1} \;;\; -\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$$

Fase 1+2 con il Metodo del Big-M

Dato un problema di PL in F.S.: $\mathrm{P.I.} = \min\{c^T x: Ax = b \geq 0, x \geq 0\}$

Si definisce il problema $\mathrm{P.A.} = \min\left\{c^T x + \sum_{i=1,\dots,m} M\varphi_i : Ax + I\varphi = b;\ \ x, \varphi \geq 0\right\}$
con φ vettore delle variabili artificiali e M un numero «molto grande»,
tale da garantire che se esiste una soluzione ottima di P.I., la soluzione ottima di P.A. ha sicuramente $\varphi^* = 0$, da cui segue che x^* è ottima per P.I.

Proprietà del problema artificiale:

- non è inammissibile, ammette la SBA $\varphi = b \geq 0,\ \ x = 0$
- la soluzione $\tilde{x}$ è ammissibile per $P.I. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile per $P.A.$
- Se $\varphi^* > 0$ è ottima per $P.A. \Rightarrow$ P.I. è inammissibile
- Se $\begin{pmatrix} x^* \\ \varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$ è ottima per $P.A. \Rightarrow x^*$ è ottima per P.I.
- $CARRY$ iniziale è $\begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum M b_i & -M^T \\ b & I \end{bmatrix}$ (solo se aggiungo m var. φ_i)

Esercizio 1

$$P.I. = \min -\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad P.A. = \min \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ 1x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + \varphi_1 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + \varphi_2 = 2 \\ x, \varphi \geq 0 \end{cases} \qquad B = \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

FASE 2 del $P.A.$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = 0 + \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \quad \text{entra } x_1$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{4}{1}, \frac{2}{1} \right\} = \mathbf{2} \quad \text{esce } x_{B[2]} = \varphi_2$$

$$\text{Aggiorno } CARRY \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \{\varphi_1, x_1\}$$

$$\bar{c}_2 = 0 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \geq 0 \qquad \bar{c}_3 = 0 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$$

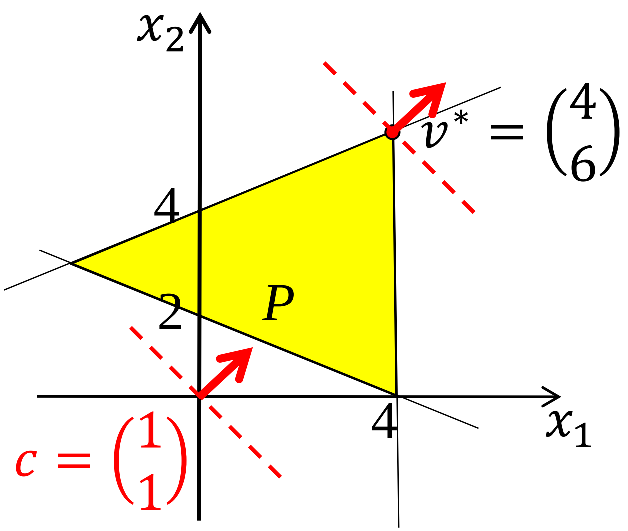
STOP, trovato ottimo $\sum_{i=1,\dots,m} \tilde{\varphi}_i > 0 = 2 > 0$, è il caso 2: $P.I.$ inammissibile

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo grafico;
2. Ridurre il problema in forma standard;
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1, se necessaria, e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è inammissibile o illimitato inferiormente.

$$\max\ x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1\, libera \\ x_2 \ \geq 0 \end{cases}$$



$$\min\ -x_1^+ + x_1^- - x_2$$
$$\begin{cases} x_1^+ - x_1^- - 2x_2 - x_3 = -8 \\ x_1^+ - x_1^- + x_4 = 4 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 - x_5 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$SBA^* = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$B^* = \{x_1^+, x_2, x_5\}$$

Esercizio 2 – segue

$P.I. = \min\ -x_1^+ + x_1^- - x_2$

$$\begin{cases} -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1^+ - x_1^- + x_4 = 4 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 - x_5 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$P.A. = \min\ \varphi_3$

$$\begin{cases} -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1^+ - x_1^- + x_4 = 4 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 - x_5 + \varphi_3 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$B^* = \{x_1^+, x_2, x_5\}$

FASE 1 $B = \{x_3, x_4, \varphi_3\}$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \{x_3, x_1^+, \varphi_3\}$

$\bar{z} = 0$ FINE FASE 1

$$\bar{c}_{1^+} = 0 + [0 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \text{ entra } x_1^+$$

$$\bar{A}_{1^+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \blacksquare, \frac{4}{1}, \frac{4}{1} \right\} = \mathbf{2} \quad \text{esce } x_{B[2]} = x_4$$

Esercizio 2 – segue

$$P.I. = \min \; -x_1^+ + x_1^- - x_2 \qquad B^* = \{x_1^+, x_2, x_5\}$$

$$\begin{cases} -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1^+ - x_1^- + x_4 = 4 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 - x_5 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Passaggio FASE 1 → FASE 2 $\quad B = \{x_3, x_1^+, \varphi_3\}$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 12 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} \; -1 \\ \xrightarrow{1/2} \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 12 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad 2 \neq 0 \;\; entra\ x_2 \;\; esce\ \varphi_3$$

$$B = \{x_3, x_1^+, x_2\}$$

$$-z = -y^T b = 4$$

$$-y^T = -c_B^T A_B^{-1} = -[0 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1/2 \quad 1/2]$$

Esercizio 2 – segue

$$P.I. = \min \ -x_1^+ + x_1^- - x_2 \qquad\qquad B^* = \{x_1^+, x_2, x_5\}$$

$$\begin{cases} -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1^+ - x_1^- + x_4 = 4 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 - x_5 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FASE 2 $\quad B = \{x_3, x_1^+, x_2\}$ $\qquad\qquad$ $B = \{x_5, x_1^+, x_2\}$

$$CARRY = \begin{array}{c} -{}^1/_2 \\ 1 \\ 0 \\ -{}^1/_2 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 0 & {}^1/_2 & {}^1/_2 \\ 12 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^1/_2 & {}^1/_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 10 & {}^1/_2 & {}^3/_2 & 0 \\ 12 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & {}^1/_2 & {}^1/_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_5 = 0 + \begin{bmatrix} 0 & {}^1/_2 & {}^1/_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -{}^1/_2 \quad \text{entra } x_5$$

esce $x_{B[1]} = x_3$

$$\bar{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^1/_2 & {}^1/_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -{}^1/_2 \end{bmatrix} \qquad k = \underset{i=1,\ldots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{12}{1}, \blacksquare, \blacksquare \right\} = \mathbf{1}$$

Esercizio 2 – segue

$$P.I. = \min\ -x_1^+ + x_1^- - x_2$$

$$\begin{cases} -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1^+ - x_1^- + x_4 = 4 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2 - x_5 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$B^* = \{x_1^+, x_2, x_5\}$$

FASE 2 $\quad B = \{x_5, x_1^+, x_2\}$

$$CARRY = \begin{bmatrix} 10 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 12 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SBA^* = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_{1^-} = 1 + \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$$

$$\bar{c}_3 = 0 + \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1/2 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = 0 + \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3/2 \geq 0$$

Trovata soluzione ottima!

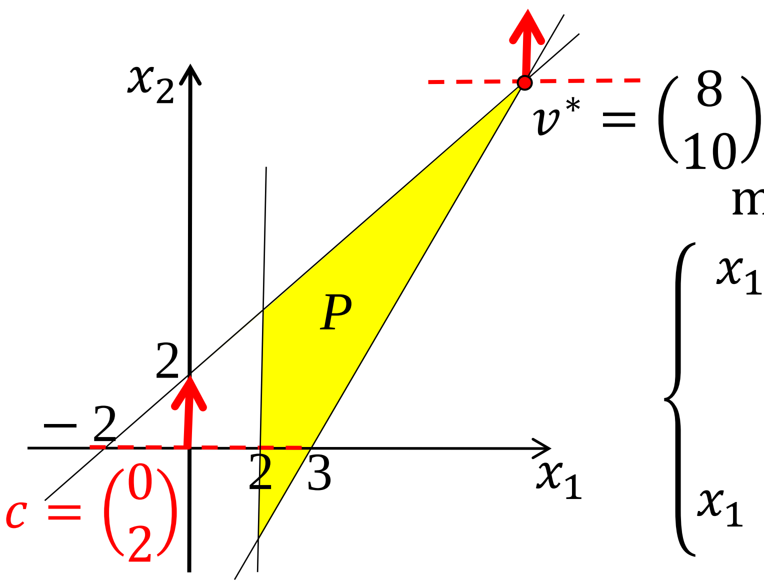
Esercizio 3

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo grafico;
2. Risolvere il problema con il metodo di Fourier-Motzkin;
3. Ridurre il problema in forma standard;
4. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1, se necessaria, e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è inammissibile o illimitato inferiormente.

$$\max\ 2x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2\ libera \end{cases}$$

$$B^* = \{x_1, x_2^+, x_4\}$$



Proiezione propria di x_1

$$\max\ 2x_2 \quad \begin{cases} x_1 \geq x_2 - 2 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 \leq 3 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \Rightarrow \max\ 2x_2 \quad \begin{cases} 3 + \frac{1}{2}x_2 \geq x_2 - 2 \\ 3 + \frac{1}{2}x_2 \geq 2 \\ 3 + \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \max\ 2x_2 \quad \begin{cases} x_2 \leq 10 \\ x_2 \geq -2 \\ x_2 \geq -6 \end{cases}$$

$$x_2^* = 10$$

$$x_1^* = 8$$

$B^* = \{x_1, x_2^+, x_4\}$

Esercizio 3

$$\max\ 2x_2 \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2\ libera \end{cases} \Rightarrow \quad P.I. = \min\ -2x_2^+ + 2x_2^- \quad \begin{cases} -x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 = 2 \\ x_1 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_5 = 6 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad P.A. = \min\ \varphi_2 \quad \begin{cases} -x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 = 2 \\ x_1 - x_4 + \varphi_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_5 = 6 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$B = \{x_3, \varphi_2, x_5\}$

FASE 1

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -2,\ 1} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = 0 + [0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \quad \text{entra } x_1$$

$B = \{x_3, x_1, x_5\}$

$\bar{z} = 0$ FINE FASE 1

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \blacksquare, \frac{2}{1}, \frac{6}{2} \right\} = \mathbf{2} \quad \text{esce } x_{B[2]} = \varphi_2$$

$B^* = \{x_1, x_2^+, x_4\}$

Esercizio 3

$$P.I. = \min \; -2x_2^+ + 2x_2^-$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 = 2 \\ x_1 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_5 = 6 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$B = \{x_3, x_1, x_5\}$ Passaggio Fase 1 → Fase 2

$$-y^T = -[0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$-z = -y^T b = 0$$

FASE 2 $\quad B = \{x_3, x_1, x_5\}$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \{x_2^+, x_1, x_5\}$

$$\bar{c}_{2^+} = -2 + [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 \geq 0 \quad \text{entra } x_2^+$$

$$k = \operatorname*{argmin}_{i=1,\dots,m}\left\{\frac{4}{1}, \blacksquare, \blacksquare\right\} = 1$$

esce $x_{B[1]} = x_3$

$$\bar{A}_{2^+} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

$B^* = \{x_1, x_2^+, x_4\}$

$$P.I. = \min \; -2x_2^+ + 2x_2^-$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 = 2 \\ x_1 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_5 = 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{c}_4 = 0 + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \geq 0 \text{ entra } x_4$$

$$\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \blacksquare, \blacksquare, \frac{6}{1} \right\} = \mathbf{3} \text{ esce } x_{B[3]} = x_5$$

FASE 2 $\quad B = \{x_2^+, x_1, x_5\}$ $\qquad\qquad B = \{x_2^+, x_1, x_4\}$

$$CARRY \begin{bmatrix} -\bar{z} & -y^T \\ \bar{b} & A_B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 20 & 4 & 4 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_{2^-} = 2 + \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \geq 0 \qquad \bar{c}_5 = 0 + \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \geq 0$$

$$\bar{c}_3 = 0 + \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \geq 0$$

Trovata soluzione ottima!

Esercizio 4

È dato il problema di PL in figura.
Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1, se necessaria, e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è inammissibile o illimitato inferiormente.

$$\min\ x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1

$$P.A. = \min\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + \varphi_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + \varphi_2 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 + \varphi_3 = 0 \\ x, \varphi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ $\qquad$ $B = \{x_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$\bar{z} = 0$ FINE FASE 1

$$\bar{c}_1 = 0 + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \text{ entra } x_1$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \blacksquare \right\} = \mathbf{1} \text{ esce } x_{B[1]} = \varphi_1$$

Esercizio 4

$$\min \; x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Passaggio Fase 1 → Fase 2

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{array} \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{x_1, \varphi_2, \varphi_3\} \qquad\qquad B = \{x_1, x_2, \varphi_3\}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

x_2 può sostituire φ_2 o φ_3

entra x_2 esce $\varphi_2 \Rightarrow k = 2$

Esercizio 4

$$\min \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ \cancel{-x_2 + 2x_3 + x_4 = 0} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Passaggio Fase 1 → Fase 2

$$-y^T = -[1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = [-5 \quad 2]$$

$$-z = -y^T b = [-5 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2$$

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{array}\begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \cancel{0} \end{array}\begin{bmatrix} & & & \\ 2 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 2 & -1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cancel{-2} & \cancel{-5} & \cancel{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$B = \{x_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ $\qquad$ $B = \{x_1, x_2, \varphi_3\}$ $\qquad$ $B = \{x_1, x_2\}$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_3 NON può sostituire φ_3

$$\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_4 NON può sostituire φ_3

Il terzo vincolo è combinazione lineare dei primi due!

Esercizio 4

$$\min\ x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FASE 2

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{x_1, x_2\}$$

$$\bar{c}_3 = 0 + [-5 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = 0 + [-5 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \geq 0$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trovata soluzione ottima!

Esercizio 5

È dato il problema di PL in figura.
Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1, se necessaria, e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è inammissibile o illimitato inferiormente.

$$\min \; x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1

$$P.A. = \min \; \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + \varphi_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + \varphi_2 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \varphi_3 = 0 \\ x, \varphi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \qquad B = \{x_1, \varphi_2, \varphi_3\}$$

$$\bar{c}_1 = 0 + [-1 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \text{ entra } x_1$$

$\bar{z} = 0$ FINE FASE 1

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \blacksquare \right\} = 1 \text{ esce } x_{B[1]} = \varphi_1$$

Esercizio 5

$$\min\ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Passaggio Fase 1 → Fase 2

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{array} \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{x_1, \varphi_2, \varphi_3\} \qquad B = \{x_1, x_2, \varphi_3\}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

x_2 può sostituire φ_2 o φ_3

entra x_2 esce $\varphi_2 \Rightarrow k = 2$

Esercizio 5

$$\min\ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{array}\left[\begin{array}{cccc} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$B = \{x_1, \varphi_2, \varphi_3\} \qquad B = \{x_1, x_2, \varphi_3\}$$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_3 NON può sostituire φ_3

$$\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_4 può sostituire φ_3

entra x_4 esce $\varphi_3 \Rightarrow k = 3$

Esercizio 5

$$\min\ x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \{x_1, x_2, \varphi_3\}$ $\quad$ $B = \{x_1, x_2, x_4\}$

$$\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_4 può sostituire φ_3

entra x_4 esce $\varphi_3 \Rightarrow k = 3$

Esercizio 5

$$\min \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -9 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{x_1, x_2, x_4\}$$

Ricalcolo riga 0

$$-y^T = -[1 \quad 2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [-9 \quad 4 \quad -2]$$

$$-z = -y^T b = [-9 \quad 4 \quad -2]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -2$$

Esercizio 5

$$\min \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FASE 2

$$\begin{bmatrix} -2 & -9 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{x_1, x_2, x_4\}$$

$$\bar{c}_3 = 0 + [\,-9 \quad 4 \quad -2] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = 0 + [\,-9 \quad 4 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trovata soluzione ottima!