A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Incontrate una ragazza con il suo cane Fido e vi chiedete che età possa avere. Lei sembra leggervi nel pensiero e vi dice: “Non si chiede l’età ad una donna, però cinque anni fa non avevo meno di cinque volte l’età che aveva allora Fido, ed ora non ho più di tre volte l’età di Fido”.
Qual è l’età che può avere al massimo la ragazza?

1. Formulare il problema come problema di PL con 2 variabili.
2. Trovare la soluzione ottima con il metodo grafico.
3. Dimostrare l’ottimalità della soluzione con le condizioni di ortogonalità.

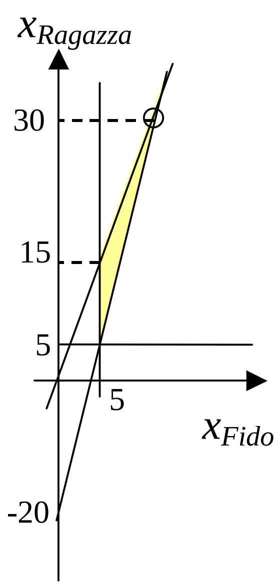
Soluzione

1.

$$\max \quad x_{Ragazza}$$

$$\begin{cases} x_{Ragazza} - 5 \geq 5(x_{Fido} - 5) \\ x_{Ragazza} \leq 3x_{Fido} \\ x_{Ragazza} \geq 5 \\ x_{Fido} \geq 5 \end{cases}$$

2.



Soluzione ottima: $x^*_{Ragazza} = 30$
$x^*_{Fido} = 10$

3.

$$\max \quad x_{Ragazza}$$
$$\begin{cases} -x_{Ragazza} + 5x_{Fido} \le 20 \\ x_{Ragazza} - 3x_{Fido} \le 0 \\ x_{Ragazza} \ge 5 \\ x_{Fido} \ge 5 \end{cases} \Rightarrow \text{Duale: } \begin{array}{l} \min \quad 20u_1 + 5u_3 + 5u_4 \\ \begin{cases} -u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ 5u_1 - 3u_2 + u_4 = 0 \\ u_1 \ge 0 \\ u_2 \ge 0 \\ u_3 \le 0 \\ u_4 \le 0 \end{cases} \end{array}$$

NB: le due variabili primali potevano anche essere considerate non negative, per semplicità sono state considerate libere.

Condizioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} u_1(x_{Ragazza} - 5x_{Fido} + 20) = 0 \\ u_2(x_{Ragazza} - 3x_{Fido}) = 0 \\ u_3(x_{Ragazza} - 5) = 0 \\ u_4(x_{Fido} - 5) = 0 \\ x_{Ragazza}(-u_1 + u_2 + u_3 - 1) = 0 \\ x_{Fido}(5u_1 - 3u_2 + u_4) = 0 \end{cases}$$

Sostituendo x^* si ha:

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \quad \textit{sempre vero} \\ u_2(0) = 0 \quad \textit{sempre vero} \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ -u_1 + u_2 + u_3 - 1 = 0 \\ 5u_1 - 3u_2 + u_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Da cui si ha: } \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ u_1 = 1{,}5 \\ u_2 = 2{,}5 \end{cases}$$

che è ammissibile duale, il che dimostra l'ottimalità di x^*.

Esercizio 2

Portando il problema in forma standard è necessario cambiare segno alla funzione obiettivo, sostituire la variabile libera con una differenza di variabili vincolate, e aggiungere 3 variabili di scarto (come in figura).

$$\min \quad 3x_1^{+} - 3x_1^{-} - x_2$$

$$\begin{cases} -x_1^{+} + x_1^{-} + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1^{+} - x_1^{-} + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1^{+} - x_1^{-} - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile artificiale x_6 sul secondo vincolo (come in figura).

$$\min \quad x_6$$

$$\begin{cases} -x_1^{+} + x_1^{-} + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1^{+} - x_1^{-} + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1^{+} - x_1^{-} - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La base iniziale è quindi $B = [A_3 A_6 A_5]$. Al primo pivot entra A_1^{+} ed esce A_6.
Fine della fase 1, inizia la fase 2.
Il vettore *u* viene aggiornato e si ha:

$$u^T=(0 \quad 3 \quad 0).$$

Al successivo pivot entra A_2 ed esce A_1^{+}, quindi entra A_1^{-} ed esce A_3. La base trovata risulta ottima, la soluzione ottima è: $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{+*} - x_1^{-*} \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo non orientato con 8 nodi 1…8. Trovare l'albero ricoprente di peso minimo, a partire dal nodo 1, utilizzando l'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero ricoprente (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo).

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(1,6)	(1,8)	(2,3)	(2,4)	(2,7)	(3,4)	(3,6)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
Costi	3	2	12	4	6	19	2	11	5	4	6	10	1	21	4	6

Soluzione

L'ordine in cui vengono fissati i flag dei nodi è 1, 3, 2, 4, 6, 8, 7 e 5. L'albero ricoprente di costo minimo è composto dai seguenti archi (1,3),(1,2),(2,4),(1,3),(4,8),(8,7),(7,5). Si osservi come al posto dell'arco (1,6) si possa selezionare l'arco (3,6) ottenendo comunque una soluzione ottima che segue esattamente lo stesso ordinamento dei flag.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

24 novembre 2005

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Volete calcolare il massimo numero di studenti della facoltà di Ingegneria che possono partecipare al programma Erasmus. La facoltà di Ingegneria si divide in 4 Dipartimenti (Informatica, Elettronica, Meccanica, Civile), ogni dipartimento ha ricevuto un numero di domande diverso, pari a 20 per Informatica, 16 per Elettronica, 15 per Meccanica e 10 per Civile. Sono disponibili varie convenzioni con diverse università straniere. In Spagna si possono mandare 30 studenti, in Germania 5 studenti, in Norvegia 5 studenti, 10 in Francia ed infine 5 studenti in Gran Bretagna. Le convenzioni attivate non permettono di mandare più di 10 studenti di un dipartimento nello stesso paese, inoltre gli studenti di Informatica non possono andare in Francia, gli studenti di Elettronica in Spagna, gli studenti di Meccanica in Norvegia, e gli studenti di Civile non possono andare in Germania. Si formuli (senza risolvere) il problema di massimizzare il numero di studenti da mandare nei programmi Erasmus come un problema di massimo flusso su una rete opportuna.

Soluzione

La rete di flusso sarà un grafo bipartito, in cui il primo insieme dei nodi sarà formato da quattro nodi che rappresentano i Dipartimenti (I,E,M,C), mentre il secondo insieme dei nodi sarà formato dalle cinque nazioni (S,G,N,F,GB). Oltre a questi nodi ci saranno nella rete di flusso anche il nodo sorgente (0) ed il nodo pozzo (*). Gli archi che compongono la rete si possono dividere in tre insiemi, il primo insieme connette il nodo sorgente con i quattro nodi dei dipartimenti, ed ogni arco in questo insieme avrà come capacità il numero di domande di quel dipartimento (capacità 20 per l'arco (*,I), 16 per (*,E) e così via). Il secondo gruppo di archi che rappresenta le convenzioni attivate, connette i nodi dei dipartimenti con i nodi delle nazioni. Gli archi in questo gruppo avranno tutti capacità pari a 10. Si noti come alcuni archi non saranno presenti, per via dell'assenza di convenzione tra alcuni dipartimenti ed alcune nazioni, come ad esempio l'arco (I,F) o (E,S). Infine l'ultimo gruppo di archi connette i nodi delle nazioni con il nodo *. Gli archi in questo gruppo saranno capacitati con il massimo numero di studenti Erasmus che una nazione può assorbire (es. 30 per l'arco (S,*))

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed i valori di domanda di ogni nodo (assumendo un valore negativo per un nodo sorgente e un valore positivo per un nodo pozzo). Si determini un flusso ammissibile utilizzando la fase 1 del simplesso su reti, o dimostrare che il problema non ammette soluzione ammissibile.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(6,1)

Nodi	1	2	3	4	5	6
Domanda	-1	-2	5	-5	1	2

Soluzione

Dopo l'inserimento del nodo artificiale 7, l'algoritmo del simplesso su reti procede come segue.
Nella prima iterazione entrerà in base l'arco (1,3), e provocherà l'uscita dell'arco (1,7), il flusso circolante nel ciclo è 1.
Nella seconda iterazione entrerà in base l'arco (4,5), e provocherà l'uscita dell'arco (7,5) il flusso circolante nel ciclo è 1.
Nella terza iterazione entrerà in base l'arco (5,6), e provocherà l'uscita dell'arco (7,6) il flusso circolante nel ciclo è 2.
Nella quarta iterazione entrerà in base l'arco (6,1), e provocherà l'uscita dell'arco (4,7) il flusso circolante nel ciclo è 2.
Nella sesta iterazione entrerà in base l'arco (2,4), e provocherà l'uscita dell'arco (2,7) il flusso circolante nel ciclo è 2.
La soluzione così trovata rappresenta un flusso ammissibile per la rete di flusso.

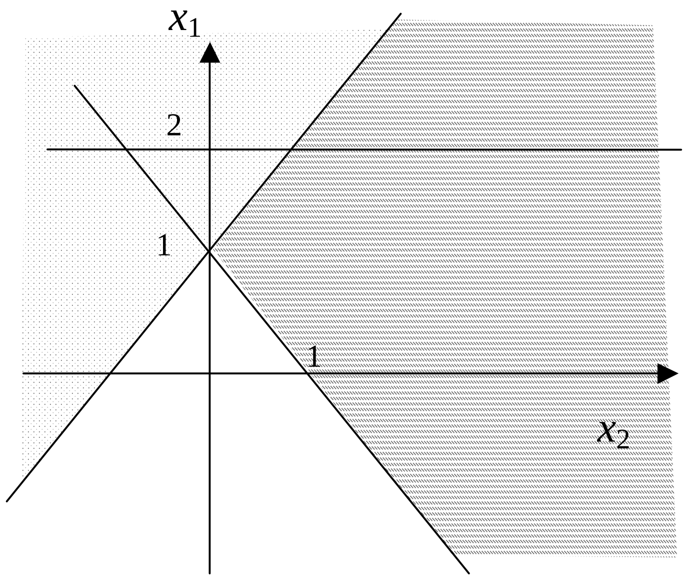
Esercizio 3

Dato il problema di PL (primale) in figura,

1. risolvere il problema con il metodo grafico ed impostare il problema duale;
2. Se il primale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del primale ricavare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità. Se il primale non ammette una soluzione ottima, risolvere il problema duale con il metodo del simplesso.

$$\min \quad x_1$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_2 \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

in figura è rappresentato l'insieme delle soluzioni che soddisfano le prime due disequazioni. Poiché nessun punto soddisfa le rimanenti disequazioni, il problema è impossibile.



Problema duale:
$$\max \quad -u_1 - u_2 + 2u_3$$
$$\begin{cases} u_1 - u_2 \leq 1 \\ -u_1 - u_2 + u_3 \leq 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

In forma standard:
$$\min \quad u_1 + u_2 - 2u_3$$
$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_4 = 1 \\ -u_1 - u_2 + u_3 + u_5 = 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

La base iniziale è ad es. $B = [A_4 A_3]$, e può iniziare direttamente la fase 2. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_4. Al secondo pivot entra A_2 e il problema risulta <u>illimitato inferiormente</u>.

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

E' possibile formulare l'esercizio utilizzando 6 variabili:

f1, f2 investimento (in euro) in attività finanziarie all'inizio di primo e secondo anno;
g1, g2 investimento (in euro) in coltivazione di grano all'inizio di primo e secondo anno;
a1, a2 investimento (in euro) in coltivazione di albicocche all'inizio di primo e secondo anno;

I vincoli riguardano il bilancio finanziario all'inizio del primo e del secondo anno (entrate = uscite) e la risorsa terreno nei due anni (non posso usare più di 4 ettari).

La funzione obiettivo è pari al capitale alla fine del secondo anno.

Vincoli di bilancio:

f1+g1+a1=25.000
f2+g2+a2=1,05f1+2g1+0,2a1

vincoli sulla risorsa terreno:

g1/5000 + a1/20000 <4
g2/5000 + a1/20000 + a2/20000 < 4

Funzione obiettivo:

rendita finanziaria 1,05f2
incasso raccolto grano 2g2
incasso albicocche 0,4a1+0,2a2
vendita terreno coltivato ad albicocche 100.000(a1/20000 + a2/20000) = 5 a1 + 5 a2
vendita altro terreno 80.000(4 - a1/20000 - a2/20000) = 320.000 – 4 a1 – 4 a2

max 1,05f2+2g2+0,4a1+0,2a2+5a1+5a2-4a1-4a2+320000

capitale finale = 320.000 + max {1,05f2+2g2+1,4a1+1,2a2 :

f1+g1+a1=25.000
f2+g2+a2=1,05f1+2g1+0,1a1
g1/5000 + a1/20000 <4
g2/5000 + a1/20000 + a2/20000 < 4
f1,f2,a1,a2,g1,g2 >0 }

La soluzione ottima (non richiesta per l'esame) prevede un capitale finale di 386.650 euro.

F2 =19666.7
G2 = 18333.3
A1 = 6666.7
A2 = 0.0
F1 = 0.0

G1 = 18333.3

Esercizio 2

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo orientato con 8 nodi 1…8. Trovare l'albero dei cammini minimi, a partire dal nodo **1**, utilizzando l'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero dei cammini (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo). Evidenziare il cammino minimo tra il nodo 1 e il nodo 8.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,4)	(2,7)	(3,4)	(3,6)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
Costi	2	8	11	14	19	21	12	5	4	12	2	5	11	14	6

Soluzione

L'ordine in cui vengono fissati i flag dei nodi è 1, 2, 3, 5, 6, 4, 7 e 8. L'albero dei cammini minimi a partire dal nodo 1 è composto dai seguenti archi (1,2),(1,3),(1,5),(3,6),(3,4),(2,7),(2,8). Il cammino minimo da 1 a 8 passa attraverso i nodi 1, 2, 7 e 8.

Esercizio 3

È dato il problema di PL in figura.

1. Portare il problema in forma standard.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\max \quad 3x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \ \textit{libera} \end{cases}$$

Portando il problema in forma standard è necessario cambiare segno alla funzione obiettivo, sostituire la variabile libera con una differenza di variabili vincolate, e aggiungere 3 variabili di scarto (come in figura).

$$\min \quad -3x_1 + x_2^+ - x_2^-$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- + x_5 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile artificiale x_6 sul primo vincolo (come in figura).

$$\min \quad x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 + x_6 = 1 \\ -x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- + x_5 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La base iniziale è quindi $B = [A_6 A_4 A_5]$.

…

Il problema è illimitato inferiormente.

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Grunt, il cavernicolo, possiede una clava e un certo numero di conchiglie. Grunt può barattare i suoi oggetti come indicato in seguito:
Clava + 3 conchiglie = Cane
Clava + 10 conchiglie = Bue
Cane + 6 conchiglie = Bue
Clava + 17 conchiglie = Canoa
Cane + 13 conchiglie = Canoa
Bue + 6 conchiglie = Canoa
Clava + 50 conchiglie = Palafitta
Cane + 45 conchiglie = Palafitta
Bue + 35 conchiglie = Palafitta
Canoa + 15 conchiglie = Palafitta
Quale è il numero minimo di conchiglie che Grunt deve pagare (e quali scambi deve effettuare) per comprare una palafitta? Formulare (senza risolvere) il problema come un problema di cammino minimo su un grafo opportuno.

Soluzione

I nodi del grafo rappresenteranno l'oggetto in possesso di Grunt, mentre gli archi verranno utilizzati per rappresentare i possibili baratti. Il peso degli archi sarà dato dal numero di conchiglie necessarie per concludere il baratto. Indicando con Cl il nodo clava, Ca il nodo cane, B il nodo Bue, Co il nodo Canoa e P il nodo palafitta il grafo sarà composto dai seguenti archi, opportunamente pesati, (Cl,Ca), (Cl,B), (Ca,B), (Cl,Co), (Ca,Co), (B,Co), (Cl,P), (Ca,P), (B,P), (Co,P). Il modo più economico per raggiungere la Palafitta corrisponde ad individuare il cammino minimo tra i nodi Cl e P.

Esercizio 2

In tabella sono riportati i costi unitari degli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed un flusso ammissibile iniziale. A partire dal flusso iniziale dato, e utilizzando la fase 2 del simplesso su reti, determinare il flusso di costo minimo, o dimostrare che il problema è illimitato inferiormente.

Archi	(1,3)	(2,1)	(2,4)	(2,6)	(3,5)	(4,3)	(5,4)	(6,1)
Costi	8	3	1	5	1	-3	1	4
Flusso	4	0	2	1	5	0	0	2

Soluzione

L'algoritmo del simplesso su reti procede come segue.
Nella prima iterazione entrerà in base l'arco (1,2), e provocherà l'uscita dell'arco (2,6), il flusso circolante nel ciclo è 1.
Nella seconda iterazione entrerà in base l'arco (4,3), e provocherà l'uscita dell'arco (1,2) il flusso circolante nel ciclo è 1.
Nella terza iterazione entrerà in base l'arco (5,4), e provocherà un ciclo formato da soli archi concordi. Il problema risulta essere illimitato inferiormente.

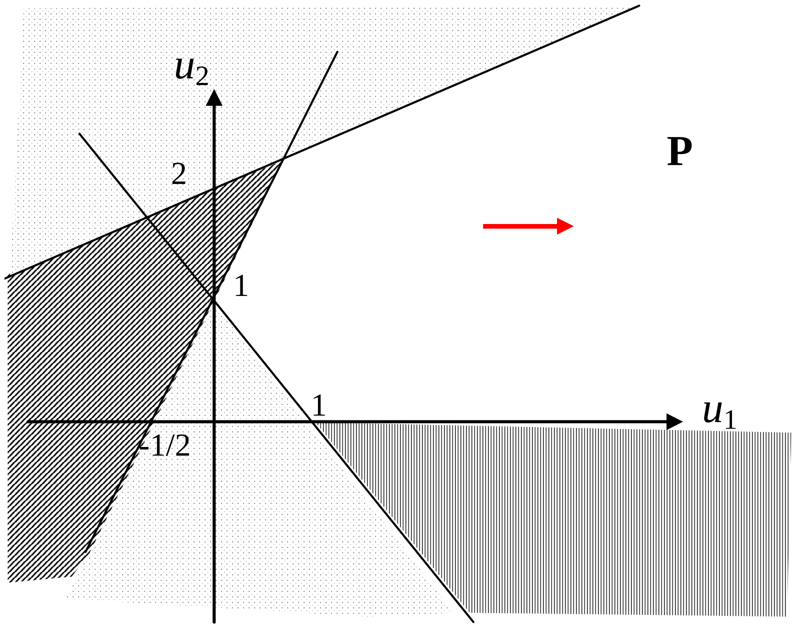
Esercizio 3

Dato il problema di PL in figura,

1. impostare il problema duale e risolverlo con il metodo grafico;
2. Se il duale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del duale ricavare la soluzione ottima del primale con le condizioni di ortogonalità. Se il duale non ammette una soluzione ottima, risolvere il primale con il metodo del simplesso.

$$\min \; -x_1 + 6x_2 + x_3 \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Duale: } \max \; u_1 \quad \begin{cases} -u_1 - u_2 \leq -1 \\ -u_1 + 3u_2 \leq 6 \\ -2u_1 + u_2 \leq 1 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo con il metodo grafico il problema risulta illimitato superiormente.



Primale in forma standard:

$$\min \; -x_1 + 6x_2 + x_3 \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Artificiale: } \min \; x_6 \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

NB: cambiando segno al secondo vincolo si risparmia una variabile artificiale.

La base iniziale è $B = [A_6 A_5]$. La soluzione base iniziale risulta ottima, con $x_6^* = 1$. Il problema è quindi impossibile.

E

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Variabili:
x1,x2,x3= kg di mozzarella di tipo 1,2,3 prodotta nel primo mese
n1= operai assunti nel primo mese
r1= capitale inutilizzato all'inizio del primo mese
x4,x5,x6= kg di mozzarella di tipo 1,2,3 prodotta nel secondo mese
n2= operai assunti nel secondo mese
r2= capitale inutilizzato all'inizio del secondo mese

Formulazione:
max r2 + 8 x4 + 5 x5 + 7 x6
s.t.
30 x1 + 24 x2 + 36 x3 - 9600 n1 < 0
2 x2 + x3 <4000
2x1 + x3 <4000
800 n1 + 2,4 x1 + 1,6 x2 + 2 x3 + r1 = 15000
30 x4 + 24 x5 + 36 x6 – 9600 n2 < 0
2 x5 + x6 <4000
2 x4 + x6 <4000
800 n2 + 2,4 x4 + 1,6 x5 + 2 x6 + r2 - r1 - 8 x1 - 5 x2 - 7 x3 =0
x,r,n>0

Esercizio 2

In tabella sono riportati i costi unitari degli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed un flusso ammissibile iniziale. A partire dal flusso iniziale, e utilizzando la fase 2 del simplesso su reti, determinare il flusso di costo minimo, o dimostrare che il problema è illimitato inferiormente.

Archi	(1,3)	(2,1)	(2,4)	(2,6)	(3,5)	(4,3)	(5,4)	(6,1)
Costi	5	2	12	0	2	2	21	5
Flusso	1	2	0	3	3	0	2	0

Soluzione

L'algoritmo del simplesso su reti procede come segue.
Nella prima iterazione entrerà in base l'arco (2,4), e provocherà l'uscita dell'arco (1,3), il flusso circolante nel ciclo è 1.
La soluzione così trovata rappresenta il flusso di costo minimo.

Esercizio 3

È dato il problema di PL in figura.

1. Portare il problema in forma standard.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\max \quad x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ \textit{libera} \end{cases}$$

Portando il problema in forma standard è necessario cambiare segno alla funzione obiettivo, sostituire la variabile libera con una differenza di variabili vincolate, e aggiungere 3 variabili di scarto (come in figura).

$$\min \quad -x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^-$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- - x_5 = 6 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre due variabili artificiali x_6 sul secondo vincolo e x_7 sul terzo vincolo (come in figura).

$$\min \quad x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- - x_5 + x_7 = 6 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

La base iniziale è quindi $B = [A_3 A_6 A_7]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_6. Al secondo pivot entra A_2^+ ed esce A_1. Al successivo entra A_4 ed esce A_3. Al successivo entra A_1 ed esce A_7.

Fine della fase 1, inizia la fase 2.

Il vettore *u* viene aggiornato e si ha:

$$u^T = (5/7 \quad 0 \quad 3/7).$$

Al successivo pivot entra A_3 ed esce A_2^+, quindi entra A_2^- e il problema risulta illimitato inferiormente.

F

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Cinque studenti (A, B, C, D, E) hanno vinto una borsa Erasmus in Spagna (2 posti a Barcellona, 1 posto a Madrid, Salamanca e Valencia), basandovi sulle loro preferenze dovete assegnare ogni studente ad una università in maniera da massimizzare la loro soddisfazione. Gli studenti hanno espresso i seguenti giudizi: lo studente A ha espresso la graduatoria Valencia 5, Salamanca 3, Barcellona 2, Madrid 0. Lo studente B invece preferisce Barcellona 3, Madrid 3 Valencia 3 Salamanca 1. La graduatoria di C è Madrid 4, Valencia 3, Salamanca 1, Barcellona 1, mentre quella di D è Madrid 4, Barcellona 4, Valencia 1, Salamanca 1. Infine E preferirebbe Madrid 3, Valencia 3, Barcellona 2 e Salamanca 2. Formulare senza risolvere il problema come problema di flusso a costo minimo su una rete opportuna.

Soluzione

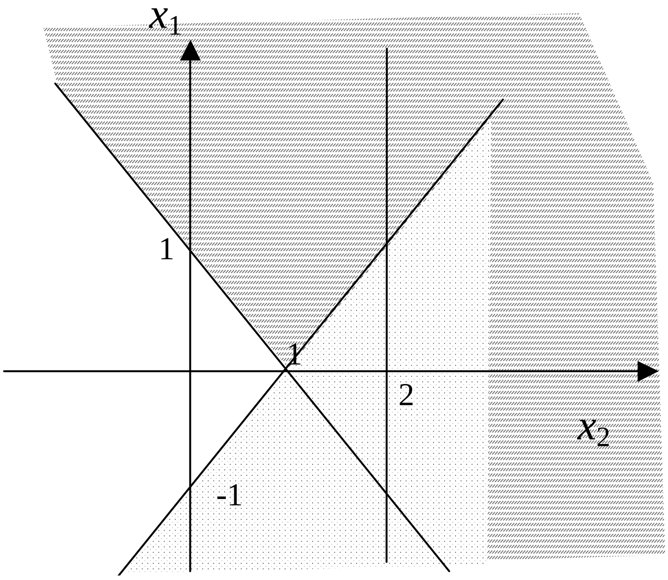
La rete di flusso sarà un grafo bipartito, in cui il primo insieme dei nodi sarà formato da cinque nodi che rappresentano gli studenti (A,B,C,D,E), mentre il secondo insieme dei nodi sarà formato dalle quattro università spagnole (B,M,S,V). I nodi studenti genereranno ognuno una unità di flusso, mentre i nodi università assorbiranno una quantità di flusso pari al numero di posti disponibili (ovvero 2 per Barcellona e 1 per tutti gli altri atenei). Gli archi che compongono la rete rappresentano le preferenze degli studenti verso i vari atenei. Il peso degli archi avrà valore pari alla preferenza espressa dallo studente per l'università, ma cambiato di segno. L'inversione del segno è necessaria per poter rappresentare il problema che è in forma di massimizzazione come una formulazione di flusso a costo minimo.

Esercizio 2

Dato il problema di PL (primale) in figura,
1. risolvere il problema con il metodo grafico ed impostare il problema duale;
2. Se il primale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del primale ricavare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità. Se il primale non ammette una soluzione ottima, risolvere il problema duale con il metodo del simplesso.

$$\min \quad x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

In figura è rappresentato l'insieme delle soluzioni che soddisfano le prime due disequazioni. Poiché nessun punto soddisfa le rimanenti disequazioni, il problema è impossibile.



Problema duale:
$$\max \quad u_1 + u_2 + 2u_3$$
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 \le 0 \\ -u_1 + u_2 \le 1 \\ u_1 \le 0 \\ u_2 \le 0 \\ u_3 \ge 0 \end{cases}$$

In forma standard:
$$\min \quad u_1 + u_2 - 2u_3$$
$$\begin{cases} -u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_5 = 1 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

La base iniziale è ad es. $B = [A_4 A_5]$, e può iniziare direttamente la fase 2.

…

Il problema risulta <u>illimitato inferiormente</u>.

Esercizio 3

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 4 nodi, e sono dati i costi di ogni arco. Risolvere il problema del cammino minimo per ogni coppia di nodi applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo. Altrimenti mostrate il cammino dal nodo 3 al nodo 4.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(3,1)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,3)
Costi	2	3	6	-1	6	4	0	4	10

Soluzione

Le matrici iniziali dei cammini minimi e dei predecessori sono

0	2	3	6
-1	0	∞	∞
6	∞	0	4
0	4	10	0

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4

Dopo la prima iterazione vengono aggiornati i cammini da 2 a 3, il cammino da 2 a 4, il cammino da 3 a 2, ed i cammini da 4 a 2 e da 4 a 3, tutti passando attraverso il nodo 1.
Durante la seconda e la terza iterazione non avviene nessun aggiornamento, infine durante la quarta ed ultima iterazione vengono aggiornati i cammini da 3 a 1 e da 3 a 2, entrambi passando per il nodo 4.
Le matrici finali dei cammini e dei predecessori sono:

0	2	3	6
-1	0	**2**	**5**
4	**6**	0	4
0	**2**	**3**	0

1	1	1	1
2	2	**1**	**1**
4	**1**	3	3
4	**1**	**1**	4

Il cammino minimo dal nodo 3 al nodo 4 è lungo 4 e passa per l'arco (3,4).

G

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

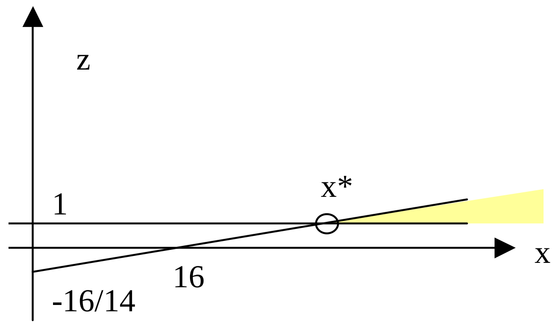
Una signora esce di casa con x euro nella borsa. Ogni volta che incontra un mendicante gli consegna metà del denaro che ha in borsa più una certa somma z non inferiore ad un euro. Se dopo il terzo mendicante la signora resta con non meno di 2 euro nella borsa, quanto aveva al minimo nella borsa quando è uscita di casa?

1. Formulare il problema come problema di PL con 2 variabili.
2. Trovare la soluzione ottima con il metodo grafico.
3. Dimostrare l'ottimalità della soluzione con le condizioni di ortogonalità.

Se all'inizio la signora ha x euro, dopo aver incontrato il primo mendicante rimane con x/2-z, dopo il secondo mendicante rimane con ½(x/2-z)-z, dopo il terzo rimane con ½[½(x/2-z)-z]-z che deve essere maggiore o uguale a 2 euro. Ovvero $x-14z \geq 16$. Inoltre $z \geq 1$. La funzione obiettivo è chiaramente min x e pertanto si ha:

$$\min x$$
$$\begin{cases} x-14z \geq 16 \\ z \geq 1 \\ x,z \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima è x*=30 euro (e z*=1).



$$\max \quad 16u_1 + u_2$$

Duale: $\begin{cases} u_1 \leq 1 \\ -14u_1 + u_2 \leq 0 \\ u \;\; \geq 0 \end{cases}$

Condizioni di ortogonalità:

$$\begin{cases} u_1(x - 14z - 16) = 0 \\ u_2(z - 1) = 0 \\ x(u_1 - 1) = 0 \\ z(-14u_1 + u_2) = 0 \end{cases}$$ Sostituendo *x** si ha:

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 & \textit{sempre vero} \\ u_2(0) = 0 & \textit{sempre vero} \\ u_1 = 1 \\ -14u_1 + u_2 = 0 \end{cases}$$ Da cui si ha: $$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 14 \end{cases}$$

che è ammissibile duale, il che dimostra l'ottimalità di *x**.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed i valori di domanda di ogni nodo (assumendo un valore negativo per un nodo sorgente e un valore positivo per un nodo pozzo). Si determini un flusso ammissibile utilizzando la fase 1 del simplesso su reti, o dimostrare che il problema non ammette soluzione ammissibile.

Archi	(1,3)	(1,6)	(2,1)	(2,4)	(3,5)	(4,3)	(4,5)	(5,6)

Nodi	1	2	3	4	5	6
Domanda	-5	-2	4	3	-2	2

Soluzione

Dopo l'inserimento del nodo artificiale 7, l'algoritmo del simplesso su reti procede come segue.
Nella prima iterazione entrerà in base l'arco (1,3), e provocherà l'uscita dell'arco (7,3), il flusso circolante nel ciclo è 4.
Nella seconda iterazione entrerà in base l'arco (1,6), e provocherà l'uscita dell'arco (7,1) il flusso circolante nel ciclo è 1.
Nella terza iterazione entrerà in base l'arco (2,4), e provocherà l'uscita dell'arco (2,7) il flusso circolante nel ciclo è 2.
Nella quarta iterazione entrerà in base l'arco (5,6), e provocherà l'uscita dell'arco (7,6) il flusso circolante nel ciclo è 1.
La soluzione così trovata non rappresenta un flusso ammissibile per la rete di flusso poiché del flusso circola ancora attraverso il nodo fittizio.

Esercizio 3

Portando il problema in forma standard è necessario cambiare segno alla funzione obiettivo, sostituire la variabile libera con una differenza di variabili vincolate, e aggiungere 3 variabili di scarto (come in figura).

$$\min \quad -x_1 + 3x_2^{+} - 3x_2^{-}$$
$$\begin{cases} +x_1 - x_2^{+} + x_2^{-} + x_3 = 3 \\ +x_1 + x_2^{+} - x_2^{-} - x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2^{+} - x_2^{-} + x_5 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Impostando il problema artificiale è sufficiente introdurre una variabile artificiale x_6 sul secondo vincolo (come in figura).

$$\min \quad x_6$$
$$\begin{cases} +x_1 - x_2^{+} + x_2^{-} + x_3 = 3 \\ +x_1 + x_2^{+} - x_2^{-} - x_4 + x_6 = 1 \\ -2x_1 + x_2^{+} - x_2^{-} + x_5 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La base iniziale è quindi $B = [A_3 A_6 A_5]$. Al primo pivot entra A_1 ed esce A_6. Fine della fase 1, inizia la fase 2.
Il vettore u viene aggiornato e si ha:

$$u^T = (0 \quad -1 \quad 0).$$

Al successivo pivot entra A_2^{-} ed esce A_3. La base trovata risulta ottima e la soluzione ottima è:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^{+*} - x_2^{-*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

H

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Grunt, il cavernicolo, vuole prendere in sposa Snort. Il padre di Snort accetterà di far sposare sua figlia solo se Grunt gli porterà in dono un Mammut. Grunt non è un abile cacciatore, e decide di fare dei baratti per ottenere un Mammut. Grunt possiede una clava e un certo numero di conchiglie. Grunt può barattare i suoi oggetti come indicato in seguito:
Clava + 3 conchiglie = Cane
Clava + 17 conchiglie = Canoa
Cane + 13 conchiglie = Canoa
Clava + 60 conchiglie = Palafitta
Cane + 45 conchiglie = Palafitta
Canoa + 15 conchiglie = Palafitta
Clava + 100 conchiglie = Mammut
Cane + 30 conchiglie = Mammut
Canoa + 20 conchiglie = Mammut
Palafitta = Mammut + 5 conchiglie
Quale è il numero minimo di conchiglie che Grunt deve pagare (e quali scambi deve effettuare) per comprare un Mammut ed avere in sposa Snort? Formulare (senza risolvere) il problema come un problema di cammino minimo su un grafo opportuno.

Soluzione

I nodi del grafo rappresenteranno l'oggetto in possesso di Grunt, mentre gli archi verranno utilizzati per rappresentare i possibili baratti. Il peso degli archi sarà dato dal numero di conchiglie necessarie per concludere il baratto. Indicando con Cl il nodo clava, Ca il nodo cane, Co il nodo Canoa, P il nodo palafitta e M il nodo mammut il grafo sarà composto dai seguenti archi, opportunamente pesati, (Cl,Ca), (Cl,Co), (Ca,Co), (Cl,P), (Ca,P), (Co,P), (Cl,M) , (Ca,M) , (Co,M) , (P,M). Attenziona all'arco (P,M) sarà pesato con -5, essendo lo scambio una Palafitta per un Mammut e 5 conchiglie. Il modo più economico per raggiungere il Mammut e sposare Snort corrisponde ad individuare il cammino minimo tra i nodi Cl e M.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 9 nodi, e sono dati i valori di capacità degli archi ed un flusso ammissibile. A partire dal flusso dato trovare il massimo flusso inviabile dal nodo **1** al nodo **9** con l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,8)	(3,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)	(5,7)	(6,9)	(7,9)	(8,7)	(8,9)
Capacità	50	100	30	50	15	15	20	20	10	20	20	10	40
Flussi	30	0	30	0	15	15	15	5	10	20	10	0	0

Soluzione

Il flusso iniziale circolante nella rete è pari a 30. I cammini aumentanti individuati dall'algortimo di Ford-Fulkerson sono:
(1,2),(2,8),(8,9) con flusso 20
(1,3),(3,2),(2,8),(8,9) con flusso 20
(1,3),(3,2),(2,8),(8,7),(7,9) con flusso 10.
Il taglio di costo minimo comprende i nodi 1 e 3.

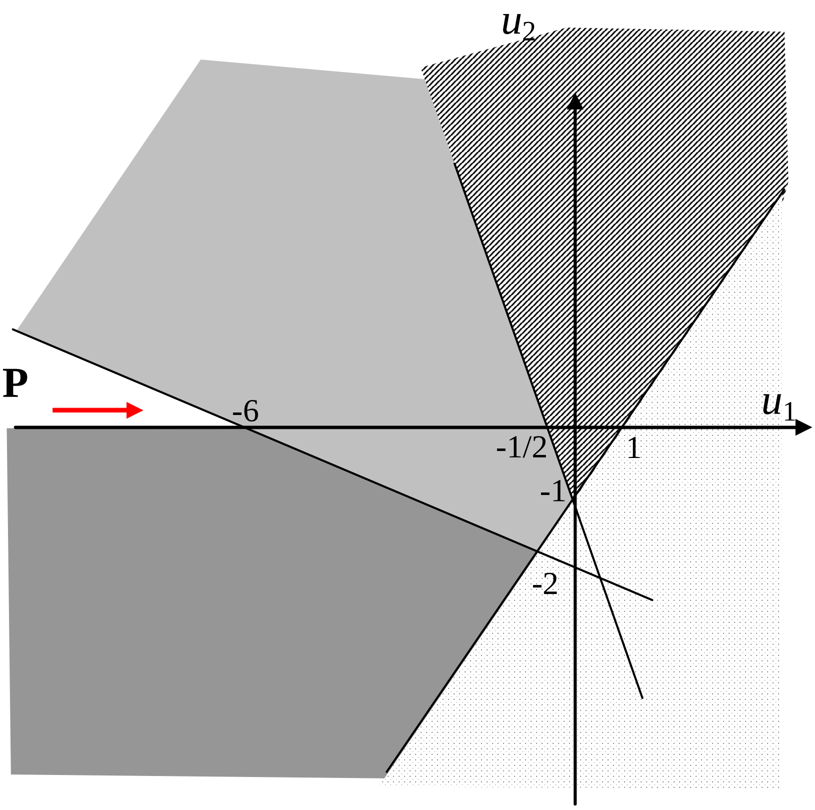
Esercizio 3

Dato il problema di PL in figura,

1. impostare il problema duale e risolverlo con il metodo grafico;
2. Se il duale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del duale ricavare la soluzione ottima del primale con le condizioni di ortogonalità. Se il duale non ammette una soluzione ottima, risolvere il primale con il metodo del simplesso (fase 1 e fase 2).

$$\max \quad 6x_1 + x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Problema duale:} \quad \begin{array}{l} \min \quad u_1 \\ \begin{cases} -u_1 - 3u_2 \geq 6 \\ -2u_1 - u_2 \geq 1 \\ -u_1 + u_2 \geq -1 \\ u_1 \leq 0 \\ u_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

In figura è rappresentato l'insieme delle soluzioni ammissibili. Il problema è illimitato inferiormente.



Problema primale in forma standard:
$$\begin{array}{l} \min \quad -6x_1 - x_2 + x_3 \\ \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Problema artificiale:
$$\min \quad x_6$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La base iniziale è $B = [A_6 A_5]$. La soluzione base iniziale risulta ottima, con $x_6^* = 1$. Il problema primale è quindi <u>impossibile</u>.