

### Esercizio 1

L'azienda Program&Co produce software e deve decidere quanto tempo impiegare nelle prossime due settimane su ogni progetto che sta portando avanti. In tabella sono indicate le tre tipologie di progetto in portafoglio su cui si può lavorare e, per ciascuna tipologia, il numero di ore di programmazione da svolgere, il prezzo orario praticato al cliente per ora di lavoro (incasso), il costo interno per ogni ora di lavoro ordinario e il costo interno per ogni ora di straordinario. In particolare lo sviluppo di portali web potrà iniziare solo dalla seconda settimana, mentre le altre due tipologie potranno partire già dalla prima settimana. La Program&Co dispone di quattro dipendenti programmatori. Ciascun programmatore può lavorare al massimo 30 ore alla settimana di lavoro ordinario e 6 di lavoro straordinario.

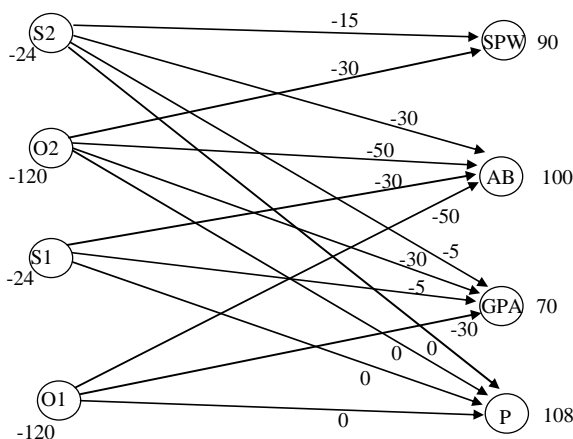
1. Formulare il problema di massimizzare il profitto aziendale (prezzo totale praticato ai clienti meno costi interni) nelle due settimane come un opportuno problema su grafi (indicare quale problema, oltre a mostrare il grafo, gli eventuali pesi e le relative unità di misura)
2. Utilizzando un'opportuna tecnica appresa nel corso, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che utilizzi a pieno la forza lavoro (ordinario e straordinario) nella prima settimana e non utilizzi straordinario nella seconda.

Tipologie di progetto	Numero di ore	Prezzo orario al cliente	Costo orario aziendale	Costo orario di straordinario
Sviluppo portali web	90	90 €	60 €	75 €
Applicativi bancari	100	120 €	70 €	90 €
Gestionali per pubbliche amministrazioni	70	80 €	50 €	75 €

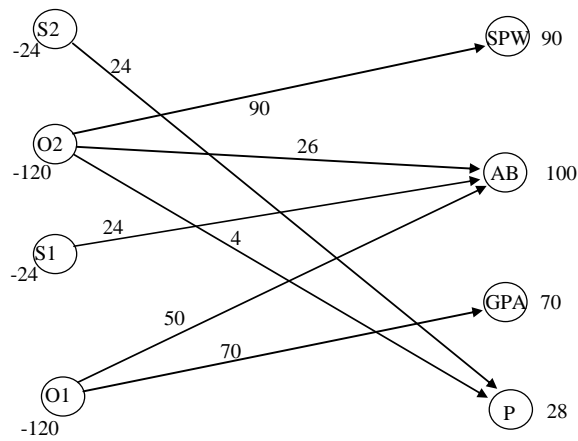
### Soluzione

Il problema in questione può essere visto come problema di **flusso di costo minimo**, e consiste nell'assegnare ore di lavoro ai 3 progetti.

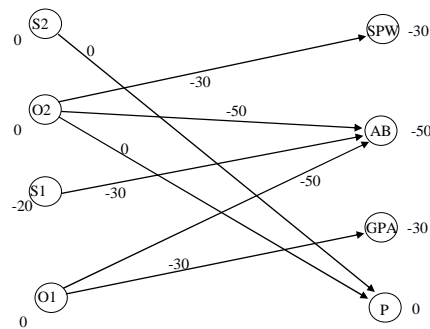
Ciascun progetto può quindi essere visto come un nodo con domanda data in tabella. Le sorgenti di lavoro sono 4 in quanto dobbiamo distinguere la settimana di produzione (1 o 2) e il tipo di lavoro utilizzato (ordinario o straordinario). Infine dobbiamo immaginare un nodo pozzo che possa assorbire le ore di lavoro disponibili (120 a settimana di lavoro ordinario + 24 di straordinario, in totale 288) ma non utilizzate (la domanda è  $90+100+70=260$ ). Il pozzo avrà quindi domanda 28. Il grafo avrà quindi 8 nodi ed è il seguente:



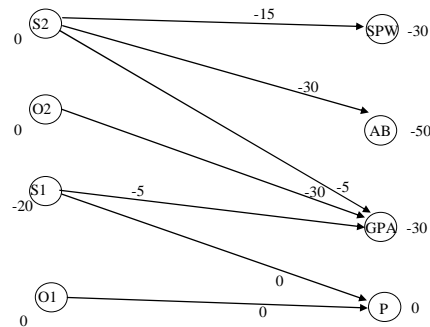
Per rispondere alla seconda domanda è necessario ipotizzare la struttura di una SBA (di certo, l'arco (S2,P) deve avere flusso 24 mentre (S1,P) e (O1,P) hanno flusso 0), i cui flussi degli archi in base sono riportati in figura:



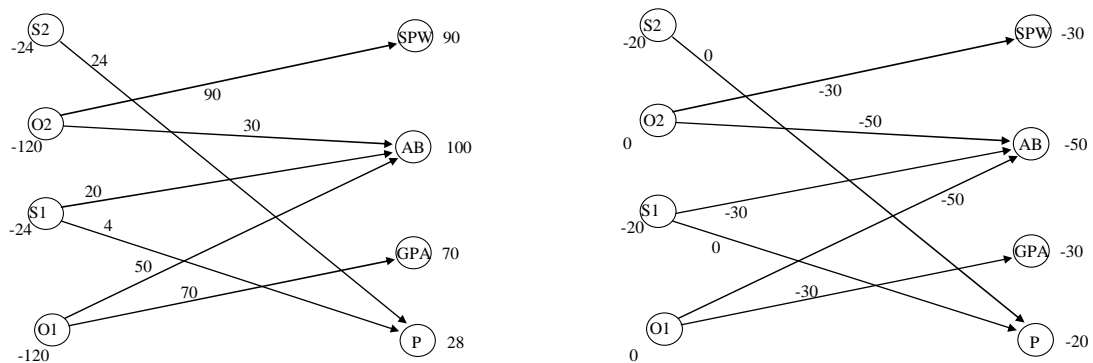
Per dimostrare l'ottimalità della soluzione è necessario calcolare le variabili duali dei nodi (fissiamo arbitrariamente quella di O1 a zero):



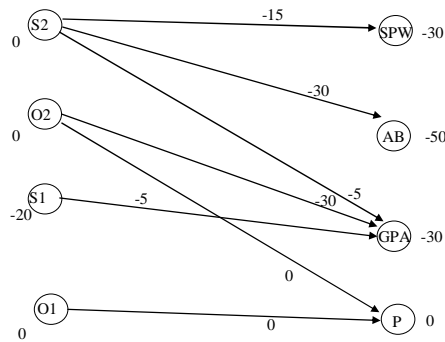
E poi verificare l'ammissibilità duale per i 7 archi fuori base:



La condizione è violata dall'arco (S1,P), che pertanto entra in base facendo uscire (O2,GPA). La nuova SBA è (flussi nel grafo di sinistra, variabili duali nel grafo di destra):



La verifica di ammissibilità duale per i 7 archi fuori base porta a dimostrare che questa è la soluzione ottima:



Poiché all'ottimo l'arco (S1,P) non è scarico, si confuta l'ipotesi di pieno utilizzo della forza lavoro (ordinario e straordinario) nella prima settimana.

# B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
Corso di Studi in Ingegneria Informatica  
**Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia**  
15 giugno 2012

Nome:  
Cognome:

Matricola:  
Firma:

## Esercizio 1

Siete i titolari di un'azienda che produce scarpe. Nel prossimo anno la vostra azienda deve consegnare la seguente quantità di esemplari: 1000 nel primo semestre e 900 nel secondo. All'inizio dell'anno disponete di 500 paia di scarpe in magazzino e 3 operai. A causa di accordi sindacali che entreranno in vigore all'inizio del secondo semestre, un operaio costa all'azienda 6 euro l'ora nel primo semestre e 7 nel secondo, e lavora fino a 160 ore mensili "regolari", cui si aggiungono un massimo di altre 20 ore lavorative di straordinario al mese. Il costo di un'ora di straordinario è di 7 euro nel primo semestre e 10 euro nel secondo. In agosto la ditta chiude per un mese, e quindi gli operai potranno lavorare solo 5 mesi nel secondo semestre.

Per produrre un paio di scarpe, occorrono 4 ore di lavoro di un operaio. Calcolate un costo di 1 euro (in capitale immagazzinato) per ogni paio di scarpe invenduto alla fine del primo semestre (cioè che eccede la domanda del periodo e rimane in magazzino). Alla fine del secondo semestre volete restare con il magazzino vuoto.

1. Formulare il problema di pianificare la produzione di scarpe nei due semestri a costo minimo come un opportuno problema su grafi (indicare quale problema, oltre a mostrare il grafo, gli eventuali pesi e le relative unità di misura)
2. Utilizzando un'opportuna tecnica appresa nel corso, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che utilizzi a pieno la capacità produttiva (ordinario e straordinario) nel primo semestre e non utilizzi straordinario nel secondo semestre.

## Soluzione

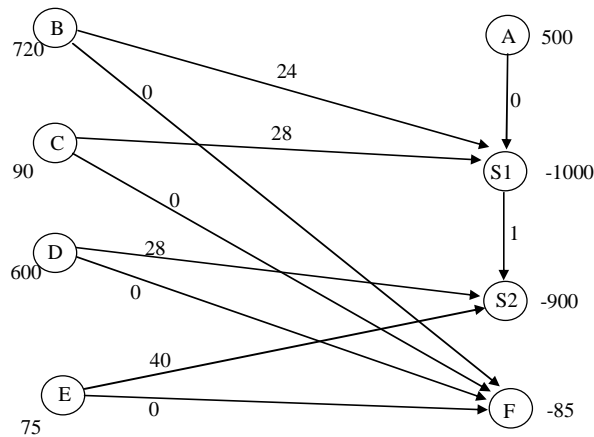
Il problema in questione può essere visto come problema di **flusso di costo minimo**. La domanda è suddivisa in due periodi (1000 paia di scarpe nel semestre 1 e 900 nel semestre 2) mentre la fornitura è di 5 tipologie diverse:

- A magazzino iniziale: 500 paia di scarpe;
- B scarpe prodotte con lavoro ordinario nel semestre 1. L'azienda ha 3 operai che lavorano 160 ore al mese per 6 mesi e possono produrre un paio di scarpe in 4 ore: quindi è possibile produrre  $3 \cdot 160 \cdot 6 / 4 = 720$  paia
- C scarpe prodotte con lavoro straordinario nel semestre 1. L'azienda ha 3 operai che possono effettuare fino a 20 ore di straordinario al mese per 6 mesi e possono produrre un paio di scarpe in 4 ore: quindi è possibile produrre  $3 \cdot 20 \cdot 6 / 4 = 90$  paia.
- D scarpe prodotte con lavoro ordinario nel semestre 2. L'azienda ha 3 operai che lavorano 160 ore al mese per 5 mesi e possono produrre un paio di scarpe in 4 ore: quindi è possibile produrre  $3 \cdot 160 \cdot 5 / 4 = 600$  paia

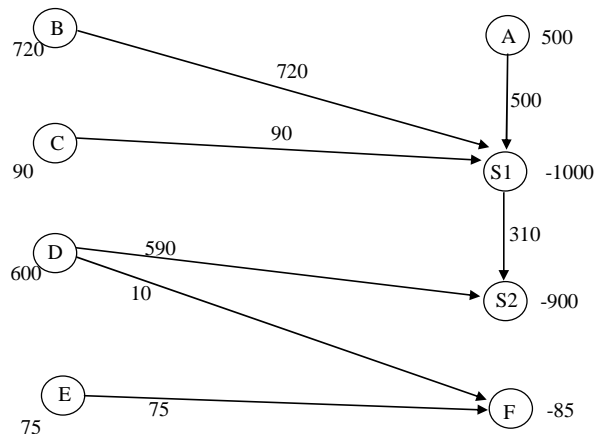
E scarpe prodotte con lavoro straordinario nel semestre 1. L'azienda ha 3 operai che possono effettuare fino a 20 ore di straordinario al mese per 5 mesi e possono produrre un paio di scarpe in 4 ore: quindi è possibile produrre  $3 \cdot 20 \cdot 5 / 4 = 75$  paia.

Inoltre possiamo calcolare il costo di un paio di scarpe prodotto nelle 4 modalità BCDE (la modalità A ha costo 0 in quanto le scarpe sono già disponibili), tenendo conto che un paio di scarpe richiede 4 ore di lavoro: costo di B= 24; costo di C e D=28; costo di E=40.

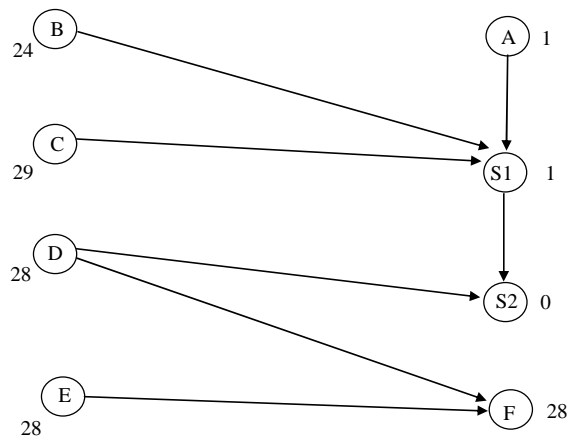
Il problema di pianificazione si può quindi formulare con la rete in figura. Si noti che è necessario aggiungere un nodo fittizio F per assorbire la capacità produttiva in eccesso con domanda 85, pari alla differenza tra fornitura totale (1985) e domanda totale (1900). Il flusso entrante in tale nodo rappresenta la capacità inutilizzata.



Per rispondere alla seconda domanda è necessario costruire la SBA associata alla domanda 2:



Per dimostrare l'ottimalità della soluzione è necessario calcolare le variabili duali dei nodi (fissiamo arbitrariamente quella di F a zero):



E poi verificare l'ammissibilità duale per i 3 archi fuori base (B,F), (C,F) ed (E,S2):

$$\begin{cases} y_B - y_F \leq 0 & SI \\ y_C - y_F \leq 0 & NO \\ y_E - y_{S2} \leq 40 & SI \end{cases}$$

La condizione è violata dall'arco (C,F), pertanto la soluzione proposta non è ottima. Si può verificare infatti che facendo entrare (C,F) in base e uscire (C,D) si ottiene una soluzione di costo inferiore (che risulta peraltro ottima).