A-2ª PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Ethil S.p.A. vuole investire nella produzione delle 5 bevande alcoliche in tabella.
La loro produzione richiede di utilizzare due uvaggi (Sangiovese, Trebbiano) nelle proporzioni indicate in tabella. In particolare ciascuna colonna indica il profitto per bottiglia in euro e le quantità di uve (in kg) necessarie alla produzione di una bottiglia del vino o liquore corrispondente a quella colonna.
L'ultima colonna indica le disponibilità di uvaggi (in q.li) previste per la prossima stagione.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quante bottiglie produrre con le uve disponibili al fine di massimizzare i profitti della Ethil S.p.A.
2. Costruire il problema duale e risolverlo con il metodo grafico o con il metodo di Fourier-Motzkin (uno a scelta).
3. Dalla soluzione ottima duale ricavare la soluzione ottima primale con le condizioni di ortogonalità.

	Vermut Venerini	Vino Brindisino	Vino Morello	Spumante Ottonari	Grappa Decino	Disp. Uve
Profitto Unitario	10	5	12	18	40	
Sangiovese	1	4	3	6	20	120000
Trebbiano	3	2	4	0	15	80000

Esercizio 2

In tabella è riportata una rete di flusso con 7 nodi e 11 archi, con i pesi degli archi e le forniture dei nodi.

archi	**(3,2)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(4,2)**	**(2,6)**	**(2,7)**	**(4,5)**	**(6,7)**	**(6,5)**	**(5,1)**	**(1,2)**
pesi	13	2	7	4	1	6	3	2	1	2	1
nodi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**				
forniture	+1	+1	+1	0	-2	0	-1				

Determinare una soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo per la rete data utilizzando l'algoritmo del simplesso su rete (fase 1 e fase 2), ovvero dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.

Domanda 3

Descrivere il problema di determinare il massimo flusso e quello di determinare il taglio di capacità minima in una rete di flusso capacitata con una sorgente S e un pozzo T. Enunciare i concetti di flusso ST e capacità di un taglio ST e dimostrare la relazione che li lega. Dimostrare il teorema di Ford-Fulkerson.

A-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Ethil S.p.A. vuole investire nella produzione delle 5 bevande alcoliche in tabella.
La loro produzione richiede di utilizzare due uvaggi (Sangiovese, Trebbiano) nelle proporzioni indicate in tabella. In particolare ciascuna colonna indica il profitto per bottiglia in euro e le quantità di uve (in kg) necessarie alla produzione di una bottiglia del vino o liquore corrispondente a quella colonna.
L'ultima colonna indica le disponibilità di uvaggi (in q.li) previste per la prossima stagione.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quante bottiglie produrre con le uve disponibili al fine di massimizzare i profitti della Ethil S.p.A.
2. Risolvere il problema primale con l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2)
3. Costruire il problema duale
4. Dalla soluzione ottima primale ricavare la soluzione ottima duale con le condizioni di ortogonalità.
5. Utilizzando l'analisi di sensitività, ricavare la minima quantità di uva Sangiovese necessaria affinché la base ottima ricavata al punto 2 resti ottima.

	Vermut Venerini	Vino Brindisino	Vino Morello	Spumante Ottonari	Grappa Decino	Disp. Uve
Profitto Unitario	10	5	12	18	40	
Sangiovese	1	4	3	6	20	120000
Trebbiano	3	2	4	0	15	80000

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete, con 7 nodi e 14 archi, e i loro pesi.

archi	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(4,2)	(2,6)	(2,7)	(4,6)	(6,7)	(6,5)	(5,7)	(5,1)	(2,1)	(1,2)	(4,5)
pesi	13	2	7	4	4	6	15	2	1	10	2	1	1	3

1. Utilizzando l'algoritmo di Dijkstra trovare il cammino minimo dal nodo 3 al nodo 7.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso su rete dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione ottenuta al punto 1. Allo scopo si ponga pari a: +1 la fornitura del nodo 3, -1 quella del nodo 7 e 0 quella degli altri nodi.

Domanda 3

Descrivere il problema di determinare il massimo flusso e quello di determinare il taglio di capacità minima in una rete di flusso capacitata con una sorgente S e un pozzo T. Enunciare i concetti di flusso ST e capacità di un taglio ST e dimostrare la relazione che li lega. Dimostrare il teorema di Ford-Fulkerson.

B-2ª PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	O O	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Farm S.p.A. vuole modificare le caratteristiche chimiche di un terreno di 200 ettari per adattarlo alla produzione di fagioli zolfanelli. Allo scopo deve arricchire il terreno con i 5 elementi in tabella, secondo le quantità minime riportate nella prima riga.
Il mercato offre due concimi composti A e B, che hanno un contenuto di ciascun elemento indicato in tabella (in grammi di elemento per kilogrammo di concime). L'ultima colonna riporta il costo di ciascun concime in euro per quintale.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quanto concime acquistare al fine di concimare i 200 ettari di terreno al costo minimo.
2. Risolvere il problema con il metodo grafico o con il metodo di Fourier-Motzkin (uno a scelta).
3. Costruire il problema duale.
4. Ricavare la soluzione ottima duale con le condizioni di ortogonalità, a partire dalla soluzione trovata al punto 2.

	Ferro	Azoto	Potassio	Fosforo	Zolfo	Costo (€/ql)
Quantità (gr/ettaro)	10	5	12	18	40	
Concime A (gr/kg)	1	4	3	6	20	120
Concime B (gr/kg)	3	2	4	0	15	80

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 7 nodi 1…7. Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, 1 è il nodo sorgente e 7 è il nodo pozzo.

Archi	(1,2)	(1,3)	(7,1)	(2,4)	(5,2)	(3,5)	(3,6)	(6,5)	(5,4)	(4,5)	(4,7)	(5,7)
Flussi	0	2	1	1	1	2	0	0	1	0	1	1
Capacità	8	7	2	5	2	2	1	3	2	1	5	4

1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale entrante nel pozzo e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson.
2. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi 1 e 7.
3. Si aggiunga l'arco scarico (2, 5) di capacità 3 alla rete. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo. Evidenziare il nuovo taglio ottimo trovato.

Domanda 3

Illustrare il concetto di problema duale di un problema di PL. Enunciare e dimostrare i teoremi di dualità, debole e forte, limitatamente al caso di problema primale in forma standard.

B-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	O O	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

L'azienda Farm S.p.A. vuole modificare le caratteristiche chimiche di un terreno di 200 ettari per adattarlo alla produzione di mais. Allo scopo deve arricchire il terreno con i 5 elementi in tabella, secondo le quantità minime riportate nella prima riga.
Il mercato offre due concimi composti A e B, che hanno un contenuto di ciascun elemento indicato in tabella (in grammi di elemento per kg di concime). L'ultima colonna riporta il costo di ciascun concime in euro per quintale.

1. Formulare come problema di PL il problema di decidere quanto concime acquistare al fine di concimare i 200 ettari di terreno al costo minimo.
2. Costruire il problema duale.
3. Risolvere il problema duale con l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2).
4. Ricavare la soluzione ottima primale con le condizioni di ortogonalità, a partire dalla soluzione ottima duale.
5. Utilizzando l'analisi di sensitività, ricavare il minimo costo del concime A tale che la base ottima duale ricavata al punto 3 resti ottima.

	Ferro	Azoto	Potassio	Fosforo	Zolfo	Costo (€/ql)
Quantità (gr/ettaro)	10	5	12	18	40	
Concime A (gr/kg)	1	4	3	6	20	120
Concime B (gr/kg)	3	2	4	0	15	80

Esercizio 2

In tabella è riportata una rete di flusso con 7 nodi e 11 archi, con i pesi degli archi e le forniture dei nodi.

archi	**(3,2)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(4,2)**	**(2,6)**	**(2,7)**	**(4,5)**	**(6,7)**	**(6,5)**	**(5,1)**	**(1,2)**
pesi	13	2	7	4	1	6	3	2	1	2	1
nodi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**				
forniture	+1	+1	+1	0	-2	0	-1				

1. Utilizzando l'algoritmo di Prim, a partire dal nodo 4, trovare un albero ricoprente di peso minimo nel grafo sottostante la rete (trascurando quindi il verso degli archi).
2. Utilizzare l'albero ottenuto al punto 1 come base iniziale del problema di flusso a costo minimo per la rete in tabella (considerando quindi il verso degli archi). Determinare i flussi di tutti gli archi in base e determinare se la base così ottenuta è ammissibile o meno.
3. Determinare una soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo utilizzando l'algoritmo del simplesso su rete. Se la base ottenuta al punto 2 è ammissibile, partire da questa (quindi eseguendo solo la fase 2), altrimenti cercare una base ammissibile con la fase 1 del simplesso su rete e poi ottenere la base ottima con la fase 2.

Domanda 3

Illustrare il concetto di problema duale di un problema di PL. Enunciare e dimostrare i teoremi di dualità, debole e forte, limitatamente al caso di problema primale in forma standard.

C-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome:	○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3**
Cognome:	○	**Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**
Matricola:		

Esercizio 1

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso con 7 nodi 1…7. Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, 2 è il nodo sorgente e 6 è il nodo pozzo.

Archi	**(2,1)**	**(2,4)**	**(5,2)**	**(6,2)**	**(7,6)**	**(1,3)**	**(3,4)**	**(3,6)**	**(5,4)**	**(4,5)**	**(4,7)**	**(5,7)**
Flussi	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2	0	1
Capacità	4	9	2	2	8	5	3	4	3	5	5	4

a. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
b. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi 2 e 6.
c. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto a, si determini il nuovo flusso massimo se l'arco scarico (2, 3) di capacità 1 è inserito nella rete di flusso. Evidenziare il taglio ottimo trovato.

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo di Fourier-Motzkin.
2. Formulare il problema duale e ridurlo in forma standard.
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema duale in forma standard o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.
4. Verificare il soddisfacimento delle condizioni di ortogonalità per le soluzioni trovate ai punti 1 e 3.

$$\max \quad -3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \quad \textit{libera} \end{cases}$$

Domanda 3

Illustrare le definizioni di cammino e di percorso in un digrafo. Illustrare l'algoritmo di Floyd-Warshall per trovare un percorso orientato minimo in un digrafo pesato tra ciascuna coppia di nodi. In particolare dimostrare la correttezza dell'algoritmo e discuterne la complessità computazionale.

D-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
19 giugno 2015

Nome: Cognome: Matricola:	○ ○	**Orale 30 giugno 2015, ore 9:00 aula N3** **Orale 10 luglio 2015, ore 9:00 aula N3**

Esercizio 1

In tabella sono riportati gli archi di un digrafo pesato con 6 nodi, 12 archi e i rispettivi pesi.

Archi/Lati	**(2,1)**	**(3,1)**	**(5,1)**	**(2,3)**	**(6,2)**	**(4,2)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(4,3)**	**(5,4)**	**(6,5)**	**(6,4)**
Pesi	3	3	3	2	2	1	2	4	1	2	1	2

a. Trovare l'albero dei cammini orientati di peso minimo dal nodo 6 verso tutti gli altri nodi utilizzando la versione efficiente dell'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i nodi in *S*. Mostrare l'albero dei cammini orientati minimi e calcolare il peso del percorso orientato minimo dal nodo 6 al nodo 3.

b. Dal digrafo in tabella ricavare il grafo sottostante, con 6 vertici, 12 lati e i rispettivi pesi. Trovare e mostrare un albero ricoprente di peso minimo partendo dal vertice 6 tramite la versione efficiente dell'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero e calcolare il peso dell'albero.

c. In che cosa differiscono i due alberi trovati ai punti a e b? L'albero trovato al punto a è ottimo per il problema presentato al punto b? Se no, perché?

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo di Fourier-Motzkin.
2. Formulare il problema duale e ridurlo in forma standard.
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema duale in forma standard o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.
4. Verificare il soddisfacimento delle condizioni di ortogonalità per le soluzioni trovate ai punti 1 e 3.

$$\min \quad 2x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \quad \textit{libera} \end{cases}$$

Domanda 3

Illustrare le definizioni di poliedro, vertice e direzione di un poliedro. Partendo dal teorema di Weyl-Minkowski, enunciare e dimostrare le condizioni geometriche di ottimalità e di illimitatezza per un problema di PL.