

Esercizio 1

È dato il problema di PL in figura.

1. Risolvere il problema con il metodo di Fourier-Motzkin.
2. Ridurre il problema in forma standard.
3. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1, se necessaria, e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è inammissibile o illimitato inferiormente.
4. Le due soluzioni ottenute sono coerenti fra loro?

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + 3x_2 \geq -6 \\ x_1 \text{ libera} \\ x_2 \text{ libera} \end{array} \right. \end{array}$$

Esercizio 2

A partire dal problema dell'Esercizio 1:

5. La base trovata al punto 4 è ancora ottima se il secondo termine noto diminuisce di 2 (e quindi diventa -4)? Se sì, di quanto varia la funzione obiettivo?
6. La base trovata al punto 4 è ancora ottima se il secondo termine noto diminuisce di 5 (e quindi diventa -7)?
7. La SBA trovata al punto 4 è ancora ottima se il costo di x_2 diminuisce di 2 (e quindi diventa -3)?
8. La soluzione trovata al punto 1 è una SBA? Se sì, elencare tutte le basi associate.
9. Interpretare tutti i risultati ottenuti dopo aver risolto il problema in due variabili con il metodo grafico.

Esercizio 3

È dato il problema di PL in figura e una SBA \bar{x} .

1. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione \bar{x} .
2. La SBA rimane ottima incrementando di 1 entrambi i termini noti? Di quanto cambia z^* ?
3. La SBA rimane ottima incrementando di 1 solo il primo termine noto? Di quanto cambia z^* ?

$$z^* = \min 12x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

È dato il problema di PL in figura e una soluzione \bar{x} .

1. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione \bar{x} .
2. Dopo aver portato il problema in F.S. verificare che \bar{x} è SBA.
3. Entro quali margini di variazione del primo termine noto la base associata a \bar{x} rimane ottima?

$$z^* = \min -x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5

Quintili è un'azienda di trasporti di Viterbo dotata di 8 bus e 12 autisti. Il contratto di lavoro di un autista prevede 6 ore di lavoro giornaliere che possono essere svolte a scelta dell'azienda nella fascia oraria mattutina (8:00-14:00) o pomeridiana (14:00-20:00). I mezzi sono disponibili 12 ore al giorno (8:00-20:00). I servizi richiesti dal mercato in un giorno sono di tre tipi:

1. Viaggi turistici brevi: consistono nell'affittare un bus con autista per un viaggio A/R di 6 ore nella fascia oraria 14:00-20:00. Quintili ha raccolto 4 richieste di questo servizio in un giorno, che può accettare anche in parte, e ciascuno consente un utile di 1500 euro.
2. Viaggi turistici lunghi: consistono nell'affittare un bus con due autisti che si alternano per un viaggio A/R di 12 ore nella fascia oraria 8:00-20:00. Quintili ha raccolto 6 richieste di questo servizio in un giorno (che può accettare in parte) e ciascuno consente un utile di 2400 euro.
3. Servizio di trasporto passeggeri sulle linee extraurbane comunali: Il Comune può delegare a Quintili la gestione (anche parziale) di alcune linee di trasporto pubblico che partono alle 8:00 o alle 11:00 dal capolinea situato proprio davanti al deposito mezzi di Quintili. Per ogni corsa A/R (durata 3 ore) Quintili deve fornire un bus con autista e ha un utile garantito di 600 euro. Il numero di corse offerte dal Comune è di 10 al giorno, in particolare 5 nella fascia 8:00-11:00 e 5 nella fascia 11:00-14:00, Quintili può scegliere di operarne solo alcune. Si noti che uno stesso bus/autista possono coprire al più due corse in un giorno.

Un bus impegnato nel servizio 3 la mattina può essere impegnato nel servizio 1 il pomeriggio dello stesso giorno.

Formulare come problema di PL, senza risolverlo, il problema di scegliere i servizi di trasporto da erogare in un giorno per massimizzare l'utile aziendale.

Esercizio 6

Il laboratorio di analisi dell'università, ha bisogno di disporre per i prossimi 4 giorni di provette sterili. Le provette possono essere acquistate scegliendo tra il tipo A monouso e il tipo B riutilizzabile. Il tipo B richiede la sterilizzazione dopo l'uso. Il costo di una provetta di tipo A è di 2 Euro, mentre quella di tipo B costa 4,2 Euro.

La sterilizzazione di una provetta di tipo B, richiede un giorno (servizio notturno) e costa di 0,3 Euro, oppure richiede due giorni (servizio diurno) al costo di 0,2 Euro. All'inizio del periodo considerato il laboratorio dispone soltanto di 100 provette di tipo B sterili. Nei prossimi 3 giorni sono necessarie rispettivamente 350, 200 e 450 provette. All'inizio del quarto giorno si richiede la disponibilità di almeno 100 provette sterili.

Formulare un modello di PL che permetta di soddisfare le esigenze del laboratorio con il minimo costo.

Esercizio 7

Il ristorante Al Faro, per un imprevisto aumento della clientela, ha bisogno di disporre per i prossimi 4 giorni di tovaglioli puliti. Gli articoli possono essere acquistati nuovi oppure lavati in lavanderia. Il costo di un tovagliolo è di 2 Euro. Se un tovagliolo sporco viene mandato in lavanderia, sarà restituito pulito dopo un giorno e al costo di 0,5 Euro (lavaggio notturno), oppure dopo due giorni al costo di 0,2 Euro (lavaggio diurno).

All'inizio del periodo considerato il ristorante dispone soltanto di 100 tovaglioli puliti. Nei prossimi tre giorni sono necessari rispettivamente 300, 250 e 350 tovaglioli. All'inizio del quarto giorno si richiede la disponibilità di almeno 100 tovaglioli puliti.

Scrivere un modello di PL che permetta di soddisfare le richieste con il minimo costo.

Esercizio 8

L'agenzia finanziaria BuySim deve investire un milione di dollari di un suo cliente in fondi di investimento. Il mercato offre in questo momento cinque tipi di fondi in tabella.

La rendita sui fondi pubblici è tassata del 20%. Il cliente chiede di riservare almeno il 40% del capitale a fondi pubblici e che il tempo medio della durata dell'investimento non debba superare i 5 anni.

Inoltre il cliente esige che non più di 150.000 euro siano investiti sui fondi D ed E.

Infine, trasformando il "Moody's rating" in una scala numerica (AAA=5, AA=4, A=3, BAA=2, BA=1), il cliente richiede che il valore medio per l'investimento non sia inferiore a 2,4. Si vuole massimizzare la rendita dell'investimento.

Formulare il modello di programmazione lineare del problema.

Nome	Tipo	Moody's rating	Durata anni	Rendita complessiva alla scadenza
A	Privato	AA	9	17.5%
B	Pubblico	A	12	21.4%
C	Pubblico	AAA	4	9.1%
D	Pubblico	BAA	3	4.6%
E	Privato	BA	2	3.8%

Esercizio 9

Un piccolo villaggio della Gallia è riuscito a resistere per anni agli attacchi dei Romani grazie ad una miracolosa pozione magica che centuplicava le forze degli abitanti. Purtroppo, nel corso di un banchetto per festeggiare una delle innumerevoli vittorie, il druido, unico depositario del segreto, ha bevuto una quantità eccessiva di vino e ha completamente dimenticato la formula della pozione. Grazie ad alcuni appunti cifrati è riuscito a ricostruire tutte le dosi degli ingredienti, però deve valutare la combinazione che costi il meno possibile per non sperperare inutilmente le risorse del villaggio.

Una libbra della magica pozione deve contenere almeno 25 oboli di fosforo, 20 oboli di magnesio e 15 oboli di ambrosia, ingredienti contenuti nelle merci localmente reperibili e nelle dosi indicate in tabella (in oboli/libbra, 1 libbra=576 oboli), insieme al costo delle merci (in sesterzi /libbra).

1. Formulare come problema di PL e risolvere il problema di determinare in quali dosi debba mescolare le merci il sapiente druido per minimizzare il costo di una libbra di pozione magica.
2. Il druido, ancora sotto gli effetti dell'alcool, ha confuso nella ricetta il numero 25 (oboli di fosforo) con il numero 35. Se nella pozione ci fosse bisogno di 35 oboli di fosforo, quale sarebbe la nuova miscela ottima? Motivare la risposta senza effettuare di nuovo i calcoli.

	Fosforo	Magnesio	Ambrosia	Costo
Occhi di pipistrello	10	27	45	80
Vischio	50	15	35	50
Mandragola	15	10	40	40
Fegato di rospo	30	16	45	30
Coda di lucertola	60	40	10	70