ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Ricerca Operativa I

Dario Pacciarelli

Introduzione al corso, formulazione di problemi di PL

Struttura del corso

Ricerca Operativa

- Cos'è
- Modelli
- Esempi

Modelli

- Metodo delle 5 fasi
- Modelli di PL
- Miscelazione
- Allocazione
- Trasporto
- Taglio ottimo

Teoria e Algoritmi

- Condizioni di ottimo
- Teoria della dualità
- Metodo Grafico
- Metodo di Fourier-Motzkin
- Algoritmo del simplesso

Teoria dei Grafi

- Grafi e Digrafi
- Albero ricoprente di peso minimo
- Percorso di costo minimo
- Massimo flusso

Ricerca Operativa

- Allegato B del D. M. 4 ottobre 2000, pubblicato sulla G. U. n. 249 del 24 ottobre 2000, supplemento ordinario 175:
- “La ricerca operativa studia i processi decisionali nei sistemi organizzati, nonché i modelli e i metodi per prevedere il comportamento di tali sistemi, in particolare quelli relativi alla crescita della loro complessità, per valutare le conseguenze di determinate decisioni e per individuare le decisioni che ottimizzano le loro prestazioni. Le metodologie di base comprendono la teoria e gli algoritmi di ottimizzazione, la teoria dei grafi e delle reti di flusso, la teoria dei giochi e delle decisioni. I problemi oggetto di studio comprendono i sistemi di produzione, trasporto, distribuzione e supporto logistico di beni e servizi, la pianificazione, organizzazione e gestione di attività, progetti e sistemi, in tutte le diverse fasi che caratterizzano il processo decisionale: definizione del problema, sua formalizzazione matematica, formulazione di vincoli, obiettivi e alternative di azione, sviluppo di algoritmi di soluzione, valutazione, implementazione e certificazione delle procedure e delle soluzioni trovate. Le competenze didattiche di questo settore riguardano anche tutti gli aspetti istituzionali della matematica di base”

Ricerca Operativa:
trovare la migliore soluzione possibile

$$\min f(x)$$
s.t.
$$x \in X$$

Operations Research: the science of better

Fonte: INFORMS, The INstitute For Operations Research and the Management Science

Un modello di programmazione lineare

$$\text{Min } z = \Sigma_j \, c_j x_j$$

dati (noti)

variabili (incognite)

s.t.

$$\Sigma_j \, a_{i,j} x_j \le b_i \qquad i=1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n$$

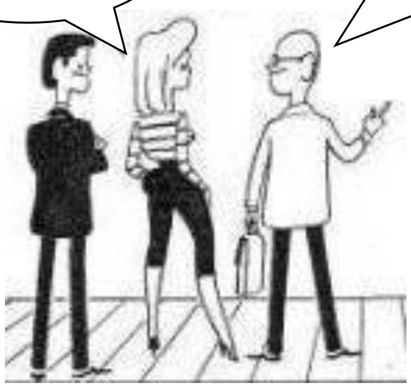
end

vincoli

53° Quesito con la Susi

E tu Gianni quanti anni hai?

Dieci anni fa non avevo meno di tre volte l'età che aveva allora mia sorella Pina, oggi non ho più del doppio della sua età.



Soluzione = ?

x_G: *età di Gianni*
x_P: *età di Pina*

Soluzione ~~possibile~~ AMMISSIBILE = ?

$$\begin{cases} x_G - 10 \geq 3(x_P - 10) \\ x_G \leq 2x_P \\ x_G \geq 0 \\ x_P \geq 0 \end{cases}$$

INSIEME AMMISSIBILE

Soluzione migliore = ?

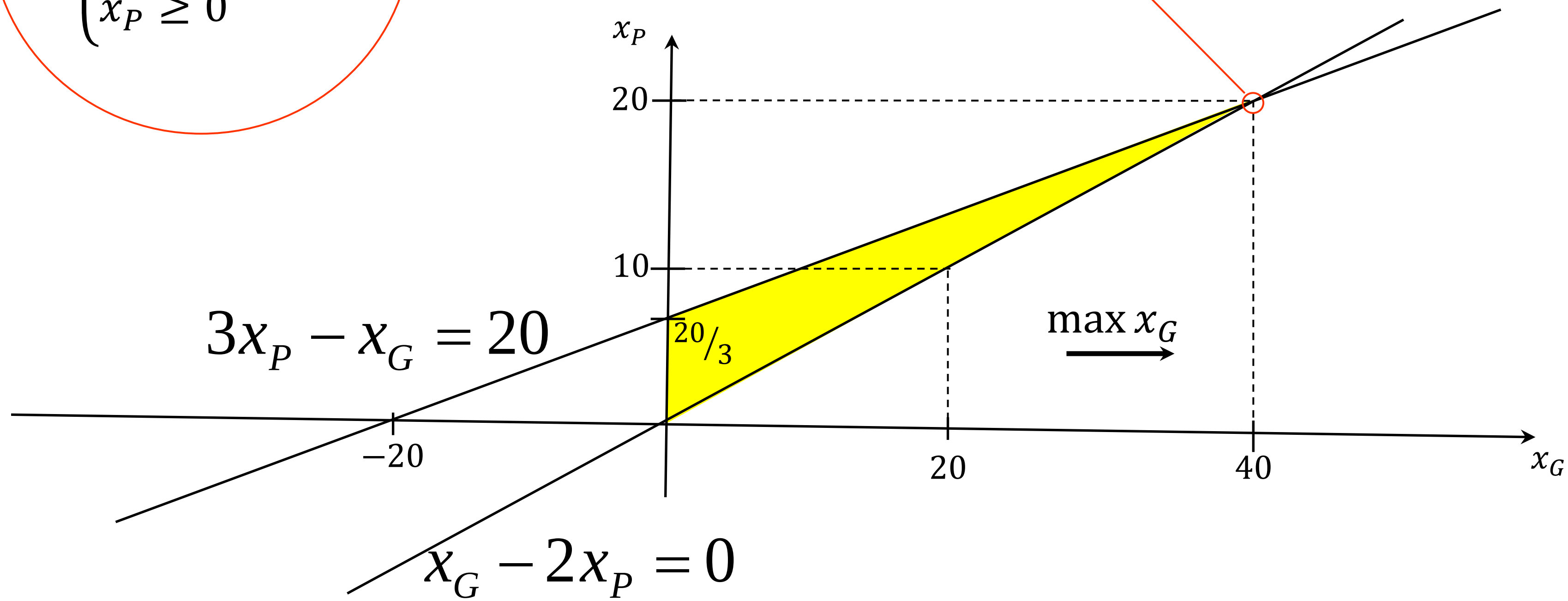
$\max x_G$ **= SOLUZIONE OTTIMA**

Quanti anni può avere al più l'amico Gianni?

Dalla formulazione alla soluzione: il Metodo Grafico

$$\max\ x_G$$
$$\begin{cases} 3x_P - x_G \leq 20 \\ x_G - 2x_P \leq 0 \\ x_G \geq 0 \\ x_P \geq 0 \end{cases}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_G^* \\ x_P^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$$



George Bernard Dantzig (1914 –2005)

“It happened because during my first year at Berkeley [1939]. I arrived late one day at one of Neyman's classes. On the blackboard there were two problems that I assumed had been assigned for homework. I copied them down. A few days later I apologized to Neyman for taking so long to do the homework — the problems seemed to be a little harder than usual. I asked him if he still wanted it. He told me to throw it on his desk. I did so reluctantly because his desk was covered with such a heap of papers that I feared my homework would be lost there forever. About six weeks later, one Sunday morning about eight o'clock, Anne and I were awakened by someone banging on our front door. It was Neyman. He rushed in with papers in hand, all excited: "I've just written an introduction to one of your papers. Read it so I can send it out right away for publication." For a minute I had no idea what he was talking about. To make a long story short the problems on the blackboard that I had solved thinking they were homework were in fact two famous unsolved problems in statistics.”

Struttura del corso

Ricerca Operativa
- *Cos'è*
- *Modelli*
- *Esempi*

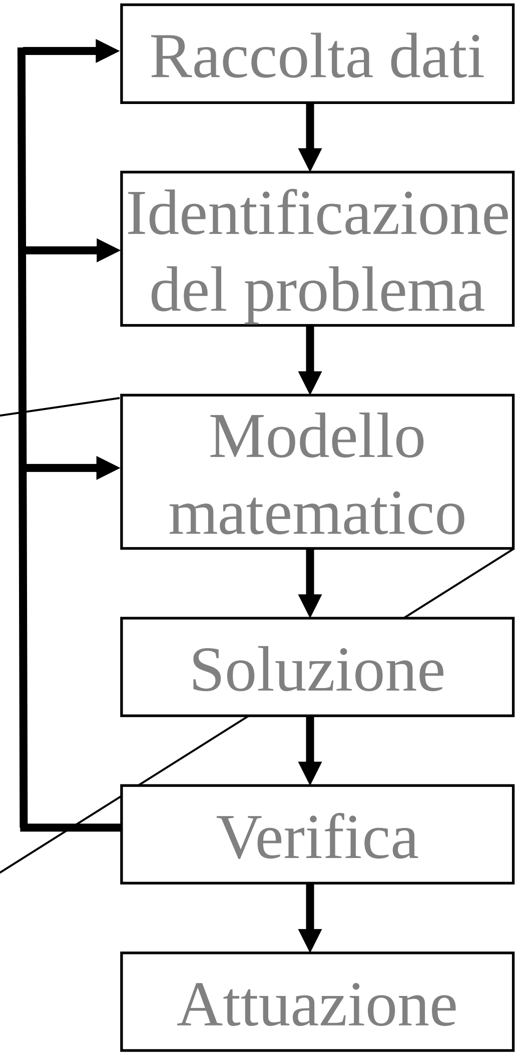
Modelli
- *Metodo delle 5 fasi*
- *Modelli di PL*
- *Miscelazione*
- *Allocazione*
- *Trasporto*
- *Taglio ottimo*

Teoria e Algoritmi
- *Condizioni di ottimo*
- *Teoria della dualità*
- *Metodo Grafico*
- *Metodo di Fourier-Motzkin*
- *Algoritmo del simplesso*

Teoria dei Grafi
- *Grafi e Digrafi*
- *Albero ricoprente di peso minimo*
- *Percorso di costo minimo*
- *Massimo flusso*

Formulazione dei problemi

Metodo delle 5 fasi



Definizione di:

- Variabili di decisione
- Vincoli
- Funzione obiettivo

Preparazione di un cocktail

- Una ricetta per un cocktail richiede Gin (40 cl), Vermouth (80 cl) e Bitter (60 cl). Purtroppo non avete in casa questi liquori e non avete tempo di andare a comprarli. Potete risolvere questo problema?

1. raccolta dati

- Analizzando i liquori a disposizione in casa scoprite di averne diversi che contengono gli ingredienti che cercate:
  - Negroni (0.75 *l*) = 1/3 G + 1/3 V + 1/3 B
  - Sweet Martini (0.75 *l*) = 7/10 G + 3/10V
  - Martini Dry (0.5 *l*) = 8/10 G + 2/10V
  - Americano (1.5 *l*) = ½ B + ½ V
  - Gin (0.3 *l*)
- Idea: miscelare i liquori in modo da ottenere la ricetta desiderata.

2. Identificazione problema

- Miscelare i 5 liquori disponibili (Negroni, Sweet Martini, Martini Dry, Americano , Gin) in dosi opportune per ottenere una miscela il più possibile simile a quella cercata (Gin 40 cl + Vermouth 80 cl + Bitter 60 cl).

3. Modello matematico

- Variabili: $x_{Negroni}$, x_{SM}, x_{MDry}, x_{Amer} , x_{Gin} :

quantità (in litri) dei 5 liquori da aggiungere alla miscela

- Vincoli:
  - Quantità desiderata di Gin, Vermouth, Bitter:

$$33\, x_{Negroni} + 70\, x_{SM} + 80\, x_{MDry} + 100\, x_{Gin} = 40$$
$$33\, x_{Negroni} + 30\, x_{SM} + 20\, x_{MDry} + 50\, x_{Amer} = 80$$
$$33\, x_{Negroni} + 50\, x_{Amer} = 60$$

  - Disponibilità dei liquori

$x_{Negroni} \leq 0.75$; $x_{SM} \leq 0.75$; $x_{MDry} \leq 0.5$;
$x_{Amer} \leq 1.5$; $x_{Gin} \leq 0.3$

3. Modello matematico

- Funzione obiettivo? In realtà ci basta una soluzione ammissibile (non ottima), per cui scegliamo una funzione qualsiasi:

$$\min \text{ pippo.}$$

4. Soluzione

- Inserendo la formulazione in un solutore si ottiene:

```
min PIPPO
s.t.
33 Negroni + 70 SM + 80 MDry +100 Gin =  40
33 Negroni + 30 SM + 20 MDry + 50 Amer = 80
33 Negroni + 50 Amer =60
Negroni <= 0.75
SM <= 0.75
MDry <= 0.5
Amer <= 1.5
Gin <= 0.3
end
```

Il solutore non trova sol. amm.

5. Verifica

- Da una verifica dei dati troviamo che la scelta:

  $x_{Amer} = 1.2 \qquad x_{SM} = 40/70 = 0.57\ldots$

  Rispetta i vincoli su Gin e Bitter, e corrisponde a 77,14 cl di Vermouth (invece di 80).

  In pratica ve benissimo, anche se non rispetta i vincoli.

- Dove abbiamo sbagliato?

3bis. Modifica del modello

Inseriamo delle variabili d’errore tali da consentire qualche scostamento rispetto alla ricetta:

```
min PIPPO
s.t.
33 Negroni + 70 SM + 80 MDry +100 Gin + E1 - E2=  40
33 Negroni + 30 SM + 20 MDry + 50 Amer + E3 - E4 = 80
33 Negroni + 50 Amer + E5 - E6 =60
Negroni <= 0.75
SM <= 0.75
MDry <= 0.5
Amer <= 1.5
Gin <= 0.3
end
```

4bis. Soluzione

- Si ottiene:

PIPPO	0.000000
NEGRONI	0.000000
SM	0.000000
MDRY	0.000000
GIN	0.000000
AMER	0.000000
E1	<u>40.000000</u>
E2	0.000000
E3	<u>80.000000</u>
E4	0.000000
E5	<u>60.000000</u>
E6	0.000000

5 bis. Soluzione non accettabile

3ter. Modifica del modello

Dobbiamo aggiungere l'informazione che una soluzione è tanto migliore quanto più piccolo è l'errore. Minimizziamo la somma degli errori:

min E1 + E2 + E3 + E4 + E5 + E6
s.t.
33 Negroni + 70 SM + 80 MDry +100 Gin + E1 - E2= 40
33 Negroni + 30 SM + 20 MDry + 50 Amer + E3 - E4 = 80
33 Negroni + 50 Amer + E5 - E6 = 60
Negroni <= 0.75
SM <= 0.75
MDry <= 0.5
Amer <= 1.5
Gin <= 0.3
end

4ter. Soluzione

- Si ottiene:

NEGRONI	0.000000
SM	<u>0.571429</u>
MDRY	0.000000
GIN	0.000000
AMER	<u>1.200000</u>
E1	0.000000
E2	0.000000
E3	<u>2.857143</u>
E4	0.000000
E5	0.000000
E6	0.000000

5 ter. soluzione accettabile. Si può attuare

Formulazioni: Problema di miscelazione

- Per categorie di problemi: Problemi di miscelazione

  "so quanto devo produrre, devo decidere come"

  - Si dispone di n ingredienti ciascuno contenente quantità note di m componenti. Si vuole produrre una miscela degli ingredienti con quantità prefissate (min, max) di ciascun componente
  - È noto il costo unitario di ogni ingrediente
  - Si vuole determinare la miscela di costo minimo
  - Variabili (n): x_i= quantità di ingrediente *i* da aggiungere alla miscela
  - Vincoli (m): quantità desiderata di ciascun componente nella miscela

- NB: per produrre *k* miscele servono variabili x_{ik} = quantità di ingrediente *i* da aggiungere alla miscela *k*. Spesso in questo caso sono presenti anche vincoli sulla quantità disponibile di ciascun ingrediente per tutte le miscele.

Esercizio

- Un agricoltore desidera concimare un terreno calcareo di 20000 m^2. Per concimare 10 m^2 occorrono almeno 3 gr di Azoto (N), 5 gr di Fosforo (P), 6 gr di Potassio (K) e 0,5 gr di Ferro (Fe). Allo scopo può acquistare due tipi di concimi complessi A e B, disponibili sul mercato, dalle caratteristiche (gr di elemento per Kg di peso di concime) e costi (€ / Kg) indicati in tabella.

Concime	A	B
Azoto (N)	10 gr / Kg	5 gr / Kg
Fosforo (P)	20 gr / Kg	10 gr / Kg
Potassio (K)	15 gr / Kg	20 gr / Kg
Ferro (Fe)	4 gr / Kg	1 gr / Kg
Costo al kg	5 € / Kg	4 € / Kg

- Formulare come problema di PL il problema di definire il numero di Kg di concime A e B che è necessario acquistare al fine di minimizzare la spesa complessiva

Esercizio

- Un agricoltore desidera concimare un terreno calcareo di 20000 m^2. Per concimare 10 m^2 occorrono almeno 3 gr di Azoto (N), 5 gr di Fosforo (P), 6 gr di Potassio (K) e 0,5 gr di Ferro (Fe). Allo scopo può acquistare due tipi di concimi complessi A e B, disponibili sul mercato, dalle caratteristiche (gr di elemento per Kg di peso di concime) e costi (€ / Kg) indicati in tabella.

Concime	A	B
Azoto (N)	10 gr / Kg	5 gr / Kg
Fosforo (P)	20 gr / Kg	10 gr / Kg
Potassio (K)	15 gr / Kg	20 gr / Kg
Ferro (Fe)	4 gr / Kg	1 gr / Kg
Costo al kg	5 € / Kg	4 € / Kg

- VARIABILI:
  x_i = kg concime i=A,B acquistato

$$\min 5x_A + 4x_B$$

$$\begin{cases} 10x_A + 5x_B \geq 6000 \\ 20x_A + 10x_B \geq 10000 \\ 15x_A + 20x_B \leq 12000 \\ 4x_A + 1x_B \leq 3000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Formulazioni: Problema di allocazione di risorse

- Per categorie di problemi: Problemi di allocazione di risorse
  Pianificazione della produzione

"so come produrre, devo decidere quanto"

- Si desidera produrre n prodotti disponendo di m risorse (scarse)
- È nota la disponibilità di ciascuna risorsa
- È nota la ricetta per produrre un prodotto, cioè la quantità di ciascuna risorsa necessaria a produrre un'unità di ciascun prodotto
- E' noto il profitto per unità di prodotto
- Si vuole pianificare la produzione che massimizza il profitto
- Variabili (n): x_i = unità di prodotto i da produrre (livelli di produzione)
- Vincoli (m): consumo di ciascuna risorsa $\leq$ disponibilità

Esercizio

La Utiltool produce due tipi di strumenti meccanici, che indichiamo con S1, S2. I due strumenti richiedono diverse risorse produttive e apportano differenti profitti unitari. In particolare ciascun tipo richiede una certa quantità di lavoro (in ore), di metallo e di materiale plastico (in once), come riportato in tabella.

	Lavoro Specializzato (ore)	Metallo (once)	Materiale plastico (once)	Profitto ($)
S1	2	4	2	6
S2	1	3	1	5

La tabella riporta anche il profitto che Utiltool ottiene per ciascuno strumento. Per il prossimo periodo produttivo Utiltool ha una disponibilità di 4000 ore di lavoro specializzato, 300 once di metallo e 3000 once di materiale plastico. La Utiltool vuole massimizzare il profitto nel periodo produttivo.

Esercizio

FORMULAZIONE

le <u>variabili</u> del problema sono associate ai prodotti (*S*1 e *S*2)

x_i = numero di strumenti *Si* prodotti, i=1,2.

i <u>vincoli</u> del problema sono associati alle risorse (lavoro, metallo e materiale plastico)

$$\max 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4000 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 300 \\ 2x_1 + x_2 \le 3000 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Esercizio

Un lanificio produce filato di tipo standard e di tipo speciale utilizzando 3 diverse macchine. In un'ora di lavoro ogni macchina può produrre una quantità fissa di filato, e precisamente:

macchina A: 3 matasse standard e 1 speciale
macchina B: 2 matasse standard e 2 speciali
macchina C: 2 matasse standard e 1 speciale

Il mercato richiede almeno 60 matasse standard e 40 di tipo speciale al giorno. I costi orari delle tre macchine sono: 90 euro per la A, 80 euro per B, 60 euro per C.

Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera (2 turni di 8 ore ciascuno) di costo minimo.

Esercizio

$$\min 90x_A + 80x_B + 60x_C$$

$$\begin{cases} 3x_A + 2x_B + 2x_C \geq 60 \\ x_A + 2x_B + x_C \geq 40 \\ x_A \leq 16 \\ x_B \leq 16 \\ x_C \leq 16 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x_i =$ Ore di lavoro della macchina i

Esercizio

Un lanificio produce filato di tipo standard e di tipo speciale utilizzando 3 diverse macchine. In un'ora di lavoro ogni macchina può produrre una quantità fissa di filato, e precisamente:

macchina A: 3 matasse standard oppure 1 speciale
macchina B: 2 matasse standard oppure 2 speciali
macchina C: 2 matasse standard oppure 1 speciale

Il mercato richiede almeno 60 matasse standard e 40 di tipo speciale al giorno. I costi orari delle tre macchine sono: 90 euro per la A, 80 euro per B, 60 euro per C.

Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera (2 turni di 8 ore ciascuno) di costo minimo.

Esercizio

$$\min 90x_{A1} + 80x_{B1} + 60x_{C1} + 90x_{A2} + 80x_{B2} + 60x_{C2}$$

$$\begin{cases} 3x_{A1} + 2x_{B1} + 2x_{C1} \geq 60 \\ x_{A2} + 2x_{B2} + x_{C2} \geq 40 \\ x_{A1} + x_{A2} \leq 16 \\ x_{B1} + x_{B2} \leq 16 \\ x_{C1} + x_{C2} \leq 16 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

x_{ij} = Ore dedicate dalla macchina *i* alla produzione del filato *j*
i= *A, B, C*
j=1 se matasse standard
j=2 se matasse speciali

Formulazioni: Problema del trasporto

- Per categorie di problemi: Problema del trasporto

  - Si devono trasportare diverse unità di un bene da un insieme di *m* origini ad un insieme di *n* destinazioni. È dato il costo unitario di trasporto da ciascuna origine a ciascuna destinazione. È data la fornitura f_h dei beni in ogni origine (h=1,…, m) e la domanda d_k in ogni destinazione (k=1,…, n). Si vuole organizzare la spedizione da ogni origine ad ogni destinazione che minimizza i costi totali di trasporto.
  - Ipotesi : $\sum_{h=1\dots m} f_h = \sum_{k=1\dots n} d_k$
  - Variabili: x_{hk} = numero di unità trasferite da h a k (*mn* variabili)
  - Vincoli: da ogni origine deve partire la fornitura, in ogni destinazione deve arrivare la domanda (*m*+*n* vincoli)
  - Se Hp non vera, nel gruppo di vincoli con eccesso di fornitura o domanda si avranno delle disequazioni $\leq$ (parte/arriva al più …)


destinazione
domanda
origine
fornitura
50
30
30
70
30
6
12
8
9
10
5
© 1988-2000 Microsoft e/o suoi fornitori. Tutti i diritti riservati.

Esercizio

FORMULAZIONE

Variabili: x_{hk} merce trasportata da origine h (Madrid, Roma) a destinazione k (Parigi, Berlino, Vienna),

$$\min 6\,x_{MP} + 12x_{MB} + 10x_{MV} + 9x_{RP} + 8x_{RB} + 5x_{RV}$$

$$\begin{cases} x_{MP} + x_{RP} \le 30 \\ x_{MB} + x_{RB} \le 50 \\ x_{MV} + x_{RV} \le 30 \\ x_{MP} + x_{MB} + x_{MV} = 70 \\ x_{RP} + x_{RB} + x_{RV} = 30 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Poiché la domanda (110) è in eccesso rispetto alla fornitura (100), non tutta la domanda può essere soddisfatta

Formulazioni: Problema di taglio ottimo

- Per categorie di problemi: Problemi di taglio ottimo
  - Si devono tagliare elementi standard di materiale per ricavare moduli di dimensioni minori prefissate, per soddisfare una richiesta di moduli data.
  - È noto il costo di ogni elemento standard
  - Si vuole organizzare il taglio degli elementi minimizzando il costo degli elementi necessari (ovvero minimizzando lo sfrido)
  - Variabili (n): x_i = numero di elementi tagliati secondo la modalità di taglio i
  - NB: con più tipologie di elementi base non cambia quasi nulla (più modalità di taglio)

Esercizio

Un'azienda vende lavagne metalliche di diverse misure, ottenute ritagliando rettangoli di lamiera delle dimensioni desiderate da un foglio metallico unico alto 100 cm e lungo 5 metri. Sono date le domande di lavagne nel prossimo periodo:

Modello	altezza	lunghezza	Quantità ordinata
A	100 cm	60 cm	62
B	100 cm	150 cm	36
C	100 cm	320 cm	120

OBIETTIVO

Determinare il numero minimo di fogli di nastro metallico necessari per produrre la quantità ordinata

Esercizio

FORMULAZIONE

le variabili del problema di taglio ottimo vanno costruite attraverso un'elaborazione iniziale, il computo delle modalità di taglio:

Modalità 500	Moduli A 60	Moduli B 150	Moduli C 320	Sfrido
1	0	1	1	30
2	3	0	1	0
3	0	3	0	50
4	3	2	0	20
5	5	1	0	50
6	8	0	0	20

VARIABILI:

x_i = numero di elementi standard (fogli da 5m) tagliati in modalità i=1,..,6.

Esercizio

FORMULAZIONE

i vincoli del problema di taglio ottimo impongono il soddisfacimento della domanda: 62 A, 36 B,120 C.

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 3x_2 + 3x_4 + 5x_5 + 8x_6 \geq 62 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 36 \\ x_1 + x_2 \geq 120 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio

FORMULAZIONE

Perché vincoli di $\geq$? Se mettiamo vincoli di =

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3x_2 + 3x_4 + 5x_5 + 8x_6 = 62 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 36 \end{array}\right\} \quad x_1 + 3x_2 \leq 94 \\ x_1 + x_2 = 120 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$$

Non esiste soluzione ammissibile !