A-2ª PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2017

Nome:	○	**Orale 23 giugno 2017 ore 9:00 aula N14**
Cognome:	○	**Orale 13 luglio 2017 ore 14:00 aula N14**
Matricola:		

Esercizio 1

È dato il problema di PL in figura.

1. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'ottimalità della soluzione $\bar{x}_1 = -2;\ \bar{x}_2 = 0;$
2. Facendo uso dell'analisi di sensitività, dimostrare o confutare che la soluzione ottenuta al punto 1 rimane ottima anche se il costo di x_2 diminuisce di due unità.
3. Facendo uso dell'analisi di sensitività, dimostrare o confutare che la base ottima ottenuta al punto 1 rimane ottima anche se il termine noto del primo vincolo è pari a 5.

$$\min x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 8 nodi s,1,2,3,4,5,6,p.
Per ogni arco sono dati il valore della sua capacità massima e un flusso iniziale. In particolare, s è il nodo sorgente e p è il nodo pozzo.

1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
2. Individuare un taglio di capacità minima tra i nodi s e p. Evidenziare il taglio ottimo trovato.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo e il nuovo taglio di capacità minima se:
   a. la nuova capacità dell'arco (3,6) è uguale a 7
   b. la nuova capacità dell'arco (2,5) è uguale a 1
   c. la nuova capacità dell'arco (6,5) è uguale a 1

Archi	**s,1**	**s,3**	**1,2**	**2,1**	**2,3**	**1,4**	**2,5**	**3,5**	**3,6**	**6,5**	**4,5**	**4,p**	**5,p**	**6,p**
Flussi	**2**	**4**	**1**	**0**	**1**	**2**	**0**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**	**4**	**1**
Capacità	**8**	**10**	**2**	**4**	**1**	**12**	**4**	**8**	**3**	**7**	**2**	**1**	**7**	**8**

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) percorso e (2) cammino e in cosa differiscono dato un digrafo con pesi ≥ 0 sugli archi. (3) Dimostrare che la soluzione ottima dell'algoritmo di Dijkstra rispetta sempre le condizioni di ottimalità sui percorsi orientati di costo minimo in un digrafo con pesi ≥ 0. (4) Illustrare il funzionamento dell'algoritmo di Dijkstra e (5) dimostrarne la complessità computazionale.

A-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2017

Nome:	○	**Orale 23 giugno 2017 ore 9:00 aula N14**
Cognome:	○	**Orale 13 luglio 2017 ore 14:00 aula N14**
Matricola:		

Esercizio 1

È dato il problema di PL in figura.

1. Ridurre il problema in forma standard.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.

$$\max x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 8 nodi s,1,2,3,4,5,6,p.
Per ogni arco sono dati il valore della sua capacità massima e un flusso iniziale. In particolare, s è il nodo sorgente e p è il nodo pozzo.
1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson. 2. Individuare un taglio di capacità minima tra i nodi s e p. Evidenziare il taglio ottimo trovato.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo e il nuovo taglio di capacità minima se:
a. la nuova capacità dell'arco (3,6) è uguale a 7
b. la nuova capacità dell'arco (2,5) è uguale a 1
c. la nuova capacità dell'arco (6,5) è uguale a 1

Archi	s,1	s,3	1,2	2,1	2,3	1,4	2,5	3,5	3,6	6,5	4,5	4,p	5,p	6,p
Flussi	2	4	1	0	1	2	0	3	2	1	1	1	4	1
Capacità	8	10	2	4	1	12	4	8	3	7	2	1	7	8

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

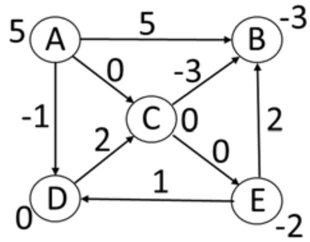
Illustrare le definizioni di (1) base di una matrice, (2) rango di una matrice e (3) soluzione base ammissibile di un problema di PL in forma standard. Dimostrare (4) le condizioni algebriche di ottimalità e (5) quelle di illimitatezza per un problema di PL in forma standard. Fornire un'interpretazione geometrica del cambio di base nell'algoritmo del simplesso nel caso di (6) pivot non degenere e (7) pivot degenere.

B-2ª PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2017

Nome:	○	**Orale 23 giugno 2017 ore 9:00 aula N14**
Cognome:	○	**Orale 13 luglio 2017 ore 14:00 aula N14**
Matricola:		

Esercizio 1



È data la rete di flusso in figura, con i costi degli archi e le forniture dei nodi.
Utilizzando il simplesso su rete (fase 1 e fase 2), trovare una soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo sulla rete data.

Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un digrafo composto da 7 nodi *s*1…6. Per ogni arco è riportata una peso. In particolare, *s* è il nodo sorgente.

Rete	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p
s	1	1										1	1	
1								-1		-1	-1			1
2		-1		1		1								
3	-1		1		1									
4				-1	-1			1	1				-1	
5			-1			-1	1			1		-1		
6							-1		-1		1			-1
Peso	2	3	3	3	3	2	6	3	7	4	1	6	7	2

a. Trovare il cammino orientato minimo dal nodo *s* verso tutti gli altri nodi utilizzando l'algoritmo di Dijkstra in versione efficiente.
a.1: Indicare in quale ordine vengono aggiunti gli archi all'albero (oppure in quale ordine i flag dei nodi vengono fissati a 1).
a.2: Mostrare l'albero dei cammini orientati minimi.

b. Mostrare come varia la soluzione ottima del problema nei seguenti tre casi distinti:
b.1: l'arco *e* ha peso 5;
b.2: l'arco *i* ha peso 4;
b.3: l'arco *m* ha peso 2.

c. Per i casi a, b.1, b.2, b.3 mostrare il cammino orientato minimo dal nodo *s* al nodo 4, dal nodo *s* al nodo 5, dal nodo *s* al nodo 6. In tutti e 4 i casi indicare il peso del cammino orientato minimo.

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) flusso netto e (2) capacità del taglio in una rete. (3) Dimostrare che una distribuzione di flusso è ottima in una rete se e solo se la rete residua non contiene alcun cammino orientato dal nodo sorgente al nodo pozzo. (4) Illustrare il funzionamento dell'algoritmo di Ford-Fulkerson e (5) dimostrarne la complessità computazionale.

B-Esame

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2017

Nome:	○	**Orale 23 giugno 2017 ore 9:00 aula N14**
Cognome:	○	**Orale 13 luglio 2017 ore 14:00 aula N14**
Matricola:		

Esercizio 1

Dovete formare una squadra di calcetto a 5 e dovete coprire i vari ruoli (1 portiere, 2 centrocampisti e 2 attaccanti) avendo a disposizione una rosa di 5 persone: Alberto, Bernardo, Carlo, Davide ed Emanuele. Nell'allenamento pre-partita avete dato un voto a ciascun giocatore per ciascuno dei 3 ruoli, ottenendo i risultati in tabella (10 voto massimo, 1 voto minimo).

	A	B	C	D	E
Portiere	10	9	5	5	3
Centrocampo	9	7	7	6	5
Attacco	7	6	5	5	6

1. Formulare il problema di PL di formare la squadra massimizzando la somma dei voti dei giocatori nei ruoli assegnati.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima in cui Alberto è portiere, Bernardo e Carlo giocano a centrocampo, Davide ed Emanuele giocano in attacco.

Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza nodi/archi di un digrafo composto da 7 nodi *s*1…6. Per ogni arco è riportata una peso. In particolare, *s* è il nodo sorgente.

Rete	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p
s	1	1										1	1	
1								-1		-1	-1			1
2		-1		1		1								
3	-1		1		1									
4				-1	-1			1	1				-1	
5			-1			-1	1			1		-1		
6							-1		-1		1			-1
Peso	2	3	3	3	3	2	6	3	7	4	1	6	7	2

a. Trovare il cammino orientato minimo dal nodo *s* verso tutti gli altri nodi utilizzando l'algoritmo di Dijkstra in versione efficiente.
a.1: Indicare in quale ordine vengono aggiunti gli archi all'albero (oppure in quale ordine i flag dei nodi vengono fissati a 1).
a.2: Mostrare l'albero dei cammini orientati minimi.

b. Mostrare come varia la soluzione ottima del problema nei seguenti tre casi distinti:
b.1: l'arco *e* ha peso 5;
b.2: l'arco *i* ha peso 4;
b.3: l'arco *m* ha peso 2.

c. Per i casi a, b.1, b.2, b.3 mostrare il cammino orientato minimo dal nodo *s* al nodo 4, dal nodo *s* al nodo 5, dal nodo *s* al nodo 6. In tutti e 4 i casi indicare il peso del cammino orientato minimo.

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) poliedro, (2) vertice, (3) direzione e (4) direzione estrema di un poliedro. Partendo dal teorema di Weyl-Minkowski, dimostrare (5) le condizioni geometriche di ottimalità e (6) quelle di illimitatezza per un problema di PL.

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2017

Nome:	○	**Orale 23 giugno 2017 ore 9:00 aula N14**
Cognome:	○	**Orale 13 luglio 2017 ore 14:00 aula N14**
Matricola:		

Esercizio 1

Una vetreria acquista lastre di vetro di misura standard (L×H)=(8×1) metri che poi taglia per ricavare finestre di tre tipologie A, B e C, tutte di altezza standard H=1 metro. Sono pervenuti gli ordini in Tabella.

Tipo vetro	**A**	**B**	**C**
Dimensioni vetro (LxH) in m	(2×1)	(3×1)	(1,5×1)
Numero finestre ordinate	12	11	22

1. Formulare il problema di soddisfare gli ordini in tabella acquistando il minimo numero di lastre.
2. Il titolare della vetreria osserva che per soddisfare l'ordine è sufficiente acquistare 12 lastre (8×1) e tagliarle ricavando da ciascuna lastra un vetro A, un vetro B e due vetri C. Facendo uso delle condizioni di ortogonalità, confermare o confutare l'ottimalità di questa soluzione.

Esercizio 2

State applicando l'algoritmo di Floyd-Warshall ad un digrafo con 5 nodi (A, B, C, D, E). Alla fine del passo 1 (k = A) ottenete le matrici (a sinistra i costi dei percorsi, a destra i predecessori):

passo 1	A	B	C	D	E
A	0	2	+∞	2	–3
B	6	0	2	4	–1
C	+∞	5	0	–3	5
D	–2	0	+∞	0	–5
E	4	6	2	6	0

passo 1	A	B	C	D	E
A	A	A	C	A	A
B	B	B	B	B	B
C	A	C	C	C	C
D	D	A	C	D	A
E	E	A	E	A	E

1. Effettuare i passi 2, 3, 4 e 5 dell'algoritmo, aggiornando entrambe le matrici ad ogni passo dell'esecuzione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.
2. Fissare gli elementi in posizione (C, D) nelle due matrici uguali a +∞ e D. Ripetere i passi 2, 3, 4 e 5 dell'algoritmo. In presenza di cicli negativi arrestare l'algoritmo e mostrare un ciclo negativo.
3. Se l'algoritmo completa il passo 5 senza individuare cicli di peso negativo, mostrare i cammini orientati minimi C → D e C → A per le matrici ottime ottenute ai punti 1 e 2.

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare (1) il problema di flusso di costo minimo su una rete con n nodi e m archi; (2) la sua formulazione in forma standard min{c^T x:Ax=b;x≥0}, spiegando le particolarità di A e b. Illustrare le definizioni di (3) ciclo e (4) albero ricoprente nel grafo sottostante la rete. Dimostrare: (5) che se m≥n la matrice dei coefficienti A non può avere rango n; (6) che se la rete è connessa gli archi di un albero ricoprente la rete sono associati a una base di A; (7) che una base di A non può contenere gli archi di un ciclo del grafo sottostante la rete.

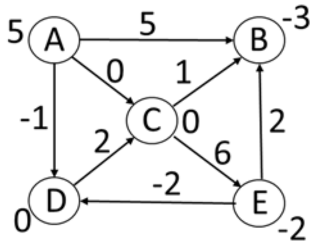
D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2017

Nome:	O	**Orale 23 giugno 2017 ore 9:00 aula N14**
Cognome:	O	**Orale 13 luglio 2017 ore 14:00 aula N14**
Matricola:		

Esercizio 1

È data la rete di flusso in figura, con i costi degli archi e le forniture dei nodi. Partendo dalla base (A,D),(D,C),(C,E),(A,B) e utilizzando la fase 2 del simplesso su rete, trovare una soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo sulla rete data.



Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 8 nodi s,1,2,3,4,5,6,p.
Per ogni arco sono dati il valore della sua capacità massima e un flusso iniziale. In particolare, s è il nodo sorgente e p è il nodo pozzo.
1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson. 2. Individuare un taglio di capacità minima tra i nodi s e p. Evidenziare il taglio ottimo trovato.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo e il nuovo taglio di capacità minima se:
a. la nuova capacità dell'arco (1,2) è uguale a 8
b. la nuova capacità dell'arco (1,2) è uguale a 8 e dell'arco (1,4) è uguale a 6
c. la nuova capacità dell'arco (1,2) è uguale a 8 e dell'arco (4,5) è uguale a 1

Archi	s,1	s,3	1,2	2,1	2,3	1,4	2,5	3,5	3,6	6,5	4,5	4,p	5,p	6,p
Flussi	2	1	1	1	0	2	0	1	0	0	1	1	2	0
Capacità	10	5	2	1	3	3	4	8	6	2	4	10	7	3

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) percorso e (2) cammino e in cosa differiscono dato un digrafo con pesi sugli archi qualsiasi. (3) Dimostrare che la soluzione ottima dell'algoritmo di Floyd-Warshall rispetta sempre le condizioni di ottimalità sui percorsi orientati di costo minimo in un digrafo con pesi qualsiasi. (4) Illustrare il funzionamento dell'algoritmo di Floyd-Warshall e (5) dimostrarne la complessità computazionale.