Fondamenti di Automatica

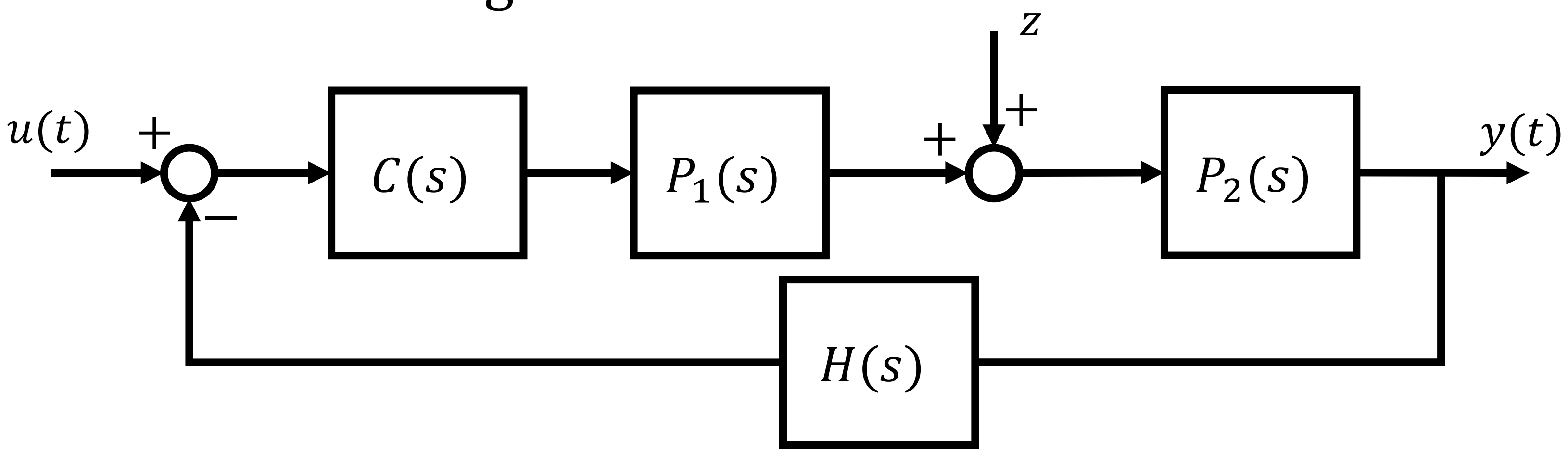
«Correzione Esonero 23/05/2019»
Compito A

Dario Masucci

28/05/2019

Traccia d'esame (Esercizio 1 - Compito A)

Dato il sistema di controllo in figura



In cui: $C(s) = \dfrac{K_c}{s}$, $\quad P_1(s) = \dfrac{s+2}{s+9}$, $\quad P_2(s) = \dfrac{3}{s}$, $\quad H(s) = 0{,}25$

Determinare:

1. Per quali valori di **Kc** il sistema risulta stabile a ciclo chiuso
2. Il tipo di sistema di controllo
3. Astatismo rispetto al disturbo costante **z**
4. L'uscita permanente $\mathbf{y_p(t)}$ con $\boldsymbol{u(t) = 7\delta_{-3}}$ e $\boldsymbol{z(t) = 0}$
5. L'uscita permanente $\mathbf{y_z(t)}$ con $\boldsymbol{u(t) = 0}$ e $\boldsymbol{z(t) = 2\delta_{-1}(t)}$

Domanda 1 – Determinare per quali valori di **Kc** il sistema risulta stabile a ciclo chiuso

a Si calcola la Funzione di Trasferimento a ciclo chiuso del sistema:

$$W(s) = \frac{C(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$$

$$W(s) = \frac{\frac{K_c}{s} \cdot \frac{s+2}{s+9} \cdot \frac{3}{s}}{1 + \frac{K_c}{s} \cdot \frac{s+2}{s+9} \cdot \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3K_c(s+2)}{s^2(s+9)}}{\frac{4s^2(s+9) + 3K_c(s+2)}{4s^2(s+9)}} = \frac{12K_c(s+2)}{4s^2(s+9) + 3K_c(s+2)}$$

b Si considera l'equazione caratteristica $Q(s)$ e si applica ad essa il criterio di Routh

$$Q(s) = 4s^2(s+9) + 3K_c(s+2) =$$
$$= 4s^3 + 36s^2 + 3K_c s + 6K_c$$

$$\longrightarrow \qquad \begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 3K_c \\ 2 & 36 & 6K_c \\ 1 & b_{n-2} & b_{n-4} \\ 0 & b_{n-3} & \end{array}$$

Si calcolano i coefficienti della tabella di Routh

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{36 * 3K_c - 4 * 6K_c}{36} = \frac{108K_c - 24K_c}{36} = \frac{84K_c}{36} = \frac{7}{3}K_c$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} = \frac{36 * 0 - 4 * 0}{36} = 0 = a_{n-4}$$

$$b_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}} = \frac{\frac{7}{3}K_c * 6K_c - 36 * 0}{\frac{7}{3}K_c} = 6K_c = a_{n-3}$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 4 & 3K_c \\
2 & 36 & 6K_c \\
1 & 7K_c/3 & 0 \\
0 & 6K_c &
\end{array}$$

Ad ogni variazione di segno dei coefficienti nella prima colonna della tabella di Routh corrisponde ad un polo a parte reale positiva che renderebbe instabile il sistema.
Si determinano quindi i valori di K_c per cui i coefficienti della prima colonna siano positivi.

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 3K_c \\ 2 & 36 & 6K_c \\ 1 & 7K_c/3 & \\ 0 & 6K_c & \end{array} \qquad \begin{cases} \frac{7}{3}K_c > 0 \\ 6K_c > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_c > 0 \\ K_c > 0 \end{cases} \rightarrow \; da\;cui \;\; \boldsymbol{K_c > 0}$$

Domanda 2 – Determinare il **tipo di sistema** di controllo

Per definire il tipo di sistema di controllo si considerano i poli nell'origine presenti nelle trasferenze sulla catena diretta. Si riscontrano un integratore in $C(s)$ e un integratore in $P_2(s)$, quindi il sistema è di **tipo 2**.

Domanda 3 – Determinare se il sistema è **astatico** rispetto al disturbo costante **z**

Si deve valutare se il sistema presenta almeno un polo nell'origine a monte del punto in cui interviene il disturbo costante.

Poiché si riscontra un integratore presente in $C(s)$, il disturbo costante viene completamente reiettato. Il sistema risulta quindi **astatico** rispetto al disturbo costante.

Domanda 4 – Determinare l'uscita permanente $\boldsymbol{y_p(t)}$ con $u(t) = 7d_{-3}(t)$ e $z(t) = 0$

Si considerano:

- L'indice relativo all'ingresso canonico a rampa del secondo ordine $i = 2$
- L'indice relativo al tipo del sistema $h = 2$

Poiché $h = i = 2 > 0$ l'uscita permanente si calcola come $\boldsymbol{y_p(t) = u(t)K_d - e_r|u(t)|}$

In cui: $\boldsymbol{e_r} = \frac{K_d^2}{K_G} = \boldsymbol{costante}$ con $K_d = \frac{1}{H(s)} = 4$ e $K_G = \lim_{s \to 0} s^h C(s) P_1(s) P_2(s)$

Domanda 5 – Determinare l'uscita permanente $\boldsymbol{y_z(t)}$ con $u(t) = 0$ e $z(t) = 2\delta_{-1}(t)$

Per valutare l'effetto del disturbo $z(t) = 2\delta_{-1}(t)$ sul sistema, e quindi per calcolare l'uscita permanente del disturbo $y_z(t)$ si considerano:

- L'indice relativo al disturbo a gradino $i = 0$
- L'indice relativo al numero di integratori a monte del disturbo $h' = 1$

Poiché $h' > i$ allora l'uscita permanente del disturbo è $\boldsymbol{y_z(t) = 0}$

Si può verificare sostituendo i valori nell'espressione dell'uscita

$$y_z(t) = \lim_{s \to 0} sW_z(s)Z(s)$$

In cui:

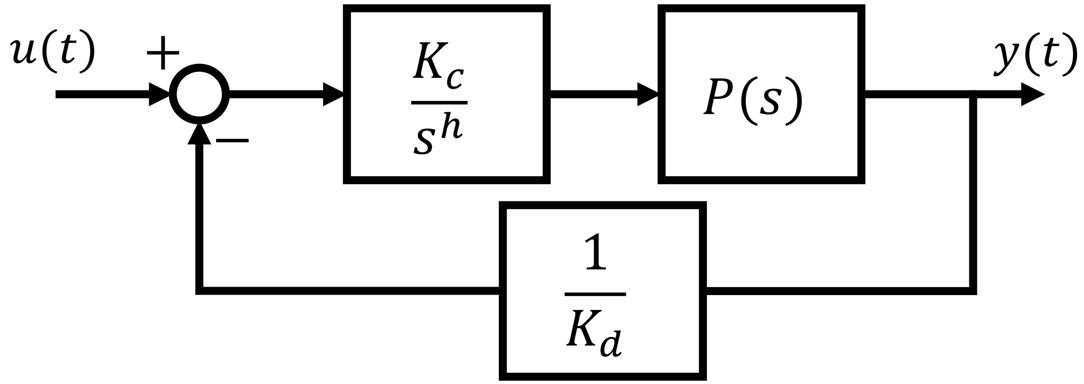
- $W_z(s)$ è la funzione di trasferimento a ciclo chiuso del disturbo $\frac{P_2(s)}{1+C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$
- $Z(s)$ è la trasformata di Laplace del disturbo $\frac{2}{s}$

Traccia d'esame (Esercizio 2 - Compito A)

Sia dato un processo $P(s)$ descrivibile mediante la funzione di trasferimento che segue

$$P(s) = \frac{2\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{20^2}+\frac{0{,}4s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura determinando h e K_c, e considerando K_d =4 in modo tale che l'errore per l'ingresso a rampa $u(t) = 5\delta_{-2}(t)$ sia minore o uguale a 4



Scelto il valore minimo di $\boldsymbol{K_c}$ compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di **Bode** e di **Nyquist** della funzione a ciclo aperto $F(s)$ e determinare su questi la **pulsazione di attraversamento** e i **margini di stabilità**.

1 Si riscrive la trasferenza del processo $P(s)$

$$P(s) = \frac{2\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{20^2}+\frac{0,4s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)}$$

2 E' richiesto da specifica che l'errore a regime per un ingresso a rampa sia minore o uguale ad un valore costante, in particolare $e|u(t)| \leq 4$.

Allora il sistema composto da $C(s)$ e $P(s)$ deve essere di **tipo 1** e quindi avere esattamente un polo nell'origine.

Poiché in $P(s)$ non è presente alcun polo, allora deve necessariamente essere presente nel controllore, ossia in $C(s)$.

Possiamo scrivere $\boldsymbol{h = 1}$

3 Il guadagno K_c del controllore $C(s)$ si ottiene dall'espressione dell'errore tenendo in considerazione che

$$e|u(t)| \leq 4 \quad \text{in cui} \quad |u(t)| = 5$$

Dalla tabella riguardante l'espressione dell'errore, definito in base al tipo di sistema e alla natura dell'ingresso, si ottiene

	0	1	2
$\delta_{-1}(t)$	$\dfrac{{k_d}^2}{k_d + K_G}$	0	0
$t\delta_{-1}(t)$	∞	$\dfrac{{k_d}^2}{K_G}$	0
$\dfrac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$	∞	∞	$\dfrac{{k_d}^2}{K_G}$

$$e = \frac{K_d^2}{K_G}$$ in cui $K_d = 4$ è un dato del problema

e K_G è il guadagno statico del sistema

K_G si ottiene come $\quad K_G = \lim_{s \to 0} s^h C(s)P(s) = K_c \cdot 2$

Quindi si può scrivere $\quad e|u(t)| = \dfrac{16}{K_c \cdot 2} \cdot 5 \leq 4$

da cui $\quad \boldsymbol{K_c \geq 10}$

4 Si calcola la funzione di trasferimento a ciclo aperto $F(s)$ del sistema come

$$F(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot P(s) \cdot \frac{1}{K_d} = \frac{10}{s} \cdot \frac{2\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{20^2}+\frac{0{,}4s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{5\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}{s\left(\frac{s^2}{20^2}+\frac{0,4s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)}}$$

5 Si individuano i fattori che compongono la funzione di trasferimento $F(s)$

$\boldsymbol{G_0}$ → termine costante 5

$\boldsymbol{G_{1D}}$ → polo nell'origine $\frac{1}{s}$

$\boldsymbol{G_{2N}}$ → zero reale $\begin{cases} \frac{s}{2}+1 \\ \frac{s}{10}+1 \end{cases}$

$\boldsymbol{G_{2D}}$ → polo reale $\frac{1}{\frac{s}{80}+1}$

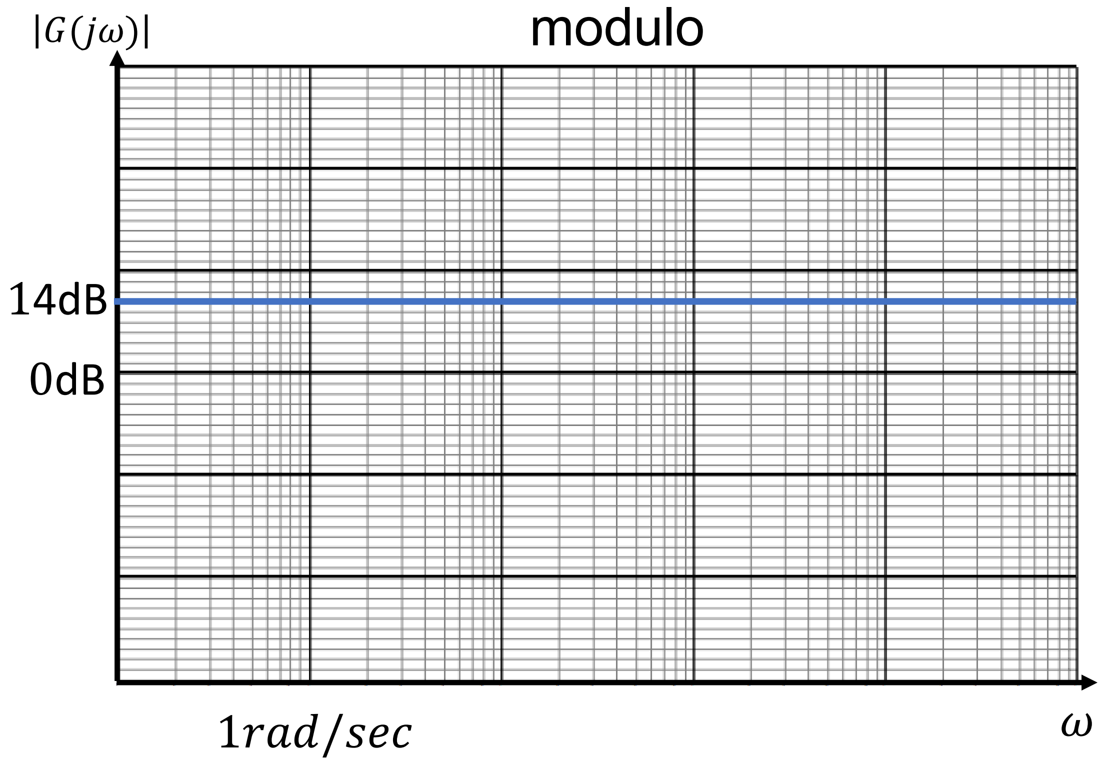
$\boldsymbol{G_{3D}}$ → poli complessi $\frac{1}{\frac{s^2}{20^2}+\frac{0{,}4s}{20}+1}$

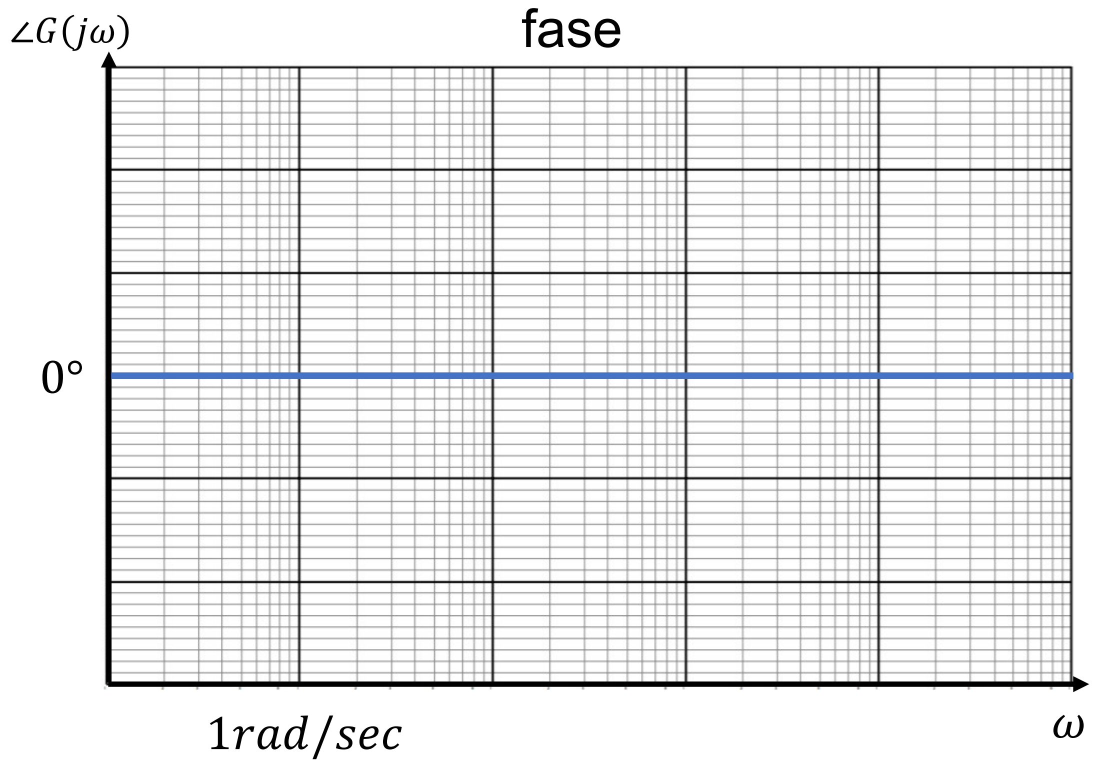
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

a $G_0 \rightarrow$ termine costante 5

Modulo $\rightarrow 20\log_{10} 5 \approx 14\ dB$

Fase $\rightarrow 0°$



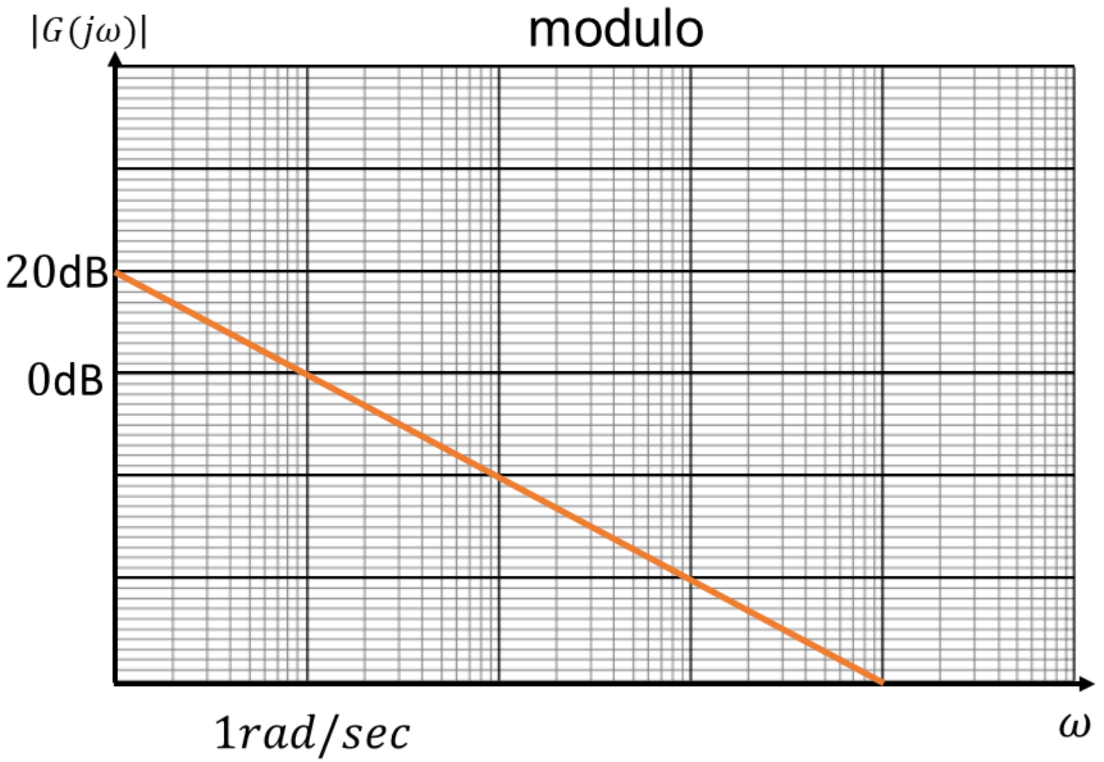


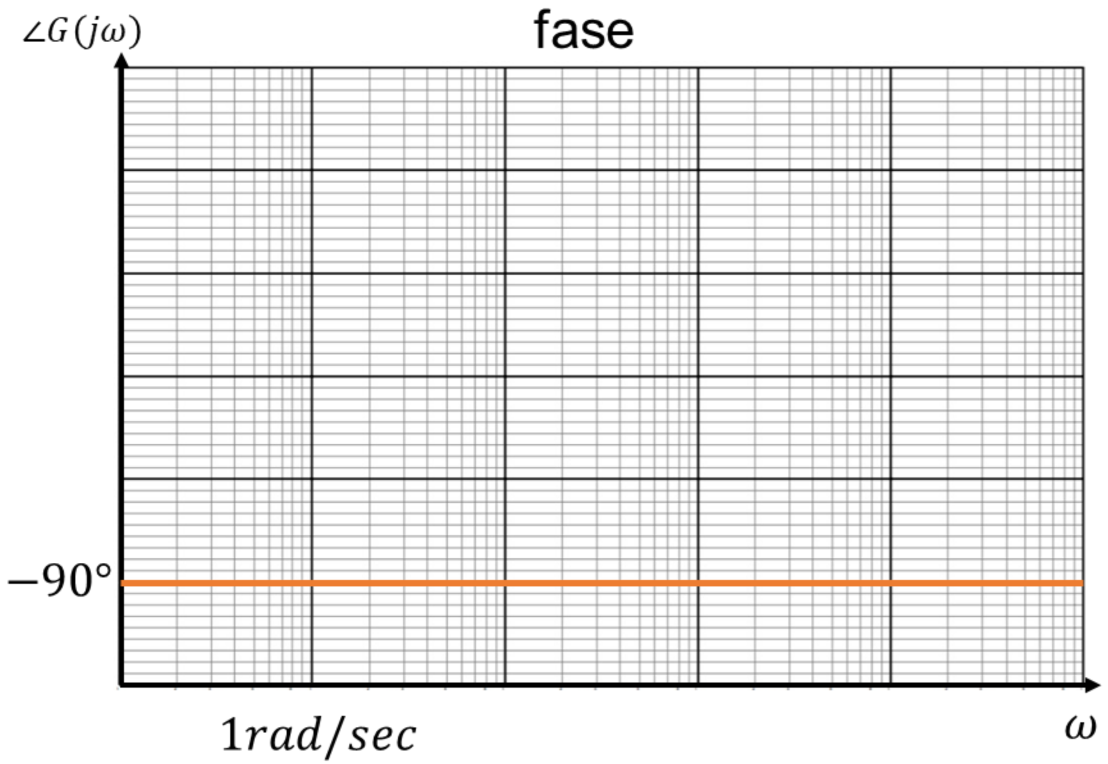
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

b G_{1D} → polo nell'origine $\dfrac{1}{s}$

Modulo → $-20\ dB/dec$
$0\ dB\ in\ 1\ rad/\sec$

Fase → $-90°$



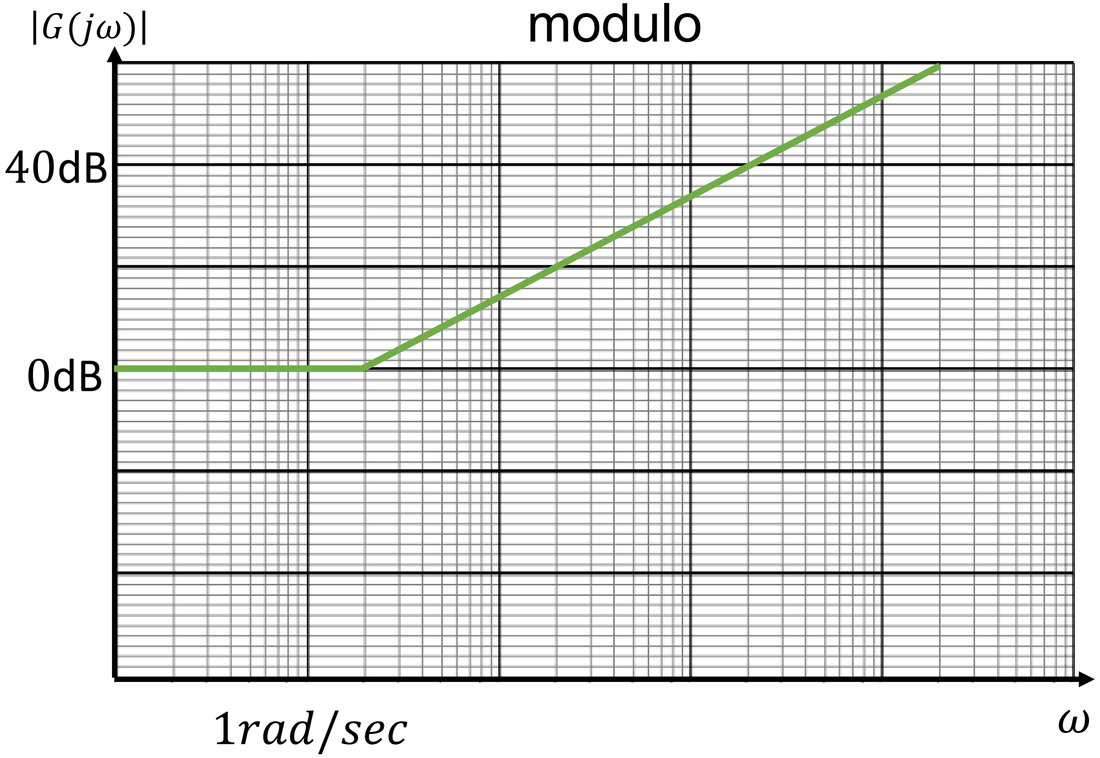


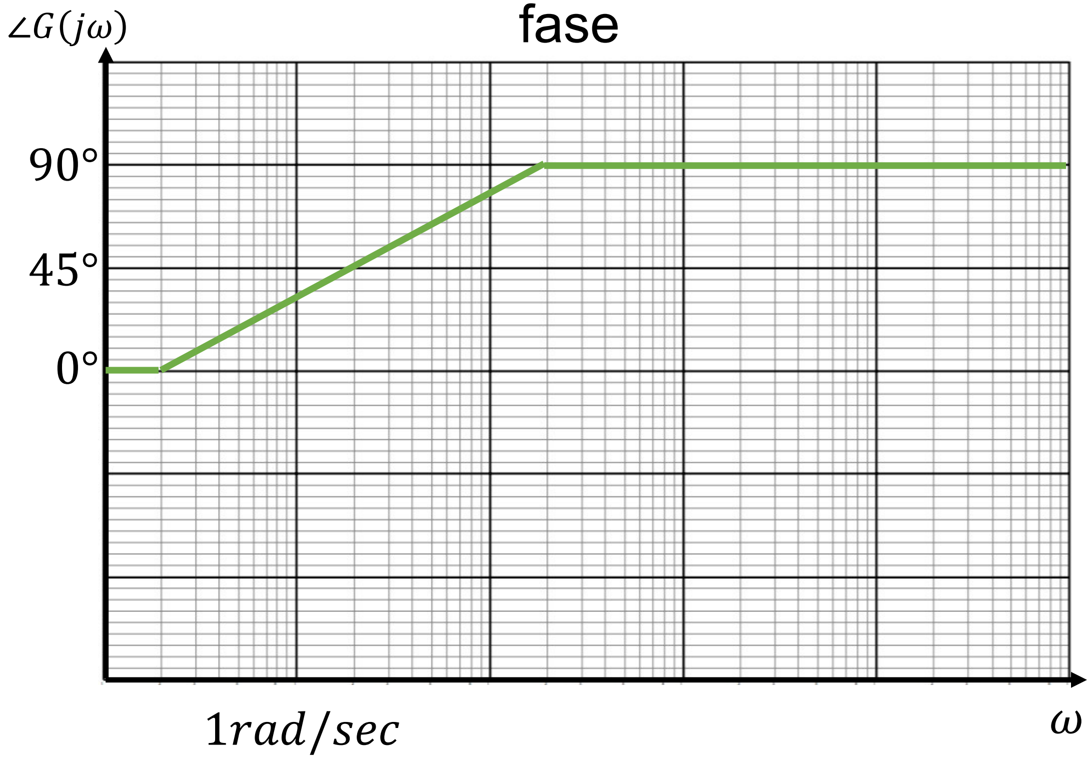
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

c G_{2N} → zero reale $\frac{s}{2}+1$

Modulo → $\begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 2 \\ +20\ \ dB/dec \text{ per } \omega \geq 2 \end{cases}$

Fase → $\begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 0{,}2 \\ +45°/dec \text{ per } 0{,}2 \leq \omega \leq 20 \\ +90° \text{ per } \omega > 20 \end{cases}$



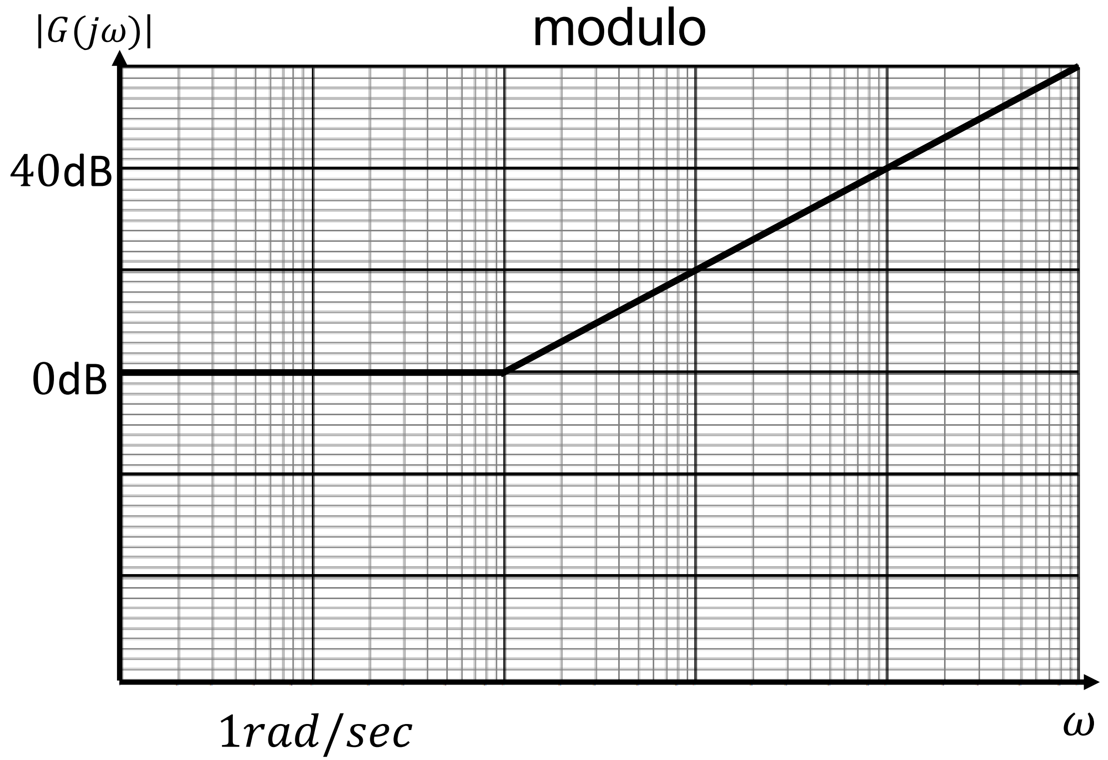


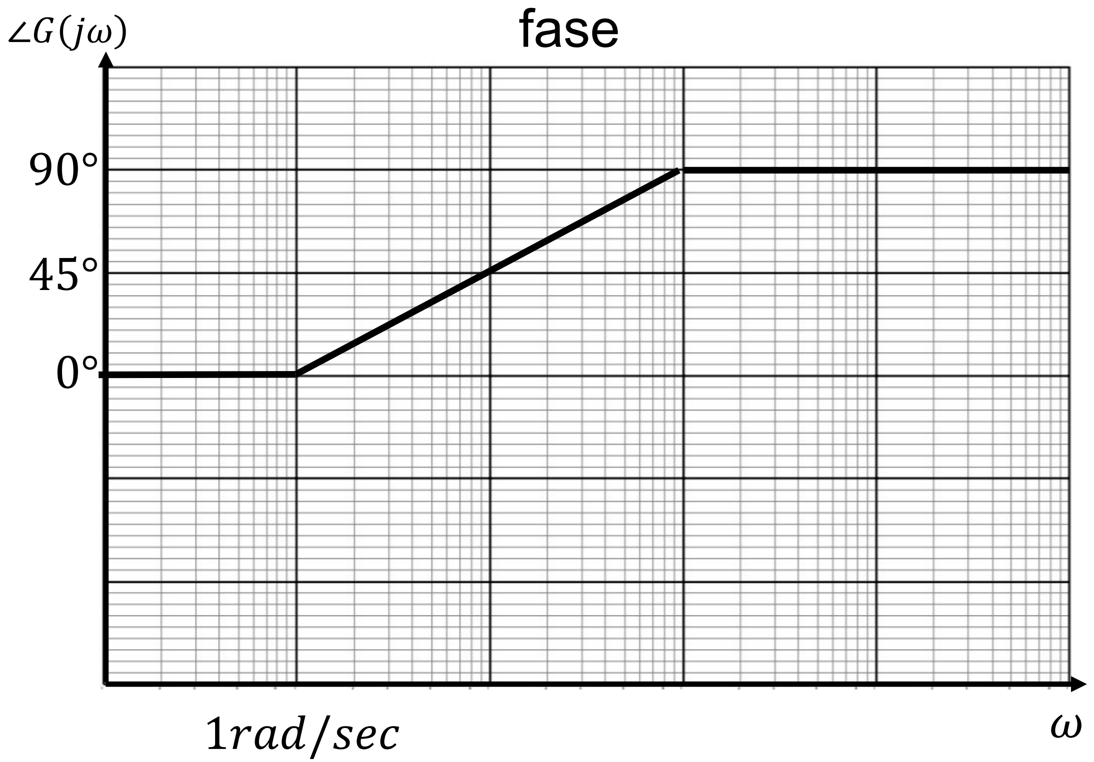
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

d G_{2N} → zero reale $\dfrac{s}{10}+1$

Modulo → $\begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 10 \\ +20\ \ dB/dec \text{ per } \omega \geq 10 \end{cases}$

Fase → $\begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 1 \\ +45°/dec \text{ per } 1 \leq \omega \leq 100 \\ +90° \text{ per } \omega > 100 \end{cases}$



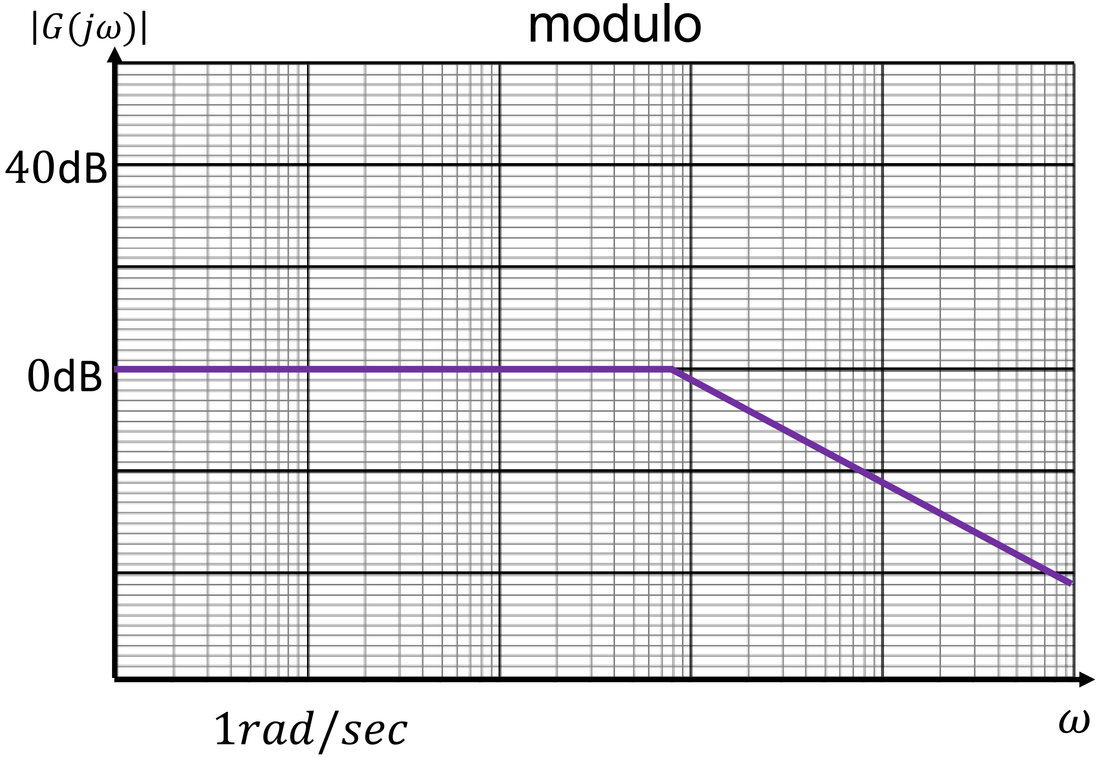


6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

e G_{2D} → polo reale $\dfrac{1}{\frac{s}{80}+1}$

Modulo → $\begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 80 \\ -20\ \ dB/dec \ \text{ per } \omega \geq 80 \end{cases}$

Fase → $\begin{cases} 0° \ \text{ per } \ \omega < 8 \\ -45°/dec \ \text{ per } 8 \leq \omega \leq 800 \\ -90° \text{ per } \omega > 800 \end{cases}$

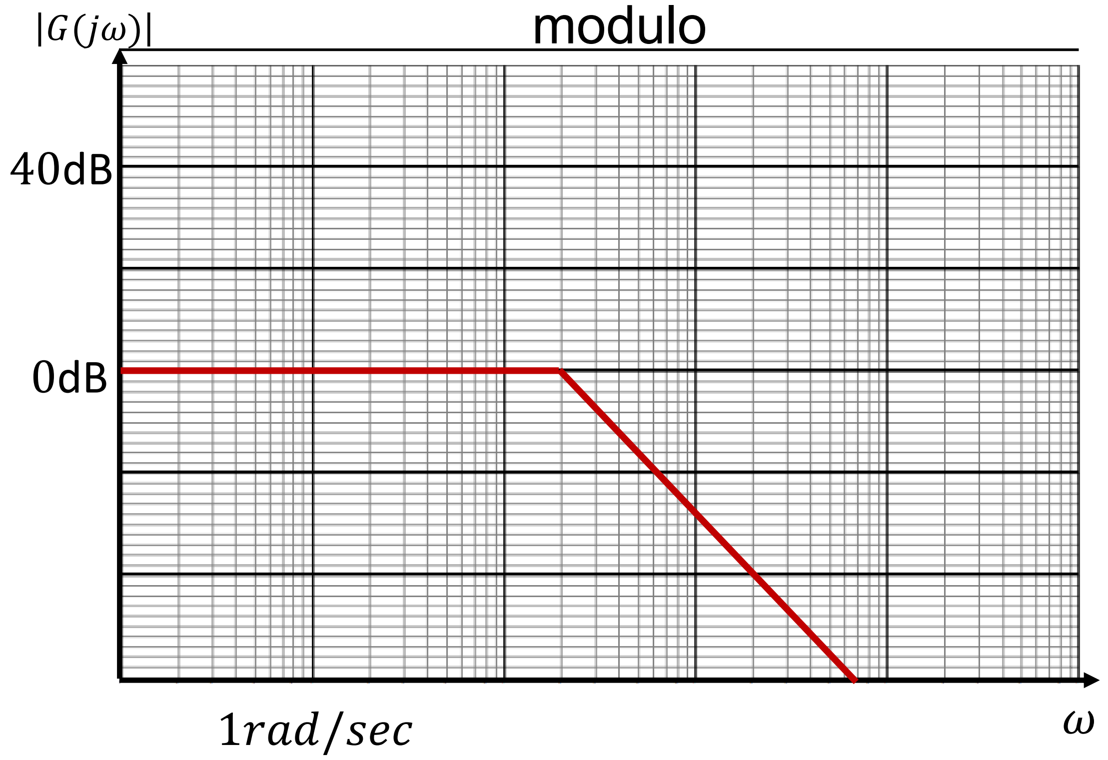


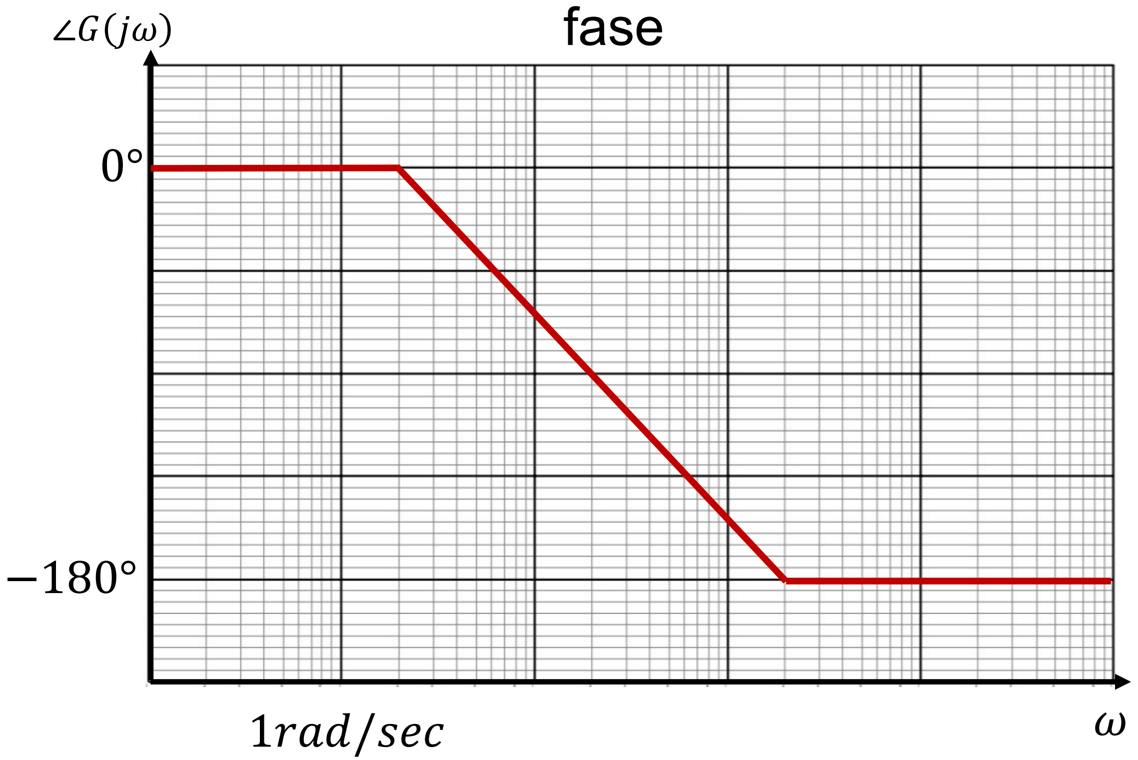
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

f G_{3D} → poli complessi $\dfrac{1}{\dfrac{s^2}{20^2}+\dfrac{0{,}4s}{20}+1}$

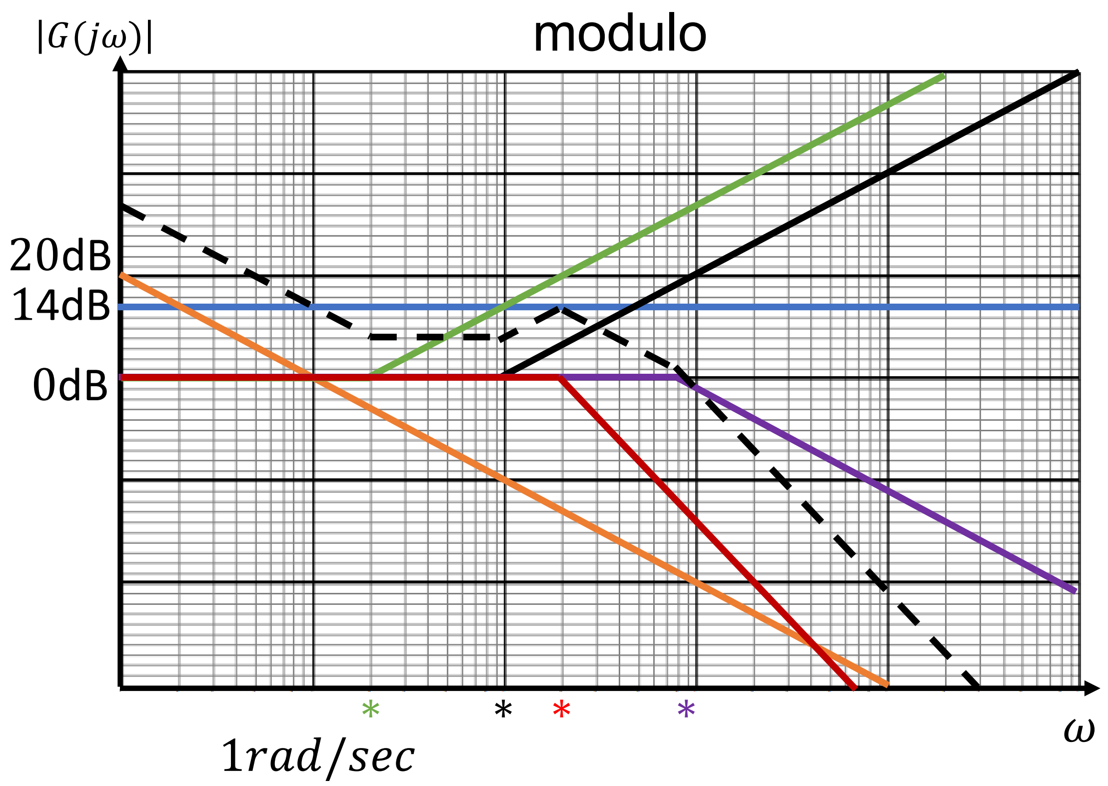
Modulo → $\begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 20 \\ -40\ \ dB/dec\ \text{ per } \omega \geq 20 \end{cases}$

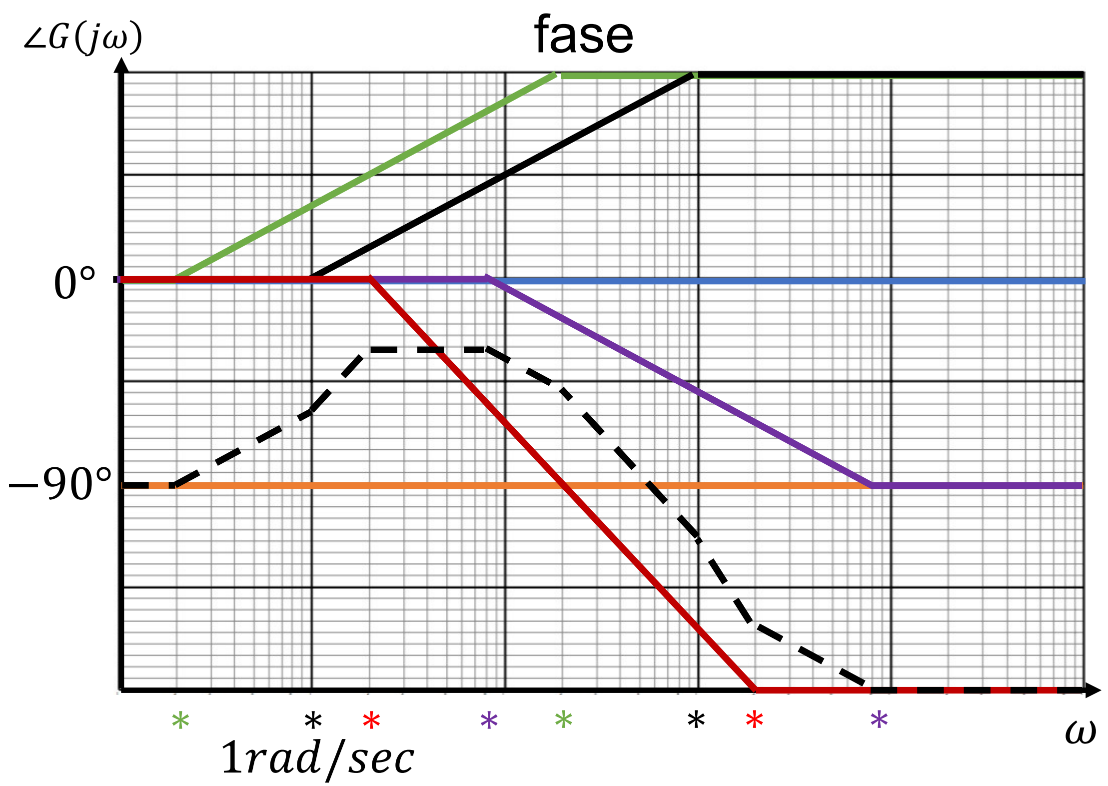
Fase → $\begin{cases} 0° \ \text{ per }\ \omega < 2 \\ -90°/dec\ \text{ per } 2 \leq \omega \leq 200 \\ -180° \text{ per } \omega > 200 \end{cases}$



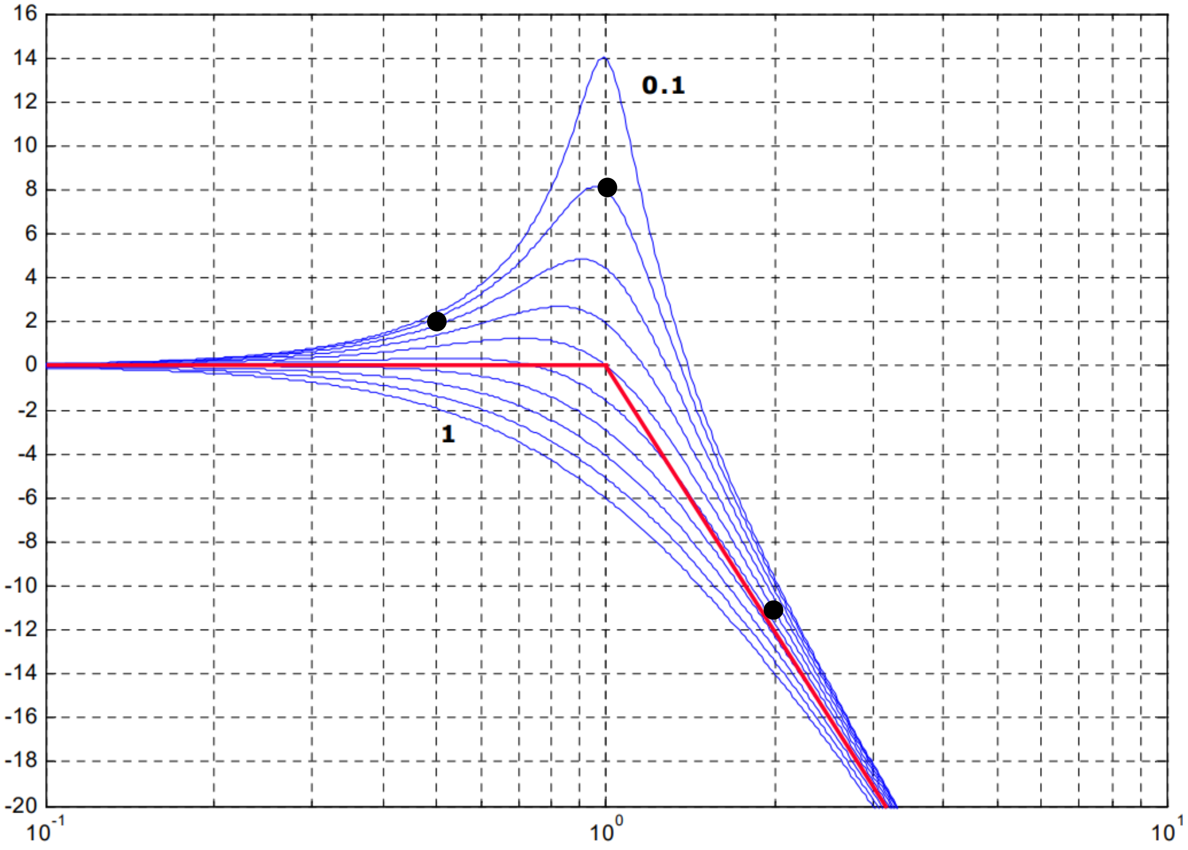


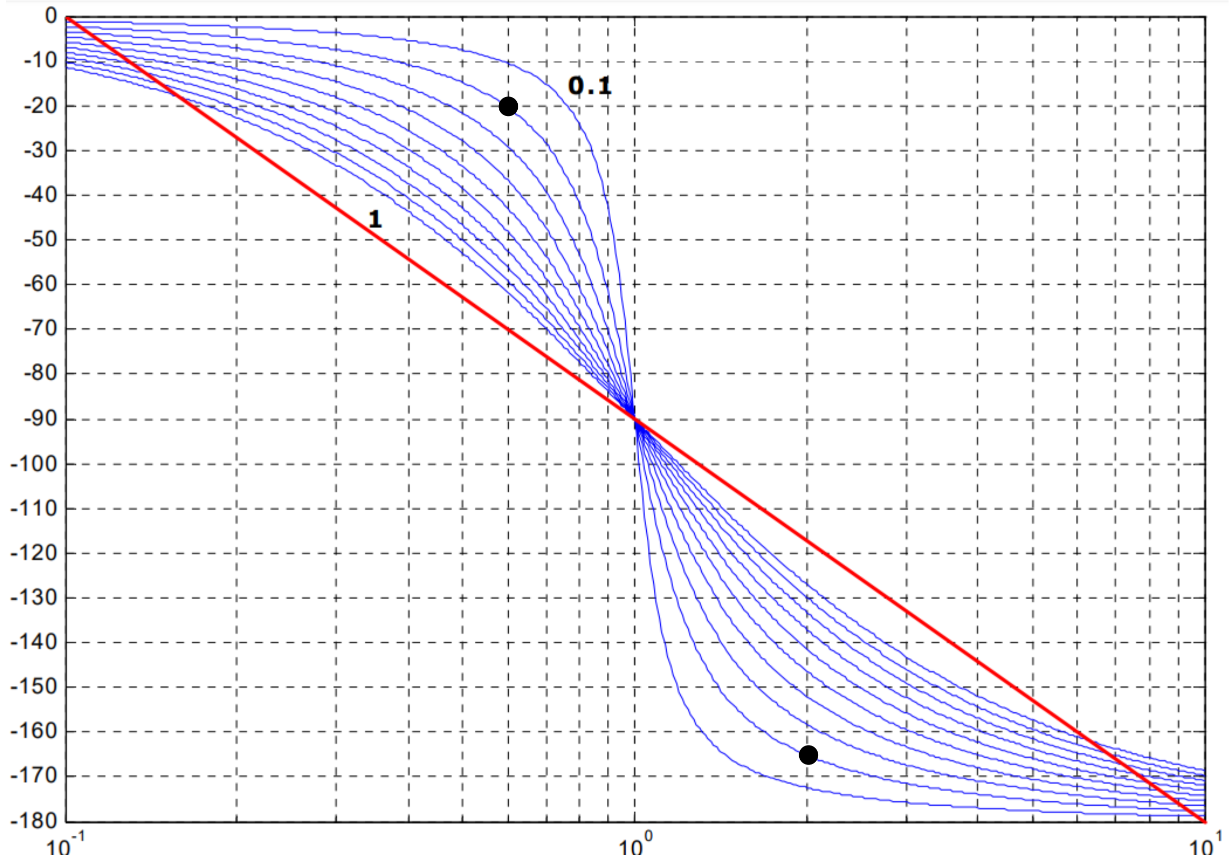
7 Si sommano i contributi di ogni termine per ottenere il tracciamento completo





8 Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio con $\zeta = 0{,}2$





$\omega = 10 \rightarrow +2dB$
$\omega = 20 \rightarrow +8dB$
$\omega = 40 \rightarrow +1dB$

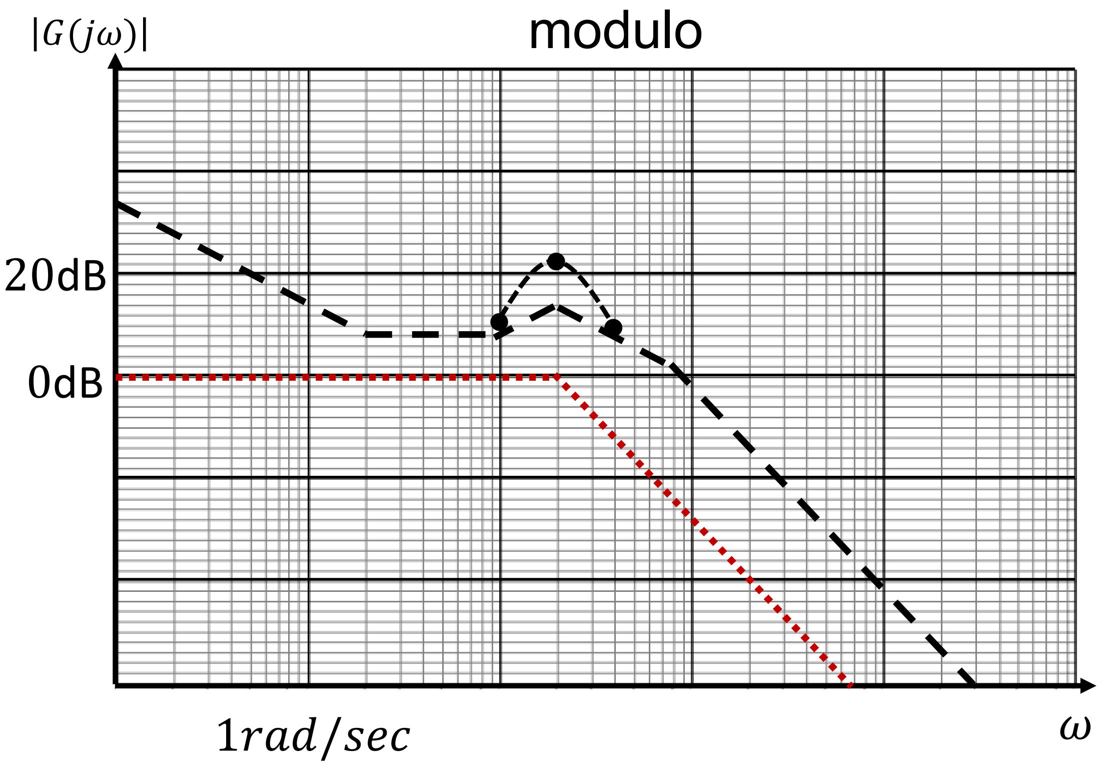
Calcolo delle posizioni su ascisse:

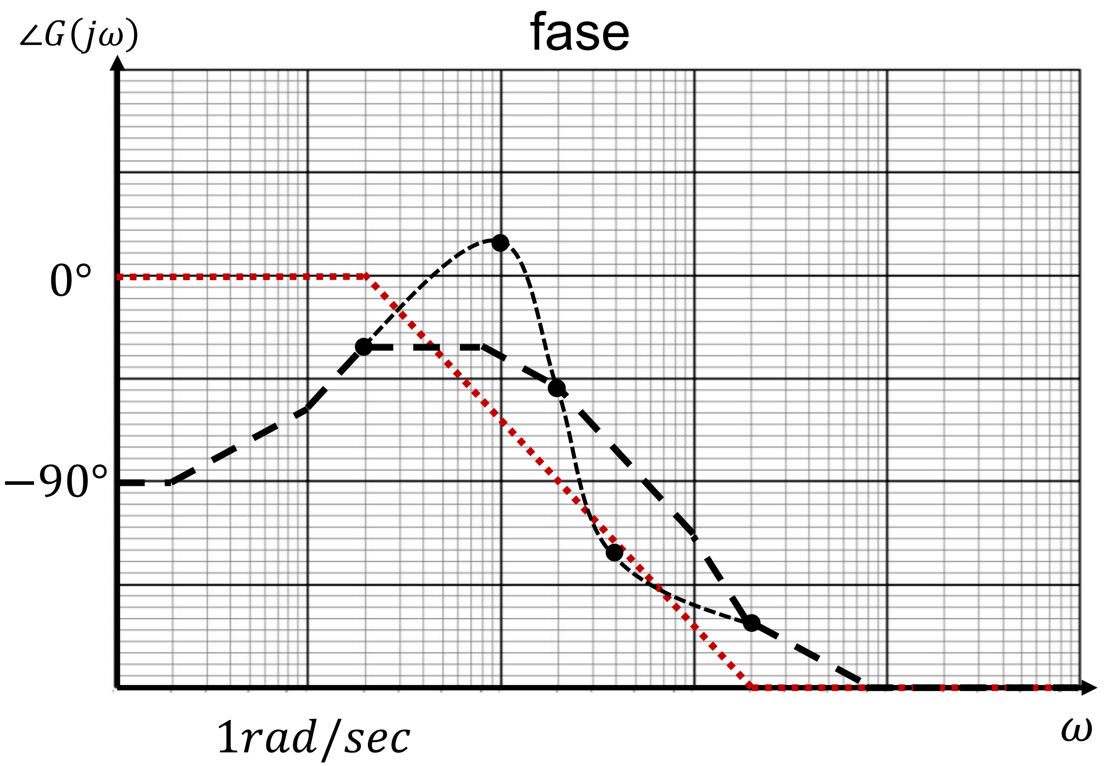
$0.5 : 1 = x_1 : 20 \Rightarrow x_1 = 0.5 * 20 = 10$

$2 : 1 = x_2 : 20 \Rightarrow x_2 = 2 * 20 = 40$

$\omega = 10 \rightarrow +50°$
$\omega = 20 \rightarrow 0°$
$\omega = 40 \rightarrow -45°$

8 Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio con $\zeta = 0{,}2$





$\omega = 10 \rightarrow +2dB$
$\omega = 20 \rightarrow +8dB$ ⟵
$\omega = 40 \rightarrow +1dB$

Calcolo delle posizioni su ascisse:

$0.5 : 1 = x_1 : 20 \Rightarrow x_1 = 0.5 * 20 = 10$ ⟶

$2 : 1 = x_2 : 20 \Rightarrow x_2 = 2 * 20 = 40$

$\omega = 10 \rightarrow +50°$
$\omega = 20 \rightarrow 0°$
$\omega = 40 \rightarrow -45°$

9 Si traccia il diagramma di Nyquist osservando l'andamento delle fasi

Diagramma di Bode

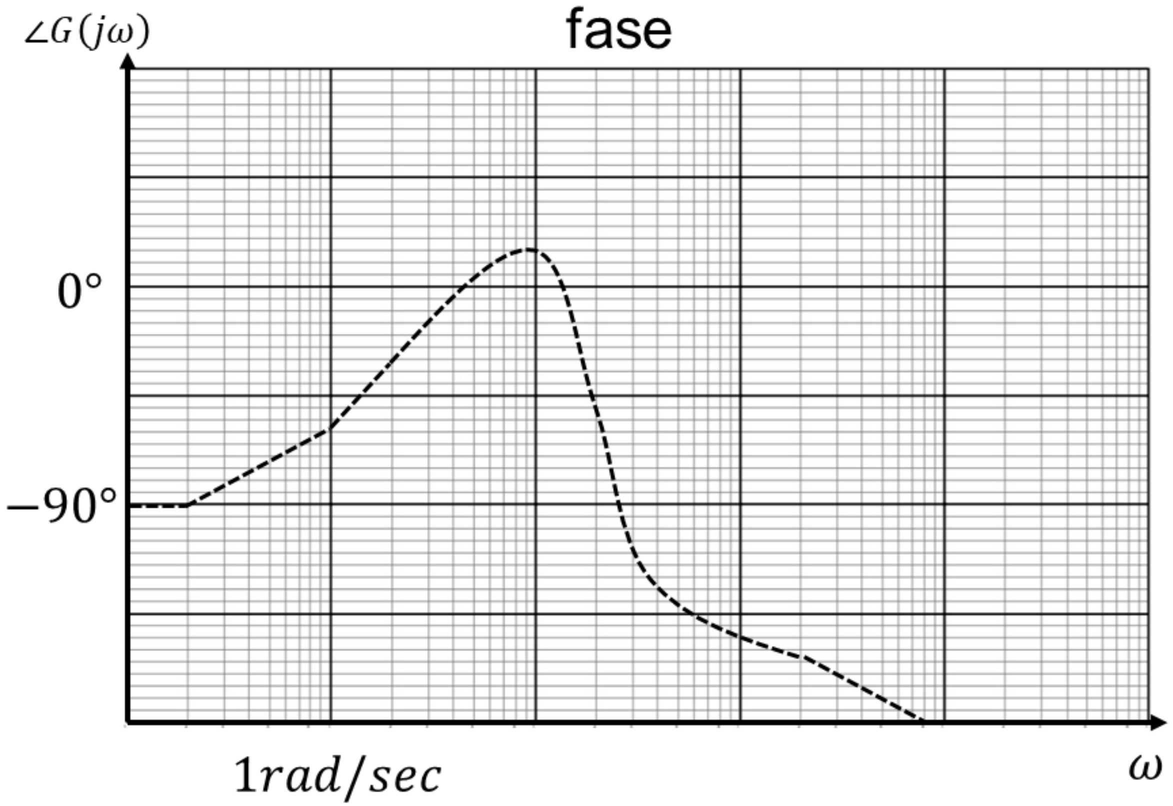
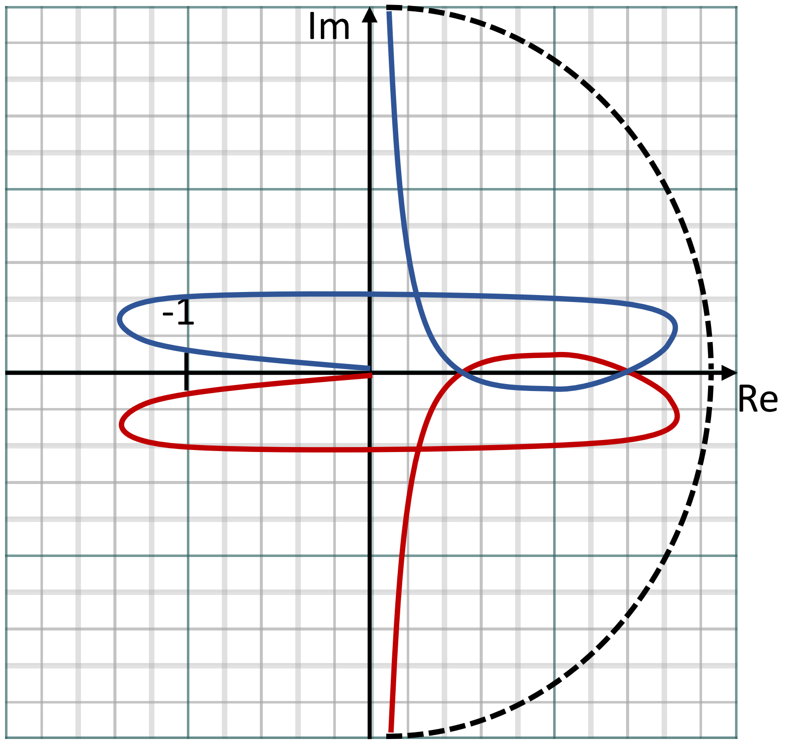
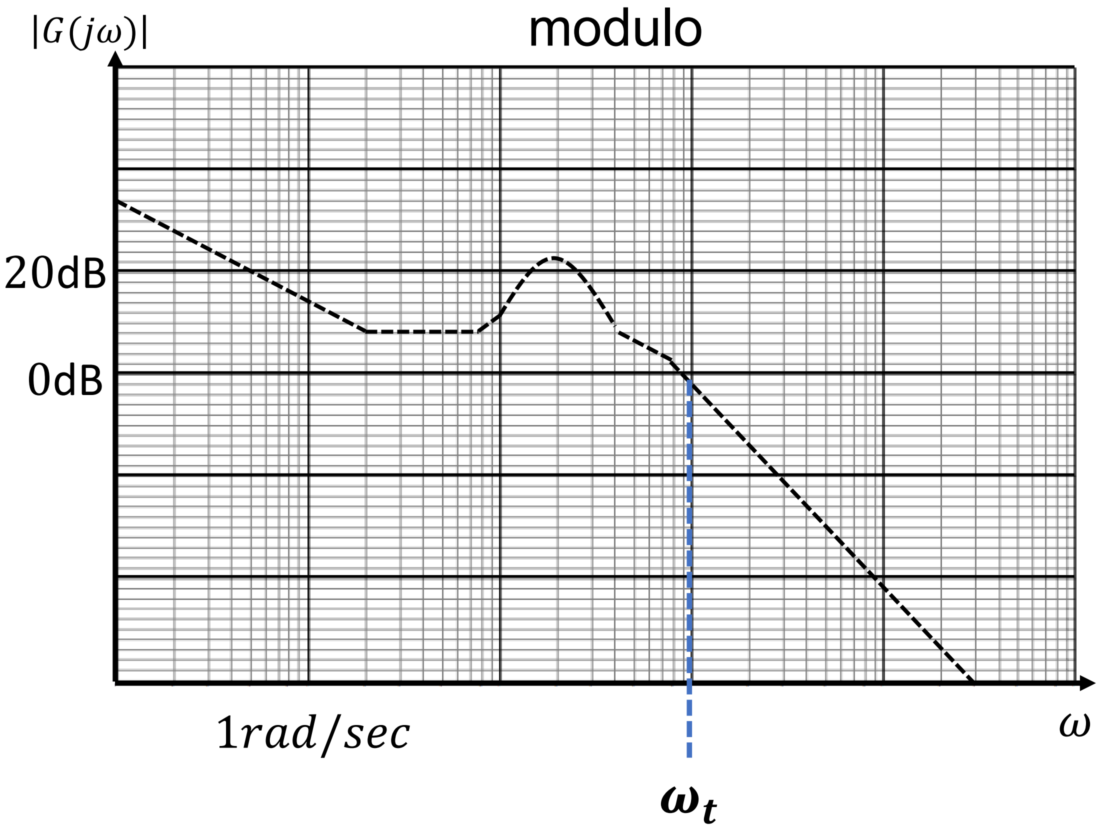
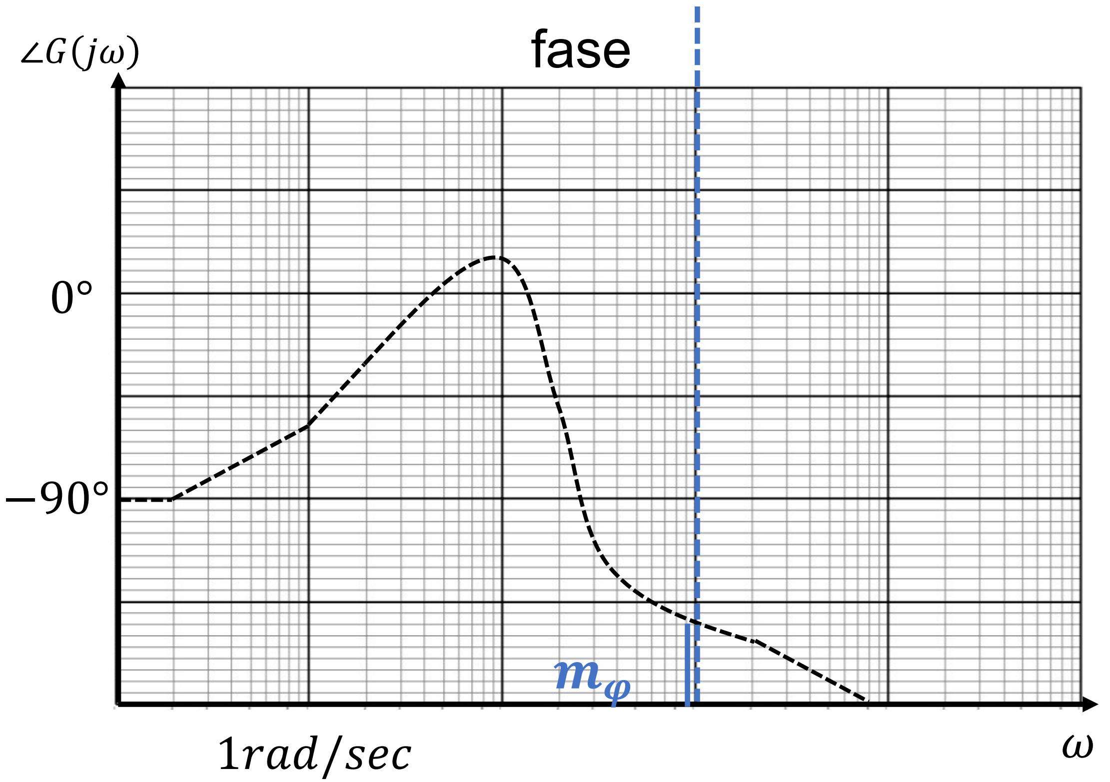


Diagramma di Nyquist



10 Si individuano: ω_t e il m_φ , $\omega_{-\pi}$ e il m_g





$\omega_t \cong 100\ rad/sec$ e $m_\varphi \approx 40°$

$\omega_{-\pi}$ non è calcolabile quindi $m_g = \infty$