Algoritmi e Strutture di Dati

Code di priorità
(Heap e heap_sort)

m.patrignani

Nota di copyright

Sommario

- Il tipo astratto di dato coda di priorità
- La struttura di dati heap
  - procedura `MAX_HEAPIFY`
  - procedura `BUILD_MAX_HEAP`
- Coda di priorità realizzata con un heap
- Metodo di ordinamento `HEAP_SORT`
  - analisi della complessità

Code di priorità

- Una coda di priorità (priority queue) è una collezione di elementi
  - ad ogni elemento è associato un valore di priorità
  - i valori di priorità definiscono un ordinamento
- Operazioni sulle code di priorità
  - l'utente vuole inserire efficientemente nuovi elementi con valori arbitrari di priorità
  - l'utente vuole estrarre efficientemente l'elemento a più alta priorità

Due applicazioni delle code di priorità

- Allocazione ai processi delle risorse condivise
  - gli elementi della coda sono le richieste da parte dei processi di una specifica risorsa
    - per esempio l’accesso all’hard disk o ad una periferica
  - i processi in esecuzione generano nuove richieste con priorità dipendenti dall’utente o dal tipo di operazione richiesta
  - la risorsa è assegnata al processo con più alta priorità
- Simulazione di un sistema complesso guidata dagli eventi
  - gli elementi della coda sono eventi, con associato il tempo in cui si devono verificare
  - gli eventi vengono simulati in ordine temporale
  - la simulazione di un evento può provocare l’inserimento nella coda di altri eventi a distanza di tempo

Coda di priorità di interi

- Domini
  - il dominio di interesse Q di tutte le code di priorità di interi
  - dominio di supporto: l'insieme degli interi Z
  - dominio di supporto: l'insieme dei booleani {`true`, `false`}
- Costanti
  - la coda di priorità vuota
    - `NEW_QUEUE`(): inizializza e ritorna una coda di priorità vuota
- Operazioni

`INSERT`(Q,x): inserisce l'elemento x nella coda Q

`MAXIMUM`(Q): restituisce l'elemento di Q con chiave più grande

`EXTRACT_MAX`(Q): restituisce l'elemento di Q con chiave più grande e lo rimuove da Q

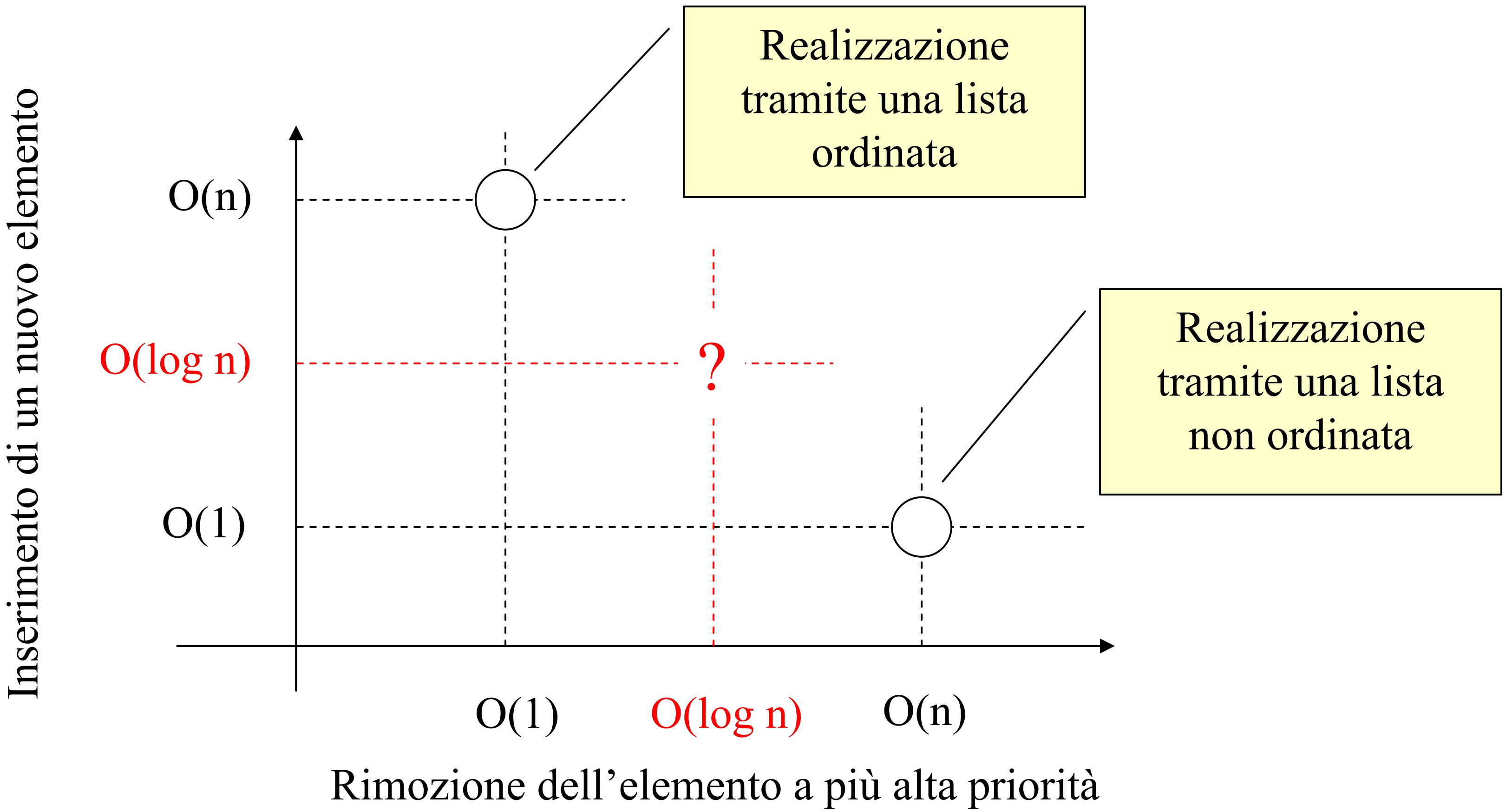
`IS_EMPTY`(Q): riporta `true` se la coda Q è vuota, `false` altrimenti

Realizzazioni inefficienti di code di priorità

- Si potrebbe realizzare una coda di priorità tramite una lista ordinata
  - l'inserimento nella lista di un nuovo elemento avrebbe complessità $\Theta(n)$
  - la rimozione dell'elemento a più alta priorità (il primo della lista) avrebbe complessità $\Theta(1)$
- Si potrebbe realizzare una coda di priorità tramite una lista non ordinata
  - l'inserimento (in testa) di un nuovo elemento avrebbe complessità $\Theta(1)$
  - la ricerca e la rimozione dell'elemento a più alta priorità avrebbe complessità $\Theta(n)$

Sono possibili realizzazioni più efficienti?

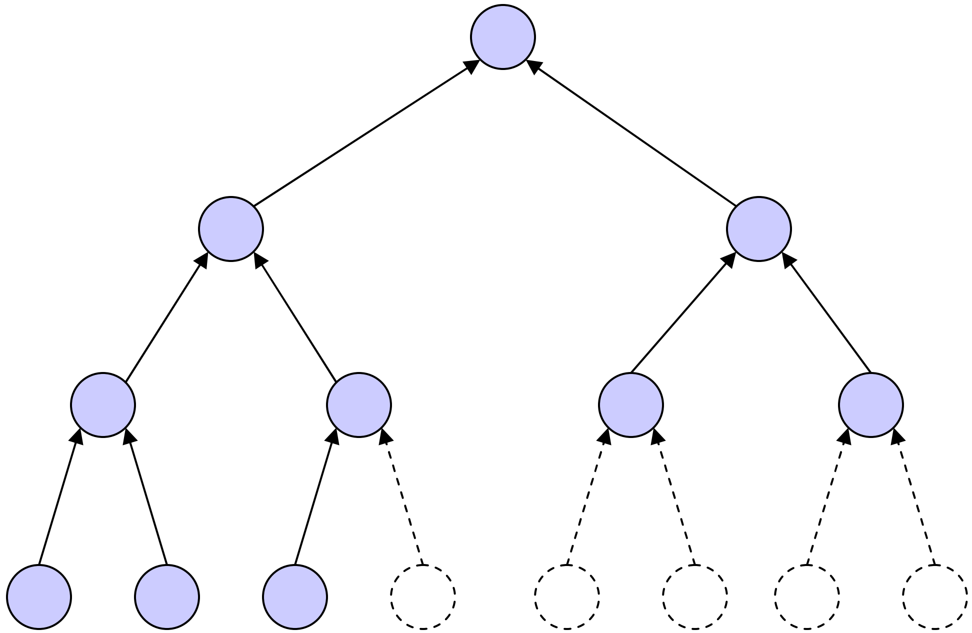
- L'obiettivo è quello di bilanciare i due costi



La struttura dati heap

- Un heap
  - è una struttura dati che può essere utilizzata per realizzare una coda di priorità
  - è uno speciale array i cui valori sono in rapporto con la loro posizione nell'array
  - può essere un max-heap o un min-heap
    - noi vedremo in dettaglio il max-heap

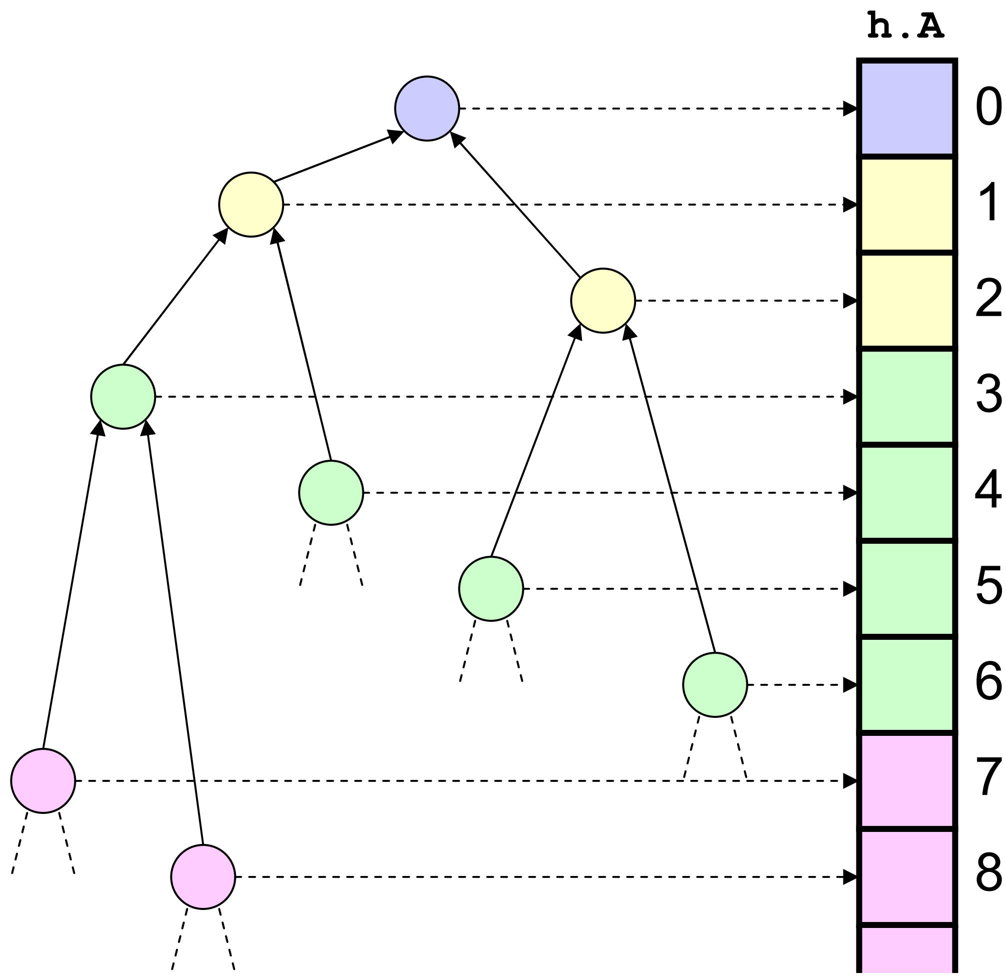
Alberi binari “quasi completi”



- Gli heap rappresentano alberi binari quasi completi
- Un albero binario è *quasi completo* se l’ultimo livello può essere incompleto nella sua parte destra

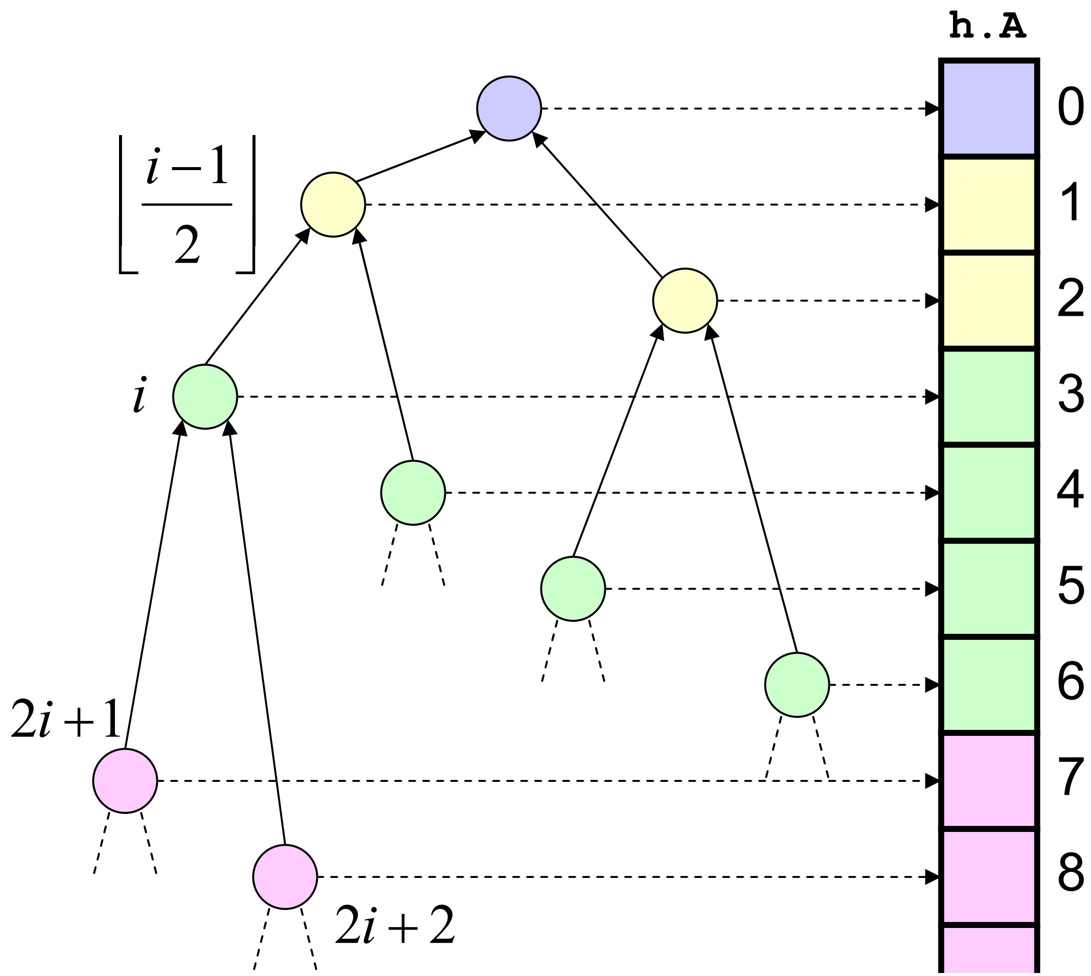
Un heap codifica un albero

- L'heap consiste di un array `h.A` che codifica, livello per livello, un albero binario quasi completo



Un heap codifica un albero

- `h.A[0]` è la radice dell'albero
- Dato il nodo associato alla posizione *i*:
  - i nodi figli si trovano in posizione 2*i*+1 e 2*i*+2
  - il nodo genitore (se $i \neq 0$) si trova in posizione $\lfloor (i-1)/2 \rfloor$



Semplificazione dello pseudocodice

- Per rendere più leggibile lo pseudocodice definiamo le seguenti funzioni

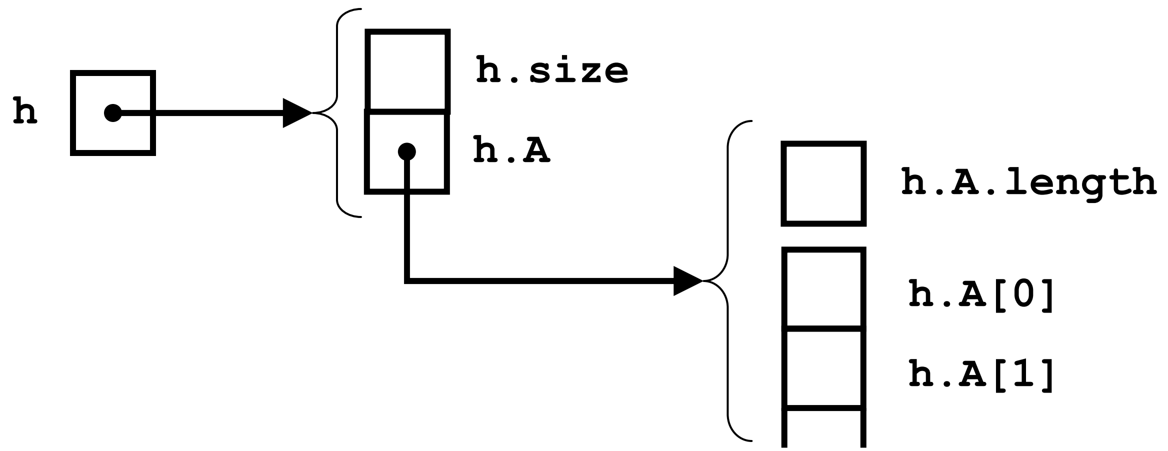
```
PARENT(i)   /* ritorna l'indice del parent del nodo i */
1.  return ⌊(i-1)/2⌋
```

```
LEFT(i)     /* ritorna l'indice del figlio sinistro di i */
1.  return 2i + 1
```

```
RIGHT(i)    /* ritorna l'indice del figlio destro di i */
1.  return 2i + 2
```

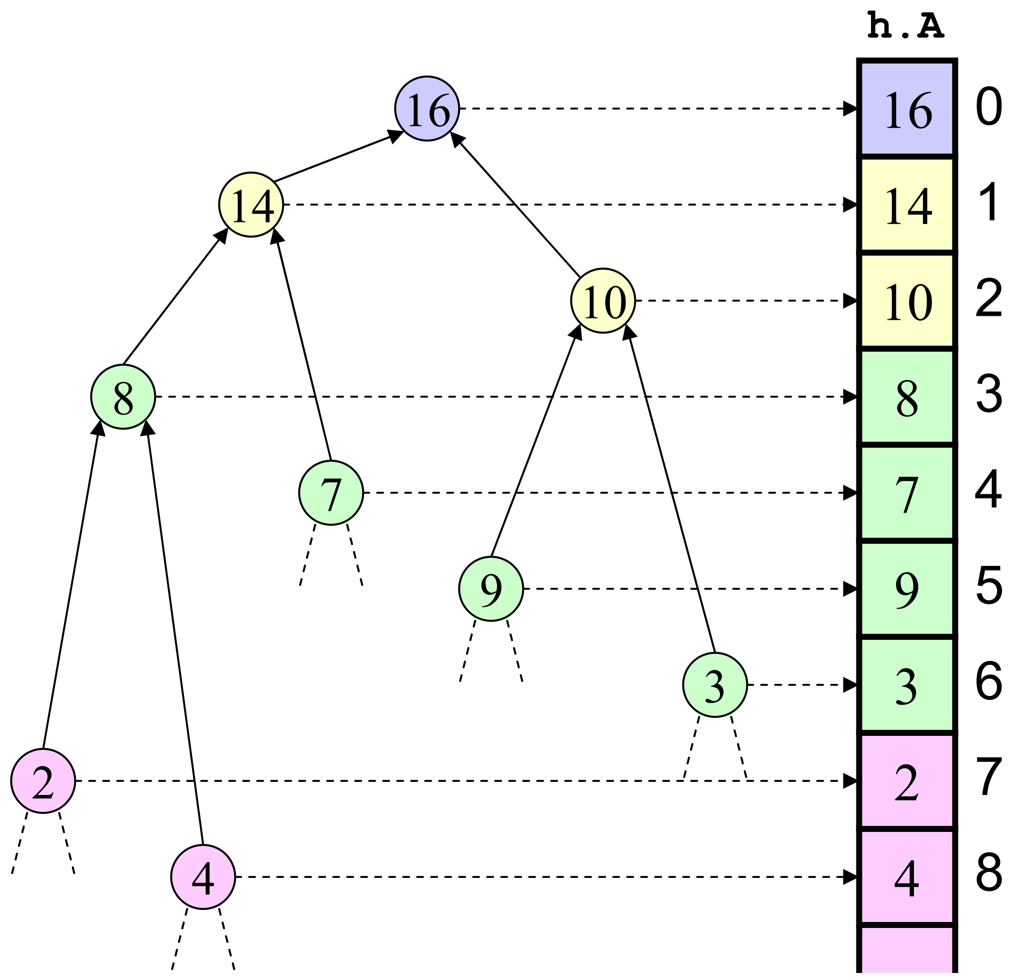
Dettagli implementativi

- Per maggiore flessibilità, anche se l'array è lungo `h.A.length`, supponiamo che solo i valori compresi tra `0` e `h.size-1` siano significativi
  - dove ovviamente `h.size ≤ h.A.length`



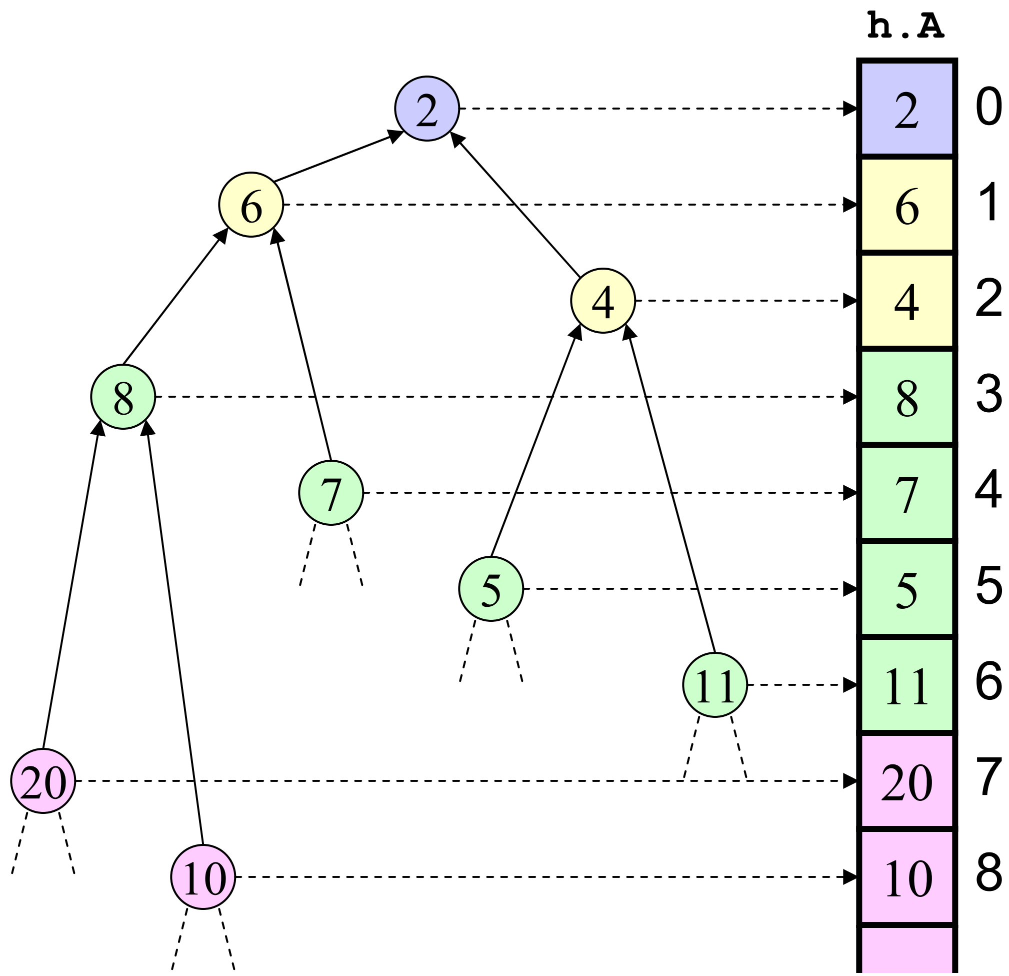
Valori contenuti in un max-heap

- In un *max-heap* l'elemento memorizzato nel nodo *i* ha valore maggiore o uguale degli elementi memorizzati nei suoi figli
  - la radice contiene il valore più alto dell'array
  - per $j > 0$, h.A[PARENT(j)] $\geq$ h.A[j]



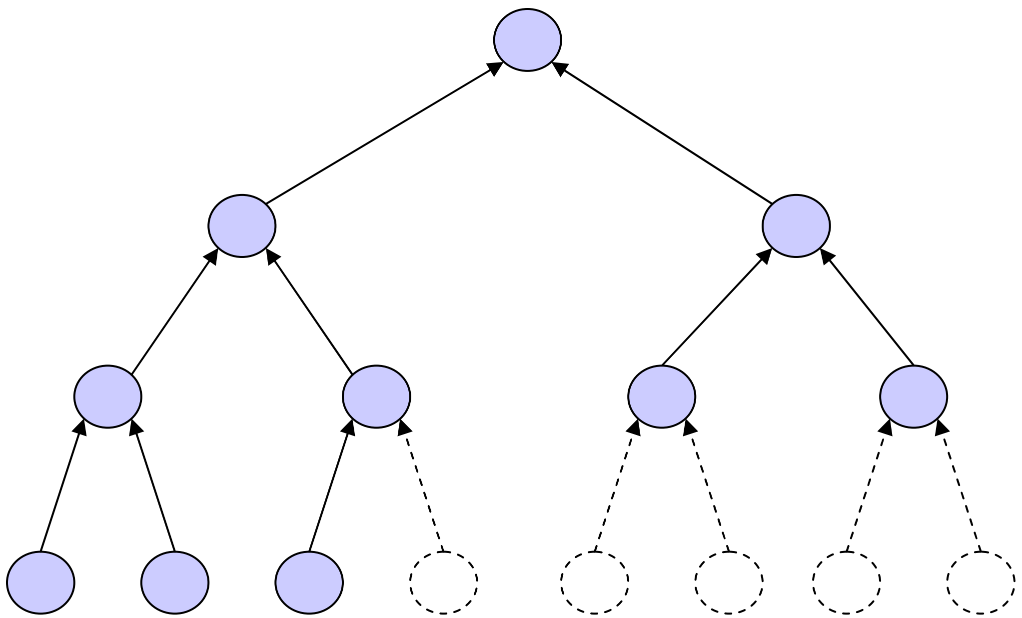
Min-heap

- Esiste anche il *min-heap* che ha la proprietà simmetrica
  - la radice contiene il valore minore dell'array



Proprietà degli heap

- Se `h` è un heap che codifica un albero quasi-completo con n elementi, gli elementi da 0 a $\lfloor n/2 \rfloor$-1 sono nodi interni

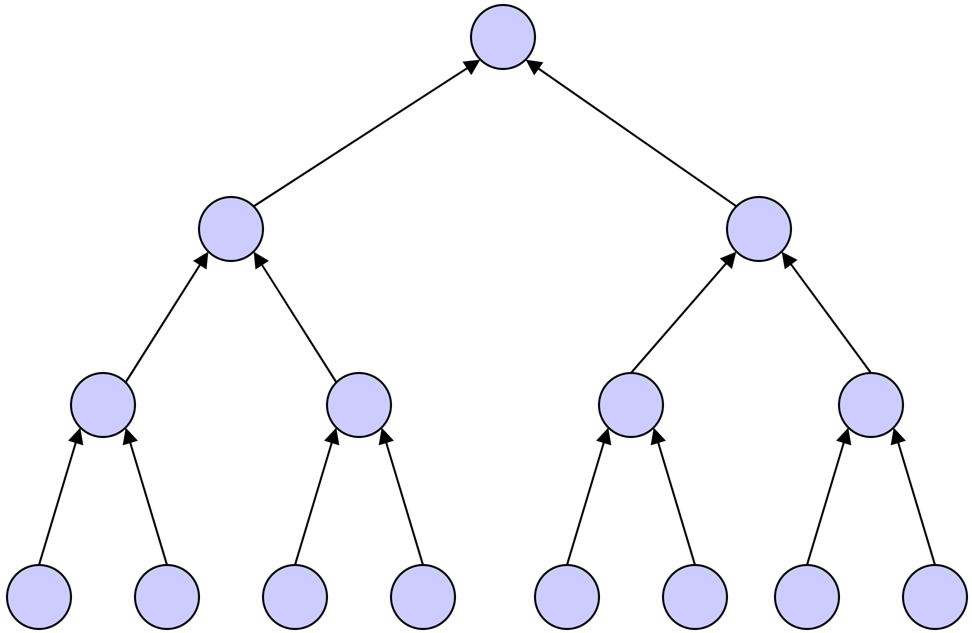


Dimostrazione della proprietà

La dimostriamo per induzione:

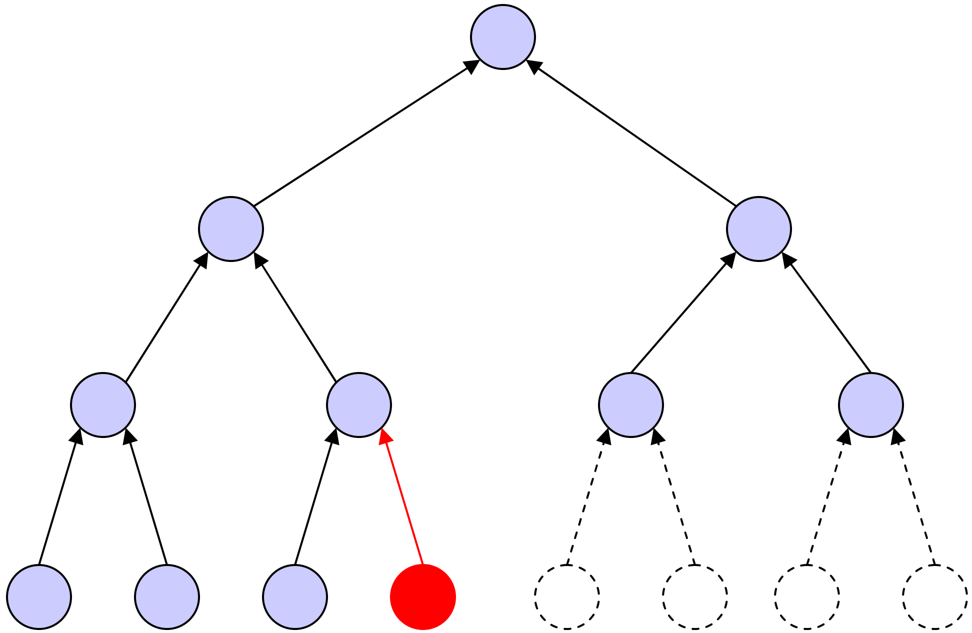
- Passo base
  - dimostriamo l'asserto per gli alberi completi
    - un albero completo è un particolare albero quasi completo
- Passo induttivo
  - dimostriamo che se vale per un albero quasi completo con n nodi, vale anche per un albero quasi completo con n-1 nodi
    - distinguiamo due casi: rimozione del figlio destro e rimozione del figlio sinistro

Passo base: albero binario completo



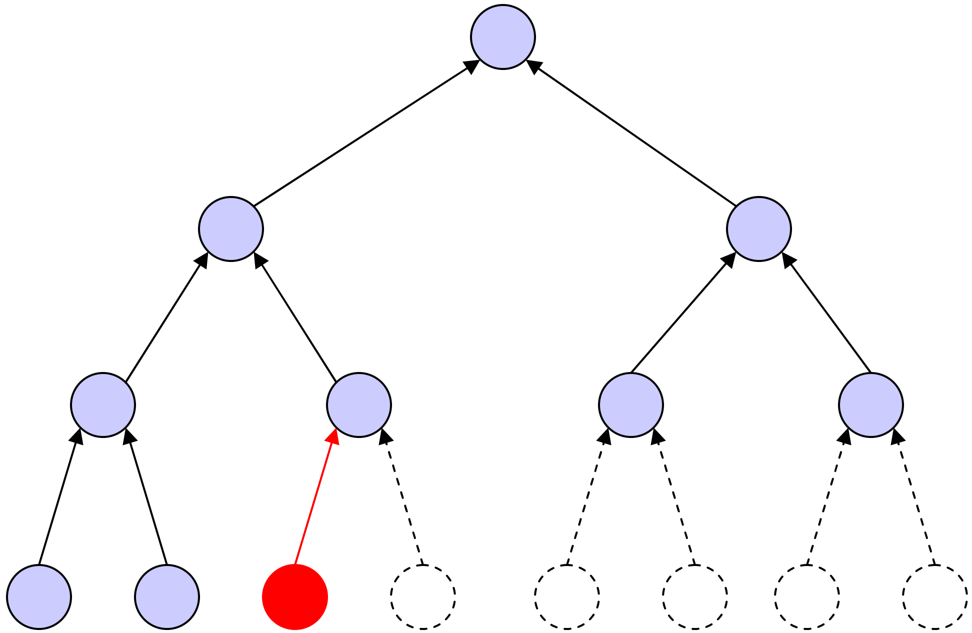
- Sappiamo che un albero binario completo di altezza h ha 2^h foglie e 2^h-1 nodi interni e dunque n=2^{h+1}-1 nodi totali
- Verifichiamo la formula:
nodi interni $= \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (2^{h+1}-1)/2 \rfloor = \lfloor 2^h - 1/2 \rfloor = 2^h - 1$

Passo induttivo: rimuovo un figlio destro



- Prima della rimozione avevo n nodi e $\lfloor n/2 \rfloor$ nodi interni (con n dispari)
  – dalla disparità di n segue che $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$
- Dopo la rimozione ho n’ = n-1 nodi e il numero dei nodi interni non è cambiato
  – ne segue che i nodi interni sono $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n-1)/2 \rfloor = \lfloor n'/2 \rfloor$

Passo induttivo: rimuovo un figlio sinistro



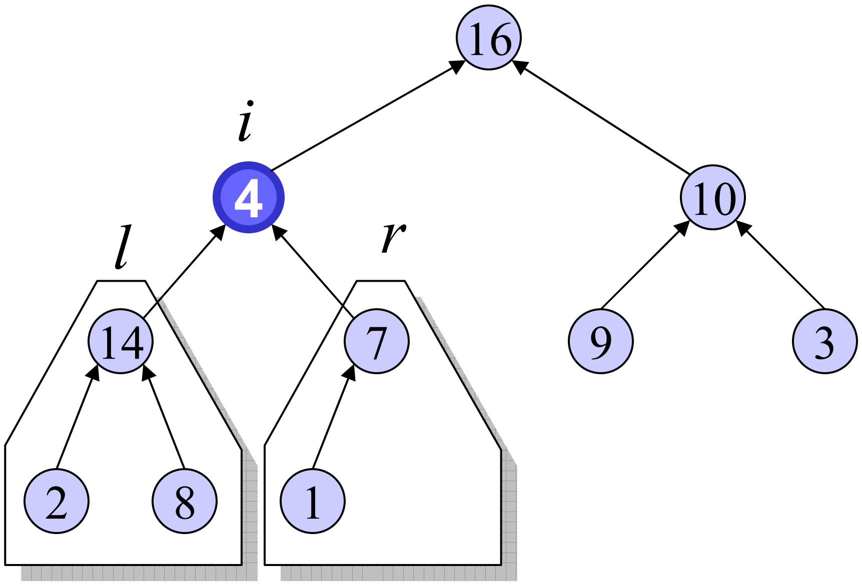
- Prima della rimozione avevo n nodi e $\lfloor n/2 \rfloor$ nodi interni (con n pari)
  - dalla parità di n segue che $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n\text{-}1)/2 \rfloor + 1$
- Dopo la rimozione ho $n' = n\text{-}1$ nodi e i nodi interni sono diminuiti di uno
  - dunque i nodi interni sono $\lfloor (n\text{-}1)/2 \rfloor = \lfloor n'/2 \rfloor$

Procedura MAX_HEAPIFY

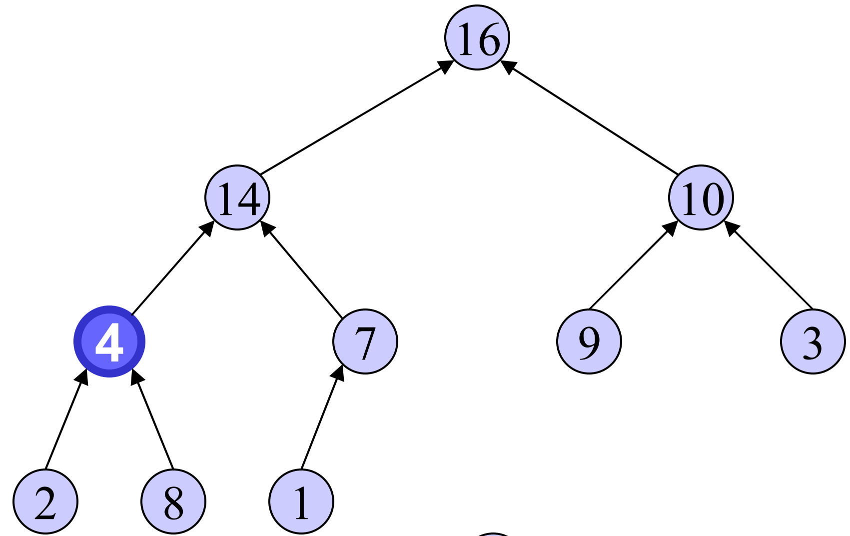
- Se i due sottalberi radicati a LEFT(*i*) e a RIGHT(*i*) sono dei max-heap, allora la procedura MAX-HEAPIFY(h,*i*) trasforma il sottoalbero radicato ad *i* in un max-heap

```
MAX_HEAPIFY(h,i)
l = LEFT(i)         ▷ indice del figlio sinistro
r = RIGHT(i)        ▷ indice del figlio destro
if (l ≤ h.size-1 and h.A[l] > h.A[i])    massimo = l
else                                      massimo = i
if (r ≤ h.size-1 and h.A[r] > h.A[massimo]  massimo = r
/* ora massimo è il massimo tra h.A[l], h.A[r] ed h.A[i]
if massimo ≠ i
      SCAMBIA_CASELLE(h.A,i,massimo)
      MAX_HEAPIFY(h,massimo)
```

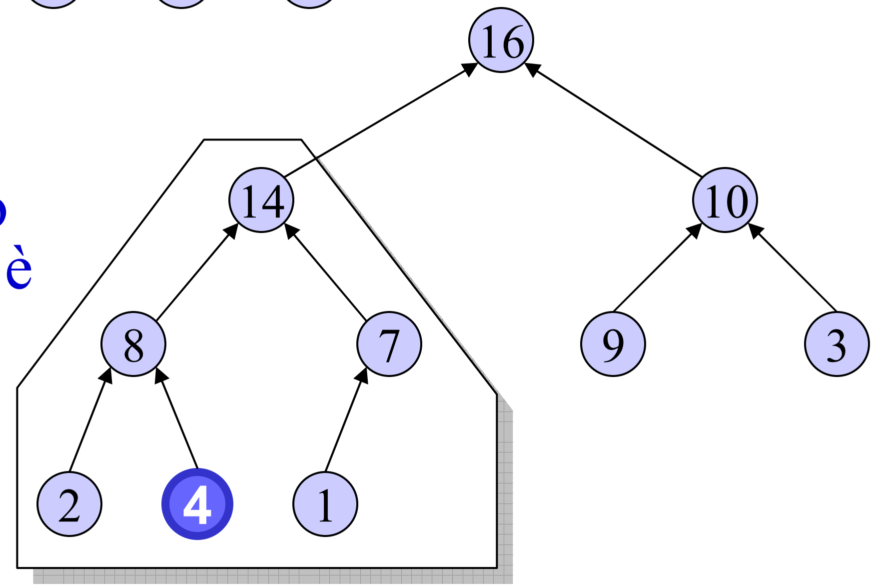

Esecuzione di `MAX_HEAPIFY`



i sottoalberi radicati ad *l* ed *r* sono max-heap



il sottoalbero radicato ad *i* è diventato un max-heap

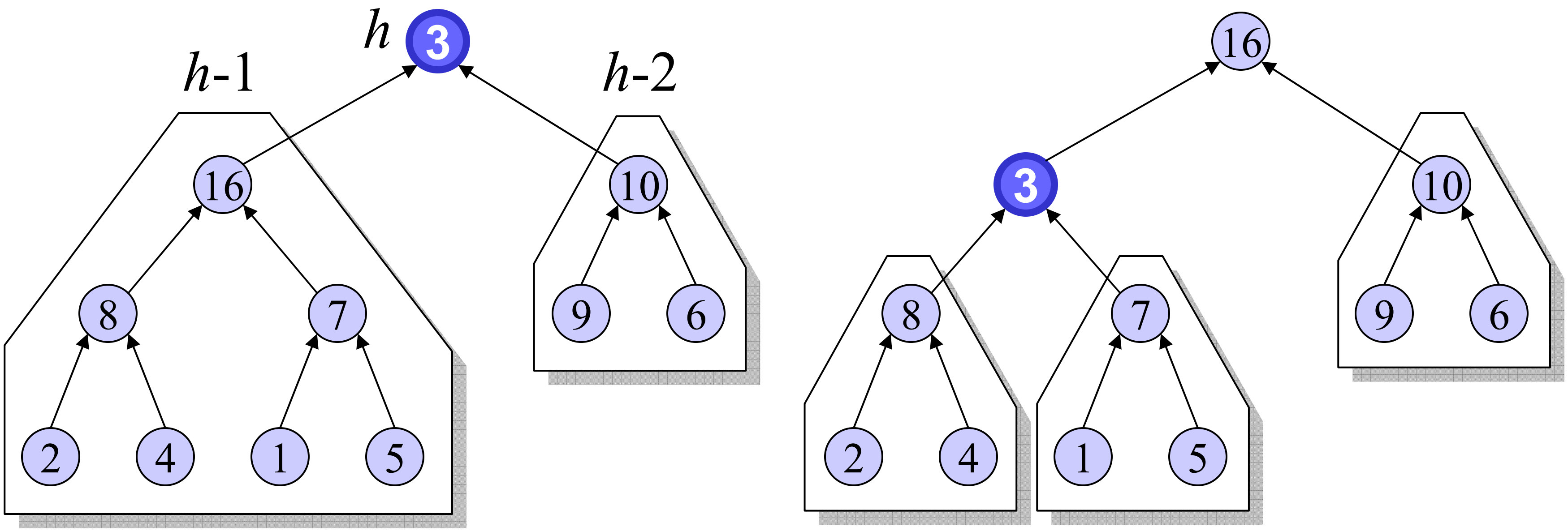


Analisi di MAX_HEAPIFY

```
MAX_HEAPIFY(h,i)
1.  l = LEFT(i)        ▷ indice del figlio sinistro
2.  r = RIGHT(i)       ▷ indice del figlio destro
3.  if (l ≤ h.size-1 and h.A[l] > h.A[i])    massimo = l
4.  else                                     massimo = i
5.  if (r ≤ h.size-1 and h.A[r] > h.A[massimo]  massimo = r
6.  /* ora massimo è il massimo tra h.A[l], h.A[r] ed h.A[i]
7.  if massimo ≠ i
8.      SCAMBIA_CASELLE(h.A,i,massimo)
9.      MAX_HEAPIFY(h,massimo)
```

- Il tempo di esecuzione di MAX_HEAPIFY(h,*i*) si ottiene sommando
  - il tempo di calcolo di massimo (linee 1-8), che è evidentemente Θ(1)
  - il tempo di calcolo MAX_HEAPIFY(h, massimo) dove il sottoalbero radicato a massimo ha dimensione ridotta rispetto a quello radicato ad *i*

Analisi di `MAX_HEAPIFY`



- Il caso peggiore si presenta quando occorre ricorrere su un sottoalbero di profondità h-1, mentre il sottoalbero radicato al nodo fratello ha profondità h-2
  - ricorda che l'albero è quasi-completo
- In questo caso, se i nodi dell'albero sono n, i nodi del sottoalbero più pesante sono $n \cdot 2/3$

Analisi di `MAX_HEAPIFY`

- Il tempo di calcolo di `MAX_HEAPIFY` su un sottoalbero con n nodi è

$$T(n) \leq T(2n/3) + c$$

- Questa disequazione di ricorrenza può essere risolta con il master theorem

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + p(n^k)$$

nello speciale caso in cui

$$a=1 \qquad b=3/2 \qquad k=0$$

che per $a = b^k$ si risolve in

$$T(n) = \Theta(n^k \log n) = \Theta(\log n)$$

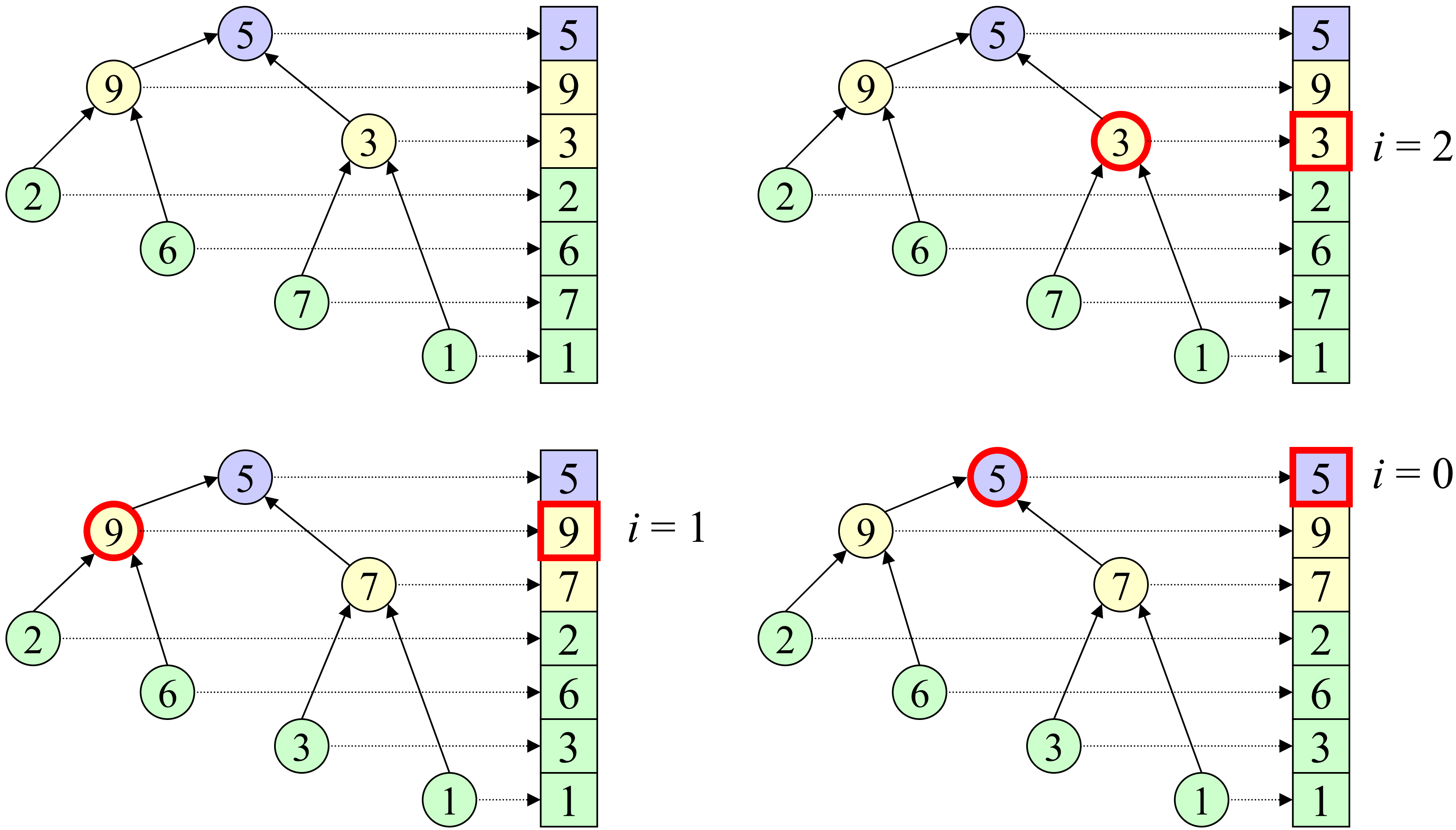
- Dunque la complessità di `MAX_HEAPIFY` è $\Theta(\log n)$

Procedura BUILD_MAX_HEAP

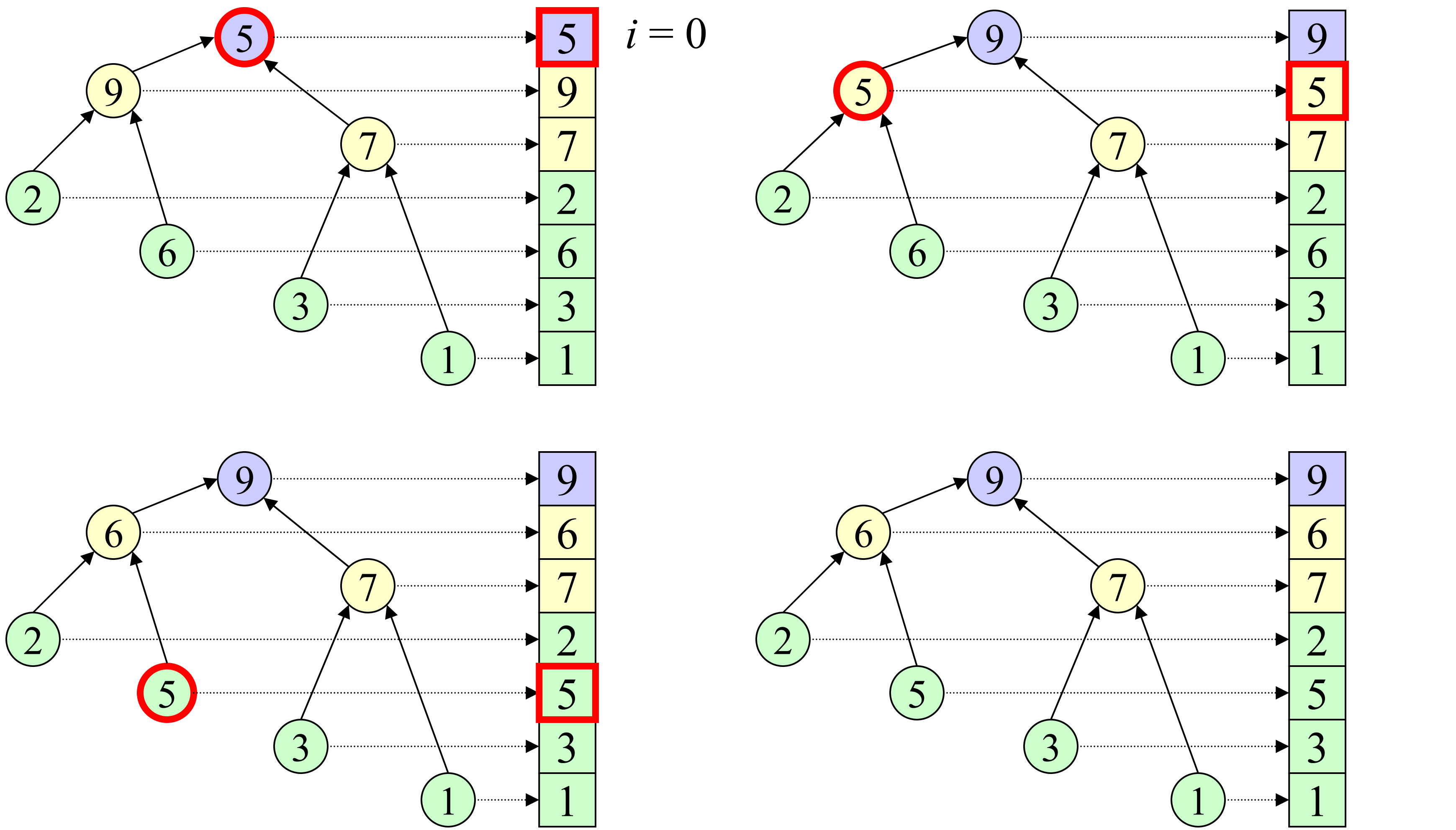
- BUILD_MAX_HEAP trasforma un array A in un heap
- Se n = h.A.length, gli elementi con indice ≥ ⌊n/2⌋ sono tutte foglie
  - ognuna è un heap con un solo elemento
- BUILD_MAX_HEAP esegue MAX_HEAPIFY sui nodi che non sono foglie, dal basso verso l'alto

```
BUILD_MAX_HEAP(h)
1.  h.size = h.A.length
2.  for i = ⌊h.A.length/2⌋-1 downto 0   // i nodi interni
3.      MAX_HEAPIFY(h,i)
```


Esecuzione di `BUILD_MAX_HEAP` (1/2)



Esecuzione di `BUILD_MAX_HEAP` (2/2)



Analisi di BUILD_MAX_HEAP

```
BUILD_MAX_HEAP(h)
1.  h.size = h.A.length
2.  for i = ⌊h.A.length/2⌋-1 downto 0  // i nodi interni
3.      MAX_HEAPIFY(h,i)
```

- BUILD_MAX_HEAP lancia MAX_HEAPIFY un numero $\Theta(n)$ di volte
  - il tempo di esecuzione di MAX_HEAPIFY è $\Theta(\log n)$
    - dove n è il numero dei nodi del sottoalbero radicato al nodo sul quale è lanciato MAX_HEAPIFY
- Il tempo complessivo è $O(n \log n)$
  - $O(n \log n)$ non è un limite asintoticamente stretto
    - con un'analisi più rigorosa si può dimostrare che $T(n) \in \Theta(n)$

Implementazione delle code di priorità

- Le code di priorità possono essere gestite tramite un heap

```
NEW_QUEUE()
1.  /* h è un nuovo oggetto con i campi size (intero) ed A
2.      (array di 100 interi) */
3.  h.size = 0
4.  return h
```

- Supponiamo di gestire le dimensioni dell'array h.A tramite una crescita telescopica
- La complessità di questa funzione è costante $\Theta(1)$

Implementazione delle code di priorità

```
IS_EMPTY(h)
1.  return h.size == 0
```

```
MAXIMUM(h)
1.  return h.A[0]
```

- Le due funzioni qui sopra hanno evidentemente una complessità costante $\Theta(1)$

Procedura EXTRACT_MAX

```
EXTRACT_MAX(h)
1.  if IS_EMPTY(h)
2.      error("heap underflow")
3.  max = h.A[0]
4.  h.A[0] = h.A[h.size - 1]
5.  h.size = h.size - 1
6.  MAX_HEAPIFY(h,0)
7.  return max
```

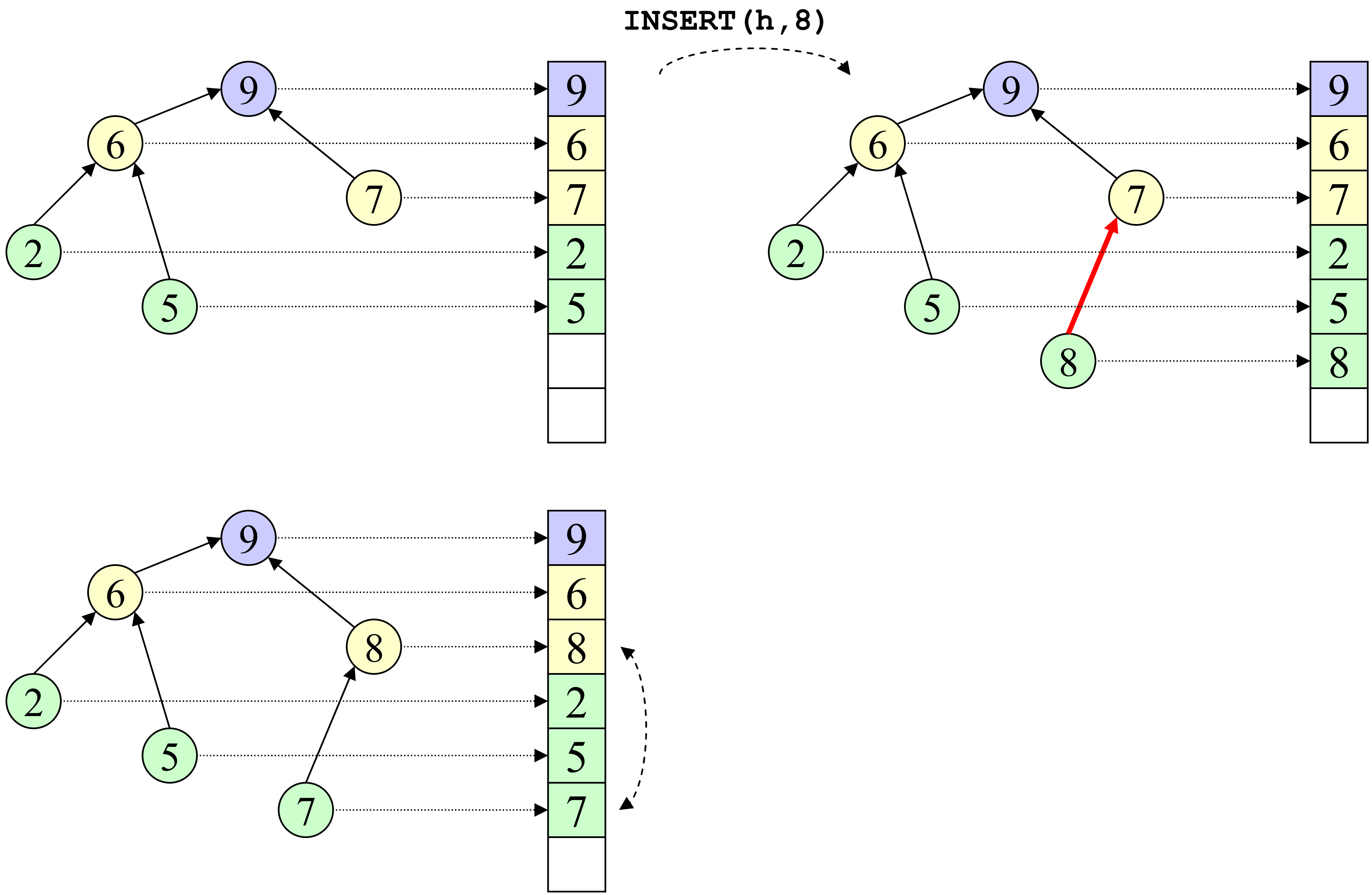
- Viene eliminato il primo elemento dalla coda
- L'ultimo elemento viene messo al suo posto
- Viene decrementato `h.size`
- La complessità totale è quella di `MAX_HEAPIFY`, cioè $\Theta(\log n)$

Procedura `INSERT`

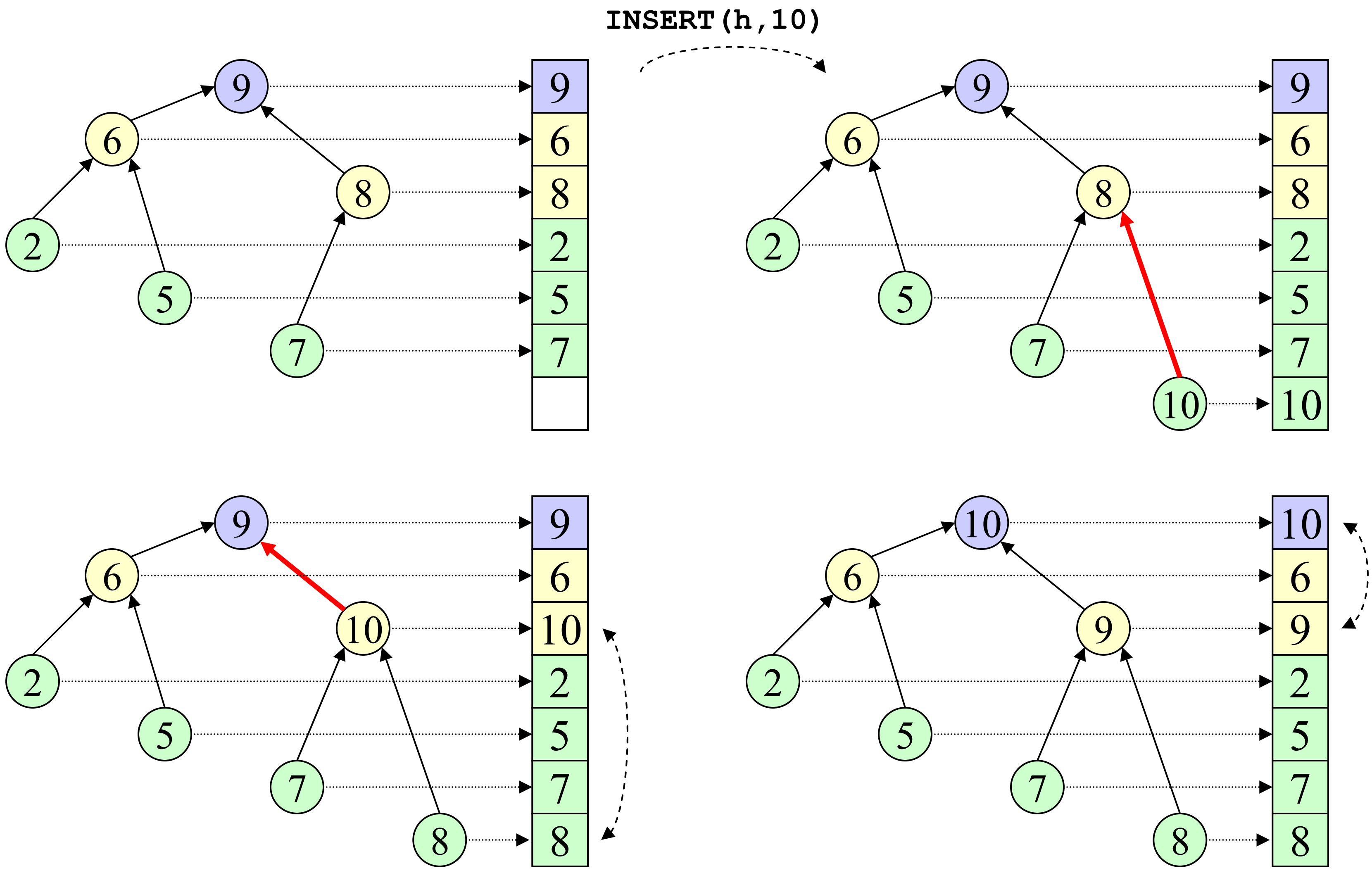
```
INSERT(h,key)
if h.size == h.length
    error("overflow")
h.size = h.size + 1
i = h.size - 1
while i>0 and h.A[PARENT(i)] < key
    h.A[i] = h.A[PARENT(i)]
    /* il genitore di i è stato spostato in basso */
    i = PARENT(i)
h.A[i] = key
```

- `h.size` viene incrementato di 1
- Il nuovo elemento viene "spinto in alto" fino a trovare la posizione giusta
- La complessità nel caso peggiore è data dall'altezza dell'albero, cioè $\Theta(\log n)$

Esecuzione di `INSERT` (1)



Esecuzione di `INSERT` (2)



Conclusioni sulle strutture di dati heap

- Consentono di realizzare delle code di priorità in cui
  - la creazione della coda di priorità ha complessità $\Theta(n)$
    - procedura `BUILD_MAX_HEAP`(h)
  - l'inserimento di un elemento con priorità arbitraria ha complessità $\Theta(\log n)$
    - procedura `INSERT`(h,key)
  - l'estrazione dell'elemento con chiave maggiore ha complessità $\Theta(\log n)$
    - procedura `EXTRACT_MAX`(h)

Esercizi sugli heap

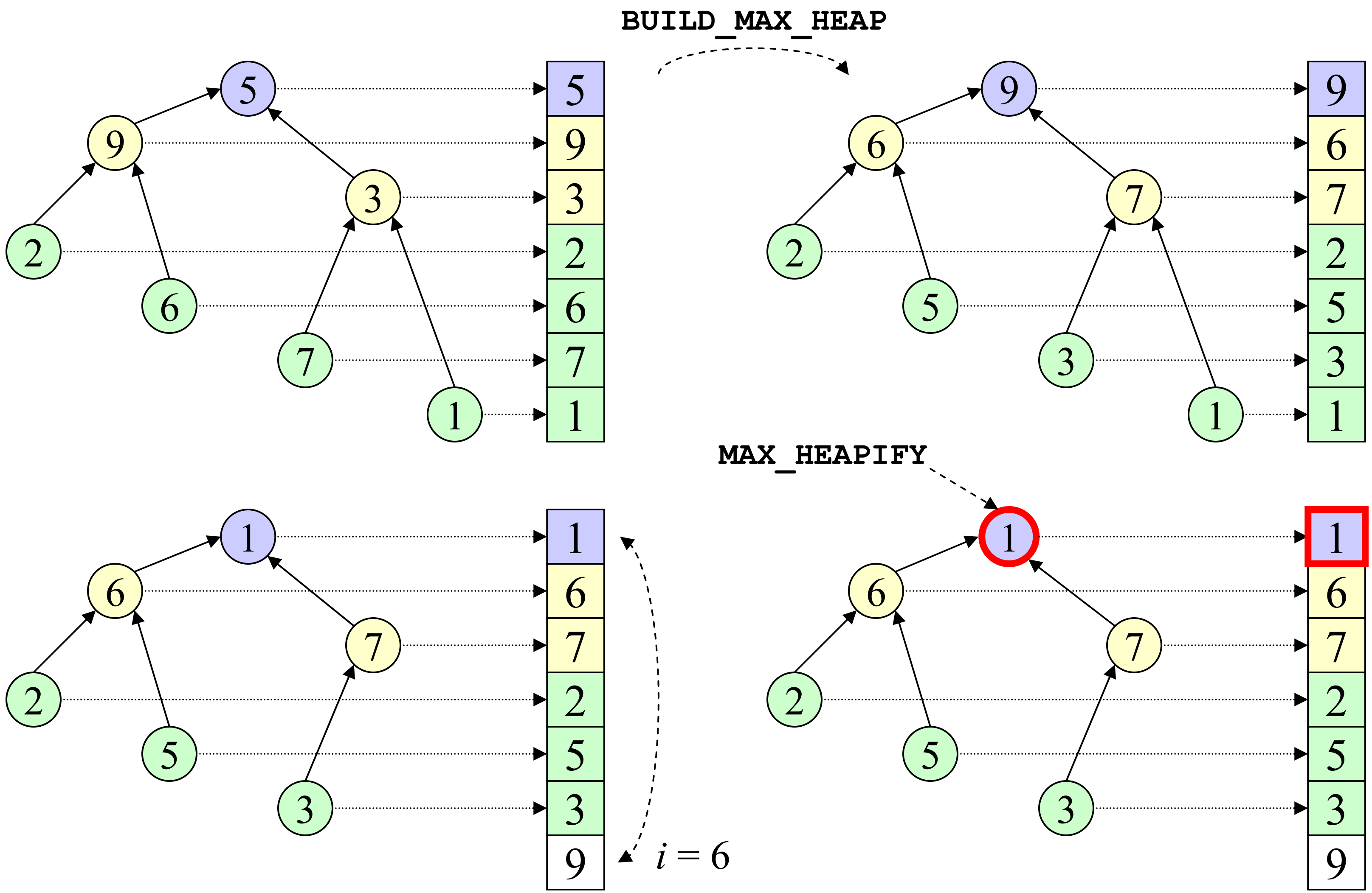
1. Illustra le operazioni di `INSERT`(h,10) sullo heap
   h.A = <15, 13, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2, 1>
2. Illustra le operazioni di `EXTRACT_MAX`(h) sullo heap
   h.A = <15, 13, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2, 1>

Procedura HEAP_SORT

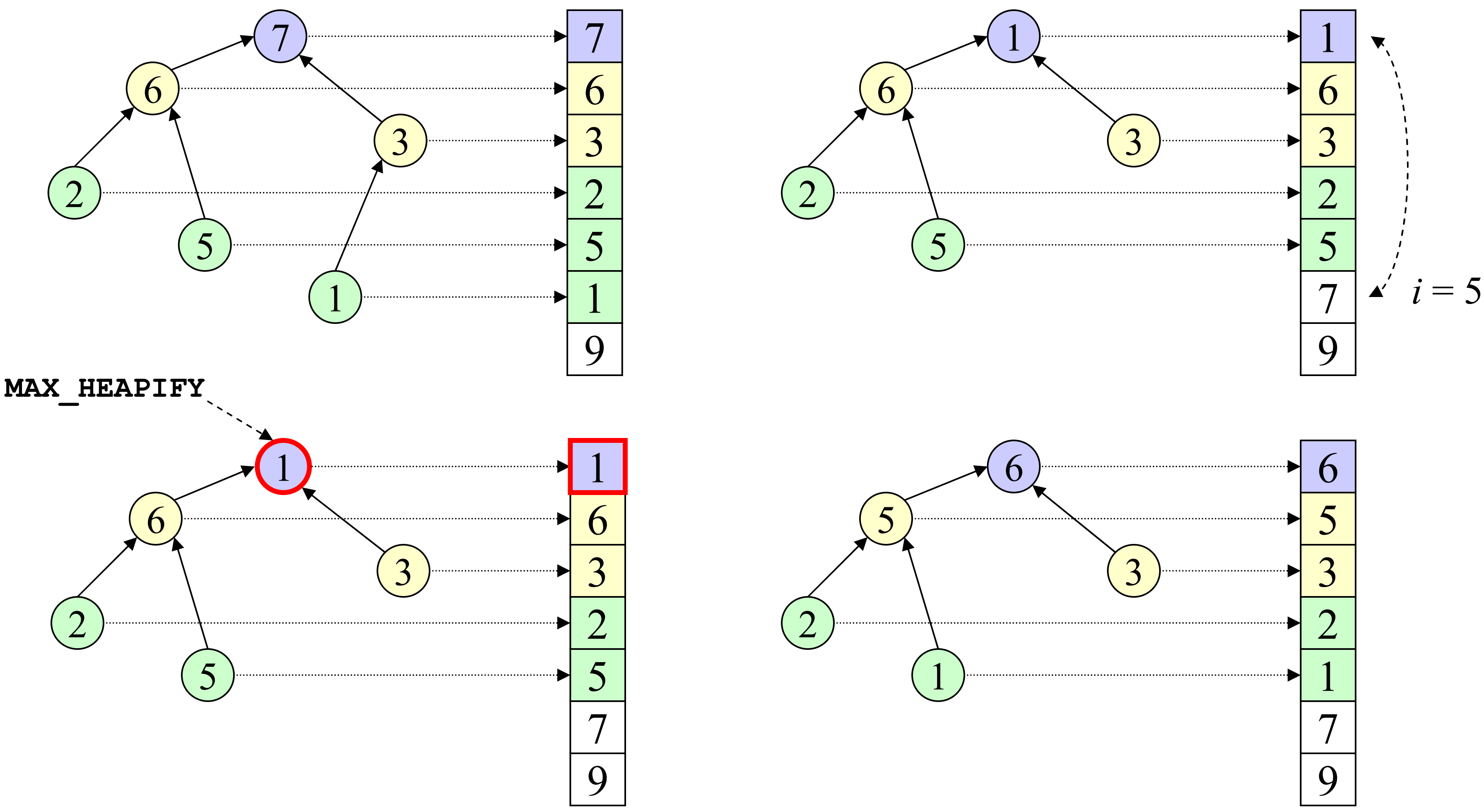
```
HEAP_SORT(A)
h.A = A    /* h è un nuovo heap */
h.size = A.length
BUILD_MAX_HEAP(h)
for i = h.A.length-1 downto 1
    SCAMBIA-CASELLE(A,0,i)
    h.size = h.size - 1
    MAX-HEAPIFY(h,0)
```

- A viene trasformato in un heap (O(n log n))
- Per i che va da 0 ad `A.length`-1 (cioè O(n) volte)
  - viene estratto il primo elemento di A e viene posto in coda all'array (O(1))
  - viene lanciato `MAX_HEAPIFY` per ripristinare le proprietà dell'heap (tempo O(log n) nel caso peggiore)

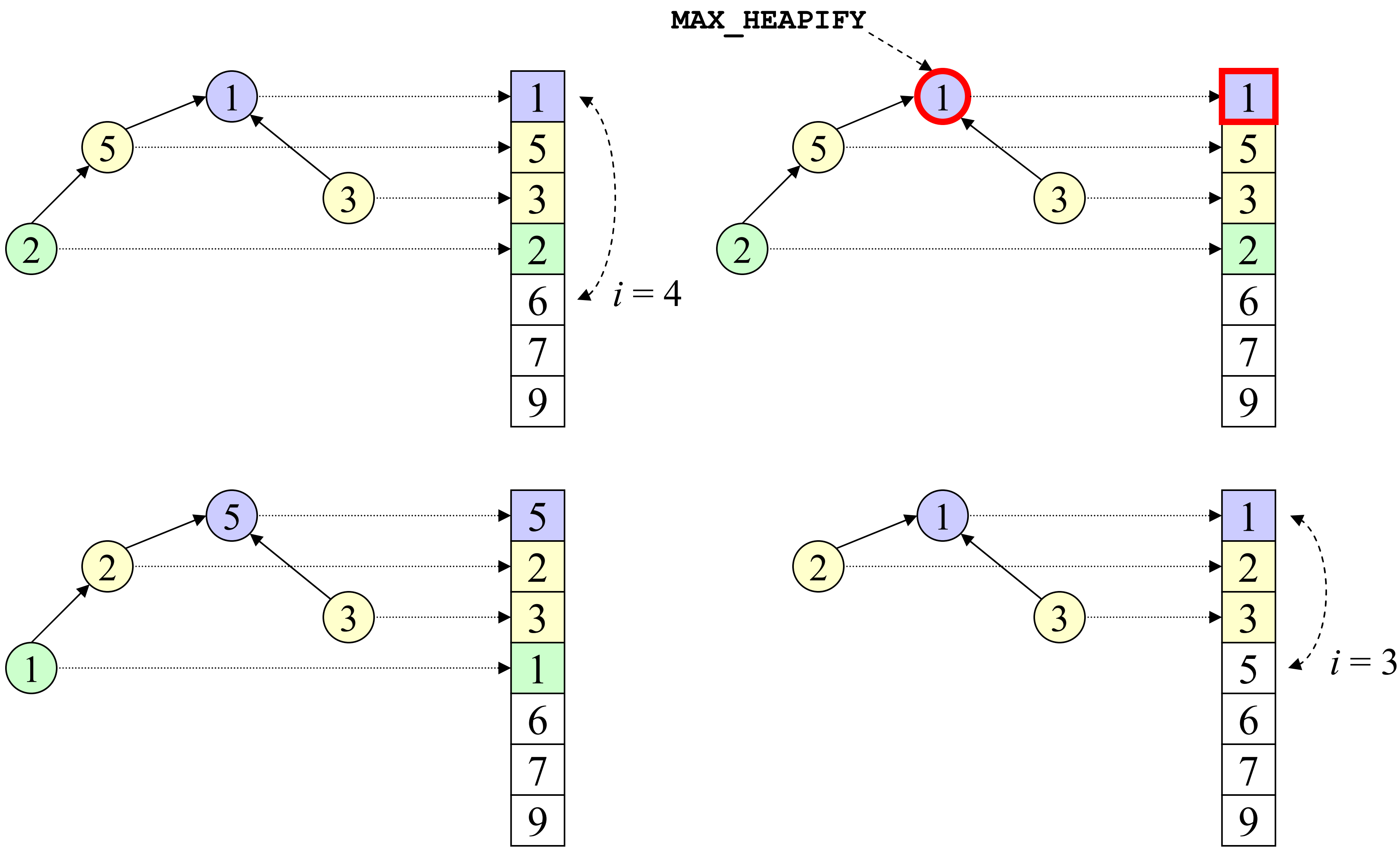
Esecuzione di HEAP_SORT (1/5)



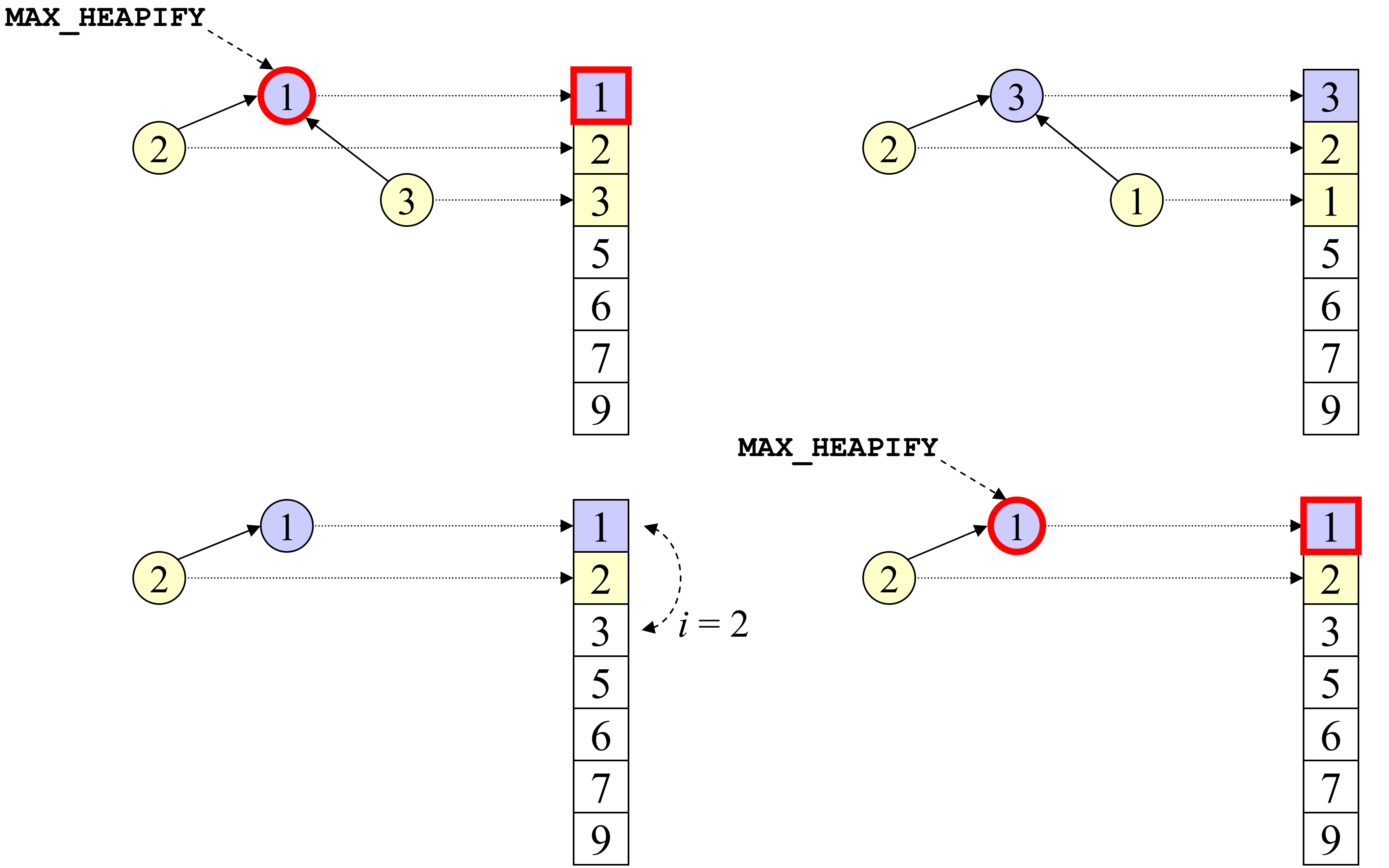
Esecuzione di HEAP_SORT (2/5)



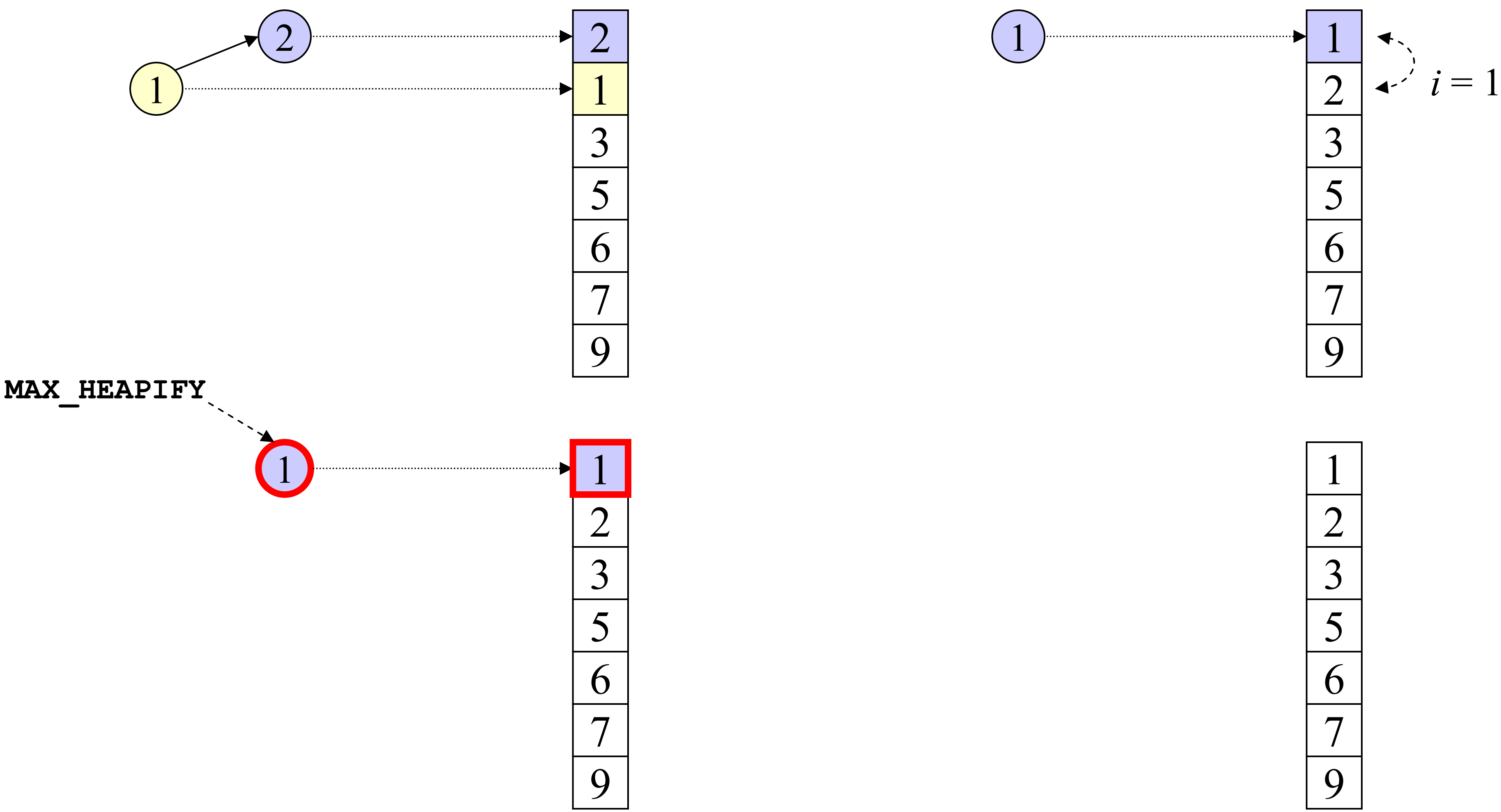
Esecuzione di `HEAP_SORT` (3/5)



Esecuzione di `HEAP_SORT` (4/5)

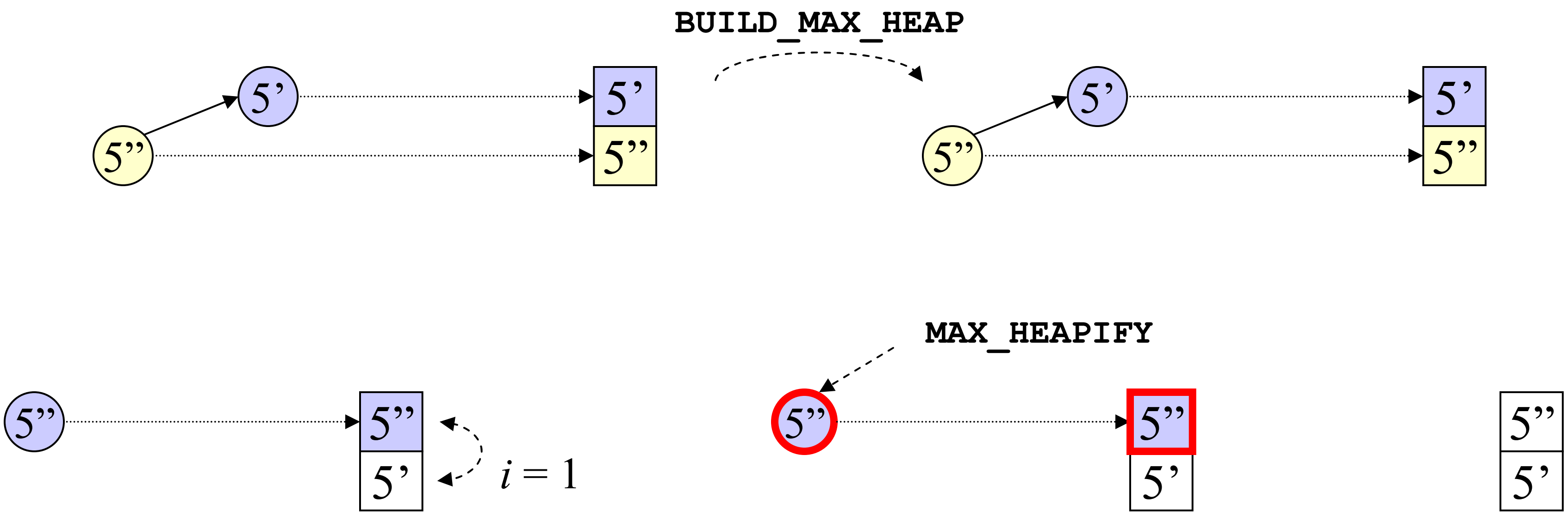


Esecuzione di `HEAP_SORT` (5/5)



HEAP_SORT non è stabile

- Lo dimostriamo con un controesempio



- Ora la posizione dei due elementi è invertita

Algoritmi di ordinamento visti finora

	caso migliore	caso medio	caso peggiore	in loco	stabile
SELECTION-SORT	$\Theta(n^2)$			*si*	*si*
INSERTION-SORT	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	*si*	*si*
MERGE-SORT	$\Theta(n \log n)$			*no*	*si*
HEAP-SORT	$\Theta(n \log n)$			*si*	*no*

Nota: `HEAP_SORT` ha complessità Θ(n log n) nel caso migliore nel caso di elementi distinti. Nel caso di elementi tutti uguali ha complessità O(n).

Domande sugli heap

3. Quali sono il numero minimo ed il numero massimo di elementi in uno heap di altezza *h*?
4. In un max-heap, dove potrebbe risiedere l'elemento più piccolo, assumendo che siano tutti distinti?
5. Un heap in cui l'array è ordinato in ordine inverso è un max-heap?
6. La sequenza <23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12> è un max-heap?
7. Qual è l'effetto di `MAX_HEAPIFY`(h,i) se l'elemento h.A[i] è più grande dei suoi figli?
8. Qual è l'effetto di `MAX_HEAPIFY`(h,i) se i > h.size/2-1 ?

Esercizi sulle code di priorità

9. Illustra le operazioni di `MAX_HEAPIFY`(h,2) sullo heap
   h.A = <27, 17, 3, 16, 13, 10, 1, 5, 7, 12, 4, 8, 9, 0>
10. Illustra le operazioni di `BUILD_MAX_HEAP`(h) sullo heap
    h.A = <5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9>
11. Illustra le operazioni di `HEAP_SORT` sull'array
    A = <5, 13, 2, 25, 7, 17, 20, 8, 4>

