Ricerca Operativa I

Dario Pacciarelli

Geometria della PL, condizioni di ottimalità e illimitatezza

Dipartimento di Ingegneria

Struttura del corso

Ricerca Operativa
- ***Cos'è***
- ***Modelli***
- ***Esempi***

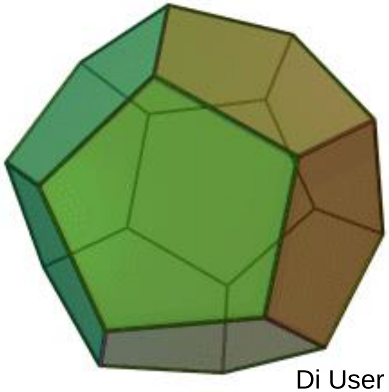
Modelli
- ***Metodo delle 5 fasi***
- ***Modelli di PL***
- ***Miscelazione***
- ***Allocazione***
- ***Trasporto***
- ***Taglio ottimo***

Teoria e Algoritmi
- ***Condizioni di ottimo***
- ***Teoria della dualità***
- ***Metodo Grafico***
- ***Metodo di Fourier-Motzkin***
- ***Algoritmo del simplesso***

Teoria dei Grafi
- ***Grafi e Digrafi***
- ***Albero ricoprente di peso minimo***
- ***Percorso di costo minimo***
- ***Massimo flusso***

Algebra lineare e geometria poliedrale

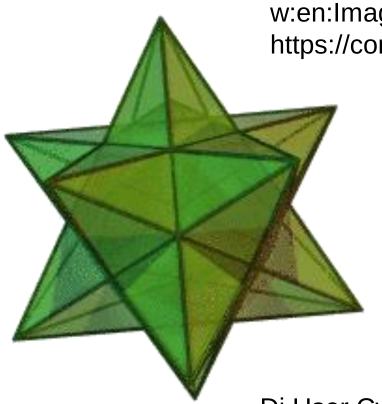
- Geometria classica: i poliedri
  - Poliedri convessi



Noi vedremo solo poliedri convessi in n dimensioni chiamandoli poliedri

Di User Cyp on en.wikipedia - transferred from en.wikipedia, see w:en:Image:Tetrakishexahedron.gif for source., CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=38656

  - Poliedri stellati



Di User Cyp - Opera propria, see File:GreatStellatedDodecahedron.jpg, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=469124

Algebra lineare e geometria poliedrale

- Combinazioni di vettori

  - $z \in \Re^n$ è combinazione lineare di k vettori $x^1, x^2, \dots, x^k \in \Re^n$ se esistono k scalari $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k \in \Re$ tali che:

$$z = \sum_{i=1,\dots,k} \lambda^i x^i$$

  - La combinazione è affine se $\sum_{i=1,\dots,k} \lambda^i = 1$

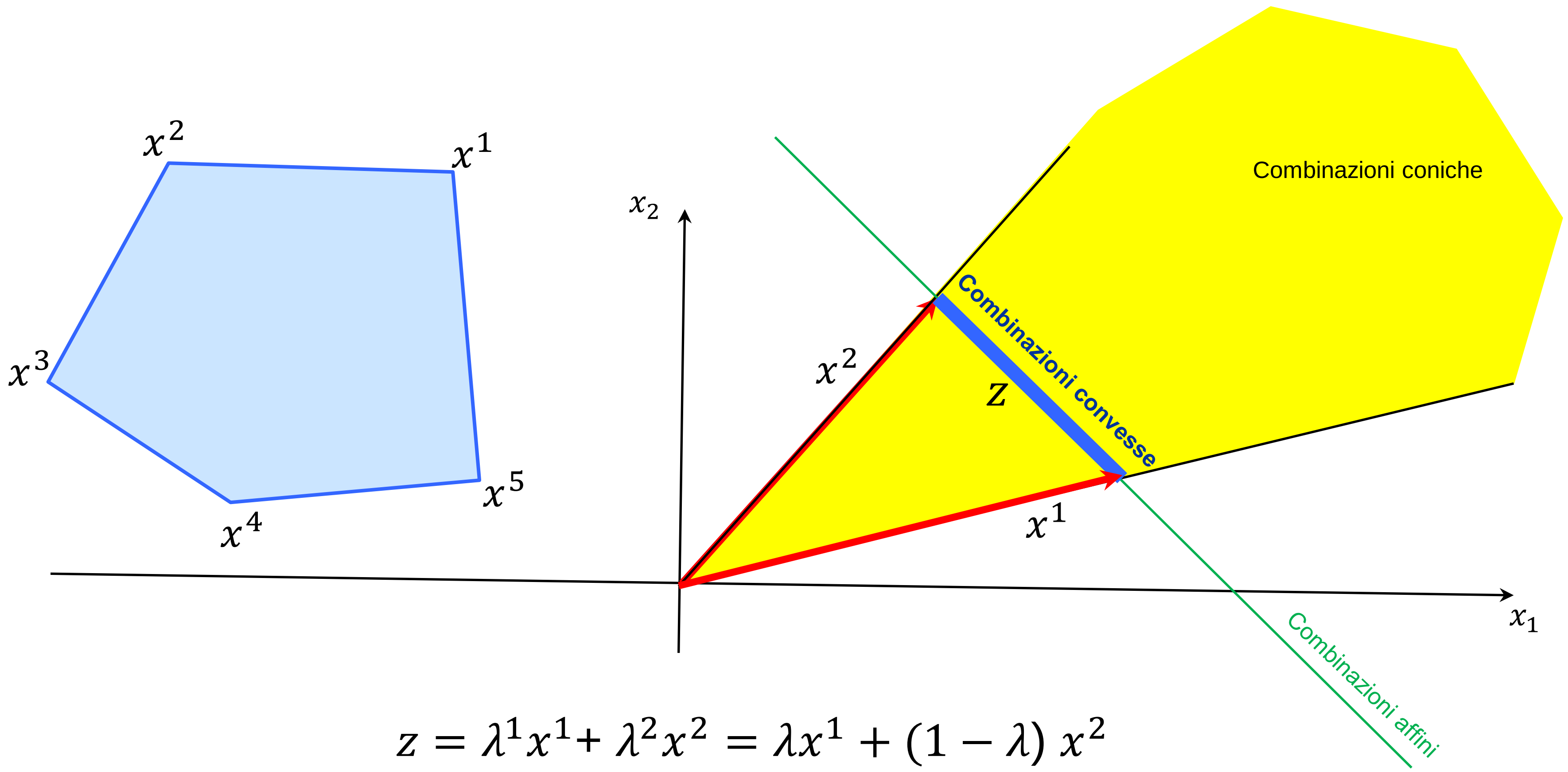
  - La combinazione è conica se $\lambda^i \geq 0$ per $i = 1, \dots, k$

  - La combinazione è convessa se è conica e affine:

$$\lambda^i \geq 0 \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, k \quad \text{e} \quad \sum_{i=1,\dots,k} \lambda^i = 1$$

Algebra lineare e geometria poliedrale

- Combinazioni di vettori $x^1, x^2 \in \Re^2$



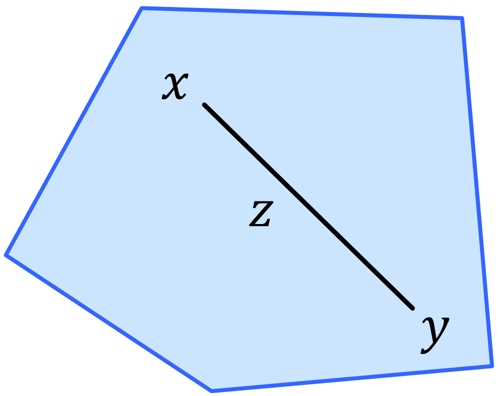
$$z = \lambda^1 x^1 + \lambda^2 x^2 = \lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

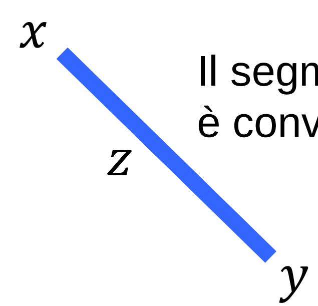
Algebra lineare e geometria poliedrale

- **Insiemi convessi:** un insieme A è convesso se $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow z \in A$

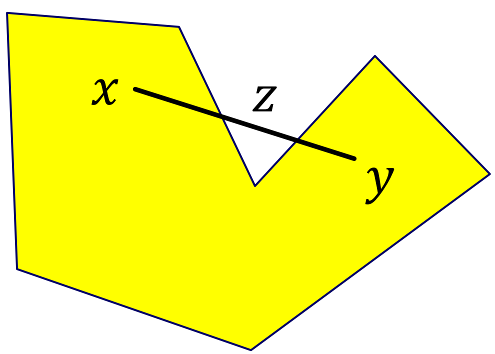
$$z = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$$



Un poliedro
è convesso



Il segmento xy
è convesso

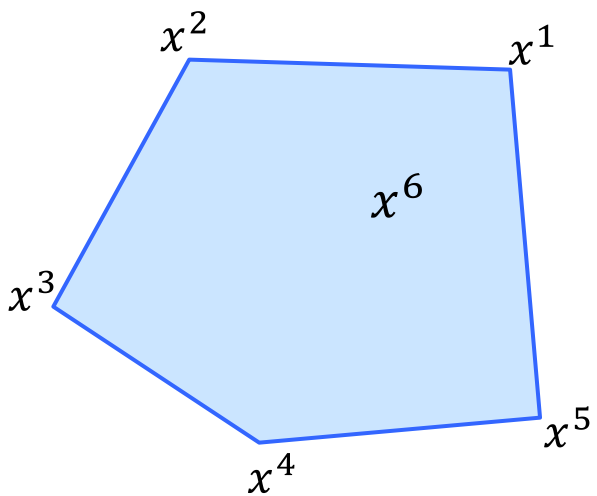


Insieme non
convesso

Algebra lineare e geometria poliedrale

- Rappresentazioni di poliedri

  - Insieme di combinazioni convesse di k punti (es. i vertici): Politopi



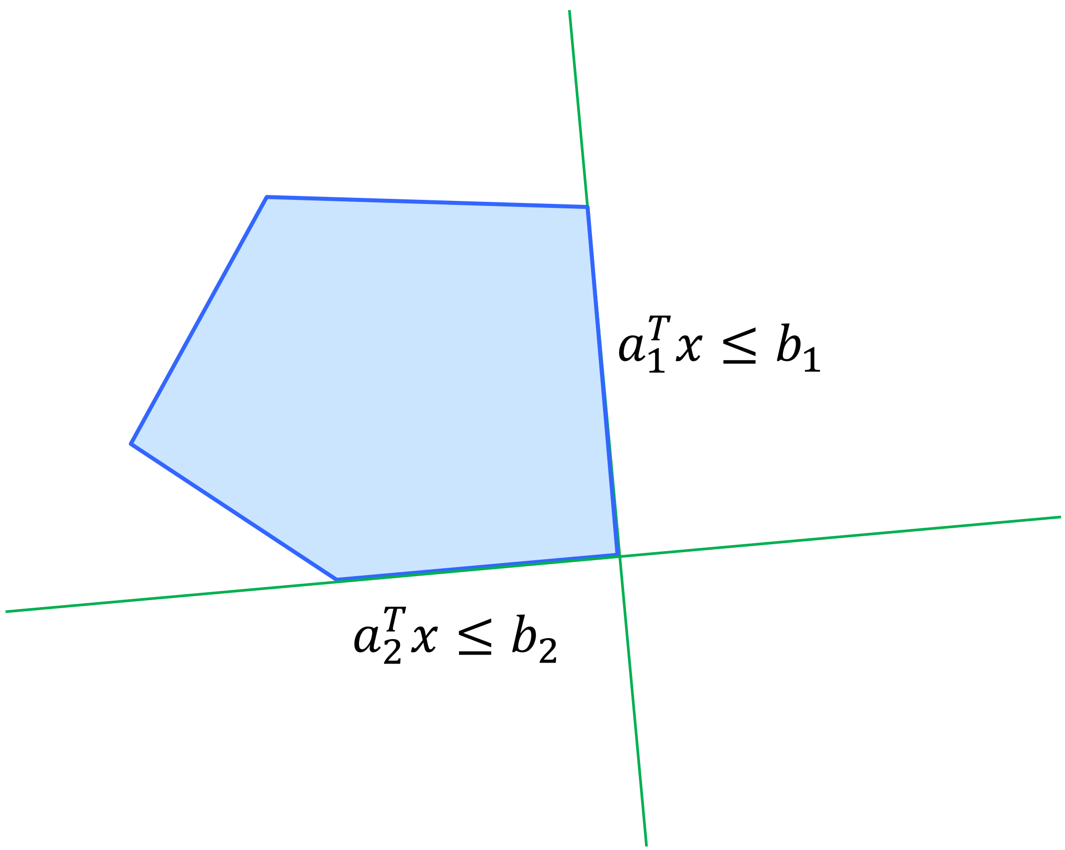
$$P = \left\{ \begin{array}{c} z \in \Re^2 : z = \sum_{i=1,\dots,6} \lambda_i x^i \,; \\ \lambda_i \geq 0 \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, 6; \\ \sum_{i=1,\dots,6} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

  - Insieme delle soluzioni di un sistema di vincoli lineari:

$$P = z \in \Re^n : Ax \leq b$$

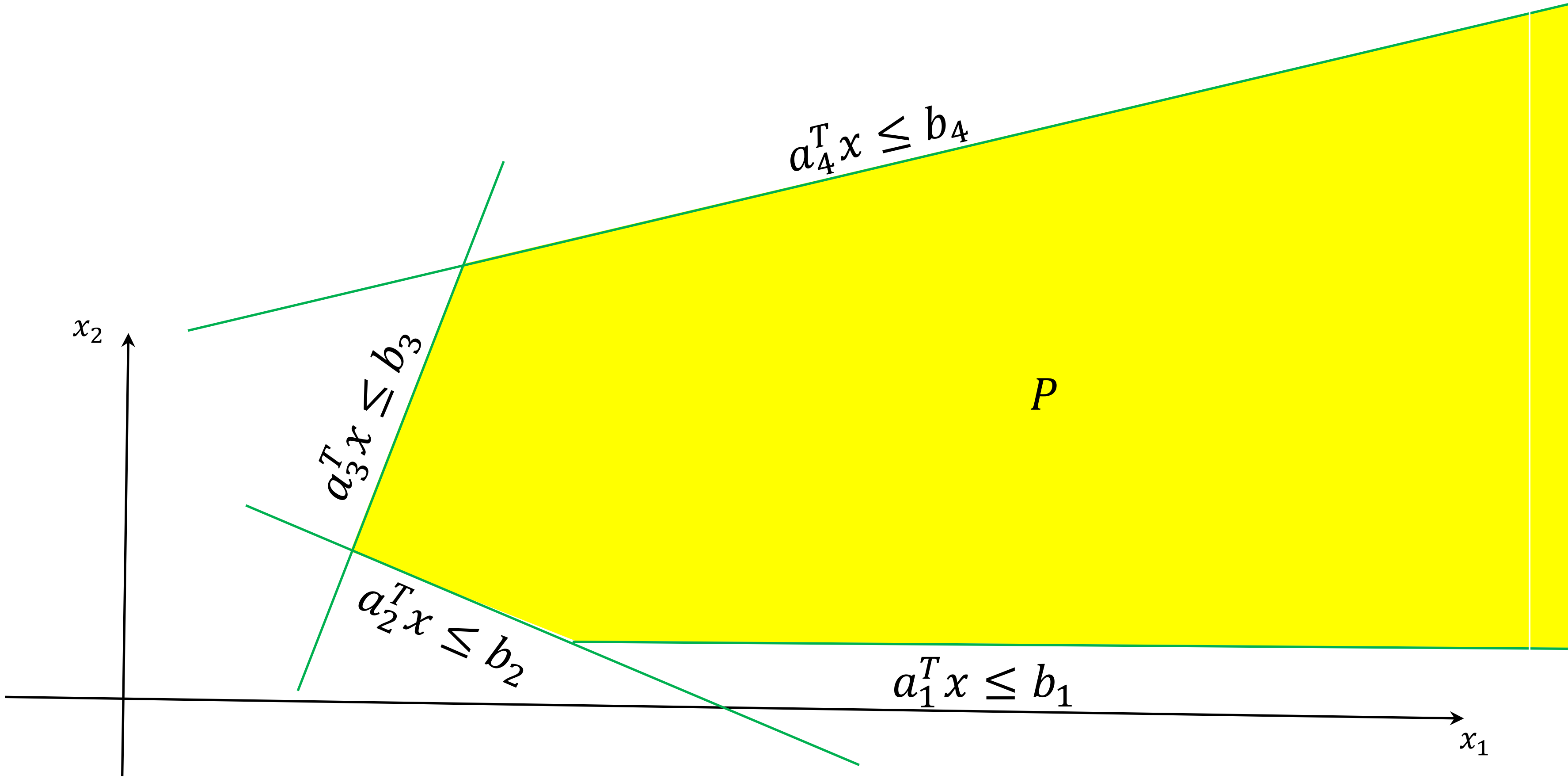
Algebra lineare e geometria poliedrale

$$P = z \in \Re^n : Ax \leq b$$



Algebra lineare e geometria poliedrale

- Poliedro illimitato

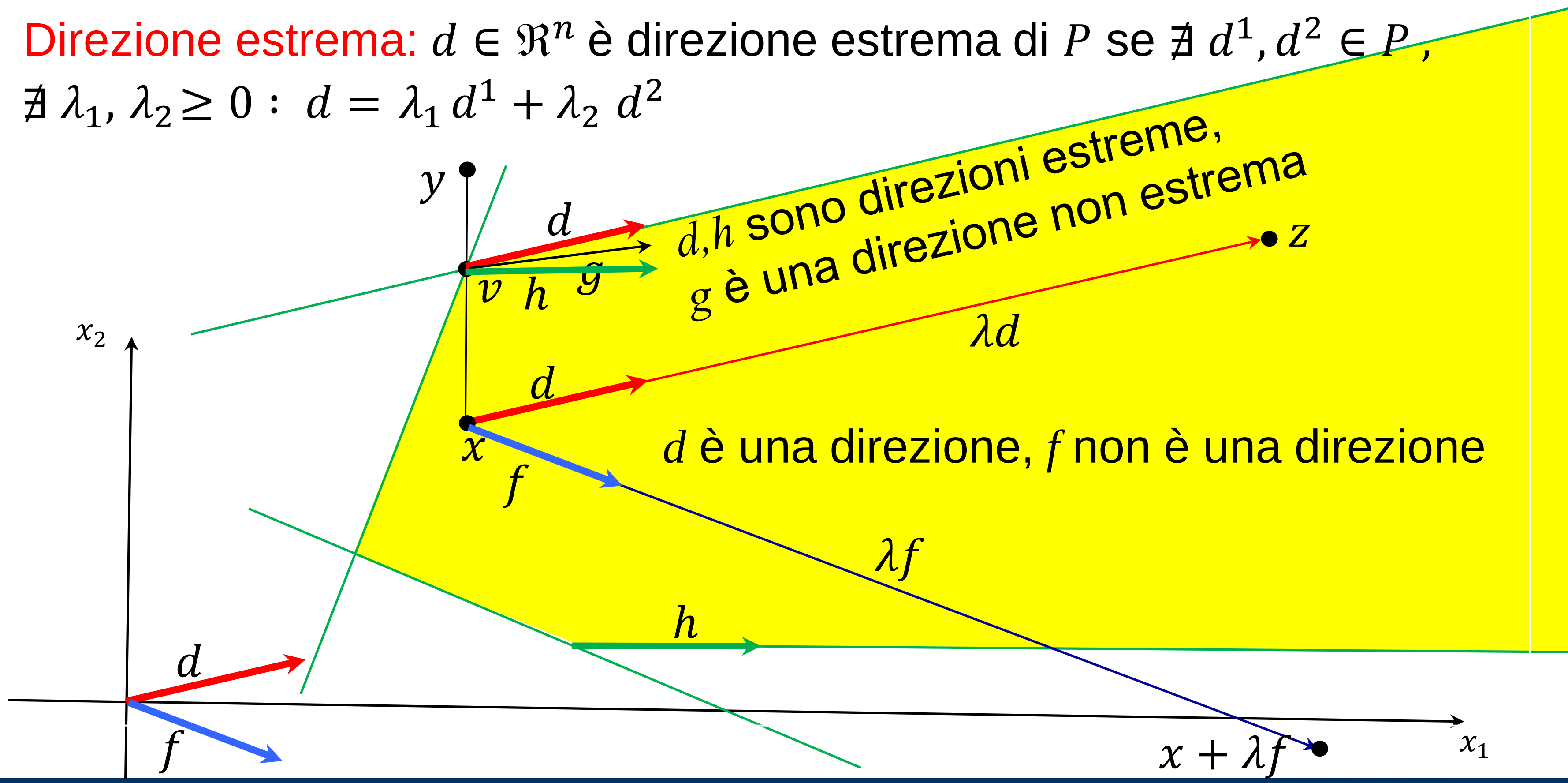


Algebra lineare e geometria poliedrale

- Vertice: $v \in P$ è vertice di P se $\nexists x, y \in P, 0 < \lambda < 1 : v = \lambda x + (1-\lambda)\, y$
- Direzione: $d \in \Re^n, \|d\| = 1$ è direzione di P se:

$$\forall x \in P, \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow z = x + \lambda d \in P$$

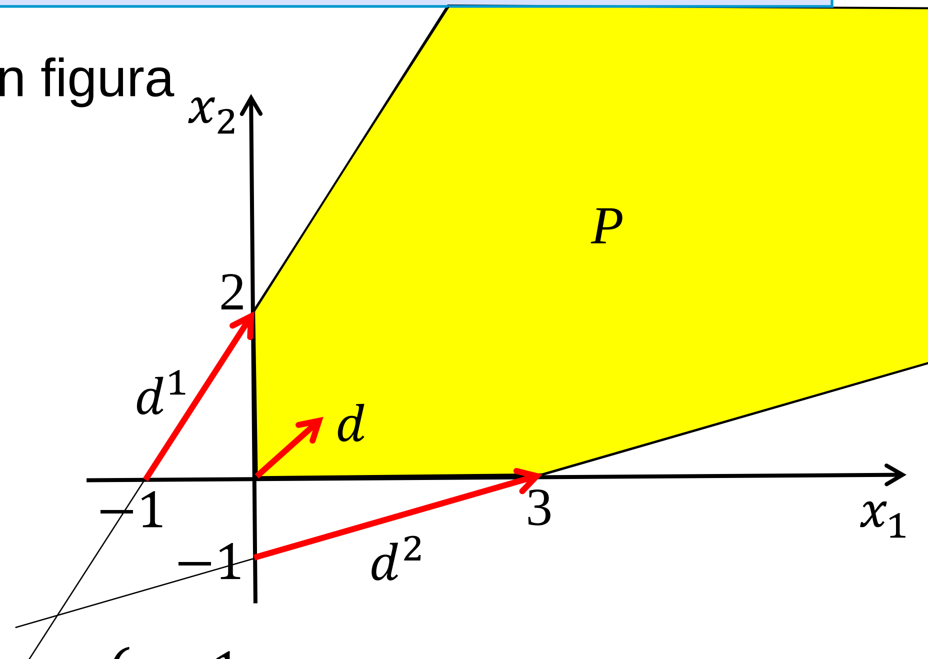
- Direzione estrema: $d \in \Re^n$ è direzione estrema di P se $\nexists\, d^1, d^2 \in P$, $\nexists\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 :\ d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$



Esempio 2

Trovare una direzione del poliedro P in figura

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad d = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



$$d^1 = 1/\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad d^2 = 1/\sqrt{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 3\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq 0 \\ -2\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \geq 0 \end{cases}$$

Algebra lineare e geometria poliedrale

- Teorema di Weyl-Minkowski

Dato un poliedro P contenente almeno un vertice: detti $v^1, v^2, \ldots, v^k$ i suoi vertici (che sono sempre in numero finito $k \geq 1$), dette $d^1, d^2, \ldots, d^h$ le sue direzioni estreme (che sono sempre in numero finito $h \geq 0$),

Se $x \in P$, esistono k scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ con $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1,\ldots,k} \lambda_i = 1$, e h scalari $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ con $\mu_j \geq 0$ tali che

$$x = \sum_{i=1,\ldots,k} \lambda_i v^i + \sum_{j=1,\ldots,h} \mu_j d^j$$

Quindi qualsiasi punto di un poliedro P (contenente almeno un vertice) può esprimersi come somma di una combinazione convessa dei vertici più un combinazione conica delle direzioni estreme di P.

Il risultato consente di dimostrare il teorema fondamentale della PL

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

- Teorema Fondamentale della PL (CONDIZIONI GEOMETRICHE DI OTTIMALITÀ)

Dato un problema di PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, con P contenente almeno un vertice, se esiste una soluzione ottima $\Longrightarrow$ esiste una soluzione ottima su un vertice.

- Lemma (CONDIZIONI GEOMETRICHE DI ILLIMITATEZZA)

Dato un problema di PL $\min\{c^T x : x \in P\}$ e una direzione d di P, se $c^T d < 0$ il problema di PL è illimitato inferiormente.

Dimostrazione del lemma

Per ogni $x \in P$ assurdo, sia x^* una soluzione ottima del problema di PL. Se d è direzione di P, $\forall\, x \in P$ e $\forall\, \lambda \geq 0 \Rightarrow z = x + \lambda d \in P$. Ma allora $c^T z = c^T x + \lambda c^T d < c^T x$, ovvero $\forall\, x \in P \Rightarrow \exists\, z \in P :\ c^T z < c^T x$ ovvero

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} c^T z = -\infty$$

Condizioni geometriche di ottimalità e illimitatezza

Dimostrazione del teorema fondamentale

Sia x^* una soluzione ottima del PL. Per il teo. di W.M.

$$x^* = \sum_{i=1,\dots,k} \lambda_i v^i + \sum_{j=1,\dots,h} \mu_j d^j$$

Dal lemma discende che se esiste soluzione ottima (e quindi il PL non è illimitato inferiormente) deve essere $c^T d \geq 0$ per ogni direzione estrema d di P, quindi $\sum_{j=1,\dots,h} \mu_j c^T d^j \geq 0$. Pertanto:

$$c^T x^* = \sum_{i=1,\dots,k} \lambda_i c^T v^i + \sum_{j=1,\dots,h} \mu_j c^T d^j \geq \sum_{i=1,\dots,k} \lambda_i c^T v^i .$$

Calcoliamo la funzione obiettivo nei k vertici: $c^T v^1, c^T v^2, \dots, c^T v^k$ e prendiamo il minimo. Sia v^* il vertice tale che $c^T v^* = min\{c^T v^i, i = 1, \dots, k\}$

Deve essere $\sum_{i=1,\dots,k} \lambda_i c^T v^i \geq \sum_{i=1,\dots,k} \lambda_i c^T v^* = c^T v^* \sum_{i=1,\dots,k} \lambda_i = c^T v^*$ ovvero $c^T x^* \geq c^T v^*$. Quindi anche v^* è soluzione ottima (e vertice).

Riduzione in forma standard

Definizione un problema di PL è in forma standard se è del tipo:

$$\min\{c^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$$

(f.o. min, $\underbrace{\text{vincoli} =, \text{variabili} \geq 0}_{\text{Poliedro in forma standard}}$). Qualsiasi problema di PL si può ridurre in F.S.

Riduzione in F.S.

Se f.o. è $\max c^T x \Rightarrow$ cambiare segno: $\max c^T x = -\min\ -c^T\ x$

Per ogni vincolo $a_i^T x \geq b_i\ \Rightarrow$ variabile di scarto: $a_i^T x - s_i = b_i$ con $s_i \geq 0$

Per ogni vincolo $a_i^T x \leq b_i\ \Rightarrow$ variabile di scarto: $a_i^T x + s_i = b_i$ con $s_i \geq 0$

Per ogni variabile $x_j \leq 0\ \Rightarrow$ cambiare segno: $x_j = -x_j^-$ con $x_j^- \geq 0$

Per ogni variabile $x_j\ libera\ \Rightarrow$ due variabili: $x_j = x_j^+ - x_j^-$ con $x_j^+, x_j^- \geq 0$

Riduzione in forma standard

Esempio

$$\max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \leq 0; x_3 libera \end{cases}$$

Nuove variabili $x_2 = -x_2^-$ $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ variabili di scarto s_1, s_2

Problema in F.S.

$$\min - \ 4x_1 + 2(-x_2^-) - 7(x_3^+ - x_3^-)$$
$$\begin{cases} -x_1 + (-x_2^-) + 2(x_3^+ - x_3^-) - s_1 = 10 \\ 3x_1 - 4(-x_2^-) - (x_3^+ - x_3^-) + s_2 = 6 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Come si trovano i vertici in un poliedro in forma standard?

Soluzione Base e Soluzione Base Ammissibile

Ipotesi generale: Dato un problema di PL in F.S. $\min\{c^T x \colon Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in \Re^{m \times n}$ nel seguito si assumerà che $\mathrm{rg}(A) = m \leq n$.

A_B è una base di A: sottomatrice quadrata non singolare di ordine massimale (m)

B: insieme degli indici delle colonne in base. N: insieme degli indici delle altre colonne

La matrice A si può partizionare in sottomatrici $A_B \in \Re^{m \times m}$ e $A_N \in \Re^{m \times (n-m)}$

$$A = [A_B A_N]$$

Stessa partizione per x e c: $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, $c^T = [c_B^T \quad c_N^T]$

Poiché A_B è invertibile …

Soluzione Base e Soluzione Base Ammissibile

Esempio:

$$\min - \ 4x_1 - 2x_2^- - 7x_3^+ + 7x_3^-$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- - s_1 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2^- - x_3^+ + x_3^- + s_2 = 6 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [\,-4 \quad -2 \quad -7 \quad 7 \quad 0 \quad 0]$$

$$B = \{5,6\} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_B^T = [0 \quad 0]$$

$$N = \{1,2,3,4\} \Rightarrow x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \end{bmatrix} \qquad A_N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_N^T = [-4 \quad -2 \quad -7 \quad 7]$$

Soluzione Base e Soluzione Base Ammissibile

Dato B, il PL $\min\{c^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$ diventa:

$$\min\{c_B^T x_B + c_N^T x_N\colon \quad A_B x_B + A_N x_N = b, \qquad x_B, x_N \geq 0\}$$

Poiché A_B è invertibile, $A_B x_B + A_N x_N = b$ si può scrivere:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

Esempio: $B = \{5,6\}$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- - s_1 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2^- - x_3^+ + x_3^- + s_2 = 6 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s_1 = -10 - x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- \\ s_2 = 6 - 3x_1 - 4x_2^- + x_3^+ - x_3^- \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione Base e Soluzione Base Ammissibile

Dato B, il PL $\min\{c^T x \colon Ax = b, x \geq 0\}$ diventa:

$$\min\{c_B^T x_B + c_N^T x_N \colon \quad A_B x_B + A_N x_N = b, \qquad x_B, x_N \geq 0\}$$

Poiché A_B è invertibile, $A_B x_B + A_N x_N = b$ si può scrivere:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

Definizione: Soluzione Base è quella che si ottiene ponendo: $\begin{matrix} x_N = 0 \\ x_B = A_B^{-1} b \end{matrix}$

$$\begin{cases} s_1 = -10 - x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- \\ s_2 = 6 - 3x_1 - 4x_2^- + x_3^+ - x_3^- \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s_1 = -10 \\ s_2 = 6 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^- = 0 \end{cases}$$

Non è SBA

Definizione: Soluzione Base Ammissibile (SBA) se $A_B^{-1} b \geq 0$

Soluzione Base e Soluzione Base Ammissibile

Esempio:

$$\min -\ 4x_1 - 2x_2^- - 7x_3^+ + 7x_3^-$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- - s_1 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2^- - x_3^+ + x_3^- + s_2 = 6 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [-1 \quad -2 \quad -7 \quad 7 \quad 0 \quad 0]$$

$$B = \{3,6\} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_3^+ \\ s_2 \end{bmatrix} \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad c_B^T = [-7 \quad 0]$$

è SBA

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_3^+ = 5 \\ s_2 = 11 \\ x_1, x_2^-, x_3^-, s_1 = 0 \end{cases}$$

Soluzione Base e Soluzione Base Ammissibile

Definizione: SBA $\begin{matrix} x_N = 0 \\ x_B = A_B^{-1} b \geq 0 \end{matrix}$ si dice non degenere se $A_B^{-1} b > 0$

degenere se almeno un elemento di $A_B^{-1} b$ è uguale a zero

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\min - \; 4x_1 - 2x_2^- - 7x_3^+ + 7x_3^-$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- - s_1 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2^- - x_3^+ + x_3^- + s_2 = -5 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$B = \{3{,}6\} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_3^+ \\ s_2 \end{bmatrix} \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

SBA degenere

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_3^+ = 5 \\ s_2 = 0 \\ x_1, x_2^-, x_3^-, s_1 = 0 \end{cases}$$

Soluzione Base e Soluzione Base Ammissibile

$$\min - \ 4x_1 - 2x_2^- - 7x_3^+ + 7x_3^-$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- - s_1 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2^- - x_3^+ + x_3^- + s_2 = -5 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$B = \{3,6\} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_3^+ \\ s_2 \end{bmatrix} \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la relazione base-SBA degenere non è biunivoca

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_3^+ = 5 \\ s_2 = 0 \\ x_1, x_2^-, x_3^-, s_1 = 0 \end{cases}$$

$$B = \{3,5\} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_3^+ \\ s_1 \end{bmatrix} \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_3^+ = 5 \\ s_1 = 0 \\ x_1, x_2^-, x_3^-, s_2 = 0 \end{cases}$$

Teorema: SBA $\Leftrightarrow$ Vertice

Teorema: Dato un poliedro in F.S. $P = \{x \in \Re^n\colon Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \Re^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = m \leq n$, x è vertice di $P \Leftrightarrow x$ è SBA di $Ax = b$.

Dimostrazione Parte 1: x è SBA $\Rightarrow x$ è vertice

Per assurdo, assumo che x NON è vertice di $P \Rightarrow$

esistono $y, z \in P$, $0 < \lambda <$ 1: $x = \lambda y + (1-\lambda)\, z \quad \Rightarrow \quad \underset{i=1,\dots,n}{x_i = \lambda y_i + (1-\lambda) z_i}$

x è SBA $\Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$

Se $i \in N \Rightarrow \quad 0 = \lambda y_i + (1-\lambda) z_i$ ma $0 < \lambda <$ 1, $y_i, z_i \geq 0 \Rightarrow y_i = z_i = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\ Ay = b \text{ si può scrivere come } A_B y_B = b \\ \Rightarrow\ Az = b \text{ si può scrivere come } A_B z_B = b\end{array}\right\} \Rightarrow\ A_B(y_B - z_B) = 0$$

Poiché $y \neq z \Rightarrow y_B - z_B = \alpha_B \neq 0$. Ma poiché $A_B \alpha_B = 0$ le colonne di A_B sono linearmente dipendenti, contraddicendo l'HP A_B base.

Teorema: SBA $\Leftrightarrow$ Vertice

Teorema: Dato un poliedro in F.S. $P = \{x \in \Re^n\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \Re^{m \times n}$, $\mathrm{rg}(A) = m < n$, x è vertice di $P \Leftrightarrow x$ è SBA di $Ax = b$.

Dimostrazione Parte 2: x è vertice $\Rightarrow x$ è SBA

Per assurdo, assumo che x NON è SBA $\Rightarrow$

k = n° di componenti positive di x

$\Rightarrow$ $Ax = b$ si può scrivere come $\sum_{i=1,\ldots,k} A_i x_i = b$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $A_1 \ldots A_k$ fossero linearmente indipendenti x sarebbe SBA $\Rightarrow$

$A_1 \ldots A_k$ sono linearmente dipendenti $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq 0\colon \sum_{i=1,\ldots,k} A_i \alpha_i = 0$

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ A\alpha = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x \pm \varepsilon\alpha) = b$$

Se ε è uno scalare sufficientemente piccolo $x \pm \varepsilon\alpha \geq 0$

Definendo $y = x + \varepsilon\alpha$ e $z = x - \varepsilon\alpha \Rightarrow y, z \in P$ inoltre $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x$

contraddicendo l'HP x vertice

Condizioni algebriche di ottimalità

Teorema: Dato un poliedro in F.S. $P = \{x \in \mathfrak{R}^n \colon Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\mathrm{rg}(A) = m \leq n$, se P non è vuoto contiene almeno un vertice.

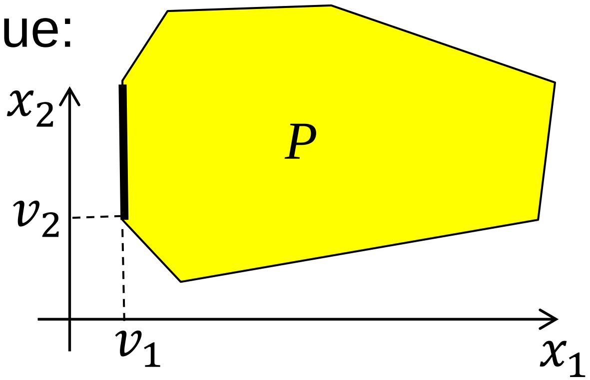
Dimostrazione Costruiamo la soluzione v come segue:

$v_1 = min\{x_1 \colon x \in P\}$;

$v_2 = min\{x_2 \colon x \in P, x_1 = v_1\}$;

$\vdots$

$v_n = min\{x_n \colon x \in P, x_1 = v_1, \dots, x_{n-1} = v_{n-1}\}$.



Dimostriamo che v è un vertice. Per assurdo, se v non è vertice esistono $y, z \in P$, $0 < \lambda < 1$: $v = \lambda y + (1 - \lambda)\, z \quad \Rightarrow \quad v_i = \lambda y_i + (1 - \lambda) z_i$, $i = 1, \dots, n$

$v_1 = \lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1$, se $y_1 > v_1 \Longrightarrow z_1 < v_1$, assurdo,

quindi deve essere $y_1 = z_1 = v_1$;

$v_2 = \lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2$, se $y_2 > v_2 \Longrightarrow z_2 < v_2$, assurdo $\Longrightarrow y_2 = z_2 = v_2; \dots$

$\Longrightarrow y_n = z_n = v_n \Longrightarrow y = z = v$, contraddicendo il fatto che v è comb. conv. stretta di due punti distinti di P.

Condizioni algebriche di ottimalità

Teorema Fondamentale della PL: Dato un problema di PL $\min\{c^T x : x \in P\}$, con P contenente almeno un vertice, se esiste una soluzione ottima $\Longrightarrow$ esiste una soluzione ottima su un vertice.

+

Teorema: Dato un poliedro in F.S. $P = \{x \in \mathfrak{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathfrak{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = m \leq n$, se P non è vuoto contiene almeno un vertice.

+

Teorema: Dato un poliedro in F.S. $P = \{x \in \mathfrak{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathfrak{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = m \leq n$, x è vertice di $P \Leftrightarrow x$ è SBA di $Ax = b$.

=

Teorema: Dato un problema di PL in F.S. $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$, se esiste una soluzione ottima $\Longrightarrow$ esiste una SBA ottima.

Condizioni algebriche di ottimalità

Dato B, il PL $\min\{c^T x \colon Ax = b, x \geq 0\}$ con SBA: $\begin{matrix} x_N = 0 \\ x_B = A_B^{-1} b \geq 0 \end{matrix}$

Si ha: $\min\{c_B^T x_B + c_N^T x_N \colon \quad A_B x_B + A_N x_N = b,\ x_B, x_N \geq 0\}$

$A_B x_B + A_N x_N = b$ si può scrivere $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$

costi ridotti
delle variabili fuori base

Sostituendo x_B nella funzione obiettivo, si ha:

$$c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T\left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N\right) + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b + \left(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N\right) x_N$$

Ponendo: $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$; $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$; $\bar{b} = A_B^{-1} b$; $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$

il PL diventa: $\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N \colon \quad x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N,\ x_B, x_N \geq 0\}$

Definizione: PL in forma canonica (FC) rispetto a B.

Condizioni algebriche di ottimalità

Teorema (delle condizioni algebriche di ottimalità):

Dato un PL in F.C. $\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N: \; x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N, \; x_B, x_N \geq 0\}$, con $\bar{b} \geq 0$,

1. se $\bar{c}_N^T \geq 0 \implies$ la SBA $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$ è una soluzione ottima.
2. se la SBA è ottima e non degenere ($x_B = \bar{b} > 0$, $x_N = 0$) $\implies \bar{c}_N^T \geq 0$.

Dimostrazione:

1 (CS). La SBA ha costo $\bar{z}$. Per ogni soluzione ammissibile x deve essere $x_N \geq 0$ e quindi il costo di qualsiasi altra soluzione è $\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N \geq \bar{z}$.

2 (CN). Per <u>assurdo</u>, $\exists \; \bar{c}_j < 0$.

Si consideri la soluzione $\hat{x}$: $\hat{x}_j = \varepsilon$, $\hat{x}_k = 0 \; \forall k \in N - \{j\}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - \bar{A}_j \varepsilon$,

$\hat{x}$ ammissibile per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccola.

Il costo di $\hat{x}$ è: $\bar{z} + \bar{c}_j \varepsilon < \bar{z}$, <u>contraddicendo</u> l'ottimalità della SBA.

Condizioni algebriche di ottimalità

Esempio:

$$\min -\ 4x_1 - 2x_2^- - 7x_3^+ + 7x_3^-$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- - s_1 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2^- - x_3^+ + x_3^- + s_2 = 6 \\ x_1, x_2^-, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad SBA = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$B = \{3,6\} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} x_3^+ \\ s_2 \end{bmatrix} \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad c_B^T = [-7 \quad 0] \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \{1,2,4,5\} \Rightarrow x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^- \\ x_3^- \\ s_1 \end{bmatrix} \qquad A_N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N^T = [-4 \quad -2 \quad 7 \quad 0]$$

SBA NON ottima

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [-4 \quad -2 \quad 7 \quad 0] - [-7 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [-4 \quad -2 \quad 7 \quad 0] + [7/2 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-15/2 \quad -11/2 \quad 0 \quad 7/2]$$

Condizioni algebriche di ottimalità

Esempio: il quesito con la Susi $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$

$$\max\ x_1 \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 20 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \text{F.S.} \quad \min\ -x_1 \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 \ge 0 \qquad x_3 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \qquad x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È ottima?

$$B = \{1,2\} \Rightarrow A_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad c_B^T = [-1 \quad 0] \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \{3,4\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ c_N^T = [0 \quad 0] \end{array}$$

SBA è ottima

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 3] \ge 0$$

Dai vertici alle SBA alle basi

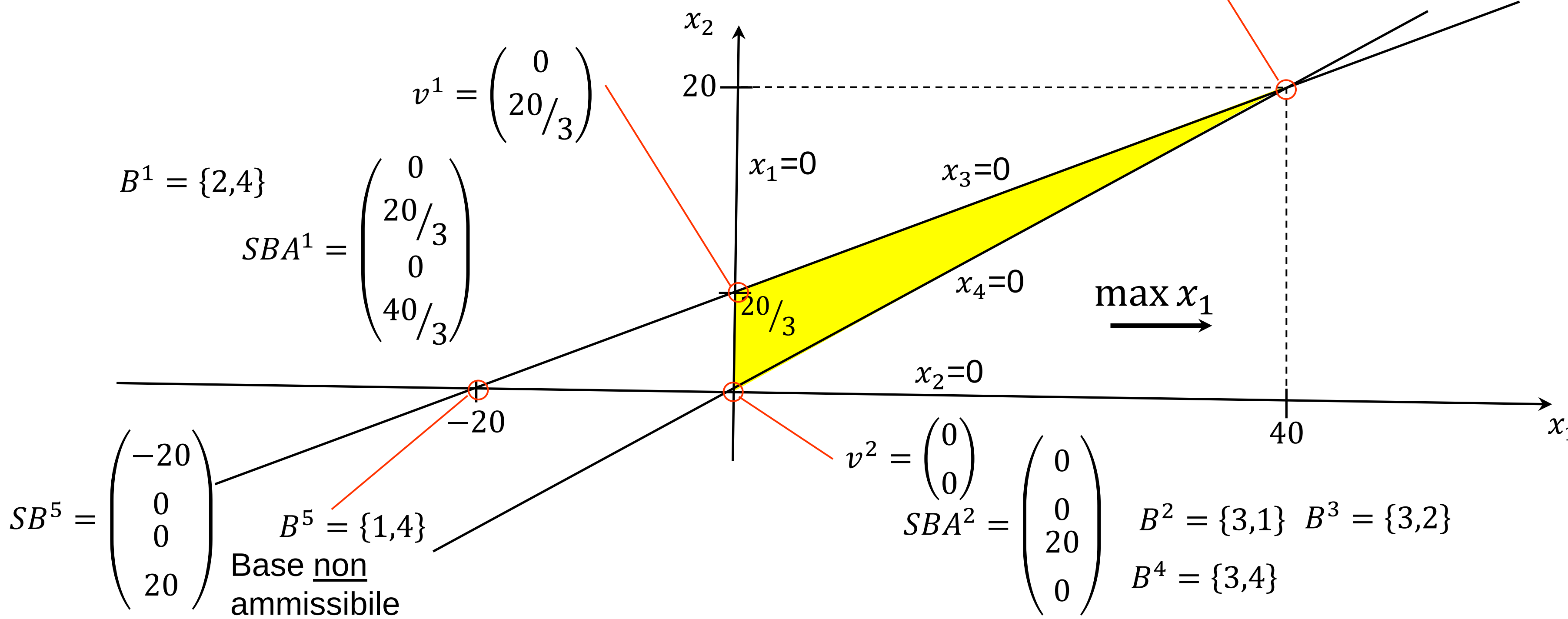
$$\max\ x_1 \qquad\qquad \min\ -x_1$$

$$\begin{cases} -x_1+3x_2 \le 20 \\ x_1-2x_2\le 0 \\ x_1\ge 0 \\ x_2 \ge 0\end{cases} \Rightarrow \text{F.S.} \quad \begin{cases} -x_1+3x_2+x_3 = 20 \\ x_1-2x_2+x_4 = 0 \\ x_1\ge 0 \qquad x_3 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \qquad x_4\ge 0\end{cases}$$

$$SBA^* = \begin{pmatrix}40\\20\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$x^* = \begin{pmatrix}x_G^*\\x_P^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\20\end{pmatrix}$$

$$B^* = \{1,2\}$$



Dai vertici alle SBA alle basi

$$\min\ -x_1$$

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3=20 \\ x_1-2x_2+x_4=0 \\ x_1\ge 0 \qquad x_3\ge 0 \\ x_2\ge 0 \qquad x_4\ge 0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix}$$

$$B^0=\{1,2\}\Rightarrow A_B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow A_B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow x_B=\begin{bmatrix}40\\20\end{bmatrix}$$

$$B^1=\{2,4\}\Rightarrow A_B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A_B^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 2/3 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow x_B=\begin{bmatrix}20/3\\40/3\end{bmatrix}$$

$$B^2=\{3,1\}\Rightarrow A_B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A_B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow x_B=\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix}$$

$$B^3=\{3,2\}\Rightarrow A_B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow A_B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3/2\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}\Rightarrow x_B=\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix}$$

$$B^4=\{3,4\}\Rightarrow A_B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A_B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow x_B=\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix}$$

$$B^5=\{1,4\}\Rightarrow A_B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A_B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow x_B=\begin{bmatrix}-20\\20\end{bmatrix}$$

$$SBA^*=\begin{pmatrix}40\\20\\0\\0\end{pmatrix} \qquad SBA^1=\begin{pmatrix}0\\20/3\\0\\40/3\end{pmatrix} \qquad SBA^2=\begin{pmatrix}0\\0\\20\\0\end{pmatrix} \qquad SB^5=\begin{pmatrix}-20\\0\\0\\20\end{pmatrix}$$

Condizioni di ottimo in una BASE degenere

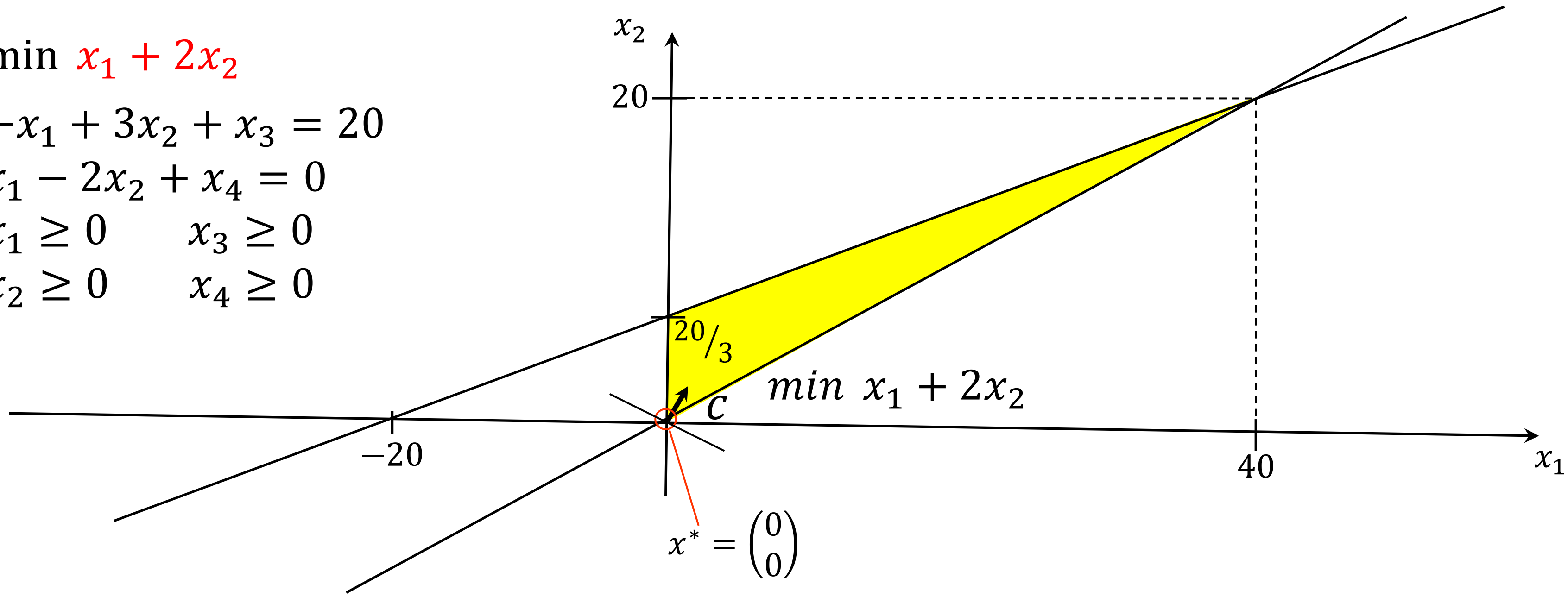
$$\min\ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 20 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\min\ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 \ge 0 \qquad x_3 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \qquad x_4 \ge 0 \end{cases}$$



Condizioni di ottimo in una BASE degenere

$$\min \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \qquad x_4 \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \{3,1\} \Rightarrow A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \; N^2 = \{2,4\}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [2 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = [4 \quad -1]$$

Condizioni non verificate

$$B^3 = \{3,2\} \Rightarrow A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \; N^3 = \{1,4\}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [0 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 1]$$

Condizioni verificate

$$B^4 = \{3,4\} \Rightarrow A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \; N^4 = \{1,2\}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [1 \quad 2] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]$$

Condizioni verificate

Condizioni di ottimo in una BASE degenere

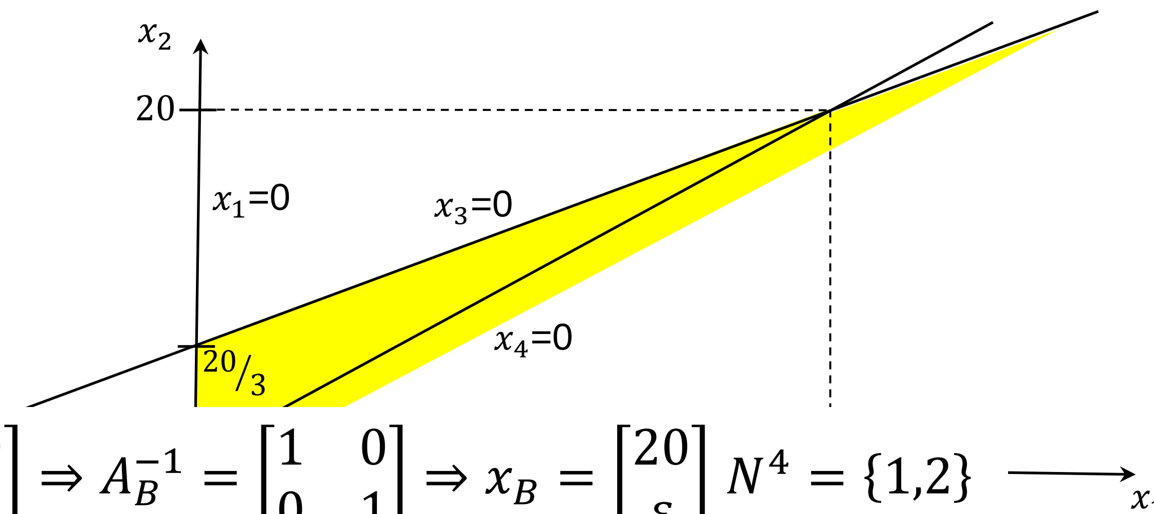
$$\min \ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 20 \\ x_1 - 2x_2 \le \cancel{0}\ \varepsilon \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\min \ x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = \cancel{0}\ \varepsilon \\ x_1 \ge 0 \qquad x_3 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \qquad x_4 \ge 0 \end{cases}$$



$$B^4 = \{3,4\} \Rightarrow A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 20 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \ N^4 = \{1,2\}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [1 \quad 2] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]$$

Condizioni verificate

Condizioni geometriche di illimitatezza

Partendo dalle condizioni geometriche:

Direzione: $d \in \Re^n$ è direzione di P se $\forall x \in P, \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow z = x + \lambda d \in P$

Lemma (CONDIZIONI GEOMETRICHE DI ILLIMITATEZZA)
Dato un problema di PL $\min\{c^T x : x \in P\}$ e una direzione d di P, se $c^T d < 0$ il problema di PL è illimitato inferiormente.

Dimostrazione del lemma
Per ogni $x \in P$ assurdo, sia x^* una soluzione ottima del problema di PL. Se d è direzione di P, $\forall\, x \in P$ e $\forall\, \lambda \geq 0 \Rightarrow z = x + \lambda d \in P$. Ma allora $c^T z = c^T x + \lambda c^T d < c^T x$, ovvero $\forall\, x \in P \Rightarrow \exists\, z \in P :\ c^T z < c^T x$ ovvero

$$\lim_{\lambda \to +\infty} c^T z = -\infty$$

Come è fatta una direzione per un PL in F.S.?

Direzioni di un poliedro

Direzione: $d \in \Re^n: \|d\| = 1$ è direzione di P se $\forall x \in P, \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow z = x + \lambda d \in P$

Teorema:

$d \in \Re^n: \|d\| = 1$ è direzione di $P = \{x \in \Re^n: Ax = b, x \geq 0\} \Leftrightarrow Ad = 0, d \geq 0$

Dimostrazione:

C.S. Se $Ad = 0, d \geq 0 \Rightarrow \forall x \in P$, $\lambda \geq 0 \Rightarrow z = x + \lambda d \geq 0$, $A(x + \lambda d) = b$, e quindi d è direzione di P.

C.N. Se d è direzione di $P \Rightarrow \forall x \in P$, $\lambda \geq 0 \Rightarrow z = x + \lambda d \in P$, ovvero

$\forall \lambda \geq 0 \Rightarrow x + \lambda d \geq 0$, $A(x + \lambda d) = b$.

Poiché $Ax = b \Rightarrow A\lambda d = 0 \Rightarrow Ad = 0$.

Per assurdo, se esistesse $d_j < 0$ per λ grande sarebbe $x_j + \lambda d_j < 0$, contraddicendo l'Hp $x + \lambda d \geq 0 \Rightarrow$ deve essere $d \geq 0$.

Condizioni algebriche di illimitatezza

Teorema (delle condizioni algebriche di illimitatezza):

Dato un PL in F.C. rispetto a B: $\min\{\bar{z} + \bar{c}_N^T x_N : \; x_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b},\; x_B, x_N \geq 0\}$, con $\bar{b} \geq 0$, se $\exists j \in N$: $\bar{c}_j < 0$, $\bar{A}_j \leq 0$, il PL è illimitato inferiormente.

Dimostrazione 1:

Si consideri la soluzione $\hat{x}$: $\hat{x}_j = \alpha \geq 0$, $\hat{x}_k = 0 \; \forall k \in N - \{j\}$, $\hat{x}_B = \bar{b} - \bar{A}_j \alpha$,

$\hat{x}$ ammissibile $\forall$ $\alpha \geq 0$ in quanto $\bar{b} \geq 0$ e $-\bar{A}_j \alpha \geq 0$.

Inoltre, il costo di $\hat{x}$ è: $\bar{z} + \bar{c}_j \alpha$, e quindi $\lim_{\alpha \to +\infty} (\bar{z} + \bar{c}_j \alpha) = -\infty \Rightarrow$ PL ill. inf.

Dimostrazione 2:

Si consideri il vettore d: $d_j = \alpha > 0$, $d_k = 0 \; \forall k \in N - \{j\}$, $d_B = -\bar{A}_j \alpha \geq 0$.

Si noti che la matrice A del PL è $A = [I \;\; \bar{A}_N]$ e che $c^T = [0^T \;\; \bar{c}_N^T]$, e quindi

$Ad = [I \;\; \bar{A}_N] \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = -\bar{A}_j \alpha + \bar{A}_j \alpha = 0$. Quindi d è direzione del poliedro.

Inoltre, $c^T d = [0^T \;\; \bar{c}_N^T] \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = \bar{c}_j \alpha < 0$, quindi d è direzione di costo negativo.

Esercizio 1

Dato il PL in figura e $B = \{2,5,6\}$, posso dire che la SB associata a B:
1. è ammissibile?
2. è sicuramente ottima?
3. sicuramente non è ottima?
4. Posso dire che il PL è ill. inf.?

$$\min \; -4x_1 + 2x_3 + 7x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Anzitutto osserviamo che il PL è in FC rispetto a B, con $\bar{c}_N^T = [\,4 \;\; +2 - 7]$ e SBA <u>degenere</u>. Quindi:
1. è ammissibile? **Si**, perché $\bar{b} \geq 0$
2. è sicuramente ottima? **No**, perché non soddisfa la CS $\bar{c}_N^T \geq 0$
3. sicuramente non è ottima? **No**, perché SBA degenere, non ho CN
4. Posso dire che il PL è ill. inf.? **No**, perché per l'unica variabile con $\bar{c}_j < 0$ non è verificata la condizione $\bar{A}_j \leq 0$. $\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 2

Dato il PL in figura e $B = \{2,5,6\}$, posso dire che la SBA associata a B:
1. è sicuramente ottima?
2. sicuramente non è ottima?
3. Posso dire che il PL è ill. inf.?

$$\min -\ 4x_1 + 2x_3 - 7x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ 3x_1 - 4x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_6 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Anzitutto osserviamo che il PL è in FC rispetto a B, con $\bar{c}_N^T = [-\ 4\ \ +2 - 7]$ e SBA <u>non degenere</u>. Quindi:

1. è sicuramente ottima? **No**, perché non soddisfa la CS $\bar{c}_N^T \geq 0$
2. sicuramente non è ottima? **Si**, perché non soddisfa la CN $\bar{c}_N^T \geq 0$
3. Posso dire che il PL è ill. inf.? **Si**, perché per la variabile x_4 si ha $\bar{c}_4 < 0$ e $\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \leq 0$.

Esercizio 3

Dato il PL in figura e $B = \{3,4,6\}$, posso dire che la SB associata a B:
1. è ammissibile?
2. è sicuramente ottima?
3. sicuramente non è ottima?
4. Posso dire che il PL è ill. inf.?

$$\min -\ 4x_1 + 2x_3 - 7x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Anzitutto osserviamo che il PL non è in FC rispetto a B. Quindi è necessario calcolare $A_B, A_B^{-1}, \bar{b} = A_B^{-1}b, \bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$, $\bar{A}_N = A_B^{-1}A_N$. $N = \{1,2,5\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$ NON è SBA.

Le altre domande perdono di significato.

Esercizio 4

Dato il PL in figura e $B = \{3,4,6\}$, posso dire che la SB associata a B:

1. è ammissibile?
2. è sicuramente ottima?
3. sicuramente non è ottima?
4. Posso dire che il PL è ill. inf.?

$$\min -\ 4x_1 + 2x_3 - 7x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Anzitutto osserviamo che il PL non è in FC rispetto a B. Quindi è necessario calcolare $A_B, A_B^{-1}, \bar{b} = A_B^{-1}b, \bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$, $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$. $N = \{1,2,5\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ è SBA non degenere.

Esercizio 4 - segue

$$B = \{3,4,6\},\quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ N = \{1,2,5\}$$

$$\min -4x_1 + 2x_3 - 7x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\ \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 & 9 \end{bmatrix}$ SBA sicuramente non ottima

$\bar{c}_2 < 0$ e $\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ non è ≤ 0. Non posso dire che PL è ill. inf.

Esercizio 5

Dato il PL in figura e $B = \{3,4,6\}$, posso dire che la SB associata a B:
1. è ammissibile?
2. è sicuramente ottima?
3. sicuramente non è ottima?
4. Posso dire che il PL è ill. inf.?

$$\min -\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 7x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione

Anzitutto osserviamo che il PL non è in FC rispetto a B. Quindi è necessario calcolare $A_B, A_B^{-1}, \bar{b} = A_B^{-1}b, \bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$, $\bar{A}_N = A_B^{-1}A_N$. $N = \{1,2,5\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ è SBA non degenere.

Esercizio 5 - segue

$$B = \{3,4,6\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, N = \{1,2,5\}$$

$$\min - \ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 7x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [-4 \quad 10 \quad 0] - [2 \quad -7 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= [-4 \quad 10 \quad 0] + [12 \quad -9 \quad 9] = [8 \quad 1 \quad 9] \geq 0.$$

SBA sicuramente ottima