

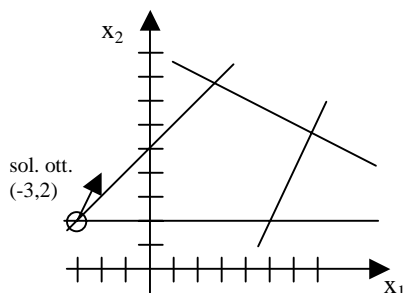
## SOLUZIONI

### Esercizio 1

$$\min x_1 - 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Base di partenza:  $[A_5 \ A_2 \ A_4]$ , entra  $A_3$  esce  $A_4$ , alla successiva iterazione entra  $A_1$  e il problema risulta illimitato.



### Esercizio 2

$$\min x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

### Esercizio 3

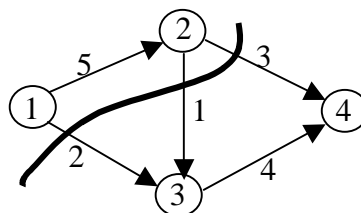
$$\min y_7 + y_8$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + y_7 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_6 = 7 \\ 5x_1 - 2x_3 - 3x_4 + y_8 = 1 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

1. si porta il sistema in forma standard
2. si imposta il problema artificiale (bastano 2 variabili)
3. si risolve il problema artificiale.  
 Base iniziale =  $[A_7 \ A_6 \ A_8]$ , entra  $A_1$  esce  $A_8$ , entra  $A_3$  esce  $A_7$ . La sol. ottima vale 0. Una soluzione ammissibile è  $(5/11 \ 0 \ 7/11 \ 0)$ .

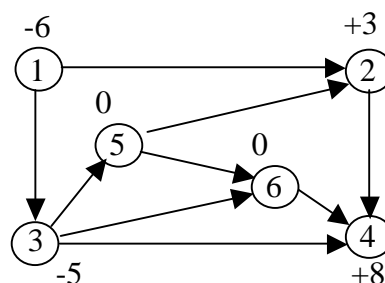
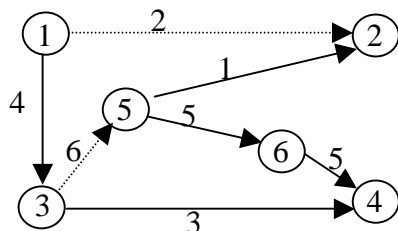
### Esercizio 4

Impostando primale e duale e calcolando le cond. di comp. si dimostra che il flusso 5 uscente dalla sorgente NON è massimo, come evidenziato in figura dal taglio minimo che ha capacità uscente 6.



### Esercizio 5

In figura è data una base ottima, con il flusso su ogni arco.



## SOLUZIONI

### Esercizio 1

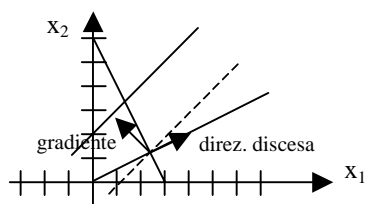
Base di partenza:  $[A_4 \ A_2 \ A_3]$ , entra  $A_1$  esce  $A_3$ , si ottiene la soluzione ottima  $(8 \ 9 \ 0 \ 10 \ 0)$ .

$$\min \quad -x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_5 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

### Esercizio 2

In figura è evidenziata una direzione di discesa appartenente al cono del poliedro, pertanto il problema è illimitato inferiormente.



$$\min \quad -x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq -2 \end{cases}$$

### Esercizio 3

1. si porta il sistema in forma standard
2. si imposta il problema artificiale (bastano 2 variabili)
3. si risolve il problema artificiale.  
Base iniziale =  $[A_7 \ A_6 \ A_8]$ . La sol. ottima ha valore diverso da 0. Il sistema iniziale è incompatibile.

$$\min \quad y_7 + y_8$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + y_7 = 6 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + y_8 = 1 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

### Esercizio 4

La soluzione data NON è ottima.

$$x^T = (1 \ 0 \ 2 \ 0)$$

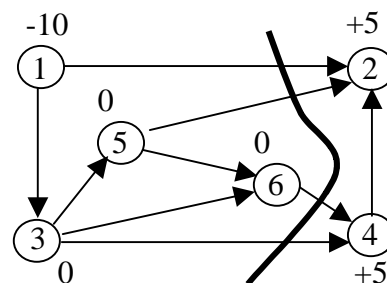
$$\min \quad -9x_1 + x_2 + 3x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

### Esercizio 5

Il problema non ammette soluzione ammissibile. Il problema artificiale termina evidenziando nella soluzione ottima il taglio in figura, di capacità uscente minore di 10.

Archi	(1,2)	(1,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,2)	(5,2)	(5,6)	(6,4)
Capacità	2	10	2	5	8	2	1	6	4



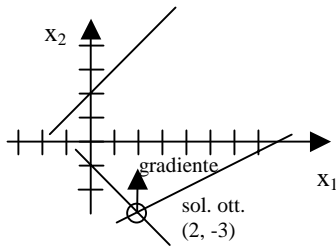
## SOLUZIONI

### Esercizio 1

Base di partenza:  $[A_3 \ A_1 \ A_6]$ , entra  $A_2$  esce  $A_6$ , alla successiva iterazione entra  $A_5$  esce  $A_1$ , alla successiva iterazione entra  $A_4$  e il problema risulta illimitato.

$$\min \quad 20x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_2 - 2x_5 + x_6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



### Esercizio 2

$$\min \quad x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

### Esercizio 3

1. si porta il sistema in forma standard
2. si imposta il problema artificiale (bastano 2 variabili)
3. si risolve il problema artificiale.

Base iniziale =  $[A_7 \ A_6 \ A_8]$ . La sol. ottima ha valore uguale a 0. Il sistema iniziale ammette almeno la soluzione  $(17/3 \ 12 \ 2/3)$ .

$$\min \quad y_7 + y_8$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + y_7 = 3 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 8 \\ 5x_1 - x_3 - 2x_4 + y_8 = 1 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

### Esercizio 4

NON esiste una coppia di soluzioni ottime per il primale e il duale  $x^*, u^*$  tali che  $x_2^* = 3, u_3^* = 0$

Si ottengono infatti le condizioni incompatibili:

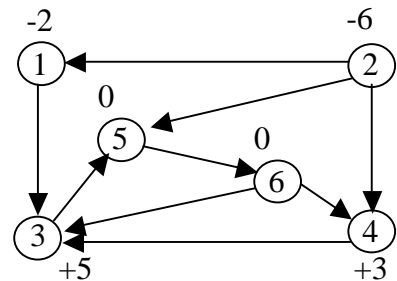
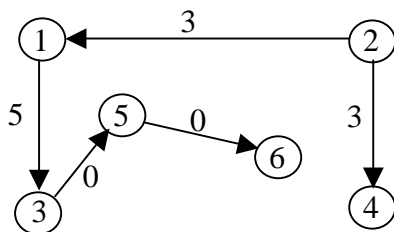
$$\begin{cases} -6 - 4u_1 + 2u_2 = 0 \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\min \quad -2x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

### Esercizio 5

In figura è data una base ottima (degenere), con il flusso su ogni arco.



## SOLUZIONI

### Esercizio 1

Base di partenza:  $[A_5 \ A_3 \ A_1]$ , entra  $A_4$  esce  $A_5$ , si ottiene la soluzione ottima  $(16 \ 0 \ 17 \ 3 \ 0)$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_2 + x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 14 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### Esercizio 2

Il poliedro delle soluzioni è vuoto. Il problema è impossibile.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

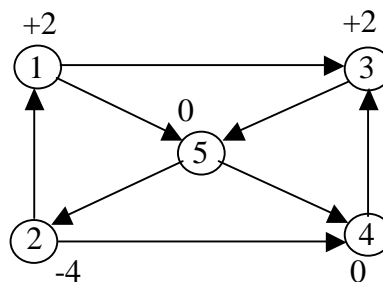
### Esercizio 3

1. si porta il sistema in forma standard
2. si imposta il problema artificiale (bastano 2 variabili)
3. si risolve il problema artificiale.  
 Base iniziale =  $[A_7 \ A_6 \ A_8]$ . La sol. ottima ha valore diverso da 0. Il sistema iniziale è incompatibile.

$$\begin{aligned} \min \quad & y_7 + y_8 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 + y_7 = 5 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 + x_6 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_4 + y_8 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### Esercizio 4

Impostando primale e duale e calcolando le cond. di comp. si dimostra che il flusso dato NON è di costo minimo.



### Esercizio 5

1. Si aggiungono una sorgente fittizia  $s$ , connessa ai nodi 1 e 5, e un terminale fittizio  $t$ , connesso ai nodi 2 e 4, come in figura.
  2. Si applica l'algoritmo di Ford e Fulkerson a partire dal flusso dato. Il flusso massimo è pari a 14.
- In figura è evidenziato il taglio di capacità uscente minima.

