Esercizi su limiti di funzioni

Calcolare i seguenti limiti (quando occorre ricondursi ai limiti notevoli):

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{4x+3}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x(1-\cos x)}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3+x^2-2x-8}$
4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-2x-8}{x^3-2x^2-4x+8}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$
6. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+3\sin x+2}{\sin^2 x-1}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+x-1}{8x^3+3x^2-5}$
8. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3})$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{e^{2x}-1}$
10. $\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}})$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$
13. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\tan x}$
14. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (e^{\cos x}-1)\tan x$
15. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$
16. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x}+\tan\frac{1}{x}}{\sqrt[x]{3}-1}$

17. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{-3x}$

18. $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln \sin 2x)$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^3 - 1}{\sin x^5}$

20. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)(a^x - 1)(1 - \cos x)}{x^4}$

22. $\lim_{x\to +\infty} x^{\sin \frac{1}{x}}$

23. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}\right)$

24. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+4})$

25. $\lim_{x\to 0} \log_{(x^2+1)}(x^3 + 1)$

26. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^x$

27. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$

28. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 7x + 12}$

29. $\lim_{x\to 1} (1+x) \arctan \frac{1}{1-x^2}$

30. $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x (e^{\frac{1}{x}} - 1)x^k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

Risultati:

1. $+\infty$ 2. 2 3. 0 4. non esiste 5. $\frac{3}{2}$
6. $-\frac{1}{2}$ (suggerimento: porre $\sin x = t$) 7. 0 8. 0 9. $\frac{3}{2}$ 10. $+\infty$
11. 1 12. 0 13 1 14. 1 15. $\frac{5}{2}$
16. $\log_3 e$ 17. 1 18. $\ln\frac{1}{2}$ 19. 0 20. $\frac{1}{4}$ 21. $\ln\sqrt{a}$ 22. 1
23. $+\infty$ 24. 0 25. 0 26. 0 27. 2 28. 10
29. non esiste (limite destro é $-\pi$ limite sinistro é π)
30. e se $k=1$, 0 se $k>1$, $+\infty$ se $k<1$

Svolgimento degli esercizi 1-2-3-7-8:

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+1}{4x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{3}{0} = +\infty$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = 1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

3.(f. i. del tipo 0/0) Sia il polinomio al numeratore che il polinomio al denominatore si annullano per $x=2$. Eseguendo la divisione per $(x-2)$ si ha:

$$x^3-2x-4x+8 = (x-2)(x^2-4)$$

$$x^3+x^2-2x-8 = (x-2)(x^2+3x+4)$$

risulta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3+x^2-2x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-4)}{(x-2)(x^2+3x+4)} = 0$$

7. (f. i. del tipo $\frac{\infty}{\infty}$) Ponendo in evidenza, sia al numeratore che al denominatore x^3 si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-1}{8x^3+3x^2-5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(8+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})} = \frac{0}{8} = 0$$

8. (f. i. del tipo $+\infty-\infty$) Razionalizzando grazie al prodotto notevole $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ (nel nostro caso $a=\sqrt{x^2+1}$ e $b=\sqrt{x^2-3}$) si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}} = \frac{4}{\infty} = 0$$