M/M/S

giovedì 5 novembre 2020 19:08

M/M/S

NEI SISTEMI M/M/S IL TEMPO DI ARRIVO È DISTRIBUITO ESPONENZIALMENTE CON PARAMETRO λ MENTRE IL TEMPO DI SERVIZIO È DISTRIBUITO ESPONENZIALMENTE CON PARAMETRO μ. ABBIAMO S SERVENTI IDENTICI CHE LAVORANO IN PARALLELO

IPOTESI DI FUNZIONAMENTO

$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0, 1, \dots$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n \leq s \\ s\mu & n \geq s \end{cases}$$

$$\rho < 1 \qquad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

PROCESSI NASCITA E MORTE
SISTEMI STAZIONARI

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j} P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\boxed{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n} \mu_j}}}$$

D

$\boxed{1^{\circ} \text{ CASO } \quad n < s}$

$$\prod_{j=1}^{n} \mu_j = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \ldots \cdot \mu_n = \mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdot \ldots \cdot n\mu = n!\,\mu^n$$

$\boxed{2^{\circ} \text{ CASO } \quad n \geq s}$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} \mu_j = s!\,\mu^s (s\mu)^{n-s} = s!\,\mu^s\, s^{n-s} \cdot \mu^{n-s} = \boxed{s!\, s^{n-s} \mu^n}$$

$n = s$

$$\prod_{j=1}^{n} \mu_j = s!\,\mu^s$$

$n = s+1$

$$\prod_{j=1}^{n} \mu_j = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \ldots \cdot \mu_s \cdot \mu_{s+1} = \mu \cdot 2\mu \cdot \ldots \cdot s\mu \cdot s\mu = s!\,\mu^s \cdot (s\mu)$$

$n = s+2$

$$\prod_{j=1}^{n} \mu_s = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_s \cdot \mu_{s+1} \cdot \mu_{s+2} = \mu \cdot 2\mu \cdot \ldots \cdot s\mu \cdot s\mu \cdot s\mu = s!\,\mu^s \cdot s\mu \cdot s\mu = s!\,\mu^s (s\mu)^2$$

$$\boxed{P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & 1 \leq n \leq s \\ \frac{1}{s!\, s^{n-s}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & n \geq s \end{cases}}$$

P_n NEI SISTEMI M/M/S

MI TROVO P_0 MA SVOLGO SOLO IL DENOMINATORE PER PRATICITÀ. P_0 SARÀ L'INVERSO DEL RISULTATO CHE TROVERÒ

DEL RISULTATO CHE TROVERÓ

$$D = 1 + \sum_{n=1}^{S-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \underbrace{\sum_{n=S}^{\infty} \frac{1}{S!\,S^{n-S}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}_{q = n - S \rightarrow n = q + S} = \sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{S!\,S^q}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{q+S} =$$

$$= \sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \underbrace{\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^q}_{\text{SERIE GEOMETRICA}} = \sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{S\mu}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{S\mu}}}}$$

P_0 NEI SISTEMI $M/M/S$

MI CALCOLO L

$$L = \sum_{l=0}^{\infty} l P_l = \sum_{n=S}^{\infty} (n-S) P_n \underset{m = (n-S)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} m P_{m+S} = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{1}{S!\,S^{m+\cancel{S-S}}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+S} P_0$$

$$l = \begin{cases} n - S & n \geq S \\ 0 & n < S \end{cases}$$

$$L = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{1}{S!\,S^m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0 = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0 \sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)^m =$$

$$= \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0\, \rho \sum_{m=0}^{\infty} m\, (\rho)^{m-1} = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0\, \rho \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{1-\rho}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}$$

L NEI SISTMEMI $M/M/S$