



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2014

Nome:	Matricola:
Cognome:	Firma:

Esercizio 1

Un tifoso di calcio in partenza da Roma vuole raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale spendendo il meno possibile. Sono date le seguenti disponibilità di voli.

ID collegamento	Da	A	prezzo
1	Roma	Parigi	100
2	Roma	Mosca	350
3	Roma	New York	464
4	Parigi	Bali	950
5	Parigi	Mosca	280
6	Mosca	New York	150
7	Mosca	Bali	970
8	Mosca	Rio	1100
9	Bali	Rio	1320
10	New York	Rio	680

1. Formulare il problema come problema di flusso di costo minimo su una rete opportuna.
2. Trovare la soluzione ottima con l'algoritmo del simplesso su reti (fase 1 e fase 2). Si consiglia di scegliere con cura gli archi in base all'inizio della fase 1 (per es. i più economici)
3. A partire dalla precedente, trovare la nuova soluzione ottima se il costo del collegamento 5 diventa 190.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 7 nodi 1...7. Per ogni arco è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, 7 è il nodo sorgente e 1 è il nodo pozzo.

Archi	1, 2	2, 5	3, 2	3, 6	3, 7	4, 1	5, 4	5, 6	6, 4	6, 1	7, 3	7, 6
Flussi	0	2	2	0	3	3	1	1	2	2	5	3
Capacità	3	10	7	3	5	8	2	5	4	6	9	6

1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale e determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Altrimenti, scaricare il flusso iniziale e risolvere il problema del massimo flusso utilizzando Ford e Fulkerson.
2. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi 7 e 1.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo se la capacità dell'arco (5, 4) è incrementata di 3 unità. Evidenziare il taglio ottimo trovato.

Domanda 3

Illustrare la versione efficiente dell'algoritmo di Dijkstra per trovare il cammino orientato minimo in un digrafo pesato. In particolare dimostrare le condizioni di ottimalità utilizzate dall'algoritmo e discutere la sua complessità computazionale.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
20 giugno 2014

Nome:	Matricola:
Cognome:	Firma:

Esercizio 1

Molti tifosi di calcio in partenza da Roma vogliono raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale, tuttavia i posti disponibili sui voli sono quasi esauriti. Sono date le seguenti disponibilità di posti.

ID collegamento	Da	A	Disponibilità posti
1	Roma	Parigi	7
2	Roma	Mosca	9
3	Roma	New York	3
4	Parigi	Bali	4
5	Parigi	Mosca	5
6	Mosca	New York	6
7	Mosca	Bali	8
8	Mosca	Rio	11
9	Bali	Rio	4
10	New York	Rio	6

1. Formulare il problema di inviare quanti più tifosi possibile da Roma a Rio come un opportuno problema su reti e trovarne la soluzione ottima con un algoritmo appropriato appreso nel corso.
2. Indicare come varia la soluzione ottima se la disponibilità di posti sul collegamento 5 diventa 7.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 8 nodi 1...8. Per ogni arco sono dati il costo di percorrenza unitario ed un flusso ammissibile iniziale.

1. Determinare la fornitura dei nodi.
2. A partire dal flusso iniziale dato, determinare un flusso ammissibile di costo minimo con l'algoritmo del simplesso su reti.

Archi	1, 3	1, 2	2, 1	1, 4	3, 7	3, 5	5, 3	3, 4	2, 5	4, 2
Flussi	3	0	2	4	1	0	0	0	0	0
Costi	1	6	12	2	-1	0	18	1	5	10
Archi	4, 5	4, 8	4, 6	6, 4	5, 6	6, 8	7, 6	7, 5	7, 8	8, 7
Flussi	6	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Costi	3	15	5	-1	5	6	12	6	18	1

Domanda 3

Illustrare la definizione di problema duale e coppia primale-duale nella PL. Enunciare e dimostrare i teoremi di dualità debole e forte.

Nome:	Matricola:
Cognome:	Firma:

Esercizio 1

Un tifoso di calcio in partenza da Roma vuole raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale spendendo il meno possibile. Sono date le seguenti disponibilità di voli.

ID collegamento	Da	A	prezzo
1	Roma	Parigi	100
2	Roma	Mosca	350
3	Roma	New York	464
4	Parigi	Bali	950
5	Parigi	Mosca	280
6	Mosca	New York	150
7	Mosca	Bali	970
8	Mosca	Rio	1100
9	Bali	Rio	1320
10	New York	Rio	680

1. Formulare il problema come problema di programmazione lineare (non su reti).
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che il percorso Roma, New York, Rio è la soluzione ottima del problema.
3. In caso affermativo, utilizzando l'analisi di sensitività per la PL, verificare se la soluzione resta ottima quando il costo del collegamento 5 diventa 190.

Esercizio 2

State applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall ad un grafo con 5 nodi, A...E. Alla fine del passo 2 ottenete le matrici in figura (quella di sinistra indica i costi dei percorsi, quella di destra i predecessori).

passo 2	A	B	C	D	E
A	0	$+\infty$	2	2	2
B	6	0	8	5	1
C	-1	$+\infty$	0	1	1
D	1	-5	-1	0	-4
E	1	$+\infty$	3	2	0

passo 2	A	B	C	D	E
A	A	A	A	A	A
B	B	B	A	B	B
C	C	C	C	C	A
D	B	D	D	D	B
E	E	E	A	E	E

1. Effettuate i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo, aggiornando entrambe le matrici ad ogni passo dell'esecuzione. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.
2. Fissate gli elementi in posizione (A, D) = 3 e (E, D) = 4. Ripetete i passi 3, 4 e 5 dell'algoritmo. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo.
3. Se possibile, mostrate i cammini orientati minimi $A \rightarrow E$ e $A \rightarrow C$ per le matrici ottime ottenute ai punti 1 e 2.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di vertice e soluzione di base ammissibile. Dimostrare che una soluzione ammissibile di un problema di PL in forma standard è un vertice del poliedro delle soluzioni ammissibili se e solo se è una soluzione di base ammissibile.

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
20 giugno 2014

Nome:	Matricola:
Cognome:	Firma:

Esercizio 1

Molti tifosi di calcio in partenza da Roma vogliono raggiungere Rio De Janeiro per la finale del mondiale, tuttavia i posti disponibili sui voli sono quasi esauriti. Sono date le seguenti disponibilità di posti.

ID collegamento	Da	A	Disponibilità posti
1	Roma	Parigi	7
2	Roma	Mosca	9
3	Roma	New York	3
4	Parigi	Bali	4
5	Parigi	Mosca	5
6	Mosca	New York	6
7	Mosca	Bali	8
8	Mosca	Rio	11
9	Bali	Rio	4
10	New York	Rio	6

1. Formulare il problema di inviare quanti più tifosi possibile da Roma a Rio come un opportuno problema su reti e trovarne la soluzione ottima con un algoritmo appropriato appreso nel corso.
2. Trovare la nuova soluzione ottima se la disponibilità di posti sul collegamento 5 diventa 15.

Esercizio 2

È dato il problema primale di PL in figura.
Utilizzando l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del primale o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente.
Applicare la regola di Bland.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 - 5x_4 \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 2 \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad x_4 \text{ libera} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Domanda 3

Illustrare l'algoritmo di Floyd-Warshall per il cammino di costo minimo in un digrafo. Dimostrare la correttezza dell'algoritmo (condizioni di ottimo) se il digrafo non contiene cicli orientati negativi e discuterne la sua complessità computazionale.

Nome:	Matricola:
Cognome:	Firma:

Esercizio 1

ArcWeb è una piccola azienda di Terni, con 6 dipendenti, specializzata nella produzione di siti web per studi di architettura e nelle prossime quattro settimane deve consegnare 14 siti di tipo A e 10 di tipo B. I siti di tipo A non possono essere lavorati dai dipendenti con la formazione attuale perché richiedono l'utilizzo del nuovo software di progettazione XXX. Pertanto un dipendente può lavorare un sito di tipo A solo dopo aver seguito un corso di formazione di una settimana e nella settimana di formazione non è produttivo. E' previsto un solo corso di formazione nella prima settimana. ArcWeb dovrà quindi decidere quanti dipendenti formare in questa settimana tenendo conto che: un sito di tipo A richiede 20 ore di lavoro, un sito di tipo B ne richiede 32, ciascun dipendente lavora 40 ore settimanali, i 10 siti di tipo B devono essere consegnati entro la fine della seconda settimana e i 14 siti di tipo A entro la fine della quarta.

1. Ipotizzando che sia possibile formare un numero frazionario di dipendenti, formulare come problema di PL il problema di completare i progetti nei tempi previsti formando il minimo numero di dipendenti nella prima settimana.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che preveda la formazione 3 dipendenti nella prima settimana, due dei quali lavoreranno ai progetti B nella seconda settimana e ai progetti A nella terza e quarta.

Esercizio 2

In tabella è riportata la matrice di incidenza vertici/lati di un grafo.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	1	1	1							1		
2	1			1	1	1						1
3						1	1	1				
4		1		1					1		1	
5			1		1		1		1			
6								1		1	1	1
Costi	4	1	2	3	4	5	3	5	4	5	3	2

1. Trovare un albero ricoprente a costo minimo partendo dal vertice 5 tramite la versione efficiente dell'algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i lati all'albero.
2. Partendo dal grafo in tabella, come varia la soluzione ottima se aggiungo il lato (4,3) di costo 1?
3. Partendo dal grafo in tabella con aggiunta del lato (4,3) di peso 1, esistono più alberi ricoprenti a costo minimo? Se sì, mostrarne almeno due.

Domanda 3

Definire il problema di flusso di costo minimo, illustrare un algoritmo noto per risolverlo e dimostrare che una base della matrice dei coefficienti del problema in forma standard corrisponde a un albero ricoprente della rete di flusso

Nome:	Matricola:
Cognome:	Firma:

Esercizio 1

La Ponga Ltd è una multinazionale specializzata nella produzione di liquori derivati dalla canna da zucchero. L'ufficio legale ha 6 avvocati e segue le attività della Ponga nei diversi paesi in cui opera. Una nuova normativa sui rapporti sindacali richiede un aggiornamento dei 6 avvocati sul tema, il che può essere effettuato facendo seguire a ciascuno un corso di una settimana, durante la quale non potrà seguire le pratiche dell'ufficio. Nella prima e terza settimana si terranno due edizioni del corso, al costo di 1000 euro a formando nella prima settimana e 1200 nella terza. La Ponga dovrà quindi decidere quanti avvocati aggiornare nelle due edizioni per completare la formazione dei 6 avvocati entro la fine della terza settimana. Si tenga presente che oltre alle pratiche sindacali, che possono essere seguite solo dagli avvocati preventivamente aggiornati, l'ufficio deve seguire anche le pratiche contrattuali, che posso essere seguite senza alcun aggiornamento. Nelle prossime 3 settimane l'ufficio legale deve seguire pratiche sindacali per 120 ore di lavoro, mentre entro la fine della seconda settimana devono essere completate pratiche contrattuali per 280 ore di lavoro. Ciascun avvocato lavora 40 ore a settimana, quando non è impegnato nell'aggiornamento.

1. Ipotizzando che sia possibile formare un numero frazionario di avvocati nella prima e terza settimana, formulare come problema di PL il problema di completare il lavoro dell'ufficio nei tempi previsti aggiornando i 6 avvocati entro la terza settimana al costo di aggiornamento minimo.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che preveda l'aggiornamento di 3 avvocati nella prima settimana e 3 nella terza, lo svolgimento di tutte le pratiche sindacali nella terza settimana e lo svolgimento delle pratiche contrattuali nelle prime due.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un digrafo pesato composto da 7 nodi 1...7. Per ogni arco sono date le distanze (a, b) tra il nodo testa a e il nodo coda b .

Archi	1, 4	1, 5	2, 4	2, 5	2, 3	3, 6	5, 4	6, 5	6, 1	7, 2	7, 3	7, 6
Distanze	3	2	4	1	1	2	1	3	2	6	2	7

1. Trovare l'albero dei cammini orientati di peso minimo dal nodo 7 verso tutti gli altri nodi utilizzando la versione efficiente dell'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i nodi in S .
2. Mostrare l'albero dei cammini orientati minimi, e calcolare il peso del percorso orientato minimo dal nodo 7 al nodo 4, e il peso del percorso orientato minimo dal nodo 7 al nodo 1.
3. Aggiungere alla tabella l'arco (6,2) di peso 3 e ripetere i punti 1 e 2 partendo dai dati in tabella.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di vertice e direzione estrema di un poliedro P non vuoto in forma standard. Enunciare il teorema di Minkowski-Weyl e utilizzarlo per dimostrare che se un problema di PL definito su P ammette soluzione ottima, allora ammette una soluzione di base ammissibile ottima.