A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Secondo recupero - Ordinamento DM 509/99
22 settembre 2010

Nome:	Matricola:
Cognome:	

Esercizio 1

La produzione del pane su scala industriale segue un processo in cinque fasi: (1) preparazione ingredienti, (2) impasto in gradienti, (3) prima cottura, (4) trattamento superficiale pane, (5) seconda cottura. Un'azienda dispone di 14 unità di personale e delle seguenti macchine:

- 3 impastatrici A,B,C per la fase (2) con capacità produttiva (in kg di farina per ora) 10, 8, 7 rispettivamente;
- 2 forni D,E per prima cottura di capacità (in kg di farina per ora) 10, 13 rispettivamente;
- 1 forno F per seconda cottura di capacità (in kg di farina per ora) 21;

Le fasi (1) e (4) richiedono 0,1 ore di personale ciascuna per kg di farina lavorata per ora. Le impastatrici A,B,C richiedono rispettivamente 0,3 0,2 e 0,1 ore di personale per kg di farina lavorata per ora. I forni D,E,F richiedono rispettivamente 0,2 0,3 e 0,1 ore di personale per kg di farina lavorata per ora.
Si vuole determinare la produzione massima dell'azienda (in kg di farina per ora).

1. Formulare il problema come un opportuno problema di PL, esplicitando le unità di misura delle variabili ed il loro significato
2. Formulare il problema duale
3. Utilizzando le condizioni di ortogonalità dimostrare o confutare che all'ottimo si utilizzano solo 12 unità di personale, mentre A, E ed F lavorano rispettivamente 5, 10 e 20 Kg di farina per ora.

Soluzione

Per formulare questo problema scegliamo le seguenti variabili

x_F kg di farina per ora lavorati dal forno F. Questa quantità sarà anche la produzione dell'impianto e la farina lavorata nelle fasi (1) e (4) in quanto ciascuno stadio di produzione deve lavorare la stessa quantità di prodotto.
$x_A ... x_E$ kg di farina per ora lavorati dalla macchina A…E.

Si hanno i seguenti vincoli:

consumo di personale per ora minore o uguale alla disponibilità:
$$(0{,}1+0{,}1+0{,}1)x_F + 0{,}3x_A + 0{,}2x_B + 0{,}1x_C + 0{,}2x_D + 0{,}3x_E \le 14$$

Produzione per macchina minore o uguale alla capacità produttiva

$$\begin{array}{ll} x_A \le 10 & x_D \le 10 \\ x_B \le 8 & x_E \le 13 \\ x_C \le 7 & x_F \le 21 \end{array}$$

La produzione in ciascuno stadio produttivo è pari alla produzione dell'impianto:

La formulazione è pertanto:

$$\max x_F$$

$$\begin{cases} 0{,}3x_A + 0{,}2x_B + 0{,}1x_C + 0{,}2x_D + 0{,}3x_E + 0{,}3x_F \le 14 \\ x_A + x_B + x_C - x_F = 0 \\ x_D + x_E - x_F = 0 \\ x_A \le 10 \\ x_B \le 8 \\ x_C \le 7 \\ x_D \le 10 \\ x_E \le 13 \\ x_F \le 21 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Duale:

$$\min 14u_1 + 10u_4 + 8u_5 + 7u_6 + 10u_7 + 13u_8 + 21u_9$$

$$\begin{cases} 0{,}3u_1 + u_2 + u_4 \ge 0 \\ 0{,}2u_1 + u_2 + u_5 \ge 0 \\ 0{,}1u_1 + u_2 + u_6 \ge 0 \\ 0{,}2u_1 + u_3 + u_7 \ge 0 \\ 0{,}3u_1 + u_3 + u_8 \ge 0 \\ 0{,}3u_1 - u_2 - u_3 + u_9 \ge 1 \\ u_1, u_4, u_5 u_6, u_7, u_8, u_9 \ge 0 \end{cases}$$

Per rispondere alla terza domanda, analizziamo la struttura della soluzione suggerita dal testo: $x_A = 5$, $x_E = 10$, $x_F = 20$ da cui, poiché $x_A + x_B + x_C = x_D + x_E = x_F = 20$, $\begin{matrix} x_B \le 8 \\ x_C \le 7 \end{matrix}$, deve essere necessariamente $x_B = 8; \quad x_C = 7; \quad x_D = 10$. Pertanto esiste un'unica soluzione che risponde all'ipotesi fatta nel testo. Questa soluzione però viola il primo vincolo primale:

$$(0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1)x_F + 0{,}3x_A + 0{,}2x_B + 0{,}1x_C + 0{,}2x_D + 0{,}3x_E \le 14$$

Infatti:

$$(0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1)20 + 0{,}3*5 + 0{,}2*8 + 0{,}1*7 + 0{,}2*10 + 0{,}3*10 = 6 + 1.5 + 1.6 + 0.7 + 2 + 3 = 14.8 > 14$$

Quindi non solo non bastano 12 operai per produrre la quantità ipotizzata, ma non sono sufficienti neanche i 14 operai disponibili. Non potendo esistere una soluzione ammissibile primale con le caratteristiche suggerite dal testo si conclude che non può esistere neanche una soluzione ottima con le caratteristiche individuate.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso con 5 nodi 1…5 ed i valori di domanda di ogni nodo (assumendo un valore negativo per un nodo sorgente e un valore positivo per un nodo pozzo). Si determini una soluzione ottima al problema di flusso di costo minimo utilizzando l'algoritmo del simplesso su reti (fase 1 e fase 2), o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,1)	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(5,1)	(5,2)
Costi	8	3	1	6	-2	4	3	4	4	2	-1

Nodi	1	2	3	4	5
Domanda	0	3	-5	0	2

Soluzione

La soluzione ottima è:

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,1)	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(5,1)	(5,2)
flussi	0	0	5	0	5	0	0	0	5	0	3

L'ottimalità è certificata dalla soluzione duale

Nodi	1	2	3	4	5
Variabili duali	-2	2	0	-1	3

che è ammissibile e soddisfa le condizioni di ortogonalità.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Secondo recupero - Ordinamento DM 270/04
22 settembre 2010

Nome:	Matricola:
Cognome:	

Esercizio 1

Achille impiega 5 minuti per raggiungere la tartaruga a partire da una distanza iniziale di 2 stadi. Un leone impiega non più del doppio per raggiungere Achille da una distanza iniziale di uno stadio. Tutti corrono a velocità costante lungo una retta e nello stesso verso, la velocità del leone è doppia di quella di Achille e quest'ultima è dieci volte quella della tartaruga. La tartaruga percorre non più di 80 metri prima di essere raggiunta da Achille. Si vuole sapere quanto è lungo al più il piede di Achille. Si assuma che uno stadio misuri 600 piedi di Achille.

1. Formulare il problema di PL precisando le unità di misura
2. Risolvere il problema con il metodo di Fourier Motzkin.
3. Impostare il problema duale
4. Trovare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità.

Soluzione

Per formulare questo problema scegliamo come variabili la velocità x_1 di Achille (in m/s) e la lunghezza x_2 (in m) del piede di Achille. La velocità del leone è doppia di quella di Achille e quest'ultima è dieci volte quella della tartaruga. Quindi rappresenteremo la velocità del leone con $2x_1$ m/s e quella della tartaruga con $0{,}1x_1$ m/s.

I vincoli da considerare derivano dalle varie informazioni:

1. Achille impiega 5 minuti (300s) per raggiungere la tartaruga a partire da una distanza iniziale di 2 stadi (1200 piedi). In 300 s la tartaruga percorre $30x_1$ m e Achille $300x_1$ m colmando la distanza iniziale di 1200 piedi:
$$300x_1 = 30x_1 + 1200x_2$$
2. Un leone impiega non più del doppio per raggiungere Achille da una distanza iniziale di uno stadio. Quindi dopo 600 secondi la distanza percorsa dal leone ($1200x_1$) è maggiore o uguale di quella percorsa da Achille ($600x_1$) più uno stadio:
$$1200x_1 \geq 600x_1 + 600x_2 \text{, che semplificato diventa: } x_1 \geq x_2 .$$

3. la tartaruga percorre non più di 80 metri: $30x_1 \le 80$.

Il modello è pertanto:

$$\max \quad x_2 \qquad \begin{cases} 27x_1 - 120x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ 3x_1 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Dal metodo di F.M. si ottiene

$$\max \quad x_2 \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{40}{9}x_2 \\ \dfrac{120-27}{27}x_2 \ge 0 \\ x_2 \le \dfrac{6}{10} \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

che comporta $x_1^* = \dfrac{8}{3}$, $x_2^* = 0{,}6$.

Duale:

$$\min \quad 8u_3 \qquad \begin{cases} 27u_1 + u_2 + 3u_3 \ge 0 \\ -120u_1 - u_2 \ge 1 \\ u_1 \text{ libera} \\ u_2 \le 0 \\ u_3 \ge 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni di ortogonalità si ottiene: $u_1^* = -\dfrac{1}{120}, \quad u_2^* = 0, \quad u_3^* = \dfrac{3}{40}$

che è ammissibile duale e ottima.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 7 nodi, e sono dati i valori di capacità degli archi ed un flusso iniziale. Si verifichi che il flusso dato sia ammissibile. Se il flusso dato risulta ammissibile, trovare il massimo flusso inviabile dal nodo **1** al nodo **7** con l'algoritmo di Ford e Fulkerson partendo dal flusso dato, se il flusso non è ammissibile partire dal grafo completamente scarico. Individuare il taglio di capacità minima nel grafo.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(7,5)
Capacità	6	42	4	8	32	9	27	16	34	8	40	10
Flussi	6	14	0	6	14	0	20	0	20	2	22	2

Soluzione

Il flusso dato non è ammissibile (nel nodo di transito 6 entra 20 ed esce 22).

Iniziando dalla rete scarica si ottengono i seguenti cammini aumentanti:
1,3, 6,7 con flusso aumentante 9
1,2,4,6,7 con flusso aumentante 6
1,3,4,6,7 con flusso aumentante 10
1,3,4,5,7 con flusso aumentante 8
1,3,4,5,6,7 con flusso aumentante 14
La ricerca di un nuovo cammino aumentante evidenzia il taglio {1,3} di capacità 47 (C_{12}+C_{34}+C_{36}), pari al flusso corrente.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(7,5)
Capacità	6	42	4	8	32	9	27	16	34	8	40	10
Fl. Aum.		9				9					9	
Fl. Aum.	6			6				6			6	
Fl. Aum.		10			10			10			10	
Fl. Aum.		8			8		8			8		
Fl. Aum.		14			14		14		14		14	
Fl. Aum.												
Fl. Aum.												
Fl. tot.	6	41	0	6	32	9	12	16	14	8	39	0