A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

24 novembre 2005

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Incontrate una ragazza con il suo cane Fido e vi chiedete che età possa avere. Lei sembra leggervi nel pensiero e vi dice: “Non si chiede l’età ad una donna, però cinque anni fa non avevo meno di cinque volte l’età che aveva allora Fido, ed ora non ho più di tre volte l’età di Fido”.
Qual è l’età che può avere al massimo la ragazza?

1. Formulare il problema come problema di PL con 2 variabili.
2. Trovare la soluzione ottima con il metodo grafico.
3. Dimostrare l’ottimalità della soluzione con le condizioni di ortogonalità.

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. Portare il problema in forma standard.
2. Utilizzando l’algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\max \quad -3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ \mathit{libera}, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo non orientato con 8 nodi 1…8. Trovare l’albero ricoprente di peso minimo, a partire dal nodo 1, utilizzando l’algoritmo di Prim-Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all’albero ricoprente (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo).

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(1,6)	(1,8)	(2,3)	(2,4)	(2,7)	(3,4)	(3,6)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
Costi	3	2	12	4	6	19	2	11	5	4	6	10	1	21	4	6

Domanda 4

Illustrare il problema di flusso di costo minimo. Dimostrare che una base della matrice dei coefficienti coincide con un albero ricoprente della rete di flusso.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

24 novembre 2005

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ____________________________ ○

Esercizio 1

Volete calcolare il massimo numero di studenti della facoltà di Ingegneria che possono partecipare al programma Erasmus. La facoltà di Ingegneria si divide in 4 Dipartimenti (Informatica, Elettronica, Meccanica, Civile), ogni dipartimento ha ricevuto un numero di domande diverso, pari a 20 per Informatica, 16 per Elettronica, 15 per Meccanica e 10 per Civile. Sono disponibili varie convenzioni con diverse università straniere. In Spagna si possono mandare 30 studenti, in Germania 5 studenti, in Norvegia 5 studenti, 10 in Francia ed infine 5 studenti in Gran Bretagna. Le convenzioni attivate non permettono di mandare più di 10 studenti di un dipartimento nello stesso paese, inoltre gli studenti di Informatica non possono andare in Francia, gli studenti di Elettronica in Spagna, gli studenti di Meccanica in Norvegia, e gli studenti di Civile non possono andare in Germania. Si formuli (senza risolvere) il problema di massimizzare il numero di studenti da mandare nei programmi Erasmus come un problema di massimo flusso su una rete opportuna.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed i valori di domanda di ogni nodo (assumendo un valore negativo per un nodo sorgente e un valore positivo per un nodo pozzo). Si determini un flusso ammissibile utilizzando la fase 1 del simplesso su reti, o dimostrare che il problema non ammette soluzione ammissibile.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(6,1)

Nodi	1	2	3	4	5	6
Domanda	-1	-2	5	-5	1	2

Esercizio 3

Dato il problema di PL (primale) in figura,

1. risolvere il problema con il metodo grafico ed impostare il problema duale;
2. Se il primale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del primale ricavare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità. Se il primale non ammette una soluzione ottima, risolvere il problema duale con il metodo del simplesso.

$$\min \quad x_1$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_2 \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Domanda 4

Descrivere la sensitività del valore ottimo della funzione obiettivo, in un problema di PL, alle variazioni dei termini noti e alle variazioni dei costi delle variabili fuori base, dimostrando le proprietà descritte nel caso particolare dei problemi in forma standard.

C

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

24 novembre 2005

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Ereditate un terreno di 4 ettari e 25.000 euro. Decidete di lavorare la terra per due anni per poi vendere tutto e ritornare in città con il massimo capitale possibile. Allo scopo potete:

1. Coltivare grano: per seminare e coltivare un ettaro a grano vi servono 5000 euro e dopo un anno potrete incassare 10.000 euro dalla vendita del raccolto e vi ritroverete con un ettaro di terreno incolto riutilizzabile.
2. Piantare alberi di albicocche: per impiantare un ettaro di albicocche vi servono 20.000 euro ma l'investimento renderà su più anni, alla fine del primo anno potrete incassare 4000 euro e alla fine del secondo anno 8000.

Un ettaro di terreno incolto (o coltivato a grano) dopo due anni si può vendere a 80.000 euro, mentre un ettaro coltivato ad albicocche si può vendere a 100.000 euro. Si assuma che i soldi non investiti in attività produttive possono comunque essere investiti in attività finanziarie a basso rischio al 5% di rendita. Un euro speso all'inizio dell'anno frutterà quindi 1,05 euro alla fine dell'anno.

Formulare il problema di massimizzare il capitale posseduto alla fine del secondo anno, ottenuto dalla vendita dei raccolti, del terreno e dalle rendite finanziarie, chiaramente al netto delle spese sostenute nei due anni. Nota: l'incasso ottenuto alla fine del primo anno può chiaramente essere reinvestito in altre attività.

Esercizio 2

In tabella è riportato il peso degli archi di un grafo orientato con 8 nodi 1…8. Trovare l'albero dei cammini minimi, a partire dal nodo **1**, utilizzando l'algoritmo di Dijkstra. Indicare in quale ordine vengono aggiunti archi all'albero dei cammini (in quale ordine vengono fissati ad 1 i flag dei nodi del grafo). Evidenziare il cammino minimo tra il nodo 1 e il nodo 8.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,4)	(2,7)	(3,4)	(3,6)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
Costi	2	8	11	14	19	21	12	5	4	12	2	5	11	14	6

Esercizio 3

È dato il problema di PL in figura.

1. Portare il problema in forma standard.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\max \quad 3x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \ \textit{libera} \end{cases}$$

Domanda 4

Illustrare il problema di Massimo Flusso e dimostrare il teorema di Ford-Fulkerson.

D

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

24 novembre 2005

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Grunt, il cavernicolo, possiede una clava e un certo numero di conchiglie. Grunt può barattare i suoi oggetti come indicato in seguito:

Clava + 3 conchiglie = Cane
Clava + 10 conchiglie = Bue
Cane + 6 conchiglie = Bue
Clava + 17 conchiglie = Canoa
Cane + 13 conchiglie = Canoa
Bue + 6 conchiglie = Canoa
Clava + 50 conchiglie = Palafitta
Cane + 45 conchiglie = Palafitta
Bue + 35 conchiglie = Palafitta
Canoa + 15 conchiglie = Palafitta

Quale è il numero minimo di conchiglie che Grunt deve pagare (e quali scambi deve effettuare) per comprare una palafitta? Formulare (senza risolvere) il problema come un problema di cammino minimo su un grafo opportuno.

Esercizio 2

In tabella sono riportati i costi unitari degli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed un flusso ammissibile iniziale. A partire dal flusso iniziale dato, e utilizzando la fase 2 del simplesso su reti, determinare il flusso di costo minimo, o dimostrare che il problema è illimitato inferiormente.

Archi	(1,3)	(2,1)	(2,4)	(2,6)	(3,5)	(4,3)	(5,4)	(6,1)
Costi	8	3	1	5	1	-3	1	4
Flusso	4	0	2	1	5	0	0	2

Esercizio 3

Dato il problema di PL in figura,

1. impostare il problema duale e risolverlo con il metodo grafico;
2. Se il duale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del duale ricavare la soluzione ottima del primale con le condizioni di ortogonalità. Se il duale non ammette una soluzione ottima, risolvere il primale con il metodo del simplesso.

$$\min \quad -x_1 + 6x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Domanda 4

Fornire la definizione di insieme convesso, funzione convessa, problema di programmazione convessa. Dimostrare che nei problemi di Programmazione Convessa un punto di minimo locale è anche punto di minimo globale.

E

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Ereditate un piccolo caseificio in provincia di Caserta e 15.000 euro. L'impianto può lavorare 4000 litri di latte vaccino e 4000 litri di latte di bufala al mese. Un operaio lavora 8 ore al giorno per 20 giorni al mese e il contratto mensile prevede il pagamento di 800 euro, da pagarsi in anticipo. Il latte di bufala costa 1,2 euro/litro, quello vaccino costa 0,8 euro/litro anche questi da pagarsi in anticipo all'inizio di ogni mese. Un supermercato di Monaco si offre di acquistare tutta la vostra produzione con spese di spedizione a suo carico ma, a fronte di consegne giornaliere di mozzarelle, vi pagherà solo alla fine di ogni mese. Vi proponete di produrre mozzarella per due mesi per poi chiudere bottega e ritornare all'Università con il massimo capitale possibile. Allo scopo potete:

1. Produrre mozzarella di bufala al 100%: per produrne 1 kg vi servono 2 lt di latte di Bufala e 30 minuti di manodopera. Il supermercato di Monaco vi pagherà la mozzarella 8 euro al kg, alla fine di ogni mese.
2. Produrre mozzarella vaccina al 100%: per produrne 1 kg vi servono 2 lt di latte vaccino e 24 minuti di manodopera. Il supermercato di Monaco vi pagherà la mozzarella 5 euro al kg, alla fine di ogni mese.
3. Produrre mozzarella di bufala al 50%: per produrne 1 kg vi servono 1 lt di latte vaccino, 1 lt di latte di Bufala e 36 minuti di manodopera. Il supermercato di Monaco vi pagherà la mozzarella 7 euro al kg, alla fine di ogni mese.

Formulare il problema di decidere quanta mozzarella produrre e quanti operai assumere nel primo e nel secondo mese, allo scopo di massimizzare il capitale posseduto alla fine del secondo mese, al netto delle spese sostenute nei due mesi. Nota: l'incasso ottenuto alla fine del primo mese può chiaramente essere utilizzato per pagare in parte le spese del secondo.

Esercizio 2

In tabella sono riportati i costi unitari degli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed un flusso ammissibile iniziale. A partire dal flusso iniziale, e utilizzando la fase 2 del simplesso su reti, determinare il flusso di costo minimo, o dimostrare che il problema è illimitato inferiormente.

Archi	(1,3)	(2,1)	(2,4)	(2,6)	(3,5)	(4,3)	(5,4)	(6,1)
Costi	5	2	12	0	2	2	21	5
Flusso	1	2	0	3	3	0	2	0

Esercizio 3

È dato il problema di PL in figura.

1. Portare il problema in forma standard.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\max \quad x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ \textit{libera} \end{cases}$$

Domanda 4

Definire il problema di Cammino minimo e dimostrare il teorema di Floyd-Warshall

F

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello
24 novembre 2005

Nome:
Cognome:
Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Cinque studenti (A, B, C, D, E) hanno vinto una borsa Erasmus in Spagna (2 posti a Barcellona, 1 posto a Madrid, Salamanca e Valencia), basandovi sulle loro preferenze dovete assegnare ogni studente ad una università in maniera da massimizzare la loro soddisfazione. Gli studenti hanno espresso i seguenti giudizi: lo studente A ha espresso la graduatoria Valencia 5, Salamanca 3, Barcellona 2, Madrid 0. Lo studente B invece preferisce Barcellona 3, Madrid 3 Valencia 3 Salamanca 1. La graduatoria di C è Madrid 4, Valencia 3, Salamanca 1, Barcellona 1, mentre quella di D è Madrid 4, Barcellona 4, Valencia 1, Salamanca 1. Infine E preferirebbe Madrid 3, Valencia 3, Barcellona 2 e Salamanca 2. Formulare senza risolvere il problema come problema di flusso a costo minimo su una rete opportuna.

Esercizio 2

Dato il problema di PL (primale) in figura,

1. risolvere il problema con il metodo grafico ed impostare il problema duale;
2. Se il primale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del primale ricavare la soluzione ottima del duale con le condizioni di ortogonalità. Se il primale non ammette una soluzione ottima, risolvere il problema duale con il metodo del simplesso.

$$\min \quad x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 4 nodi, e sono dati i costi di ogni arco. Risolvere il problema del cammino minimo per ogni coppia di nodi applicando l'algoritmo di Floyd e Warshall. In presenza di cicli negativi arrestate l'algoritmo e mostrate un ciclo negativo. Altrimenti mostrate il cammino dal nodo 3 al nodo 4.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(3,1)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,3)
Costi	2	3	6	-1	6	4	0	4	10

Domanda 4

Illustrare la teoria della dualità. Dimostrare i teoremi di dualità debole e forte.

G

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

24 novembre 2005

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ____________________________ ○

Esercizio 1

Una signora esce di casa con x euro nella borsa. Ogni volta che incontra un mendicante gli consegna metà del denaro che ha in borsa più una certa somma z non inferiore ad un euro. Se dopo il terzo mendicante la signora resta con non meno di 2 euro nella borsa, quanto aveva al minimo nella borsa quando è uscita di casa?

1. Formulare il problema come problema di PL con 2 variabili.
2. Trovare la soluzione ottima con il metodo grafico.
3. Dimostrare l'ottimalità della soluzione con le condizioni di ortogonalità.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso con 6 nodi 1…6 ed i valori di domanda di ogni nodo (assumendo un valore negativo per un nodo sorgente e un valore positivo per un nodo pozzo). Si determini un flusso ammissibile utilizzando la fase 1 del simplesso su reti, o dimostrare che il problema non ammette soluzione ammissibile.

Archi	(1,3)	(1,6)	(2,1)	(2,4)	(3,5)	(4,3)	(4,5)	(5,6)

Nodi	1	2	3	4	5	6
Domanda	-5	-2	4	3	-2	2

Esercizio 3

È dato il problema di PL in figura.

1. Portare il problema in forma standard.
2. Utilizzando l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2) trovare una soluzione ottima del problema o dimostrare che il problema è impossibile o illimitato inferiormente. Applicare la regola di Bland.

$$\max \quad x_1 - 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ \textit{libera} \end{cases}$$

Domanda 4

Illustrare il problema di Albero ricoprente di costo minimo e descrivere gli algoritmi di Kruskal, Prim e Prim-Dijkstra, dimostrando la proprietà su cui si basano.

H

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Primo appello

24 novembre 2005

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** ______________________________ ○

Esercizio 1

Grunt, il cavernicolo, vuole prendere in sposa Snort. Il padre di Snort accetterà di far sposare sua figlia solo se Grunt gli porterà in dono un Mammut. Grunt non è un abile cacciatore, e decide di fare dei baratti per ottenere un Mammut. Grunt possiede una clava e un certo numero di conchiglie. Grunt può barattare i suoi oggetti come indicato in seguito:

Clava + 3 conchiglie = Cane
Clava + 17 conchiglie = Canoa
Cane + 13 conchiglie = Canoa
Clava + 60 conchiglie = Palafitta
Cane + 45 conchiglie = Palafitta
Canoa + 15 conchiglie = Palafitta
Clava + 100 conchiglie = Mammut
Cane + 30 conchiglie = Mammut
Canoa + 20 conchiglie = Mammut
Palafitta = Mammut + 5 conchiglie

Quale è il numero minimo di conchiglie che Grunt deve pagare (e quali scambi deve effettuare) per comprare un Mammut ed avere in sposa Snort? Formulare (senza risolvere) il problema come un problema di cammino minimo su un grafo opportuno.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di un grafo con 9 nodi, e sono dati i valori di capacità degli archi ed un flusso ammissibile. A partire dal flusso dato trovare il massimo flusso inviabile dal nodo **1** al nodo **9** con l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

Archi	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,8)	(3,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)	(5,7)	(6,9)	(7,9)	(8,7)	(8,9)
Capacità	50	100	30	50	15	15	20	20	10	20	20	10	40
Flussi	30	0	30	0	15	15	15	5	10	20	10	0	0

Esercizio 3

Dato il problema di PL in figura,

1. impostare il problema duale e risolverlo con il metodo grafico;
2. Se il duale ammette una soluzione ottima, dalla soluzione ottima del duale ricavare la soluzione ottima del primale con le condizioni di ortogonalità. Se il duale non ammette una soluzione ottima, risolvere il primale con il metodo del simplesso (fase 1 e fase 2).

$$\max \quad 6x_1 + x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Domanda 4

Illustrare le definizioni di vertice e soluzione base ammissibile. Dimostrare che una soluzione ammissibile di un problema di PL in forma standard è un vertice del poliedro delle soluzioni ammissibili se e solo se è una soluzione base ammissibile.