الهندسة في الفضاء

تماريـــــــــن

التمرين01

التعامد و التوازي - المسافة بين نقطة و مستو .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}$ ، **تمثيلا وسيطيا لمستقيم** (D) و معادلة ديكارتية لمستو (P) **:**

$(D):\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -3-\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ **و** $(P): x+2y-3z-1=0$ **.**

اختر الجواب الصحيح في كل سطر من الجدول التالي :

	الجواب (أ)	الجواب (ب)	الجواب (جـ)
السطر1	$A(-1;3;2)\in(D)$	$B(2;-1;-1)\in(D)$	$C(3;1;-4)\in(D)$
السطر2	$\vec{u}(1;2;3)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{v}(-2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)	$\vec{w}(3;1;4)$ هو شعاع توجيه لـ: (D)
السطر3	(D) محتواة في (P)	(D)يوازي تماما (P)	(D)يثقب (P)
السطر4	$A'(1;3;-2)\in(P)$	$B'(1;3;2)\in(P)$	$C'(1;3;-1)\in(P)$
السطر5	المستوي (Q_1) الذي معادلته $x+2y-3z+1=0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_2) الذي معادلته $-4x+5y+2z+3=0$ يعامد المستوي (P)	المستوي (Q_3) الذي معادلته $-3x+2y-z-1=0$ يعامد المستوي (P)
السطر6	المسافة بين النقطة$M_1(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة$M_1(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي 14	المسافة بين النقطة$M_1(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي $2\sqrt{3}$

التمرين 02

معادلة ديكارتية لمستو ، تمثيل وسيطي لمستقيم - المرجح - المسافة بين نقطة و مستو

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}$.

نعتبر المستوي P الذي معادلته $2x+y-2z+4=0$ و النقط $A\ \ 3;2;6$ ، $B\ \ 1;2;4$ و $C\ \ 4;-2;5$.

1)بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستو و بيّن أن هذا المستوي هو P .

2) (1-2) بيّن أن المثلث ABC قائم.

(2-2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ الذي يشمل O و يعامد المستوي P .

(3-2) نسمي K المسقط العمودي للنقطة O على P . احسب المسافة OK .

(4-2) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

3)نسمي G مرجح الجملة $O;3\ ,\ A;1\ ,\ B;1\ ,\ C;1$.

(1-3) I هي مركز ثقل المثلث ABC. بيّن أن G تنتمي إلى OI .

(2-3) عيّن المسافة بين G و المستوي P .

التمرين 03

الاستقامية - مستقيم يعامد مستو – معادلة مستو - تفاطع مستقيم و مستقيم - المرجح - مجموعة نقطية .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}$.

نعتبر النقط A (2 ; 1 ; 3) ، B(-3;-l;7) و C(3;2;4) .

1) بيّن أن A و B و C ليست على استقامة واحدة.

2) $t \in \mathrm{R}$ $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم d .

(1-2) بيّن أن d يعامد المستوي (ABC) .

(2-2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) H هي تقاطع d و (ABC) .

(1-3) بيّن أن H هي مرجح الجملة $A;-2\ ,\ B;-1\ ,\ C;2$.

(2-3) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة Γ_1 للنقط M من الفضاء حيث :

$$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} =0$$

(3-3) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة Γ_2 للنقط M من الفضاء حيث :

$$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$$

التمرين 04

المسافة بين نقطة و مستو - تقاطع مستو و كرة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$.

الجزء الأول

a, b , c و d أعداد حقيقية حيث $(a , b, c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.

P هو المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$.

نعتبر النقطة $I\left(x_I;y_I;z_I\right)$ و الشعاع $\vec{n}\left(a;b;c\right)$.

الهدف في هذا الجزء الأول هو البرهان على أن المسافة بين I و المستوي P تساوي:

$$\frac{\left|a\,x_I + b\,y_I + c\,z_I + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1) Δ هو المستقيم الذي يمر بالنقطة I و يعامد P .

عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ بدلالة $a , b, c , d , x_I , y_I, z_I$.

2) نسمي H نقطة تقاطع Δ و P .

(1-2) بيّن أنه يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{IH} = k\,\vec{n}$.

(2-2) عبرعن k بدلالة $a , b, c , d , x_I , y_I, z_I$.

(3-2) استنتج أن : $IH = \dfrac{\left|a\,x_I + b\,y_I + c\,z_I + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

الجزء الثاني

المستوي Q الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ يمس الكرة S التي مركزها $\Omega\left(1;-1;3\right)$.

1) عيّن نصف قطر الكرة S .

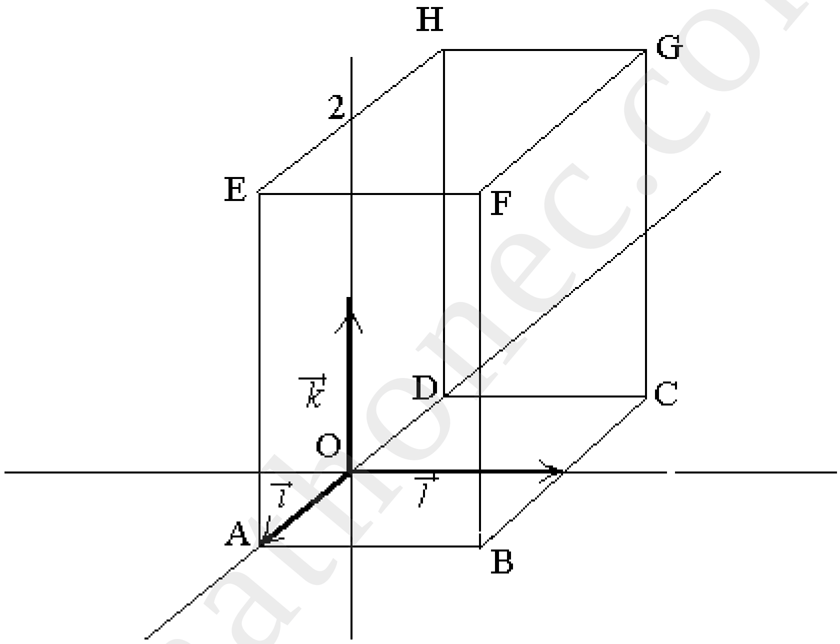
2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ الذي يشمل Ω و يعامد Q .

3) استنتج احداثيات نقطة تقاطع S و Q .

التمرين 05

معادلة ديكارتية لمستو - تمثيل وسيطي لمستقيم - تقاطع مستقيمات .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}$.



يمثل الشكل السابق متوازي مستطيلات، O هي منتصف [AD] ، P هي منتصف[EF] .

1) (1-1) ما هي مجموعة نقط الفضاء التي معادلتها z = 2 ؟

(2-1) عيّن معادلة للمستوي (ABF) .

(3-1) استنتج جملة معادلتين تميّز المستقيم (EF) .

2) (1-2) عيّن إحداثيات النقط A ،G و P.

(2-2) ارسم النقطة $Q\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

(3-2) اكتب معادلة للمستوي (APQ) .

3) (1-3) ارسم القطعتين [PQ] و [AG] .

(2-3) هل $G \in APQ$ ؟ علل.

4) ننشئ الشكل السابق باستعمال برمجية للهندسة ثم نطلب تمثيل نقطة تقاطع (AG) و(PQ).
ما هو الجواب الذي تتوقعه؟

التمرين 06

معادلة ديكارتية لمستو - تمثيل وسيطي لمستقيم - المسافة بين نقطة و مستو – تقاطع مستو و كرة .

عيّن في كل حالة مما يلي الجواب الصحيح .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}$.

نعتبر النقطة $S(1\,;-2\,;0)$ و المستوي P الذي معادلته $x+y-3z+4=0$.

1) تمثيل وسيطي للمستقيم D الذي يمر بالنقطة S و يعامد P هو :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$\begin{cases} x=1-t \\ y=1-2t \\ z=-3 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

2)إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم D مع المستوي P هي :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$-4;0;0$	$\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3) المسافة بين النقطة S و المستوي P تساوي :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$\frac{\sqrt{11}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{\sqrt{11}}$	$\frac{9}{11}$

4) نعتبر الكرة التي مركزها S و نصف قطرها 3 . تقاطع هذه الكرة و المستوي P هي:

الجواب 1 : النقطة $I\ 1;-5;0$

الجواب 2 : الدّائرة التي مركزها H و نصف قطرها $3\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

الجواب 3 : الدّائرة التي مركزها S و نصف قطرها 2

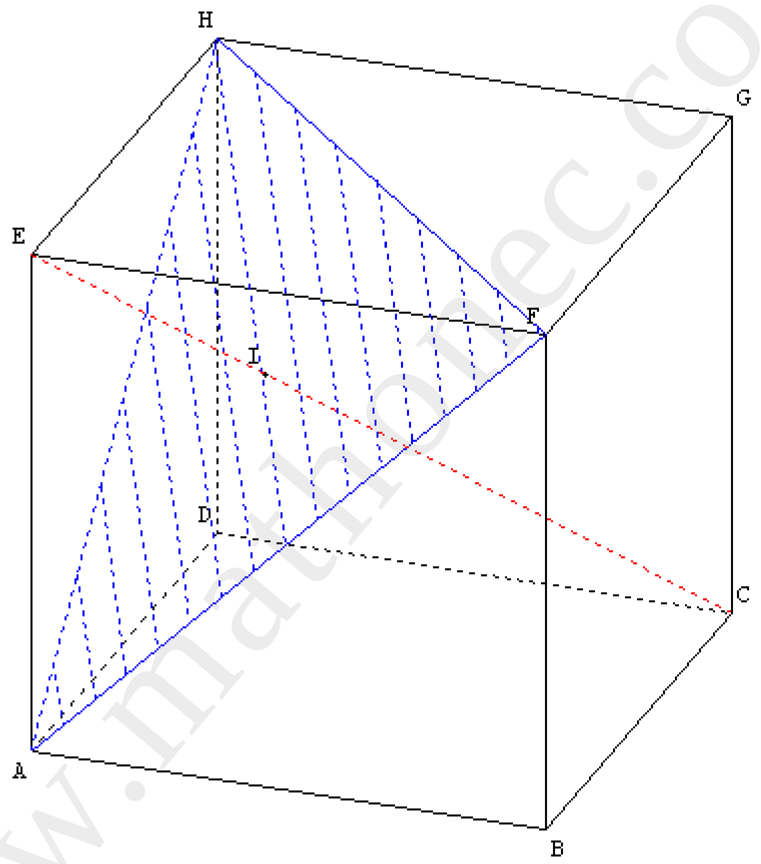
الجواب 4 : الدّائرة التي مركزها S و نصف قطرها $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

التمرين 07

الجداء السلمي - التعامد .

ABCDEFGH مكعب طول حرفه a (a عدد حقيقي موجب تماما).

نسمي I نقطه تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (AFH) .



1) (HF)بيّن أن المستقيم يعامد المستقيم **(AG).**

2) (1-2) احسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{EA} \bullet \overrightarrow{AF}$ ، $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AF}$.

(2-2) استنتج أن $\overrightarrow{EC}$ يعامد $\overrightarrow{AF}$.

التمرين 08

الجداء السلمي - التعامد - أقصر مسافة بين مستقيمين .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}$. نعتبر المستقيمين :

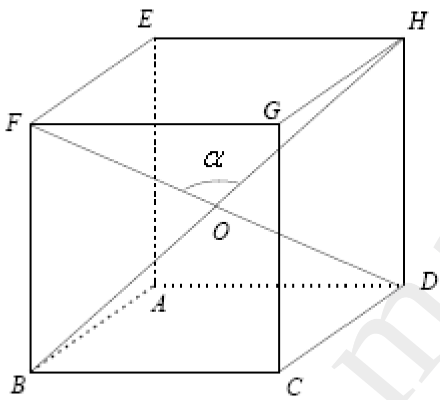
$$(D_1):\begin{cases} x = 3-4\alpha \\ y = -2+\alpha \\ z = -1+\alpha \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{و} \quad (D_2):\begin{cases} x = -6\beta \\ y = 1+\beta \\ z = 2+2\beta \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1)عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تاذي يعامد (D_1) و (D_2) .

2) احسب أقصر مسافة بين المستقيمين (D_1) و (D_2) .

التمرين 09

الجداء السلمي - التعاهد - المسافة بين نقطة و مستو .



ABCDEFGH مكعب مركزه ***O*** و طول حرفه 1 .

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) احسب ***FD*** و ***BH*** .

2) احسب قيمة مقربة للزاوية $\alpha = HOF$.

3) برهن أن المستقيم ***(FD)*** يعامد المستوي ***(EGB)*** .

4) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي ***(EGB)*** .

5) احسب المسافة بين النقطة ***O*** و المستوي ***(EGB)*** .

حلول

التمرين 01

- **في السطر1 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (جـ)** $\left(C(3;1;-4)\in(D) \right)$ ، لأنه يوجد عدد حقيقي λ حيث $\begin{cases} 3=1+2\lambda \\ 1=2-\lambda \\ -4=-3-\lambda \end{cases}$ $(\lambda=1)$.

- **في السطر2 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (ب)** لأن :
التمثيل الوسيطي المعطى $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-1\lambda \\ z=-3-1\lambda \end{cases}$ يبيّن أن $\vec{r}(2;-1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{v}(-2;1;1)$ يوازي $\vec{r}(2;-1;-1)$ لأنه يوجد عدد حقيقي t حيث $\vec{r}=t\vec{v}$ $(t=-1)$.
$\vec{v}(-2;1;1)$ هو شعاعا توجيه آخر للمستقيم (D).

- **في السطر3 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (جـ)** لأن :
$\vec{r}(2;-1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D)
$\vec{n}(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)
لدينا $\vec{r}\bullet\vec{n}\neq 0$ إذن $\vec{r}$ لا يعامد $\vec{n}$ و منه (D) لا يوازي (P)
((D) لا يوازي (P) تماما و ليس محتواة في (P))

ملاحظة:
نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى (P) و إلى (D) إذا و فقط إذا كان

$$\begin{cases} x+2y-3z-1=0 \\ \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-3-\lambda \end{cases} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} (1+2\lambda)+2(2-\lambda)-3(-3-\lambda)-1=0 \\ \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-3-\lambda \end{cases} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \lambda=-\frac{13}{3} \\ \begin{cases} x=-\frac{23}{3} \\ y=\frac{19}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases} \end{cases}$$

إذن (D) يثقب (P) في النقطة التي إحداثيتها $\left(-\frac{23}{3};\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$

- **في السطر4 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (ب)** لأن الاحداثيات $(1;3;2)$ للنقطة B' تحقق معادلة المستوي (P) (التي هي $x+2y-3z-1=0$).

- **في السطر5 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (ب)** لأن:
$\vec{n}(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي لـلمستوي (P)
$\vec{n}_2(-4;5;2)$ هو شعاع ناظمي لـلمستوي (Q_2)
و $\vec{n}\bullet\vec{n_1}=0$ إذن $\vec{n}$ يعامد $\vec{n_2}$ ، نستنتج أن (Q_2) يعامد (P) .

- **في السطر6 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (أ)** لأن:
المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي الذي معادلته $1x+2y-3z-1=0$ هي

$$\frac{|1\times(-1)+2\times(-3)-3\times(2)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\frac{14\sqrt{14}}{14}=\sqrt{14}$$.

التمرين 02

1) **نبيّن أن النقط** A ، B **و** C **تعيّن مستو**
لدينا $\overrightarrow{AB}\ -2;0;-2$ و $\overrightarrow{AC}\ 1;-4;-1$.
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\begin{cases}-2=k\\0=-4k\\-2=k\end{cases}$ أي $\begin{cases}k=-2\\k=0\\k=-2\end{cases}$
لا يمكن للعدد الحقيقي k أن يكون 0 و -2 في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$
و منه $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$، نستنتج أن النقط A ، B و C تعيّن مستو، هو المستوي(ABC) .

نبيّن أن هذا المستوي هو P
2 x **3** +**2** -2 x **6** + 4 = 0 إذن النقطة A تنتمي إلى P .
2 x **1** +**2** -2 x **4** + 4 = 0 إذن النقطة B تنتمي إلى P .
2 x **1** +**2** -2 x **4** + 4 = 0 إذن النقطة C تنتمي إلى P .
النقط A ، B و C تنتمي إلى P ، إذن المستوي P هو المستوي (ABC) .

2) (1-2) **نبيّن أن المثلث** ABC **قائم**
لدينا $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\ -2\ \times 1+0\times\ -4\ +\ -2\ \times\ -1\ =0$
الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان إذن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان و منه المثلث ABC قائم في A .
(2-2) تمثيل و سيطي للمستقيم Δ
بصفة عامة $\vec{n}\ a;b;c$ يعامد المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$.
لدينا $\vec{n}\ 2;1;-2$ يعامد P و هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم Δ .

$M(x;y;z) \in \Delta$ تكافئ $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{n}$ إذن $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

(3-2) حساب المسافة OK

لدينا P ⊥ (OK) و Δ = (OK) النقطة K تنتمي إلى P و إلى Δ إذن

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \\ 2x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \\ 4\lambda + \lambda + 4\lambda + 4 = 0 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \\ \lambda = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

و أخيرا $\begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{4}{9} \\ z = \frac{8}{9} \end{cases} \\ \lambda = -\frac{4}{9} \end{cases}$ نجد عندئذ إحداثيات K : $K\left(-\frac{8}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$.

نستنتج حساب OK : $OK = \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{4}{3}$

(4-2) حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$

قاعدة رباعي الوجوه $OABC$ هي ABC و ارتفاعه [OK].

لدينا $AB^2 = 4 + 4 = 8$ إذن $AB = 2\sqrt{2}$ و نجد كذلك $AC = 3\sqrt{2}$.

مساحة المثلث ABC هي : $Aire\ ABC = \frac{AB \times AC}{2} = 6cm^2$

نستنتج حجم رباعي الوجوه **OABC** : $Volume\ OABC = \frac{6 \times OK}{3} = \frac{8}{3}cm^3$

3) (1-3) نبيّن أن G تنتمي إلى OI

" I مركز ثقل المثلث ABC" يعني " I مرجح الجملة $(A;1), (B;1), (C;1)$ "

G هي مرجح الجملة $C;1\ ,\ B;1\ ,\ A;1\ ,\ O;3$.

نستعمل خواص المرجح (التجميعية): G هي مرجح الجملة $I;3\ ,\ O;3$

أي G هي منتصف [OI] إذن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

(2-3) حساب المسافة بين G و المستوي P

لدينا $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\right)$ إذن إحداثيات I هي
$$\begin{cases} x_I=\frac{8}{3} \\ y_I=\frac{2}{3} \\ z_I=5 \end{cases}$$

G هي منتصف [OI] إذن $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ ، نستنتج إحداثيات G :
$$\begin{cases} x_G=\frac{4}{3} \\ y_G=\frac{1}{3} \\ z_G=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$2x+y-2z+4=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي P ، المسافة بين G و المستوي P

هي $\frac{|2x_G+y_G-2z_G+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}$.

التمرين 03

1) A و B و C ليست على استقامة واحدة

لدينا $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$ تكافئ
$$\begin{cases} -5=k \\ -2=k \\ 4=k \end{cases}$$

لا يمكن للعدد الحقيقي k أن يكون -5 ، -2 و 4 في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد k حيث $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$ ، نستنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) (1-2) d يعامد المستوي (ABC)

نعيّن شعاعا $\vec{n}\ \ \alpha;\beta;\gamma$ يعامد المستوي (ABC)

$\vec{n}\ \ \alpha;\beta;\gamma\ \perp \overrightarrow{AB}\ \ -5;-2;4$ **و** $\vec{n}\ \ \alpha;\beta;\gamma\ \perp \overrightarrow{AC}\ \ 1;1;1$

إذن $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}-5\alpha-2\beta+4\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}-5\ \ -\beta-\lambda\ \ -2\beta+4\gamma=0\\ \alpha=-\beta-\gamma\end{cases}$

إذن $\begin{cases}3\beta+9\gamma=0\\ \alpha=-\beta-\gamma\end{cases}$ أي $\begin{cases}\beta=-3\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{cases}$ و منه $\vec{n}\ \ 2\gamma;-3\gamma;\gamma$.

لاحظ أن $\vec{v}\ \ 2;-3;1$ شعاع توجيه للمستقيم (d) (انظر التمثيل الوسيطي المعطى للمستقيم (d)).

$\vec{v}\ \ 2;-3;1$ يعامد أيضا المستوي (ABC) ، إذن (d) يعامد (ABC) .

(2-2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$M\ \ x;y;z$ تنتمي إلى (ABC) إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AM}\perp\vec{v}$ **أي** $\overrightarrow{AM}\bullet\vec{v}=0$ **.**

لدينا $\overrightarrow{AM}\ \ x-2;y-1;z-3$ **و** $\vec{v}\ \ 2;-3;1$ ، إذن **:**

$M\ \ x;y;z$ تنتمي إلى (ABC) إذا و فقط إذا كان $2\ \ x-2\ \ -3\ \ y-1\ \ +\ \ z-3\ \ =0$

أي $2x-3y+z-4=0$ **.**

$2x-3y+z-4=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) **.**

3) (1-3) H هي مرجح الجملة $A;-2\ ,\ B;-1\ ,\ C;2$

- H(*x;y;z*) تنتمي إلى (ABC) و إلى إحداثياتها إذن (d) تحقق :

$\begin{cases}2x-3y+z-4=0\\ \begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\end{cases}\end{cases}$ **أي** $\begin{cases}2\ \ -7+2t\ \ -3\ \ -3t\ \ +\ \ 4+t\ \ -4=0\\ \begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\end{cases}\end{cases}$

أي $\begin{cases}t=1\\ \begin{cases}x=-7+2t=-5\\ y=-3t=3\\ z=4+t=5\end{cases}\end{cases}$ و منه.(H (-5 ; -3 ;5 .

- لدينا $\overrightarrow{HA}\ \ 7;4;-2$ ، $\overrightarrow{HB}\ \ 2;2;2$ ، $\overrightarrow{HC}\ \ 8;5;-1$ إذن :

$-2\,\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+2\,\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ، نستنتج أن H هي مرجح الجملة $A;-2\ ,\ B;-1\ ,\ C;2$

:

(2-3) (المجموعة Γ_1

- H هي مرجح الجملة $A;-2\ ,\ B;-1\ ,\ C;2$ إذن : $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$
- $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CB}$

إذن M تنتمي إلى Γ_1 إذا و فقط إذا كان $-\overrightarrow{MH}\bullet\overrightarrow{CB}=0$ ، نستنتج Γ_1 هي المستوي الذي يشمل النقطة H و $\overrightarrow{BC}$ هو شعاع ناظمي له.

(3-3) المجموعة Γ_2

H هي مرجح الجملة $A;-2\ ,\ B;-1\ ,\ C;2$ إذن : $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$

إذن : M تنتمي إلى Γ_2 إذا و فقط إذا كان $\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{29}$ ، نستنتج أن Γ_2 هي الكرة التي مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$.

التمرين 04 الجزء الأول

1) $\vec{n}\ a;b;c$ هو في نفس الوقت شعاع ناظمي للمستوي P و شعاع توجيه للمستقيم Δ الذي يشمل I و يعامد P .

$\Delta \ni M\ x;y;z$ يكافئ $\overrightarrow{IM}\ x-x_I\ ;y-y_I\ ;z-z_I$ يوازي $\vec{n}\ a;b;c$ أي يوجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{IM}=t\,\vec{n}$ ، إذن $\begin{cases}x-x_I=ta\\y-y_I=tb\\z-z_I=tb\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=x_I+ta\\y=y_I+tb\\z=z_I+tb\end{cases}$ ..... $*$

الجملة $*$ تشكل تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ .

2)(1-2) H و I نقطتان من Δ ،إذن $\overrightarrow{IH}$ يوازي $\vec{n}$ لأن $\vec{n}$ شعاع توجيه لـ: Δ إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{IH}=k\,\vec{n}$.

(2-2) $\begin{cases}\overrightarrow{IH}=k\,\vec{n}\\H\in\ P\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\begin{cases}x_H=x_I+ka\\y_H=y_I+kb\\z_H=z_I+kb\end{cases}\\ax_H+by_H+cz_H+d=0\end{cases}$

و منه $a\ \ x_I+ka\ +b\ \ y_I+ka\ +c\ \ z_I+ka\ \ z+d=0$

أي $ax_I+ka^2+by_I+kb^2+cz_I+kc^2+d=0$

أي $k\ \ a^2+b^2+c^2\ =-\ \ ax_I+by_I+cz_I+d$

لدينا $a^2+b^2+c^2\neq 0$ لأن $a;b;c\ \neq\ 0;0;0$ إذن $k=\dfrac{-\ \ ax_I+by_I+cz_I+d}{a^2+b^2+c^2}$ ؛

$$\left\|\overrightarrow{IH}\right\| = |k|\times\|\vec{n}\| = |k|\times\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \left|\frac{-\left(ax_I+by_I+cz_I+d\right)}{a^2+b^2+c^2}\right|\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$ (3-2)

منه $\left\|\overrightarrow{IH}\right\| = \dfrac{\left|ax_I+by_I+cz_I+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

الجزء الثاني

المستوي Q الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ مماس للكرة S الذي مركزها $\Omega\left(1;-1;3\right)$.

4) نصف القطر r للكرة S يساوي المسافة بين Ω و Q ، و بتطبيق نتيجة الجزء الأول ، نجد :

$r = \dfrac{\left|x_\Omega - y_\Omega + z_\Omega - 11\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2+1^2}} = 2\sqrt{3}$.

2) $\vec{n}\left(1,-1;1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي Q .

$\Delta \ni M\left(x;y;z\right)$ يكافئ $\overrightarrow{\Omega M}\left(x-1;y+1;z-1\right)$ يوازي $\vec{n}\left(1;-1;1\right)$

أي يوجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{\Omega M} = t\,\vec{n}$، إذن أي $\begin{cases} x-1=t \\ y+1=-t \\ z-3=t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=t+3 \end{cases}$

3) النقطة **T** تقاطع الكرة S و المستوي Q ن هي نقطة تقاطع Q و المستقيم Δ

إذن إحداثيات **T** تحقق الجملة : $\begin{cases} \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=t+3 \end{cases} \\ x-y+z-11=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=t+3 \end{cases} \\ \left(t+1\right)-\left(-t-1\right)+\left(t+3\right)-11=0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=t+3 \end{cases} \\ t=2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \\ z=5 \end{cases}$ إذن $T\left(3;-3;5\right)$.

التمرين 05

1) (1-1) مجموعة النقط M(x ; y ; z) من الفضاء حيث z = 2 هي المستوي الذي يمر بالنقطة التي إحداثياتها (2 ; 0 ; 0) و يوازي المستوي(xOy)، هو المستوي (EFH) .

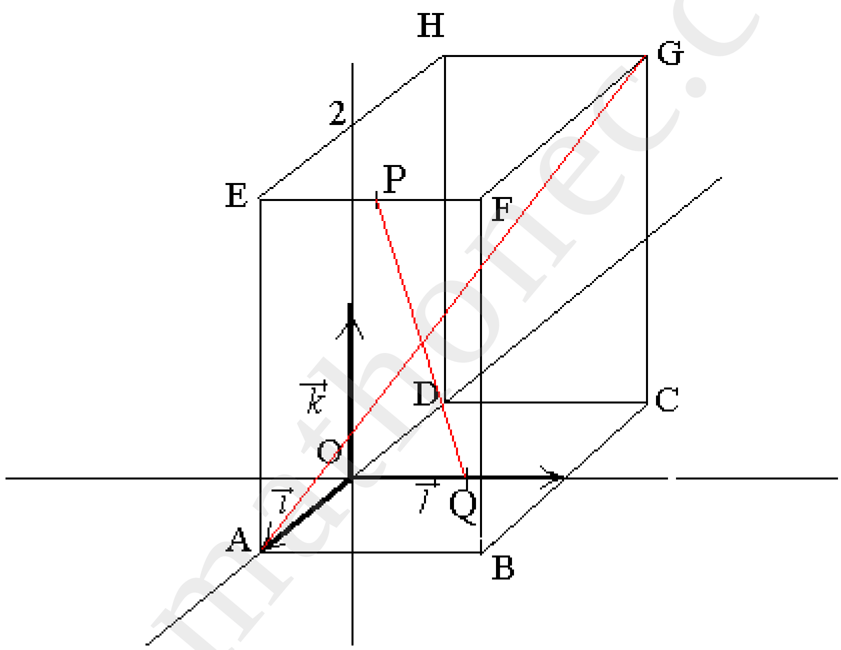
(2-1) للنقط A ، B و F نفس الفاصلة 1، إذن $M\left(x;y;z\right) \in \left(ABF\right)$ يكافئ $x = 1$.
معادلة المستوي $\left(ABF\right)$ هي $x = 1$.

(3-1) المستويان (ABF) و (EFH) متقاطعان وفق المستقيم (EF) .

M(x ; y ; z) ∈(ABF) ∩(EFH) يكافئ $\begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

2) (1-2) ، (2-2)

- $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ إذن $A\ (1;0;0)$.
- $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ إذن $G\ (-1;1;2)$.
- $E\ (1;0;2)$ و $F\ (1;1;2)$ إذن $P\left(1;\frac{1}{2};2\right)$.



(3-2) معادلة المستوي (APQ) من الشكل $ax + by + cz + d = 0$ و a , b , c ,d هي أعداد حقيقية حيث $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

النقط A(1 ; 0 ; 0) , P(1 ; 1/2 ; 2), Q(0 ; 1/2 ; 0) تنتمي على (APQ) ، إذن إحداثيتها تحقق معادلة (APQ) أي :

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ a + \dfrac{b}{2} + 2c + d = 0 \\ \dfrac{b}{2} + d = 0 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} a = -d \\ -d - d + 2c + d = 0 \\ b = -2d \end{cases} \text{ منه } \begin{cases} a = -d \\ b = -2d \\ c = \dfrac{d}{2} \end{cases}$$

نجد معادلة للمستوي (APQ) : $(-d)x+(-2d)y+\left(\frac{d}{2}\right)z+d=0$

أي $d\left(-x-2y+\frac{z}{2}+1\right)=0$

بما أن $d\neq 0$ فإن $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ و منه $-x-2y+\frac{z}{2}+1=0$

أي $2x+4y-z-2=0$.

$2x+4y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (APQ) .

3) (1-3)، (2-3)

$G\in(APQ)$ يكافئ إحداثيات G تحقق معادلة المستوي (APQ) .

لدينا G(- 1 ; 1 ; 2) و $-2+4-2-2\neq 0$ إذن $G\notin(APQ)$.

4) $G\notin(APQ)$ إذن المستوي (APQ) لا يشمل المستقيم (AG) ، A هي النقطة المشتركة الوحيدة بين (APQ) و (AG) .

النقط A ، P و Q ليست على استقامة واحدة لا توجد أي نقطة مشتركة للمستقيمين (AG) و (PQ) (لا يوجد أي مستو يشمل (AG) و(PQ) في آن واحد).

التمرين 06

1) $\vec{n}(1;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي الذي معادلته $x + y - 3z + 4 = 0$.

شرح :

$M(x;y;z)\in(D)$ **يعني** $\overrightarrow{SM}(x-1;y+2;z)$ **يوازي** $\vec{n}(1;1;-3)$ أي يوجد عدد حقيقي k

حيث $\overrightarrow{SM}=k\vec{n}$ إذن : $\begin{cases}x-1=k\\y+2=k\\z=-3k\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=1+k\\y=-2+k\\z=-3k\end{cases}$

نضع $k=t+1$ و نجد $\begin{cases}x=1+k=2+t\\y=-2+k=-1+t\\z=-3k=-3-3t\end{cases}$

الجواب الصحيح هو **الجواب 4** .

شرح آخر:

نعبر عن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{SM}$ بدلالة t في كل حالة :

الجواب1	الجواب2	الجواب3	الجواب4
$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} t \\ 3-2t \\ -3 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 1-3t \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 3t \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ -3-3t \end{pmatrix}$

الشعاع الوحيد الذي يوازي $\vec{n}\ \ 1;1;-3$ هو الشعاع $\overrightarrow{SM}$ في الجواب 4 : $\overrightarrow{SM} = \ 1+t\ \vec{n}$.

2) الإحداثيات $x;y;z$ للنقطة H تقاطع المستقيم D و المستوي P تحقق :

$$\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \\ 2+t\ +\ -1+t\ -3\ -3-3t\ +4=0 \end{cases}$$

إذن $$\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases} \\ t=-\dfrac{14}{11} \end{cases}$$ و نستنتج $$\begin{cases} x=\dfrac{8}{11} \\ y=-\dfrac{25}{11} \\ z=\dfrac{9}{11} \end{cases}$$

الجواب الصحيح هو **الجواب 4** .

3) المسافة بين النقطة S و المستوي P هي : $\dfrac{|1-2-3\times 0+4|}{\sqrt{1^2+1^2+\ -3\ ^2}}$ أي $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

الجواب الصحيح هو **الجواب 2** .

4) المسافة بين S و P أقصر من نصف قطر الكرة ،إذن تقاطع المستوي P و الكرة هي الدائرة التي مركزها H (H هي المسقط العمودي لـ : S على P) و نصف قطرها

$r=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}$ أي $r=3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.

الجواب الصحيح هو **الجواب 2** .

التمرين 07

1) القطران (HF) و (EG) للمربع EFGH متعامدان.

المستقيم (EA) يعامد المستوي (EFH) إذن(EA) يعامد المستقيم (HF) المحتواة في (EFH).

المستقيم (HF) الذي يعامد (EG) و(EA) ، يعامد المستوي **(AEG)** (المستوي (AEG) يشمل المستقيمين (EG) و(EA))

(HF) يعامد كل مستقيمات المستوي **(AEG)** و بالخصوص (HF) يعامد **(AG).**

(2

$$\text{(2-1)}\quad \overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EA}\bullet\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=-EA^2+\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{EF}=-a^2+0=-a^2$$

لأن $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EF}$ متعامدان .

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}\bullet\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=0+EA^2=a^2$$

$\overrightarrow{BC}$ يعامد المستوي (AEF) إذن $\overrightarrow{BC}$ يعامد $\overrightarrow{AF}$ و منه $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AF}=0$.

$$\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\bullet\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=-a^2+a^2+0=0\ \text{(2-2)}$$

إذن $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{AF}$ متعامدان .

التمرين 08

(1 $A_1(X_1;Y_1;Z_1)$ نقطة من (D_1) إذن $\begin{cases}X_1=3-4\alpha\\ Y_1=-2+\alpha\\ Z_1=-1+\alpha\end{cases}$

$A_2(X_2;Y_2;Z_2)$ نقطة من (D_2) إذن $\begin{cases}X_2=-6\beta\\ Y_2=1+\beta\\ Z_2=2+2\beta\end{cases}$

إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{A_1A_2}$ هي $\begin{cases}X_2-X_1=-3+4\alpha-6\beta\\ Y_2-Y_1=3-\alpha+\beta\\ Z_1-Z_2=3-\alpha+2\beta\end{cases}$

$\overrightarrow{u_1}(-4;1;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D_1)

$\overrightarrow{u_2}(-6;1;2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D_2).

المستقيم (A_1A_2) يعامد (D_1) و(D_2) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} \bullet \overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{A_1A_2} \bullet \overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 2 \\ 27\alpha - 41\beta = 27 \end{cases}$ و نجد $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

نستنتج أن $A_1(-1;-1;0)$ ، $A_1(0;1;2)$ إذن $\overrightarrow{A_1A_2}(1;2;2)$.

المستقيم (Δ) الذي يعامد (D_1) و (D_2) و المستقيم (A_1A_2) الذي يمر بالنقطة $A_1(-1;-1;0)$ و شعاع

توجيهه $\overrightarrow{A_1A_2}(1;2;2)$.

نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى المستقيم (Δ) **يعني** $\overrightarrow{A_1M} = t\,\overrightarrow{A_1A_2}$ $(t \in \mathbb{R})$

أي $\begin{cases} x+1 = t \\ y+1 = 2t \\ z-0 = 2t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المطلوب.

2) اقصر مسافة بين المستقيمين (D_1) و (D_2) هي $\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$.

التمرين 09

1) المثلث BCD قائم في C : نجد $BD = \sqrt{2}$ باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

المثلث FBD قائم في B : نجد $FD = \sqrt{3}$ باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

نجد بنفس الكيفية أن $BH = \sqrt{3}$.

2) نحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OF} \bullet \overrightarrow{OH}$ بطريقتين مختلفتين :

- $\overrightarrow{OF} \bullet \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DF} \bullet \overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}\right) \bullet \overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DB} \bullet \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BF} \bullet \overrightarrow{BH}\right)$

$\overrightarrow{OF} \bullet \overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\left(-DB^2 + BF^2\right) = -\frac{1}{4}$.

- $\overrightarrow{OF} \bullet \overrightarrow{OH} = OF \times OH \times \cos\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$.

نستنتج أن $\cos\alpha = -\frac{1}{4}\frac{3}{4}$ أي $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ و الحاسبة تعطينا $109^\circ \approx \alpha$.

3) نبيّن أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد شعاعين من المستوي (EGB) :

- نبيّن أن $\overrightarrow{FD}$ يعامد $\overrightarrow{GE}$:

$\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GE} = \left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD}\right)\bullet\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{FG}\bullet\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GH}\bullet\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{HD}\bullet\overrightarrow{GE}$ إذن

$\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GE} = -FG^2+GH^2+0=0$.

- نحسب بنفس الكيفية $\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GB}$ و نجد $\overrightarrow{FD}\bullet\overrightarrow{GB}=0$.

نستنتج أن المستقيم (FD) يعامد المستوي (EGB) .

4) $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (EGB) **إذن** (EGB) يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $-x+y-z+d=0$ **.** بماأن النقطة $B(1;0;0)$ تنتمي إلى المستوي (EGB) فإن $d=1$ **.**

نستنتج أن $-x+y-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (EGB).

5) المسافة بين النقطة $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و المستوي (EGB) هي : $\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$