القسمة و الموافقات في Z

من كتابة :
الأستاذ : ناعم محمد
أستاذ التعليم الثانوي

تمارين و حلول مفصلة

3AS

- تمارين نموذجية
- تمارين من بكالوريات سابقة
- تمارين من الكتاب المدرسي

الشعب :

✓تقني رياضي
✓رياضيات

تمارين في الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

للشعب : ثالثة تقني رياضي ، رياضيات

I تذكير

بعض الطرائق و القواعد الأساسية

1) لإيجاد القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a;b)$ ؛ نبحث عن علاقة بين $a;b$ مستقلة عن n

مثال

$a = 2n+3$ ؛ $b = 5n+2$

نضع : $d = PGCD(a;b)$ ؛ $d/a;d/b$ ومنه $d/5a-2b$ إذن $d/11$ فالقيم الممكنة لـ d هي : 1 و 11

2) لإيجادقيم n التي من أجلها يأخذ d قيمة معينة نستعمل الموافقات و خواصها

3) لإيجاد قيم n لما يكون الترديد مجهولا نكتب الموافقة على الشكل [الترديد] $0 \equiv$ عدد

مثال

حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $n+9 \equiv 0[n+1]$

$n+9 \equiv 0[n+1]$ معناه : $8 \equiv 0[n+1]$ ومنه : $n+1/8$ أي $n+1 \in D_8$ إذن $n \in \{0;1;3;7\}$

4) بواقي القسمة الإقليدية للعدد a^n على b تكون دورية ؛ اي انها تكرر من اجل قيم معينة للعدد n وبما ان باقي a^0 على b هو 1 ؛ نحسب بواقي قسمة a^n على b حتى نحصل على قيمة للعدد n حيث باقي قسمة a^n على b هو 1 و يكون الدور حينئذ هو n

مثال

ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7

$4^0 \equiv 1[7];4^1 \equiv 4[7];4^2 \equiv 2[7];4^3 \equiv 1[7]$ إذن $4^{3k} \equiv 1[7];4^{3k+1} \equiv 4[7];4^{3k+2} \equiv 2[7]$ حيث $k \in \mathbb{N}$

5) حل المعادلة : $ax+by=c$

تقبل هذه المعادلة حلا إذا وفقط إذا كان $PGCD(a;b)$ يقسم c

مثال

المعادلة $7x+21y=3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$ لأن $PGCD(7;21)=7$ لا يقسم 3

لإيجاد الحل الخاص نستعمل خوارزمية أُقليدس

مثال

لنبحث عن حل خاص للمعادلة $27x+22y=1$

$27=22+5$ ؛ $5=27-22$ ؛ $22=4(5)+2$ ومنه $2=22-4(5)$ ؛ $5=2(2)+1$ ومنه $1=5-2(2)$ ؛

$1=9(27-22)-2(22)$ ومنه $1=27(9)+22(-11)$ وعليه الحل الخاص هو $(x_0;y_0)=(9;-11)$

ملاحظة هامة

إذا كانت الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة $ax+by=c$ فإن الثنائية $(nx_0;ny_0)$ حل خاص للمعادلة $ax+by=nc$

6) حل المعادلات المشتملة على $PPCM(a;b)$ و $PGCD(a;b)$

لحل المعادلات التي تشتمل على $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$ نتبع الخطوات التالية :

- ⋆ كتابة a و b بدلالة a' و b' أي $d=PGCD(a;b)$ إذن $a=da';b=db'$ حيث $PGCD(a';b')=1$
- ⋆ إيجاد علاقة بين $m;d;a';b'$ أي $m\times d=a\times b$ ومنه $m=da'b'$
- ⋆ تعيين القيم الممكنة لـ a' و b' مع مراعاة الشرط $PGCD(a';b')=1$ ثم استنتاج قيم a و b

2 تمارين نموذجية

التمرين 1

a,b,n أعداد طبيعيّة غير معدومة حيث : $a=5n^2+7$ ؛ $b=n^2+2$

1. بيّن أنّ كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 3
2. بيّن أنّ : $PGCD(a;b)=3$ إذا و فقط إذا كان $n^2\equiv 1[3]$
3. استنتج حسب قيم n $PGCD(a;b)$

الحل المفصل ▼انقر هنا [1]

التمرين 2

عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشروط في كل حالة من الحالات التالية:

/1 $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} PPCM(a;b)=90 \\ PGCD(a;b)=18 \end{cases}$

3/ $PPCM(a;b)-9PGCD(a;b)=13$ مع $a\leqslant b$

[2] ☜ **الحل المفصل** ▼أنقر هنا

التمرين 3

1/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $9x-7y=3...(1)$

2/ إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) عين قيم $PGCD(x;y)$

3/ عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $\begin{cases} m=1242 \\ d=3 \end{cases}$ حيث $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$

[3] ☜ **الحل المفصل** ▼أنقر هنا

التمرين 4

$a;b;n$ أعداد طبيعية حيث: $a=2n^3+5n^2+4n+1$ ؛ $b=2n^2+n$

1/ بين أن العدد $2n+1$ قاسم مشترك للعددين a و b

2/ باستخدام مبرهنة بيزو بين أن : $PGCD(n;n+1)=1$ و $PGCD[n;(n+1)^2=1]$

3/ استنتج $PGCD(a;b)$

[4] ☜ **الحل المفصل** ▼أنقر هنا

التمرين 5

1/ بين أن العدد 251 أولي

2/ حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل اولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008

3/ عين الأعداد الطبيعية $a;b$ بحيث : $m^3+35d^3=2008$ علما ان $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

[5] ☜ **الحل المفصل** ▼أنقر هنا

التمرين 6

$a;b;n$ أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $a=11n+3$ و $b=13n-1$

1/ بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50

2/ باستخدام خوارزمية أقليدس عين حلا خاصا للمعادلة : $50x-11y=1$ ؛ ثم حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $50x-11y=3$

3/ استنتج قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=50$

3/ استنتج قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=25$

[6] ☜ **الحل المفصل** ▼أنقر هنا

التمرين 7

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)... $7x+13y=119$

1. بين أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 ؛ ثم استنتج حلول المعادلة (1)
2. عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\alpha;\beta;\gamma$ حيث $\overline{\alpha\gamma1}^{6}+\overline{1\beta3\beta}^{8}=\overline{32\gamma\alpha}^{7}$

الحل المفصل ▼أنقر هنا [7]

التمرين 8

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 10
2. ماهو باقي قسمة العددين 2^{192} و 8^{341} على 10
3. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3\times 8^{4n}+2^{12n+9}\equiv 0[10]$

الحل المفصل ▼أنقر هنا [8]

التمرين 9

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $19^{6n+3}+26^{6n+4}+54^{6n+1}+1\equiv 0[7]$
3. عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $19^{6n+3}+26^{6n+4}+4n^2+4\equiv 0[7]$

الحل المفصل ▼أنقر هنا [9]

التمرين 10

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1)... $5x-3y=2$

1. بين أن المعادلة (1) تقبل حلا
2. أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن : $x\equiv 1[3]$
3. استنتج حلول المعادلة (1)
4. أ) بين إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن : $PGCD(x;y)=PGCD(x;2)$

ب) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$

ج) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x;y)=2$

الحل المفصل ▼أنقر هنا [10]

التمرين 11

حافلة صغيرة لنقل المسافرين بها 16 راكبا مصنفون إلى ثلاثة أصناف : مجموعة دفعت 20 دج (صنف a) و مجموعة أخرى دفعت 15 دج (صنف b) ؛ أما المجموعة الثالثة فلم تدفع شيئًا (صنف c) ؛ إذا علمت أن المبلغ الإجمالي

المدفوع هو 285 دج ؛ أحسب عدد الركاب من كل صنف

الحل المفصل ▼أنقر هنا [11]

التمرين 12

1. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $7x \equiv -19[9]$
2. استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة : $7x - 9y = -19 \ldots (1)$
3. من بين حلول المعادلة (1) عين تلك التي تحقق : $x \equiv 0[y]$
4. نعتبر العدد الطبيعي n الذي يُكتب $\overline{2\alpha 5}^7$ في نظام العد ذي الأساس 7 ؛ و يُكتب $\overline{1\beta 3}^9$ في نظام العد ذي الأساس 9

◄ عين α و β ؛ ثم أكتب العدد n في النظام العشري

الحل المفصل ▼أنقر هنا [12]

3 تمارين من بكالوريات سابقة

التمرين 13

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $11x + 7y = 1$

1. أ) عين $(x_0;y_0)$ حل المعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = -1$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

2. a و b عددان صحيحان و S العدد الذي يحقق : $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$

أ) بين أن $(a;-b)$ حل للمعادلة (E)

ب) ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77

3. n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 و باقي قسمته على 7 هو 2

– عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$

الحل المفصل ▼أنقر هنا [13]

التمرين 14

1) أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n + 27 \equiv 0[n+1]$

ب) عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $(b-a)(b+a) = 24$

جـ) استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$

2) α و β عددان صحيحان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha = \overline{10141}^5$ ؛ $\beta = \overline{3403}^5$

أ) أكتب العددين α و β في النظام العشري

ب) عين الثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$

3) أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 ؛ ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2013x-1434y=27$

الحل المفصل ▼أنقر هنا [14]

التمرين 15

اجب بصحيح أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

1. المعادلة $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$
2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون $\overline{3421}^7+\overline{1562}^7=\overline{5413}^7$
3. باقي القسمة الإقليدية للعدد $1+3+...+3^{2011}$ على 7 هو 6

الحل المفصل ▼أنقر هنا [15]

التمرين 16

1. n عدد طبيعي ؛ نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث : $\alpha=2n^3-14n+2$ و $\beta=n+3$

أ) بين أن : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

ب) ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\beta;10)$

جـ) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(\alpha;\beta)=5$

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases} 4^{5n}+4^n+n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[10] \end{cases}$

الحل المفصل ▼أنقر هنا [16]

التمرين 17

نسمي (S) الجملة التالية : $\begin{cases} x\equiv 3[15] \\ x\equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح

1/ بين أن العدد 153 حل للجملة (S)

2/ إذا كان x_0 حلا لـ (S) ؛ بين أن : (x حل لـ (S)) يكافئ $\left(\begin{cases} x-x_0\equiv 0[15] \\ x-x_0\equiv 0[7] \end{cases}\right)$

3/ حل الجملة (S)

4/ يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ؛ فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب ؛ و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب ؛ إذا علمت أنّ عدد الكتب محصور بين 500 و 600 كتاب ؛ ماهو عدد هذه الكتب ؟

الحل المفصل ▼أنقر هنا [17]

التمرين 18

نعتبر المعادلة : $13x-7y=-1...(E)$ ؛ حيث $x;y$ عددان صحيحان

1) حل المعادلة (E)

2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a حيث : $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في النظام ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}^9$ حيث α و β عددان طبيعيان ؛ $\alpha\neq 0$

– عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91

[18] الحل المفصل ▼أنقر هنا

التمرين 19

1) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3-42\times 138^{2015}+2014^{2037}$ على 13

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$ [19]

التمرين 20

/1 أ) أنشر $(n+3)(3n^2-9n+16)$ حيث $n\in\mathbb{N}$

◂ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

ب) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

/2 برهن أنّه من أجل كلّ الأعداد الطبيعيّة غير المعدومة $a;b;c$ يكون : $PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)$

/3 برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 2 : $PGCD(3n^3-11n;n+3)=PGCD(48;n+3)$

/4 أ) عيّن القواسم الطبيعيّة للعدد 48

ب) استنتج الأعداد الطبيعيّة n بحيث يكون الكسر $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عدداً طبيعياً

[20] الحل المفصل ▼أنقر هنا

التمرين 21

1) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}]$ على 7

2) أ) بين أن 89 عدد أوّلي

ب) عين القواسم الطبيعية للعدد 7832

جـ) بين أن العددين 981 و 977 أوّليان فيما بينهما

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك هو 2

– عين x و y علما أن : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$

4) a,b,c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أوّلي مع b و a أوّلي مع c

أ) باستعمال مبرهنة بيزو ؛ برهن أن a أوّلي مع $b \times c$

ب) باستعمال الإستدلال بالتراجع ؛ أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن :

$PGCD(a;b^n) = 1$

جـ) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}

الحل المفصل ▼أنقر هنا [21]

---

4 تمارين من الكتاب المدرسي

التمرين 22

التمرين 54 صفحة 59

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، رقم آحاد العدد $n^5 - n$ هو 0

2/ استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p العددين n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

الحل المفصل ▼أنقر هنا [22]

التمرين 23

التمرين 55 صفحة 59

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n^7 - n$ يقبل القسمة على 14

الحل المفصل ▼أنقر هنا [23]

التمرين 24

التمرين 96 صفحة 62

1/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية : $PGCD(a,b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2) = 1$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2/ تحقق من أن : $PGCD(k;k+1)=1$

◄ برهن أن: $PGCD(S_{2k};S_{2k+1})=(2k+1)^2$ من أجل k عدد طبيعي غير معدوم

3/ عين $PGCD(2k+1;2k+3)$ من أجل k عدد طبيعي

4/ أحسب $PGCD(S_{2k+1};S_{2k+2})$ من أجل $k\in\mathbb{N}$

◄ استنتج حسب قيم العدد الطبيعي $PGCD(S_n;S_{n+1})$

[24]

التمرين 25

التمرين 99 صفحة 63

نقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و p

نعتبر ، في المجموعة $\mathbb{N}^\star$ ، المعادلة E ذات المجهولين x و y التالية : $x^2+y^2=p^2$ حيث p أولي

1/ نضع $p=2$ بين أن المعادلة E لا تقبل حلول

2/ نفرض أن $p\neq 2$ و $(x;y)$ حل للمعادلة E

أ . برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي والآخر فردي

ب . برهن أن p لا يقسم x ولا y

ج . برهن أن $PGCD(x^2;y^2)$ يقسم p^2

د . استنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما

3/ نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p=u^2+v^2$ مع u و v عددين طبيعيين غير معدومين

أ . تحقق أن $(|u^2-v^2|;2uv)$ هي حل للمعادلة E

ب . أعط حلا للمعادلة E في حالة $P=5$ ثم في حالة $p=13$

4/ في كل حالة من الحالتين التاليتين بين أن p ليس مجموع مربعين وأن المعادلة E لا تقبل حلول

أ . $p=3$. ب . $p=7$

[25]

الحل المفصل ▼أنقر هنا

التمرين 26

التمرين 32 صفحة 79

حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين : أ . $\begin{cases} x\equiv 3[5] \\ x\equiv 1[6] \end{cases}$. ب . $\begin{cases} 2x\equiv 2[4] \\ 4x\equiv 1[3] \end{cases}$

[26]

الحل المفصل ▼أنقر هنا

التمرين 27

التمرين 93 صفحة 83

1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7

2/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7

3/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $U_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

◁ . أحسب بدلالة n المجموع $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

. ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7 ؟

[27]

5 تمرين حول التشفير

التمرين 28

نعرّف التّشفير التّآلفي بـ $y = ax + b[28]$ ؛ حيث x هو الرّقم المناسب للحرف قبل التّشفير و y الرّقم المناسب للحرف بعد التّشفير ؛ a,b عددان طبيعيان محصوران بين 0 و 27 و نفرض في هذا التّمرين أنّ a أوّلي ؛ نرقم الحروف حسب الجدول التّالي :

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

نفرض أنّ الحرف (ث) يحوّل إلى الحرف (ذ) و الحرف (ص) يحوّل إلى الحرف (خ)

1/ بيّن أنّ : $\begin{cases} 3a + b \equiv 8[28] \\ 13a + b \equiv 6[28] \end{cases}$

2/ بيّن أنّ $5a = 14k - 1$ ؛ حيث $k \in \mathbb{Z}$

3/ أ) بيّن أنّ $a \equiv 11[14]$ ب) استنتج قيمة a و قيمة b

ج) تحقق أنّ a و 28 أوّليان فيما بينهما (يجب أن يتحقق هذا الشرط لكي لا يحول حرفان مختلفان إلى نفس الحرف)

4/ حل تشفير الجملة التّالية :ثكجرثظيثه ظق جفجرلو ثكثلنش ثكخختقو

☜ الحل المفصل ▼أنقر هنا

[28]

6 الحلول المفصلة للتمارين

حل التمرين 1 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

$a = 5n^2 + 7$ ، $b = n^2 + 2$

1/ $d \setminus a$ و $d \setminus b$ و منه : $d \setminus 5b - a$ أي $d \setminus 5n^2 + 10 - 5n^2 - 7$ إذن $d \setminus 3$

2/ $PGCD(a;b)=3$ ومنه : $\begin{cases} a\equiv 0[3] \\ b\equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 5n^2+7\equiv 0[3] \\ n^2+2\equiv 0[3] \end{cases}$

حسب خواص الموافقات فإنّ : $4n^2+5\equiv [3]$ ومنه $n^2+2\equiv 0[3]$ و عليه : $n^2\equiv 1[3]$

3/ قيم $PGCD(a;b)$ حسب قيم n

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$n^2\equiv$	0	1	1	[3]

إذا كان : $n=3k$ حيث $k\in\mathbb{N}$ فإنّ : $PGCD(a;b)=1$

إذا كان : $n=3k+1$ أو $n=3k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$ فإنّ : $PGCD(a;b)=3$

حل التمرين 2 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

1/ نضع : $PGCD(a,b)=d$ ومنه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين a',b' حيث : $a=da'$ و $b=db'$ مع $a';b'$ أوّليان فيما بينهما

من معطيات التّمرين يمكن أن نكتب $6a'\times 6b'=360$ أي : $a'\times b'=10$ مع $PGCD(a';b')=1$

إذن : $(a';b')\in\{(1;10);(10;1);(2;5);(5;2)\}$ ومنه : $\boxed{(a;b)\in\{(6;60);(60;6);(12;30);(30;12)\}}$

2/ نضع : $PPCM(a;b)=m$ ؛ $PGCD(a,b)=d$ ؛ نعلم أنّ : $d\times m=ab$ و $a=a'd$ و $b=db'$ مع $PGCD(a';b')=1$

و عليه : $m=da'b'$ إذن $a'b'=\frac{m}{d}$ و منه $a'b'=5$ مع $PGCD(a';b')=1$ إذن : $(a';b')\in\{(1;5);(5;1)\}$

ومنه : $\boxed{(a;b)\in\{(18;90);(90;18)\}}$

3/ لدينا : $PPCM(a;b)-9PGCD(a;b)=13$ ومنه $m-9d=13$ ومنه : $da'b'-9d=13$ إذن $d(a'b'-9)=$

13 ومنه $d\backslash 13$ إذن $d\in\{1;13\}$

$d=1$ ينتج عنه $a'b'-9=13$ أي $a'b'=22$ إذن $(a';b')\in\{(1;22);(2;11)\}$ و عليه $\boxed{(a;b)\in\{(1;22);(2;11)\}}$

$d=13$ ينتج عنه $a'b'10$ ومنه $(a';b')\in\{(1;10);(2;5)\}$ ومنه $\boxed{(a;b)\in\{(13;130);(26;65)\}}$

حل التمرين 3 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

1/ لدينا : $9(-2)-7(-3)=3$ إذن $(x_0;y_0)=(-2;-3)$

لدينا $\begin{cases} 9x-7y=3 \\ 9(-2)-7(-3)=3 \end{cases}$ ومنه بالطرح طرفا لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد : $9(x+2)=7(y+3)$

لدينا $\begin{cases} 7\backslash 9(x+2) \\ pgcd(7;9)=1 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة غوص $7\backslash(x+2)$ ومنه $x+2=7k;k\in\mathbb{Z}$ أي : $x=7k-2$

لدينا : $9(x+2)=7(y+3)$ ومنه : $9(7k)=7(y+3)$ وعليه : $y=9k-3;k\in\mathbb{Z}$

حلول المعادلة (1) هي $k\in\mathbb{Z}$ $\quad S=\{(7k-2;9k-3)\}$

2/ نضع : $PGCD(x;y)=d$

$d\backslash x$ و $d\backslash y$ ومنه $d\backslash 9x-7y$ إذن $d\backslash 3$ ومنه $\boxed{d\in\{1;3\}}$

3/ لدينا : $m=1242$ و $d=3$ حيث $PPCM(x;y)=m$ و $PGCD(x;y)=3$ إذن $xy=3726$ ومنه $(7k-$

$3)(9k-3)=3726$ إذن $63k^2-39k-3726=0$ وعليه : $21k^2-13k-1240=0$ ؛ هذه المعادلة حلّها الصحيح

هو $k=8$ ومنه $\boxed{(x;y)=(54;69)}$

حل التمرين 4 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

.1 $a=(2n+1)(n^2+2n+1)$ و $b=(2n+1)n$ ومنه $\boxed{2n+1 \text{ قاسم مشترك ل } a \text{ و } b}$

.2 لدينا $(n+1)-n=1$ إذن حسب بيزو $\boxed{PGCD(n+1;n)=1}$

$(n+1)^2-n(n+1)=1$ إذن حسب بيزو $\boxed{PGCD(n;(n+1)^2)=1}$

.3 $\boxed{PGCD(a;b)=(2n+1)PGCD(n;(n+1)^2)=2n+1}$ لأنّ: $PGCD(n;(n+1)^2)=1$

حل التمرين 5 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 $\sqrt{251}\simeq 15.84$ و العدد 251 لا يقبل القسمة على كلّ من $2,3,5,7,11,13$ إذن هو عدد أوّلي

/2 $2008=2^3\times 251$ ومنه الأعداد الطبيعيّة التي مكعب كلّ منها يقسم 2008 هي 1 و 2

.3 نضع : $PGCD(a;b)=d$ ؛ $a=da'$ و $b=db'$ مع $PGCD(a';b')=1$ ؛ $md=ab$ ومنه $m=\dfrac{ab}{d}$ إذن

$m=da'b'$

لدينا $m^3+35d^3=2008$ ومنه $(da'b')^3+35d^3=2008$ وعليه $d^3[(a'b')^3+35]=2008$ إذن : $d^3 \backslash 2008$

مما سبق نجد $d\in\{1,2\}$

$d=1$ ؛ $(a'b')^3+35=2008$ إذن $a'b'=\sqrt[3]{1973}$ ؛ غير ممكن لأنّ $a';b'$ عددان صحيحان

$d=2$ ؛ $a'b'=\sqrt[3]{216}=6$ ومنه $(a',b')\in\{(1;6);(6;1);(2;3);(3;2)\}$

$\boxed{(a',b')\in\{(2;12);(12;2);(4;6);(6;4)\}}$

حل التمرين 6 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 $d\backslash a$ و $d\backslash b$ ومنه $d\backslash 13a-11b$ إذن $d\backslash 50$

/2 $50=11(4)+6$ ومنه $6=50-11(4)$ ، $11=6+5$ ومنه $5=11-6$ ، $6=5+1$ ومنه

$1=6-5$ ، $1=6-5=6-(11-6)=2(6)-11$ ومنه $1=2(50-11(4))-11$ ومنه $1=2(50)-11(9)$ ومنه

$(x_0;y_0)=(2;9)$

/3 $1=50(2)-11(9)$ ومنه $3=50(6)-11(27)$

$\begin{cases}50x-11y=3\\50(6)-11(27)=3\end{cases}$ ومنه : $50(x-6)=11(y-27)$، لدينا $11\backslash 50(x-6)$ و $PGCD(11;50)=1$؛حسب

مبرهنة غوص فإنّ : $11\backslash(x-6)$ ومنه $k\in\mathbb{Z}$; $\qquad x=11k+6$

$50(x-6)=11(y-27)$ ومنه $50(11k)=11(y-27)$ ومنه $k\in\mathbb{Z}$; $\qquad y=50k+27$

حلول المعادلة $50x-11y=3$ هي $\boxed{S=\{(11k+6;50k+27)\}}$

/3 $PGCD(a;b)=50$ ومنه $a\equiv 0[50]$ و $b\equiv 0[50]$ ومنه $11n+3\equiv 0[50]$ و $13n-1\equiv 0[50]$ ومنه $11n\equiv$

$47[50]$ و $13n\equiv 1[50]$ ومنه $n\equiv 27[50]$ إذن $l\in\mathbb{N}$; $\qquad n=50\ell+27$

/4 $PGCD(a;b)=25$ إذن $\begin{cases}a\equiv 0[25]\\b\equiv 0[25]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}11n+3\equiv 0[25]\\13n-1\equiv 0[25]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}11n\equiv 22[25]\\13n\equiv 1[25]\\n\neq 50\ell+27\end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 11n+3\equiv 0[25] \\ 13n-1\equiv 0[25] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n\equiv 2[25] \\ n\neq 50\ell+27 \end{cases}$ ومنه $25\ell'+25\neq 50\ell+27$ ومنه $25\ell'\neq 50\ell+25$ إذن $\ell'\neq 2\ell+1$ ومنه ℓ' زوجي

$\boxed{n=50\alpha+2 \qquad ;\alpha\in\mathbb{N}}$

حل التمرين 7 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 $7x+13y=119$ ومنه $13y=119-7x$ ومنه $13y=7(17-x)$ إذن : $13y\equiv 0[7]$ ومنه $y=0[7]$ ، إذن : y مضاعف لـ 7 أي $k\in\mathbb{Z}$ $\quad y=7k$

$7x+13y=1197$ ومنه $7x=119-13(7k)$ إذن $x=-13k+17$ وعليه حلول المعادلة : $7x+13y=119$ هي

$\boxed{S=\{(-13k+17;7k)\} \qquad ;k\in\mathbb{Z}}$

/2 $\overline{\alpha\gamma1}^{6}+\overline{1\beta3\beta}^{8}=\overline{32\gamma\alpha}^{7}$ ومنه

$1+6\gamma+\alpha6^2+\beta+24+\beta8^2+8^3=\alpha+7\gamma+2\times7^2+3\times7^3$ ومنه $35\alpha+65\beta-590=\gamma$ ومنه $\gamma=5(7\alpha+13\beta-118)$ ومنه $\gamma\equiv 0[5]$ ومنه $\gamma=5$ (لأنّ : $0<\gamma<6$)

$5(7\alpha+13\beta-118)=5$ ومنه $7\alpha+13\beta=119$ ؛ حسب ما سبق نجد $(\alpha;\beta)=(-13k+17,7k)$

لدينا : $\begin{cases} 0<\alpha<6 \\ 0<\beta<8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 0<-13k+17<6 \\ 0<7k<8 \end{cases}$ إذن: $k=1$ وعليه $\boxed{\alpha=4;\beta=7;\gamma=5}$

حل التمرين 8 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 $8^0\equiv 1[10];8^1\equiv 8[10];8^2\equiv 4[10];8^3\equiv 2[10];8^4\equiv 6[10]$ ؛ $8^5\equiv 8[10];8^6\equiv 4[10];8^7\equiv 2[10]$ ؛

$8^8\equiv 6[10]$ نستنتج أنّ البواقي دوريّة باستثناء 1 :إذن البواقي كما يلي :

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in\mathbb{Z}^\star$
$8^n\equiv$	6	8	4	2	[10]

/2 $8^{341}=8^{4(85)+1}$ ومنه $8^{341}\equiv 8[10]$

$2\equiv -8[10]$ ومنه $2^{192}\equiv(-8)^{192}[10]$ ومنه $2^{192}\equiv(8)^{4(48)}[10]$ ومنه $2^{192}\equiv 6[10]$

/3 $8^{4n}\equiv 6[10]$ ومنه $3\times8^{4n}\equiv 18[10]$ أي : $3\times8^{4n}\equiv 8[10]$ ؛ $2^{12n+9}\equiv 2^{3(4n+3)}[10]$

ومنه $2^{12n+9}\equiv 8^{4n+3}[10]$ ومنه $2^{12n+9}\equiv 2[10]$

مما سبق : $3\times8^{4n}+2^{12n+9}\equiv 8+2[10]$ إذن $\boxed{3\times8^{4n}+2^{12n+9}\equiv 0[10]}$

حل التمرين 9 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 $5^0\equiv 1[7];5^1\equiv 5[7];5^2\equiv 4[7];5^3\equiv 6[10];5^4\equiv 2[7]$ ؛ $5^5\equiv 3[7];5^6\equiv 1[7]$

ومنه :

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{Z}^\star$
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

/2 $19\equiv 5[7]$ ومنه $19^{6n+3}\equiv 19^{6n+3}[7]$ ومنه $19^{6n+3}\equiv 6[7]$

$26\equiv 5[7]$ ومنه $26^{6n+4}\equiv 5^{6n+3}[7]$ ومنه $26^{6n+4}\equiv 2[7]$

$54\equiv 5[7]$ ومنه $54^{6n+1}\equiv [7]$ ومنه $54^{6n+1}\equiv 5[7]$

$19^{6n+3}+26^{6n+4}+54^{6n+1}+1\equiv 6+2+5+1[7]$ ومنه $19^{6n+3}+26^{6n+4}+54^{6n+1}+1\equiv 0[7]$

/3 $19^{6n+3}+26^{6n+4}+4n^2+4\equiv 0[7]$ ومنه $8+4n^2+4\equiv 0[7]$ ومنه $12+4n^2\equiv 0[7]$ ومنه $4(n^2+3)\equiv 0[7]$

ومنه $n^2+3\equiv 0[7]$ لأن 7 أوّلي مع 4 ومنه $n^2\equiv 4[7]$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]

$n^2\equiv 4[7]$ من أجل $n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 5[7]$ ومنه $n=7k+2$ أو $7k+5$ حيث $k\in\mathbb{N}$

حل التمرين 10 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

1/ لدينا $PGCD(5;3)=1$ و $1\backslash 2$ ومنه المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً

2/ $5x-3y=2$ ومنه $2x-2=3y-3x$ ومنه $2(x-1)=3(y-x)$

$\begin{cases} 3\backslash 2(x-1) \\ PGCD(3;2)=1 \end{cases}$ ومنه $3\backslash(x-1)$ حسب مبرهنة غوص ومنه $x-1\equiv 0[7]$ إذن $x\equiv 1[7]$

3/ $5x-3y=2$ ومنه $3y=5x-2$ ومنه $3y=5(3k+1)-2$ ومنه $y=5k+1$

حلول المعادلة (1) هي $;k\in\mathbb{Z}$ $\quad S=\{(3k+1;5k+1)\}$

4/ أ) نضع : $PGCD(x;y)=d$ و $PGCD(x;2)=d'$

$\begin{cases} d\backslash x \\ d\backslash y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d\backslash x \\ d\backslash 5x-3y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d\backslash x \\ d\backslash 2 \end{cases}$ إذن $d\backslash PGCD(x;2)$ ومنه $d\backslash d'$

$\begin{cases} d'\backslash x \\ d'\backslash 2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'\backslash x \\ d'\backslash x+2k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'\backslash x \\ d'\backslash y \end{cases}$ ومنه $d'\backslash PGCD(x;y)$ ومنه $d'\backslash d$

$d\backslash d'$ و $d'\backslash d$ إذن $d=d'$

ب) من السؤال السابق $d\backslash 2$ ومنه $d\in\{1;2\}$

ج) $PGCD(x;y)=2$ ومنه $\begin{cases} x\equiv 0[2] \\ y\equiv 0[2] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3k+1\equiv 0[2] \\ 5k+1\equiv 0[2] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k\equiv 1[2] \\ k\equiv 1[2] \end{cases}$ ومنه $k=2\ell+1$

حلول المعادلة (1) بحيث $PGCD(x;y)=2$ هي $\boxed{S=\{(6\ell+4;10\ell+6)\} \quad ;\ell\in\mathbb{Z}}$

حل التمرين 11 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

يمكن تربيض المشكلة كما يلي : $a+b+c=16$ و $20a+15=285$ من هذه المعادلة الأخيرة نجد : $4a+3b=57$

إذن : $4a=57-3b$ و عليه $4a=3(19-b)$ ومنه $3\backslash 4a$ و عليه $3\backslash a$ وذلك حسب غوص كون (3 أوّلي مع 4)

ومنه $a=3k;k\in\mathbb{N}$

$3b=-4a+57$ ومنه $b=-4k+19$ ؛ $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3k>0 \\ -4k+19>0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k>0 \\ k<4.75 \end{cases}$ ومنه $k\in$ $\{1;2;3;4\}$

◄ $k=1$: $a=3;b=15$ (مرفوضة)

◄ $k=2$: $a=6;b=11$ (مرفوضة)

◄ $k=3$: $a=9;b=7;c=0$ (مرفوضة)

◄ $k=4$: $\boxed{a=12;b=3;c=1}$

حل التمرين 12 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 $7x \equiv -19[9]$ إذن : $7x \equiv 8[9]$ ومنه $28x \equiv 32[9]$ ومنه $x \equiv 5[9]$ وعليه : $\boxed{x = 9k+5; k \in \mathbb{Z}}$

/2 $7x - 9y = -19$ ومنه $7x = 9y - 19$ ومنه $7x \equiv -19[9]$ ومنه حسب السؤال السابق ينتج : $x = 9k+5; k \in \mathbb{Z}$

$9y = 7x + 19$ ومنه $9y = 7(9k+5)+19$ ومنه $9y = 63k+54$ ومنه $k \in \mathbb{Z}$; $y = 7k+6$

إذن حلول المعادلة (1) هي $k \in \mathbb{Z}$; $S = \{(9k+5; 7k+6)\}$

/3 $y \backslash x$ ومنه $(7k+6) \backslash (9k+5)$ ومنه $(7k+6) \backslash 9(7k+6) - 7(9k+5)$ ومنه $(7k+6) \backslash 19$ ومنه $7k+6 \in$ $\{-19; -1; 19; 1\}$ ومنه $7k \in \{-25; -7; -5; 13\}$ ومنه $k = -1$ وعليه $\boxed{(x;y) = (-4;-1)}$

/4 $n = \overline{2\alpha 5}^7 = \overline{1\beta 3}^9$ ومنه $2(7)^2 + 7\alpha + 5 = 9^2 + 9\beta + 3$ ومنه $7\alpha - 9\beta - 19$ ومنه $(\alpha;\beta) = (9k+5; 7k+6)$

ومنه $\begin{cases} 0 \le \alpha < 7 \\ 0 \le \beta < 9 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 0 \le 9k+5 < 7 \\ 0 \le 7k+6 < 9 \end{cases}$ ومنه $k = 0$ إذن : $\boxed{\alpha = 5; \beta = 6; n = 138}$

حل التمرين 13 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 أ) $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ x^0 + y_0 = -1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ 7x_0 + 7y_0 = -7 \end{cases}$ ومنه $4x_0 = 8$ ومنه $x_0 = 2$ وعليه $y_0 = -3$

إذن: $(x_0; y_0) = (2; -3)$

ب) $\begin{cases} 11x + 7y = 1 \\ 11(2) + 7(-3) = 1 \end{cases}$ ومنه $11(x-2) = 7(-y-3)$

$\begin{cases} 7 \backslash 11(x-2) \\ PGCD(7;11) = 1 \end{cases}$ ومنه حسب غوص $7 \backslash x-2$ ومنه $x = 7k+2$ ؛ $11(x-2) = 7(-y-3)$ ومنه $-y-3 = 11k$

ومنه $y = -11k - 3$

$\boxed{S_E = \{(7k+2; -11k-3)\} \qquad ; k \in \mathbb{Z}}$

/2 أ) $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$ ومنه $11a + 1 = 7b + 2$ ومنه $11a + 7(-b) = 1$ ومنه الثنائيّة $(a; -b)$ حل للمعادلة (E)

ب) $S = 11a + 1 = 11(7k+2) + 1 = 77k + 23$ ومنه باقي قسمة S على 77 هو 23

/3 $\begin{cases} n = 11\alpha + 1 \\ n = 7\beta + 2 \end{cases}$ ومنه $k \in \mathbb{N}$; $n = 77k + 23$

$n < 2013$ ومنه $77k + 23 < 2013$ ومنه $k < 25.8$ ومنه $k = 25$ إذن $\boxed{n = 1948}$

حل التمرين 14 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 أ) $2n + 27 \equiv 0[n+1]$ إذن $2n + 2 + 25 \equiv 0[n+1]$ ؛ لدينا $2n + 2 \equiv 0[n+1]$ ومنه $25 \equiv 0[n+1]$ إذن

$n + 1 \in D_{25}$

ومنه $n + 1 \in \{1; 5; 25\}$ و عليه : $\boxed{n \in \{0; 4; 24\}}$

ب) الثنائيّة (a,b) هي ثنائيّة طبيعيّة ومنه $a + b > b - a$ ؛ لدينا: $(a+b)(b-a) = 24$ ومنه $a + b \backslash 24$

$\begin{cases} a+b = 6 \\ b-a = 4 \end{cases}$ أو $\underbrace{\begin{cases} a+b = 8 \\ b-a = 3 \end{cases}}_{\text{nonsolustions}}$ أو $\begin{cases} a+b = 12 \\ b-a = 2 \end{cases}$ أو $\underbrace{\begin{cases} a+b = 24 \\ b-a = 1 \end{cases}}_{\text{nonsolustions}}$ ومنه :

$\begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$ إذن : $\boxed{(a;b) \in \{(1;5);(5;7)\}}$

ج) $(a+b)(a-b) = 24$ ومنه $b^2 = a^2 + (\sqrt{24})^2$

لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$ ؛ نرسم مثلّثاً قائماً طول وتره b أي 5 أو 7 و طول أحد ضلعيه القائمين a أي 1 أو 5 على التّرتيب و يكون طول الضلع الثاني القائم هو $\sqrt{24}$

/2 $\alpha = \overline{10141}^5$ و $\beta = \overline{3403}^5$

أ) $\alpha = \overline{10141}^5$ ومنه $\alpha = 1 + 4(5) + (5)^2 + (5)^4$ ومنه $\alpha = 671$ ؛ $\beta = \overline{3403}^5$ ومنه $\beta = 3 + 4(5)^2 + 3(5)^3$ ومنه $\beta = 478$

ب) $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a + \beta b = 9 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} (a;b) \in \{(1;5);(5;7)\} \\ \alpha a + \beta b = 9 \end{cases}$ ومنه $\boxed{(a;b) = (5;7)}$

/3 أ) $2013 = 1434 + 579 = 579 \times 2 + 276$

$579 = 276 \times 2 + 27$ ؛ $276 = 27 \times 10 + 6$

$27 = 6 \times 4 + 3$ ؛ $6 = 3 \times 2 + 0$ ومنه $\boxed{PGCD(2013;1434) = 3}$

$PGCD(2013;1434) = 3$ ومنه $PGCD(671 \times 3; 478 \times 3) = 3$ ومنه $PGCD(671;478) = 1$

ب) $2013x - 1434y = 27$ ومنه $671x - 478y = 9$ ؛ومنه الحل الخاص لهذه المعادلة الأخيرة هي الثنائيّة $(x_0; y_0) = (5;7)$

$\begin{cases} 671x - 478y = 9 \\ 671(5) - 478(7) = 9 \end{cases}$ ومنه $671(x-5) = 478(y-7)$ لدينا $\begin{cases} 478 \backslash 671(x-5) \\ PGCD(671;478) = 1 \end{cases}$ ومنه حسب مرهنة

غوص فإنّ : $478 \backslash x - 5$ ومنه $;k \in \mathbb{Z}$ $x = 478k + 5$ ؛ $671(478k) = 478(y-7)$ ومنه

$;k \in \mathbb{Z}$ $y = 671k + 7$

حلول المعادلة $2013x - 1434y = 27$ هي $;k \in \mathbb{Z}$ $S = \{(478k+5; 671k+7)\}$

حل التمرين 15 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

/1 صحيح لأنّ : $PGCD(21;14) = 7$ و 7 يقسم 40

/2 خطأ لأنّ : $\overline{3421}^7 + \overline{1562}^7 = 1240 + 632 = 1872$

$\overline{5413}^7 = 1921$

/3 خطأ لأنّ $3^0 \equiv 1[7]; 3^1 \equiv 3[7]; 3^2 \equiv 2[7]$ ؛ $3^3 \equiv 6[7]; 3^4 \equiv 4[7]; 3^5 \equiv 5[7]$ ؛ $3^6 \equiv 1[7]$ ومنه

$3^{6k} \equiv 1[7]; 3^{6k+1} \equiv 3[7]; 3^{6k+2} \equiv 2[7]$ ؛ $3^{6k+3} \equiv 6[7]; 3^{6k+4} \equiv 4[7]; 3^{6k+5} \equiv 5[7]$

$3^{6k} + 3^{6k+1} + 3^{6k+2} + 3^{6k+3} + 3^{6k+4} + 3^{6k+5} \equiv 0[7]$

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011} \equiv \underbrace{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{6(334)+5}}_{\equiv 0[7]} + \underbrace{3^{6(335)}}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{3^{6(335)+1}}_{\equiv 3[7]} [7]$$

$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2011} \equiv 4[7]$

حل التمرين 16 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/
$$\begin{array}{l|l} 2n^3-14n+2 & n+3 \\ \cline{2-2} -2n^3-6n^2 & 2n^2-6n+4 \\ \quad -6n^2-14n+2 & \\ \quad 6n^2+18n & \\ \quad 4n+2 & \\ \quad -4n-12 & \\ \quad -10 & \end{array}$$

$$\boxed{\alpha=(2n^2-6n+4)\beta-10}$$

أ) نضع : $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(\beta;10)=d'$

$\begin{cases} d\backslash\alpha \\ d\backslash\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d\backslash(2n^2-6n+4)\beta \\ d\backslash\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d\backslash 10 \\ d\backslash\beta \end{cases}$ ومنه $d\backslash PGCD(10;\beta)$ وعليه $\boxed{d\backslash d'}$

$\begin{cases} d'\backslash 10 \\ d'\backslash\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'\backslash(2n^2-6n+4)\beta-10 \\ d'\backslash\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'\backslash\alpha \\ d'\backslash\beta \end{cases}$ ومنه $d'\backslash PGCD(\alpha;\beta)$ وعليه $\boxed{d'\backslash d}$ ومنه

$d=d'$ إذن : $\boxed{PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)}$

ب) $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$ ومنه $d\in D_{10}$ ومنه $\boxed{d\in\{1;2;5;10\}}$

ج) $PGCD(\alpha;\beta)=5$ إذن $PGCD(10;\beta)=5$ ومنه $\beta=5k$ (مع k عدد طبيعي فردي) ومنه $\beta=5(2\ell+1)$

ومنه $n+3=10\ell+5$ إذن $\boxed{n=10\ell+2 \qquad ;\ell\in\mathbb{N}}$

2/ أ) $4^0\equiv1[11];4^1\equiv4[11];4^2\equiv5[11]$ ؛ $4^3\equiv9[11];4^4\equiv3[11];4^5\equiv1[11]$ ومنه

$4^{5k}\equiv1[11];4^{5k+1}\equiv4[11];4^{5k+2}\equiv5[11]$ ؛ $4^{5k+3}\equiv9[11];4^{5k+4}\equiv3[11]$

ب) $\begin{cases} 4^{5n}+4^n+n\equiv0[11] \\ n\equiv2[10] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 4^{5(2\ell+2)}+4^{5(2\ell)+2}+10\ell+2\equiv0[11] \\ n\equiv2[10] \end{cases}$ ومنه

$\underbrace{4^{5(2\ell+2)}}_{\equiv1[11]}+\underbrace{4^{5(2\ell)+2}}_{\equiv5[11]}+10\ell+2\equiv0[11]$ ومنه $10\ell+8\equiv0[11]$ ومنه $10\ell\equiv[3]$ ومنه $-\ell\equiv3[11]$ ومنه

$\ell\equiv-3[11]$ ومنه $\ell\equiv8[11]$ ومنه $\ell=11m+8$ ومنه $n=10(11m+8)+2$

إذن $\boxed{n=110m+82 \qquad ;m\in\mathbb{N}}$

حل التمرين 17 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

1/ $\begin{cases} 153-3=15\times10 \\ 153-6=7\times21 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 153\equiv3[15] \\ 153\equiv6[7] \end{cases}$ ومنه العدد 153 هي حل للجملة (S)

2/ $\begin{cases} x \text{ حل لـ} S \\ x_0 \text{ حل لـ} S \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x\equiv3[15] \\ x\equiv6[7] \\ x_0\equiv3[15] \\ x_0\equiv6[7] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x-x_0\equiv0[15] \\ x-x_0\equiv0[7] \end{cases}$

$\begin{cases} x-x_0\equiv0[15] \\ x-x_0\equiv0[7] \\ x_0 \text{ حل لـ} S \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x\equiv x_0[15] \\ x\equiv x_0[7] \\ x_0\equiv3[15] \\ x_0\equiv6[7] \end{cases}$ ومنه حسب خواص الموافقات نجد :

ومنه x حل للجملة (S) $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$

مما سبق (x حل للجملة (S)) تكافىء $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$

/3 153 حل لـ (S) تكافىء $\begin{cases} x - 153 \equiv 0[15] \\ x - 153 \equiv 0[7] \end{cases}$ ومنه $x - 153 \equiv 0[105]$ تكافىء $x \equiv 48[105]$ تكافىء

$x = 105k + 48 \quad ; k \in \mathbb{Z}$

/4 $\begin{cases} x = 15\alpha + 3 \\ x = 7\beta + 6 \\ 500 \leq x \leq 600 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \\ 500 \leq x \leq 600 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = 105k + 48 \\ 500 \leq x \leq 600 \end{cases}$ ومنه $500 \leq 105k + 48 \leq 600$ إذن

$452 \leq 105k \leq 552$ ومنه $4.3 \leq k \leq 5.3$ ومنه $k = 5$

و عليه $\boxed{x = 573}$ إذن عدد الكتب هو 573

حل التمرين 18 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 $\begin{cases} 13x - 7y = -1 \\ 13(1) - 7(2) = -1 \end{cases}$ ومنه $13(x-1) = 7(y-2)$

$\begin{cases} 7 \setminus 13(x-1) \\ PGCD(7;13) = 1 \end{cases}$ ومنه حسب غوص $7 \setminus x - 1$ ومنه $k \in \mathbb{Z}$ $\quad x = 7k + 1$

$13(7k) = 7(y-2)$ ومنه $k \in \mathbb{Z}$ $\quad y = 13k + 2$ ؛ حلول المعادلة (E) هي

$\boxed{S = \{(7k+1; 13k+2)\}; k \in \mathbb{Z}}$

/2 $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv\equiv 0[13] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 7\alpha - 1 \\ a = 13\beta \end{cases}$ ومنه $13\beta - 7\alpha = -1$ ومنه $(\beta; \alpha) = (7k+1; 13k+2)$ ومنه

$a = 91k + 13 \quad ; k \in \mathbb{Z}$

/3 $9^0 \equiv 1[7]; 9^1 \equiv 2[7]; 9^2 \equiv 4[7]$ ؛ $9^3 \equiv 1[7]$ ومنه $\boxed{9^{3k} \equiv 1[7]; 9^{3k+1} \equiv 2[7]; 9^{3k+2} \equiv 4[7] \quad ; k \in \mathbb{Z}}$

/4 $b = \overline{\alpha 00 \beta 086}^{9} = 6 + 8(9) + \beta(9)^3 + \alpha(9)^6$

$b \equiv 0[91]$ ينتج عنه $\begin{cases} b \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[13] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \underbrace{\alpha(9)^6}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{\beta(9)^3}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{78}_{\equiv 1[7]} \equiv 0[7] \\ \underbrace{\alpha(9)^6}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{\beta(9)^3}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{78}_{\equiv 1[13]} \equiv 0[13] \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 \equiv 0[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha + \beta \equiv -1[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha + \beta = 91k + 13 \\ 0 < \alpha + \beta < 18 \end{cases}$ ومنه $\alpha + \beta = 13$

؛ حيث ($\alpha < 9$ ؛ $\beta < 9$) ؛ ومنه $\boxed{(\alpha; \beta) \in \{(5;8); (8;5); (6;7); (7;6)\}}$

حل التمرين 20 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 أ) $(n+3)(3n^2 - 9n + 16) = 3n^3 - 11n + 48$ ومنه $n + 3 \setminus 3n^3 - 11n + 48$

ب) مميّز ثلاثي الحدود $3x^2 - 9x + 16$ هو $\Delta = -111$ (وهو عدد سالب) وبالتّالي $3x^2 - 9x + 16 > 0$ مهما كان x من $\mathbb{R}$ ومنه من أجل كلّ عدد طبيعي n العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

/2 نضع $PGCD(a;b)=d$ و $PGCD(bc-a;b)=d'$

$$\begin{cases} d\backslash a \\ d\backslash b \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d\backslash bc-a \\ d\backslash b \end{cases} \text{ ومنه } d\backslash d'$$

$$\begin{cases} d'\backslash bc-a \\ d\backslash b \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d'\backslash bc-a \\ d'\backslash bc \end{cases} \text{ ومنه } d'\backslash a \text{ ومنه } d'\backslash d$$

مما سبق : $d=d'$ أي $\boxed{PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)}$

/3 من أجل $a=48;b=n+3;c=3n^2-9n+16$ و حسب السؤال السابق نجد

$PGCD(3n^3-11n;n+3)=PGCD(48;n+3)$

/4 أ) $D_{48}=\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$

ب) لدينا $n+3\in\mathbb{N}$ ؛ الشرط اللازم لكي يكون A عدد طبيعي هو $3n^3-11n\geq 0$ ؛ هذا الشرط محقق من أجل $n=0$ أو $n\geq 2$

من أجل $n=0$ ؛ $A=0$ ومنه $A\in\mathbb{N}$

من أجل $n\geq 2$ يكون $A\in\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان $n+3\backslash 3n^3-11n$ أي $PGCD(3n^3-11n;n+3)=n+3$

حسب السؤال السابق نستنتج أن : $PGCD(48;n+3)=n+3$ ومنه $n+3\backslash 48$ ومنه $n+3\in D_{48}$ أي $n+3\in\{6;8;12;16;24;48\}$

و بالتّالي : $n\in\{3;5;9;13;21;45\}$ ؛ قيم n حتى يكون A طبيعي هي $\boxed{n\in\{0;3;5;9;13;21;45\}}$

حل التمرين 21 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 أ) $2^0\equiv1[7];2^1\equiv2[7];2^2\equiv4[7];2^3\equiv1[10]$ ؛

ومنه :

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k\in\mathbb{Z}$
$2^n\equiv$	1	2	4	[7]

ب) $1962\equiv2[7]$ ؛ ومنه $1962^{1954}\equiv2^{1954}[7]$ ؛ $1954=3\times651+1$ إذن $1962^{1954}\equiv2[7]$ ؛ $1954\equiv1[7]$ ومنه $1954^{1962}\equiv1[7]$ ؛ $2015\equiv6[7]$ ؛ $6\equiv-1[7]$ ومنه $2015^{53}\equiv-1[7]$ لأن 53 عدد فردي ومنه

$1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\equiv2-1-1[7]$ إذن $\boxed{1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\equiv0[7]}$

/2 أ) $\sqrt{89}\simeq9.4$ ؛ و 89 لا يقبل القسمة على الأعداد الأوّليّة $2;3;5;7$ ومنه 89 أوّلي

ب) لدينا $7832=2^3\times11\times89$ ومنه عدد القواسم الطبيعيّة للعدد 89 هو $(3+1)(1+1)(1+1)=16$ و هي

$$\begin{cases} 2^0\times11^0\times89^0=1 \\ 2^1\times11^0\times89^0=2 \\ 2^2\times11^0\times89^0=4 \\ 2^3\times11^0\times89^0=8 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2^0\times11\times89^0=11 \\ 2^1\times11\times89^0=22 \\ 2^2\times11\times89^0=44 \\ 2^3\times11\times89^0=88 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2^0\times11^0\times89=89 \\ 2^1\times11^0\times89=178 \\ 2^2\times11^0\times89=356 \\ 2^3\times11^0\times89=712 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2^0\times11\times89=979 \\ 2^1\times11\times89=1958 \\ 2^2\times11\times89=3916 \\ 2^3\times11\times89=7832 \end{cases}$$

ومنه $D_{7832}=\{1;2;4;8;11;22;44;88;89;178;356;712;979;1958;3916;7832\}$

ج) نضع $d=PGCD(981;977)$ ؛ ومنه d يقسم $981-977$ أي d يقسم 4 إذن $d\in\{1;2;4\}$؛ لكن 2 و 4 لا يقسمان العددين 977 و981 ومنه $PGCD(977;981)=1$ فهما إذن أوّليان فيما بينهما

/3 $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$ ؛ $PGCD(x;y)=2$ ومنه $\begin{cases} x=2x' \\ y=2y' \\ PGCD(x',y')=1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 4x'^2-4y'^2=31328 \\ 2x-2y\equiv 8[22] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} x'^2-y'^2=7832 \\ x'-y'\equiv 4[11] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} (x'+y')(x'-y')=31328 \\ x'-y'\equiv 4[11] \end{cases}$ ومنه $(x'-y')$ و $(x'+y')$ قاسمين للعدد 7832

وباقي قسمة $x'-y'$ على 11 هو 4 ومنه $\begin{cases} x'+y'=1958 \text{ و } x'-y'=4 \\ x'+y'=22 \text{ و } x'-y'=356 \end{cases}$

$\begin{cases} x'-y'=4 \\ x'+y'=1958 \end{cases}$ من هذه الجملة نجد $x'=981$ و $y'=977$ ؛ $\begin{cases} x'-y'=356 \\ x'+y'=22 \end{cases}$ ، مو هذه الجملة نجد

$x'=189$ و $y'=-167$ ، (مرفوض لأنّ الحلّين طبيعيين)

بالتّعويض نجد $x=981\times 2=1962$ و $y=977\times 2=1954$

/4 أ) حسب مبرهنة بيزو لدينا a أوّلي مع b معناه يوجد عددان صحيحان α و β بحيث $\alpha a+\beta b=1 \ldots(1)$ ،

a أوّلي مع c معناه يوجد عددان صحيحان α' و β' بحيث $\alpha' a+\beta' c=1 \ldots(2)$

بضرب (1) في (2) نجد $(\alpha a+\beta b)(\alpha' a+\beta' c)=1$ أي $\alpha\alpha' a^2+\alpha a\beta' c+\beta b\alpha' a+\beta b\beta\beta' c=1$

ومنه $(\alpha\alpha' a+\alpha\beta' c+\beta b\alpha')a+\beta\beta'\beta bc=1$ ومنه a و bc أوّليان فيما بينهما

ب) التّحقق $PGCD(a;b)=1$ محققة ؛ نفرض أن $PGCD(a;b^n=1)$ و نبرهن أنّ $PGCD(a;b^{n+1}=1)$

$PGCD(a;b)=1$ و $PGCD(a;b^n=1)$ ؛ فحسب ما سبق $PGCD(a;b\times b^n=1)$ و منه $PGCD(a;b^{n+1}=$

1) ومنه من أجل كلّ عدد طبيعي n $PGCD(a;b^n=1)$

ج) $PGCD(1954;1962)=2PGCD(977;981)$ ومنه $PGCD(1954^{1962};1962^{1954})=2^{1954}PGCD(2^8\times$
$977^{1962};981^{1954})$

لدينا $PGCD(977;981)=1$ فحسب ب) $PGCD(977^{1962};981^{1954})=1$ و لدينا $PGCD(2;981)=1$ فحسب

ب) أيضاً $PGCD(2^8;981^{1954})=1$ ومنه حسب أ) $PGCD(2^8\times 977^{1962};981^{1954})=1$

$PGCD(1954^{1962};1962^{1954})=2^{1954}$

حل التمرين 22 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

/1 رقم آحاد n^5-n هو 0 معناه n^5-n يقبل القسمة على 10 ؛ من قواسم 10 هناك قاسمين أوّلين هما 2 و 5

$n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ ؛ العدد $n(n+1)$ هو جداء عددين طبيعيين متتابعين فهو إذن

عدد زوجي أي مضاعف للعدد 2 ؛ إذن n^5-n مضاعف للعدد 2

إذا كان n مضاعف للعدد 5 فإنّ n^5-n مضاعف للعدد 5

إذا كان n ليس مضاعف لـ 5 فإنّ بواقي قسمته على 5 هي 1 أو 2 ؛ أو 3 ؛ أو 4

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 1 فإنّ $n-1$ مضاعف للعدد 5 ومنه n^5-n مضاعف للعدد 5

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 4 فإنّ $n+1$ مضاعف للعدد 5 ومنه n^5-n مضاعف للعدد 5

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو r حيث $r\in\{2;3\}$ ومنه $n=5k+r$ إذن $n^2=25k^2+10k\times r+r^2$ ؛ومنه
$n^2+1=25k^2+10k\times r+r^2+1$

$r \in \{2;3\}$ ومنه $n^2+1=25k^2+20k+5$ أو $n^2+1=25k^2+30k+10$ ومنه n^2+1 مضاعف لـ 5 إذن n^5-n مضاعف للعدد 5

في كل الحالات n^5-n مضاعف للعدد 5 و مضاعف للعدد 2 إذن فهو مضاعف للعدد 10 و بالتالي رقم آحاده 0

2/ n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد معناه رقم آحاد العدد $n^{p+5}-n^{p+1}$ هو 0

لدينا (n^5-n) $n^{p+5}-n^{p+1}=n^p$؛ مما سبق n^5-n رقم آحده 0 ومنه $n^{p+5}-n^{p+1}$ رقم آحده هو 0 ومنه n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

حل التمرين 23 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

لإثبات أنّ n^7-n يقبل القسمة على 14 يكفي أن نثبت أنّه يقبل القسمة على 2 و 7 لأنّهما أوّليان فيما بينهما

لدينا $n^7-n=n(n^6-1)=n(n-1)(n^2+n+1)(n^3+1)$

العدد $n(n-1)$ هو عدد زوجي لأنّه جداء عددين طبيعيين متتابعين ومنه العدد n^7-n يقبل القسمة على 2؛ يمكن أن نثبت أنّ العدد n^7-n يقبل القسمة على 7 و ذلك بتمييز الحالات

$n=7k; n=7k+1; n=7k+2; n=7k+3; n=7k+4; n=7k+5; n=7k+6$

بما أن العدد n^7-n يقبل القسمة على 2 و 7 فهو يقبل القسمة على 14 فهو مضاعف لـ 14

حل التمرين 25 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

1/ $p=2$ المعادلة E تصبح $x^2+y^2=4$ ومنه $y^2=4-x^2$ ومنه $y^2=(2-x)(2+x)$ و عليه $2-x>0$ و $x+2>0$ لأنّ $y\in\mathbb{N}^\star$ ومنه $x<2$ و $x\in\mathbb{N}^\star$ إذن $x=1$

المعادلة E تصبح $y^2=3$ و هذه المعادلة الأخيرة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{N}^\star$؛ وعليه المعادلة E لا تقبل حلولاً في $\mathbb{N}^\star$ من أجل $p=2$

2/ أ) نفرض $p\neq 2$ و $(x;y)$ حل لـ E

نفرض أنّ x و y زوجيان أي $x=2\ell$ و $y=2\ell'$ حيث $\ell;\ell'$ عددان طبيعيان ؛ ومنه $4\ell^2+4\ell'^2=p^2$ ومنه $2(2\ell^2+2\ell'^2)=p^2$ ومنه 2 يقسم p^2 ومنه 2 يقسم p و هذا تناقض لأنّ p أوّلي و $p\neq 2$

نفرض أنّ x و y فرديان أي $x=2\ell+$ و $y=2\ell'+1$ حيث $\ell;\ell'$ عددان طبيعيان ؛ ومنه $2(2\ell^2+2\ell+2\ell'^2+2\ell'+1)=p^2$ ومنه 2 يقسم p^2 ومنه 2 يقسم p و هذا تناقض لأنّ p أوّلي و $p\neq 2$

ومنه xو y من شفعيتان مختلفتان

ب) نفرض أنّ p يقسم x ومنه $x=pk$ حيث $k\in\mathbb{N}$ ومنه $y^2=p^2(1-k^2)$، ومنه $k\leqslant 1$ وعليه $k=0$ أو $k=1$

من أجل $k=0$ نجد $x=0$ ؛ من أجل $k=1$ نجد $y=0$ ؛ لكن العددان x وy عددان طبيعيان غير معدومين نصل إلى نفس النّتائج إذا افترضنا أنّ p يقسم y؛ وعليه p لا يقسم x و لا يقسم y

ج) نضع $PGCD(x^2;y^2)=d$ ؛ $d\setminus x^2$ و $d\setminus y^2$ ومنه $d\setminus x^2+y^2$ و منه $d\setminus p^2$ ومنه $d\in\{1;p;p^2\}$

د) بما أن p لا يقسم x و لا يقسم y و منه $d\neq p$ و $d\neq p^2$ ومنه $d=1$ ؛ إذن x و y أوّليان فيما بينهما

3/ أ) $(|u^2-v^2|;2uv)$ حل لـ E معناه $(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2$ ؛ وهذا الطحقق بسيط

ب) في حالة $p=5$ أي $p=1^2+2^2$ مم سبق نجد $(3;4)$ حل لـ E ؛ و في حالة $p=13$ أي $p=3^2+2^2$ إذن $(5;12)$

حل لـ E

4/ أ) $p=3$ ؛ نفرض أنّ $u^2+v^2=3$ ومنه $u^2=3-v^2$ ومنه $v^2<3$ ومنه $v^2=1$ ومنه $v=1$ إذن $u^2=2$ ؛
لكن 2 ليس مربعا تاما ومنه 3 ليس مجموع مربّعين
المعادلة E تصبح $x^2+y^2=9$ ومنه

حل التمرين 26 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

أ) $\begin{cases} x\equiv 3[5] \\ x\equiv 1[6] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x=5k+3 \\ x=6k'+1 \end{cases}$ ومنه $5k=6k'-2$ ومنه $5k\equiv -2[6]$ أي $5k\equiv 4[6]$ ومنه $25k\equiv 2[6]$
ومنه $k\equiv 2[6]$ ومنه $k=6\ell+2$ إذن $x=30\ell+13; \qquad \ell\in\mathbb{Z}$

ب) $\begin{cases} 2x\equiv 2[4] \\ 4x\equiv 1[3] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x\equiv 1[2] \\ x\equiv 1[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3x\equiv 3[6] \\ 2x\equiv 2[6] \end{cases}$ ومنه $x\equiv 1[6]$ ومنه $x=6\ell+1; \qquad \ell\in\mathbb{Z}$

حل التمرين 28 ▲ للعودةإلى التمرين انقر هنا

1/ الحرف (ث) يحوّل إلى الحرف (ذ) معناه $x=3$ ترفق بـ $y=8$ أي $8\equiv 3a+b[28]$ ومنه $3a+b\equiv 8[28]$ ؛
الحرف (ص) يحوّل إلى الحرف (خ) معناه $x=13$ ترفق بـ $y=6$ أي $6\equiv 13a+b[28]$ ومنه $13a+b\equiv 6[28]$ومنه
لدينا $\begin{cases} 13a+b\equiv 6[28] \\ 3a+b\equiv 8[28] \end{cases}$

2/ مما سبق و بالطّرح طرفا لطرف بين الموافقتين نجد $10a\equiv -2[28]$ ومنه $5a\equiv -1[14]$ ومنه $5a=14k-1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3/ أ) لدينا $5a\equiv -1[14]$ ومنه $15a\equiv -3[14]$ حسب خواص الموافقات ومنه $a\equiv -3[14]$ ومنه $a\equiv 11[14]$
ب) لدينا $0\leqslant a\leqslant 27$ ؛ $a\equiv 11[14]$ و a أوّلي إذن $a=11$
لدينان $13a+b\equiv 6[28]$ أي $13\times 11+b\equiv 6[28]$ ومنه $b\equiv -137[28]$ ومنه $b\equiv 3[28]$ و لدينا $0\leqslant b\leqslant 27$ إذن $b=3$
مما سبق نجد $a=11$ و $b=3$ و يصبح التشفير التآلفي كما يلي $y\equiv 11x+3[28]$
ج) 11 أوّلي لا يقسم 28 إذن $PGCD(11;28)=1$ و عليه العددان 11 و 28 أوّليان فيما بينهما
4/ يمكن الآن إيجاد تشفير الجملة المعطاة ؛ الجدول أدناه يوضح التشفير المحصل عليه

	A	B	C	D
1		x	y	
2	ا	0	3	ث
3	ب	1	14	ض
4	ت	2	25	ه
5	ث	3	8	ذ
6	ج	4	19	ف
7	ح	5	2	ت
8	خ	6	13	ص
9	د	7	24	ن
10	ذ	8	7	د
11	ر	9	18	غ
12	ز	10	1	ب
13	س	11	12	ش
14	ش	12	23	م
15	ص	13	6	خ
16	ض	14	17	ع
17	ط	15	0	أ
18	ظ	16	11	س
19	ع	17	22	ل
20	غ	18	5	ح
21	ف	19	16	ظ
22	ق	20	27	ي
23	ك	21	10	ز
24	ل	22	21	ك
25	م	23	4	ج
26	ن	24	15	ط
27	ه	25	26	و
28	و	26	9	ر
29	ي	27	20	ق

حل تشفير الجملة السّابقة هو :

الموافقات في مجموعة الأعداد الصحيحه
