# تمارين حول النهـايـات

## التمرين 1:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2}$.

1) أعط القيم التقريبية إلى $10^{-3}$ لـ: $f(1)$ ; $f(10)$ ; $f(100)$ ; $f(3234)$.

2) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f. ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند $+\infty$.

3) ليكن المجال المفتوح الذي مركزه 2 وشعاعه 0,01، أي المجال المفتوح $]1,99;2,01[$. برهن أنه من أجل $x>10$، $f(x)\in]1,99;2,01[$. (يمكننا كتابة f(x) على الشكل $f(x)=2+\frac{1}{x^2}$).

4) ليكن المجال المفتوح $]2-r;2+r[$ مع $r>0$. برهن أنه من أجل x أكبر من العدد $x_0$ يطلب تعيينه بدلالة r، كل قيم f(x) تنتمي إلى المجال $]2-r;2+r[$.

5) برهن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$.

## التمرين 2:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^3+x^2$.

1) أحسب: $f(1)$ ; $f(10)$ ; $f(100)$ ; $f(5812)$.

2) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f. ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند $+\infty$.

3) ليكن المجال المفتوح $]100;+\infty[$. برهن أنه من أجل $x>10$، $f(x)\in]100;+\infty[$.

4) ليكن المجال المفتوح $]A;+\infty[$ مع $A>0$. برهن أنه من أجل x أكبر من $\sqrt{A}$، كل قيم f(x) تنتمي إلى المجال $]A;+\infty[$.

## التمرين 3:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x+3$. برهن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

## التمرين 4:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=2+\frac{3}{(x-1)^2}$.

1) أثبت أن مجموعة تعريف الدالة f هي المجال: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

2) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f. ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند 1.

3) ليكن المجال المفتوح $]1000;+\infty[$. ما هو الشرط الذي يجب توفره في x لكي تكون كل قيم f(x) تنتمي إلى المجال $]1000;+\infty[$.

4) ليكن المجال المفتوح $]A;+\infty[$ مع $A>2$. ما هو الشرط الذي يجب توفره في x لكي تكون كل قيم f(x) تنتمي إلى المجال $]A;+\infty[$. ثم أثبت أن: $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$.

## التمرين 5:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=1+x+\sin x$. برهن باستعمال طريقة النهايات والترتيب أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

## التمرين 6:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}$.

1) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f. ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند 0.
برهن صحة النتيجة المتحصل عليها.

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}+5+\cos\frac{1}{x}$.

2) برهن أن $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=+\infty$.

3) تأكد من النتيجة المتحصل عليها عن طريق تمثيل الدالة g باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر.

## التمرين 7:

باستعمال العمليات على النهايات أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to4}\sqrt{x}+x$ ، $\lim_{x\to-\infty} x(x+1)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}$ ، $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

## التمرين 8:

باستعمال العمليات على النهايات أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}2}\frac{2x+5}{x^2-x-2}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x+\sqrt{x}}$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{x-3}{x^2-1}$.

## التمرين 9:

1) أحسب نهاية كل دالة من الدوال التالية عند 0:

$f(x)=x^3-3+\frac{1}{x}$ ، $f(x)=\sqrt{x}+2$ ، $f(x)=x^3+x+1$ ، $f(x)=x^3+5$.

2) أحسب نهاية كل دالة من الدوال التالية عند $+\infty$:

$f(x)=x^3-3+\frac{1}{x}$ ، $f(x)=\sqrt{x}+2$ ، $f(x)=x^3+x+1$ ، $f(x)=x^3+5$.

## التمرين 10:

أحسب:

$\lim_{x\to-\infty} x-\frac{1}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} x^2+x+1$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}+x-1$ .

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} \left(2+\frac{1}{x}\right)(2x-3)$ ، $\lim_{x\to-\infty} (2x-1)(x^2-5)$ ، $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ، $\lim_{x\to-\infty} x(x+1)$ .

## التمرين 11:

1) أحسب: $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$ . ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} x^2-3x-2$ .

2) باستعمال طريقة مشابهة للطريقة السابقة، أحسب: $\lim_{x\to-\infty} x^3+3x^2-5x+1$ .

## التمرين 12:

1) تأكد أن: $\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد استخراج $x^3$ كعامل مشترك من العبارة $x^3-x^2$ ، استنتج $\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2$ .

2) تأكد أن: $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x}{x^2+x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد استخراج $x^3$ كعامل مشترك من العبارة $x^3+x$ و استخراج $x^2$ كعامل مشترك من العبارة $x^2+x$ ، استنتج $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x}{x^2+x}$ .

3) تأكد أن: $\lim_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد تحليل بسط ومقام العبارة $\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ إلى جداء، استنتج $\lim_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ .

4) تأكد أن: $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد ضرب بسط ومقام العبارة $\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ بمرافق البسط، استنتج $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ .

## التمرين 13:

أحسب:

$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} \frac{x^2+x+3}{x^2-2x-3}$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}0} \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}$ ، $\lim_{x\to-\infty} x^3+2x^2+1$ .

$\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1+\frac{1}{x}}{x^3+3x}$ .

## التمرين 14:

أحسب نهاية الدالة f عند 0 في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ ، $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ ، $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

$f(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$ ، $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ، $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-1$.

## التمرين 15:

أحسب:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}x(x+1)$ ، $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}+x$.

## التمرين 16:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2}{(x+1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{1}{x-1}$ ، $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x^2+1}$ ، $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{2x-1}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x+3}$ ، $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-1}{x-3}$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{(2x-1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{2x+1}$.

## التمرين 17:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{2-x}$.

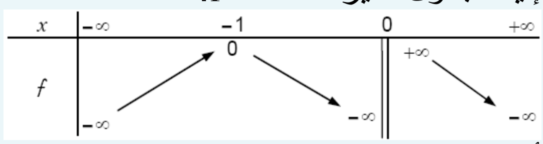
## التمرين 18:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3+x^2}$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{1}{2+3x^2}}$.

## التمرين 19:

إليك جدول تغيرات الدالة f:




أوجد، باستعمال هذا الجدول، النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\sqrt{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{1}{f(x)+3}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+3}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{1}{f(x)}$.

## التمرين 20:

لتكن الدالة $f$ حيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم لدينا: $f(x) \geq x^2 + x + \frac{1}{x}$.

1) استنتج، إن كان ذلك ممكنا، النهايات التالية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .

لتكن الدالة $g$ حيث من أجل كل $x \in ]100;+\infty[$ لدينا: $\frac{3-x}{5-2x} \leq g(x) \leq \frac{x^2+x-3}{2x^2-5}$.

2) استنتج، إن كان ذلك ممكنا، النهايات التالية:

$\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ .

## التمرين 21:

لتكن الدالة $f$ المعرفة بـ: $f(x) = \frac{3x+5}{x-4}$ .

1) ما هي مجموعة تعريف الدالة $f$.

2) أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$.

4) تأكد من صحة النتائج المتحصل عليها من خلال رسم $(C_f)$ على حاسبة بيانية أو كمبيوتر.

## التمرين 22:

لتكن الدالة $f$ المعرفة بـ: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ .

1) ما هي مجموعة تعريف الدالة $f$. أحسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 2$ ، لدينا: $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$ .

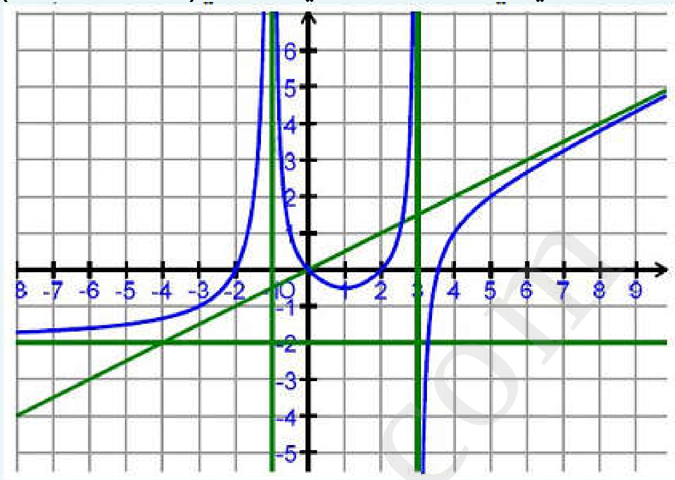
3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$.

4) أثبت أنه من أجل كل $x > 2$ لدينا $f(x) - x > 0$ ، و أنه من أجل كل $x < 2$ لدينا $f(x) - x < 0$ . ما هو التفسير الهندسي لهذه المتراجحات.

5) تأكد من صحة النتائج المتحصل عليها من خلال رسم $(C_f)$ على حاسبة بيانية أو كمبيوتر.

**التمرين 23:**

الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة f (باللون الأزرق):



1) باستعمال هذا الشكل، أوجد نهايات f عندما تؤول x إلى:
$-\infty\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;+\infty$.

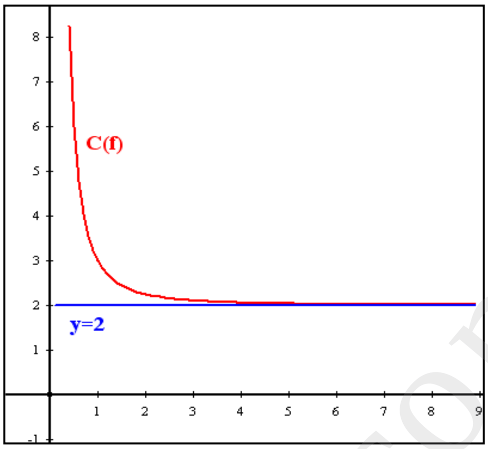
2) استنتج المستقيمات المقاربة لـ $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة f.

# حلول التمارين حول النهايات -الجزء 1-

## فهرس حلول التمارين

## حل التمرين 1:

(1




$f(1)=\frac{2\times1^2+1}{1^2}=3.$

$f(10)=\frac{2\times10^2+1}{10^2}=\frac{201}{100}=2,01.$

$f(100)=\frac{2\times100^2+1}{100^2}=\frac{20001}{10000}=2,0001\ .$

$f(3234)=\frac{2\times3234^2+1}{3234^2}\approx2.$

2) من خلال ملاحظة التمثيل البياني للدالة f، وحساب مختلف قيم $f(x)$ من أجل x كبير بقدر كاف، نلاحظ أن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ .

3) نلاحظ أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يمكننا كتابة $f(x)$ على الشكل التالي:
$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2}=\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=2+\frac{1}{x^2}$.

❖ من أجل $x>10$ فإن $x^2>100$ (لأن الدالة مربع متزايدة في المجال $]0;+\infty[$)،

ومنه فإن: $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{100}$ (لأن الدالة مقلوب متناقصة في المجال $]0;+\infty[$)،

ومنه فإن: $2+\frac{1}{x^2}<2+\frac{1}{100}$، ومنه فإن: $f(x)<2,01$ .....(1).

❖ من جهة أخرى لدينا من أجل كل x ينتمي إلى $]0;+\infty[$ لدينا: $\frac{1}{x^2}>0$ ومنه فإن: $2+\frac{1}{x^2}>2$،
أي $f(x)>2$ ومنه فإن: $f(x)>1,99$ ....(2).

❖ من (1) و(2) نستنتج: $x>10\Leftrightarrow f(x)\in]1,99;2,01[$ .

4) $r>10$ و$f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2-r;2+r[$ معناه أن:

❖ $f(x)<2+r\Leftrightarrow2+\frac{1}{x^2}<2+r\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}<r\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{r}\Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{1}{r}}$ ....(1)

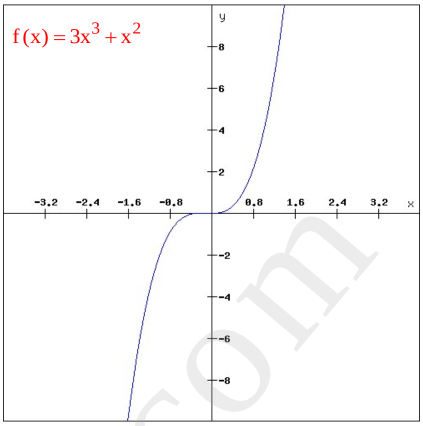
❖ $x>0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}>0\Leftrightarrow2+\frac{1}{x^2}>2\Leftrightarrow f(x)>2\Leftrightarrow f(x)>2-r$ .....(2)

من (1) و(2) نستنتج أنه من أجل $x>\sqrt{\frac{1}{r}}$، كل قيم $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2-r;2+r[$ .

5) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2.$

## حل التمرين 2:

1) لدينا: $f(x)=3x^3+x^2$.




$f(1)=3\times1^3+1^2=4$.

$f(10)=3\times10^3+10^2=3100$.

$f(100)=3\times100^3+100^2=3\,010\,000$.

$f(5812)=3\times5812^3+5812^2=589\,010\,421\,328$.

2) من خلال ملاحظة التمثيل البياني للدالة f، وحساب مختلف قيم f(x) من أجل x كبير بقدر كاف، نلاحظ أن:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3) من أجل $x>10$ فإن $x^2>100$ (لأن الدالة مربع متزايدة في المجال $]0;+\infty[$)، و $3x^3>0$، ومنه فإن $3x^3+x^2>100$ أي أن: $f(x)\in\,]100;+\infty[$.

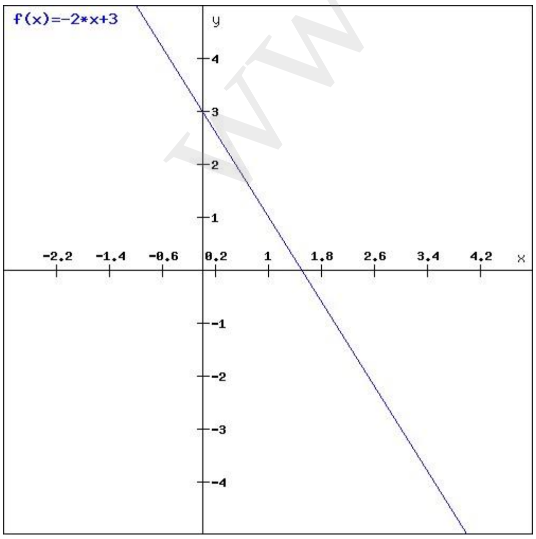
4) من أجل $x>\sqrt{A}$ و $A>0$ فإن $x^2>A$ و $3x^3>0$، ومنه فإن $3x^3+x^2>A$ أي أن: $f(x)\in\,]A;+\infty[$.

---

## حل التمرين 3:

لدينا: $f(x)=-2x+3$.

لكي نبرهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، يجب أن نبرهن أنه من أجل $x\in\,]A;+\infty[$ مع A كبير جدا، ، فإن كل قيم f(x) تنتمي إلى $]-\infty;A[$.



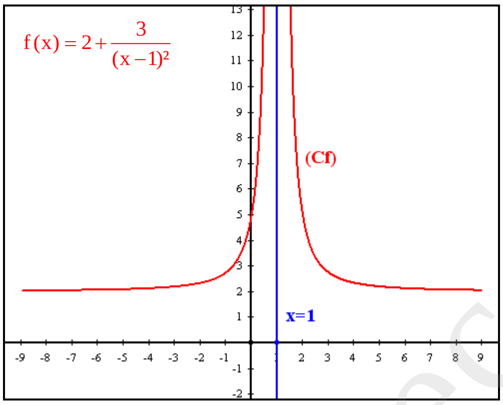

$$\begin{aligned} x\in\,]A;+\infty[ &\Leftrightarrow x>A \Leftrightarrow 2x>2A \\ &\Leftrightarrow -2x<-2A \\ &\Leftrightarrow -2x+3<-2A+3. \\ &\Leftrightarrow f(x)<-2A+3 \\ &\Leftrightarrow f(x)<A \end{aligned}$$

و هذا معناه أن f(x) تنتمي إلى $]-\infty;A[$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

## حل التمرين 4:

1) $f(x)=2+\frac{3}{(x-1)^2}$ ومنه فإن f تكون معرفة إذا كانت $(x-1)^2 \neq 0$ أي $x \neq 1$، ومنه فإن مجموعة تعريف الدالة f هي: $\boxed{D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$.

2) من خلال ملاحظة التمثيل البياني للدالة f، نلاحظ أن: $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$.




3)

$$f(x)\in]1000;+\infty[ \Leftrightarrow 2+\frac{3}{(x-1)^2}>1000 \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)^2}>998 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>\frac{998}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2<\frac{3}{998} \Leftrightarrow (x-1)^2-\frac{3}{998}<0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{\frac{3}{998}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{3}{998}}\right)<0$$

**جدول الإشارة:**

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{\frac{3}{998}}$ | | $1+\sqrt{\frac{3}{998}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1-\sqrt{\frac{3}{998}}$ | | - | **0** | | + | | |
| $x-1+\sqrt{\frac{3}{998}}$ | | | | - | **0** | + | |
| $\left(x-1-\sqrt{\frac{3}{998}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{3}{998}}\right)$ | | + | **0** | - | **0** | + | |

من خلال جدول الإشارة يمكننا أن نستنتج أن: $f(x)\in]1000;+\infty[ \Leftrightarrow x\in\left]1-\sqrt{\frac{3}{998}};1+\sqrt{\frac{3}{998}}\right[$.

4) $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]A;+\infty[$ مع $A>2$:

❖ $f(x)\in]A;+\infty[ \Leftrightarrow 2+\dfrac{3}{(x-1)^2}>A \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x-1)^2}>A-2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2}>\dfrac{A-2}{3}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2<\frac{3}{A-2} \Leftrightarrow (x-1)^2-\frac{3}{A-2}<0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{\frac{3}{A-2}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{3}{A-2}}\right)<0$$

من خلال السؤال السابق يمكننا أن نستنتج أن: $f(x)\in]A;+\infty[ \Leftrightarrow x\in\left]1-\sqrt{\dfrac{3}{A-2}};1+\sqrt{\dfrac{3}{A-2}}\right[$.

من هنا نستنتج أنه كلما كان $x$ قريبا من 1 فإن $f(x)>A$، وهذا مهما تكن قيمة العدد $A$ المختارة. وهذا معناه أن $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$.

## حل التمرين 5:

لدينا: $f(x)=1+x+\sin x$.

❖نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $-1\le\sin x\le1$،

ومنه فإن: $1+x-1\le1+x+\sin x\le1+x+x$،

أي أن: $x\le f(x)\le x+2$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

❖من جهة أخرى نعلم أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. وبما أن $f(x)\ge x$،

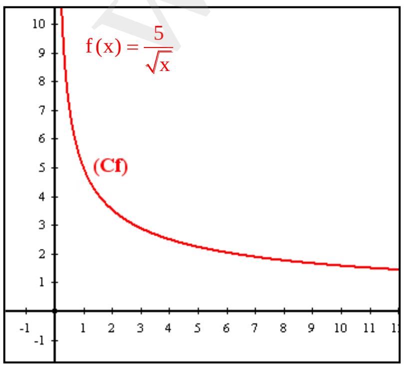
فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

## حل التمرين 6:

$f$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x}}$.

1) مــن خـــلال ملاحظـــة التمثيـــل البيـــاني للدالـــة $f$، نلاحـــظ أن:

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$.



**البرهان:**

ليكن العدد $A$ حيث $A > 0$.

$$f(x) \in ]A;+\infty[ \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}} > A \Leftrightarrow \frac{25}{x} > A^2 \Leftrightarrow x < \frac{25}{A^2}.$$

وهذا معناه أنه إذا كان $x \in \left]0;\frac{25}{A^2}\right[$ فإن $f(x) \in ]A;+\infty[$ . ومن هنا نستنتج أنه من أجل $x$ قريب جدا من 0، فإن $f(x) > A$، مهما كانت قيم $A$ المختارة. ومنه فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ .

2) $g$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + 5 + \cos\frac{1}{x}$.

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $\alpha$ لدينا: $-1 \le \cos\alpha \le 1$،

ومنه فإن: $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$ من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$.

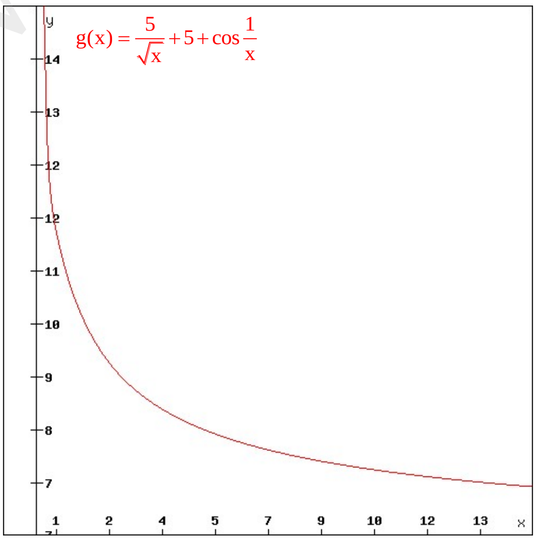
وبما أن: $\frac{5}{\sqrt{x}} + 5 > 0$، فبإضافة $\frac{5}{\sqrt{x}} + 5$ إلى طرفي المتراجحة نتحصل على:

$$\frac{5}{\sqrt{x}} + 5 - 1 \le \frac{5}{\sqrt{x}} + 5 + \cos\frac{1}{x} \le \frac{5}{\sqrt{x}} + 5 + 1$$

أي أن: $\frac{5}{\sqrt{x}} + 6 \ge g(x) \ge \frac{5}{\sqrt{x}} + 4$ .

إذن من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ لدينا $g(x) \ge \frac{5}{\sqrt{x}} + 4 \ge f(x)$ .

❖ من السؤال الأول لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$، ومما سبق لدينا: $g(x) \ge f(x)$، ومنه وبتطبيق قاعدة الترتيب في النهايات فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = +\infty$ .



## حل التمرين 7:

❖ $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2$ & $\lim\limits_{x\to 4}x=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+x=6$.

❖ $\lim\limits_{x\to -\infty}x+1=-\infty$ & $\lim\limits_{x\to -\infty}x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -\infty}x(x+1)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2+1=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2+1}=0^+$.

❖ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ & $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}x=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{x}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2+1=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}=0$.

## حل التمرين 8:

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}x-3=-2$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}x^2-1=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\frac{x-3}{x^2-1}=+\infty$.

❖

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}x-1=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}x+1=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0.$$

$$\lim\limits_{x\to +\infty}x+\sqrt{x}=+\infty$$

ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x+\sqrt{x}}=0$ .

❖نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to 2}x^2-x-2=0$ ، ومنه لحساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\frac{2x+5}{x^2-x-2}$ يجب معرفة إشارة $x^2-x-2$ .

$x^2-x-2$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه هما: 2 و(1-). قواعد إشارة $x^2-x-2$ تبين أنه عندما يؤول x إلى 2 بقيم أصغر من 2، فإن: $x^2-x-2<0$ . ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}x^2-x-2=0^-$ .

من جهة أخرى لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}2x+5=9$ ومنه فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\frac{2x+5}{x^2-x-2}=-\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{\sqrt{x}}+1=+\infty$ & $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x+\sqrt{x}=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=+\infty$.

## حل التمرين 9:

(1

- $\lim_{x\to 0} x^3 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^3 + 5 = 5.$
- $\lim_{x\to 0} x^3 + x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^3 + x + 1 = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \sqrt{x} + 2 = 2.$
- $\lim_{x\to 0} x^3 - 3 = -3$ & $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^3 - 3 + \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim_{x\to 0} x^3 - 3 = -3$ & $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{<} 0} x^3 - 3 + \frac{1}{x} = -\infty.$

(2

- $\lim_{x\to +\infty} x^3 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} x^3 + 5 = +\infty.$
- $\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ & $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} x^3 + x + 1 = +\infty.$
- $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} + 2 = +\infty.$
- $\lim_{x\to +\infty} x^3 - 3 = +\infty$ & $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} x^3 - 3 + \frac{1}{x} = +\infty.$

## حل التمرين 10:

- $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ & $\lim_{x\to -\infty} x - 1 = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} + x - 1 = -\infty.$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ & $\lim_{x\to +\infty} x + 1 = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty.$
- $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ & $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$ & $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} x - \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$ & $\lim_{x\to -\infty} x + 1 = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} x(x+1) = +\infty.$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ & $\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty.$
- $\lim_{x\to -\infty} (2x-1) = -\infty$ & $\lim_{x\to -\infty} (x^2 - 5) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} (2x-1)(x^2-5) = -\infty.$
- $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ & $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} (2x-3) = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(2 + \frac{1}{x}\right)(2x-3) = -\infty.$

## حل التمرين 11:

(1

❖ $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \ \& \ \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$.

❖ $x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=x^2-\frac{3x^2}{x}-\frac{2x^2}{x^2}=x^2-3x-2$ ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} x^2-3x-2=+\infty$ ،.

(2

❖ $x^3+3x^2-5x+1=x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$

❖ $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \ \& \ \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} x^3+3x^2-5x+1=-\infty$.

---

## حل التمرين 12:

1) لدينا $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\infty-\infty$.

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة: $x^3-x^2=x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ،

وبما أن: $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ ، نستنتج أن: $\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2=+\infty$ .

2) لدينا $\lim_{x\to-\infty} x^3+x=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} x=-\infty \ \& \ \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ .

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty \ \& \ \lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ . ومنه فإن: $\lim_{x\to-\infty} x^2+x$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\infty-\infty$.

من جهة أخرى لدينا من أجل $x\neq 0$ ، $x^3+x=x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ و $x^2+x=x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ومنه فإن: $\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}=\left(\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\frac{x^3+x}{x^2+x}$ .

وبما أن: $\lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2}=1 \ \& \ \lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ ، فإن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x}{x^2+x}=-\infty$ .

3) لدينا $\lim_{x\to2} x^2+x-6=2^2+2-6=0$ و $\lim_{x\to2} x^2-5x+6=2^2-10+6=0$ ،

ومنه فإن: $\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

من جهة أخرى نلاحظ أن 2 هو حل مشترك لكل من: $x^2+x-6$ و $x^2-5x+6$ ومنه يمكن تحليل كل منهما إلى جداء.

لدينا: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ و $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{5}{-1}=-5$.

4) لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}-1=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$.

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$ ،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

## حل التمرين 13:

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+2x^2+1$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$ ،

وأنه يمكن كتابة: $x^3+2x^2+1=x^3\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}=1$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+2x^2+1=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1+x^2}{\sqrt{x}}=+\infty$ لأن: $(\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1+x^2=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0^+)$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}x^2+x+3=3$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}x^2-2x-3=0$ ،

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة: $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ ، وأنه عندما يكون $x<-1$ فإن: $x^2-2x-3>0$. ومنه فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}x^2-2x-3=0^+$.

إذن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\dfrac{x^2+x+3}{x^2-2x-3}=+\infty$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+1+\dfrac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3+3x=+\infty$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1+\dfrac{1}{x}}{x^3+3x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{\infty}{\infty}$.

من جهة أخرى نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\dfrac{x^2+1+\dfrac{1}{x}}{x^3+3x}$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)=+\infty$ ،

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1+\dfrac{1}{x}}{x^3+3x}$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to1}x^2-3x+2=0$ و $\lim\limits_{x\to1}x^3-1=0$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$.

من جهة أخرى نلاحظ أن 1 هو حل مشترك لكل من: $x^2-3x+2$ و $x^3-1$

ومنه يمكن كتابة: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ و $x^3-1=(x-1)(x^2+x+x)$ .

من هنا يكون لدينا: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x^2+x+1}=-\dfrac{1}{3}$ .

## حل التمرين 14:

❖ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x+1}=1$.

❖ $x>0\Leftrightarrow x^5>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$ .

❖ $x<0\Leftrightarrow x^5<0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{1}{x^5}=-\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

❖ لا يمكن دراسة $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ لأن $\sqrt{x}$ معرفة فقط من أجل $x\geq0$ .

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1+\dfrac{1}{x}=+\infty$

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}1+\dfrac{1}{x}=-\infty$ .

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to0}x=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\dfrac{x+1}{x^2}=(x+1)\times\dfrac{1}{x^2}$ .

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to0}x+1=1\Leftrightarrow(x+1)\times\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ . ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x^2}=+\infty$ .

❖ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}-1=-2$.

❖ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ & $\lim_{x\to 0}x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}x+\frac{1}{x^2}=+\infty$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ،

ومنه فإن $\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\infty\times\infty$.

نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2-\frac{1}{x^2}$ ،

ومنه يصبح لدينا: $\lim_{x\to 0}x^2=0$ & $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}x^2-\frac{1}{x^2}=-\infty$ ،

ومنه نستنتج أن: $\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$.

❖ نلاحظ أن: $\lim_{x\to 0}x=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{1-x}{x^2}=(1-x)\times\frac{1}{x^2}$ ،

وبما أن: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0}1-x=1$ ، فإن: $\lim_{x\to 0}(1-x)\times\frac{1}{x^2}=+\infty$ ومنه فإن: $\lim_{x\to 0}\frac{1-x}{x^2}=+\infty$.

## حل التمرين 15:

❖ $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}+x=2+4=6$.

❖ $\lim_{x\to-\infty}x+1=-\infty$ & $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}x(x+1)=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to+\infty}x^2+1=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$.

❖ $\lim_{x\xrightarrow{>}0}x^2+1=1$ & $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}=0$.

## حل التمرين 16:

❖ $\lim_{x\to 2}(x-2)^2=0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$.

❖ $\lim_{x\xrightarrow{>}1}x-1=0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{1}{x-1}=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to-1}(x+1)^2=0^+ \Leftrightarrow \lim_{x\to-1}\frac{2}{(x+1)^2}=+\infty$.

❖ $x>-1 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1}{x+1}=+\infty$ و $x<-1 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{1}{x+1}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x-1}{2x+1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$.

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1)^2=0$، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{x-1}{(2x-1)^2}=(x-1)\times\frac{1}{(2x-1)^2}$،

وبما أن: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x-1=-\frac{1}{2}$، و $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{(2x-1)^2}=+\infty$،

فإن: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x-1)\times\frac{1}{(2x-1)^2}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{(2x-1)^2}=+\infty \;\&\; \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x-1=-\frac{1}{2}$.

ومنه فإن: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x-1}{(2x-1)^2}=-\infty$.

❖ $x>3 \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{-1}{x-3}=-\infty$ و $x<3 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{-1}{x-3}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x+3}=\frac{0}{3}=0$.

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} 2x-1=0$، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{x-1}{2x-1}=(x-1)\times\frac{1}{2x-1}$،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} (x-1)\times\frac{1}{2x-1}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1}=+\infty \;\&\; \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x-1=-\frac{1}{2}$

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} (x-1)\times\frac{1}{2x-1}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1}=-\infty \;\&\; \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x-1=-\frac{1}{2}$.

ومنه نستنتج أن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{x-1}{2x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{x-1}{2x-1}=-\infty$.

## حل التمرين 17:

❖ نلاحظ أن $\lim\limits_{x \to 2} 2-x=0$ ، كما نلاحظ أنه يمكن كتابة: $\frac{x}{2-x}=x\left(\frac{1}{2-x}\right)$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} x\left(\frac{1}{2-x}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{1}{2-x}=-\infty \;\&\; \lim\limits_{x \to 2} x=2$،

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} x\left(\frac{1}{2-x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{1}{2-x}=+\infty \;\&\; \lim\limits_{x \to 2} x=2$.

فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{x}{2-x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{x}{2-x}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{-5}{-2}=\dfrac{5}{2}$.

❖ نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to 1} x^2+x-2=0$، كما نلاحظ أن 1 و(-2) هما جذران لـ $x^2+x-2$، ويمكن كتابة: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. من خلال جدول الإشارة نلاحظ أن:

| $x$ | $-\infty$    $-2$    $1$    $+\infty$ |
|---|---|
| $x^2+x-2$ | +   0   -   0   + |

عندما يؤول x إلى 1 مع $x<1$، فإن $x\in]-2;1[$، ومنه فإن $x^2+x-2<0$.

عندما يؤول x إلى 1 مع $x>1$، فإن $x\in]1;+\infty[$، ومنه فإن $x^2+x-2>0$.

ومنه نستنتج أن:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{1}{x^2+x-2}=-\infty \;\&\; \lim\limits_{x\to 1} x-5=-4$،

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{1}{x^2+x-2}=+\infty \;\&\; \lim\limits_{x\to 1} x-5=-4$.

❖ من خلال السؤال السابق لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\dfrac{1}{x^2+x-2}=+\infty$ ، و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\dfrac{1}{x^2+x-2}=-\infty$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{x\to -2} x-5=-7$ فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=-\infty$ ، و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=+\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{0}{28}=0$.

## حل التمرين 18:

❖ $\lim\limits_{x\to 0} 2+x^2=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{1}{2+x^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3+x^2}=+\infty$.

❖ $x<-2 \Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}=+\infty$.

## حل التمرين 19:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

مـــن خــــلال جـــدول التغيـــرات نلاحـــظ أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، ومنه فإن:

- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ & $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)=-\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=-1$ & $\lim\limits_{X\to-1} f(X)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=-1$ & $\lim\limits_{X\to-1} f(X)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.
- ❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ & $\lim\limits_{X\to-\infty} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right)=0^{+}$ & $\lim\limits_{X \xrightarrow{<} 0} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{-1}{x^2+1}\right)=-\infty$.
- ❖ لدينا $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$ ، ولدينا أيضا من خلال جدول التغيرات:

$$x\in\left]-\infty;0\right[\Leftrightarrow f(x)\le 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=0^{-} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\frac{1}{f(x)}=-\infty.$$

- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x^2}\right)=-1$ & $\lim\limits_{X\to-1} f(X)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)=0$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x}\right)=+\infty$ & $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right)=-\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+3=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+3}=0$.
- ❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)+3=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\dfrac{1}{f(x)+3}=0$.

## حل التمرين 20:

1)لتكن الدالة f حيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم لدينا: $f(x)\ge x^2+x+\frac{1}{x}$.

❖ لدينا: $\lim_{x\to-\infty} x^2+x=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\to-\infty} x^2+x+\frac{1}{x}=+\infty$ . وبما أن $f(x)\ge x^2+x+\frac{1}{x}$ من أجل كل $x\neq 0$ ، نستنتج أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ .

❖ لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2+x=\lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2=0$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2+x+\frac{1}{x}=+\infty$ . وبما أن $f(x)\ge x^2+x+\frac{1}{x}$ من أجل كل $x\neq 0$ ، نستنتج أن: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ .

❖ لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{<}0} x^2+x=\lim_{x\xrightarrow{<}0} x^2=0$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\xrightarrow{<}0} x^2+x+\frac{1}{x}=-\infty$ . ومنه فلا يمكن استنتاج أي شيء بالنسبة لـ: $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ .

❖ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} x^2+x=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty} x^2+x+\frac{1}{x}=+\infty$ . وبما أن $f(x)\ge x^2+x+\frac{1}{x}$ من أجل كل $x\neq 0$ ، نستنتج أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

2)لتكن الدالة g حيث من أجل كل $x\in]100;+\infty[$ لدينا: $\frac{3-x}{5-2x}\le g(x)\le\frac{x^2+x-3}{2x^2-5}$.

❖ لا يمكن استنتاج أي شيء عن $\lim_{x\to0} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ لأن المتباينة صحيحة من أجل: $x\in]100;+\infty[$ .

❖ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{5-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{-2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-3}{2x^2-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ ، وبما أن النهايتين متساويتان فإن: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{2}$ .

---

## حل التمرين 21:

لدينا: $f(x)=\frac{3x+5}{x-4}$ .

1) الدالة f معرفة من أجل كل $x\neq 4$ . ومنه فإن مجموعة تعريفها هي: $D_f=]-8;4[\cup]4;+\infty[$ أو: $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$ .

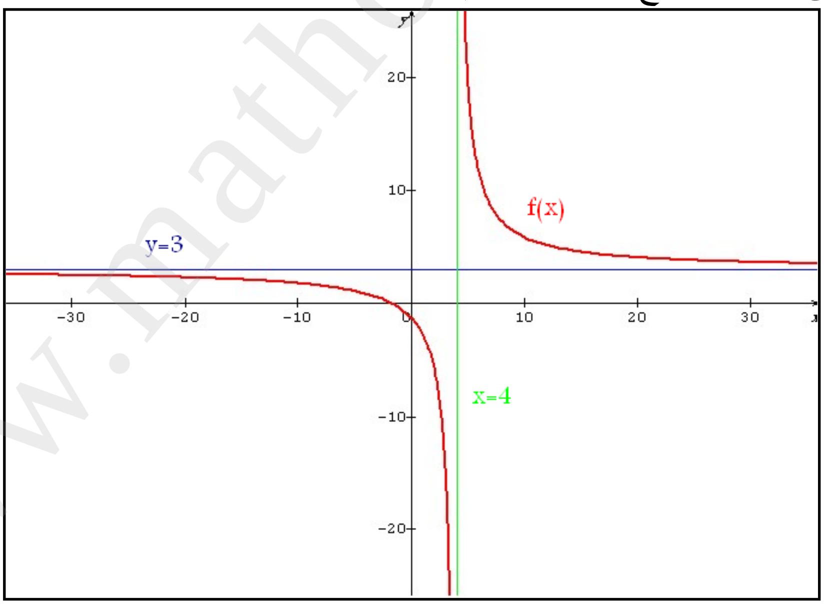
2) حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+5}{x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x}=3.$
- $\lim\limits_{x\to4} 3x+5=17\ \&\ \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}4} x-4=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}4} f(x)=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to4} 3x+5=17\ \&\ \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}4} x-4=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}4} f(x)=+\infty.$

3) المستقيمات المقاربة لـ $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$:

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، ومنه فإن $(C_f)$ يقبل عند $\infty$ مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته: $y=3$.
- لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}4} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}4} f(x)=-\infty$ ، ومنه فإن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=4$.

4) التأكد من صحة النتائج المتحصل عليها:



## حل التمرين 22:

لدينا: $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ .

1) الدالة f معرفة من أجل كل $x\neq 2$ . ومنه فإن مجموعة تعريفها هي: $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ أو: $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ .

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=+\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=-\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^2=1 \;\&\; \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} x-2=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^2=1 \;\&\; \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} x-2=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$ .

2) من أجل كل عدد حقيقي $x\neq2$ ، لدينا:

$x+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=f(x)$ ،

إذن من أجل كل $x\neq2$ لدينا $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ .

3) المستقيمات المقاربة لـ $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة f:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$ ، ومنه فإن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=2$ .

❖ من جهة أخرى لدينا: $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ ، ومنه فإن $(C_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته: $y=x$ مستقيما مقاربا مائلا عند $\infty$ .

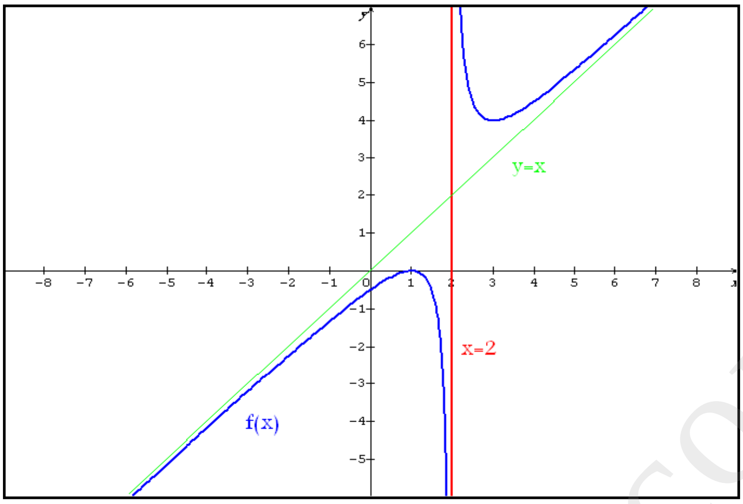
4) لدينا: $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ ومنه فإن: $f(x)-x=\dfrac{1}{x-2}$ .

❖ $x>2$ معناه $x-2>0$ ، وهذا معناه $\dfrac{1}{x-2}>0$ ، ومنه فإن: $f(x)-x>0$ .

❖ $x<2$ معناه $x-2<0$ ، وهذا معناه $\dfrac{1}{x-2}<0$ ، ومنه فإن: $f(x)-x<0$ .

❖ التفسير الهندسي لهذه المتراجحات هو: أن $(C_f)$ يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=x$ عندما يكون $x\in]2;+\infty[$ ، و أن $(C_f)$ يقع تحت المستقيم ذي المعادلة $y=x$ عندما يكون $x\in]-\infty;2[$ .

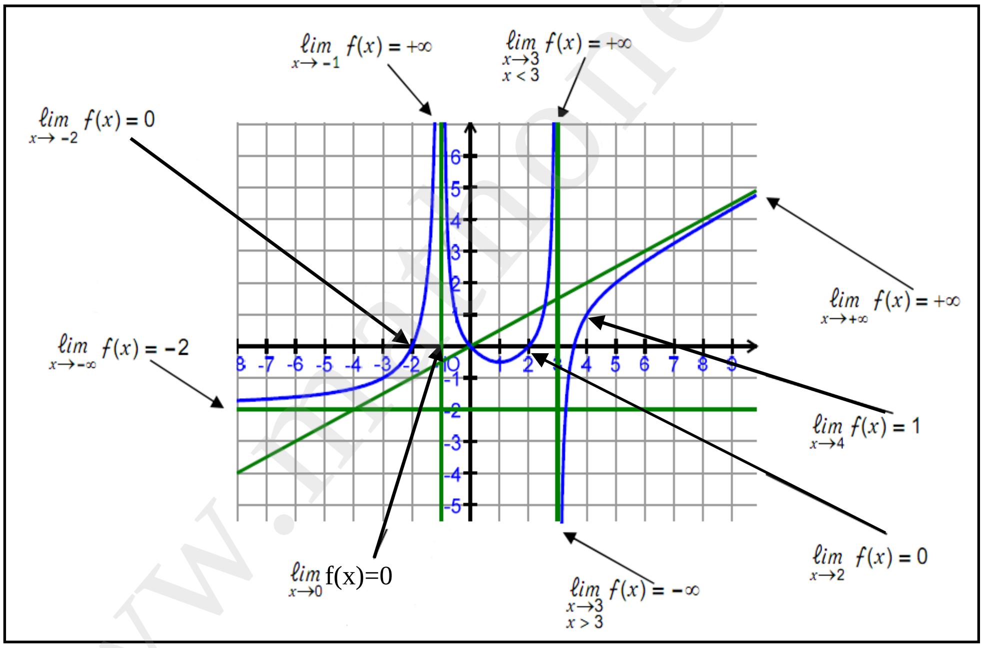
5) التأكد من صحة النتائج المتحصل عليها:




## حل التمرين 23:

الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة f (باللون الأزرق):

1) من خلال الشكل يمكننا أن نستنتج أن:




❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ . $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=0$ . $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ . $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ . $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=+\infty$ .

❖ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)=-\infty$ . $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=1$ . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

2) المستقيمات المقاربة لـ $(C_f)$:

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ومنه فإن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته: $y=-2$ عند $-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$ ومنه فإن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=-1$.

❖ $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 3} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 3} f(x)=-\infty$ ومنه فإن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=3$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، ومن خلال الشكل يمكننا أن نستنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y=\frac{1}{2}x$ عند $+\infty$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه

# تمارين حول النهايات ــ الجزء 2-

**التمرين 1:**

أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^6-3x^2+11}{-4x^7-3x^2+11}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25-3x^2-2x^5}{3x^2-2}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{x}$

**التمرين 2:**

أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^3+7}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sin x}$

**التمرين 3:**

لتكن h الدالة المعرفة بـ: $h(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{(x-6)^2}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة h.

2) حلل $x^2-7x+6$ إلى جداء عوامل أولية.

3) استنتج عندها $\lim\limits_{x\to6}h(x)$ .

**التمرين 4:**

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{-11}{(x-2)^2(x-7)}$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

**التمرين 5:**

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x^3}{(x+5)^2}$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

## التمرين 6:

أحسب النهايات التالية باستعمال العمليات على النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x^2+x+1$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+1}{x-x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x^2-2x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{x^2-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)(x-3)}{3x^3+1}$

## التمرين 7:

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}$.

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

## التمرين 8:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} x^3-x^2-5$ ، $\lim\limits_{x\to0} x^3-x^2-5$.

$\lim\limits_{x\to\infty} 2x^4+x^2-1$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} -2x^4+x^3+x$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x-\dfrac{1}{x}$

## التمرين 9:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-x-1}{x^3+x}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+2x^2+1$.

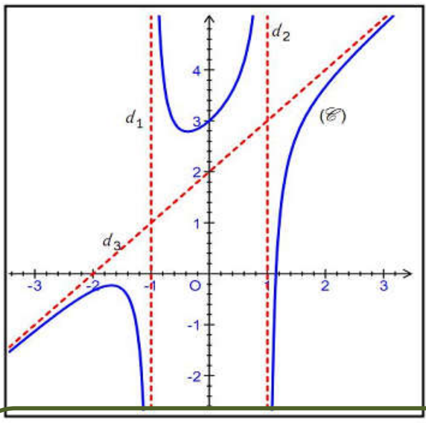
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-x^2}{2x^2+x+5}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^3-3x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^3-3x+1}$.

## التمرين 10:

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{3-x}{2+x-x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2}$ ، $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+2}{(x-1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{3x^3-1}$.

## التمرين 11:



لدينا في الشكل المقابل التمثيل البياني $(C_f)$ للدالة $f$:
ولدينا المستقيمات $d1, d2, d3$ ذات المعادلات على الترتيب:
$d_1 : x = -1$ ; $d_2 : x = 1$ ; $d_3 : y = x + 2$
1) باستعمال الشكل، فسر كون المستقيمات الثلاثة مستقيمات مقاربة للمنحنى $(C_f)$.
2) من خلال الشكل، ما هي إشارة $f(x)-(x+2)$.

## التمرين 12:

لتكن $f$ الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{-2x^2+7x}{3-x}$.
1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$ واحسب نهاياتها عند حدود مجموعة تعريفها.
2) أثبت أنه من أجل كل $x \in D$ لدينا: $f(x)=2x-1+\dfrac{3}{3-x}$.
3) من خلال السؤالين السابقين، استنتج المستقيمات المقاربة للتمثيل البياني $(C_f)$ للدالة $f$.

## التمرين 13:

1) أدرس إشارة $10-3x-x^2$.
2) لتكن $f$ الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x+1}{10-3x-x^2}$. أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -5} f(x)$.
3) نفرض أنه من أجل كل $x \neq -5$ و $x \neq 2$ لدينا: $g(x) \leq f(x)$. استنتج، إن كان ذلك ممكنا، النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -5} g(x)$.

## التمرين 14:

أحسب النهايات التالية:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$.
$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}}$.

## التمرين 15:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{n\to+\infty} 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2\sqrt{x}}{2+3x} \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\cos x}{2+x} \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-2}+x$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-x^2+1}{-3x^3-x} \quad ، \quad \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)^3}{x^2-3} \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^2+3x+1}{1-x} \quad ، \quad \lim_{x\to2} \frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{-1+5x^3}$$

## التمرين 16:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4-x^2+3}{2-x^2} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{-2+3x^3} \quad ، \quad \lim_{x\to-1} \frac{(1+x)^3}{x^2-2} \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x+1}{1+x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{x^2+3}{2-x} \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{>} -3} \frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6} \quad ، \quad \lim_{n\to+\infty} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad ، \quad \lim_{x\to3} \frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-3x}{2x-4} \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-3}+x$$

# حلول تمارين حول النهايات -الجزء 2-

## فهرس حلول التمارين

## حل التمرين 1:

1) نعلم أن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام. ومنه فإن:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^6-3x^2+11}{-4x^7-3x^2+11}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^6}{-4x^7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25-3x^2-2x^5}{3x^2-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^5}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{3}x^3=-\infty.$

2) نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$ ، ولإزالتها يجب ضرب البسط والمقام في مرافق البسط فنتحصل على:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}\right)\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}\right)}{x\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}}=\frac{2}{2\sqrt7}=\frac{1}{\sqrt7}$$

## حل التمرين 2:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^3+7}$

نلاحظ أن المقام يؤول إلى $+\infty$ ، وأن البسط يمكن إعطاء حصر له.

❖ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $\begin{cases}-1\le\cos x\le1\\-1\le\sin x\le1\end{cases}$ ومنه فإن: $\begin{cases}-1\le\cos x\le1\\-2\le-2\sin x\le2\end{cases}$ ، ثم بجمع أطراف المتراجحتين نتحصل على: $-3\le\cos x-2\sin x\le3$.

❖ من أجل كل $x>0$ لدينا $x^3+7>0$ ، ومنه فإن: $\dfrac{-3}{x^3+7}\le\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^3+7}\le\dfrac{3}{x^3+7}$.

❖ من جهة أخرى لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x^3+7}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^3+7}=0$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^3+7}=0$.

2) نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sin x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$ ، ولإزالتها يجب ضرب البسط والمقام في مرافق البسط فنتحصل على:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)(1-2x)}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{4}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}$$

وبما أن: $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{4}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}}=2$ ، فإن: $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sin x}=2$ .

## حل التمرين 3:

لدينا: $h(x)=\frac{x^2-7x+6}{(x-6)^2}$

1) الدالة h معرفة من أجل $x-6\neq0$ أي: $x\neq6$ ومنه فإن: $D_h=\mathbb{R}-\{6\}$ .

2) نلاحظ أن 1 و 6 هي حلول للمعادلة: $x^2-7x+6=0$ ، ومنه فإن: $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$ .

3) من أجل كل x من $D_h$ لدينا: $h(x)=\frac{(x-1)(x-6)}{(x-6)^2}=\frac{x-1}{x-6}$ ، و $\lim_{x\to6}(x-1)=5$ و $\lim_{x\to6}(x-6)=0$ .

وبما أن نهاية المقام معدومة فيمكن دراسة نهاية $h(x)$ عن يمين وعن يسار 6. ومنه لدينا:

❖ $\lim_{x\to6}(x-1)=5\ \&\ \lim_{x\overset{<}{\to}6}(x-6)=0^-\Leftrightarrow\lim_{x\overset{<}{\to}6}h(x)=-\infty$ .

❖ $\lim_{x\to6}(x-1)=5\ \&\ \lim_{x\overset{>}{\to}6}(x-6)=0^+\Leftrightarrow\lim_{x\overset{>}{\to}6}h(x)=+\infty$ .

## حل التمرين 4:

لدينا f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\frac{-11}{(x-2)^2(x-7)}$

1) الدالة f معرفة من أجل $x-2\neq0$ و $x-7\neq0$ ومنه فإن: $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{2;7\}}$ .

2) حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty}(x-2)^2=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}(x-7)=-\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}(x-2)^2(x-7)=-\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=0^+$ .

❖ من أجل كل x من $D_f$ لدينا: $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}\times\frac{-11}{x-7}$ ،

- $\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ & $\lim_{x\to2}=\frac{-11}{x-7}=\frac{11}{5}\Leftrightarrow \lim_{x\to2}f(x)=+\infty$.
- $\lim_{x\to7}\frac{-11}{(x-2)^2}=-\frac{11}{25}$ & $\lim_{x\xrightarrow{<}7}\frac{1}{x-7}=-\infty\Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{<}7}f(x)=+\infty$.
- $\lim_{x\to7}\frac{-11}{(x-2)^2}=-\frac{11}{25}$ & $\lim_{x\xrightarrow{>}7}\frac{1}{x-7}=+\infty\Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}7}f(x)=-\infty$.

❖ $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}(x-2)^2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}(x-7)=+\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(x-2)^2(x-7)=+\infty\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=0^-$.

## حل التمرين 5:

لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x)=\frac{2x^3}{(x+5)^2}$

1) الدالة f معرفة من أجل $x+5\neq0$ أي: $x\neq-5$ ومنه فإن $D_f=\mathbb{R}-\{-5\}$.

2) حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

❖ نلاحظ أنه من أجل كل x من $D_f$ لدينا: $f(x)=\frac{2x^3}{(x+5)^2}=\frac{2x^3}{x^2+10x+25}$ ومنه فإن:

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2+10x+25}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+10x+25}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to-5}2x^3=-250$ & $\lim_{x\to-5}(x+5)^2=0^+\Leftrightarrow \lim_{x\to-5}f(x)=-\infty$.

## حل التمرين 6:

❖ $\lim_{x\to+\infty}x^3+x^2+x+1=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{-x^2}=-3$.

❖ $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{x^2-2x-2}=-\frac{1}{2}$.

❖ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x^2-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=1$.

❖ $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ & $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}x+\sqrt{x}=+\infty$.

❖ $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)(x-3)}{3x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3}{3x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x}=0$.

## حل التمرين 7:

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$.

نلاحظ أنه إذا افترضنا أن: $h(x)=4+\frac{1}{x^2}$، و $g(x)=\sqrt{x}$، فإن: $f(x)=g\circ h(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} 4+\frac{1}{x^2}=4 \ \& \ \lim_{X\to 4}\sqrt{X}=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=2.$$

## حل التمرين 8:

نعلم أن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثيرة حدود هي نهاية الحد الأعلى درجة. ومنه فإن:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x^2-5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-x^2-5=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to0} x^3-x^2-5=0-5=-5.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4+x^2-1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^4+x^2-1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^4=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4+x^3+x=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4+x^3+x=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \ \& \ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x-\frac{1}{x}=+\infty$ .

## حل التمرين 9:

نعلم أن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام. وأن النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثيرة حدود هي نهاية الحد الأعلى درجة. ومنه فإن:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{x+1}=\frac{0}{1}=0.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-x-1}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-x-1}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+2x^2+1=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-x^2}{2x^2+x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0.$

❖ $\lim\limits_{x\to0}2x^2-3x-4=-4\ \&\ \lim\limits_{x\to0}x^3-3x+1=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^3-3x+1}=-4.$

## حل التمرين 10:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{3x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x}=0.$

❖ $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0^+\ \&\ \lim\limits_{x\to1}-3x+2=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}(-3x+2)\times\dfrac{1}{(x-1)^2}=-\infty.$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{1}{x^2+2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+2}=0\ \&\ \lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{1}{x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{1}{x^2+2}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2}=0.$

❖ نعلم أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{3-x}{2+x-x^2}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}(3-x)\times\dfrac{1}{2+x-x^2}$ .

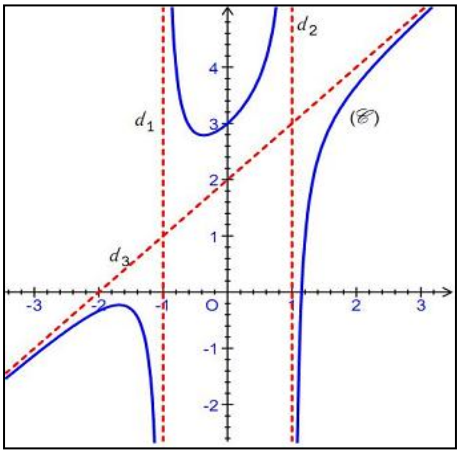
ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to2}2+x-x^2=0$ ، وأن جذري كثير الحدود: $2+x-x^2$ هما: 2 و(-1)،

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

ومن خلال جدول الإشارة لدينا: $2+x-x^2>0$ عندما يكون: $x\in]-1;2[$ ، ومنه فإن:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{1}{2+x-x^2}=+\infty\ \&\ \lim\limits_{x\to2}3-x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}(3-x)\times\dfrac{1}{2+x-x^2}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{3-x}{2+x-x^2}=+\infty$ .

## حل التمرين 11:




❖ لدينا $d_1$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$، ومنه فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$ .

❖ لدينا $d_2$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$، ومنه فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ .

❖ لـــديـنا $d_3$ مســـتقيم مقـــارب لـــ $(C_f)$، ومنـــه فـــإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$ .

❖ المنحنى $(C_f)$ يقع تحت المستقيم $d_3$ الذي معادلته: $y = x + 2$ عندما يكون $x \in ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[$، ومنه فإن: $f(x)-(x+2)<0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[$.

❖ المنحنى $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $d_3$ الذي معادلته: $y = x + 2$ عندما يكون $x \in ]-1;1[$، ومنه فإن: $f(x)-(x+2)>0 \Leftrightarrow x \in ]-1;1[$.

## حل التمرين 12:

f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{-2x^2+7x}{3-x}$.

1) الدالة f غير معرفة من أجل $3-x=0$، ومنه فإن مجموعة تعريفها هي:

$D_f = \mathbb{R}-\{3\} = ]-\infty;3[ \cup ]3;+\infty[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+7x}{3-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+7x}{3-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to3} -2x^2+7x = 3$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} 3-x = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{-2x^2+7x}{3-x} = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to3} -2x^2+7x = 3$ & $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} 3-x = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \dfrac{-2x^2+7x}{3-x} = -\infty$.

2) من أجل كل $x \in D_f$ لدينا:

$$2x-1+\frac{3}{3-x} = \frac{(2x-1)(3-x)+3}{3-x} = \frac{6x-2x^2-3+x+3}{3-x}$$
$$= \frac{-2x^2+7x}{3-x} = f(x)$$

3) من خلال السؤالين السابقين لدينا:

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=-\infty$ ، ومنه فإن: $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته: $x = 3$ مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب.

❖ $f(x)=2x-1+\dfrac{3}{3-x}$ أي $f(x)-2x-1=\dfrac{3}{3-x}$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{3-x}=0$ ، ومنه فإن: $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته: $y = 2x -1$ مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ و $-\infty$.

## حل التمرين 13:

1) $10-3x-x^2$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية، مميزه هو: $\Delta=(-3)^2-4(-1)(10)=49=7^2$ ،
وجذراه هما على التوالي: $x_1=\dfrac{3-7}{-2}=\dfrac{-4}{-2}=2$ و $x_2=\dfrac{3+7}{-2}=\dfrac{10}{-2}=-5$.
يمكننا إعطاء إشارة $10-3x-x^2$ في الجدول التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10-3x-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

لدينا إذن:

$$x\in\,]-\infty;-5[\,\cup\,]2;+\infty[\,\Leftrightarrow 10-3x-x^2<0$$

$$x\in\,]-5;2[\,\Leftrightarrow 10-3x-x^2>0$$

2) f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x+1}{10-3x-x^2}$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{10-3x-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{2}{x}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-5} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-5}\dfrac{2x+1}{10-3x-x^2}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-5}2x+1=-9\ \&\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-5}10-3x-x^2=0^+$

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{2x+1}{10-3x-x^2}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2}2x+1=5\ \&\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}10-3x-x^2=0^-$.

3) بما أنه من أجل كل $x\neq-5$ و $x\neq2$ لدينا: $g(x)\le f(x)$ ،

$$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-5} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-5} g(x)=-\infty$$

$$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} g(x)=-\infty$$

لكن لا يمكن استنتاج أي شيء عن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

## حل التمرين 14:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} x^2-5x+6=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}(2-x)^2=0$. ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $\dfrac{0}{0}$.

نلاحظ من جهة أخرى أن 2 هي جذر لـ $x^2-5x+6$، وأنه يمكن كتابة: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

إذن من أجل $x\neq 2$، لدينا: $\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(2-x)^2}=\dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$، ومنه فإن:

$$\lim_{x\to 2} x-3=-1 \ \& \ \lim_{x\xrightarrow{<}2} x-2=0^- \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{<}2}\frac{x-3}{x-2}=+\infty.$$

إذن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}=+\infty$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{2x^2+3}=-\infty$. ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}3x-\sqrt{2x^2+3}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$.

ولرفع هذه الحالة يمكن اختزال الحد ذو الدرجة العليا، فنكتب:

$$3x-\sqrt{2x^2+3}=3x-\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}=3x-|x|\left(2+\frac{3}{x^2}\right).$$

وبما أننا ندرس $\lim\limits_{x\to+\infty}3x-\sqrt{2x^2+3}$ فإن: $x>0$، ومنه فإن: $|x|=x$.

ومنه يصبح لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}3x-\sqrt{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}\right)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}=\sqrt{2}$، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}3-\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}=3-\sqrt{2}>0$. ولدينا من جهة أخرى: $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}\right)=+\infty$. إذن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}3x-\sqrt{2x^2+3}=+\infty$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{2x^2+3}=-\infty$ . ومنه فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}3x-\sqrt{2x^2+3}=-\infty$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-2x-2}$ . ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-2x-2}=+\infty$ .

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $-1\leq\sin x\leq 1$ . وبما أننا ندرس $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}}$ فإن: $x>0$،

ومنه فإن: $x\sqrt{x} > 0$ . ومنه يصبح لدينا: $\frac{1}{x\sqrt{x}} \le \frac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}} \le \frac{-1}{x\sqrt{x}}$ . ونحن نعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$ ،

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x\sqrt{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ .

وبتطبيق قانون الحصر يمكننا أن نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}} = 0$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{3x+3}-3 = 0$ و $\lim\limits_{x\to2} 2-x = 0$ .ومنه فإن $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين.

ولرفع هذه الحالة نضرب كلا من البسط والمقام في مرافق البسط، فنكتب:

$$\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x} = \frac{\left(\sqrt{3x+3}-3\right)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}{(2-x)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)} = \frac{3x+3-9}{(2-x)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)} = \frac{3(x-2)}{(2-x)\left(\sqrt{3x+3}+3\right)}$$ ،

إذن باختزال: $x-2$ من البسط والمقام يصبح لدينا: $\frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x} = \frac{-3}{\sqrt{3x+3}+3}$ .

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to2} \frac{-3}{\sqrt{3x+3}+3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ . إذن: $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x} = -\frac{1}{2}$ .

## حل التمرين 15:

❖ لدينا: $-1 \le -\frac{1}{2} \le 1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ . إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

❖ لدينا: $$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2\sqrt{x}}{2+3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(\frac{2}{x}+3\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{x}+3}$$ ،

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{2}{\sqrt{x}} = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x}+3 = 3$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2\sqrt{x}}{2+3x} = \frac{1}{3}$ .

❖ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا: $-1 \le \cos x \le 1$ ، ومنه فإن: $1 \le 2+\cos x \le 3$.

وبما أننا نبحث عن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2+\cos x}{2+x}$ فإن: $2+x < 0$ ، ومنه فإن: $\frac{1}{2+x} \le \frac{2+\cos x}{2+x} \le \frac{3}{2+x}$ .

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2+x} = 0$ ، و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2+x} = 0$ ، ومنه وبتطبيق قانون الحصر فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2+\cos x}{2+x} = 0$ .

❖ لدينا: $\sqrt{3x^2-2}+x=\sqrt{x^2\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}+x=-x\sqrt{\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}+x$ لأن: $x<0$ ، ومنه فإن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-2}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+1\right)$ . وبما أن: . ،

فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+1\right)=1-\sqrt{3}<0$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+1\right)=+\infty$ .

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-2}+x=+\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x^2+1}{-3x^3-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4}{-3x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2}{3}x=+\infty$ . إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x^2+1}{-3x^3-x}=+\infty$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)^3=0$ ، و $\lim\limits_{x\to-2}x^2-3=1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)^3}{x^2-3}=0$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to1}x^2+3x+1=5$ ، و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}1-x=0^-$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{x^2+3x+1}{1-x}=-\infty$ .

❖ لدينا: $\frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{(2x-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{2(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x+7-9)}$ ،

أي: $\frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{2(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)}=2\left(\sqrt{x+7}+3\right)$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}=12$ .

❖ لدينا: $\frac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}=\frac{(x+2)(-2x+3)}{(x+2)(x-4)}=\frac{-2x+3}{x-4}$ ،

أي: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\frac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\frac{-2x+3}{x-4}=-\frac{7}{6}$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\frac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}=-\frac{7}{6}$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{-1+5x^3}=+\infty$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+\sqrt{-1+5x^3}=+\infty$ .

## حل التمرين 16:

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4-x^2+3}{2-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4}{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^2=-\infty$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^4-x^2+3}{2-x^2}=-\infty$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{-2+3x^3}=+\infty$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sqrt{-2+3x^3}=+\infty$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\to-1}(1+x)^3=0$ ، و $\lim\limits_{x\to-1}x^2-2=-1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(1+x)^3}{x^2-2}=0$ .

❖ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا: $-1\le\sin x\le1$ ، ومنه فإن: $0\le\sin x+1\le2$.

وبما أننا نبحث عن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x+1}{1+x}$ فإن: $1+x<0$ ، ومنه فإن: $\frac{2}{1+x}\le\frac{\sin x+1}{1+x}\le\frac{0}{1+x}$ .

ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{1+x}=0$ ، و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{0}{1+x}=0$ ، ومنه وبتطبيق قانون الحصر فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x+1}{1+x}=0$ .

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} x^2+3=4+3=7$ ، و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} 2-x=0^-$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\frac{x^2+3}{2-x}=-\infty$ .

❖ لدينا: $\frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(-3x+2)}=\frac{x-2}{-3x+2}$ ،

أي: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{x-2}{-3x+2}=-\frac{5}{11}$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}\frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}=-\frac{5}{11}$ .

❖ لدينا: $-1\le-\frac{1}{3}\le1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$ . إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$ .

❖ لدينا: $\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(2x-6)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{2(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)}=2\left(\sqrt{x+1}+2\right)$ ،

أي: $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to3}2\left(\sqrt{x+1}+2\right)=8$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2}=8$ .

❖ لدينا: $\frac{\sqrt{x}-3x}{2x-4}=\frac{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-3\right)}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-3}{2-\frac{4}{x}}$ ، ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-3=-3$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{4}{x}=2$ ،

أي: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-3}{2-\frac{4}{x}}=-\frac{3}{2}$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-3x}{2x-4}=-\frac{3}{2}$ .

❖ لدينا: $\sqrt{2x^2-3}+x=\sqrt{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}+x=-x\sqrt{\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}+x$ لأن: $x<0$ ، ومنه فإن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}+1\right)$ . وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}=\sqrt{2}$ ،

فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}+1\right)=1-\sqrt{2}<0$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}+1\right)=+\infty$ .

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3}+x=+\infty$ .

تمّ بحمد الله وتوفيقه

رياضيات
سلسلة 1
2017-2016
المستوى
3 ع ت - 3 ع د
إعداد الأستاذ
مراد لحسن

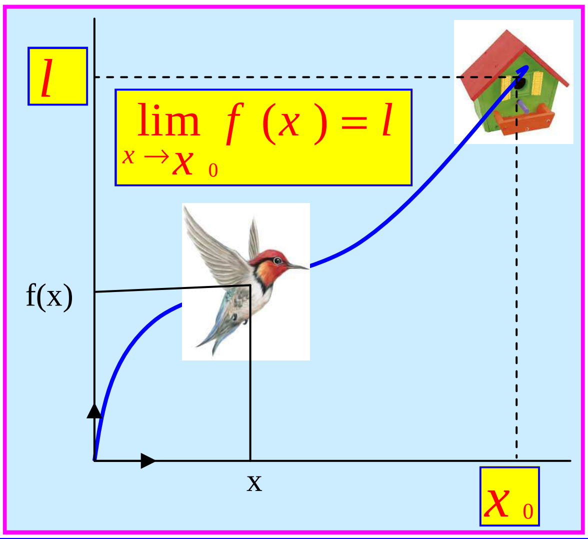
# النهايات

وقل رب زدني علما

## ما يجب على الطالب أن يعرف

1- معنى نهاية
2- حساب نهاية (من اليسار و من اليمين)
3- النهايات الاعتيادية
4- التحكم في إزالة عدم التعيين
5- التحكم في تعيين المستقيمات المقاربة

http://bacsuc.blogspot.com



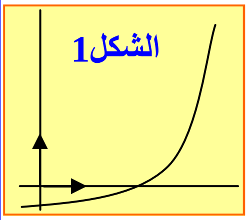

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم


قال الحسن بن علي بن أبي طالب: " علّم الناس علمك، وتعلّم علم غيرك، فتكون قد أتقنت علمك، وعَلِمْتَ ما لم تعلم. "

هل تعلم ؟
إذا حفظت في اليوم 3 آيات من القرآن الكريم فإنك ستحفظ القرآن كله في مدة 5 سنوات و 10 أشهر و 13 يوما

## مفهوم نهـــايـة

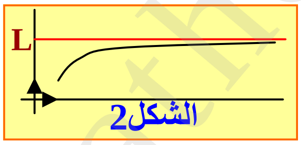
بالتمعن في الشكل1:نقول أن f(x) تؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى $+\infty$ و نكتب: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$




بنفس الطريقة ارسم أشكالا تتوافق مع النهايات التالية:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

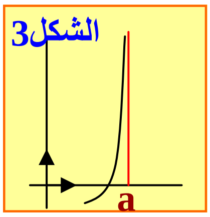
بالتمعن في الشكل2:نقول أن f(x) تؤول إلى L لما x يؤول إلى $+\infty$ و نكتب: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$




المستقيم الذي معادلته y=L هو مستقيم مقارب أفقي

بنفس الطريقة ارسم شكل يتوافق مع النهاية التالية: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

بالتمعن في الشكل3:نقول أن f(x) تؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى a بقيم صغرى و نكتب: $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$




المستقيم الذي معادلته x=a هو مستقيم مقارب عمودي

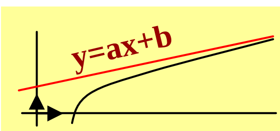
بنفس الطريقة ارسم أشكالا تتوافق مع النهايات التالية:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

إذا كانت $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ فإن

المستقيم الذي معادلته y=ax+b هو مستقيم مقارب مائل




نفس النتيجة إذا كانت : $f(x) = ax + b + g(x)$ و كانت $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$

## عمليات على النهايات

| | |
|---|---|
| $\frac{k}{\infty} = 0$ | النتيجة: $0^+$ أو $0^-$ حسب إشارة $\infty$ و k |
| $\frac{k}{0} = \infty$ | النتيجة: $+\infty$ أو $-\infty$ حسب إشارة k و 0 |

$\infty + k = \infty$

النتيجة: $+\infty$ أو $-\infty$ حسب إشارة $\infty$

$\infty \times k = \infty$

النتيجة: $+\infty$ أو $-\infty$ حسب إشارة k و $\infty$

## حالات عدم التعيين

أشهرها: $\frac{0}{0}$ ; $\infty - \infty$ ; $0 \times \infty$ ; $\frac{\infty}{\infty}$

إذا صادفنا حالة من هذه الحالات يجب إزالتها و ذلك بإعادة صياغة الدالة بشكل آخر. وهنا تتدخل الخبرة و كثرة الممارسة . لذا عليكم أبنائي الطلبة البدء في محاولة الحل كتابيا . معتمدين على هذه المهارات التي سوف أوردها لكم و التي تساعد في التخلص من اغلب هذه الحالات .

مهارة1: دالة كثير الحدود و الدالة الناطقة

1) النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.
2) النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند$\pm\infty$.

## مهارة2: إخراج عامل مشترك

نفكر في استعمالها لما $x\to\infty$ وتطبق في الحالات : $\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty$

في حالة $\frac{\infty}{\infty}$ نخرج عامل مشترك من البسط و المقام و نختزل ثم نعوض فتزول حالة عدم التعيين

في حالة $\infty-\infty$ نخرج عامل مشترك ثم نعوض فتزول حالة عدم التعيين

**انتبه**

إخراج العامل المشترك المناسب يعتمد على الخبرة و الممارسة ...

**تذكر**

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

$$|x|=\begin{cases} x & ;x\geq 0\ ;\ x\to 0^+,+\infty \\ -x & ;x\leq 0\ ;\ x\to 0^-,-\infty \end{cases}$$

## صورة و كلمة

ضع دائما صورتك التي تريد أن تكون عليها في عقلك و مخيلتك ، و ستتجه تدريجيا نحوها ....إذا لم تهزم نفسك ، ستهزمك نفسك ....سلم النجاح لا يعاني من الازدحام في أعلاه


## مهارة3: التحليل

نفكر في استعمالها لما $x\to a$ وتكون حالة عدم التعيين: $\frac{0}{0}$

1) نحلل البسط و المقام إلى جداء عوامل أحدها العامل: (x-a)

2) نختزل العامل (x-a) من البسط و المقام

3) نعوض x=a نحصل على النهاية المطلوبة.

## مهارة5: الحصر و المقارنة

نفكر في استعمالها في عدة حالات أشهرها:

1) الدوال المثلثية عند الحصول على : $\sin\infty$ أو $\cos\infty$

2) الدوال الآسية و اللوغارتمية ( سوف نتناولها في السلاسل الخاصة بها)

### الحصر

| | |
|---|---|
| إذا كان | $\lim_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=l$ |
| و كان | $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ |
| فإن | $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ |

### المقارنة

| | | | |
|---|---|---|---|
| إذا كان | $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ | إذا كان | $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ |
| و كان | $f(x)\geq g(x)$ | و كان | $f(x)\leq g(x)$ |
| فإن | $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ | فإن | $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ |

**تذكر**

$$-1\leq\cos x\leq+1;-1\leq\sin x\leq+1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

## مهارة4: الضرب و القسمة على المرافق

نفكر في استعمالها لما تكون الدالة تتضمن أحد هذه العبارات:

$$(\sqrt{a}\pm b)\ ;\ (a\pm\sqrt{b})\ ;\ (\sqrt{a}\pm\sqrt{b})$$

الحالة الأولى: $x\to\infty$ وتكون حالة عدم التعيين : $\infty-\infty$

الحالة الثانية: $x\to a$ وتكون حالة عدم التعيين : $\frac{0}{0}$

1) نضرب و نقسم على المرافق .

2) نستفيد من أحد الحالات:

$$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)=a-b^2$$

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

3) نختزل و نعوض x=a فنجد النهاية المطلوبة .

## مهارة6 : نظرية l'Hospital

تستعمل هذه النظرية في الحالتين $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

هذه النظرية تعتبر آلة حاسبة للنهاية بالفعل .. و لأن استعمالها يجعل الطالب يهمل التحكم في الكثير من المهارات السابقة فقد نزعت من برنامج التعليم الثانوي ننصح الطالب باستعمالها فقط للتأكد من النتائج..


و الآن ..
خذ قلم و ورقة
و أبدأ

**مفاتيح النجاح الدراسي**
**الطموح**

لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا و لذلك كان الطموح هو الكنز الذي لا يفنى .. فكن طموحا و انظر إلى المعالي .. فهذا عمر بن عبد العزيز خامس الخلفاء الراشدين يقول معبرا عن طموحه : ( إن لي نفسا تواقة , تمنت الإمارة فنالتها , و تمنت الخلافة فنالتها , و أنا الآن أتوق إلى الجنة و أرجو أن أنالها )

**تمرين 1:** أحسب النهايات التالية (مساعدة: استعمل المهارة 1)

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}(3x^2-2x+10) \quad 2)\ \lim_{x\to-\infty}\left(-4x^3+5x-2\right) \quad 3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+x+1}$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-8x^3+1}{4x+16} \quad 5)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x-2} \quad 6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$$

***تمرين 2 :*** احسب النهايات التاليـــــة:(مساعدة: استعمل المهارة 2 )

$$\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{1-x} \qquad \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

***تمرين 3 :*** احسب النهايات التاليـــــة:(مساعدة: استعمل المهارة 3 )

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \qquad \lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x} \qquad \lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-x^2-18}{x^2-9} \qquad \lim_{x\to1}\frac{(x+3)^2-4}{x^2-7x-8}$$

***تمرين 4 :*** احسب النهايات التاليـــــة:(مساعدة: استعمل المهارة 4 )

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-4}-3x\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$$

***تمرين 5 :*** احسب النهايات التاليـــــة:(مساعدة: استعمل المهارة 5 )

$$1)\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x} \quad 2)\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x} \quad 3)\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x} \quad 4)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x} \quad 5)\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$$

***تمرين 6 :***

باستعمال نظريات المقارنة احسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ لكل دالة من الدوال التالية ان وجدت.

$$f(x)=\frac{x\sin x}{x^2+1} \qquad g(x)=\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$$

***تمرين 7 :***

نريد حساب النهاية عند $+\infty$ للدالة :

$$f: x\mapsto\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

1. برهن أنه من أجل $x^2<1+x^2<(1+x)^2 \ ,\ x>0$
2. استنتج من أجل $x>0$ حصرا لـ $f(x)$.
3. استنتج نهاية f عند $+\infty$

**سؤال**

ما الفرق بين عدم التعيين و عدم التعريف ؟

**الجواب**

في حالة عدم التعيين يكون الجواب موجود فبتطبيق احد المهارات السابقة تزول هذه الحالة و من ثم نعين نهاية الدالة إن وجدت.
أما في حالة عدم التعريف فالجواب غي موجود إطلاقا .

**انتبه**

**المهارة 4 لا تطبق في حالة دوال من الشكل:**

$$\sqrt{x}-4-x^2 \qquad 3x-\sqrt{4x^2}-5$$

لاحظ $\sqrt{x}\neq x^2$ لاحظ $3x\neq\sqrt{4x^2}$

لأنه بعد الضرب في المرافق و القسمة عليه لن يتم الاختزال بل تنتج حالة عدم تعيين من جديد.

**المهارة 4 تطبق في حالة دوال من الشكل:**

$$\sqrt{9x^2+5}-3x \qquad x-\sqrt{x^2+3}$$

لاحظ $\sqrt{9x^2}=3x$ لاحظ $x=\sqrt{x^2}$


تذكر دائما أن المحاولة هي أول طريق للنجاح...

إن أبواب الإنجازات تتسع لذلك الشخص الذي يرى في الأشياء التافهة إمكانيات غير محدودة.

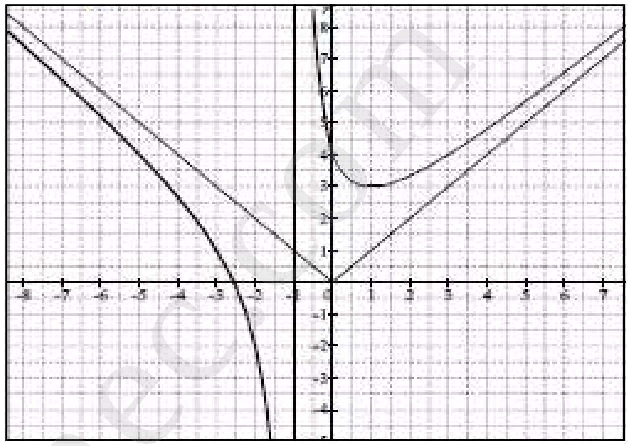
وليام آرثورد



## تمرين 8 — تحكم في القراءة البيانية

f دالة معرفة على المجال $R-\{-1\}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس كما في الشكل:



بقراءة بيانية :

1. احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
2. شكل جدول تغيرات الدالة .
3. عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$.
4. أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و المستقيمين المقاربين المائلين .

## تمرين 9 — تحكم في تفسير النتائج

f دالة معرفة على المجال $R-\{-1\}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس يعطى جدول تغيراتها كما يلي:

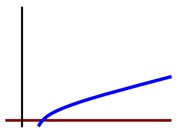
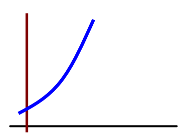
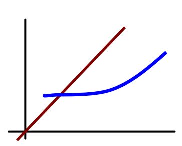
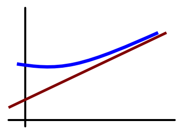
| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 |

اجب بـ صحيح أو خطأ على كل سؤال مما يلي مع التبرير

1. المستقيم الذي معادلته y=2 هو مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$.
2. المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا .
3. مجموعة حلول المتراجحة f(x)>0 هي $R-\{-1\}$
4. في المجال $]-\infty;-1[$ يكون f(-2)>f(x) لما x< -2
5. النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى المنحنى $(C_f)$.

## دراسة الفروع اللانهائية و البحث عن المقارب المائل ( خاص بالرياضي)

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ نتبع المراحل التالية:

| $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ | النتيجة | الرسم |
|---|---|---|---|
| 0 | | يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل |  |
| $+\infty$ أو $-\infty$ | | يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب |  |
| $a\neq 0$ | $+\infty$ أو $-\infty$ | يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم $y=ax$ |  |
| | $b$ | يوجد مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ |  |

## تمرين إضافي : احسب النهايات

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x+2}{x+3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+3x}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{x-2}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+\sqrt{4x^2+x+1}}{-4x-\sqrt{x^2+1}}$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{4x^2+x}}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\sqrt{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$




بالتوفيق في شهادة البكالوريا انشاء الله

# تمارين تدريبية حول النهايات مع حلولها

**التمرين 01 :**

عين النهاية عند $+\infty$ والنهاية عند $-\infty$ للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=5x^2$ ، $f(x)=-3x^2$ ، $f(x)=7x^3$ ، $f(x)=-0{,}5x^3$ $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\sqrt{2}$ ،

2) $f(x)=3x-200$ ، $f(x)=\frac{-3x^2+1}{6000}$ ، $f(x)=-\sqrt{3}x^3+\frac{3}{5}$ ، $f(x)=\frac{5}{7}x^3+\frac{8\sqrt{2}}{2}$

**الجواب :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

**التمرين 02 :** أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+5\right)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^2+8x-2\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-x^2-3x+2\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^3+18x^2-x\sqrt{2}+10\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-3x^3+8x^2-x-1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7x^3+2x^2-x-1\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^6+x^4-3x^2\right)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(19x^2+5x-3\right)$

**الجواب :**

$\lim_{x\to+\infty}(-x^3-x^2-3x+2)=-\infty$ $\lim_{x\to-\infty}(-5x^2+8x-2)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+5)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-5x^3+18x^2-x\sqrt{2}+10)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(7x^3+2x^2-x-1)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}(x^4-3x^3+8x^2-x-1)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(19x^2+5x-3)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}(-5x^6+x^4-3x^2)=-\infty$

**التمرين 03 :**

أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{-3x+1}{4x^2-4x+1}\right)$ ، $\lim_{\substack{x\to4\\x<4}}\left(\frac{-7}{x+4}\right)$ ، $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\frac{-3x+2}{2+x}\right)$ ، $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(3+\frac{5}{2x-2}\right)$

، $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x}{4x-x^2}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{4x-2}$ ، $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{3x-1}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-10}{x^3-x^2}\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2x^5}{x^3+x}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{16-x^4}$

**الجواب :**

$\lim_{\substack{x\to4\\x<4}}\left(\frac{-7}{x+4}\right)=+\infty$ $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\frac{-3x+2}{2+x}\right)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(3+\frac{5}{2x-2}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{3x-1}=\frac{2}{3}$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-10}{x^3-x^2}\right)=0$ $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{-3x+1}{4x^2-4x+1}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{16-x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=0$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x}{4x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{4x-2}=\frac{5}{4}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2x^5}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

**التمرين 04 :**

في الأشكال (1)، (2)، (3)، (4)، (5) الموالية $(C)$ هو التمثيل البياني لدالة $f$ بالنسبة إلى معلم $(0,I,J)$

بالإعتماد على الشكل (1) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x), \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (2) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (3) عين النهايات التالية:

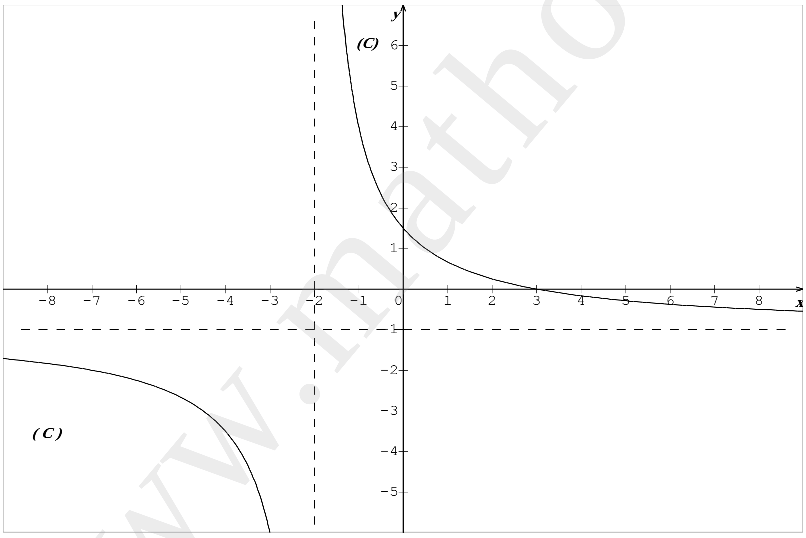
$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x), \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (4) عين النهايات التالية:

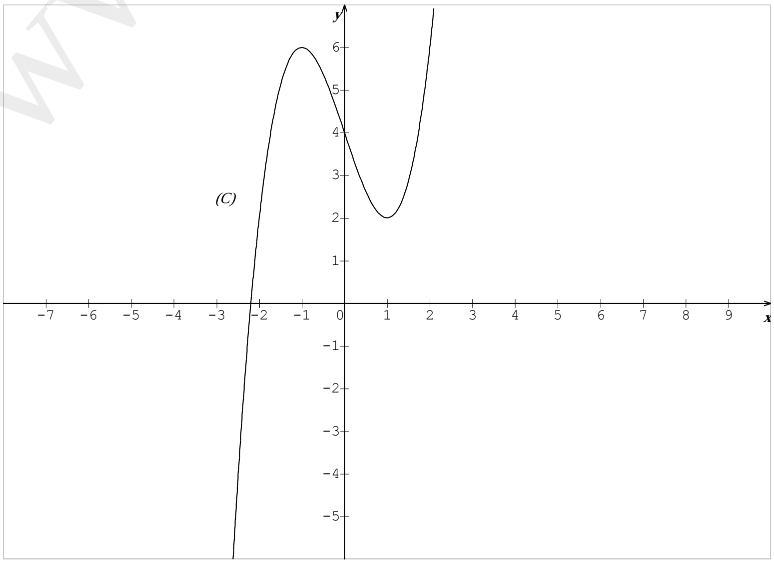
$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x), \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (5) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x), \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$$

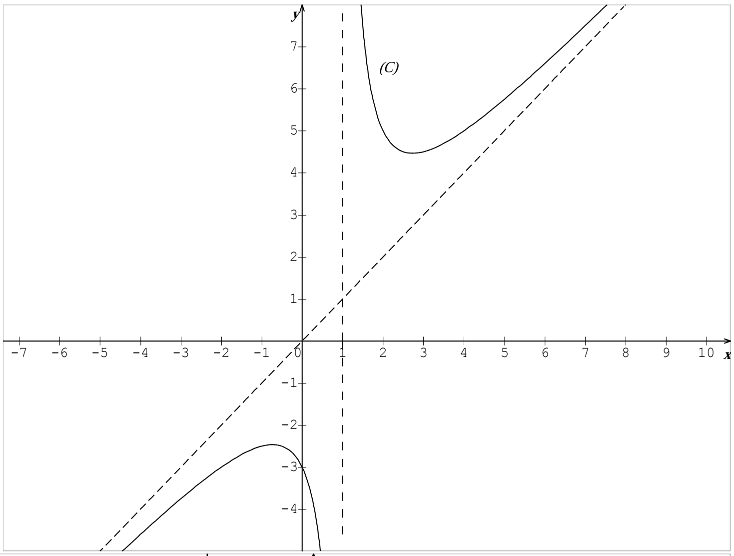



الشكل ( 1 )

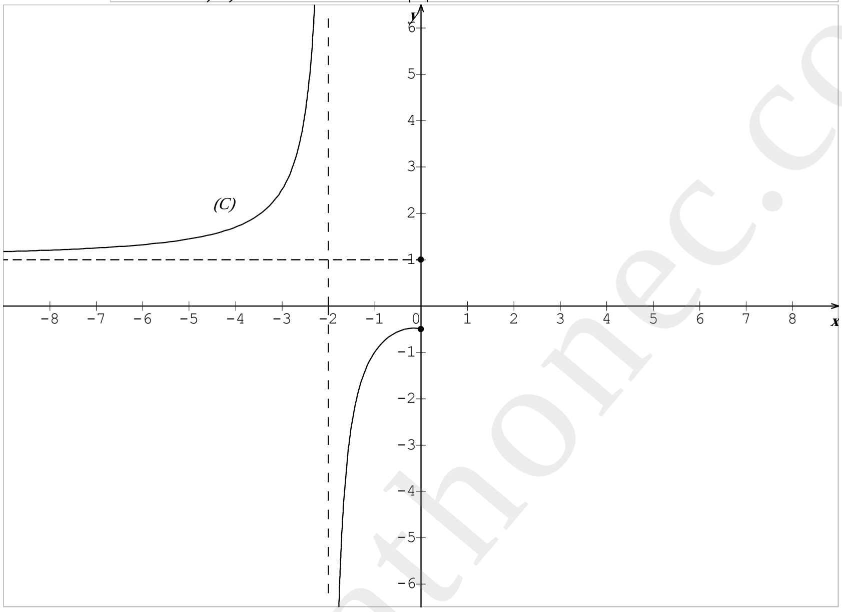



الشكل ( 2 )

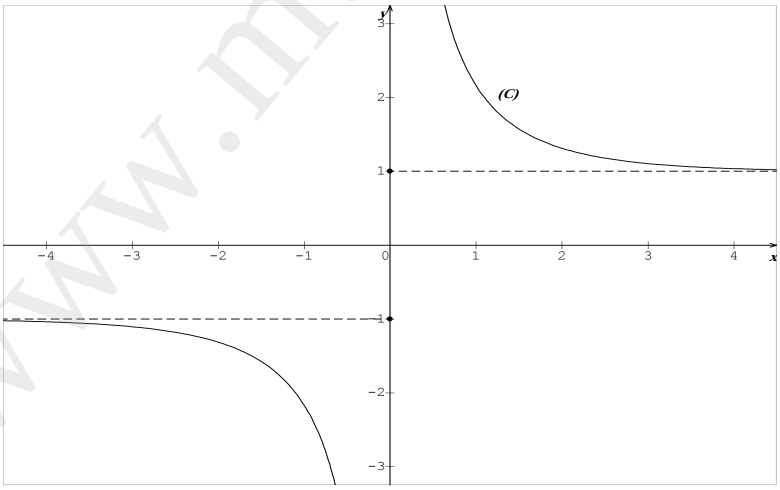
الشكل ( 3 )




الشكل ( 4 )




الشكل ( 5 )






**الجواب :**

معتمدا على قراءة بيانية

بالنسبة للشكل ( 1 ) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1, \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty, \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل ( 2 ) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل ( 3 ): $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل ( 4 ): $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty, \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$

بالنسبة للشكل ( 5 ) : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$

## التمرين 05 :

المستوي منسوب إلى معلم $(0, I, J)$ و $(C)$ المنحنى الممثل لدالة $f$

1) أثبت أن المستقيم $(d)$ هو مقارب شاقولي للمنحني $(C)$ في كل حالة من الحالات التالية:

| الدالة $f$ معرفة بالدستور: | معادلة للمستقيم $(d)$ هي: |
|---|---|
| 1) $f(x) = \frac{5x+3}{2x+1}$ | $x = -\frac{1}{2}$ |
| 2) $f(x) = \frac{3x^2+8x-2}{x^2-2x+1}$ | $x = 1$ |
| 3) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-2}$ | $x = -\sqrt{2}$ |

2) أثبت أم المستقيم $(D)$ هو مقارب أفقي للمنحني $(C)$ بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

| الدالة $f$ معرفة بالدستور: | معادلة للمستقيم $(D)$ هي: |
|---|---|
| $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+5x+5}$ | $y = \frac{1}{2}$ |
| $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$ | $y = 0$ |
| $f(x) = \frac{7x+8}{-3x+2}$ | $y = -\frac{7}{3}$ |

3) أثبت أن المستقيم $(\Delta)$ هو مقارب مائل للمنحني $(C)$ بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

| الدالة $f$ معرفة بالدستور | $f(x) = 5x+1-\frac{2}{x-5}$ | $f(x) = -x+\frac{1}{x^2}$ | $f(x) = \frac{1}{2}x+1+\frac{3}{x}$ |
|---|---|---|---|
| معادلة للمستقيم $(\Delta)$ | $y = 5x+1$ | $y = -x$ | $y = \frac{1}{2}x+1$ |

**الجواب :**

**بالنسبة للحالة 1 :**

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$ و منه المستقيم (d) حيث معادلة له $x=-\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$ هو مستقيم مقارب شاقولي للمنحني ( C )

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين .

**بالنسبة للحالة الثانية**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\frac{1}{2}, \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ و منه $(C)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي $(D)$ معادلة له $y=\frac{1}{2}$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

**بالنسبة للحالة الثالثة**

$$f(x)=5x+1-\frac{2}{x-5}$$

لدينا: $f(x)-(5x+1)=-\frac{2}{x-5}$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5)=+\infty$

منه: $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{2}{x-5}=0$ منه: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(5x+1)\right)=0$ وعليه $(C)$ المنحني الممثل للدالة $f$ بالنسبة إلى معلم $(0,I,J)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ معادلة له: $y=5x+1$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

**التمرين 06 :**

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بالدستور: $f(x)=\frac{3x^2-11x+13}{x-2}$

1) عين المجموعة $D$ مجموعة تعريف الدالة $f$ ثم أثبت أنه من أجل كل عنصر $x$ من $D$ يكون:
$$f(x)=3x-5+\frac{3}{x-2}$$

2) أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x)$

3) أحسب $f(x)$ بدلالة $x$ $\left(x\in D\right.$ و $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$ ) ثم أدرس إتجاه تغير الدالة $f$

4) أنشيء جدول تغيرات الدالة $f$

5 نسمي $(C)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(0,I,J)$

أ- أثبت أن $(C)$ يقبل مستقيمين مقاربين $(D)$ و $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة لكل واحد منهما.

ب-أثبت أن نقطة تقاطع المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$ هي مركز تناظر للمنحني $(C)$

ت-أكتب معادلة للمستقيم $(d)$ المماس للمنحني $(C)$ في نقطته $A$ ذات الفاصلة $(-1)$

ث-أنشيء بإتقان المستقيمات: $(D)$،$(\Delta)$، $(d)$ والمنحنى $(C)$

أنشيء المنحني $(C')$ الممثل للدالة $g$ المعرفة بالدستور: $g(x)=\dfrac{3x^2-11x+13}{|x-2|}$

**الجواب :** $f(x)=\dfrac{3x^2-11x+13}{x-2}$

1/ $D$ هي مجموعة تعريف الدالة $f$

لنا $x$ عدد حقيقي كيفي وعليه: $(x\in D)$ يكافئ $(x-2\neq 0)$ ومنه: $D=R-\{2\}$

لنثبت أن: $f(x)=3x-5+\dfrac{3}{x-2}$ من أجل $x$ عنصرا من $D$

ليكن $x$ عنصرا كيفيا من $D$ لدينا :

$$f(x)=3x-5+\frac{3}{x-2}$$
$$=\frac{(3x-5)(x-2)+3}{x-2}$$
$$=\frac{3x^2-11x+13}{x-2}$$

ومنه: $f(x)=3x-5+\dfrac{3}{x-2}$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 3x-5+\dfrac{3}{x-2}$
$=+\infty$

ليكن $x$ عنصرا كيفيا من $D$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{(6x-11)(x-2)-(3x^2-11x+13)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{3x^2-12x+9}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{3x^2-12x+9}{(x-2)^2}$$

دراسة إتجاه تغير الدالة $f$

من أجل $x$ عنصرا كيفيا من $D$ لنعين إشارة $f'(x)$

لما $(x\in D)$ لنا $(x-2\neq 0)$ ومنه $(x-2)^2>0$

وعليه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $3x^2-12x+9$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $3x^2-12x+9$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| إشارة $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

لما $x\in]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$ لنا $f$ دالة متزايدة تماما

لما $x\in]1,3[-\{2\}$ لنا $f$ دالة متناقصة تماما

4/ جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $7$ | ↗ | $+\infty$ |

5/ أ- اثبات أن $(C)$ يقبل مستقيمين مقاربين، $(D)$ و $(\Delta)$

$\left(\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty, \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty\right)$ يعني $((C)$يقبل مستقيم مقارب عمودي $(D)$ معادلة له: $x=2)$

$\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(3x-5)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(3x-5)=0\end{array}\right)$ يعني $((C)$يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ معادلة له: $y=3x-5)$

ب- نقطة تقاطع $(D)$ و $(\Delta)$ هي $B(2,1)$ وعليه:

$(B(2,1)$ مركز تناظر لـــ $(C))$ يكافئ (من أجل كل $x$ من $D$ لنا $(4-x)\in D$ $f(4-x)+f(x)=2)$

$(x\in D)$ يكافئ $(x\neq 2)$ يكافئ $(-x\neq -2)$ يكافئ $(4-x\neq 4-2)$

يكافئ $(4-x\neq 2)$ يكافئ $((4-x)\in D)$

$$f(4-x)+f(x)=3(4-x)-5+\frac{3}{4-x-2}+3x-5+\frac{3}{x-2}$$

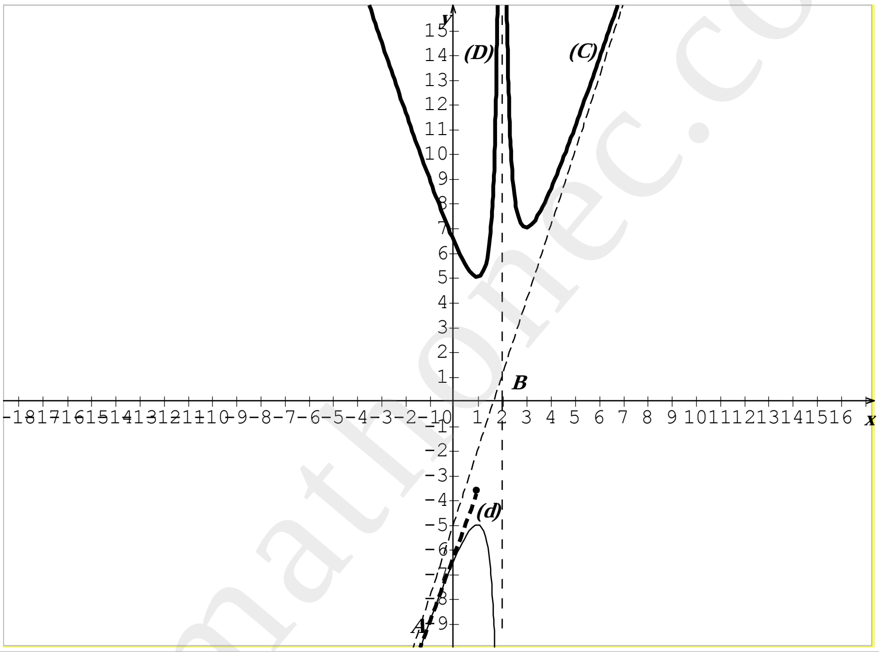
و
$$=12+\frac{3}{2-x}+\frac{3}{x-2}-10$$
$$=2$$

إذا: $f(4-x)+f(x)=2$ ومنه: $B(2,1)$ مركز تناظر لــ $(C)$

ت− معادلة لــ $(d)$ الماس لــ$(C)$ عند النقطة $A$ ذات الفاصلة −1 هي:

$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ مع: $f'(-1)=\frac{8}{3}$ $f(-1)=-9$

أي: $y=\frac{8}{3}(x+1)-9$ أي: $y=\frac{8}{3}x-\frac{19}{3}$




**عادات مفيدة لمذاكرة فعالة**

**يمكنك إعداد نفسك للنجاح في دراستك.**
**حاول أن تطبق وتقدر العادات التالية:**

- **تحمل مسئولية نفسك.**
المسئولية هي معرفة أن نجاحك في الحياة يأتي عبر إدراكك لقراراتك بخصوص أولوياتك ووقتك وقدراتك.
- **ركز نفسك حول قيم ومبادئ معينة.**
لا تدع أصدقائك ومعارفك يحددون ما هو مهم بالنسبة لك.
- **ضع أولوياتك أولاً.**
إتبع أولوياتك التي وضعتها لنفسك، ولا تدع الآخرين أو عوامل أُخرى تبعدك عن أهدافك.
- **أعتبر نفسك في حالة نجاح مستمر.**
نجاحك يأتي اجتهادك وعمل ما تستطيع في الفصل وخارجه لنفسك ولزملائك وحتى للمدرسين. إذا كنت مطمئناً لاجتهادك تصبح العلامات مؤشر خارجي فقط ولا تعبر بالضرورة عن رغبتك للدراسة.
- **أولاً تفَهم الآخرين، ثم حاول أن يفهمك الآخرون.**
إذا كانت لديك مشكلة مع المدرس، بخصوص علامة غير مرضية أو واجب منزلي، ضع نفسك مكان المدرس . ثم اسأل نفسك ما هو أفضل أسلوب لمعالجة الموضوع.
- **ابحث عن أفضل الحلول لأي مشكلة.**
إذا كنت لا تستوعب مادة معينة، لا تُعد قراءتها فقط بل جرب طرقاً أُخرى. مثلاً استشر المدرس أو مستشارك الدراسي أو زميل لك أو مجموعة زملاء يذاكرون سوية.
- **تحد نفسك وقدراتك باستمرار.**