★ النهايات ★

① نهايات بعض الدوال المرجعية

الدالة مقلوب	$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$	$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x}=+\infty$
الدالة جذر	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0^+$	$\lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$	$\lim_{x\overset{<}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=+\infty$
الدالة x^n $n\in\mathbb{N}^*$	$\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ مع n زوجي	$\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ مع n فردي	$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

حالات عدم التعيين	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$
حالات يمكن التعيين	$\frac{\ell}{0}=\infty$	$\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{\ell}{\infty}=0$	$\frac{0}{\infty}=0$
طرق الإزالة	بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط وَ المقام بالنسبة لدوال جذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب وَ نقسم في المرافق عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك			

③ مبرهنات في النهايات

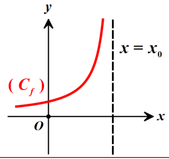
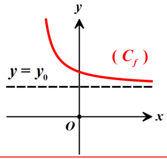
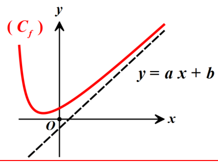
مبرهنة التركيب	نعتبر u ، v وَ f ثلاث دوال حيث $f=v\circ u$ ، وَ لتكن a ، b وَ c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x\to a}u(x)=b$ وَ $\lim_{x\to b}v(x)=c$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=c$
مبرهنة الحصر	إذا كان : $g(x)\le f(x)\le h(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ وَ $\lim_{x\to a}h(x)=\ell$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$
مبرهنات المقارنة	إذا كان : $f(x)\ge g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ إذا كان : $f(x)\le g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=-\infty$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ إذا كان : $\lvert f(x)-\ell\rvert\le g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=0$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$

④ نهايات الدوال المثلثية

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

★ المستقيمات المقاربة ★

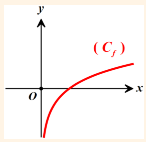
لتكن f دالة عددية وَ $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

النهاية	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=-\infty$ أو	يقبل $\left(C_f\right)$ مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=x_0$	
$\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=y_0$ أو $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=y_0$	يقبل $\left(C_f\right)$ مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left[f\left(x\right)-\left(a\,x+b\right)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[f\left(x\right)-\left(a\,x+b\right)\right]=0$	يقبل $\left(C_f\right)$ مستقيم مقارب مائل معادلته $y=a\,x+b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	

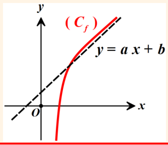
إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y=a\,x+b$ ، ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

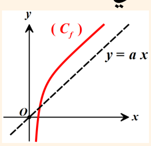
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ← يقبل $\left(C_f\right)$ فرع قطع مكافئ باتجاه $\left(x'x\right)$



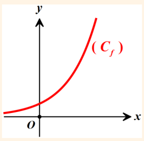
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\quad\left(a\neq 0\right)$ ← ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-a\,x\right]$
  - $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-a\,x\right]=b$ ← يقبل $\left(C_f\right)$ مستقيم مقارب مائل معادلته $y=a\,x+b$ بجوار ∞



  - $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-a\,x\right]=\infty$ ← يقبل $\left(C_f\right)$ فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y=a\,x$



- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ← يقبل $\left(C_f\right)$ فرع قطع مكافئ باتجاه $\left(y'y\right)$



★ الاستمرارية وَ مبرهنة القيم المتوسطة ★

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a .

① الاستمرارية

استمرارية الدالة f عند a	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$	
استمرارية الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = f(a) = \ell_1$ حيث $\ell_1 \in \mathbb{R}$	إذا كان $\ell_1 = \ell_2$ فإن f مستمرة عند a
استمرارية الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = f(a) = \ell_2$ حيث $\ell_2 \in \mathbb{R}$	

② صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

	f دالة متزايدة تماماً على I	f دالة متناقصة تماماً على I
المجال I	$f(I)$	$f(I)$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x);\lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \overset{<}{\to} b} f(x);\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)\right[$

③ مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة ❶	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❷	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❸	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a وَ b بحيث $f(\alpha)=0$.
مبرهنة ❹	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$

★ الاشتقاقية ★

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ a عدد من D_f .

① الاشتقاقية

قابلية اشتقاق الدالة f عند a	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$	
قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$	إذا كان $f'_d(a)=f'_g(a)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند a
قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$	

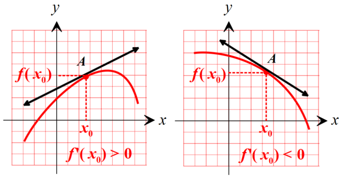
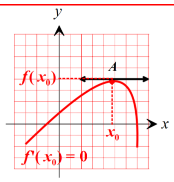
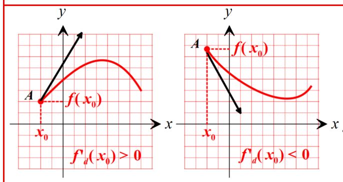
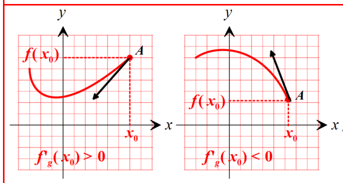
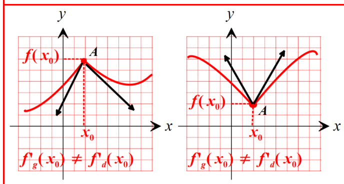
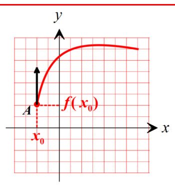
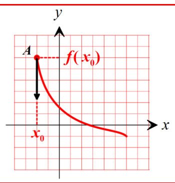
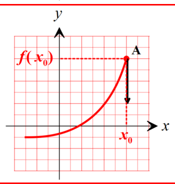
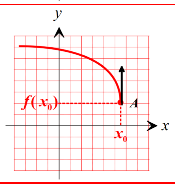
② مشتقات الدوال المألوفة

مجال قابلية الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a حيث $a\in\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	a	$a\,x$
$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$	x^n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{1}{x^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(a\,x+b)$	$\cos(a\,x+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(a\,x+b)$	$\sin(a\,x+b)$

③ المشتقات وَ العمليات على الدوال

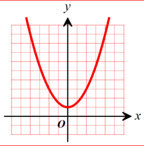
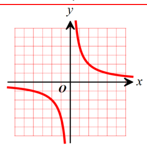
الدالة	$u\pm v$	$a\,u$	$u\times v$	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u\circ v$
الدالة المشتقة	$u'\pm v'$	$a\,u'$	$u'v-v'u$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\times u^{n-1}\times u'$ $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$v'.u'(v)$

④ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

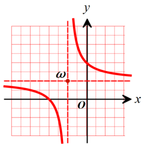
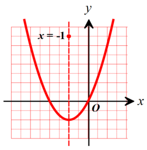
النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y=f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'_d(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'_g(x_0)=b$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية. 
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 

★ شفعية دالة - مركز تناظر وَ محور تناظر ★

① شفعية دالة

	التعريف	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
الدالة الزوجية	f دالة زوجية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x) = f(x)$	(C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر	
الدالة الفردية	f دالة فردية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x) = -f(x)$	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر	

② مركز تناظر وَ محور تناظر دالة

	التعريف	التمثيل البياني
مركز تناظر	$\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$	
محور تناظر	$x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) = f(x)$	

★ الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ★

(C_f) التمثيل البياني للدالة f وَ (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = a\,x + b$.

إشارة الفرق $f(x) - y$	الوضعية النسبية
$f(x) - y > 0$	(C_f) يقع فوق (Δ)
$f(x) - y < 0$	(C_f) يقع تحت (Δ)
$f(x) - y = 0$	(C_f) وَ (Δ) يتقاطعان

★ إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم ★

ليكن (C_f) وَ (C_g) منحنيين للدالتين f وَ g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الدالـة	التمثيل البيـاني
$f(x)=g(x)+b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$
$f(x)=g(x+a)$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$
$f(x)=g(x+a)+b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$
$f(x)=-g(x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x)=g(-x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة لمحور التراتيب
$f(x)=-g(-x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$f(x)=g(\lvert x\rvert)$	▪ إذا كان $x\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) ▪ إذا كان $x\leq 0$ فإن $f(x)=g(-x)$ منه (C_f) هو نظير (C_g) المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور التراتيب (f دالة زوجية)
$f(x)=\lvert g(x)\rvert$	▪ إذا كان $g(x)\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) ▪ إذا كان $g(x)\leq 0$ فإن $f(x)=-g(x)$ منه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

★ المناقشة البيانية ★

ليكن (C_f) منى الدالة f وَ (Δ) مستقيم مائل (مماس أو مستقيم مقارب) معادلته $y=ax+b$.

المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية ($m\in\mathbb{R}$)
$f(x)=m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل
$f(x)=ax+m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)
$f(x)=mx+b$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الدورانية حول النقطة $(0;b)$
$f(x)=m^2$ أو $f(x)=\lvert m\rvert$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل ($y=m^2$ أو $y=\lvert m\rvert$) لكن المناقشة تبدأ من محور الفواصل نحو الأعلى
$f(x)=f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل معادلتها $y=f(m)$

ملاحظات : نقول أن للمعادلة حل موجب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل سالب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة المماس .