تمارين وحلول في المعادلات التفاضلية
- سلسلة 1 -

تمرين 1 :

حدد حل المعادلة التفاضلية : $3y'+4y=0$ الذي يحقق الشرط البدئي : $y(0)=4$

حل التمرين 1 :

هذه المعادلة تكتب على الشكل التالي : $y'=-\frac{4}{3}y$

إذن الحل الذي يحقق الشروط البدئية هو : $y=y(0)e^{-\frac{4}{3}x}$

أي : $y=e^{-\frac{4}{3}x}$

تمرين 2 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E): y''+2y=0$

1- حل المعادلة (E)

2- حدد الدالة h بحيث h حل للمعادلة (E) و $h(0)=1$

و $h'(0)=-2$ (h' هي الدالة المشتقة للدالة h)

حل التمرين 2 :

1- حل المعادلة $(\mathbf{E})$:

المعادلة (E) تكتب على الشكل التالي : $y''+(\sqrt{2})^2 y=0$

إذن حلول العادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$x \to \alpha\cos\sqrt{2}x+\beta\sin\sqrt{2}x$ بحيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

1- تحديد الدالة f :

لدينا : h حل للمعادلة (E)

أي : يوجد عنصران α و β من $\mathbb{R}$

بحيث : $h(x)=\alpha\cos\sqrt{2}x+\beta\sin\sqrt{2}x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $h'(x)=-\alpha\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x+\beta\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

وبما أن : $h(0)=1$ و $h'(0)=-2$

فإن : $\begin{cases} \alpha\cos 0+\beta\sin 0=1 \\ -\alpha\sqrt{2}\sin 0+\beta\sqrt{2}\cos 0=-2 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-\sqrt{2} \end{cases}$

إذن : h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$h:x \to \cos\sqrt{2}x-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$$

تمرين 3 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(\mathrm{E}):y''-4y=4\mathrm{e}^{2x}$

1- اعط جميع حلول المعادلة $y''-4y=0$

2- بين أن الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x\mathrm{e}^{2x}$ حل للمعادلة (E)

1- استنتج جميع حلول المعادلة (E).

حل التمرين 3 :

1- حلول المعادلة $y''-4y=0$:

المعادلة $y''-4y=0$ تكتب على الشكل $y''-2^2y=0$

إذن حلول هذه المعادلة هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x \to \alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$

حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

2- اثبات النتيجة المطلوبة :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)=xe^{2x}$

ومنه : $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}$

ومنه : $f''(x)=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}$

أي : $f''(x)=4e^{2x}+4xe^{2x}$

إذن : $f''(x)=4e^{2x}+4f(x)$

أي : $f''(x)-4f(x)=4e^{2x}$

وهذا يعني أن f حل للمعادلة (E)

3- الاستنتاج :

*** ليكن y حلا للمعادلة (E) :**

لدينا : $y''-4y=4e^{2x}$

ولدينا من جهة أخرى : $f''(x)=-4f(x)=4e^{2x}$ (f حل للمعادلة (E))

ومنه : $(y''-4y)-(f''(x)-4f(x))=0$

أي : $(y''-f''(x))-4(y-f(x))=0$

ليكن: $y-f$ حل للمعادلة التفاضلية $y''-4y=0$

*** ليكن: $y-f$ حلا للمعادلة التفاضلية $y''-4y=0$:**

لدينا : $y''-f''(x)-4(y-f(x))=0$

أي : $y''-4y=f''(x)-4f(x)$

أي : $y''-4y=4e^{2x}$

وبالتالي فإنه يكون y حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان : $y-f$ حلا للمعادلة التفاضلية $y''-4y=0$

أي : $y-f(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$

حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

وهذا يعني أن : $y=f(x)+\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$

حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

أي أن جميع حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بمل يلي :

$x\rightarrow xe^{2x}+\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

تمرين 4 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $y''=4y$: (1)

1- حل المعادلة التفاضلية. (1)

2- نعتبر المعادلة التفاضلية : $y''-4y=x^2+2x$: (2)

أ) تحقق أن الدالة g بحيث : $g(x)=-\frac{1}{4}\left(x^2+2x+\frac{1}{2}\right)$ حل للمعادلة التفاضلية (2).

ب) بين أن f حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا وفقط إذا كانت $(f-g)$ حلا للمعادلة التفاضلية (1) ثم استنتج حلول المعادلة التفاضلية (2).

حل التمرين 4 :

1- حل المعادلة التفاضلية (1) :

المعادلة (1) تكتب على الشكل $y''-2^2y=0$

إذن حلول المعادلة (1) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x\to\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$

حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

2- أ) الدالة g حل للمعادلة (2) :

لدينا : $g(x)=-\frac{1}{4}\left(x^2+2x+\frac{1}{2}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و $g'(x)=-\frac{1}{4}(2x+2) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و $g''(x)=-\frac{1}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $g''(x)-4g(x)=-\frac{1}{2}-4\left(-\frac{1}{4}\left(x^2+2x+\frac{1}{2}\right)\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

أي : $g''(x)-4g(x)=x^2+2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

إذن : g حل للمعادلة التفاضلية (2).

أ) إثبات التكافؤ المطلوب :

*** ليكن f حلا للمعادلة التفاضلية (2) :**

لدينا : $f''(x)-4f(x)=x^2+2x$

حيث : $\forall x\in\mathbb{R}$

وبما أن : $g''(x)-4g(x)=x^2+2x$

فإن : $f''(x)-g''(x)-4(f(x)-g(x))=0$

أي : $(f''(x)-g''(x))-4(f(x)-g(x))=0$

إذن : $f-g$ حل للمعادلة التفاضلية (1)

*** ليكن $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية (1) :**

لدينا : $(f''(x)-g''(x))-4(f(x)-g(x))=0$

أي : $f''(x)-4f(x)=g''(x)-4g(x)$

وبما أن : $g''(x)-4g(x)=x^2+2x$

فإن : $f''(x)-4f(x)x^2+2x$

إذن : f حل للمعادلة (2)

وبالتالي فإن : f حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا وفقط إذا كان $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية (1).

الإستنتاج :

ليكن f حلا للمعادلة (2)

لدينا : $f-g$ حل للمعادلة (1)

أي أن $f-g$ هي من بين الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)-g(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x} \quad \text{حيث :} \quad \alpha\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad \beta\in\mathbb{R}$$

وهذا يعني أن حلول المعادلة (2) هي الدوال المعرفة علي $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$x\to -\frac{1}{4}\left(x^2+2x+\frac{1}{2}\right)+\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x} \quad \text{حيث :} \quad \alpha\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad \beta\in\mathbb{R}$$

تمرين 5 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E): y''-y=1-x-x^2$

1- أوجد الأعداد الحقيقية a و b و c ليكن تكون الدالة العددية f_0 للمتغير الحقيقي x المعرفة ب :

$f_0(x)=ax^2+bx+c$ حلا للمعادلة (E)

2- حل المعادلة التفاضلية $y''-y=0$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) علما أن الدالة g تكون حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $g-f_0$ حلا للمعادلة $y''-y=0$

حل التمرين 5 :

1- تحديد الأعداد a و b و c :

لدينا : $f_0''(x)-f_0(x)=1-x-x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f_0$ حل للمعادلة (E)

$$\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad 2a-(ax^2+bx+c)=1-x-x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a=-1 \quad \text{و} \quad -b=-1 \quad \text{و} \quad 2a-c=1$$

$$\Leftrightarrow \quad a=1 \quad \text{و} \quad b=1 \quad \text{و} \quad c=1$$

إذن تكون الدالة f_0 حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $a=1$ و $b=1$ و $c=1$

2- حل المعادلة التفاضلية $y''-y=0$

حلول المعادلة التفاضلية $y''-y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x \to \alpha e^{x}+\beta e^{-x}$

حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

استنتاج حلول (E) :

ليكن g حلا للمعادلة (E)

لدينا : $g-f_0$ حل للمعادلة التفاضلية $y''-y=0$

أي أنه لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $(g-f_0)(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{-x}$

حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

أي لكل x من $\mathbb{R}$ $(g-f_0)(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{-x}$

حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

إذن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x \to f_0(x)+\alpha e^{x}+\beta e^{-x}$

أي : $x \to x^2+x+1+\alpha e^{x}+\beta e^{-x}$

حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

تمرين 6 :

نعتبر المعادلة العددية f لمتغير حقيقي حيث : $f(x)=x(x-1)^2 e^{2x}$

-1 أ) حل المعادلة التفاضلية : $(e): y''-4y=0$

ب) تحقق من أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية (E) :

$$y''-4y=2x(6x-5)e^{2x}$$

ج) بين أن y حل للمعادلة (E) يكافىء $y-f$ حل للمعادلة (e)

د) استنتج حلول المعادلة (E)

-2 أ) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x}=0$

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

-3 أ) أدرس إشارة $f'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

ب) اعط جدول تغيرات الدالة f

-4 ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

ب) أدرس تقعر المنحنى (C) واعط معادلة لمماس المنحنى (C) في O

ج) أرسم (C)

حل التمرين 6 :

-1 أ) **حل المعادلة (e) :**

المعادلة (e) تكتب على الشكل $y''-2^2y=0$

إذن حلول المعادلة (e) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x\to\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$

حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

ب) **f حل للمعادلة (E) :**

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)=x(x-1)^2e^{2x}=(x^3-2x^2+x)e^{2x}$

$$f'(x)=(3x^2-4x+1)e^{2x}+2(x^3-2x^2+x)e^{2x}$$
$$=(2x^3-x^2-2x+1)e^{2x}$$

$$f''(x)=(6x^2-2x-2)e^{2x}+2(2x^3-x^2-2x+1)e^{2x}$$
$$=(4x^3+4x^2-6x)e^{2x}$$

ومنه : $f''(x)-4f(x)=(4x^3+4x^2-6x)e^{2x}-4(x^3-2x^2+x)e^{2x}$

أي : $f''(x)-4f(x)=2x(6x-5)e^{2x}$

إذن : f حل للمعادلة التفاضلية (E)

ج) <u>اثبات التكافؤ المطلوب :</u>

* ليكن y حلا للمعادلة التفاضلية (E)

لدينا : $y''-4y=2x(6x-5)e^{2x}$

وبما أن : f حل للمعادلة (E)

فإن : $f''(x)-4f(x)=2x(6x-5)e^{2x}$

ومنه : $(y''-4y)-(f''(x)-4f(x))=0$

أي : $y''-f''(x)-4(y-f(x))=0$

أي : $(y''-f''(x))-4(y-f(x))=0$

إذن : $y-f$ حل للمعادلة التفاضلية (e)

* ليكن $y-f$ حلا للمعادلة التفاضلية (e)

لدينا : $(y''-f''(x))-4(y-f(x))=0$

أي : $y''-f''(x)-4y+4f(x)=0$

أي : $y''-4y=f''-4f(x)$

وبما أن : $f''-4f(x)=2x(6x-5)\mathrm{e}^{2x}$

فإن : $y''-4y=2x(6x-5)\mathrm{e}^{2x}$

إذن : y حل للمعادلة التفاضلية (E)

د) <u>استنتاج حلول المعادلة</u> $(\mathbf{E})$ <u>:</u>

ليكن y حلا للمعادلة (E)

لينا : $y-f$ حل للمعادلة (e)

أي : $y-f(x)=\alpha\mathrm{e}^{2x}+\beta\mathrm{e}^{-2x}$

حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

ومنه : $y=f(x)+\alpha\mathrm{e}^{2x}+\beta\mathrm{e}^{-2x}$

حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

أي : $y=x(x-1)^2\mathrm{e}^{2x}+\alpha\mathrm{e}^{2x}+\beta\mathrm{e}^{-2x}$

حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$x\to x(x-1)^2\mathrm{e}^{2x}+\alpha\mathrm{e}^{2x}+\beta\mathrm{e}^{-2x}$ حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

-2 أ) اثبات المتساوية :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_-^*$

لدينا : $x^3 e^{2x} = -e^{\ln(-x^3 e^{2x})}$

$= -e^{\ln(-x)^3 + 2x}$

$= -e^{3\ln(-x) + 2x}$

$= e^{x\left[-3\frac{\ln(-x)}{-x}+2\right]}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[-3\frac{\ln(-x)}{-x}+2\right] = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x} = 0$

ب) حساب النهايتين المطلوبتين :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 2x^2 + x)e^{2x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 e^{2x} - 2x^2 e^{2x} + x e^{2x})$

$= 0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2(x e^x)^2 = 0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2} 2x e^{2x} = 0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1)^2 e^{2x}$

$= +\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1)^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

-3 أ) دراسة إشارة $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا : $f'(x) = (x-1)^2 e^{2x} + 2x(x-1)e^{2x} + 2x(x-1)^2 e^{2x}$

$$= (x-1)e^{2x}[(x-1)+2x+2x(x-1)]$$

$$= 2(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		-		-		-	0	+	
$x+1$		-	0	+		+		+	
$x-\frac{1}{2}$		-		-	0	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

ب) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{e}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$F(-1)=-\frac{4}{e^2} \quad \text{و} \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{8} \quad \text{و} \quad f(1)=0$$

4- أ) الفروع اللانهائية :

* لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

إذن محور الأفاصيل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C).

* لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

ب) دراسة تقعر المنحنى (C) :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا : $f''(x)=(4x^3+4x^2-6x)e^{2x}$

$$= 2x(2x^2+2x-3)e^{2x}$$

$$= 4x\left(x+\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)e^{2x}$$

إذن : (C) محدب في المجال $\left]\frac{-1-\sqrt{7}}{2},0\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{7}}{2},+\infty\right[$

و (C) غير محدب في المجال $\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right[\cup\left]0,\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right[$

<u>معادلة المماس في النقطة</u> O :

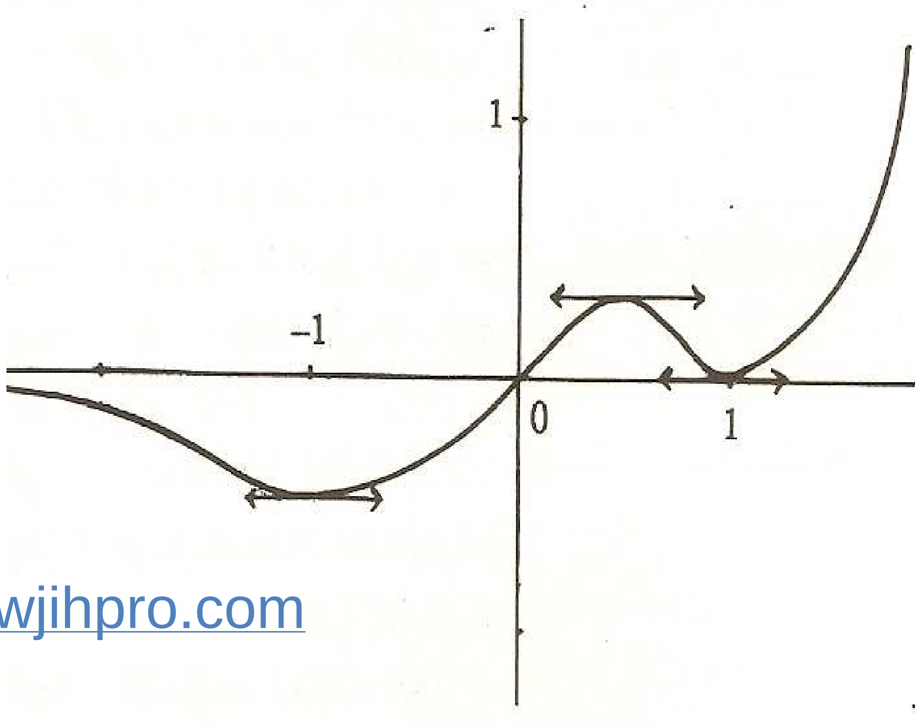
معادلة المماس عند النقطة O هي :

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

وبما أن : $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

فإن : معادلة المماس هي : $y=x$

ب) <u>رسم المنحنى</u> (C) :



تمارين وحلول في المعادلات التفاضلية
- سلسلة 2 -

تمرين 1 :

-1 حل المعادلة التفاضلية : $y''-6y'+8y=0$ (1,5 ن)

-2 حدد الدالة التي تحقق : $y(0)=1$ و $y'(0)=3$ (1,5 ن)

حل التمرين 1 :

-1 **حلول المعادلة التفاضلية $y''-6y'+8y=0$:**

حلول هذه المعادلة هي الدوال :

$$y : x \to a\,e^{4x}+b^{2}x$$

حيث : $(a\,,b)\in\mathbb{R}$

-2 **تحديد الحل الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(0)=3$:**

لدينا : $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 4a+2b=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad a=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad b=\frac{1}{2}$$

إذن الحل الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(0)=3$

$$x \to \frac{1}{2}e^{4x}+\frac{1}{2}e^{2x}$$

تمرين 2 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $4y''+4y'+y=\mathrm{e}^{-x}$

1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$

تحقق من أن الدالة g حل للمعادلة (E) . (1 ن)

2- استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E) . (1 ن)

حل التمرين 2 :

1- التحقق من أن g حل للمعادلة (E) :

تحقق من أنه لكل x من $\mathbb{R}$: $4g''(x)+4g'(x)+g(x)=\mathrm{e}^{-x}$

2- حلول المعادلة التفاضلية (E) :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $4y''+4y'+y=\mathrm{e}^{-x}$

المعادلة الميزة لهذه المعادلة هي : $4r^2+4r+1=0$

و هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : $r=-\dfrac{1}{2}$

وبالتالي فإن حلول المعادلة التفاضلية $4y''+4y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ هي الدوال :

$x\to(ax+b)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ حيث a و b عددان حقيقيان

وبما أن الدالة g هي حل خاص للمعادلة (E)

فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال : $x\to(ax+b)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+e^{-x}$ حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

تمرين 3 :

-1 حل المعادلة التفاضلية : $y''+2y'-3y=0$. (1 ن)

-2 نعتبر المعادلة التفاضلية : $y''+2y'-3y=-3e^{-2x}$. (1)

أ) تحقق من أن الدالة العددية u بحيث : $u(x)=e^{x}+e^{-2x}$ حل للمعادلة (1)

ب) حدد الحل العام للمعادلة (1). (0,5 ن)

حل التمرين 3 :

-1 **حل المعادلة التفاضلية $y''+2y'-3y=0$**

المعادلة المميزة r^2+2r-3 لها حلان هما : $r_1=1$ و $r_2=-3$

إذن حلول المعادلة التفاضلية المقترحة هي الدوال :

$x \to a e^{-3x}+b e^{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان

-2 **أ) التحقق من أن الدالة U حل للمعادلة (1) :**

تحقق من أنه لكل x من $\mathbb{R}$:

$$u''(x)+2u'(x)-3u(x)=-3e^{-2x}$$

ب) تحديد الحل العام للمعادلة (1) :

حلول المعادلة (1) هي الدوال :

$$x \to a e^{-3x}+b e^{x}+e^{x}+e^{-2x}$$

أي الدوال $x \to a e^{-3x}+e^{-2x}+c e^{x}$

حيث $(a,c)\in\mathbb{R}$

تمرين 4 :

-1 حل المعادلة التفاضلية : $y''-5y'+6y=0$. (1 ن)

-2 نعتبر المعادلة التفاضلية $(E): y''-5y'+6y=e^{2x}$

أ) بين أن $y=-x\,e^{2x}$ حل للمعادلة (E) . (1 ن)

ب) أوجد حل المعادلة (E) الذي يحقق : $y(0)=2$ و $y'(0)=0$. (1 ن)

حل التمرين 4 :

-1 **حل المعادلة التفاضلية $y''-5y'+6y=0$**

حلول هذه المعادلة التفاضلية هي الدوال :

$$x\to a\,e^{2x}+b\,e^{3x}$$

حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

-2 **أ)** **لنبين أن الدالة $g: x\to -x\,e^{2x}$ هي حل للمعادلة (E) :**

تحقق لكل من أنه لكل x من $\mathbb{R}$:

$$g''(x)-5g'(x)+6g(x)=e^{2x}$$

ب) **حل المعادلة (E) الذي يحقق $y(0)=2$ و $y'(0)=0$:**

حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال :

$$y: x\to a\,e^{2x}+b\,e^{3x}-x\,e^{2x}$$

أي الدوال : $y: x\to (a-x)e^{2x}+b\,e^{3x}$ حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

ولدينا : $\begin{cases} a+b=2 \\ -1+2a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

$$\left(y'(x)=-\mathrm{e}^{2x}+2(a-x)\mathrm{e}^{2x}+3b\mathrm{e}^{3x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a=5 \quad \text{و} \quad b=-3$$

إذن الحل الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0)=2$ و $y'(0)=0$ هو الدالة :

$$x \to (5-x)\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{3x}$$

تمرين 5 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E): y''-4y'+3y=9x^2-24x$

1- لتكن المعادلة الحدودية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(x)=ax^2+bx+c$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية.

2- حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $(\mathrm{E}'): y''-4y'+3y=0$. (1 ن)

3- استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E) . (0,5 ن)

حل التمرين 5 :

1- تحديد a و b و c :

تكون الدالة g حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان لكل x من $\mathbb{R}$:

$$g''(x)-4g'(x)+3g(x)=9x^2-24x$$

أي : $3ax^2+(3b-8a)x+2a-4b+3c=9x^2-24x$

أي : $\begin{cases} 3a=9 \\ 3b-8a=-24 \\ 2a-4b+3c=0 \end{cases}$

أي : $a=3$ و $b=0$ و $c=-2$

إذن : $g(x)=3x^2-2$ لكل x من $\mathbb{R}$.

-2 الحل العام للمعادلة التفاضلية (E') :

بين أن هذا الحل العام هو :

$$y(x)=a\,\mathrm{e}^{x}+b\,\mathrm{e}^{3x}$$

حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

-3 استنتاج حلول المعادلة (E) :

حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال :

$$y:x\to a\,\mathrm{e}^{x}+b\,\mathrm{e}^{3x}+3x^2-2$$

حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

تمرين 6 :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث :

$$(\mathrm{E}):\ y''-3y'+2y=2x^2-12x+3$$

-1 حدد حدودية من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E) . (1 ن)

-2 حل المعادلة التفاضلية (E) . (1 ن)

حل التمرين 6 :

-1 تحديد حدودية من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة (E) :

ضع $\quad g(x)=ax^2+bx+c$

واتبع نفس الطريقة التي سلكتها في جواب السؤال -1- من التمرين السابق (تمرين 5) وستجد أن :

$a=1$ و $b=-3$ و $c=-4$

إذن : $\quad g(x)=x^2-3x-4$

-2 حل المعادلة التفاضلية (E) :

حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال :

$$x \to a\,\mathrm{e}^{x}+b\,\mathrm{e}^{2x}+x^2-3x-4$$

حيث : $\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

تمرين 7 :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث :

$$(\mathrm{E}):\ y''-y'-2y=-10\cos x$$

-1 حل المعادلة $y''-y'-2y=0$. (1 ن)

-2 لتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث : $g(x)=3\cos x+\sin x$

بين أن الدالة g حل للمعادلة (E) ثم استنتج حلول المعادلة (E) . (2 ن)

حل التمرين 7 :

-1 حل المعادلة $y''-y'-2y=0$:

بين أن حلول المعادلة التفاضلية $y''-y'-2y=0$ هي الدوال :

$$x\to\alpha e^{2x}+\beta e^{-x}$$

حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

-2 * لنبين أن g هي حل للمعادلة (E)

تحقق من أن : $g''(x)-g'(x)-2g(x)=-10\cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

*** استنتاج حلول المعادلة (E) :**

حلول المعادلة (E) هي الدوال :

$$x\to\alpha e^{2x}+\beta e^{-x}+3\cos x+\sin x$$

حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

تمرين 8 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E): y''+2y'+y=2e^{-x}$

-1 حدد حلا خاصا للمعادلة (E) . (1 ن)

-2 حدد حل المعادلة (E) الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(0)=1$. (1,5 ن)

حل التمرين 8 :

-1 تحديد حل خاص للمعادلة (E) :

بما أن الطرف الثاني للمعادلة $(\mathrm{E}): y''+2y'+y=2\mathrm{e}^{-x}$

الذي هو $2\mathrm{e}^{-x}$ هو على الشكل e^{wx}

فإننا سنبحث عن حل خاص من النوع :

$$y_0 : x \to (ax^2=bx+c)\mathrm{e}^{-x}$$

اتبع نفس الخطوات التي سلكناها في الجواب على السؤال -2- من التمرين رقم 2 لتجد أن :

$y_0(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

-2 تحديد الحل y بحيث $y(0)=1$ و $y'(0)=1$:

* بين أولا أن حلول المعادلة (E) هي الدوال :

$$x \to (\alpha x+\beta)\mathrm{e}^{-x}+x^2\mathrm{e}^{-x}$$

حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

* بين أن الحل y الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ هو الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$

$$y(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x}+x^2\mathrm{e}^{-x}$$

تمرين 9 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $y''+n^2y=n(n-1)\sin^{n-2}(x)$ (1)، حيث $n\in\mathbb{N}^*$

-1 حدد بدلالة n حلول المعادلة التفاضلية $y''+n^2y=0$. (1 ن)

-2 أ) بين أن الدالة العددية u بحيث : $u(x)=\sin^{n}(x)$ حل للمعادلة (1). (1 ن)

ب) حدد الحل y للمعادلة (1) بحيث : $y(0)=1$ و $y'(0)=-n$. (1,5 ن)

حل التمرين 8 :

-1 حلول المعادلة $y''+n^2y=0$:

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي : $r^2+n^2=0$

وحلا هذه المعادلة هما : $r_1=\mathrm{i}n$ و $r_2=-\mathrm{i}n$

إذن حلول المعادلة التفاضلية $y''+n^2y=0$ هي الدوال :

$$x\to a\cos(nx)=b\sin(nx)$$

حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

-2 أ) لنبين أن الدالة $\mathrm{U}:x\to\sin^{n}(x)$ حل للمعادلة (1) :

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{U}'(x)=n\cos x\sin^{n-1}(x)$$

$$\mathrm{U}''(x)=n(-\sin.\sin^{n-1}(x)+\cos x.(n-1)\cos x(n-1)\cos x\sin^{n-2}(x))$$

$$=n(-\sin^{n}(x)+(n-1)\cos^2 x\sin^{n-2}(x))$$

$$=n(-\sin^{n}(x)+(n-1)(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}(x))$$

$$=n(-\sin^{n}(x)+(n-1)\sin^{n-2}(x)-(n-1)\sin^{x}(x))$$

$$=n(-n\sin^{n}(x)+(n-1)\sin^{(n-2)}(x))$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} U''(x)+n^2U(x) &= n\left(-\sin^n(x)+(n-1)\sin^{n-2}(x)\right)+n^2\sin^n(x) \\ &= -n^2\sin^n(x)+n(n-1)\sin^{n-2}(x)+n^2\sin^n(x) \\ &= n(n-1)\sin^{n-2}(x) \end{aligned}$$

وهذا يعني أن الدالة U هي بالفعل حل للمعادلة (1)

ب) تحديد الحل y الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(0)=-n$:

من نتيجتي السؤالين -1- و -2-أ نستنتج أن حلول المعادلة (1) هي الدوال y المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$y(x)=a\cos x(nx)+b\sin(nx)+\sin^n(x)$$

حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

إذا كان $y(0)=1$ و $y'(0)=-n$

فإن : $a\cos 0+b\sin 0=\sin^n(0)=1$

و $-na\sin 0+nb\cos 0+n\cos\sin^{n-1}0=-n$

أي : $a=1$ و $nb=-n$

أي : $a=1$ و $b=-1$

إذن حل المعادلة (1) الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(0)=-n$ هو الدالة :

$$x\to\cos(nx)-\sin(nx)+\sin^n(x)$$