تمارين حول الاستمرارية –الجزء 1-

التمرين 1:

1) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$. هل الدالة f مستمرة في $\mathbb{R}$.

2) نفس السؤال بالنسبة للدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\begin{cases} -2x-3 & x\le -1 \\ x & -1\le x\le 1 \\ -3x & x>1 \end{cases}$.

التمرين 2:

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$. هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & x\ne 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$. ادرس استمرارية f على $\mathbb{R}$.

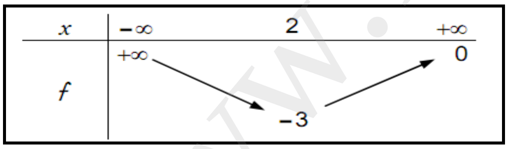
التمرين 3:

برهن أن المعادلة $x^3+3x=5$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}$. اعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذا الحل.

التمرين 4:

إليك في الشكل المقابل جدول تغيرات الدالة f.

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$. علل إجابتك.

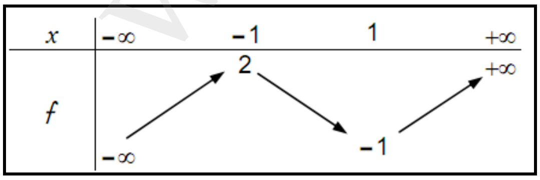


التمرين 5:

إليك في الشكل المقابل جدول تغيرات الدالة f.

1) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = -5$. علل إجابتك.



التمرين 6:

لدينا المعادلة: $(E): \cos x = \frac{2}{3}x$.

1) برهن أنه عندما يكون x حلا للمعادلة (E)، فإن: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

2) برهن أن المعادلة (E) لها حل وحيد α في $\mathbb{R}$.

3) اعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـ α.

التمرين 7:

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2$، و (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \sqrt{3x}$.

ما هو عدد نقاط تقاطع (C) و (C'). علل إجابتك.

التمرين 8:

لتكن الدالة f المعرفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$.

1) ارسم جدول تغيرات الدالة f.

2) استنتج منه أن المعادلة $f(x) = 0$، لها حل وحيد α في $[-1;+\infty[$.

3) اعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـ α.

التمرين 9:

لتكن الدالة f المعرفة والمستمرة على $[-3;4]$ والتي جدول تغيراتها مبين في الشكل الموالي. أذكر، بدون تعليل، عدد حلول كل معادلة من المعادلات التالية: $f(x) = 3$. $f(x) = 0$. $f(x) = -2$.

x	-3		0		1		3		4
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↘	-3	↗	1

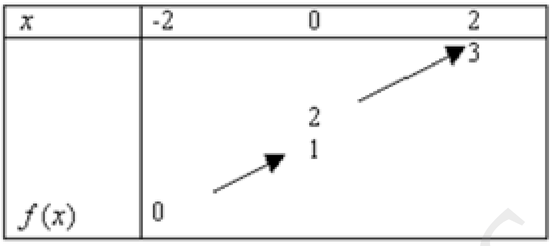
التمرين 10:

الجدول المبين في الشكل الموالي يلخص تغيرات الدالة f المعرفة على $I=[-2;2]$.

1) هل يمكن إيجاد $\alpha \in I$ حيث $f(\alpha)=\frac{3}{2}$ ؟

2) هل يمكن إيجاد $\beta \in I$ حيث $f(\beta)=0,1$ ؟

3) برهن أنه يوجد عدد وحيد $\gamma \in [0;2]$ حيث $f(\gamma)=2,5$.



تمّ بحمد الله وتوفيقه

حلول التمارين حول الاستمرارية -الجزء 1-

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1:

1) الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;2[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة كثيرة حدود. (1)

❖ على المجال $]2;+\infty[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة تآلفية. (2)

❖لدراسة استمرارية الدالة f عند 2، نحسب:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2-1=3$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 5-x=3$.

وبما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=f(2)$ فإن: الدالة f مستمرة عند 2. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

2) الدالة g معرفة بـ: $g(x)=\begin{cases} -2x-3 & x\le -1 \\ x & -1\le x\le 1 \\ -3x & x>1 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ الدالة g مستمرة لأنها معرفة بدوال تآلفية. (4)

❖لدراسة استمرارية الدالة g عند -1 ، نحسب:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} g(x)=\lim\limits_{x\to -1} -2x-3=-1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)=\lim\limits_{x\to -1} x=-1$.

وبما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} g(x)=g(-1)$ فإن: الدالة g مستمرة عند-1. (5)

❖لدراسة استمرارية الدالة g عند 1، نحسب:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1} -3x=-3$.

وبما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} g(x)\neq\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} g(x)$ فإن: الدالة g ليست مستمرة عند1. (6)

من (4)، (5) و(6) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } g \text{ مستمرة على } \mathbb{R}-\{1\}}$.

حل التمرين 2:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;0[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة كثيرة حدود. (1)

❖ على المجال $]0;+\infty[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة تآلفية. (2)

❖لدراسة استمرارية الدالة f عند 0، نحسب:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2-1=-1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x-1=-1$.

وبما أن $f(0) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ فإن: الدالة f مستمرة عند 0. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

2) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$.

❖ على المجال $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ الدالة f مستمرة لأنها معرفة بدالة ناطقة مقامها غير معدوم. (1)

❖ من أجل كل $x \neq 2$، لدينا: $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x + 1$، ومنه فإن:

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 1 = 3 = f(2)$ ومنه فإن: الدالة f مستمرة عند 2. (2)

من (1)، و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 3:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 3x$.

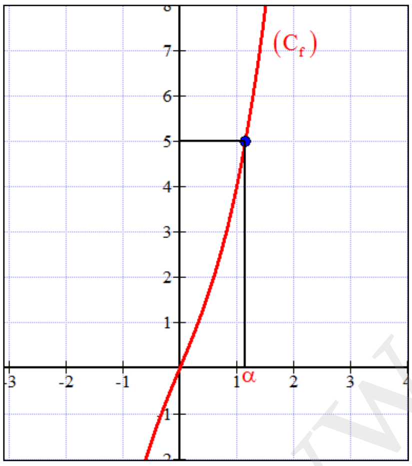
❖ الدالة f كثيرة حدود ومنه فإن: f مستمرة على $\mathbb{R}$. (1)

❖ من جهة أخرى الدالة f هي مجموع دالتين متزايدتان تماما ($x \to x^3$ و $x \to 3x$)، ومنه فإن: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أنه من أجل كل $k \in \mathbb{R}$، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

❖ بأخذ $k = 5$، المعادلة $x^3 + 3x = 5$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

الشكل المقابل يبين أن المعادلة $x^3 + 3x = 5$ تقبل حلا وحيدا α.



❖ لدينا: $f(1) = 4$ و $f(2) = 14$. وبما أن $4 < 5 < 14$ فإن:

$f(1) < f(\alpha) < f(2)$.

❖ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فإن: $1 < \alpha < 2$.

x	f(x)
1,0	4
1,1	4,631
1,2	5,328
1,3	6,097

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في المجال $[1;2]$، نتحصل على: $1,1 < \alpha < 1,2$.

x	f(x)
1,14	4,9015
1,15	4,9709
1,16	5,0409

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في المجال $[1,1;1,2]$، نتحصل على: $\boxed{\alpha \approx 1,15}$.

حل التمرين 4:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$.

● ومن أجل كل $x\in]-\infty;2[$ لدينا $f(x)\in]-3;+\infty[$.

● وبما أن $1\in]-3;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;2[$. (1)

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2;+\infty[$

● ومن أجل كل $x\in]2;+\infty[$ لدينا $f(x)\in]-3;0[$.

● وبما أن $1\notin]-3;0[$ فإن المعادلة $f(x)=1$ ليس لها حل على المجال $]2;+\infty[$. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=1 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ على } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 5:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1) عدد حلول المعادلة $f(x)=0$:

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

● ومن أجل كل $x\in]-\infty;-1[$ لدينا $f(x)\in]-\infty;2[$.

● وبما أن $0\in]-\infty;2[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;-1[$. (1)

❖ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1;1[$

● ومن أجل كل $x\in]-1;1[$ لدينا $f(x)\in]-1;2[$.

● وبما أن $0\in]-1;2[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]-1;1[$. (2)

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

● ومن أجل كل $x\in]1;+\infty[$ لدينا $f(x)\in]-1;+\infty[$.

● وبما أن $0\in]-1;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا γ على المجال $]1;+\infty[$. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=0 \text{ تقبل 3 حلول في } \mathbb{R}}$.

2) عدد حلول المعادلة $f(x)=-5$:

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

• ومن أجل كل $x\in]-\infty;-1[$ لدينا $f(x)\in]-\infty;2[$.

• وبما أن $(-5)\in]-\infty;2[$ فإن المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;-1[$. (1)

❖ ومن أجل كل $x\in[-1;1]$ لدينا $f(x)\in[-1;2]$ ومنه فإن: $f(x)\neq-5$. (2)

❖ ومن أجل كل $x\in]1;+\infty[$ لدينا $f(x)\in]-1;+\infty[$ ومنه فإن: $f(x)\neq-5$. (3)

من (1)، (2) و(3) نستنتج أن $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=-5 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ في } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 6:

1) لدينا المعادلة: $(E): \cos x=\frac{2}{3}x$.

❖ نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $-1\le\cos x\le1$. إذا كانت x حلا للمعادلة (E) فإن:

$-1\le\frac{2}{3}x\le1$ أي $-\frac{2}{3}\le x\le\frac{2}{3}$.

❖ نعلم أن $\frac{\pi}{2}\approx1,57$، نستنتج أن $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{2}{3}\le x\le\frac{2}{3}\le\frac{\pi}{2}$. (1)

❖ ونعلم أنه عندما يكون $-\frac{\pi}{2}\le x<0$، يكون $\cos x\ge0$ و $\frac{2}{3}x<0$، أي $\cos x\neq\frac{2}{3}x$. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أنه إذا $\boxed{\text{كانت } x \text{ حلا للمعادلة } (E) \text{ فإن: } 0\le x\le\frac{\pi}{2}}$.

2) لتكن الدالة f المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بـ: $f(x)=\cos x-\frac{2}{3}x$.

❖ الدالة f هي مجموع دالتين $(x\to\cos x)$ و $(x\to-\frac{3}{2}x)$ مستمرتين ومتناقصتين تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. ومنه فإن: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

❖ لدينا: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$ و $f(0)=\cos0-\frac{2}{3}\times0=1$.

❖ من أجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا: $f(x)\in\left[-\frac{\pi}{3};1\right]$، وبما أن $0\in\left[-\frac{\pi}{3};1\right]$، فإن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \cos x-\frac{2}{3}x=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{2}{3}x \Leftrightarrow (E)$$

❖ومنه فإن: المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

❖من خلال السؤال 1، نعلم أن المعادلة (E) ليس لها حلول خارج المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$،

ومنه فإن: $\boxed{(E) \text{ تقبل حلا وحيدا في } \mathbb{R}}$.

3)لدينا: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$ و $f(0)=1$ وبما أن $-\frac{\pi}{3}<0<1$ فإن: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(\alpha)<f(0)$.

❖ وبما أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$، فإن: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$، نتحصل على: $0,9<\alpha<1$.

❖بأخذ قيم لـ x محصورة في $[0,9\ ;1]$، نتحصل على: $\boxed{\alpha \approx 0,91}$.

x	f(x)
0,8	0,1634
0,9	0,0216
1,0	-0,1264

x	f(x)
0,90	0,0216
0,91	0,0071
0,92	-0,0075

حل التمرين 7:

(C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2$،

و(C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\sqrt{3x}$.

❖أي نقطة تقاطع بين (C) و (C') يجب أن تكون لها فاصلة موجبة لأن الدالة g معرفة على $[0;+\infty[$. هذه الفاصلة ستكون حتما حلا للمعادلة $f(x)=g(x)$ أي $g(x)-f(x)=0$.

❖لنكن الدالة h المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $h(x)=g(x)-f(x)=\sqrt{3x}-(2-x^2)=\sqrt{3x}+x^2-2$.

●الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ لأنها مركبة من دالتين مستمرتين ومتزايدتين تماما على $[0;+\infty[$ (الدالة التآلفية $x \to 3x$ متبوعة بالدالة "جذر مربع"). (1)

●الدالة $-f$ المعرفة بـ: $x \to x^2-2$ هي دالة كثيرة حدود ومنه فإنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$. (2)

●من (1) و(2) نستنتج أن الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

●لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. ولدينا: $h(0)=-2$.

ومنه فإن: جدول تغيرات الدالة h يكون كالتالي:

x	0	$+\infty$
h	-2	$+\infty$

من خلال جدول تغيرات الدالة h، نستطيع القول أن:

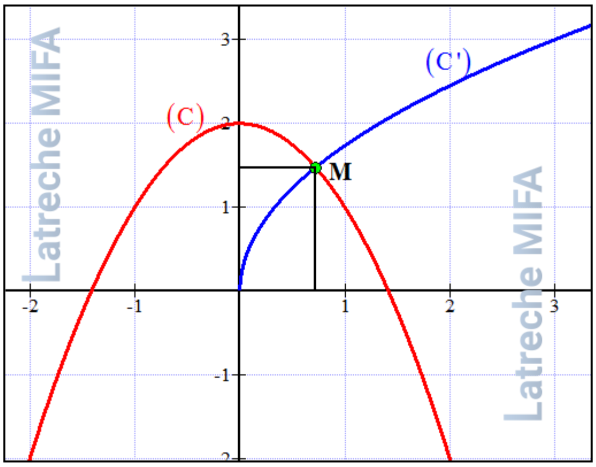
❖ الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

● ومن أجل كل $x\in[0;+\infty[$ لدينا $h(x)\in[-2;+\infty[$. وبما أن $0\in[-2;+\infty[$ فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[0;+\infty[$.

❖ نستنتج من ذلك أن المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حلا وحيدا في $[0;+\infty[$.

❖ ومنه فإن: (C) و (C') لهما نقطة تقاطع وحيدة M.

الشكل المقابل يبين صحة النتائج المتحصل عليها.



حل التمرين 8:

الدالة f معرفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-3+\sqrt{x+1}$.

1)

❖ الدالة $x\to 2x-3$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$. (1)

❖ الدالة $x\to\sqrt{x+1}$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$ لأنها مركبة من دالتين مستمرتين ومتزايدتين تماما على $[-1;+\infty[$ (الدالة التآلفية $x\to x+1$ والدالة "جذر مربع"). (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$.

❖ ولدينا: $f(-1)=-2-3+0=-5$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$

ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-1	$+\infty$
f	-5 ↗	$+\infty$

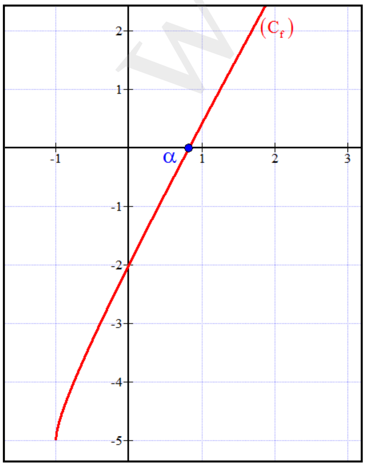
2) من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

● ومن أجل كل $x\in[-1;+\infty[$ لدينا $f(x)\in[-5;+\infty[$.

● وبما أن $0\in[-5;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$.

الشكل المقابل يبين صحة النتائج المتحصل عليها.



3)لدينا: $f(0)=-2<0$ و $f(1)=2-3+\sqrt{2}=-1+\sqrt{2}>0$

ومنه فإن: $f(0)<f(\alpha)<f(1)$.

❖ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$، فإن: $0<\alpha<1$.

x	f(x)
0,8	-0,0584
0,9	0,1784
1,0	0,4142

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة في $[0;1]$، نتحصل على: $0,8<\alpha<0.9$.

x	f(x)
0,81	-0,0346
0,82	-0,0109
0,83	0,0128

❖بأخذ قيم لـ x محصورة في $[0,8\ ;\ 0,9]$، نتحصل على: $\boxed{\alpha\approx 0,82}$.

حل التمرين 9:

الدالة f معرفة ومستمرة على $[-3;4]$ وجدول تغيراتها مبين في الشكل الموالي :

x	-3		0		1		3		4
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↘	-3	↗	1

❖المعادلة $f(x)=3$ لها حلين، أحدهما في المجال $[-3;0]$، والآخر في المجال $[0;3]$.

❖المعادلة $f(x)=0$ لها حلين، أحدهما في المجال $[0;3]$، والآخر في المجال $[3;4]$.

❖المعادلة $f(x)=-2$ لها حلين، أحدهما في المجال $[0;3]$، والآخر في المجال $[3;4]$.

حل التمرين 10:

الجدول المبين في الشكل الموالي يلخص تغيرات الدالة f المعرفة على $I=[-2;2]$.

x	-2		0		2
$f(x)$	0	↗	1 ‖ 2	↗	3

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن: الدالة f ليست مستمرة عند 0.

1) لا نستطيع إيجاد $\alpha \in I$ حيث: $f(\alpha)=\frac{3}{2}$ لأن $\frac{3}{2}\notin[0;1]\cup[2;3]$.

2) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-2;0]$. ومن أجل كل $x\in[-2;0[$ لدينا $f(x)\in[0;1[$.

وبما أن $0,1\in[0;1[$ فإنه يوجد عدد وحيد $\beta\in I$ حيث $f(\beta)=0,1$.

3) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;2]$. ومن أجل كل $x\in[0;2]$ لدينا $f(x)\in[2;3]$.

وبما أن $2,5\in[2;3]$ فإنه يوجد عدد وحيد $\gamma\in I$ حيث $f(\gamma)=2,5$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه

تمارين حول الاستمرارية ـالجزء 2-

التمرين 1:

مثّل بيانيا كل دالة من الدوال التالية، ثم أدرس استمراريتها من خلال تمثيلها البياني:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-5 & x<0\\ \frac{1}{2}x+1 & x\geq 0\end{cases}\ .\quad g(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 1\\ x & x>1\end{cases}\ .\quad h(x)=\begin{cases}2 & x\in]-\infty;-2]\\ -x & x\in]-2;2[\\ -1 & x\in[2;+\infty[\end{cases}\ .$$

التمرين 2:

لتكن f الدالة المعرفة على: $\mathbb{R}^{+*}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 2\\ \frac{4}{x^2} & 0<x<2\end{cases}$. برهن أن f مستمرة عند2.

التمرين 3:

أدرس استمرارية كل دالة من الدوال التالية بعد تحديد مجموعة تعريفها:

$f_1: x\to 2x^3+3x^2+1$ ، $f_2: x\to |x|$ ، $f_3: x\to\sqrt{x}$

$f_4: x\to \frac{1}{x}$ ، $f_5: x\to \cos x$ ، $f_6: x\to \sin x$

التمرين 4:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}|x|+x+1 & x\leq 1\\ \sqrt{x}(x^2+2) & x>1\end{cases}$.

1) أثبت أن f مستمرة على $\mathbb{R}-\{1\}$.

2) أدرس استمرارية f عند 1.

3) استنتج استمرارية f على مجموعة تعريفها.

التمرين 5:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-\dfrac{1}{x} & x>4\\(x+k)^2 & x\leq 4\end{cases}$.

استنتج قيم k التي تكون من أجلها f مستمرة على مجموعة تعريفها.

التمرين 6:

1) برهن أن الدالة: $x\to\sqrt{x^2+x+2}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$.

2) استنتج أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & x\neq 1\\\dfrac{3}{4} & x=1\end{cases}$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 7:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\0 & x=0\end{cases}$.

برهن أن f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 8:

ليكن الجدول المقابل جدول تغيرات الدالة f.

1) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=1$. علل إجابتك.

x	-5		2		4
f	7	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

التمرين 9:

ليكن الجدول الموالي جدول تغيرات الدالة f.

اعط، بدون برهان، عدد حلول المعادلة $f(x)=k$ في المجال $[-5;10]$، في كل حالة من الحالات التالية: $k=-5$، $k=-1$، $k=7$، $k=3$.

x	-5		-1		0		10
f	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

التمرين 10:

f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x)=x^2-3x+1$ والجدول المبين في الشكل الموالي يلخص تغيرات الدالة f على $[0;5]$.

1) استنتج أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;5]$.

2) أكمل الجدول الموالي، واعط قيمة لـ α بتقريب 10^{-1}.

3) أوجد القيمة الحقيقية لـ α.

x	0		$\frac{3}{2}$		5
f	1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	11

x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
$f(x)$											

التمرين 11:

f هي الدالة المعرفة على المجال $[0;3]$ بـ: $f(x)=x^3-5x^2+7x-2$.

1) حلل العبارة $(x-1)^2(x-3)$.

2) حل المعادلة $f(x)=1$

3) باستعمال جدول تغيرات الدالة f الموالي، اعط حسب قيم k، عدد حلول المعادلة $f(x)=k$.

x	0		1		$\frac{7}{3}$		3
f	-2	↗	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗	1

التمرين 12:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+1 & x\le 0\\ ax+b & 0<x<2\\ x^2-6x+4 & x\ge 2\end{cases}$، حيث a و b عددان حقيقيان.

احسب a و b لتكون f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 13:

g هي الدالة المعرفة على المجال $[-4;3]$ بـ: $g(x)=2x^3+3x^2-12x$. والجدول الموالي هو جدول تغيراتها.

2)مثّل الدالة g تمثيلا بيانيا.

3)برهن أن المعادلة $2x^3+3x^2-12x+8=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-4;3]$. واعط قيمة لـ α بتقريب 10^{-2}.

x	-4		-2		1		3
g	-32	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	45

التمرين 14:

f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$، ومن أجل كل x من $[0;1]$ لدينا $f(x)\in[0;1]$.

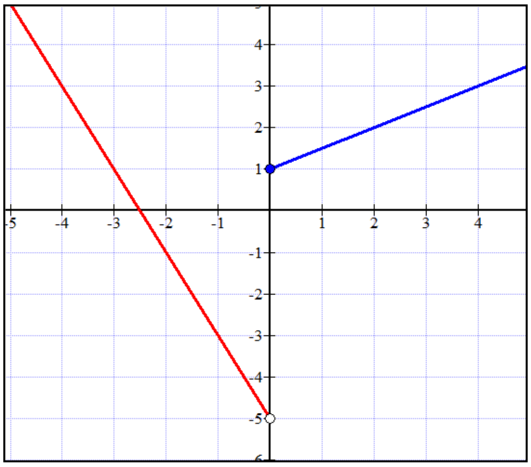
برهن أن الدالة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا واحدا.

تمّ بحمد الله وتوفيقه

حلول تمارين درس الاستمرارية -الجزء 2-

فهرس حلول التمارين

حل التمرين 1:



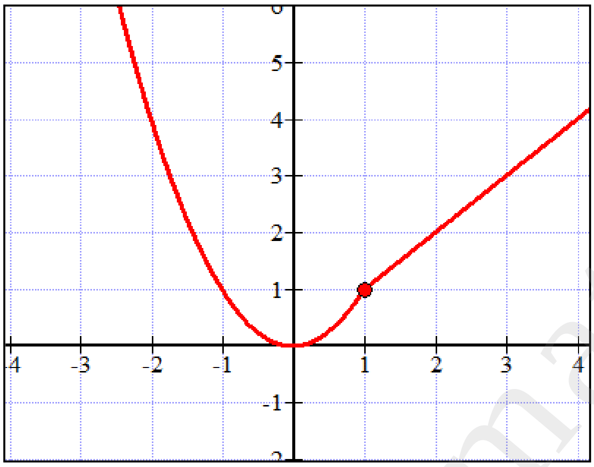
1) الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\begin{cases}-2x-5 & x<0\\ \frac{1}{2}x+1 & x\geq 0\end{cases}$.

❖ التمثيل البياني للدالة f يشمل جزء من المستقيم الذي معادلته $y=-2x-5$ عندما يكون $x<0$.

❖ التمثيل البياني للدالة f يشمل جزء من المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$ عندما يكون $x\geq 0$.

❖ لا يمكن رسم التمثيل البياني للدالة f دون رفع القلم من الورقة ومنه فإن: الدالة f ليست مستمرة على $\mathbb{R}$.

❖ الدالة f مستمرة على $]-\infty;0[$ ومستمرة على $]0;+\infty[$ ولكنها ليست مستمرة عند 0.



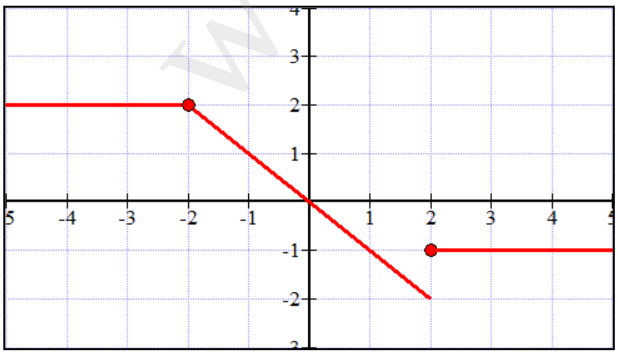
2) الدالة g معرفة بـ: $g(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 1\\ x & x>1\end{cases}$.

❖ التمثيل البياني للدالة g يشمل جزء من القطع المكافئ الذي معادلته $y=x^2$ من أجل $x\leq 1$.

❖ التمثيل البياني للدالة g يشمل جزء من المستقيم الذي معادلته $y=x$ عندما يكون $x>1$.

❖ يمكن رسم التمثيل البياني للدالة g دون رفع القلم من الورقة ومنه فإن: الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$.

3) الدالة h معرفة بـ: $h(x)=\begin{cases}2 & x\in\,]-\infty;-2]\\ -x & x\in\,]-2;2[\\ -1 & x\in[2;+\infty[\end{cases}$.



❖ التمثيل البياني للدالة h يشمل جزء من المستقيم الذي معادلته $y=2$ عندما يكون $x\in\,]-\infty;-2]$.

❖ التمثيل البياني للدالة h يشمل جزء من المستقيم الذي معادلته $y=-x$ عندما يكون $x\in\,]-2;2[$.

❖ التمثيل البياني للدالة h يشمل جزء من المستقيم الذي معادلته $y=-1$ عندما يكون $x\in[2;+\infty[$.

❖ لا يمكن رسم التمثيل البياني للدالة h دون رفع القلم من الورقة ومنه فإن: الدالة h ليست مستمرة على $\mathbb{R}$، ولكن الدالة h مستمرة على $]-\infty;-2]$ ومستمرة على $]-2;2[$ ومستمرة على $[2;+\infty[$. ولكنها ليست مستمرة عند 2.

حل التمرين 2:

الدالة f معرفة على: $\mathbb{R}^{+*}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 2\\ \dfrac{4}{x^2} & 0<x<2\end{cases}$.

❖ لدينا: $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2}\dfrac{4}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2}\sqrt{x-1}=1$

❖ لدينا إذن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} f(x)=f(2)=1$.

❖ ومنه نستنتج أن الدالة f مستمرة عند 2.

حل التمرين 3:

1) $f_1:x\to 2x^3+3x^2+1$. الدالة f_1 هي دالة كثيرة حدود ومنه فهي معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$.

2) $f_2:x\to|x|$. الدالة f_2 هي الدالة "قيمة مطلقة" ومنه فهي معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$.

3) $f_3:x\to\sqrt{x}$. الدالة f_3 هي الدالة "جذر مربع" ومنه فهي معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}^+$.

4) $f_4:x\to\dfrac{1}{x}$. الدالة f_4 هي الدالة "مقلوب" ومنه فهي معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}^*$.

5) $f_5:x\to\cos x$. الدالة f_5 هي الدالة " cosinus" ومنه فهي معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$.

6) $f_6:x\to\sin x$. الدالة f_6 هي الدالة "sinus" ومنه فهي معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 4:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}|x|+x+1 & x\leq 1\\ \sqrt{x}\left(x^2+2\right) & x>1\end{cases}$.

1) دراسة استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}-\{1\}$ تعني دراسة استمراريتها على $]-\infty;1[$ وعلى $]1;+\infty[$.

❖ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$، $f(x)=|x|+x+1$.

❖ الدالة f هي مجموع الدالة "قيمة مطلقة" المستمرة على $\mathbb{R}$ أي على $]-\infty;1[$، والدالة التآلفية $x\to x+1$ المستمرة على $\mathbb{R}$ أي على $]-\infty;1[$. ومنه فإن: الدالة f مستمرة على $]-\infty;1[$. (1)

❖من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ ، $f(x)=\sqrt{x}\,(x^2+2)$.

❖الدالة f هي جداء الدالة "جذر مربع" المستمرة على $\mathbb{R}^+$ أي على $]1;+\infty[$ ، والدالة كثيرة حدود $x \to x^2+2$ المستمرة على $\mathbb{R}^+$ أي على $]1;+\infty[$. ومنه فإن: الدالة f مستمرة على $]1;+\infty[$. (2)

❖من (1) و(2) نستنتج أن: $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على }]-\infty;1[\text{ وعلى }]1;+\infty[}$.

2)لندرس استمرارية الدالة f عند 1:

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} |1|+1+1=3$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \sqrt{1}\,(1^2+2)=3$.

❖ومنه فإن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=f(1)=3$ أي أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة عند } 1}$.

3)الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}-\{1\}$ وهي مستمرة عند 1 ومنه فإن: $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 5:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}-\dfrac{1}{x} & x>4 \\ (x+k)^2 & x \le 4 \end{cases}$.

1)دراسة استمرارية الدالة f على $]-\infty;4[$ وعلى $]4;+\infty[$.

❖من أجل كل $x \in]4;+\infty[$ ، $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$.

❖الدالة f هي فرق الدالة "جذر مربع" المستمرة على $\mathbb{R}^+$ أي على $]4;+\infty[$ ، والدالة "مقلوب" المستمرة على $\mathbb{R}^*$ أي على $]4;+\infty[$. ومنه فإن: الدالة f مستمرة على $]4;+\infty[$. (1)

❖من أجل كل $x \in]-\infty;4[$ ، $f(x)=(x+k)^2$.

❖الدالة f هي دالة كثيرة حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ أي على $]-\infty;4[$. ومنه فإن: الدالة f مستمرة على $]-\infty;4[$. (2)

❖من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على }]-\infty;4[\text{ وعلى }]4;+\infty[}$.

2)دراسة استمرارية الدالة f عند 4:

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 4} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 4} \left(\sqrt{4}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{4}$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} (4+k)^2=(4+k)^2$.

❖من أجل أن تكون الدالة f مستمرة عند 4 يجب أن تكون $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x)$ أي: $(4+k)^2 = \frac{7}{4}$.

❖ من أجل كل $k \in \mathbb{R}$، $(4+k)^2 = \frac{7}{4}$ تعني $16+8k+k^2 = \frac{7}{4}$ أي $k^2+8k+\frac{57}{4}=0$. هذه المعادلة تقبل حلين هما: $k_1 = -4-\frac{\sqrt{7}}{2}$ و $k_2 = -4+\frac{\sqrt{7}}{2}$.

❖إذن الدالة f عند 4 أي على $\mathbb{R}$ عندما يكون $\boxed{k \in \left\{-4-\frac{\sqrt{7}}{2}; -4+\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}}$.

حل التمرين 6:

(1

❖الدالة: $x \to \sqrt{x^2+x+2}$ هي دالة مركبة من الدالة f المعرفة على D_f بـ: $f(x) = x^2+x+2$ متبوعة بالدالة g المعرفة على D_g بـ: $g(X) = \sqrt{X}$ ونرمز لها بـ: $g \circ f$.

❖لكي تكون الدالة $g \circ f$ معرفة يجب أن يكون: $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$.

❖الدالة f هي دالة كثيرة حدود إذن فهي معرفة ومستمرة على $D_f = \mathbb{R}$. (1)

❖الدالة g هي الدالة "جذر مربع" ومنه فإن الدالة g معرفة ومستمرة على $D_g = \mathbb{R}^+$.

- لنتأكد إن كان من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \in \mathbb{R}^+$.
- Δ مميز كثير الحدود x^2+x+2 و $\Delta = -7$، وبما أن $\Delta < 0$، فإن: كثير الحدود x^2+x+2 ليس له حلول وإشارته تكون إشارة الحد الأكبر له (x^2).

❖ومنه فإن: $f(x) > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ أي $f(x) \in D_g$ مع $D_g = \mathbb{R}^+$. (2)

❖من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } x \to \sqrt{x^2+x+2} \text{ معرفة ومستمرة على } \mathbb{R}}$.

2)الدالة u معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & x \neq 1 \\ \frac{3}{4} & x = 1 \end{cases}$.

❖دراسة استمرارية الدالة u على $\mathbb{R}-\{1\}$.

- من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{1\}$، $u(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$.
- الدالة u هي حاصل قسمة دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ (السؤال الأول) أي على $\mathbb{R}-\{1\}$، والدالة التآلفية $x \to x-1$ الغير معدومة والمستمرة على $\mathbb{R}$ أي على $\mathbb{R}-\{1\}$.

ومنه فإن: الدالة u مستمرة على $\mathbb{R}-\{1\}$. (3)

❖دراسة استمرارية الدالة u عند 1.

●من أجل كل $x \neq 1$ لدينا:

$$u(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$$

● Δ مميز كثير الحدود x^2+x-2 و $\Delta=9$، وبما أن $\Delta>0$، فإن: كثير الحدود x^2+x-2 له حلان هما: $x_1=-2$ و $x_2=1$.

●بعد تحليل كثير الحدود x^2+x-2 في البسط نحصل على: من أجل كل $x \neq 1$،

$$u(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2}.$$

● من جهة أخرى لدينا: الدالتان $x \to x+2$ و $x \to \sqrt{x^2+x+2}+2$ مستمرتان عند 1 ومنه فإن:

$\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$ و $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)=4$ أي أن $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2}\right)=\frac{3}{4}$.

وبما أن $u(1)=\frac{3}{4}$، فإن: $\lim\limits_{x\to 1}u(x)=u(1)$، ومنه فإن: الدالة u مستمرة عند 1. (4)

❖من (3) و(4) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } u \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 7:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

1)دراسة استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}^*$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$، الدالة f هي جداء الدالة "مربع" ودالة مركبة من الدالة "مقلوب" متبوعة بالدالة "sinus"، وكل هذه الدوال مستمرة على $\mathbb{R}^*$. ومنه فإن: الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$. (1)

2)دراسة استمرارية الدالة f عند 0.

❖من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$، $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$ ومنه بضرب طرفي المتراجحة بـ: $x^2>0$ نتحصل على

$x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq x^2$،

❖ وبما أن $x^2>0$ فإن: $x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le x^2$ أي $0\le\left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le x^2$

وهذا يعني أن $0\le|f(x)|\le x^2$. وبما أن $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$، فإنه بتطبيق الحصر على النهايات عند 0، نستنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$ ومنه فإن: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

وبما أن $f(0)=0$ فإن: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$. وهذا يعني أن الدالة f مستمرة عند 0. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة على } \mathbb{R}}$.

حل التمرين 8:

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

x	-5	a	2	4
f	7 ↘	1	↘ -3 ↗	0

❖ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[-5;2]$ وتأخذ قيمها في $[-3;7]$. وبما أن $1\in[-3;7]$ فإن: المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $[-5;2]$. (1)

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[2;4]$ وتأخذ قيمها في $[-3;0]$. وبما أن $1\notin[-3;0]$ فإن: المعادلة $f(x)=1$ ليس لها حلول في المجال $[2;4]$. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=1 \text{ تقبل حلا وحيدا } a \text{ في المجال } [-5;4]}$.

حل التمرين 9:

x	-5	a	-1	0	10
f	-8 ↗	-5	↗ 0 ↘	-2 ↗	5

❖ المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $[-5;10]$.

x	-5		-1		0		10
f	-8 ↗	-1	0 ↘	-1	-2 ↗	-1	5

❖ المعادلة $f(x)=-1$ تقبل 3 حلول في المجال $[-5;10]$.

❖ من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة f لها قيمة حدية قصوى هي 5، ومنه فإن: المعادلة $f(x)=7$ لا تقبل حلول في المجال $[-5;10]$.

x	-5	-1	0	a	10
f	-8 ↗	0 ↘	-2 ↗	3	5

❖ المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $[-5;10]$

حل التمرين 10:

f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x)=x^2-3x+1$. والشكل الموالي هو جدول تغيراتها.

x	0		$\frac{3}{2}$		5
f	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	11

1)من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن:

❖الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ وتأخذ قيمها من المجال $\left[-\frac{5}{4};1\right]$. و لدينا: $8\notin\left[-\frac{5}{4};1\right]$

ومنه فإن: المعادلة $f(x)=8$ ليس لها حلول في المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. (1)

❖الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2};5\right]$ وتأخذ قيمها من المجال $\left[-\frac{5}{4};11\right]$. ولدينا:

$8\in\left[-\frac{5}{4};11\right]$ ومنه فإن: المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{3}{2};5\right]$. (2)

❖من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=8 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ في المجال } [0;5]}$.

2)يمكن ملأ جدول القيم كالتالي:

x	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
f(x)	5	5,51	6,04	6,59	7,16	7,75	8,36	8,99	9,64	10,31	11

❖لدينا: $f(4,5)=7,75<8$ و $f(4,6)=8,36>8$، وبما أن الدالة f متزايدة فإن: $\boxed{\alpha\approx 4,5}$.

3)لإيجاد القيمة الحقيقية لـ α، يجب حل المعادلة $f(x)=8$ حسابيا. لدينا:

$f(x)=8 \Leftrightarrow x^2-3x+1=8 \Leftrightarrow x^2-3x-7=0$. نحسب المميز: $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-7)=37>0$

ومنه فإن: كثير الحدود x^2-3x-7 له جذران هما: $x_1=\frac{3-\sqrt{37}}{2}<0$ و $x_2=\frac{3+\sqrt{37}}{2}>0$.

ومنه فإن: $\boxed{\alpha=\frac{3+\sqrt{37}}{2}}$.

حل التمرين 11:

الدالة f معرفة على المجال $[0;3]$ بـ: $f(x)=x^3-5x^2+7x-2$.

(1

$$(x-1)^2(x-3)=(x^2-2x+1)(x-3)=x^3-3x^2-2x^2+6x+x-3$$

أي $\boxed{(x-1)^2(x-3)=x^3-5x^2+7x-3}$.

(2

$$f(x)=1\Leftrightarrow x^3-5x^2+7x-2=1\Leftrightarrow x^3-5x^2+7x-3=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)=0$$

أي $x-1=0$ أو $x-3=0$ أي $x=1$ أو $x=3$.

وبما أن الدالة f معرفة على $[0;3]$، فإن: $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=1 \text{ لها حلان هما 1 و 3 في المجال } [0;3]}$.

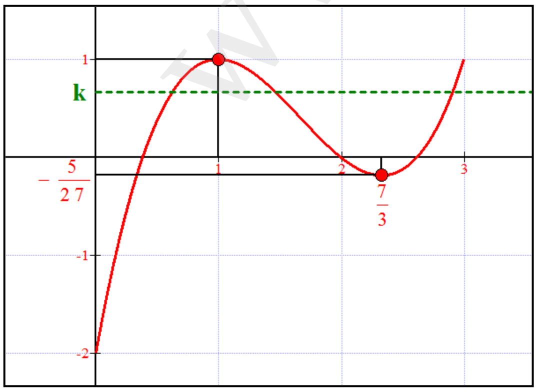
(3

x	0		1		$\frac{7}{3}$		3
f	-2	↗	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗	1

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستطيع القول أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;1]$ و $\left[\frac{7}{3};3\right]$، ومتناقصة تماما على $\left[1;\frac{7}{3}\right]$. ومنه فإنه في المجال $[0;3]$:

- ❖ عندما يكون $k>1$، المعادلة $f(x)=k$ ليس لها حلول.
- ❖ عندما يكون $k=1$، المعادلة $f(x)=k$ لها حلان هما 1 و 3. (السؤال 2).
- ❖ عندما يكون $-\frac{5}{27}<k<1$، المعادلة $f(x)=k$ لها 3 حلول.
- ❖ عندما يكون $k=-\frac{5}{27}$، المعادلة $f(x)=k$ لها حلان.
- ❖ عندما يكون $-2\leq k<-\frac{5}{27}$، المعادلة $f(x)=k$ لها حل وحيد.
- ❖ عندما يكون $k<-2$، المعادلة $f(x)=k$ ليس لها حلول.

الشكل الموالي يبين صحة النتائج المتحصل عليها.



حل التمرين 12:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+1 & x\le 0\\ ax+b & 0<x<2\\ x^2-6x+4 & x\ge 2\end{cases}$،

❖ على المجال $]-\infty;0]$ الدالة f معرفة بـ: $f(x)=-x^2-2x+1$. أي أن الدالة f هي كثيرة حدود، ومنه فإن تمثيلها البياني هو جزء من قطع مكافئ ينتهي بالنقطة $A(0;f(0))$ أي $A(0;1)$.

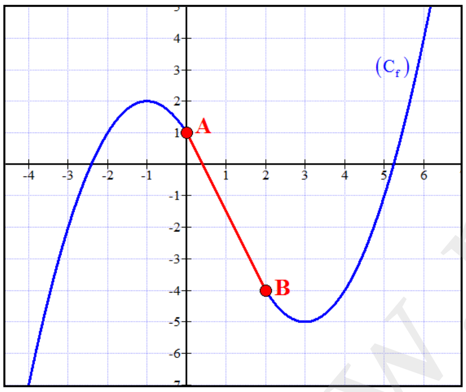
❖ على المجال $[2;+\infty[$ الدالة f معرفة بـ: $f(x)=x^2-6x+4$. أي أن الدالة f هي كثيرة حدود، ومنه فإن تمثيلها البياني هو جزء من قطع مكافئ يبدأ بالنقطة $B(2;f(2))$ أي $B(2;-4)$.

❖ على المجال $]0;2[$ الدالة f معرفة بـ: $f(x)=ax+b$. أي أن الدالة f هي دالة تآلفية ومنه فإن تمثيلها البياني هو قطعة مستقيمة.

❖لكي تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$، يجب أن تكون هذه القطعة المستقيمة هي $]AB[$، ما يسمح برسم التمثيل البياني للدالة f دون رفع القلم من الورقة.

●من أجل $x=0$، يجب أن يكون $ax+b=1$ أي $a\times 0+b=1$ وهذا يعني أن $b=1$. (1)

●من أجل $x=2$، يجب أن يكون $ax+b=-4$ أي $a\times 2+1=-4$ أي $2a=-5$ وهذا يعني أن $a=-\frac{5}{2}$. (2)



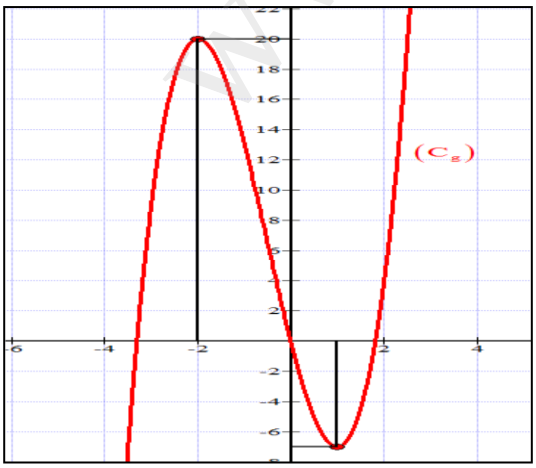
❖من (1) و(2) نستنتج أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ عندما يكون $a=-\frac{5}{2}$ و $b=1$.

❖يمكن التأكد من ذلك برسم التمثيل البياني للدالة f مع وضع $a=-\frac{5}{2}$ و $b=1$.

حل التمرين 13:

الدالة g معرفة على المجال $[-4;3]$ بـ: $g(x)=2x^3+3x^2-12x$، وجدول تغيراتها هو كالتالي:

x	-4		-2		1		3
g	-32	↗	20	↘	-7	↗	45



1) التمثيل البياني للدالة g موضح في الشكل المقابل.

2) المعادلة $2x^3+3x^2-12x+8=0$ يمكن كتابتها كالتالي: $2x^3+3x^2-12x=-8$ أي $g(x)=-8$.

❖ من خلال جدول تغيرات الدالة g نستطيع القول أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[-4;-2]$، وتأخذ قيمها من $[-32;20]$. وبما أن $-8\in[-32;20]$ فإن: المعادلة $g(x)=-8$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-4;-2]$. (1)

❖ من خلال جدول تغيرات الدالة g نستطيع القول أن الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]-2;1[$، وتأخذ قيمها من $[-7;20]$. وبما أن $-8\notin[-7;20]$ فإن: المعادلة $g(x)=-8$ ليس لها حلول على المجال $]-2;1[$. (2)

❖ من خلال جدول تغيرات الدالة g نستطيع القول أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[1;3]$، وتأخذ قيمها من $[-7;45]$. وبما أن $-8\notin[-7;45]$ فإن: المعادلة $g(x)=-8$ ليس لها حلول على المجال $[1;3]$. (3)

❖ من (1)، (2) و(3) نستنتج أن المعادلة $g(x)=-8$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-4;3]$، حيث: $\alpha\in[-4;-2]$.

3) إعطاء قيمة لـ α بتقريب 10^{-2}.

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة بين $[-3,7;-3,4]$ نتحصل على $-3,6<\alpha<-3,5$.

x	-3,7	-3,6	-3,5	-3,4
f(x)	-15,836	-11,232	-7	-3,128

❖ بأخذ قيم لـ x محصورة بين $[-3,56;-3,51]$ نتحصل على $-3,53<\alpha<-3,52$.

x	-3,56	-3,55	-3,54	-3,53	-3,52	-3,51
f(x)	-9,4952	-9,0703	-8,6489	-8,2313	-7,8172	-7,4068

❖ ومنه فإن: $\boxed{\alpha\approx-3,52}$.

حل التمرين 14:

الدالة f مستمرة على المجال $[0;1]$، ومن أجل كل x من $[0;1]$ لدينا $f(x)\in[0;1]$.

❖ لنعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ: $g(x)=f(x)-x$.

❖ الدالة g هي فرق الدالة f المستمرة على $[0;1]$ والدالة التآلفية $x\to x$ المستمرة على $\mathbb{R}$ أي على $[0;1]$، ومنه فإن: الدالة g مستمرة على $[0;1]$.

❖ ولدينا: $g(0)=f(0)-0=f(0)$، وبما أنه من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا $0\le f(x)\le 1$، فإن: $0\le f(0)\le 1$ أي $g(0)\ge 0$. (1)

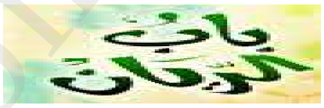
❖ولدينا: $g(1)=f(1)-1$، وبما أنه من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا $0\le f(x)\le 1$، فإن: $-1\le f(1)-1\le 0$ أي $g(1)\le 0$. (2)

❖من (1) و(2) نستنتج أن $0\in[g(1);g(0)]$، وبتطبيق قاعدة القيم المتوسطة فإن: $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$.

❖ومنه فإن: $\boxed{\text{المعادلة } f(x)=x \text{ تقبل على الأقل حلا في المجال } [0;1]}$.

رياضيات
سلسلة 2
2016-2017
المستوى
3 ع ت - 3 ع د
إعداد الأستاذ
مراد لحسن

الاستمرارية



قال رسول الله صلى الله عليه و سلم

قال الإمام أحمد

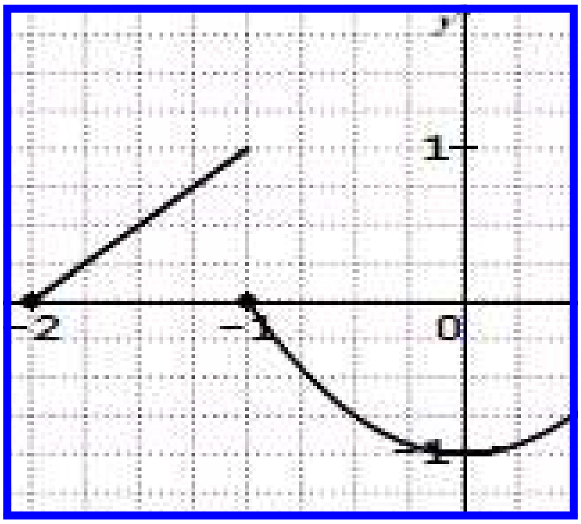
هل تعلم ؟
إذا حفظت في اليوم 3 آيات من القرآن الكريم فإنك ستحفظ القرآن كله في مدة 5 سنوات و 10 أشهر و 13 يوما

وقل رب زدني علما

ما يجب على الطالب أن يعرف

1- معنى استمرارية دالة عند نقطة.
2- معنى استمرارية دالة (من اليسار و من اليمين) و على مجال.
3- التعرف على دالة مستمرة.
4- التعرف على دالة غير مستمرة
5- معرفة نظرية **Bolzano** .
6- معرفة نظرية القيم المتوسطة.
7- معرفة طريقة **Dichotomie**

http://bacsuc.blogspot.com

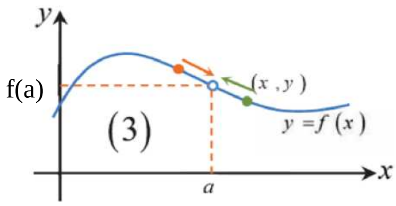


تذكر
ان لدرس الاستمرار
علاقة وثيقة
بدرس النهايات

1- استمرارية دالة عند قيمة a

fمعرفة على مجال مفتوح يشمل a
f مستمرة عند a إذا كانت :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



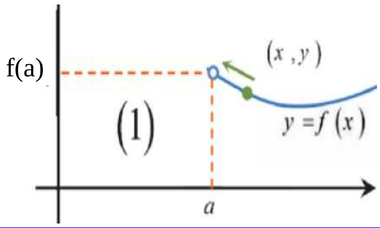
انتبه

إذا كانت f مستمرة عند a فإن $a \in D_f$

2- استمرارية دالة عند a من اليمين

fمعرفة على مجال من الشكل: $[a;a+h[$
f مستمرة عند a من اليمين إذا كانت :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

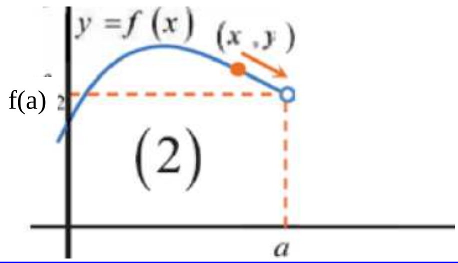


3- استمرارية دالة عند a من اليسار

f معرفة على مجال من الشكل: $]a-h;a]$

f مستمرة عند a من اليسار إذا كانت :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$



سجل

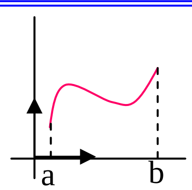
- تكون الدالة f مستمرة عند a إذا كانت مستمرة عند a من اليمين و من اليسار.

استمرارية دالة على مجال

- f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من هذا المجال .
- f مستمرة على المجال المغلق $[a;b]$ إذا كانت :
  - مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$
  - مستمرة عند a على اليمين.
  - مستمرة عند b على اليسار.
- استنتج شروط الاستمرار على المجالين: $]a;b]$, $[a;b[$

لاحظ

إذا كانت f مستمرة على المجال $[a;b]$ فإن منحناها البياني هو خط غير منقطع على طول هذا المجال.



سؤال: كيف اثبت أن دالة مستمرة على مجال تعريفها؟

الجواب : تذكر أن

كل الدوال التالية مستمرة على مجال تعريفها:

- كثيرات الحدود (مستمرة على R)
- الناطقة.
- الجذرية.
- المثلثية.
- الأسية .
- اللوغارتمية.

حل المعادلة: f(x)=0

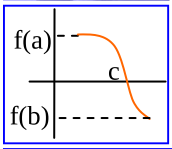
نظرية Bolzano

إذا كانت **f** دالة مستمرة على $[a\,;b]$

و كان $f(a)\times f(b)\prec 0$

فإنه يوجد على الأقل $c\in\,]a\,;b[$

بحيث: **f(c)=0**



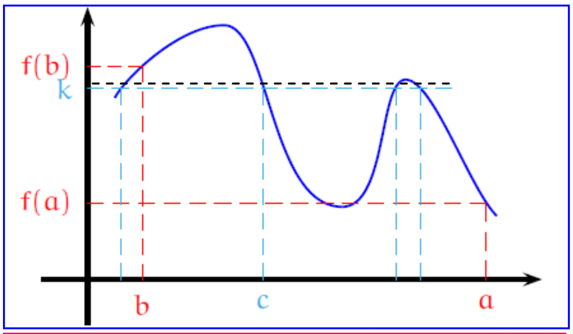
حل المعادلة: f(x)=k

نظرية القيم المتوسطة

إذا كانت **f** دالة مستمرة على $[a\,;b]$

و **f(a)≠f(b)** فإنه من أجل كل عدد **k** محصور بين **f(a)** و **f(b)** يوجد على الأقل $c\in\,]a\,;b[$

يحقق : **f(c)=k**

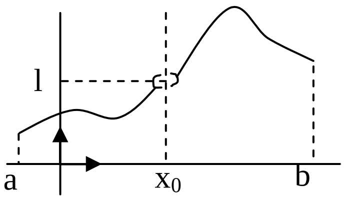


سؤال: كيف استنتج أن دالة مستمرة عند a ؟

اذا كانت كلا من الدالتين f و g مستمرتين عند a فإن :

1. k.f مستمرة عند a (k عدد حقيقي)
2. f+g مستمرة عند a (وكذلك f-g)
3. **f.g** مستمرة عند a
4. **f /g** مستمرة عند a إذا كان g(a)≠0 و غير مستمرة إذا كان g(a)=0
5. إذا كانت g مستمرة عند a و كانت f مستمرة عند g(a) فإن fog مستمرة عند a

امتداد دالة بالاستمرار



الدالة **f** ليست مستمرة على المجال $]a\,;b\,]$

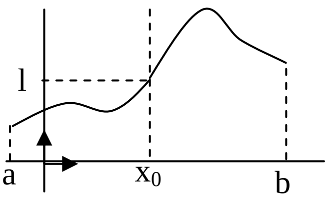
لأنها ليست مستمرة عند x_0

لنبحث عن شروط تجعل الدالة f مستمرة على $[a\,;b\,]$

الدالة **g** المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=f(x)\,,\ x\neq x_0 \\ g(x_0)=l \end{cases}$$

مستمرة على $[a\,;b\,]$

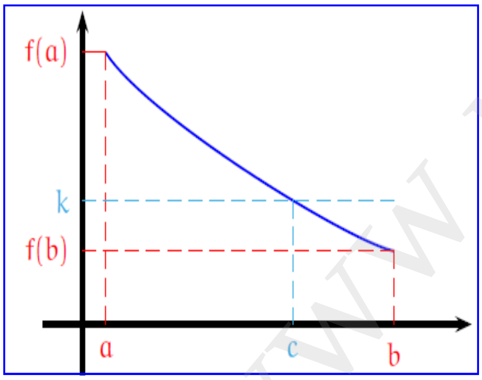


تسمى الدالة g امتداد للدالة f بالاستمرار عند x_0

الحل الوحيد للمعادلة : f(x)=k

f مستمرة و رتيبة تماما على $[a\ ;\ b\ ]$

من أجل كل عدد حقيقي **k** محصور بين **f(a)** و **f(b)** المعادلة **f(x)=k** تقبل حل وحيد **c** في المجال $[a\ ;\ b\ ]$



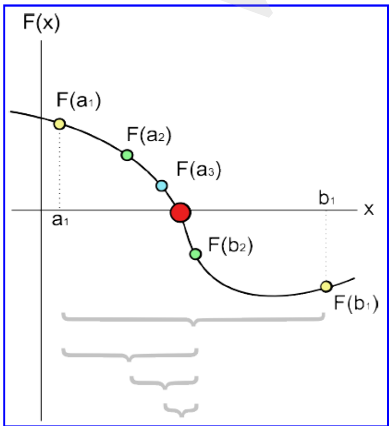
طريقة Dichotomie (خوارزمية البحث عن الصفر لدالة)

(1 نبدأ بفاصلتين **a** و **b** تحصران الصفر.

(2 في كل مرة نقسم المجال $[a\,;b\,]$ إلى نصفي مجالين $[a;c]\ [c\,;b]$

c=(a+b)/2 هو منتصف المجال $[a\,;b\,]$

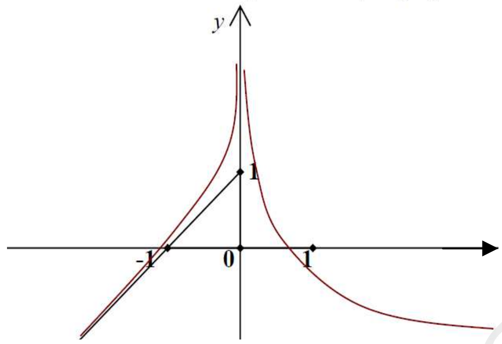
(3 نحافظ على نصف المجال الذي يحتوي الصفر ثم نقسمه إلى نصفي مجالين , و نواصل بنفس الطريقة حتى نحصل على حصر أصغر ما يمكن.



النجاح عمل وجد وتضحية وصبر، ومن منح طموحه صبراً وعملاً وجداً، حصد نجاحاً وثماراً .. فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقق النجاح والطموح والهدف .. فمن جدّ وجد ومن زرع حصد.
وقل من جد في أمر يحاوله * * * وأستعمل الصبر إلا فاز بالظفر

تمرين 1

المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد متجانس. (C_f)



1. حدد D_f
2. حدد النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

3. هل f مستمرة عند 0 ؟
4. حدد النهايات التالية :

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)-x$$

تمرين 2

f دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-2} & ;x\ge 2 \\ f(x)=x^2+kx+1 & ;x\prec 2 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي k حتى تكون الدالة f مستمرة عند العدد 2

تمرين 3

f دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+kx+1 & ;x\succ -1 \\ f(x)=\dfrac{x+1}{x-2} & ;x\le -1 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي k حتى تكون الدالة f مستمرة على: R

تمرين 4

fدالة معرفة على $R-\{2\}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & ;x>3 \\ \dfrac{1-x}{x-2} & ;x\le 3 \end{cases}$$

1. احسب f(3) و $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ ثم ادرس الاستمرار عند 3
2. اثبت أن المعادلة f(x)=-0.5 تقبل حل وحيد في المجال: $]-1;1[$ فسر ذلك هندسيا .

تمرين 5

f دالة معرفة و مستمرة على R جدول تغيراتها معطى :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

1. بين أن المنحنى البياني للدالة لا يقطع حامل محولر الفواصل.
2. بين أن المعادلة f(x)-2=0 تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

تمرين 6

f دالة معرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1 & ;x\le 2 \\ f(x)=\dfrac{x+1}{x-2} & ;\ x\succ 2 \end{cases}$$

1. ادرس استمرارية الدالة f عند 2
2. هل الدالة f مستمرة على R علل .

تمرين 7

f دالة معرفة بالعبارة:

$$f(x)=2x^3-3x^2-1$$

1. برر استمرارية f على R
2. احسب النهايات عند +∞ و -∞
3. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها.
4. اثبت أن المعادلة f(x)=0 تقبل حل وحيد α في المجال
$$]1.6\,;1.7[$$
استنتج حسب قيم x إشارة f(x)
5. عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2}

تمرين 8

f دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1} & ,\ x\ge 1 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+1 & ,\ x<1 \end{cases}$$

ادرس استمرارية f على R

تمرين 9

f دالة معرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1} & ;x\ne 1 \\ f(x)=b & \end{cases}$$

عين قيمة العدد b حتى تكون f مستمرة على R

تمرين 10 f دالة معرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & ; x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

1. احسب : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
ثم فسر النتيجة هندسيا.
2. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون f مستمرة عند 0

تمرين 11 f دالة معرفة على Rبجدول تغيراتها المعطى :

x	$-\infty$	-3	-2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↘	-3 ↗	$+4$ ↘	3

ما هو عدد حلول المعادلة : f(x)=0 ؟

تمرين 12 f دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1} ; x\neq 1 ; x\neq -1 \\ f(-1)=3 \end{cases}$$

- عين مجموعة التعريف
- ادرس استمرارية عند -1

تمرين 13 f دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+4} ; x\succ 0 \\ f(x)=\sqrt{2x^2+1} ; x\leq 0 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0

تمرين 14 f دالة معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{|x-1|}{x-1} ; x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

1. عين مجموعة التعريف
2. ادرس استمرارية f على مجموعة تعريفها.

تمرين 15 f دالة معرفة على R كما يلي: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$

عين الأعداد الحقيقية d;c;b;a بحيث :

- المنحنى (C_f) يشمل النقطة A(0;4)
- المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ معادلته y=2x+3
- المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته x=1

تمرين 16 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم .

1. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة y=2x+3 مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
2. ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

تمرين 17 f دالة معرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=|x^2-1|+\alpha ; x\leq 0 \\ f(x)=x-\alpha+\beta ; x\succ 0 \end{cases}$$

اوجد علاقة بين α و β حتى تكون f مستمرة على R

مســألـــــــة

الجزء 1:

f دالة معرفة على R كما يلي:

$$f(x)=x^3-3x+5$$

و (C_f) تمثيلها البياني .

1. ادرس تغيرات الدالة f على R
2. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث -3<α<-2.
3. استنتج إشارة f(x) على R
4. جد حصرا للعدد α بتقريب 10^{-2}

الجزء 2:

g دالة معرفة على R كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$$

1. ادرس تغيرات الدالة g
2. أ) اثبت أن:

$$g(\alpha)=\frac{-3\alpha(\alpha-5)}{4}$$

ب) جد حصر لـ g(α) ثم استنتج عدد جذور g(x)

بالتوفيق في شهادة الباكالوريا انشاء الله