Урок 1 (14.09.18)

1.1 Комплексные числа

Введём обозначение для комплексного числа:

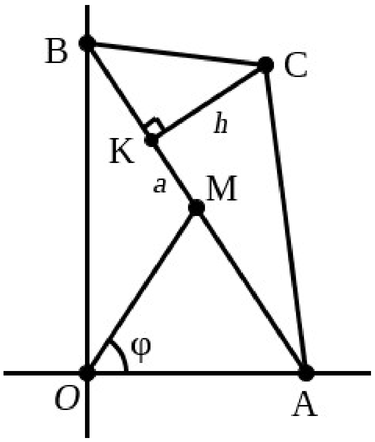
$$e^{i\varphi} := cos\varphi + isin\varphi$$

Комплексные числа могут оказаться полезными при решении задач в координатах. Покажем это на следующей задаче:

Задача Точки A и B движутся по прямым a и b так, что расстояние между ними постоянно. Необходимо доказать, что траектория точки C эллипс, если треугольник ABC прямо подобен некоторому треугольнику PQR.

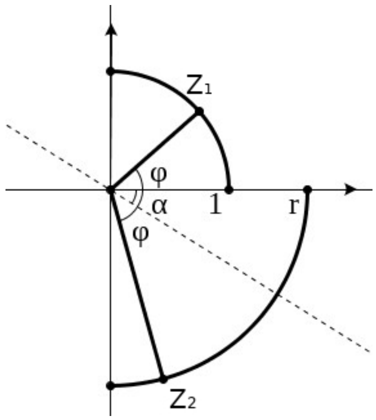
Решение Для начала решим задачу для перпендикулярных прямых a и b. Пусть O — точка пересечения a и b. Если C является серединой AB, то её траектория — окружность, потому что OC постоянно и равно $\frac{1}{2}AB$ как медиана прямоугольного треугольника OAB.

Обозначим середину AB как M, K — основание перпендикуляра к AB из точки C, a — расстояние от M до K, b — отношение длины CK к a.



$$\overrightarrow{OM} = e^{i\varphi}$$
$$\overrightarrow{MK} = ae^{i(\pi-\varphi)}$$
$$\overrightarrow{KC} = bae^{i(\pi-\varphi)}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}$$
$$\overrightarrow{OC} = e^{i\varphi} + ae^{i(\pi-\varphi)} + bae^{i(\pi-\varphi)}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$\overrightarrow{OC} = e^{i\varphi} - ae^{-i\varphi} + ibae^{-i\varphi}$$
$$\overrightarrow{OC} = \underbrace{e^{i\varphi}}_{z_1} + \underbrace{re^{i\alpha}e^{-i\varphi}}_{z_2},$$

где $re^{i\alpha} = -a + iab$

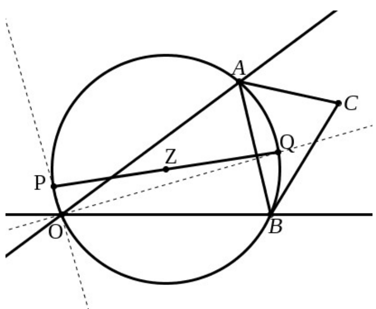


Повернем систему координат так, чтобы ось OX была бисектрисой угла α.

$$\overrightarrow{OC} = e^{i\varphi} + re^{-i\varphi}$$
$$\overrightarrow{OC} = cos\varphi + rcos\varphi + i(sin\varphi - rsin\varphi)$$
$$\overrightarrow{OC} = (1+r)cos\varphi + i(1-r)sin\varphi$$

Замечаем, что мы получили уравнение окружности, сжатой к оси абсцисс в $\frac{1-r}{1+r}$ раз.

Решим теперь задачу для неперпендикулярных a и b.



Описанная окружность треугольника OAB имеет постоянный радиус по теореме синусов для угла $\angle AOB$.
Построим радиус PQ. $\angle AOQ = 0.5\angle AZQ$ будет постоянным, значит точка Q будет двигаться по прямой OQ. Аналогично точка P будет двигаться по прямой OP.
Замечаем, что $OP \perp OQ$, а значит мы свели задачу к предыдущей.