

Урок 1 (14.09.18)

1.1 Комплексные числа

Введём обозначение для комплексного числа:

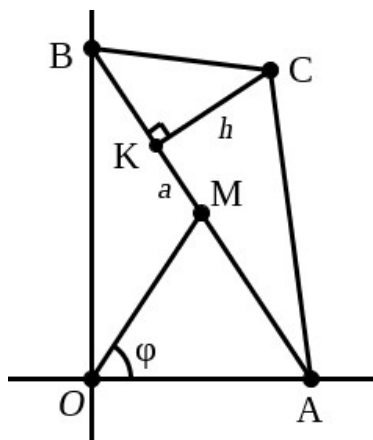
$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Комплексные числа могут оказаться полезными при решении задач в координатах. Покажем это на следующей задаче:

Задача Точки A и B движутся по прямым a и b так, что расстояние между ними постоянно. Необходимо доказать, что траектория точки C эллипс, если треугольник ABC прямо подобен некоторому треугольнику PQR .

Решение Для начала решим задачу для перпендикулярных прямых a и b . Пусть O — точка пересечения a и b . Если C является серединой AB , то её траектория — окружность, потому что OC постоянно и равно $\frac{1}{2}AB$ как медиана прямоугольного треугольника OAB .

Обозначим середину AB как M , K — основание перпендикуляра к AB из точки C , a — расстояние от M до K , b — отношение длины CK к a .



$$\overrightarrow{OM} = e^{i\varphi}$$

$$\overrightarrow{MK} = ae^{i(\pi-\varphi)}$$

$$\overrightarrow{KC} = bae^{i(\pi-\varphi)}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

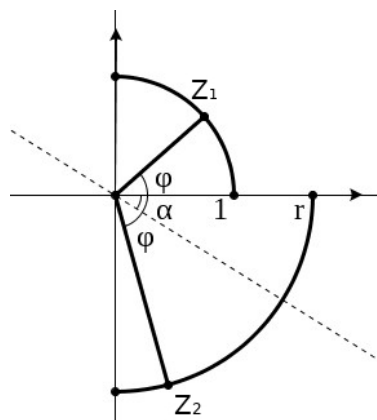
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}$$

$$\overrightarrow{OC} = e^{i\varphi} + ae^{i(\pi-\varphi)} + bae^{i(\pi-\varphi)}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\overrightarrow{OC} = e^{i\varphi} - ae^{-i\varphi} + ibae^{-i\varphi}$$

$$\overrightarrow{OC} = \underbrace{e^{i\varphi}}_{z_1} + \underbrace{re^{i\alpha}e^{-i\varphi}}_{z_2},$$

$$\text{где } re^{i\alpha} = -a + iab$$



Повернем систему координат так, чтобы ось OX была бисектрисой угла α .

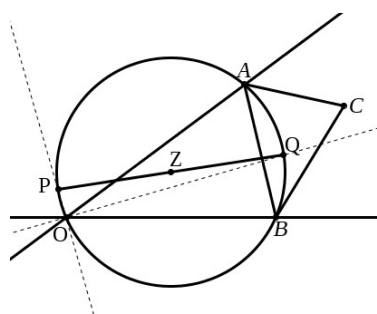
$$\vec{OC} = e^{i\varphi} + re^{-i\varphi}$$

$$\vec{OC} = \cos\varphi + r\cos\varphi + i(\sin\varphi - r\sin\varphi)$$

$$\vec{OC} = (1+r)\cos\varphi + i(1-r)\sin\varphi$$

Замечаем, что мы получили уравнение окружности, сжатой к оси абсцисс в $\frac{1-r}{1+r}$ раз.

Решим теперь задачу для неперпендикулярных a и b .



Описанная окружность треугольника OAB имеет постоянный радиус по теореме синусов для угла $\angle AOB$.

Построим диаметр PQ . $\angle AOQ = 0.5\angle AZQ$ будет постоянным, значит точка Q будет двигаться по прямой OQ . $\angle POQ$ постоянный и равен 90° . Т.к. точка Q движется по прямой OQ , то точка P будет двигаться по прямой OP , перпендикулярной OQ . Замечаем, что $OP \perp OQ, PQ = const$, а значит мы свели задачу к предыдущей.