数学ZM

駿台数学科編

2022 後期

R 20051

数学 ZM

駿台数学科編

2022　後期

学内限り　駿台予備学校

◆◇ はじめに ◇◆

このテキストは，国公立大医学部および難関私立大医学部を目指す人のために編集された，主として数学Ⅲの演習を行うテキストです．

秋から冬にかけては，それまでに培った基礎力を実戦力に高めるためのトレーニングを行う時期です．そして，君たちには，医学部という確固たる目標があるのですから，それは，単に理系としての実戦力ではなく，医学部入試に向けての実戦力でなければなりません．そのため，このテキストでは，医学部入試でよく出題されるテーマや出題数はそれほど多くなくとも点差がつきやすいテーマ，および医学部入試の動向から見て今後の出題の増加が予想されるテーマに的を絞って演習をしていきます．要するに，医学部に出るものと差がつくものを多くやろうというのがこのテキストの編集方針です．

各問題の中心テーマは内容の紹介にあるとおりですが，医学部入試に対応するために総合問題・融合問題も取り入れたため，複数のテーマを持つ問題も多く，分類はおおざっぱで，数学Ⅰ，数学A，数学Ⅱ，数学Bの色が強いものも含まれています．なお，前期教材で学んだ内容に関連する問題については前で参照問題番号を記しておきましたので，予習・復習の際の一助としてください．

前期の間はわかることが重要でしたが，入試で解答をかくのは他ならぬ君たち自身なのですから，後期は自らの手を動かして問題が解けるようにならなければなりません．ですから，学習の方法も復習よりも予習を中心にできるようにシフトしていくのが理想的です．まず身についている力で問題を解いてみる，歯が立たなかったときは前期教材に戻って確認しもう一度問題を考えてみる，授業によって再確認し復習によって定着させる，というようにこのテキストを有効に活用して学力を伸ばし，医学部入試を突破できる力をつけてもらいたいと思います．がんばってください．

◆◇ 内容の紹介 ◇◆

Section 1

(101) ~ (102) 関数の極限

(103) ~ (117) 微分法とその応用

(118) ~ (122) 定積分と数列

§1

(101) 関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a，b，c は定数で，$a>0$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ が x の連続関数となるための定数 a，b，c の条件を求めよ．

(2) 定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たすとき，関数 $f(x)$ の最大値とそれを与える x の値を，a を用いて求めよ．

(3) 定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たし，関数 $f(x)$ の最大値が $\dfrac{5}{4}$ であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

(102) n を自然数とする．次の各問いに答えよ．

(1) $0<x<2\pi$ のとき，$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$ を示せ．

(2) $n\geqq 3$ とする．中心 O，半径 r の円周上に n 個の点 P_1，P_2，……，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_0$ が順番に並んでおり，$\angle\mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k-1}=k\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ を満たしているものとする．このとき，多角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\cdots\mathrm{P}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

(103) 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f(x) = \log x - \sqrt[n]{x}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，関数 $f(x)$ の極大値と曲線 $y = f(x)$ の変曲点がそれぞれ 1 つずつあることを示せ.

(2) (1) の極大値を与える x の値を a_n，変曲点の x 座標を b_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ.

(104) 関数 $f(x)=\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{1}{x^2}$ について以下の各問いに答えなさい．ただし，a は正の定数で，$f(x)$ の定義域は $x>1$ とする．

(1) $f(x)$ が $x=2$ で極値をとるとする．$f(x)$ の極値を与える x のうち，$x=2$ と異なるものを求めよ．

(2) $f(x)$ が極値をもたないための a に関する必要十分条件を求めよ．

(105) e を自然対数の底とする．関数 $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $g(x)=(1+e^x)^2f'(x)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)$ を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてよい．

(2) $f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ．

(106) 正の実数 t に対して，直線 $l_t : y = tx$ との距離が 1 で y 切片が正の直線を m_t とする．また，a を正の定数とし，l_t 上の 2 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ at)$ から m_t へそれぞれ垂線をひく．この 2 本の垂線と直線 l_t，m_t で囲まれた長方形と，第 1 象限との共通部分の面積を $S_a(t)$ とする．

(1) $S_a(t)$ を求めよ．

(2) $a = \dfrac{4}{5}$ のとき，$S_a(t)$ の最小値を与える t の値を求めよ．

(107) 長方形ABCDの紙がある．ABの中点をMとし，AとBが重なるように直線CM, DMにそって紙を折り曲げて三角錐の形の容器を作る．AB $= a$，BC $= b$ とする．

(1) 容器ができるためには，a と b はどのような関係を満たしていなければならないか．

(2) 長方形の面積 ab が一定であるとする．この容器の容積が最大になるときの a と b の関係を求めよ．

(108) 座標平面上で曲線 C：$y=\sqrt{x}$ $(x>0)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(a,\ b)$ $(a>0)$ を与えたとき，この点を通る曲線 C の接線が存在するための $a,\ b$ が満たすべき条件を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ から曲線 C 上の点 $(t,\ \sqrt{t})$ における接線への垂線の長さ $L(t)$ を求めよ．

(3) 関数 $L(t)$ $(t>0)$ の最小値を求めよ．

(109) Oを原点とする xy 平面上において，直線 l が点 A(1, 2) を通り，x 軸および y 軸とそれぞれの正の部分で交わっている．l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とし，$\angle\mathrm{QPO} = \theta$ とおく．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\triangle\mathrm{QPO}$ の周の長さ L を θ を用いて表せ．

(2) θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の間を動くとき，L の最小値を求めよ．

(110)　曲線 $y = e^x$ と直線 $y = ax + b$ が交点をもたないような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x - kx) = \infty$ (k は実数) および $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を証明なしで用いてよい．

(111) 関数 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものは 1 本しかないことを示し，その接線の方程式を求めよ．

(112) 次の問いに答えよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい．

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\ ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ．

(113) 以下の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，

$$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n}\sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$ を求めよ．

(114) a を正の定数とする．不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ．

前 ZS(116)

(115) $a \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ とし，n は自然数とする．次の不等式を示せ．

(1) $0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2}$

(2) $a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3) $e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2n}$

(116) 以下の問いで対数は自然対数であり，e はその底である．

(1) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ $(x > 0)$ を示せ．

(2) (1) の不等式を用いて $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t}$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\{\log(x+1)\}^2 - (\log x)^2]$ の値を求めよ．

(117) 体内に発生する腫瘍の発育を考える．腫瘍は完全な球形であるとし，体積を$V(\mathrm{cm}^3)$，表面積を$S(\mathrm{cm}^2)$，半径を$r(\mathrm{cm})$で表す．時刻はt（年）で表し，腫瘍の発育速度を$\dfrac{dV}{dt}$と定める．また，腫瘍の体積が$2\,\mathrm{cm}^3$を超えると医学検査で検出可能となり，$8\,\mathrm{cm}^3$を超えると治療が不可能となるものとする．腫瘍の体積が$2\,\mathrm{cm}^3$から$8\,\mathrm{cm}^3$まで発育するのに要する時間をTとする．次の問いに答えよ．

(1) 発育速度が$1\,\mathrm{cm}^3/$年で一定とする．腫瘍の半径が$1\,\mathrm{cm}$になった時点における，表面積と半径の増加速度，$\dfrac{dS}{dt}$ $(\mathrm{cm}^2/$年$)$ および $\dfrac{dr}{dt}$ $(\mathrm{cm}/$年$)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 腫瘍が発生した時刻を0とするとき，時刻t（年）における発育速度が
$\dfrac{dV}{dt}=at$ $(\mathrm{cm}^3/$年$)$ で表されるとする．($a>0$は定数である．)腫瘍の半径が$1\,\mathrm{cm}$になった時点における，表面積と半径の増加速度，$\dfrac{dS}{dt}$ $(\mathrm{cm}^2/$年$)$ および $\dfrac{dr}{dt}$ $(\mathrm{cm}/$年$)$ をそれぞれ求めよ．

(3) 発育速度がそれぞれ(1)，(2)であるような2つの腫瘍AとBが，時刻$t=0$に同時に発生したとする．

(i) 腫瘍Aの体積が腫瘍Bの体積を上回っている時刻t（年）の範囲を求めよ．

(ii) 腫瘍BについてT（年）の値を求めよ．

(iii) 1年に一度定期的に医学検査を受けるとする．治療が可能なうちに腫瘍Bが検出できるのは，$a(\mathrm{cm}^3/$年$^2)$の値がどの範囲にあるときか．

(118) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$a_n=\displaystyle\int_0^1(1-x)^n e^x\,dx$ とおき，整数 b_n，c_n を

$$a_n=b_n e+c_n$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) $0\leqq a_n\leqq a_1$ を示せ．

(3) a_{n+1} を a_n で表せ．

(4) b_n を求めよ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}$ を求めよ．

(119) 関数 $f(x)=e^{-x}\left|x-[x]-\dfrac{1}{2}\right|$ に対して,

$$a_n=\int_0^n f(x)\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とおく．ただし記号 $[x]$ は x を越えない最大の整数を表すものとする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲でかけ．グラフの凹凸も調べよ．

(2) a_1 を求めよ．

(3) a_n を n と a_1 を用いて表せ．さらに $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(120) 自然数 n $(n>3)$ について，関数 $f_n(x)$ が

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2-x^4+x^6-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}$$

を満たしている．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,dx<\frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}=\frac{\pi}{4}$ であることを証明せよ．

(121) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ $(n \geqq 1)$ をそれぞれ

$$a_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx,\quad b_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx,\quad c_n = \int_0^1 xe^{-nx}\,dx$$

と定義する.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nb_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc_n$ を求めよ.

(2) 不等式 $0 \leqq b_n - a_n \leqq c_n$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ.

(122) $a>1$ とする．xy 平面上の領域

$$D: 1 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

を，y 軸に平行な $n-1$ 本の直線

$$x = a_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ 1 < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_{n-1} < a)$$

により分割し，D の面積を n 等分する．$a_n = a$ として，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

を求めよ．

Section 2

(201) ～ (208) 定積分に関する問題

(209) ～ (222) 積分法の応用

§2

(201) 関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ を考える.

ただし, $-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする. さらに, $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して,

$$F(a)=\int_0^a f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$$

とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ.

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) $F(a)$ を求めよ.

(202)

(1) 整数 m, n に対して積分 $I_{m,\,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cos kx \right)^2 dx$ を求めよ.

(203) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 (\cos \pi x - ax - b)^2\, dx$ の値を最小にする実数 a，b の値，およびその最小値を求めよ．

ZS(204)

(204) 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を x の連続関数とするとき, $x = \pi - t$ と置換することにより次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^{\pi} (2x - \pi) f(\sin x)\, dx = 0$$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x}\, dx$ を求めよ.

前 ZS(203)

(205) 定数 α が $\alpha < \dfrac{1}{3}$ のとき，定数でない整式 $f(x)$ が次の等式を満たすとする．

$$f(x)f'(x) + \int_1^x f(t)\,dt = \alpha x - \frac{4}{9}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は 2 次以下であることを示せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(206) 関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_a^{2x} f(t)\,dt = xe^x + x\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たすとき，a の値と $f(x)$ を求めよ．

前 ZS(216)，(217)

(207) 次の各問に答えよ.

(1) $(x-1)^2+y^2=1$ $(0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1)$ について, y を x の式で表し, かつ, x を y の式で表せ.

(2) a を $0<a<1$ とし $b=\sqrt{2a-a^2}$ とおくとき,

$$\int_0^a \sqrt{2x-x^2}\,dx+\int_0^b (1-\sqrt{1-x^2})\,dx=ab$$

となることを示せ.

(3) A, B をそれぞれ $0<A<1$, $0<B<1$ とするとき,

$$\int_0^A \sqrt{2x-x^2}\,dx+\int_0^B (1-\sqrt{1-x^2})\,dx \geqq AB$$

となることを示せ.

(208)

(1) $a > 0$ と $0 \leqq t \leqq 1$ を定数とし，$b \geqq a$ の範囲で b を変数として，

$$f(b) = \log(a + t(b-a)) - \log a - t(\log b - \log a)$$

とおく．$f(b) \geqq 0$ を示せ.

(2) $0 < a < b$ とする．$a \leqq x \leqq b$ に対して，$t = \dfrac{x-a}{b-a}$ とおき (1) を利用して，

$$\frac{\log b - \log a}{b-a}(x-a) + \log a \leqq \log x$$

を示せ.

(3) 自然数 $n(\geqq 2)$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\{\log k + \log(k+1)\} \leqq \int_1^n \log x\,dx$ を示せ.

(4) 自然数 $n(\geqq 2)$ に対して，$\log n! \leqq \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\log n - n + 1$ を示せ.

(209) a を実数とし，$f(x)=\dfrac{x^4+(a-2)x^2-2a+2}{x^2+a}$ とする．また，x の方程式 $f(x)=0$ は相異なる 3 個の実数解をもつとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(210) 曲線 $y=e^{ax}$ と曲線 $y=b\log x+c$ がただ1つの点で交わり，その交点で共通の接線をもち，その接線は原点を通るものとする．2曲線，および x 軸，y 軸で囲まれる部分の面積が1であるとき，実数 a，b，c を求めよ．

前 ZS(109)

(211) 関数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めよ．また関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) n を自然数とするとき，直線 $y=2^{-n}$ と曲線 $y=f(x)$ によって囲まれる部分の面積を S_n とする．このとき，S_n を n を用いて表せ．

(3) (2) の S_n について，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)$ を求めよ．

(212) 関数 $y=\log x$ と $y=\dfrac{a}{x^2}$ を考える．ただし，対数は自然対数とし，$a>0$ とする．

(1) 2つの曲線 $y=\log x$ と $y=\dfrac{a}{x^2}$ の交点の x 座標を p とするとき，a を p を用いて表せ．

(2) $y=\log x$，$y=\dfrac{a}{x^2}$，$x=1$，$x=2$ で囲まれる部分の面積 S を p を用いて表せ．

(3) a を動かすとき，S の最小値を求めよ．

前 ZS(207)，(215)

(213) $a>1$ とする．曲線 $y=\tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=ax$ によって囲まれた部分の面積を S とする．極限 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S}{a}$ を求めよ．ただし $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を証明なしに用いてもよい．

前 ZS(207)，(215)

(214) O を原点とする座標平面上の 2 点 $(\cos\theta,\ 0)$，$(0,\ \sin\theta)$ を通る直線がある．この直線に関する原点 O の対称点を P として，θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるとき，点 P の描く曲線を C とする．

以下の設問に答えよ．

(1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，x，y を θ を用いて表せ．

(2) $y\dfrac{dx}{d\theta}$ を，2θ を用いて表せ．

(3) 曲線 C は直線 $y=x$ に関して対称であることを示せ．

(4) 曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(215) xy 平面上に 2 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$ と，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とがある．ただし，$y>0$ とする．$\theta=\angle\mathrm{APB}$ とおく．点 P が $\theta=60^\circ$ を満たしながら動くときの P の軌跡を C_1，また $\theta=120^\circ$ を満たしながら動くときの P の軌跡を C_2 とする．C_1 と C_2 とで囲まれた領域を S とする．ただし，2 点 A，B も S に含めるものとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 点 P の軌跡 C_1，C_2 をそれぞれ x，y の式で表し，領域 S を図示せよ．

(2) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

(216) 次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ の値を求めよ．

(2) 線分 l，曲線 C を

$$l: y=\frac{2}{\pi}x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right), \qquad C: y=\sin x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とする．線分 l と曲線 C とで囲まれた図形を x 軸を中心に 1 回転してできる立体の体積を V，y 軸を中心に 1 回転してできる立体の体積を W とする．このとき，V と W の値を求め，V と W の大小関係を判定せよ．

(217) 座標平面上において，2点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を直径の両端とする円 S，および，直線 $x=1$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ を考える．2点 O，P を通る直線と円 S との交点で，O でない交点を Q とし，線分 OP 上に点 R を $\mathrm{OR}=\mathrm{PQ}$ となるようにとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) OR の長さを t を用いて表せ．

(2) 点 R の座標を t を用いて表せ．

(3) t が $t \geqq 0$ の範囲で変化する．このとき，点 R の軌跡と x 軸および直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

(218) $1<a<b$ とする．原点Oと点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線，原点Oと点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を通る直線，および曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ で囲まれた部分を R とする．R の面積を E，R を直線 $y=-x$ のまわりに1回転させてできる回転体の体積を V とする．

(1) E を a と b の式で表せ．

(2) $c>1$ とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ から直線 $y=-x$ に下ろした垂線を PQ とする．線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2=s^2+2$ となることを示せ．

(3) V を a と b の式で表せ．

(4) $b=a+1$ のとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty}E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V$ を求めよ．

(219)　2つの立体

$$V_1 = \{(x,\ y,\ z) \mid z \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ 1 \leqq (y-1)^2 + z^2 \leqq 2\}$$

$$V_2 = \{(x,\ y,\ z) \mid z \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ 1 \leqq (x-1)^2 + z^2 \leqq 2\}$$

の共通部分の体積を求めよ．

前 ZS(210)，(213)

(220)　座標空間内の 6 点

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right),$$

$$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{E}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

がある．動点 P は A を出発し，B，C，A の順に △ABC の周を一定の速さで一周する．P と同時に動点 Q は E を出発し，F，D，E の順に △DEF の周を P と同じ速さで一周する．線分 PQ が動いて作られる図形と △ABC，△DEF によって囲まれる立体を K とする．

(1) P が線分 AB 上にあり，$\mathrm{AP}=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ のとき，点 Q の座標を t で表せ．

(2) (1) の P，Q に対して，線分 PQ と平面 $z=a$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ との交点 $\mathrm{R}(t)$ の座標を求めよ．

(3) 平面 $z=a$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ による K の切り口の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) K の体積 V を求めよ．

前 ZS(210)，(213)

(221) 原点Oを中心とする半径4の円Cがある．その内側に半径1の円C'が内接している．C'の中心をO$'$とし，点A(4, 0)に対して，∠O$'$OAをθとおく．図1のように$\theta=0$のときから始めて，C'はCに内接しながら，その内側をすべらずに転がる．ここで，C'の回転は点O$'$を中心として時計回りである．図2は∠O$'$OAがθとなった状態である．点PはC'上の定点で，$\theta=0$のときAと重なっている点である．θが $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動くとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点Pの座標を$(x,\ y)$とするとき，x，yをθを用いて表せ．

(2) Pの軌跡の長さを求めよ．

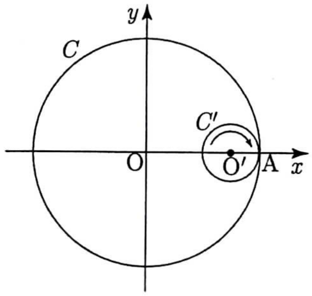

図1

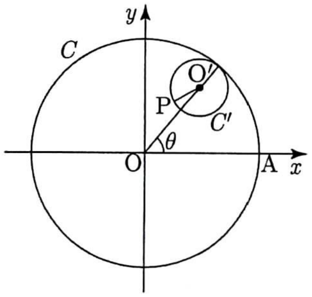

図2

(222) 曲線 $y=e^x$ の $0 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分を y 軸のまわりに回転してできる容器がある．これに毎秒 a の割合で上から水を注ぐ.

(1) この容器に水がいっぱいになるのは何秒後か.

(2) この水面の上昇速度が毎秒 $\dfrac{a}{4\pi}$ になった瞬間の水深を求めよ.

Section 3

(301)

(1)

(i) 複素数 α，β について，

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

を示せ．

(ii) 複素数 α，β，γ が条件 $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ を満たすとき，

$$|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|=|\alpha+\gamma|+|\alpha-\gamma|$$

を示せ．

(2) 複素数 α，β，γ が条件

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$$

を満たすとき，次をそれぞれ示せ．

(i) $|\alpha+\beta+\gamma|=\left|\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right|$

(ii) $\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ は実数である．

(302) 次の問いに答えよ.

(1) $x^4-(p+1)x^3+(2p-1)x^2-p$ を x の 2 次式の積で表せ.

(2) 4 次方程式

$$x^4-(p+1)x^3+(2p-1)x^2-p=0$$

の解を α, β, γ, δ とする. $|\alpha-c|=|\beta-c|=|\gamma-c|=|\delta-c|$ を満たす複素数 c および実数 p の値を求めよ.

前 ZS(304)

(303) a, b を実数，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ が虚数解 α をもつとして，以下の問に答えよ．

(1) α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解になることを示せ．また，3 つ目の解 β を α, $\overline{\alpha}$ を用いて表せ．

(2) $a=2$, 複素数平面上で α, $\overline{\alpha}$, β を表す点をそれぞれ A, B, C, 原点を O とする．$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{AOC}=120^\circ$ であるとき，与えられた方程式のすべての解，および b の値を求めよ．

(304)

(1) 複素数平面上で 2 つの複素数 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$ に対応する点をそれぞれ P, Q とする．点 R をとって三角形 PQR が正三角形になるとき，頂点 R の表す複素数を求めよ．

(2) 複素数平面上に四角形 ABCD があり，点 A, B, C, D を表す 4 つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 が条件

$$\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_3} = 1,\quad \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2},\quad |z_3 - z_4| = 2$$

を満たしているとする．このとき，対角線 BD の長さを求めよ．

前 ZS(303)

(305) 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1,\ z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} z_n + 1\ \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．ただし，i は虚数単位である，

(1) 上の漸化式を

$$z_{n+1} - \alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z_n - \alpha)$$

と表したとき，複素数 α を求めよ．

(2) 一般項 z_n を求めよ．

(3) $z_n = -\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ．

(306) i を虚数単位とし，$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく．

(1) z^5 および $z^4+z^3+z^2+z+1$ の値を求めよ．

(2) $t=z+\dfrac{1}{z}$ とおくとき，t^2+t の値を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さの 2 乗を求めよ．

前 ZS(307)

(307) 複素数平面上で不等式

$$2|z-2| \leqq |z-5| \leqq |z+1|$$

を満たす点 z がえがく図形を D とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 点 z が D 上を動くものとする. $\arg z=\theta$ とするとき, $\tan\theta$ の値のとり得る範囲を求めよ.

(3) D の面積を求めよ.

(308) -1 と異なる複素数 z に対し，複素数 w を $w = \dfrac{z}{z+1}$ で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) z が複素数平面上の虚軸上を動くとき，w が描く図形を求めよ．

(2) z が複素数平面上の円 $|z-1|=1$ の上を動くとき，w が描く図形を求めよ．

(309) 0でない複素数 z に対して，$w=z+\dfrac{2}{z}$ とおく．z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とし，w の実部を x，虚部を y とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) x，y をそれぞれ r と θ で表せ．

(2) 複素数平面上で，z が原点を中心とする半径1の円上を動くとき，点 w がえがく図形を図示せよ．

(3) 複素数平面上で，z が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ と $\sqrt{3}+i$ を結ぶ線分上を動くとき，点 w がえがく図形を図示せよ．

前 ZS(308)

(310)

(1) 虚数単位 i とは異なる複素数 z と w が 2 つの条件

$$\begin{cases} \arg(w-i)=\arg(z-i) \\ |w-i||z-i|=2 \end{cases}$$

を満たすとき，z の共役複素数 $\overline{z}$ と w の間に

$$w=\frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i}$$

が成り立つことを示せ.

(2) O を原点とする複素数平面で 2 を表す点を A，$\dfrac{1+2i}{2+i}$ を表す点を B とする.

$\angle \mathrm{OBA}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

(3) i とは異なる複素数 z を表す点を P とし，$w=\dfrac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i}$ を表す点を Q とする. P が線分 OA 上を O から A まで動くとき，対応する点 Q の軌跡を求め，それを図示せよ.

(311) 複素数 α，β は $|\alpha-1|=1$，$|\beta-i|=1$ をみたす．

(1) $\alpha+\beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

(312) xy 平面上の 2 次曲線 $C : 5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$ を，原点を中心として 30° だけ回転して考えることにより，C の焦点の座標を求めよ．

前 ZS(303)，(312)

(313) 曲線 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$ 上の動点Pにおける接線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれQ，Rとする．このとき，線分QRの長さの最小値と，そのときの点Pの座標を求めよ．

ZS(312)

(314) xy 平面上に原点を中心とする円 O と $(2,\ 0)$ を中心とする円 O' があり，共に $(1-\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする．点 P を中心とする円が円 O の外側かつ円 O' の内側で円 O と円 O' の両方に接するように点 P が動くとき，次の問いに答えよ．

(1) P の軌跡を求め xy 平面に図示せよ．

(2) (1) の軌跡の $x \geqq 0$ の部分と y 軸に囲まれた図形の面積を求めよ．

前 ZS(317)

(315) 楕円 $4x^2+9y^2=1$ の外部の点 L$(a,\ b)$ から，この楕円に引いた 2 本の接線の接点を A，B とし，線分 AB の中点を M とする．次の問いに答えよ．

(1) M の座標を a，b を用いて表せ．

(2) 点 L が楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上を動くとき，点 M の軌跡を求めよ．

(316) 楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$ 上の点を $\mathrm{P}(3\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，原点 O と点 P を結ぶ線分と x 軸の正の部分のなす角を θ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 OP の長さが $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ 以上になる θ の範囲を求めよ．

(2) $|\alpha-\theta|$ の最大値を求めよ．

(317) 双曲線 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ の上に点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ をとる．ただし，$x_1>a$ とする．点 P における C の接線と 2 直線 $x=a$ および $x=-a$ の交点をそれぞれ Q, R とする．

線分 QR を直径とする円は C の 2 つの焦点を通ることを示せ.

前 ZS(316)

(318) 曲線 C を $x^2 - \dfrac{y^2}{a^2} = -1$ $(a > 1)$ で定義する．

(1) 直線 $y = mx + n$ が曲線 C に接するための m，n，a の条件を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ から曲線 C に 2 本の直交する接線が引けるような点 P の軌跡を求め，図示せよ．

(319) t が 0 以外の実数を動くとき，$x=t+\dfrac{1}{t}$，$y=t-\dfrac{1}{t}$ と表される双曲線 C に関し，以下の問いに答えよ．

(1) C の焦点 F，F′ および漸近線を求めよ．ただし，F の x 座標は F′ の x 座標より大とする．

(2) $t>1$ とし，C 上の点 $\mathrm{P}\left(t+\dfrac{1}{t},\ t-\dfrac{1}{t}\right)$ での接線と 2 つの漸近線との交点を Q，R とする．このとき，∠QFR の大きさは一定であることを示し，その角度を求めよ．ただし，Q の y 座標は R の y 座標より大とする．

(320) $a > 0$ とし，極方程式 $r = 2a\sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする．

(1) 曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ．さらに，曲線 C を図示せよ．

(2) 曲線 C と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(321) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ について以下の設問に答えよ．

(1) 原点 O を極として，この楕円の極方程式を求めよ．

(2) 楕円上の 2 点 A と B が $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるように動くとき，$M=\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}$ の値を求めよ．

(3) 4 点 P，Q，R，S がこの順で楕円上に時計回りに並んでいて，線分 PR と線分 QS は原点 O を交点として直交する．原点 O を極とする点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とし，

$$L=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2+\mathrm{OS}^2$$

とするとき，L を θ の式で表せ．さらに，L の最大値と最小値およびそれらを与える θ の値を求めよ．ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とせよ．

前 ZS(318)，(320)

(322) 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を $C : x^2+y^2=1$，C 上の点 P$(x,\ y)$ における C の接線を l，点 A$(1,\ 0)$ から l に下ろした垂線の足を Q$(X,\ Y)$，線分 AQ の長さを r とする．このとき，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$，$\theta=0$ のとき $r=0$，として以下の問に答えよ．

(1) r，X，Y をそれぞれ θ のみの関数として表せ．

(2) 点 Q の軌跡の概形を図示せよ．

(3) 点 Q の軌跡が囲んでできる図形の面積 S を求めよ．

前 ZS(318)，(320)

講義問題の答

（結果のみ）

§ 1

(101) (1) $a=b$ かつ $c=1$

(2) $0<a\leqq 2$ のとき $\frac{1}{4}a^2+1$ $\left(x=\frac{a}{2}\right)$，$a>2$ のとき a $(x=1)$

(3) $a=b=c=1$

(102) (1) 略　(2) $S_n=\dfrac{r^2\sin\dfrac{2\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n+1}}{2\sin\dfrac{2\pi}{n(n+1)}}$　(3) $\lim_{n\to\infty}S_n=\pi r^2$

(103) (1) 略　(2) e

(104) (1) $x=3+\sqrt{5}$　(2) $a\geqq\frac{8}{27}$

(105) (1) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$，$\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$　(2) 略

(106) (1) $S_a(t)=\begin{cases} a\sqrt{1+t^2}-\dfrac{t}{2} & \left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\leqq a\right) \\ \dfrac{a^2(1+t^2)}{2t} & \left(0<a<\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\end{cases}$　(2) $t=\frac{5}{\sqrt{39}}$

(107) (1) $a<2b$　(2) $b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(108) (1) $b\geqq\sqrt{a}$ $(a>0)$　(2) $L(t)=\dfrac{t-\sqrt{t}+\dfrac{5}{4}}{\sqrt{4t+1}}$ $(t>0)$　(3) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(109) (1) $L=(\tan\theta+2)\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$　(2) 10

(110) $(a=0$ かつ $b\leqq 0)$ または $(a>0$ かつ $b<a-a\log a)$（図略）

(111) (1) $e^{-\frac{1}{e}}$　(2) 証明略，$y=x$

(112) (1) 略　(2) 証明略，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$

(113) (1) 略　(2) $\frac{1}{2}$

(114) $a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

(115) (1) 略　(2) 略　(3) 略

(116) (1) 略　(2) 0　(3) 0

(117) (1) $\frac{dS}{dt}=2$，$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi}$　(2) $\frac{dS}{dt}=\sqrt{\frac{32\pi a}{3}}$，$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{a}{6\pi}}$

(3) (i) $0<t<\frac{2}{a}$　(ii) $T=\frac{2}{\sqrt{a}}$　(iii) $a\leqq 4$

(118) (1) $a_1 = e - 2$ (2) 略 (3) $a_{n+1} = (n+1)a_n - 1$ (4) $b_n = n!$ (5) $-e$

(119) (1) 略 (2) $a_1 = \dfrac{4\sqrt{e} - e - 3}{2e}$

(3) $a_n = \dfrac{a_1(1 - e^{-n})}{1 - e^{-1}}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{4\sqrt{e} - e - 3}{2(e-1)}$

(120) (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) 略 (3) 略

(121) (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nb_n = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc_n = 0$ (2) 略 (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 1$

(122) $\dfrac{1}{2(\sqrt{a} - 1)}\log a$

§ 2

(201) (1) $x=0,\ \pm\pi,\ \dfrac{\pi}{2}$　　(2) 略

(3) $F(a)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4}\cos 2a+\dfrac{1}{4} & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{6}\right) \\ \dfrac{1}{4}\cos 2a+\sin a-\dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{\pi}{6} \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(202) (1) $I_{m,\,n}=\begin{cases} 0 & (m \neq \pm n) \\ \pi & (m=n\neq 0 \text{ または } m=-n\neq 0) \\ 2\pi & (m=n=0) \end{cases}$　　(2) $J_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)\pi$

(203) $a=-\dfrac{24}{\pi^2},\ b=\dfrac{12}{\pi^2}$，最小値 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{48}{\pi^4}$

(204) (1) 略　　(2) $\dfrac{\pi}{4}\log 3$

(205) (1) 略　　(2) $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^2+x+\dfrac{3}{2}(\alpha-1)$

(206) $a=0,\ f(x)=\dfrac{1}{4}(x+2)e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{e}$

(207) (1) $y=\sqrt{2x-x^2},\ x=1-\sqrt{1-y^2}$　　(2) 略　　(3) 略

(208) (1) 略　　(2) 略　　(3) 略　　(4) 略

(209) (1) $a=1$　　(2) $\dfrac{10}{3}-\pi$

(210) $a=e-2,\ b=e,\ c=e+e\log(e-2)$

(211) (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，極大値 $f(1)=1$，極小値 $f(-1)=-1$

(2) $S_n=2\log(2^n+\sqrt{2^{2n}-1})-2^{1-n}\sqrt{2^{2n}-1}$　　(3) $2\log 2$

(212) (1) $a=p^2\log p$

(2) $S=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(3p^2-8p)\log p+2p+2\log 2-3 & (1<p\leqq 2) \\ \dfrac{1}{2}p^2\log p-2\log 2+1 & (p \geqq 2) \end{cases}$

(3) $\dfrac{1}{3}(8\log 3-10\log 2-1)$

(213) $\dfrac{\pi^2}{8}$

(214) (1) $\begin{cases} x=\sin 2\theta\sin\theta \\ y=\sin 2\theta\cos\theta \end{cases}$　　(2) $\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta(3\cos 2\theta+1)$　　(3) 略　　(4) $\dfrac{\pi}{8}$

(215) (1) $C_1: x^2+(y-1)^2=4$ かつ $y>0$，$C_2: x^2+(y+1)^2=4$ かつ $y>0$　（図略）

(2) $\dfrac{22}{3}\pi$　　(3) $8\pi^2$

(216) (1) 1 (2) $V=\dfrac{\pi^2}{12}$, $W=2\pi-\dfrac{\pi^3}{6}$, $W>V$

(217) (1) $\mathrm{OR}=\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ (2) $\mathrm{R}\left(\dfrac{t^2}{1+t^2},\ \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$ (3) $\left(\log 2-\dfrac{2}{3}\right)\pi$

(218) (1) $E=\log\dfrac{b}{a}$ (2) 略 (3) $V=\dfrac{2\sqrt{2}\pi(b-a)(ab+1)}{3ab}$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}E=0$, $\displaystyle\lim_{a\to\infty}V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

(219) $\dfrac{16}{3}\sqrt{2}-2\pi$

(220) (1) $\mathrm{Q}\left(1-\dfrac{t}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\ 0\right)$ (2) $\mathrm{R}(t)\left(\left(\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}\right)t+1-a,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-a)t,\ a\right)$

(3) $S(a)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-3a+3a^2)$ (4) $V=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(221) (1) $\begin{cases} x=4\cos^3\theta \\ y=4\sin^3\theta \end{cases}$ (2) 6

(222) (1) $\dfrac{\pi(5e^3-2)}{a}$（秒後） (2) e^2-1

§ 3

(301) (1) 略　(2) 略

(302) (1) $(x^2-x-1)(x^2-px+p)$　(2) $c=\dfrac{1}{2}$，$p=2$

(303) (1) 証明略，$\beta=-\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}$　(2) 解は $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}(1\pm\sqrt{3}i)$，$-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$b=1-\sqrt{5}$

(304) (1) $(-1\pm3\sqrt{3})+(1\pm2\sqrt{3})i$（複号同順）　(2) $2\sqrt{3}$

(305) (1) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$　(2) $z_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-2}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(3) $n=6k-1$（k は自然数）

(306) (1) $z^5=1$，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$　(2) 1

(3) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$　(4) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

(307) (1) 略　(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\tan\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

(308) (1) 中心 $\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周（ただし，点 1 を除く）　(2) 中心 $\dfrac{1}{3}$，半径 $\dfrac{1}{3}$ の円周

(309) (1) $x=\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\cos\theta$，$y=\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\sin\theta$　(2) 略　(3) 略

(310) (1) 略　(2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(3) 略

(311) (1) 略　(2) 略

(312) $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$（複号同順）

(313) $\mathrm{P}\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ のとき最小値 3

(314) (1) $\dfrac{(x-1)^2}{2}+y^2=1$，ただし $(1-\sqrt{2},\ 0)$ を除く（図略）　(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(315) (1) $\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{4a^2+9b^2},\ \dfrac{b}{4a^2+9b^2}\right)$　(2) $144x^2+324y^2=1$

(316) (1) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\dfrac{\pi}{6}$

(317) 略

(318) (1) $m^2\neq a^2$ かつ $m^2+n^2=a^2$

(2) $x^2+y^2=a^2-1$，ただし 4 点 $\left(\pm\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}},\ \pm a\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}}\right)$（複号任意）を除く（図略）

(319) (1) $\mathrm{F}(2\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{F}'(-2\sqrt{2},\ 0)$，漸近線は $y=\pm x$　(2) 証明略，$\dfrac{3}{4}\pi$

(320) (1) 証明略，中心 $(0,\ a)$，半径 a（図略）　(2) $\pi a^3\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(321) (1) $\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{3}+\dfrac{\sin^2\theta}{2}$　(2) $M=\dfrac{5}{6}$

(3) $L=\dfrac{240}{24+\sin^2 2\theta}$，最大値 10 $\left(\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，最小値 $\dfrac{48}{5}$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$

(322) (1) $r=1-\cos\theta$, $\begin{cases} X=1+(1-\cos\theta)\cos\theta \\ Y=(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$　(2) 略　(3) $\dfrac{3}{2}\pi$

Class No

Name

R 20051