数学XM

駿台数学科編

2022 後期

R 20011

数学 XM

駿台数学科編

2022　後期

◆◇ はじめに ◇◆

このテキストは，国公立大医学部および難関私立大医学部を目指す人のために編集された，主として数学Ⅰ，数学A，数学Ⅱ，数学Bの演習を行うテキストです．

秋から冬にかけては，それまでに培った基礎力を実戦力に高めるためのトレーニングを行う時期です．そして，君たちには，医学部という確固たる目標があるのですから，それは，単に理系としての実戦力ではなく，医学部入試に向けての実戦力でなければなりません．そのため，このテキストでは，医学部入試でよく出題されるテーマや出題数はそれほど多くなくとも点差がつきやすいテーマ，および医学部入試の動向から見て今後の出題の増加が予想されるテーマに的を絞って演習をしていきます．要するに，医学部に出るものと差がつくものを多くやろうというのがこのテキストの編集方針です．

各問題の中心テーマは内容の紹介にあるとおりですが，医学部入試に対応するために総合問題・融合問題も取り入れたため，複数のテーマを持つ問題も多く，分類はおおざっぱで，数学Ⅲの色が強いものも含まれています．なお，前期教材で学んだ内容に関連する問題については前で参照問題番号を記しておきましたので，予習・復習の際の一助としてください．

前期の間はわかることが重要でしたが，入試で解答をかくのは他ならぬ君たち自身なのですから，後期は自らの手を動かして問題が解けるようにならなければなりません．ですから，学習の方法も復習よりも予習を中心にできるようにシフトしていくのが理想的です．まず身についている力で問題を解いてみる，歯が立たなかったときは前期教材に戻って確認しもう一度問題を考えてみる，授業によって再確認し復習によって定着させる，というようにこのテキストを有効に活用して学力を伸ばし，医学部入試を突破できる力をつけてもらいたいと思います．がんばってください．

◆◇ 内容の紹介 ◇◆

§1　(101) ～ (112)　ベクトル　…………………………………………　6

(113) ～ (122)　三角関数と図形　…………………………………　18

§2　(201) ～ (211)　図形と方程式　…………………………………　30

(212) ～ (222)　数列とその極限　…………………………………　41

§3　(301) ～ (307)　方程式・不等式　………………………………　54

(308) ～ (312)　最大・最小　………………………………………　61

(313) ～ (322)　整数　………………………………………………　66

§4　(401) ～ (402)　集合と論理　……………………………………　78

(403) ～ (409)　場合の数　…………………………………………　80

(410) ～ (420)　確率　………………………………………………　87

(421) ～ (422)　指数・対数　………………………………………　98

講義問題の答（結果のみ）……………………………………………　102

参考　データの分析……………………………………………………　110

Section 1

(101) ~ (112) ベクトル

(113) ~ (122) 三角関数と図形

(101) △OAB において，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする．A，B から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ C，D とし，AC と BD の交点を E とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OE と辺 AB の交点を F とするとき，面積比 △AEF：△OED を求めよ．

前 XS(101)，(102)

(102) 平面上に原点 O と 3 点 A, B, C があり，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，$OA=1$，$OB=2$，$OC=\sqrt{7}$ であるとする．このとき，$\angle AOB=\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると $\cos\theta$ の値は $\boxed{}$ である．また，三角形 ABC の面積は $\boxed{}$ である．

前 XS(103)

(103) $0 < t < \dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ と単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ が

(i) $(1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e}$

(ii) $(1-t)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{e}) = t(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{e})$

を満たすとする．さらに平面上のベクトル $\overrightarrow{x}$ があって，$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする．このとき，内積 $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{e}$ を t で表せ.

(104) 平面上で $\mathrm{AB}=3$ となる 2 点 A，B をとる．点 A を中心とする半径 1 の円を S とし，点 B を中心とする半径 2 の円を T とする．2 点 C，D は円 S 上を動き，2 点 E，F は円 T 上を動く．ただし，線分 CD は点 A を通り，線分 EF は点 B を通る．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の最大値と最小値を求めよ．

(105) 円に内接する四角形ABPCは次の条件(イ)，(ロ)を満たすとする．

(イ) 三角形ABCは正三角形である．

(ロ) APとBCの交点は線分BCを $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する．

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$p$ を用いて表せ．

(106) 四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ O，P，Q，R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を用いて表せ．

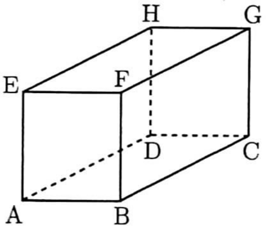
(2) 辺 AC，BD 上にそれぞれ任意に点 E，F をとるとき，線分 EF の中点は 4 点 O，P，Q，R を含む平面上にあることを証明せよ．

(107) 座標空間において，原点Oを通り方向ベクトル $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をもつ直線を L_θ とする．点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$ から直線 L_θ に下ろした垂線と L_θ との交点を P_θ とする．

(1) θ が実数全体を動くとき，P_θ は xy 平面内の円周上を動くことを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

(2) θ が $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする．三角形 OAP_θ の面積の最大値と，そのときの P_θ の座標を求めよ．

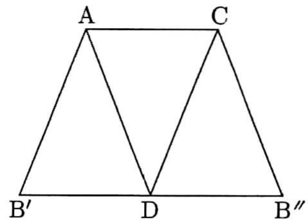
(108) 空間内に置かれた右図のような直方体について，次の問いに答えよ．



(1) 3 辺 AB，AD，AE の長さをそれぞれ a，b，c とする．線分 BH を 2：1 に内分する点を P とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ の値を求めよ．

(2) 点 A の座標を (1，1，3) とし，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(24,\ 4,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(18,\ 10,\ -8)$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(16,\ 12,\ 14)$ とするとき，点 Q(10，0，2) からこの直方体の表面への最短距離を求めよ．

(109) 2辺ACとB′B″が平行な等脚台形AB′B″Cがあり，辺B′B″の中点をDとする．線分B′Dと線分B″Dが重なるように線分AD，線分CDに関して折り曲げて，三角錐の容器をつくる．B′とB″の重なった頂点をBとする．$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{B'B''}=4$，$\mathrm{AB'}=\mathrm{CB''}=p$として，以下の問いに答えよ．ただし，$p>\sqrt{2}$とする．



(1) 三角錐ABCDにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{c}$と表す．Aから平面BCDに下ろした垂線とBCDの交点をEとおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$を$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$p$を用いて表せ．

(2) Eが辺BD上にあるようなpの値を求めよ．またこのときの三角錐ABCDの容積を求めよ．

(110) 空間に 3 点 A(1, 0, 0), B(0, -2, 0), C(0, 0, $\sqrt{2}$) がある．△ABC の外接円の中心を P とする．P を通り平面 ABC に垂直な直線をひき，この直線上に点 Q をとる．

(1) P の座標を求めよ．

(2) △ABC の外接円上の 1 つの点を R とする．$\angle \mathrm{PRQ} = 60^\circ$ のとき，Q の座標を求めよ．

(3) (2) のとき，四面体 QABC の体積を求めよ．

(111) 空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, 2a, 0)$, $C(0, 0, 2a)$ をとる．ただし $a>0$ とする．

(1) $2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$ を満たす点 P 全体は，3 点 A，B，C を通る平面内に中心を持つ球面であることを示し，その中心の座標と半径をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) (1) の球面を y 軸に垂直な平面で切った切り口が，xy 平面とただ 1 点で交わる円となるとき，この円の中心の座標と半径をそれぞれ a を用いて表せ．

前 XS(110)

(112) 座標空間内に定点 A，B がある．不等式

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

を満たすような xy 平面上の点 P の全体からなる図形を D とする．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) A(0, 0, 1)，B(0, 0, 0) のとき，図形 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) A(0, 0, $\sqrt{3}$)，B(1, 0, 0) のとき，図形 D を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ．

(3) A(0, 0, $2\sqrt{3}$)，B($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 0) のとき，図形 D の面積を求めよ．

(113) A，B はともに $90°$ より小さい正の角とする．$3\sin^2 A + 2\sin^2 B = 1$，$3\sin 2A - 2\sin 2B = 0$ のとき，$A + 2B$ は $15°$ の何倍になるか．

(114) 次の式を満たす正の整数a，b，cを求めよ．

$$\tan\frac{15^\circ}{2} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{c} - 1)$$

(115) 関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$ に対して以下の問いに答えよ．

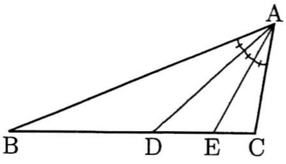
(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ．また t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ．

(3) $f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ．

前 XS(112)，(113)

(116) $\triangle$ABC において，辺 BC 上に点 D，E があり，AB $=7$，BE $=5$，AE $=3$，$\angle$BAD $=$ $\angle$DAE $=$ $\angle$EAC であるとする．



(1) AD $=$ $\boxed{}$，DE $=$ $\boxed{}$ である．

(2) $\angle$DAE $=\theta$ とおくとき，$\cos\theta=$ $\boxed{}$ である．

(3) EC $=$ $\boxed{}$，CA $=$ $\boxed{}$ である．

(117) 1 辺の長さが 1 の正五角形を Z_0 とし，正五角形 Z_0 の 5 つの頂点を A，B，C，D，E とする．この正五角形 Z_0 の 5 本の対角線 AC，BD，CE，DA，EB で囲まれた小さい正五角形を Z_1 とする．さらに，正五角形 Z_1 の 5 本の対角線で囲まれた正五角形を Z_2 とし，正五角形 Z_2 の 5 本の対角線で囲まれた正五角形を Z_3 とする．この操作を続けて，正五角形 Z_0，Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots$，Z_n，$\cdots$ を作るとき，以下の枠内にあてはまる値を求めよ．

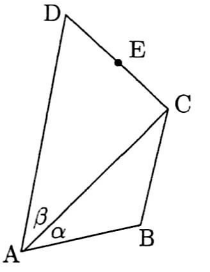
(1) 正五角形 Z_0 において，対角線 AC，BD，CE，DA，EB の長さは $\boxed{}$ である．したがって，$\cos 36^\circ = \boxed{}$，$\cos 108^\circ = \boxed{}$ である．

(2) 正五角形 Z_1 の 1 辺の長さは $\boxed{}$ であり，正五角形 Z_n の 1 辺の長さは $\boxed{}$ である．

(3) 1 辺の長さが $\dfrac{1}{10000}$ 以下になる正五角形 Z_n のうちで，最小の n は $\boxed{}$ である．

（必要ならば，$\sqrt{5} = 2.2361$，$\log_{10} 3.8 = 0.5798$，$\log_{10} 3.9 = 0.5911$ を用いよ．）

(118) すべての内角が 180° より小さい四角形 ABCD がある．辺の長さが $AB = BC = r$，$AD = 2r$ とする．さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形 $\triangle ABC$，$\triangle ACE$，$\triangle ADE$ の面積はすべて等しいとする．$\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle CAD$ とおく．



(1) $\alpha = \beta$ を示せ．

(2) $\cos \angle DAB = \dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin \angle CAE$ の値を求めよ．

(119) xy 平面上の円 $C: x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある．

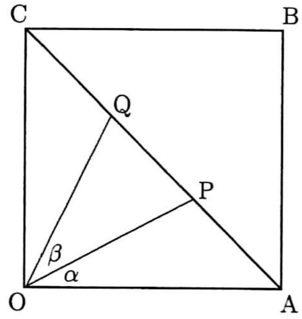
点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q，R とする．ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle\mathrm{APR}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする．線分 OS，QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ.

(2) $\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする．$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$, $T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ．

(3) (2) の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ．

(120) 正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする．また，$\angle \mathrm{AOP} = \alpha$，$\angle \mathrm{POQ} = \beta$ とする．次の問いに答えよ．



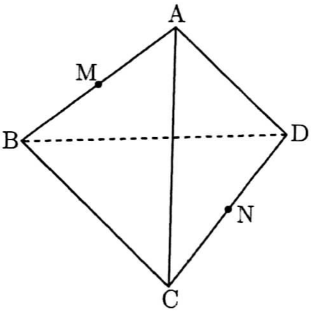
(1) $\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ．

(2) $\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ を示せ．

(3) 線分 PQ 上に点 R を $\angle \mathrm{POR} = \alpha$ となるようにとる．このとき，比 AR : RC を求めよ．

(121) 空間内の 4 点 A，B，C，D が $AB=1$，$AC=2$，$AD=3$，$\angle BAC=\angle CAD=60^\circ$，$\angle DAB=90^\circ$ をみたしている．この 4 点から等距離にある点を E とする．線分 AE の長さを求めよ．

(122) 1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD の 2 辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とおく．



(1) AN = $\boxed{}$ であるから，MN = $\boxed{}$ である．

(2) 線分 MN と線分 BN のなす角を α とすると，

$\sin\alpha = \boxed{}$ である．

(3) 線分を平行に移動して考えれば，線分 MN と線分 AC のなす角を β とすると，$\cos\beta = \boxed{}$ である．

(4) この正四面体の高さは $\boxed{}$ である．

Section 2

(201) ~ (211) 図形と方程式
(212) ~ (222) 数列とその極限

(201) 座標平面上に点 A(4, 3) と点 B(8, 2), 直線 $l : y = x$ と直線 $m : y = 0$ が与えられている.

(1) 直線 l に関して点 A と対称な点を A$'$ とし, 直線 m に関して点 B と対称な点を B$'$ とする. 点 A$'$ と点 B$'$ の座標をそれぞれ求めよ.

(2) 点 P が直線 l 上を動くとき, 線分の長さの和 $\mathrm{AP} + \mathrm{PB}$ が最小となる点 P の座標を求めよ.

(3) 点 Q が直線 l 上を動き, 点 R が直線 m 上を動くとき, 線分の長さの和 $\mathrm{AQ} + \mathrm{QR} + \mathrm{RB}$ が最小となる点 Q と点 R の座標をそれぞれ求めよ.

(202) 座標平面上の定点 A(2, 0) を通る傾きが k である直線 l は放物線 $y=x^2+2$ と異なる 2 点 B, C で交わる．B, C から x 軸に下ろした垂線が x 軸と B′, C′ で交わる．線分 BC 上に BP : PC = BB′ : CC′ となるように点 P をとる．

(1) 直線 l の傾き k の範囲を求めよ．

(2) 点 P の座標を k を用いて表せ．

(3) O を原点とし，三角形 POA の重心を G$(X,\ Y)$ とする．このとき，点 G の x 座標 X の範囲および点 G$(X,\ Y)$ の描く図形の方程式を求めよ．

前 XS(204), (205)

(203) 放物線 $y=x^2$ を C とし，C 上にない点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える．

(1) 点 P から放物線 C に異なる 2 本の接線がひけるとき，a，b の満たす条件を求めよ．

(2) (1) の 2 本の接線を l_1，l_2 とする．l_1 と l_2 が直交するような点 P 全体のなす図形を図示せよ．

(3) (1) の 2 本の接線 l_1，l_2 が直交しているとき，l_1，l_2 が放物線 C に接する接点をそれぞれ A，B とする．△PAB の面積を a を用いて表せ．

前 XS(201)

(204) xy 平面上の原点を O とし，半円 $x^2+y^2=9,\ y \geqq 0$ を C_1 とおく．半円 C_1 の周上に 2 点 P，Q をとり，弦 PQ を軸として，弧 PQ を折り返し，点 $\mathrm{R}(\sqrt{3},\ 0)$ で x 軸に接するようにする．次の問いに答えよ．

(1) 折り返した円弧を円周の一部にもつ円を C_2 とする．円 C_2 の方程式を求めよ．

(2) 3 点 P，O，Q を通る円を C_3 とする．円 C_3 の中心の座標および半径を求めよ．

(3) 円 C_2 の周上に点 A を，円 C_3 の周上に点 B をとるとき，線分 AB の長さの最大値を求めよ．

(205) 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える．

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，円 C に接する円の中心の座標を求めよ．

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ．

(206) 原点 $O(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円に，円外の点 $P(x_0,\ y_0)$ から 2 本の接線を引く．

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 $(x_1,\ y_1)$ を点 P の座標 $(x_0,\ y_0)$ を用いて表せ．また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ．

(2) 点 P が直線 $x + y = 2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

前 XS(206)

(207) k を実数とするとき，2つの直線

$$l : (k+1)x + (1-k)y + k - 1 = 0$$

$$m : kx + y + 1 = 0$$

について，次の問いに答えよ．

(1) k の値によらず l はある定点を通ることを示せ．

(2) l と m のなす角のうち鋭角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) k がすべての実数をとるとき，l と m の交点の軌跡を求めよ．

(208) 実数 a に対して，曲線 C_a を方程式

$$(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$$

によって定める．

(1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ．

(2) a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ．

前 XS(207)

(209) 座標平面上で，連立不等式 $y-5x \leqq -28$，$2y+5x \leqq 34$，$y \geqq -3$ の表す領域を A，不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする．

(1) 領域 A を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 A を動くとき，$y-2x$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) k を実数とし点 $(x,\ y)$ が領域 A を動くときの $y-kx$ の最小値と，点 $(x,\ y)$ が領域 B を動くときの $y-kx$ の最大値が同じ値 m であるとする．このとき，k と m の値を求めよ．

(210) 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ と円 $(x-a)^2+y^2=b$ $(b>0)$ が相異なる 4 点で交わるという. このとき点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を図示せよ.

前 XS(304)

(211) a を正の定数とする．座標平面において，点 $(-1,\ 0)$ を通る直線が楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ により切り取られる線分の長さの最大値を求めよ．

(212) 等差数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

S_n を大きい順に並べかえると第 3 項までがそれぞれ 22，21，20 となるとき，この数列の一般項 a_n を求めよ．

(213) n は自然数とする．$2n+1$ 個の項からなる公差 1 の等差数列を考える．初項から $n+1$ 個の項の平方の和と，その後に続く n 個の項の平方の和が等しいとき，この数列の初項を n を用いて表せ．

(214) 自然数 n に対して，a_n と b_n を $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1} と b_{n-1} を用いて表せ．

(2) ${a_n}^2 - 2{b_n}^2$ を求めよ．

(3) (2) を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を1つ求めよ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは既知としてよい．

(215) 数列 $\{a_n\}$ はつぎの (i), (ii) を満たすとする.

(i) $a_1 = \dfrac{1}{2}$

(ii) $n \geqq 2$ について, $a_n = \dfrac{2{S_n}^2}{2S_n - 1}$. ただし, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ である.

(1) a_2 を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ に対して, S_n を S_{n-1} で表せ.

(3) S_n を求めよ.

(4) $n \geqq 2$ に対して, a_n を求めよ.

前 XS(212), (215)

(216) 自然数 k に対し，$\log_3 k \geqq N$ を満たす最大の整数 N を a_k とする．このとき数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの和を $S(n)$ とおく．

(1) $a_k = 1$ となる k の値の範囲，および $a_k = 2$ となる k の値の範囲を求めよ．

(2) $S(26)$，$S(100)$ を求めよ．

(3) $n = 3^p - 1 + m$ とおくとき，$S(n)$ を p と m の式で表せ．ただし，p は自然数とし，m は $1 \leqq m \leqq 3^{p+1} - 3^p$ を満たす整数とする．

前 XS(209)

(217) 正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ が

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = {a_n}^2 + n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとき，次の問に答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_n を予想し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．

前 XS(215)，(216)

(218) 初項が $a_1 = \cos\frac{\pi}{6}$，第 2 項が $a_2 = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$，一般項が

$$a_n = \cos\frac{\pi}{3\cdot 2}\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^2}\cdots\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で与えられる数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(219) 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義されている.

(1) $0<a_n<2\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $2\cos b_n=a_n$, $0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす b_n の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の値を求めよ.

(220) 初項 a，公比 r の等比数列の一般項を a_n とする．ただし $|r|<1$ とする．このとき，次の極限 A，B をそれぞれ求めよ．

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots\cdots+2a_{n-1}+a_n}{n}$$

$$B=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n}{n}$$

(221) $x_1 = a\,(a > 1)$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{{x_n}^2}\right)$ $(n \geqq 1)$ で定められる数列 $\{x_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x_n > \sqrt[3]{a}$ $(n \geqq 1)$ および $x_{n+1} - \sqrt[3]{a} < \dfrac{2}{3}(x_n - \sqrt[3]{a})$ $(n \geqq 1)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

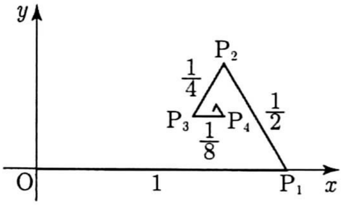
前 ZS(102)

(222) 座標平面上の動点Pは，原点Oからスタートし，まず x 軸の正の方向に長さ1だけ進む．次に，左（反時計回り）に 120° だけ向きを変え，$\dfrac{1}{2}$ 進む．以後同様に，120° だけ向きを変えてから直前に移動した距離の半分ずつ進むものとする．

(1) 右図のように，P_1，P_2，P_3，……とするとき，

$$\mathrm{P}_n=(x_n,\ y_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を n を用いて表せ．



(2) これを無限に繰り返したとき，動点Pが近づく点の座標を求めよ．

Section 3

(301) ～ (307) 方程式・不等式

(308) ～ (312) 最大・最小

(313) ～ (322) 整数

(301) a と b を実数の定数とする．x，y，z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 3 \\ \qquad ay + 2z = 2 \\ \qquad 8y + bz = 5 \end{cases}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) この連立 1 次方程式がただ 1 組の解を持つために a と b が満たすべき必要十分条件を与え，その条件のもとでの解を求めよ．

(2) この連立 1 次方程式が無数に多くの解を持つために a と b が満たすべき必要十分条件を与え，その条件のもとでの解をもれなく求めよ．

(302) a を実数の定数とする．x の 2 次方程式

$$x^2+(a-1)x+a+2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 (＊) が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲には実数解をただ 1 つもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) $-2 \leqq a \leqq -1$ のとき，2 次方程式 (＊) の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ．

(303) 不等式 $ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx \geqq 0$ が任意の実数 x，y，z に対してつねに成り立つような実数 a の値の範囲を求めよ．

(304) a を実数とする．$ax \geqq 0$ かつ $0 \leqq |x| \leqq |a|$ であるすべての実数 x に対して，$|a| < |1-x|$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

(305) 実数 x に対し，x を越えない整数のうちの最大のものを記号 $[x]$ で表す.

(1) m を整数とするとき，$[x+m]=[x]+m$ が成り立つことを示せ.

(2) x が整数でないとき，$[x]+[-x]=-1$ が成り立つことを示せ.

(3) $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$ が成り立つことを示せ.

(306) $Q(x)$ を 2 次式とする．整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという．このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解を持つことを示せ．

前 XS(303)

(307) $f(x) = x^2 + ax + b$ とする．次の問に答えよ．

(1) 整式 $P(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $cx + d$，$xP(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $qx + r$ とするとき，q と r を a，b，c，d を用いて表せ．

(2) x^{2004} を $f(x)$ で割った余りが $2x + 1$，x^{2005} を $f(x)$ で割った余りが $x + 2$ となるような a，b はない．その理由を述べよ．

前 XS(303)

(308) a，b を実数の定数とし，$f(x)=x^2+ax+b$ を x の 2 次関数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したところ，頂点が点 $(1,\ 2)$ の放物線になった．このとき，a，b の値を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，それらがともに -1 より大きく 1 より小さくなるための a, b の条件を求めよ．このとき，さらに a, b が $a=2b$ をみたすとき，b の値の範囲を求めよ．

(3) 2 次関数 $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とする．a，b が不等式 $a+2b \leqq 2$ をみたすとき，m を最大にする a，b と，そのときの m の値をそれぞれ求めよ．

前 XS(304)，(312)

(309) a を正の定数とする．平面上の 2 点 A$(a,\ 0)$，B$(-a,\ 0)$ に対し AP$\cdot$BP $= a^2$ を満たす点 P の描く曲線を C とする．

(1) 曲線 C の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 P の x 座標と y 座標のとりうる値の範囲を求めよ．

前 ZS(318)

(310) 曲線 $C: y=x^3-x$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^3-a)$ における接線 l が，曲線 C と再び交わる点をBとし，点Bにおける曲線 C の接線を m とする．接線 l と m のなす角を θ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$a \neq 0$ とする．

(1) $\dfrac{1}{\tan\theta}$ を a の式で表せ.

(2) $\tan\theta$ を最大にする a^2 の値を求めよ.

前 XS(117)，(316)

(311) 実数 a，b，c が $a>b>c$ と $a+b+c=0$ をみたすとき，曲線 $C : y = ax^2 + 2bx + c$ について，

(1) 曲線 C と x 軸とは相異なる 2 つの点で交わることを証明せよ．

(2) 曲線 C が x 軸から切りとる線分の長さを l とするとき，$\sqrt{3} < l < 2\sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(312) k, l を整数として 2 次関数 $f(x) = x^2 + kx + l$ を考える．どのような整数 n に対しても，$f(n) > 0$ となるとき，どのような実数 x に対しても，$f(x) > 0$ が成立するか．もしそうなら，そのことを証明せよ．そうでないなら，その理由を述べよ．

(313)

(1) 40! は 5 で最大 $\boxed{\quad ア \quad}$ 回割り切れる.

(2) 40! は 2 で最大 $\boxed{\quad イ \quad}$ 回割り切れる.

(3) 40! を素因数分解すると $\boxed{\quad ウ \quad}$ 種類の素数の積であらわされる.

(4) 40! は一の位から数えて 0 が合計 $\boxed{\quad エ \quad}$ 個連続して並ぶ.

(5) 40! を一の位から順にみて，最初に現れる 0 以外の数字は $\boxed{\quad オ \quad}$ である.

(314) 2つの自然数 $A=10^{297}+1$, $B=10^{300}-1$ の1以外の最小の約数をそれぞれ a, b とした時, $|a-b|$ の値を求めよ.

前 XS(402)

(315) $(m,\ n)$ を自然数の組とし，x についての 2 次方程式

$$x^2 - mnx + n + 2 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) $m \geqq 5$ のとき，方程式①は $0 < x < 1$ の範囲に解をもつことを示せ．

(2) 方程式①が自然数の解をもつような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．また，方程式①の自然数の解の中で最大のものを求めよ．

(316) xy 平面上の点で x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点という．a，k は整数で $a \geqq 2$ とし，直線 $L: ax + (a^2+1)y = k$ を考える．

(1) 直線 L 上の格子点を１つ求めよ．

(2) $k = a(a^2+1)$ のとき，$x > 0$，$y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点は存在しないことを示せ．

(3) $k > a(a^2+1)$ ならば，$x > 0$，$y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点が存在することを示せ．

(317)

(1) a，b，c を整数とし，$f(x)=x^3-x+3(ax^2+bx+c)$ とおく．すべての整数 n に対して，$f(n)$ は 3 の倍数であることを示せ．

(2) すべての係数が整数である 3 次の整式 $g(x)$ が次の 2 つの条件

(i) x^3 の係数は 1 である

(ii) すべての整数 n に対して，$g(n)$ は 3 の倍数である

を満たすならば，$g(x)$ は，ある整数 a，b，c を用いて

$$g(x)=x^3-x+3(ax^2+bx+c)$$

と表されることを示せ．

(318) Nを自然数とし，$\phi(N)$をNより小さくかつNと互いに素な自然数の総数とする．すなわち

$$\phi(N)=\#\{n \mid n \text{は自然数},\ 1 \leqq n < N,\ \gcd(N,\ n)=1\}$$

で，オイラー関数と呼ばれている．ここに$\gcd(a,\ b)$はaとbの最大公約数を，$\#A$は集合Aの要素の総数を意味する．例えば，

$$\phi(6)=\#\{1,\ 5\}=2$$

$$\phi(15)=\#\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 14\}=8$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) pとqを互いに異なる素数とし$N=pq$とおく．

(i) Nより小さい自然数nで，$\gcd(N,\ n)\neq 1$となるものを全て求めよ．

(ii) $\phi(N)$を求めよ．

(2) pとqを互いに異なる素数とし$N=pq$とおく．今Nと$\phi(N)$があらかじめわかっているとき，pとqを解としてもつ二次方程式をNや$\phi(N)$等を用いて表せ．

(3) $N=84773093$および$\phi(N)=84754668$であるとき，$N=pq$ $(p>q)$となる素数pおよびqを求めよ (求めたpおよびqが素数であることを示さなくてよい)．

ただし，必要に応じて以下の数表を使ってもよい．

$320^2=102400$；$322^2=103684$；$324^2=104976$；

$326^2=106276$；$328^2=107584$；$330^2=108900$

(319) 以下の問に答えよ.

(1) a, b を正の有理数とする. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ はともに有理数であることを示せ.

(2) a, b, c を正の有理数とする. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数ならば, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ はすべて有理数であることを示せ.

前 XS(405)

(320) nを奇数とする．次の問いに答えよ．

(1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ．

(2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

(3) $n^5 - n$ は 120 の倍数であることを証明せよ．

前 XS(402)

(321) a, b, c は，$1 < a < b < c$ をみたす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は，abc で割り切れるとする．

(1) $ab + bc + ca - 1$ は，abc で割り切れることを示せ．

(2) a, b, c を求めよ．

前 XS(404)

(322) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を示せ．

(3) 任意の自然数 n に対して，a_n は整数であり，a_{4n} は 3 の倍数であることを示せ．

前 XS(216)

Section 4

(401) ～ (402) 集合と論理

(403) ～ (409) 場合の数

(410) ～ (420) 確率

(421) ～ (422) 指数・対数

(401) 正の実数 a に対し，a^n が整数になるような自然数 n の全体からなる集合を $N(a)$ とかくとき，次のことを示せ．ここに，a，b は正の実数で，ϕ は空集合を表す．

(1) $N(a) \cap N(b) \subset N(ab)$.

(2) a が有理数かつ $N(a) \neq \phi$ ならば，$1 \in N(a)$.

(402) 実数全体の集合を全体集合として，次の問いに答えよ．

(1) 集合 A を，$A=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,\ b$ は整数$\}$ と定める．このとき，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ は A の要素ではないことを示せ．ただし，$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい．

(2) 集合 $B,\ C,\ D$ を

$$B=\{x\,|\,x \text{ は } 1 \leqq x \leqq 10 \text{ である整数}\}$$

$$C=\{x\,|\,x \text{ は } 1 \leqq x \leqq 20 \text{ である整数}\}$$

$$D=\{x\,|\,x^2-2(n+1)x+n^2=0 \text{ となる自然数 } n \text{ がある}\}$$

と定める．このとき，$B\cup(C\cap D)$ および $B\cap\overline{D}$ を求めよ．ただし，$\overline{D}$ は D の補集合である．

(403) 1000 から 9999 までの 4 けたの自然数について，次の問いに答えよ．

(1) 1 が使われているものはいくつあるか．

(2) 1，2 の両方が使われているものはいくつあるか．

(3) 1，2，3 のすべてが使われているものはいくつあるか．

(404) n を 3 以上の正の整数とする．いま，袋の中に 1 から n の数字が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが入っている．この袋の中から 1 枚のカードを引いては元にもどすことを 3 回くり返す．このとき，1 回目，2 回目，3 回目にカードに書かれていた数字をそれぞれ X，Y，Z とする．

(1) $X+Y=Z$ となる場合の数は何通りあるか．

(2) $X+Y<Z$ となる場合の数は何通りあるか．

(3) $n=10$ とするとき，$XY \leqq Z$ となる場合の数は何通りあるか．

(405) 立方体の各面に，隣り合った面の色は異なるように，色を塗りたい．ただし，立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 異なる 6 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか.

(2) 異なる 5 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか.

(3) 異なる 4 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか.

前 XS(408)

(406) 次の問に答えよ．

(1) 白色，赤色，だいだい色，黄色，緑色，青色，あい色，紫色の同じ大きさの球が 1 個ずつ全部で 8 個ある．これらの 8 個の球を 2 個 1 組として 4 つに分ける．このような分け方は全部で何通りあるか．

(2) (1) の 8 個の球にさらに同じ大きさの白色の球 2 個をつけ加える．これらの 10 個の球を 2 個 1 組として 5 つに分ける．このような分け方は全部で何通りあるか．

前 XS(409)

(407) 以下の問いに答えよ．

(1) 条件 $1 \leqq a \leqq b \leqq 3$，$1 \leqq a < c \leqq 3$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めよ．

(2) n を自然数とする．条件 $1 \leqq a \leqq b \leqq n$，$1 \leqq a < c \leqq n$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めよ．

(408) 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき，1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする．15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか．

(409) 次の式を二項定理 $(1+x)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k$（$m$ は自然数）を用いて計算せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k {}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{2k+1}$

前 XS(412)

(410) nを3以上の整数とする．1からnまでの番号を1つずつ重複せずに書いたn枚のカードが箱に入っている．この箱から3枚のカードを同時に取り出し，取り出したカードの番号を小さい順にa，b，cとする．$b-a=c-b$が成り立つ確率をp_nとする．

(1) p_5を求めよ．

(2) p_6を求めよ．

(3) nが奇数のとき，p_nを求めよ．

(4) nが偶数のとき，p_nを求めよ．

前 XS(413)

(411) 次の問いに答えよ.

(1) 3 個のさいころを同時に投げるとき，出た 3 つの目の積が 10 で割り切れる確率を求めよ.

(2) n 個のさいころを同時に投げるとき，出た n 個の目の積が 10 で割り切れる確率を求めよ.

前 XS(414)

(412) 2つのさいころを同時に振るという試行を独立に3回行う．1回目に出た目を a_1, b_1, 2回目に出た目を a_2, b_2, 3回目に出た目を a_3, b_3 とする．

(1) $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=0$ となる確率を求めよ．

(2) $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)=100$ となる確率を求めよ．

(413) 1つのサイコロを続けて n 回 $(2 \leqq n \leqq 6)$ 投げて出た目を順に x_1, x_2, $\cdots$, x_n とする.

(1) $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n$ となる確率を求めよ.

(2) $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n$ となる確率を求めよ.

(3) (1) の事象 $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n$ が起きたもとで $x_n = k$ $(1 \leqq k \leqq 6)$ となる条件付確率を求めよ.

(4) (2) の事象 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n$ が起きたもとで $x_n = k$ $(1 \leqq k \leqq 6)$ となる条件付確率を求めよ.

前 XS(415)

(414) ある病原菌の感染を調べる試薬がある．この試薬で検査したとき，感染しているのに陰性と判定される確率が $\dfrac{1}{100}$，感染していないのに陽性と判定される確率が $\dfrac{3}{100}$ であるとする．各個体が確率 $\dfrac{5}{100}$ で感染している集団があるとする．

(1) この中の 1 個体が，感染していてかつこの試薬によって陽性と判定される確率を求めよ．

(2) この中の 1 個体がこの試薬によって陽性と判定される確率を求めよ．

(3) ある個体が陽性と判定された．このとき，実際は感染していない確率を求めよ．

(4) この集団の中から 4 個体を取り出して検査したら，すべて陰性と判定された．このとき，実際に 4 個体のうちひとつも感染していない確率が $\dfrac{99}{100}$ より大きいかどうかを答えよ．ただし，取り出したそれぞれの個体の感染の有無は独立であるとする．

(415) 座標平面上に動点 P，Q があり，独立に動く．各々の点は 1 秒ごとに，x 軸の正の向き，x 軸の負の向きおよび y 軸の正の向きのいずれかに 1 だけ進む．その確率は，x 軸の正の向きと負の向きにはそれぞれ $\dfrac{1}{4}$，y 軸の正の向きには $\dfrac{1}{2}$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) はじめに動点 P，Q はともに原点にあるとする．1 秒後に P，Q が同じ位置にある確率を求めよ．

(2) はじめに動点 P は原点に，動点 Q は点 $(2,\ 0)$ にあるとする．3 秒後に P，Q が同じ位置にある確率を求めよ．

前 XS(417)

(416) サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える．ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る．たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する．なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく．

(1) p_2 を求めよ．

(2) p_3 を求めよ．

(3) 4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ．

前 XS(416)

(417) A，B，C の 3 人が優勝決定戦を行う．まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する．これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする．A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は p $(0 < p < 1)$，負ける確率は $1-p$ であるとする．

第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ．

(1) 第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する．C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う．第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる．第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を求めよ．

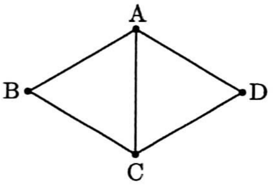
(2) 第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする．F_2，F_3，F_4 をそれぞれ求めよ．

(3) 2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を求めよ．

前 XS(416)

(418)　図のような 4 個の点 A，B，C，D を結んだ図形を考える．動点 P は点 A を出発点として A，B，C，D 上を移動する．P が A または C にいるときは，残りの 3 点にそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動し，P が B または D にいるときは，A，C にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．n 回の移動後 P が A, B, C, D にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする．



(1)　a_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n，d_n を用いて表せ．

(2)　a_n，c_n を求めよ．

前 XS(419)

(419) 正方形の頂点を順に A，B，C，D とし，この順を正の向きとし，逆を負の向きとする．動点 P は常に頂点にあり，1 秒ごとに次の頂点に移っていく．このとき，正の向きに次の頂点に移る確率は $\dfrac{2}{3}$ で，逆の負の向きに次の頂点に移る確率は $\dfrac{1}{3}$ とする．また，動点 P は最初頂点 A にあるものとする．

(1) 2 秒後に動点 P が頂点 A，C にある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 3 秒後に動点 P が頂点 B，D にある確率をそれぞれ求めよ．

(3) 4 以上の自然数 n に対して，n 秒後に動点 P が各頂点にある確率をそれぞれ求めよ．

前 XS(419)

(420) x は 0 以上の整数である．次の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである．

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1) $2n$ 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，b_1，b_2，$\cdots$，b_n について，$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ．

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ．

(3) x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった．このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

(421) 次の問いに答えよ.

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ.

(2) n が正の整数のとき, $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ.

前 XS(318)

(422) x の方程式

$$|\log_3 x| = ax + b$$

が異なる3つの実数解をもち，それらが 1：2：3 の比をなすとき，実数 a，b の値を求めよ．

講義問題の答

(結果のみ)

§ 1

(101) (1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $\triangle\mathrm{AEF}:\triangle\mathrm{OED}=8:21$

(102) $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(103) $\vec{x}\cdot\vec{e}=\dfrac{2t(1-t)}{2t^2-2t+1}$

(104) 最大値 8，最小値 0

(105) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{p^2-p+1}\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}$

(106) (1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$　(2) 略

(107) (1) 証明略，中心 $(1,\ 0,\ 0)$，半径 1　(2) $\mathrm{P}_\theta\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$

(108) (1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{3}(-a^2+b^2+c^2)$　(2) $2\sqrt{6}$

(109) (1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}+\dfrac{1}{p^2-1}\vec{b}+\dfrac{p^2-3}{p^2-1}\vec{c}$

(2) $p=\sqrt{3}$，三角錐 ABCD の容積は $\dfrac{2}{3}$

(110) (1) $\left(\dfrac{3}{14},\ -\dfrac{6}{7},\ \dfrac{5\sqrt{2}}{14}\right)$

(2) $\left(\dfrac{3\pm3\sqrt{15}}{14},\ -\dfrac{12\pm3\sqrt{15}}{14},\ \dfrac{5\sqrt{2}\pm3\sqrt{30}}{14}\right)$（複号同順）　(3) $\dfrac{\sqrt{30}}{4}$

(111) (1) 証明略，中心 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) 中心 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{a}{2}\right)$，半径 $\dfrac{a}{2}$

(112) (1) $x^2+y^2\leqq\dfrac{1}{3}$（図略）

(2) $\dfrac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}\leqq1$（図略），面積 $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}\pi$　(3) $3\sqrt{6}\pi$

(113) 6 倍

(114) $a=3$，$b=2$，$c=2$

(115) (1) $f(\theta)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(3) $a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$ または $0<a<2\sqrt{2}$

(116) (1) $\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$，$\dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$　(3) 1，$\sqrt{7}$

(117) (1) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ (2) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (3) 10

(118) (1) 略 (2) $\sin\angle\mathrm{CAE} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

(119) (1) $\mathrm{OS} = \sqrt{2}\sin\theta$，$\mathrm{QR} = 2\sqrt{3-2\sin^2\theta}$

(2) 証明略，$S(\theta) = 2\sqrt{3}\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$ (3) $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

(120) (1) $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ (2) 略 (3) $\mathrm{AR} : \mathrm{RC} = 4 : 3$

(121) $\mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

(122) (1) $\mathrm{AN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{MN} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

§ 2

(201) (1) $A'(3,\ 4)$，$B'(8,\ -2)$　(2) $P\left(\dfrac{26}{7},\ \dfrac{26}{7}\right)$

(3) $Q\left(\dfrac{38}{11},\ \dfrac{38}{11}\right)$，$R\left(\dfrac{19}{3},\ 0\right)$

(202) (1) $k < 4 - 2\sqrt{6}$ または $k > 4 + 2\sqrt{6}$　(2) $P\left(\dfrac{2(k+2)}{k-4},\ \dfrac{12k}{k-4}\right)$

(3) $\dfrac{4-\sqrt{6}}{3} < X < \dfrac{4+\sqrt{6}}{3}$ かつ $X \neq \dfrac{4}{3}$，$Y = 4X - \dfrac{4}{3}$

(203) (1) $b < a^2$　(2) $y = -\dfrac{1}{4}$（図略）　(3) $\dfrac{1}{4}(4a^2+1)^{\frac{3}{2}}$

(204) (1) $(x-\sqrt{3})^2 + (y-3)^2 = 9$　(2) 中心 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{9}{4}\right)$，半径 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　(3) $3 + 2\sqrt{3}$

(205) (1) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$　(2) 最大値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，最小値 0

(206) (1) $Q\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$，証明略

(2) $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$，ただし，原点 $(0,\ 0)$ を除く．

(207) (1) 証明略，定点 $(0,\ 1)$　(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $(x-1)^2 + y^2 = 2$，ただし，点 $(0,\ 1)$ を除く．

(208) (1) $(1,\ \pm\sqrt{5})$，$(-1,\ \pm 1)$

(2) $(1-x^2)(y^2-2x-3) > 0$ および $(1,\ \pm\sqrt{5})$，$(-1,\ \pm 1)$（図略）

(209) (1) 略　(2) 最大値 -10，最小値 -19　(3) $k=-1$，$m=2$

(210) $-3 < a < 3$ かつ $b < \dfrac{4}{3}a^2 + 4$ かつ $b > (a+1)^2$ かつ $b > (a-1)^2$（図略）

(211) $0 < a \leqq \sqrt{2}$ のとき 2，$a \geqq \sqrt{2}$ のとき $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}$

(212) $a_n = -3n + 13$

(213) $-n$ または $n(2n+1)$

(214) (1) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \end{cases}$　(2) ${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = 1$　(3) 一例として $\dfrac{577}{408}$

(215) (1) $a_2 = -\dfrac{1}{4}$　(2) $S_n = \dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$　(3) $S_n = \dfrac{1}{2n}$　(4) $a_n = -\dfrac{1}{2n(n-1)}$

(216) (1) 順に $3 \leqq k \leqq 8$，$9 \leqq k \leqq 26$　(2) $S(26) = 42$，$S(100) = 284$

(3) $S(n) = \left(p - \dfrac{3}{2}\right)3^p + mp + \dfrac{3}{2}$

(217) (1) $a_1 = 1$　(2) 証明略，$a_n = n$

(218) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

(219) (1) 略　　(2) $b_n = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

(220) $A = \dfrac{a}{1-r}$, $B=0$

(221) (1) 略　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$

(222) (1) $\left(\dfrac{5}{7} - \dfrac{1}{7\cdot 2^n}\left(5\cos\dfrac{2n\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\dfrac{2n\pi}{3}\right),\ \dfrac{\sqrt{3}}{7} - \dfrac{1}{7\cdot 2^n}\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{2n\pi}{3} + 5\sin\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)$

(2) $\left(\dfrac{5}{7},\ \dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$

§ 3

(301) (1) 条件は $ab \neq 16$，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{3ab-25a-4b+52}{ab-16},\ \dfrac{2b-10}{ab-16},\ \dfrac{5a-16}{ab-16}\right)$

(2) 条件は $(a,\ b)=\left(\dfrac{16}{5},\ 5\right)$，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{7-15k}{4},\ \dfrac{5-5k}{8},\ k\right)$ (k は任意)

(302) (1) $-2 \leqq a < -\dfrac{4}{3}$ または $a=-1$　　(2) $0 \leqq x \leqq 3$

(303) $a \geqq 1$

(304) $-1 < a < \dfrac{1}{2}$

(305) (1) 略　　(2) 略　　(3) 略

(306) 略

(307) (1) $q=d-ac$，$r=-bc$　　(2) 略

(308) (1) $a=2$，$b=4$

(2) 条件は $b<\dfrac{a^2}{4}$ かつ $-2<a<2$ かつ $b>a-1$ かつ $b>-a-1$，

$a=2b$ となるとき $-\dfrac{1}{3}<b<0$

(3) $a=-1$，$b=\dfrac{3}{2}$，$m=\dfrac{5}{4}$

(309) (1) $x^4+2x^2y^2+y^4-2a^2x^2+2a^2y^2=0$　　(2) $-\sqrt{2}a \leqq x \leqq \sqrt{2}a$，$-\dfrac{a}{2} \leqq y \leqq \dfrac{a}{2}$

(310) (1) $\dfrac{1}{\tan\theta}=4a^2-\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{9a^2}$　　(2) $a^2=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(311) (1) 略　　(2) 略

(312) 成立する，証明略

(313) (1) 9　　(2) 38　　(3) 12　　(4) 9　　(5) 2

(314) $|a-b|=4$

(315) (1) 略

(2) $(m,\ n)=(1,\ 6)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(4,\ 1)$，自然数の解の中で最大のものは 5

(316) (1) 一例として $(-ak,\ k)$　　(2) 略　　(3) 略

(317) (1) 略　　(2) 略

(318) (1) (i) p，$2p$，……，$(q-1)p$，q，$2q$，……，$(p-1)q$　　(ii) $\phi(N)=(p-1)(q-1)$

(2) $x^2-\{N+1-\phi(N)\}x+N=0$　　(3) $p=9539$，$q=8887$

(319) (1) 略　　(2) 略

(320) (1) 略　　(2) 略　　(3) 略

(321) (1) 略　　(2) $a=2$，$b=3$，$c=5$

(322) (1) $a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$　　(2) 略　　(3) 略

§ 4

(401) (1) 略　(2) 略

(402) (1) 略

(2) $B \cup (C \cap D) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 18\}$,

$B \cap \overline{D} = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$

(403) (1) 3168 個　(2) 920 個　(3) 198 個

(404) (1) $\frac{1}{2}n(n-1)$ 通り　(2) $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 通り　(3) 127 通り

(405) (1) 30 通り　(2) 15 通り　(3) 6 通り

(406) (1) 105 通り　(2) 210 通り

(407) (1) 8 個　(2) $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$個

(408) 277 通り

(409) (1) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$　(2) $\dfrac{1}{n+1}$　(3) $\dfrac{4^n}{2n+1}$

(410) (1) $\dfrac{2}{5}$　(2) $\dfrac{3}{10}$　(3) $\dfrac{3(n-1)}{2n(n-2)}$　(4) $\dfrac{3}{2(n-1)}$

(411) (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $1-\dfrac{5^n+3^n-2^n}{6^n}$

(412) (1) $\dfrac{91}{216}$　(2) $\dfrac{1}{216}$

(413) (1) $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_n}{6^n}$　(2) $\dfrac{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}{6^n}$　(3) $k \geqq n$ のとき $\dfrac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_6\mathrm{C}_n}$, $k < n$ のとき 0

(4) $\dfrac{{}_{n+k-2}\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}$

(414) (1) $\dfrac{99}{2000}$　(2) $\dfrac{39}{500}$　(3) $\dfrac{19}{52}$　(4) $\dfrac{99}{100}$ より大きい

(415) (1) $\dfrac{3}{8}$　(2) $\dfrac{303}{4096}$

(416) (1) $\dfrac{5}{36}$　(2) $\dfrac{31}{216}$　(3) $\dfrac{31}{125}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(417) (1) ACBB, BCAA　(2) $F_2 = 1-p$, $F_3 = p^2$, $F_4 = \frac{1}{2}p(1-p)$

(3) $F_{3n} = p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}$　(4) $\dfrac{2p^2}{2-p+p^2}$

(418) (1) $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n$

(2) $a_n = \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{10}$, $c_n = \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{10}$

(419) (1) A : $\dfrac{4}{9}$, C : $\dfrac{5}{9}$　　(2) B : $\dfrac{13}{27}$, D : $\dfrac{14}{27}$

(3) n が偶数のとき A : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$, B : 0, C : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$, D : 0

n が奇数のとき A : 0, B : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, C : 0, D : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

(420) (1) 略　　(2) $\dfrac{\sqrt{5}\,x}{4\sqrt{2(2x^2-21x+72)}}$　　(3) 0.6

(421) (1) 略　　(2) 整数でない有理数となることはない

(422) $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(1-\log_3 2)$,　$b=2\log_3 2-\dfrac{3}{2}$

参考　データの分析

参考 データの分析

基本事項の確認

次の□をうめよ.

I. データの整理

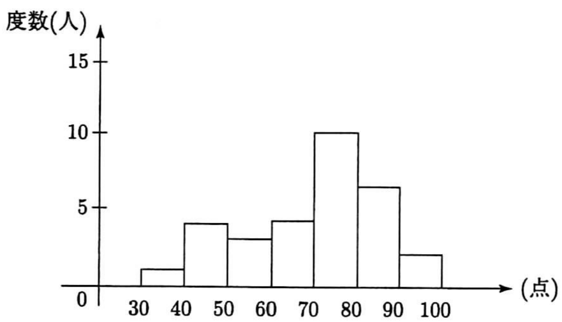
次のデータは，ある学校の 30 人の生徒のテストの結果である.

47	72	53	78	82	86	42	37	88	76	
50	66	72	68	92	95	69	76	76	57	
68	84	81	70	49	75	70	46	82	70	(点)

データを整理するときに，右の表のようにデータを同じ幅の区間に区切って分類することがある. 右の表は，上のデータを 10 点ごとの区間に分けて，それぞれの区間に含まれる人数を整理したものである. 各区間を ① といい，各区間を代表する値は ② という. ② には通常は ① の中央となる値が選ばれる. また，各区間に現れたデータの個数を ③ という. また，この表を**度数分布表**という.

① (点) 以上～未満	② (点)	③ (人)
30 ～ 40	35	1
40 ～ 50	45	4
50 ～ 60	55	3
60 ～ 70	65	4
70 ～ 80	75	10
80 ～ 90	85	6
90 ～ 100	95	2
合計		30

データの特徴をよりはっきりさせるために，度数分布表を ① の幅を底辺，③ を高さとしたグラフをかくと図のようになる. これを ④ という.



グラフを見ると，70 ～ 80 の階級にデータが集中しているといった，分布の偏りを視覚的にとらえることができる.

解答

① 階級　② 階級値　③ 度数　④ ヒストグラム

基本事項の確認

Ⅱ．代表値

データの特徴を１つの数値によってとらえることができる．そのような値を代表値という．

(i) データの値の総和をデータの総数で割ったものを $\boxed{\quad ① \quad}$ という．たとえば，データの値を x_1，x_2，x_3，……，x_n とすれば，このデータの $\boxed{\quad ① \quad}$ $\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n}{n}$$

となる．

(ii) n 個のデータを大きさの順に並べたとき，その中央にくる値を $\boxed{\quad ② \quad}$ という．$\boxed{\quad ② \quad}$ は，

n が奇数ならば小さい方から $\dfrac{n+1}{2}$ 番目の値

n が偶数ならば，$\dfrac{n}{2}$ 番目の値と $\dfrac{n}{2}+1$ 番目の値の平均

である．

(iii) データの中で最も多く現れている値を $\boxed{\quad ③ \quad}$ という．

解答

① 平均値　② 中央値 または メディアン（メジアン）　③ 最頻値 または モード

基本事項の確認

Ⅲ．四分位偏差と箱ひげ図

データの中の最大値と最小値の差を $\boxed{\text{①}}$ という．$\boxed{\text{①}}$ が大きいほどデータの散らばりが大きいと考えられる．

データを小から大へと順に並べ四等分するとき，3カ所の境界にくるデータの値を，$\boxed{\text{②}}$ と呼び，小さい方から $\boxed{\text{③}}$，$\boxed{\text{④}}$，$\boxed{\text{⑤}}$ といい，それぞれ Q_1，Q_2，Q_3 で表す．

Q_2 は中央値と一致する．したがって，その値の決め方も中央値を求める場合と同じであり，n 個のデータを大きさの順に並べたとき，

n が奇数ならば小さい方から $\dfrac{n+1}{2}$ 番目の値

n が偶数ならば，$\dfrac{n}{2}$ 番目の値と $\dfrac{n}{2}+1$ 番目の値の平均

である．

Q_1，Q_3 は次の手順で求める．

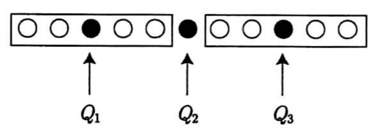
【データの個数が奇数の場合】

中央値となる値の左側のあるデータの中央値を Q_1，

右側のあるデータの中央値を Q_3

とする．

データが11個の場合

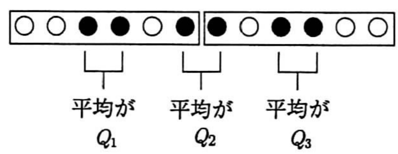


【データの個数が偶数の場合】

データを2つに分けたとき，並べたデータの左側の中央値を Q_1，右側の中央値を Q_3

とする．

データが12個の場合



例えば，あるクラス20人の小テストの結果を小さい順に並べると，

2 3 4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9

であるとき，Q_2 は全体の中央値 $\boxed{\text{⑥}}$，Q_1 は図の左側のデータの中央値 $\boxed{\text{⑦}}$，Q_3 は右側の中央値 $\boxed{\text{⑧}}$ となる．

Q_1 と Q_3 の差 Q_3-Q_1 を $\boxed{\text{⑨}}$ という．また，$\boxed{\text{⑨}}$ の半分 $\dfrac{Q_3-Q_1}{2}$ のことを $\boxed{\text{⑩}}$ という．

$\boxed{\text{⑨}}$，$\boxed{\text{⑩}}$ は，データの散らばりの度合いを表す尺度であり，これらの値が大きいほどデータの散らばりの度合いが大きいと考えることができる．

データの最大値，最小値，中央値，第1四分位数，第3四分位数を使ってデータを要約することを $\boxed{\text{⑪}}$ という．

⑪ を表すグラフを ⑫ という．

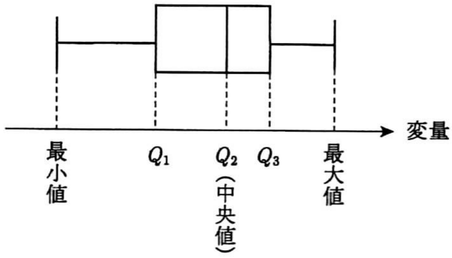
⑫ は，次の手順で作ることができる．

【手順】

1°．軸にデータの値（変量という）を目盛りにとる．

2°．第１四分位数 Q_1 を左端，第３四分位数 Q_3 を右端とする箱をかき，箱の中に中央値 (Q_2) を示す線をかく．

3°．箱の左端から最小値まで，箱の右端から最大値まで線分を引く．



例えば，次のデータは，10 人の生徒の通学時間（分）である．このデータをもとにかいた箱ひげ図は ⑬ となる．

30　32　24　42　33　45　43　28　38　40　（分）

解答

① 範囲またはレンジ　② 四分位数　③ 第１四分位数　④ 第２四分位数

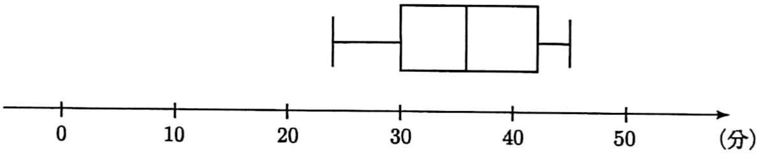
⑤ 第３四分位数　⑥ 6　⑦ 5　⑧ 7.5

⑨ 四分位範囲　⑩ 四分位偏差　⑪ 5 数要約　⑫ 箱ひげ図

⑬ データを大きさの順に並べると次のようになる．

24　28　30　32　33　38　40　42　43　45

第２四分位数 Q_2 (中央値) は $(33+38)\div 2=35.5$ であり，第１四分位数 Q_1 は，1 番目から 5 番目までのデータの中央値 30，第３四分位数 Q_3 は 6 番目から 10 番目までのデータの中央値 42 である．したがって，箱ひげ図は次のようになる．



基本事項の確認

Ⅳ. 分散と標準偏差

平均が等しい2つのデータがあっても，その変量の分布は同じとはいえない．変量 x についてのデータの値が x_1，x_2，x_3，……，x_n でその平均を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ x_3-\overline{x},\ \cdots\cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ平均 $\overline{x}$ からの $\boxed{\text{①}}$ という．

$\boxed{\text{①}}$ の平方の平均値

$$\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

を変量 x の $\boxed{\text{②}}$ という．

また，$\boxed{\text{②}}$ の正の平方根

$$\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}}$$

を変量 x の $\boxed{\text{③}}$ という．

一般に，$\boxed{\text{③}}$ を記号 s で表す．

$\boxed{\text{②}}$ と $\boxed{\text{③}}$ はデータの散らばりを表す数値であり，$\boxed{\text{③}}$ が小さいほど，そのデータの分布は平均値の付近に集中する傾向がある．

解 答

① 偏差　② 分散　③ 標準偏差

基本事項の確認

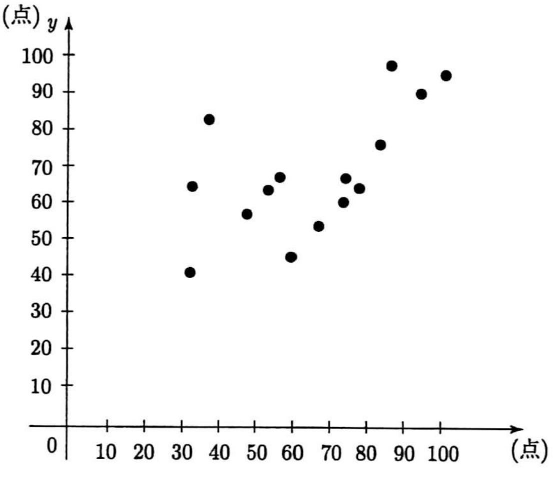
V．データの相関

2つの変量 x，y に関する n 組のデータ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$ が与えられたとき，これら n 個の点を平面上にプロットした図を $\boxed{\ ①\ }$ という．

たとえば，次のデータは，15人の学生の数学，英語のテストの結果である．

数学	75	72	65	32	52	82	98	54	48	84	32	58	74	38	92
英語	62	60	54	40	62	74	94	66	56	96	64	44	64	82	88

この表から，横軸に数学，縦軸に英語の点数をとって，各データをプロットすると次のようになる．



散布図によって，データの分布が読み取りやすくなる．上の図の場合，全体として右上がりにデータが分布している．数学の点数が高いと英語の点数も高いという傾向が読み取れる．

このように，組になったデータ同士に関係性が考えられるとき，その関係性を $\boxed{\ ②\ }$ という．2つの変量の間に，一方が増えると他方も増える傾向があるとき，2つの変量の間には $\boxed{\ ③\ }$ があるといい，一方が増えると他方が減る傾向があるとき，2つの変量の間には $\boxed{\ ④\ }$ があるという．また，どちらの傾向も見られない場合には $\boxed{\ ⑤\ }$ という．

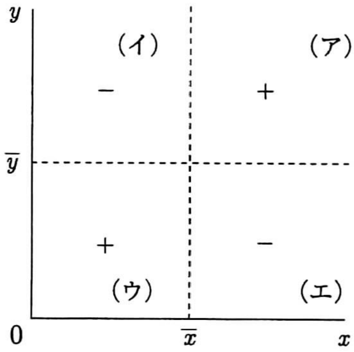
先程の数学と英語のテストの場合は，正の相関があると考えられる．

解答

① 散布図　② 相関　③ 正の相関　④ 負の相関　⑤ 相関がない

基本事項の確認

Ⅵ. 共分散と相関係数



"相関" を数値化する方法を考えよう.

2つの変量 x, y について, x に関する偏差と y に関する偏差の積 $(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$ をみると, 平均を中心とした4つの領域で, それぞれ右表のような符号をもつことになる.

ここで, 次のような量を考える.

$$\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$

これを2つの変量 x, y の $\boxed{\text{①}}$ といい s_{xy} で表す.

x, y に正の相関があるときは, 図の(ア), (ウ)に位置するデータが多く, s_{xy} の符号は $\boxed{\text{②}}$ になるはずである. 逆に負の相関があるときは, 図の(イ), (エ)に位置するデータが多く, s_{xy} の符号は $\boxed{\text{③}}$ になるはずである. また, 図の(ア) 〜 (エ)に均等に配置しているなら, s_{xy} の値は $\boxed{\text{④}}$ に近いことになる.

共分散の値は単位のとり方によって値が変わるので, 単位に関係ない値として共分散 s_{xy} を x の標準偏差 s_x と y の標準偏差 s_y で割った値 r を考える.

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$

この値 r を $\boxed{\text{⑤}}$ という. 一般に

$$-1\leqq r\leqq 1$$

が成り立つ.

解　答

① 共分散　② 正　③ 負　④ 0　⑤ 相関係数

【2022 年度大学入試共通テスト(本試験)　数学Ⅰ・数学 A　第 2 問〔2〕】

日本国外における日本語教育の状況を調べるために，独立行政法人国際交流基金では「海外日本語教育機関調査」を実施しており，各国における教育機関数，教員数，学習者数が調べられている．2018 年度において学習者数が 5000 人以上の国と地域（以下，国）は 29 か国であった．これら 29 か国について，2009 年度と 2018 年度のデータが得られている．

(1) 各国において，学習者数を教員数で割ることにより，国ごとの「教員 1 人あたりの学習者数」を算出することができる．図 1 と図 2 は，2009 年度および 2018 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである．これら二つのヒストグラムから，9 年間の変化に関して，後のことが読み取れる．なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない．

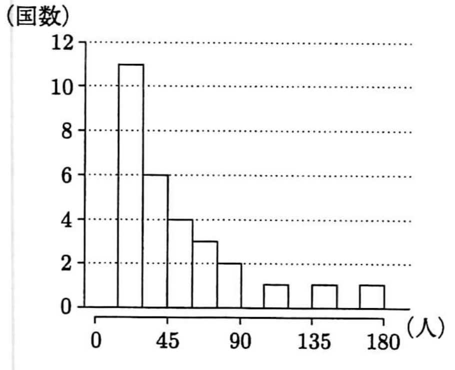


図 1　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

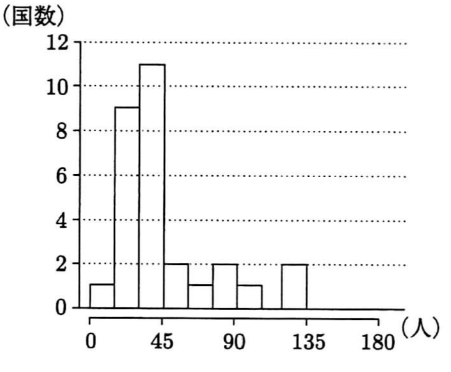


図 2　2018 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

- 2009 年度と 2018 年度の中央値が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{ケ}$.
- 2009 年度と 2018 年度の第 1 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{コ}$.
- 2009 年度と 2018 年度の第 3 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{サ}$.
- 2009 年度と 2018 年度の範囲を比較すると，$\boxed{シ}$.
- 2009 年度と 2018 年度の四分位範囲を比較すると，$\boxed{ス}$.

$\boxed{ケ}$ ～ $\boxed{ス}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい.）

⓪ 2018 年度の方が小さい

① 2018 年度の方が大きい

② 両者は等しい

③ これら二つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない

(2) 各国において，学習者数を教育機関数で割ることにより，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」も算出した．図 3 は，2009 年度における「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の箱ひげ図である．

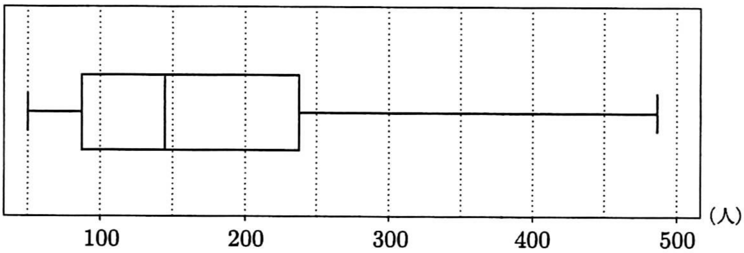


図 3　2009 年度における教育機関 1 機関あたりの学習者数の箱ひげ図

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

2009 年度について，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」（横軸）と「教員 1 人あたりの学習者数」（縦軸）の散布図は $\boxed{\text{セ}}$ である．ここで，2009 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである (1) の図 1 を，図 4 として再掲しておく．

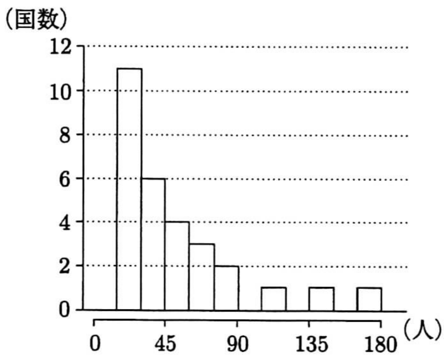
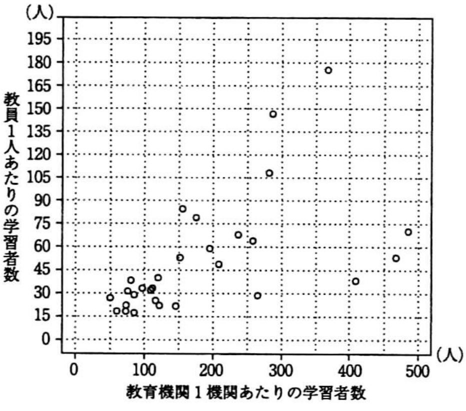


図 4　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

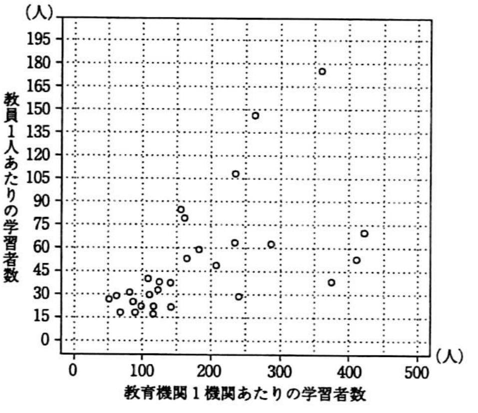
（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ．なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない．

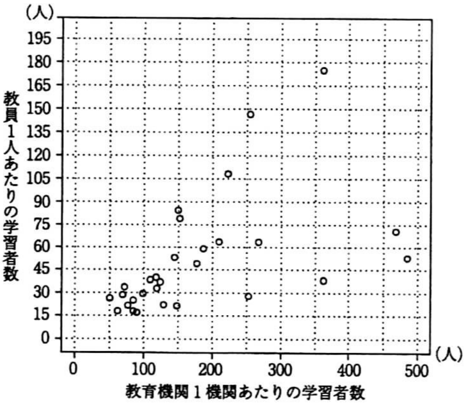
⓪



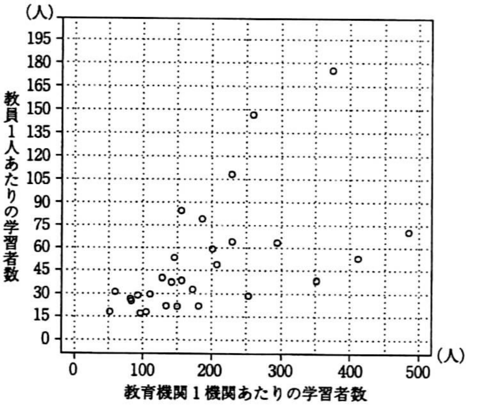
①



②



③



(3) 各国における 2018 年度の学習者数を 100 としたときの 2009 年度の学習者数 S，および，各国における 2018 年度の教員数を 100 としたときの 2009 年度の教員数 T を算出した．

例えば，学習者数について説明すると，ある国において，2009 年度が 44272 人，2018 年度が 174521 人であった場合，2009 年度の学習者数 S は

$\dfrac{44272}{174521} \times 100$ より 25.4 と算出される．

表 1 は S と T について，平均値，標準偏差および共分散を計算したものである．ただし，S と T の共分散は，S の偏差と T の偏差の積の平均値である．

表 1 の数値が四捨五入していない正確な値であるとして，S と T の相関係数を求めると $\boxed{\text{ソ}}$. $\boxed{\text{タチ}}$ である．

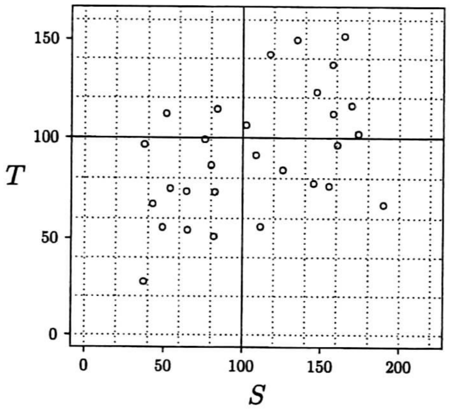
表 1　平均値，標準偏差および共分散

S の平均値	T の平均値	S の標準偏差	T の標準偏差	S と T の共分散
81.8	72.9	39.3	29.9	735.3

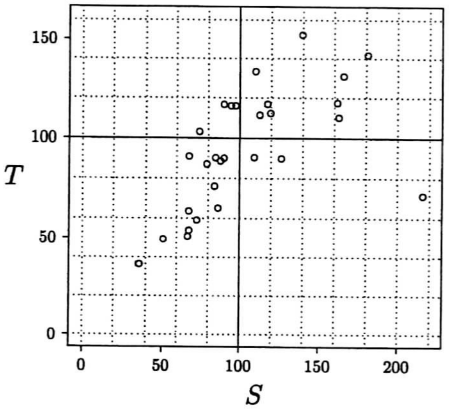
(4) 表 1 と (3) で求めた相関係数を参考にすると，(3) で算出した 2009 年度の S(横軸) と T(縦軸) の散布図は $\boxed{\text{ツ}}$ である．

$\boxed{\text{ツ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ．なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない．

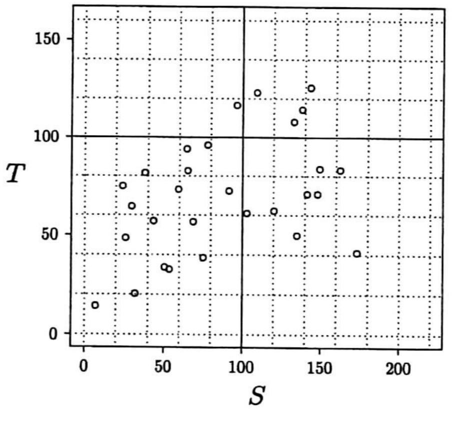
⓪



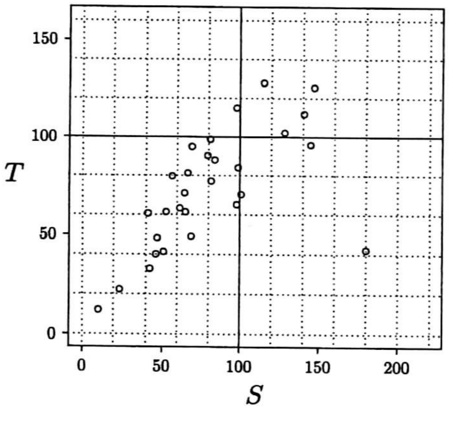
①



②



③



【解答】

ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ．タチ	ツ
②	②	⓪	⓪	③	②	⓪．⑥③	③

Class No

Name

R 20011